**Раздел 3. Элементы линейной алгебры**

**Лекция 5. Матрицы. Действия над матрицами. Детерминант (определитель) квадратной матрицы. Способы вычисления детерминанта матрицы.**

*Матрицей А* размера *m* х *n* называется прямоугольная таблица из *m* строк и *n* столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений  (называемых *элементами матрицы*)*, i* = 1,2,... *m*, *j* = 1,2,...,*n*.

Матрица *А* с элементами  обозначается также .

.

*Квадратной* матрицей *n*-го порядка называется матрица с размерами  
*n* х *n*.

*Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами ) равны нулю.

*Единичной* (обозначается *Е*) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

*Нулевой* называется матрица, все элементы корой равны нулю.

Над матрицами выполняют следующие *операции*: сложение, умножение матрицы на число, умножение, транспонирование.

*Суммой матриц*  и  одинакового размера называется матрица  того же размера, причем , .

*Свойства операции сложения матриц*:

Для любых матриц *А*, *В* и *С* одного размера выполняются равенства:

1)  (коммутативность);

2)  (ассоциативность).

*Произведением* матрицы  на число  называется матрица  того же размера, что и матрица *А*, причем , .

*Свойства операции умножения матрицы на число*:

1) (ассоциативность);

2)  (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3)  (дистрибутивность относительно сложения чисел).

*Линейной комбинацией матриц А* и *В* одинакового размера, называется выражение вида , где  и  — произвольные числа.

*Произведением*  матриц *А* и *В* (размеров *т* х *п* и *п* х *r* соответственно) называется матрица *С* размера *т* х *r*, такая, что

.

Таким образом, каждый элемент  находящийся в *i*-й строке и *j*-м столбце матрицы *С*, равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-й строки матрицы *А* и *j-*го столбца матрицы *В.*

*Свойства операции умножения матриц*:

1)  (ассоциативность);

2)  (дистрибутивность);

3)  (дистрибутивность);

4) вообще говоря,  — отсутствует коммутативность.

*Транспонированной* к матрице  называется матрица  такая, что ,  (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы *А*).

Элемент строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от куля,а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, есликрайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

*Элементарными преобразованиями* матриц называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов).

2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица *В*, полученная из матрицы *А* с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице *А* (обозначается ~).

Любой квадратной матрице *n*-го порядка  можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем* (*детерминантом*) матрицы *А* и обозначается , или , или det *А*, или .

*Дополнительным минором*  элемента  называется определитель -го порядка, полученный из определителя *n*-го порядка  вычеркиванием *i*-й строки и *j-*го столбца.

*Алгебраическое дополнение*  элемента  определяется равенством .

Определитель 2-го порядка задается равенством:

.

Определитель 3-го порядка задается равенством:

.

Определитель *n*-го порядка задается равенством:

.

Указанная сумма состоит из  слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение *n* сомножителей — элементов матрицы *А*, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «–».

*Методы вычисления определителей*:

1. *Правило* «*треугольников*» (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму со знаком «–», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:

«+»   , «–»   .

2. Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:

.

3. Разложение определителя *n*-го порядка по *i*-й строке:

.

4. Разложение определителя *n*-го порядка по *j*-му столбцу:

.

5. *Метод приведения к треугольному виду* заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

*Свойства определителей*

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.

6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Матрица, определитель которой равен 0, называется *вырожденной*; матрица, определитель которой не равен 0, называется *невырожденной.*

*Минором k-го порядка* произвольной матрицы *А* называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо *k* строк и *k* столбцов.

*Рангом матрицы* *А* называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: , .

*Базисным минором* называется любой из отличных от нуля миноров матрицы *А*, порядок которого равен .

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.