DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA –SÉRIE DE TALYOR

Departamento de Ciências e Tecnologias

Licenciatura: Engenharia Informática

Disciplina: Métodos Numéricos

Docentes: João Vela Bastos; Rui Neves

Realizado por: Bruno Saraiva 20160782

2018/2019

Índice

Introdução

Neste trabalho vou abordar a utilização da série de Taylor, para que serve, a sua história e a utilização de MACROS no Excel para calcular as suas estimativas através de um exemplo prático.

Utilizei a função sen(cos(x))+cos(sen(x) para calcular as derivadas até ordem 4 com h=0,01; xi= 4,99 e xi+1=5,00.

De forma a tornar este trabalho o mais completo possível utilizei o material proporcionado pelo professor bem como a internet de forma a conseguir implementar material valioso no trabalho.

Série de Taylor

História

O filósofo grego Zeno considerou o problema de somar uma série infinita para alcançar um resultado finito, mas rejeitou-o como uma impossibilidade sendo o resultado chamado de paradoxo de Zeno. Mais tarde, Aristóteles propôs uma resolução filosófica do paradoxo de Zeno, mas o conteúdo matemático aparentemente não foi resolvido até que foi retomado por Arquimedes. Foi através do método de exaustão de Arquimedes que um número infinito de subdivisões progressivas pôde ser realizado para alcançar um resultado finito.

No século XIV, os primeiros exemplos do uso de séries de Taylor e métodos relacionados foram dados por Madhava de Sangamagrama. Embora nenhum registo do seu trabalho tenha sobrevivido, alguns relatórios de matemáticos indianos posteriores, sugerem que Madhava encontrou um número de casos especiais da série de Taylor, incluindo aqueles para as funções trigonométricas de seno, cosseno, tangente e arctangente. A Escola de Astronomia e Matemática de Kerala expandiu ainda mais seus trabalhos com várias expansões de séries e aproximações racionais até o século XVI.

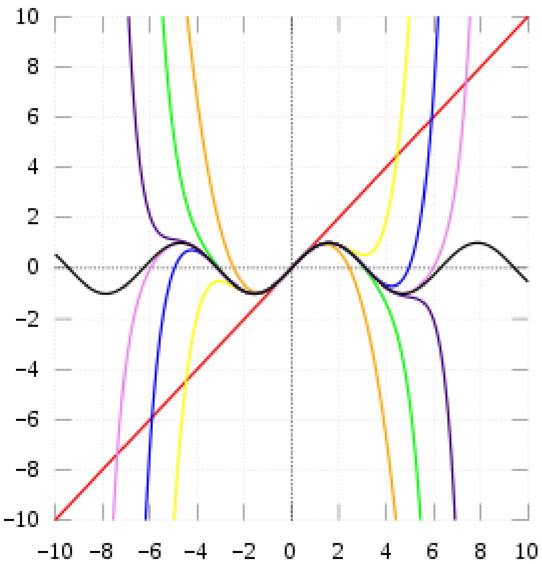
No século XVII, James Gregory também trabalhou nesta área e publicou várias séries de Maclaurin. A série Maclaurin foi nomeada em homenagem a Colin Maclaurin, professor em Edimburgo, que publicou o caso especial do resultado de Taylor no século XVIII.

Só em 1715 que um método geral para construir estas séries para todas as funções para as quais existem foi finalmente solucionado por Brook Taylor após o qual as séries são agora nomeadas de Séries de Taylor.

Série de Taylor

Definição e Utilização

O teorema de Taylor e a sua fórmula, é de grande valor no estudo dos métodos numéricos. Na sua essência, a série de Taylor constitui um meio de prever o valor de uma função num ponto, a partir do valor da função e das suas derivadas noutro ponto. O teorema afirma que uma função contínua pode ser aproximada a um polinómio.



À medida que o grau polinomial de Taylor sobe, este vai chegar aos níveis aproximados da função correta, foi utilizada a sen(x) e para as aproximações os graus 1,3,5,7,11 e 13.

Erros de truncatura são aqueles que resultam de utilizarmos uma aproximação em vez de um procedimento matemático exato. Introduzimos um erro de truncatura na solução numérica porque a equação das diferenças é apenas uma aproximação do verdadeiro valor da derivada. Afim de compreendermos as propriedades de tais erros vamos ver uma formulação matemática que é largamente utilizada nos métodos numéricos para expressar funções – séries de Taylor. Será construída a série de Taylor termo a termo, começando por o primeiro termo:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Esta relação, chamada de aproximação de ordem zero, indica que o valor de f(x) no novo ponto é o mesmo valor que no ponto anterior. Este resultado faz sentido se pensarmos que xi e xi+1 estão próximos. No caso da função ser uma constante, a equação do primeiro termo fornece uma estimativa perfeita. Mas se a função varia, serão necessários termos adicionais da série de Taylor. Observando a aproximação de primeira ordem:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

O termo adicional consiste no coeficiente angular (inclinação) f ‘(x) multiplicado pela distância entre xi e xi+1 . Assim a expressão está agora na forma de uma reta e é capaz de prever aumentos ou decréscimos da função entre xi e xi+1 . A equação só preverá um valor exato se a função for uma reta ou tiver tendência linear. Assim, vamos adicionar um termo de segunda ordem para captar alguma curvatura que a função possa apresentar:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Da mesma maneira poderemos incluir termos adicionais para desenvolvermos a série de Taylor na sua forma expandida:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

É muitas vezes conveniente simplificar a série de Taylor definindo um passo h = xi+1 – xi

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

Conforme já foi afirmado, as derivadas de menor ordem normalmente têm um maior peso no resto do que os termos de maior ordem.

Série de Taylor

Erros de Truncatura

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Concluímos que o erro da aproximação de 1ª ordem é proporcional à dimensão do passo. Se reduzirmos o passo a metade, o erro será reduzido a metade.

A série de Taylor pode também ser utilizada para estimar o valor das derivadas de ordem superior.

Temos controlo de h, e podemos escolher quão longe de x queremos avaliar f(x), e podemos controlar o número de termos a incluir na série.

Se o erro é O(h^2) reduzindo o passo a metade, o erro será reduzido a um quarto.

Em geral, podemos assumir que o erro de truncatura decresce com a adição de termos da série. Em muitos casos, se h é suficientemente pequeno, os termos de primeira ordem e outros têm um peso desproporcional na percentagem do erro, e assim só alguns termos são necessários para obter uma estimativa adequada.

Série de Taylor

Exemplo a Estudar no Excel

Para realizar o estudo de uma Série de Taylor utilizei a função que se encontra em baixo:

$$f(x) = sen(\cos(x)) + \cos(sen(x))$$

O estudo consistiu em calcular o menor erro relativo possível utilizando as fórmulas da Série de Taylor de alta precisam de ordem 4.

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}.$$

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-f(x+3h)+8f(x+2h)-13f(x+h)+13f(x-h)-8f(x-2h)+f(x-3h)}{8h^3}$$

$$f^{(4)}((x) = \frac{-f(x+3h)+12f(x+2h)-39f(x+h)+56f(x)-39f(x-h)+12f(x-2h)-f(x-3h)}{6h^4}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

O ponto para calcular a estimativa na função foi xi= 4,99 tendo um passo de 0,01 pois para xi+1= 5,00 e sabemos que h1 =xi+1 - xi = 5,00-4,99 onde h1 = h e que h1= 0,01 que é o passo.

h =	1,59	Variação Incremental
h1 $=x_{i+1} - x_i =$	0,01	Passo
$x_i =$	4,99	
$x_{i+1} =$	5,00	-0,294527528
		Valor Verdadeiro

O segundo passo foi utilizar as propriedades dos MACROS implementado um CommandButton1_Click no Excel de forma a calcular todas as aproximações usando as funções de alta precisão até a 4ª ordem, sendo possível a implementação das mesmas em VBA. Obtendo assim os valores aproximados do ponto em cada ordem.

$$f(x) = sen(\cos(x)) + \cos(sen(x))$$

Calcular

```
Function PrimeiraDerivada(x As Double, h As Double) As Double 'Primeira Derivada
    PrimeiraDerivada = (-Funcao(x + 2 * h) + 8 * Funcao(x + h) _
        - 8 * Funcao(x - h) + Funcao(x - 2 * h)) / (12 * h)
End Function
Function SegundaDerivada(x As Double, h As Double) As Double 'Segunda Derivada
    SegundaDerivada = (-Funcao(x + 2 * h) + 16 * Funcao(x + h) _
            - 30 * Funcao(x) + 16 * Funcao(x - h) _
            - Funcao(x - 2 * h)) / (12 * h ^ 2)
End Function
Function TerceiraDerivada(x As Double, h As Double) As Double 'Terceira Derivada
    TerceiraDerivada = (-Funcao(x + 3 * h) + 8 * Funcao(x + 2 * h) _
        - 13 * Funcao(x + h) + 13 * Funcao(x - h) _
        - 8 * Funcao(x - 2 * h) + Funcao(x - 3 * h)) / (8 * h ^ 3)
End Function
Function QuartaDerivada(x As Double, h As Double) As Double  'Quarta Derivada
    QuartaDerivada = (-Funcao(x + 3 * h) + 12 * Funcao(x + 2 * h) _
        - 39 * Funcao(x + h) + 56 * Funcao(x) - 39 * Funcao(x - h) _
            + 12 * Funcao(x - 2 * h) - Funcao(x - 3 * h)) / (6 * h ^ 4)
End Function
```

Cálculo das Derivadas (aproximado)	
Derivada de Ordem Um	0,6965015
Derivada de Ordem Dois	-0,6647688
Derivada de Ordem Tres	-0,6390371
Derivada de Ordem Quatro	1,0457964

Terceiro passo foi aplicar o truncamento para calcular as derivadas no ponto em cada ordem respetiva, em ordem 0, ordem 1, ordem 2 e ordem 3 e ordem 4.

```
Function AproxOrdZero(x As Double) As Double 'Valor do ponto na função derivada em ordem a 0
    AproxOrdZero = Funcao(x)
End Function
Function AproxOrdUm(x As Double, h As Double) As Double 'Valor do ponto na função derivada em ordem a 1
    AproxOrdUm = AproxOrdZero(x) + PrimeiraDerivada(x, h) * h1
End Function
Function AproxOrdDois(x As Double, h As Double) As Double 'Valor do ponto na função derivada em ordem a 2
    AproxOrdDois = AproxOrdUm(x, h) + SegundaDerivada(x, h) / Application.Fact(2) * h1 ^ 2
End Function
Function AproxOrdTres(x As Double, h As Double) As Double 'Valor do ponto na função derivada em ordem a 3
    AproxOrdTres = AproxOrdDois(x, h) + TerceiraDerivada(x, h) / Application.Fact(3) * h1 ^ 3
End Function
Function AproxOrdQuatro(x As Double, h As Double) As Double 'Valor do ponto na função derivada em ordem a 4
    AproxOrdQuatro = AproxOrdTres(x, h) + QuartaDerivada(x, h) / Application.Fact(4) * h1 ^ 4
End Function
```

Aproximação pela Série de Taylor	
Aproximação de Ordem Zero	-0,301475
Aproximação de Ordem Um	-0,294510
Aproximação de Ordem Dois	-0,294543
Aproximação de Ordem Tres	-0,294543
Aproximação de Ordem Quatro	-0,294543

Para chegar ao valor esperado de erro escolhi o melhor ponto xi bem como a variação incremental de forma a chegar a um erro de 0,005% com o auxílio das funções da alta precisão de ordem até 4. Concluindo assim que o valor na derivada de 4ª ordem é aproximadamente o mesmo com um erro de 0,005% de ser igual ao mesmo valor na derivada de ordem 0.

Erro Relativo Verdadeiro
0,005%

$$\varepsilon_t = \left| \frac{x_t - x}{x_t} \right| * 100\%$$

Para este cálculo pega-se no valor aproximado da série de Taylor na 4ª ordem que é o nosso x e pega-se no valor verdadeiro que é o valor substituído na função hi+x, sendo assim possível o cálculo do erro substituindo em εt os valores de xt pelo valor verdadeiro que é f(hi+x) e o valor de x que é o nosso valor na aproximação de 4ªa ordem.

Conclusão

Com este trabalho foi possível compreender melhor o funcionamento da Série de Taylor e a sua utilização para o cálculo de valores aproximados de uma função até ordem 4, permitindo assim calcular com grande exatidão os valores das derivadas no mesmo ponto.

A maior dificuldade neste trabalho foi a utilização de VBA e a implementação de um MACRO, tendo assim que recorrer a vários tutoriais de forma a entender como implementar um. A utilização de MACROS e código VBA serviu para facilitar o cálculo das aproximações utilizando as fórmulas de alta precisão bastando só editar a função e os valores de xi, e de xi+1 para obter h. Também comentei o código de forma a entender os comandos utilizados.

Bibliografia & Netgrafia

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#cite_note-2

https://en.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

Lindberg, David (2007). *The Beginnings of Western Science* (2nd ed.). University of Chicago Press. p. 33. ISBN 978-0-226-48205-7.

*Taylor, Brook (1715). Methodus Incrementorum Directa et Inversa [Direct and Reverse Methods of Incrementation] (in Latin). London. p. 21–23 (Prop. VII, Thm. 3, Cor. 2).*Translated into English in *Struik, D. J. (1969). A Source Book in Mathematics 1200–1800. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. pp. 329–332.*

"Neither Newton nor Leibniz – The Pre-History of Calculus and Celestial Mechanics in Medieval Kerala" (PDF). *MAT 314*. Canisius College. Archived (PDF) from the original on 2015-02-23. Retrieved 2006-07-09.

S. G. Dani (2012). "Ancient Indian Mathematics – A Conspectus". *Resonance*. **17** (3): 236–246. doi:10.1007/s12045-012-0022-y.