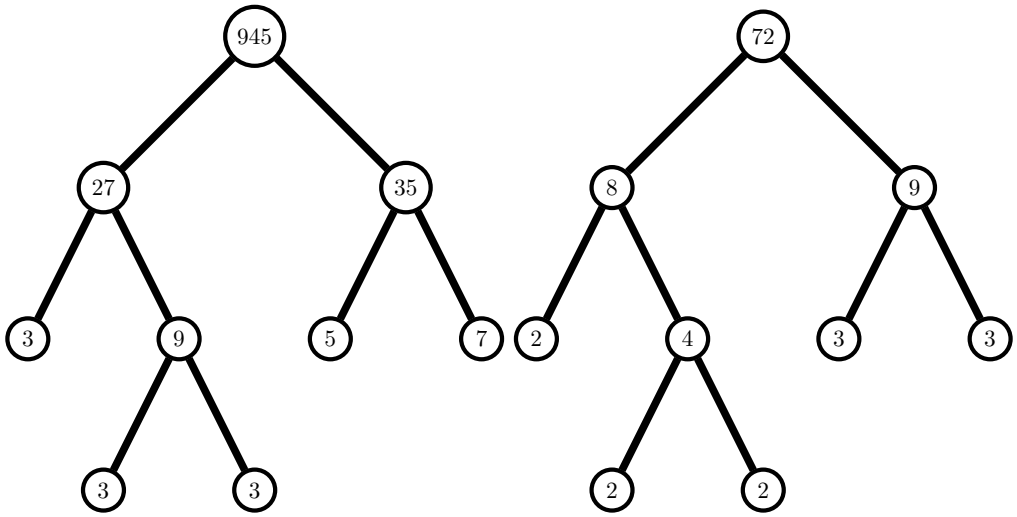
Technische Universität Berlin **SoSe 2024**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6–2, Dorothea Kiefer-Hoeft
Prof. Dr. Max Klimm
Dr. Tobias Hofmann, Martin Knaack, Marcel Wack

6. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 07.06.2024 über den Comajudge bis 17:00 Uhr



Der Zerlegungsbaum vom 945 und 72.

Zerlegungsbaum

Definition
Ein *Zerlegungsbaum* $T(n)$ einer Zahl n ist ein binärer Baum, der rekursiv definiert ist durch

1. Eine Primzahl ist ein Zerlegungsbaum mit einem Blatt.
2. Für $n > 0$ wird der Zerlegungsbaum durch die linken und rechten Teilgraphen $T(a)$, $T(b)$ definiert. Dabei sind $a, b \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n = ab$ mit $a \leq b$ und $b - a$ minimal.

Zwei Zahlen haben die gleiche *Zerlegungsstruktur*, wenn sie die gleiche Baumstruktur haben. Zum Beispiel haben die Zahlen 945 und 72 die gleiche Zerlegungsstruktur.

Implementieren Sie die Definition in Julia. Schreiben Sie dazu einen Typ `FactorTree` mit folgenden Eigenschaften

- `value::Int`: Die zu Faktorisierende Zahl.
- `left::Union{Int,FactorTree}`: Der linke Teilgraph.
- `right::Union{Int,FactorTree}`: Der rechte Teilgraph

Zusätzlich benötigen Sie einen (inneren) Konstruktor `FactorTree(v::Int)::FactorTree` für diesen Typ.

FactorTree
Implementieren Sie die folgenden Funktionen für die Datenstruktur `FactorTree`

`getFactors(t::FactorTree)::Dict{Int, Int}`: Gibt die Primfaktorzerlegung der Wurzel des Zerlegungsbaums als `Dictionary` zurück, wobei ein `key` des Dictionarys die Primzahl und der `value` der Exponent der Primzahl ist.

```
t = FactorTree(20);
getFactors(t)
>Dict{Int64, Int64} with 2 entries:
>  5 => 1
>  2 => 2
```

`getShape(t::FactorTree)::String`: Gibt die Struktur des Zerlegungsbaums in Form eines Strings zurück. Die Kodierung ist frei wählbar. Ein Beispiel für 20 wäre `"f(p2|p)"`, was den Baumstruktur vollständig als Produkt `f(*|*)` eines Primzahlprodukts `p2` und einer weiteren Primzahl `p` beschreibt.

```
getShape(t)
> "f(p2|p)"
```

`compareShape(t::FactorTree, h::FactorTree)::Boolean`: Gibt an, ob zwei Zerlegungsbäume die gleiche Struktur haben oder nicht.

```
t2 = FactorTree(945);
t3 = FactorTree(72);
compareShape(t2, t3)
> true
```

`computeShapes(n::Int)::Dict{String, Vector{Int}}`: Liefert ein `Dictionary` aller Zerlegungsstrukturen von Zahlen kleiner als eine positive ganze Zahl n. Die `keys` sind dabei die Kodierung einer Zerlegungsstruktur und die `values` ein Vektor von ganzen Zahlen mit genau dieser Zerlegungsstruktur.

```
computeShapes(10);
>Dict{String, Vector{Int64}} with 3 entries:
>  "p2"      => [4, 6, 9, 10]
>  "f(p|p2)" => [8]
>  "p"       => [1, 2, 3, 5, 7]
```