Introducão aos Códigos Binários

Augusto Silva, Iouliia Sklyarova

Departamento de Electrónica,Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

Conceito de Código Binário

- Código – conjunto de sequências de *n* bits, em que cada sequência representa um determinado valor, evento, acção, mensagem, etc
- Palavra do código – uma dada sequência de *n* bit
- *n* – comprimento do código
- m – número de valores a codificar

$$n \geq \lceil log_2(m) \rceil$$

Exemplo

- Várias estratégias possíveis desde

$$n \geq \lceil log_2(7) \rceil = 3$$

andar	codificação	codificação	codificação
cave	000	000	000001
r/c	001	001	000010
1º andar	010	011	000100
2º andar	011	010	001000
3º andar	100	110	010000
4º andar	101	111	100000

Códigos Binary Coded Decimal (BCD)

- Representação alternativa de quantidades
- Cada algarismo decimal está associado a uma palavra de código
- Usam-se as primeiras 10 palavras da representação em código binário natural das quantidades 0,1,2,...,9
- Comprimento da palavra L é o menor inteiro que satisfaz

$$L \geq \log_2 N$$

$$N = 10$$

$$L = 4 \text{ bits}$$

BCD 8421

- Propriedades
  - *Código regular*: comprimento de palavra é fixo = 4
  - *Código ponderado*: cada uma das palavras resulta duma elaboração analítica da forma

$$x = \sum_{i=0}^{3} a_i w_i \quad w_i = 2^i, \quad a_i \in \{0,1\}$$

  - *Código descontínuo*: palavras consecutivas diferem em mais de um dígito ("bit")
  - *Não autocomplementar*: existem palavras para as quais é violada a condição de autocomplementaridade i.e

$$x = (a_3 a_2 a_1 a_0), \quad (9 - x) \neq (\bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0)$$

  - *Código não cíclico*: 1ª e última palavra não são adjacentes

	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

BCD 8421

- Propriedades
  - Não distingue palavras abaixo e acima de 5 com o "msb"
  - Distância entre 2 palavras de código ou distância de Hamming
    - nº de posições que diferentes entre duas palavras adjacentes. Neste caso d_{min} = 1
  - Redundância R:
    - Sendo N o número de palavras do código e L o comprimento de palavra

$$R = \frac{L - \log_2 N}{L}$$

$$R_{BCD8421} = \frac{4 - \log_2 10}{4} = 0.17$$

	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Outros Códigos BCD

- Exercícios:
- Gere códigos BCD ponderados correspondentes aos seguintes conjuntos de pesos
  - 5 2 1 1
  - 6 4 2 -3
  - 5 0 4 3 2 1 0

Códigos BCD autocomplementares

- Num código decimal binário autocomplementar ponderado o somatório dos seus pesos deverá ser 9
- Dem:
  - Sejam N_1 e N_2 duas palavras complementares dum código decimal binário ponderado de comprimento n tal que

$$N_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_i \quad a_i \in \{0,1\}$$

$$N_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i w_i$$

  - Se o código BCD é autocomplementar então

$$9 - N_1 = N_2 \therefore N_1 + N_2 = 9 \therefore \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + \bar{a}_i) w_i \therefore \sum_{i=0}^{n-1} w_i = 9$$

Exemplos

	5	2	1	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

	4	2	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	1	0	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

	6	4	2	-3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	1	0	0
5	1	0	1	1
6	1	0	0	0
7	1	1	0	1
8	1	0	1	0
9	1	1	1	1

	8	7	-4	-2
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	0
4	1	0	1	0
5	0	1	0	1
6	1	0	0	0
7	0	1	0	0
8	1	0	0	0
9	1	1	1	1

- Nota:
  - A partir por ex., do esquema de pesos 5211, é possível elaborar um código ponderado cujo somatório dos pesos é 9 mas que não seja autocomplementar

Outros códigos autocomplementares

algarismo decimal	2421 (AIKEN)	Excess-3 (XS3)	1-out-of-10
0	0000	0011	0000000001
1	0001	0100	0000000010
2	0010	0101	0000000100
3	0011	0110	0000001000
4	0100	0111	0000010000
5	1011	1000	0000100000
6	1100	1001	0001000000
7	1101	1010	0010000000
8	1110	1011	0100000000
9	1111	1100	1000000000

Códigos Gray

- Regular
- Contínuo
- Reflectido
- Cíclico
- Não ponderado
- Tem relação com código binário natural

Código de Gray 4 Bits

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	0

Códigos Gray

- Tabelas reflectidas

Gray 2 Bits

0	0
0	1
1	1
1	0

Gray 3 Bits

0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Gray 4 Bits

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	0

Relações Código Binário – Código Gray

- Binary2Gray
  - Adicionar à palavra do código binário um bit à esquerda e atribuir-lhe o valor '0'.
  - Numerar todos os bits do código binário da direita para a esquerda.
  - Atribuir valor '1' ao bit *i* do código de Gray se os bits *i* e *i*+1 da palavra binária são diferentes.
  - Atribuir valor '0' ao bit *i* do código de Gray se os bits *i* e *i*+1 da palavra binária são iguais
- Exercício
  - Converta para Gray 1111, 1000

Relações Código Binário – Código Gray

- Gray2Binary
  - Numerar todos os bits do código de Gray da esquerda para a direita.
  - Atribuir o valor do bit 1 do código de Gray ao bit 1 do código binário.
  - Bit *i* (*i*=2,3,…,*n*) do código binário é igual à soma exclusiva (XOR) do bit *i*-1 do código binário e do bit *i* do código de Gray.
- Exercício
  - Converta para Binário 1000, 1100

Códigos Alfanuméricos

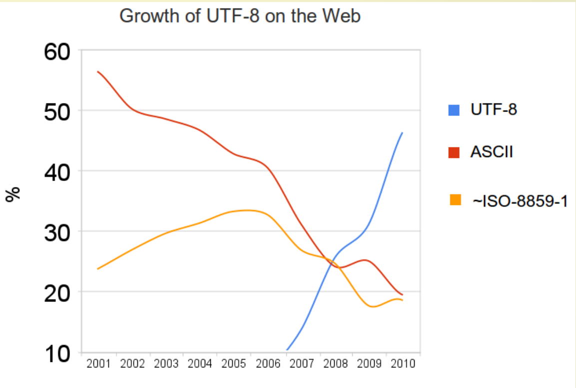
- *ASCII – American Standard Code for Information Interchange*

Table 2-11 American Standard Code for Information Interchange (ASCII), Standard No. X3.4-1968 of the American National Standards Institute.

		$b_6b_5b_4$ (column)							
$b_3b_2b_1b_0$	Row (hex)	000 0	001 1	010 2	011 3	100 4	101 5	110 6	111 7
0000	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	‘	p
0001	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB	’	7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Códigos Alfanuméricos

- Outros códigos
  - UTF8, ISO-8859-1



Erros em Sistemas Digitais

- Um erro em sistemas digitais é a corrupção de dados do valor correto para um valor diferente. Erros podem ocorrer tanto em sistemas de **transmissão** de informação digital (ruído) como em sistemas de **armazenamento** (memória, discos rígidos).
- Erro singular – só um bit de dados é corrompido
- Erros múltiplos – 2 ou mais bits de dados são corrompidos
- Erros múltiplos são normalmente menos prováveis que erros singulares

Detecção de Erros

- Um código permite deteção de erros se a corrupção de uma palavra resulta numa nova palavra que não faz parte do código.
- Um sistema que permite deteção de erros só gera, transmite e guarda palavras de código válidas.
  - Se uma sequência de bits é uma palavra válida de código, é assumido que está correta.
  - Se uma sequência de bits é uma palavra não válida de código, é assumido que está errada.

Códigos de Paridade

- É possível detetar todos os erros singulares se a distância mínima entre todas os possíveis pares de palavras de código ≥ 2
- Para construir um código de 2^n palavras que deteta erros singulares são precisos pelo menos n+1 bits
- Exercício
  - Modifique o código BCD8421 de modo que se tenha paridade ímpar

Detecção e correcção de erros

- Distância de Hamming

1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0

Distância de Hamming = 4

- Conceito de Distância de Hamming (DH) é fundamental
  - M: distância de Hamming mínima (DH_{min})
  - D: nº de erros detectáveis
  - C: nº de erros corrigíveis

$$M = 2C + D + 1$$

Exemplos

D = 1, *C* = 0, *M* = 2

Bit de paridade

	P	8	4	2	1
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1
2	1	0	0	1	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
7	1	0	1	1	1
8	1	1	0	0	0
9	0	1	0	0	1

Códigos *m* de *n*

	2 em 5				
	0	1	2	4	7
0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	0	0	1
8	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	1

"Quase" ponderado

1 em 2 + 1 em 5

	Biquinário						
	5	0	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0

Ponderado

Códigos de Hamming

- Detecção e correcção de erros
  - *m* bits de informação são entrelaçados com *p* bits de paridade colocados em posições chave na palavra de código composta
  - Sendo *m* o nº de bits de informação então *p* deverá ser o menor inteiro tal que

$$2^p >= m + p + 1$$

  - Os bits de paridade são colocados nas posições 1, 2, 4, 8, 16,..., da palavra codificada. Os bits de informação são colocados nas posições "vagas" 3, 5, 6, 7, 9, 10,...
  - O valor de cada bit de paridade depende especificamente de alguns bits de informação. Um bit de paridade verifica as posições, incluindo a própria, contendo um "1" no mesmo local da sua representação

Exemplo: Correcção de 1 erro

- 4 bits de informação
  - p >= $\log_2(m + p + 1)$
  - p = 3

Tabela de dependências

P1	P2	M3	P4	M5	M6	M7
			X	X	X	X
	X	X			X	X
X		X		X		X

Codificação dos bits de paridade

$$P_1 = M_3 \oplus M_5 \oplus M_7$$
$$P_2 = M_3 \oplus M_6 \oplus M_7$$
$$P_4 = M_5 \oplus M_6 \oplus M_7$$

Na descodificação calculam-se os sindromas

$$S_0 = P_1 \oplus M_3 \oplus M_5 \oplus M_7$$
$$S_1 = P_2 \oplus M_3 \oplus M_6 \oplus M_7$$
$$S_2 = P_4 \oplus M_5 \oplus M_6 \oplus M_7$$

Exemplo

palavra emitida 1 1 1 0 0 0 0

palavra recebida 1 1 0 0 0 0 0

$$S_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$
$$S_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$
$$S_2 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

erro na posição 3