Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 2

14 de janeiro de 2016 — Duração: **1h45**

Valores

Nome ______________________ N.º Mec. ____________

Curso ______________________ N.º Folhas suplementares ____________

Questão	1	2	3	4	5	total
Cotação	45	10	65	65	15	200
Classif.						

1. Esta primeira questão é constituída por 5 alíneas de escolha múltipla.

Atribuem-se 9 pontos por cada resposta correta,
0 pontos por cada resposta em branco e
-3 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5
0	00	09	18	27	36	45
1	-03	06	15	24	33	
2	-06	03	12	21		
3	-09	00	09			
4	-12	-03				
5	-15					

(Reservado à cotação)

Cada alínea tem uma só opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

(a) Considere espaços vetoriais reais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, $\dim \mathcal{V} \neq \dim \mathcal{W}$, e a aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, não sobrejetiva.

- ☐ Se $X \in \mathcal{V}$, então $\phi(-X) = \phi(X)$.
- ☐ Se $X, Y \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\phi(\alpha X + Y) = \alpha\phi(X) + \phi(Y)$
- ☐ $\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{W}$
- ☐ Para todo $Y \in \mathcal{W}$, existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $\phi(X) = Y$.

(b) Considere a aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^4$.

- ☐ Se $\dim \operatorname{im}(\phi) = 2$ e ϕ é injetiva, então $\dim \mathcal{V} = 4$.
- ☐ Se $\dim \operatorname{im}(\phi) = 2$ e ϕ é injetiva, então $\dim \mathcal{V} = 6$.
- ☐ Se $\dim \ker(\phi) = 2$ e ϕ é sobrejetiva, então $\dim \mathcal{V} = 6$.
- ☐ Se ϕ é injetiva e sobrejetiva, então $\dim \mathcal{V} = 6$.

(c) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- ☐ Os valores próprios de A são 1 e 3.
- ☐ O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é subespaço próprio de A.
- ☐ O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio 3 é $< (1, 0, 2), (0, 1, 0) >$.
- ☐ O valor 1 é valor próprio de A de multiplicidade 2.

(d) Considere $\mathcal{S} = \big((1, 2), (0, 1)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((1, 1), (2, 3)\big)$, duas bases de $\mathbb{R}^2$, e o vetor $X = (1, 5)$.

- ☐ A matriz de mudança de base da base $\mathcal{S}$ para a base $\mathcal{T}$ é $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.
- ☐ A matriz de mudança de base da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $[X]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

(e) Considere o plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $X_1 = (1, 1, 0)$ e $X_2 = (0, 0, 1)$.

- ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (2, 2, 1)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(2, 1)$.
- ☐ Uma base ortonormada de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$.
- ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (2, 2, 1)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(4, 4, 1)$.
- ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (2, 2, 1)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(2, 2, 1)$.

Nos exercícios 2, 3 e 4 seguintes considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é uma forma escalonada por linhas da matriz A.

2. Considere a matriz $\mathbf{B}$. Justifique que 0 é valor próprio da matriz $\mathbf{B}$.

3. Considere a matriz $\mathbf{A}$. Os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são -2, -1 e 0.

   (a) Justifique que a matriz A é diagonalizável.

   (b) Indique o conjunto de **vetores próprios** associados ao valor próprio -2:

   (c) Indique **o subespaço próprio** associado ao valor próprio -1:

   (d) Justifique que $\mathcal{N}(A)$ é subespaço próprio de A.

   (e) Determine a matriz D diagonal e a matriz P diagonalizante de A tais que $P^{-1}AP = D$:

$$D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

4. Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(X) = AX$ para todos os $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a imagem de ϕ, $\mathrm{im}(\phi)$, e uma sua base.

   (b) ϕ é sobrejetiva? Justifique.

   (c) Determine o núcleo de ϕ, $\ker(\phi)$, e uma sua base.

   (d) ϕ é injetiva? Justifique.

   (e) Encontre a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ e $\mathcal{C}$, canónica de $\mathbb{R}^3$.

(f) Usando a matriz G (obtida na alínea anterior), calcule $\phi(2,0,0)$. NOTA: Se não determinou a matriz G na alínea (4e), e apenas nesse caso, suponha que G, a matriz representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$, é uma matriz com todos os seus elementos iguais a 2. **Caso use esta matriz, a sua classificação à alínea** (4e) **será de 0**.

---

5. Identifique, escrevendo A, B e C na caixa correspondente, os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

   A : $x^2+y^2=4x+6y+z$ em $\mathbb{R}^3$; B : $x^2+2x=2y^2+4y+z^2$ em $\mathbb{R}^3$; C : $x^2+y^2+z^2=2x+3$ em $\mathbb{R}^3$.

   ☐ elipse ☐ hipérbole ☐ parábola ☐ cónica degenerada ☐ quádrica degenerada

   ☐ elipsóide hipérbolóide de ☐ 1 ou ☐ 2 folhas parabolóide ☐ elíptico ou ☐ hiperbólico