



Soluções da Ficha de Exercícios 1

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $\frac{5}{12}$; (f) $-\frac{7}{25}$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{\pi}{4}$; (i) 0.
2. (a) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $f^{-1}(y) = \arcsen(2y) - \frac{\pi}{2}$;
 (b) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [0, 2]$; $f^{-1}(y) = 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$;
 (c) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$; $f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\arctg y}$;
 (d) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-1, 1]$; $f^{-1}(y) = \sen(\ln y)$;
 (e) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [0, 1]$; $f^{-1}(y) = \sen^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$;
 (f) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-4, -3]$; $f^{-1}(y) = \cos^2\left(\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}\right) - 4$;
 (g) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [1, 3]$; $f^{-1}(y) = 2 + \cos\left(\frac{1}{y} - \pi\right)$;
 (h) $\mathcal{D}_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = 2\text{tg}\left(\frac{\pi-y}{3}\right) + 1$;
 (i) $\mathcal{D}_{f^{-1}} =]0, \pi[$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} =]-1, +\infty[$; $f^{-1}(y) = e^{\cotg y} - 1$.
3. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$.
4. $(f^{-1})'(2) = 1$.
5. (a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
 (b) 1.
6. (a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$; (b) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
 (c) $f'(x) = \frac{1}{1-\sen x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (d) $f'(x) = 2xe^{x^2}(1+x^2)$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$;
 (e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, $\mathcal{D}_{f'} =]0, 1[$;
 (f) $f'(x) = 3^{\text{tg} x} \ln 3 \sec^2 x$, $\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
 (g) $f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \sec x \csc x$, $\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
 (h) $f'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x-1}-\sqrt{x^5})}{2(\sqrt{x-1})^2} e^{\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; (i) $f'(x) = \frac{-2\sen(\log_2(x^2))}{x \ln 2}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 (j) $f'(x) = \frac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^+$; (k) $f'(x) = 2x \arctg x + 1$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$;
 (l) $f'(x) = \frac{2x^3-2+\ln(x^2)}{x^2}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
7. (a) $\frac{-12x^2 \cos(4x^3)}{1+\sen^2(4x^3)}$;
 (b) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5-x}$;
 (c) $\frac{e^x}{\sqrt{2e^x-e^{2x}}}$;
 (d) $\frac{1}{x(2+\ln^2 x+\ln(x^2))}$.

8. (a) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$;
 (b) $(f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$;
 (c) $(f^{-1})'(y) = \frac{-\sqrt{y+1}}{2\sqrt{y}(1+y)^2}$;
 (d) $(f^{-1})'(y) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}} & \text{se } y > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}} & \text{se } y < 0 \end{cases}$.
9. —
10. f tem um zero em $]0, 1[$, um em $]1, 2[$ e outro em $] - 1, 0[$.
11. —
12. —
13. (a) Sugestão: Considere a função $f(x) = \arcsen x - x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada;
 (b) —
 (c) —
14. —
15. —
16. —
17. (a) $D_f = [0, 2]$.
 (b) —
 (c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in]0, 2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
 (d) $CD_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
18. h é estritamente decrescente em $] - \infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$. A função h tem um mínimo em $x = 2$ cujo valor é 0
19. (a) $\mathcal{D}_g = [0, 2]$
 (b) —
 (c) g é estr. decrescente em $]0, 1[$ e estr. crescente em $]1, 2[$
 g tem um mínimo em $x = 1$ cujo valor é 0
 (d) Não, pois não é injetiva
20. (a) $\ln 3$; (b) $1/9$; (c) não existe; (d) $2/3$; (e) $-1/2$; (f) -1 ; (g) 0; (h) 1; (i) 1; (j) 1; (k) 1; (l) e ; (m) e^{-2} ; (n) 0; (o) 1; (p) e^4 ; (q) $1/2$.
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sen x}{x + \sen x} = 1$.
22. (a) $g'(0) = 0$
 (b) —

23. —

24. (a) $\mathcal{D}_g =]0, 1[$.

(b) $x = 1$ é a única assíntota vertical.

25. (a) A função f não é contínua em $x = 1$.

(b) -2

26. (a) f é contínua em $x = 0$

(b) —

(c) e

27. —

28. (a) f é contínua em $x = 0$.

(b) f não é diferenciável em $x = 0$.

(c) f tem mínimo local em $x = 0$.

(d) —

(e) —

(f) $g^{-1} : [0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{\operatorname{tg} x}, \quad CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$.

29. (a) O limite lateral à esquerda de f na origem é igual a $-\infty$. O limite lateral à direita de f na origem é zero.

(b) Não, porque não existe o limite de f na origem.

(c) Assíntota vertical: $x = 0$. Não há mais assíntotas verticais porque a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

30. —

31. —

32. (a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

(b) —

33. 1

34. f é estritamente decrescente em $] -\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função f não tem extremos locais.