Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Vetores, produto interno e produto externo

1. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $X = (1, -2, 1)$ e $Y = (-1, 1, 0)$.
   (a) Calcule $X + Y$, $X - Y$ e $3X - 2Y$.
   (b) Indique, justificando, se X e Y são vetores perpendiculares. E colineares?
   (c) Determine o ângulo entre os vetores: i. X e Y; ii. X e $-Y$; iii. $X + Y$ e $X - Y$.
   (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor X.
   (e) Encontre todos os vetores com a direção de X e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm: i. o sentido de X; ii. o sentido oposto a X.
   (f) Escreva o vetor X como soma de um vetor com a direção de Y e um vetor ortogonal a Y.
   (g) Determine todos os vetores perpendiculares a X e a Y.
   (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a X.

2. Mostre que o triângulo de vértices $P_1(2, 3, -4)$, $P_2(3, 1, 2)$ e $P_3(-3, 0, 4)$ é isósceles.

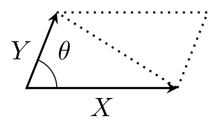
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com $(1, 0, 0)$.

4. Sendo X e Y vetores de $\mathbb{R}^n$, mostre que
   (a) $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$ (Regra do Paralelogramo);
   (b) se X e Y são ortogonais, então $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

5. Sejam $X = (2, -1, 1)$ e $Y = (0, 2, -1)$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial) $X \times Y$.
   (b) Verifique que o vetor $X \times Y$ é ortogonal quer a X quer a Y.

6. Mostre que, sendo X e Y vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$,
   (a) X e Y são colineares se e só se $X \times Y = 0$;
   (b) $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$.

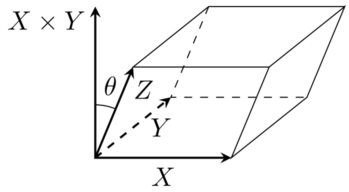
7. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores X e Y como na figura.



   (a) Verifique que:
      i. a altura do paralelogramo é igual a $\|Y\| \sin(\theta)$, sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor X e $\theta = \angle(X, Y)$;
      ii. a área do paralelogramo é $A_{\square} = \|X \times Y\|$;
      iii. a área do triângulo é $A_{\triangle} = \frac{1}{2}\|X \times Y\|$.
   (b) Determine a área:
      i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores $(3, -1, -1)$ e $(1, 2, 1)$;
      ii. do triângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$;
      iii. dos vários paralelogramos com vértices em $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$.

8. Sejam $X = (1, 2, 0)$ e $Y = (1, -1, 1)$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determine todos os vetores ortogonais a X e Y.
   (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores X e Y.

9. Considere o paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores X, Y e Z.



   (a) Verifique que:
      i. o paralelepípedo tem altura igual a $||Z||\,|\cos(\theta)|$, considerando como base do paralelepípedo o paralelogramo de lados correspondentes aos vetores X e Y e sendo $\theta = \angle(X \times Y, Z)$;
      ii. o volume do paralelepípedo é $V = |(X \times Y) \cdot Z|$.
   (b) Calcule o volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas dadas pelos vetores:
      i. $(3, -2, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 2)$;
      ii. $(2, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$ e $(1, 0, -1)$.

Retas e planos

10. Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P(2, 2, 1)$ e que contém a reta $\mathcal{R}$.

11. Considere o plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$ e a família de planos $\mathcal{P}_{a,b}$ definidos pela equação geral $ax + y + z = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.
   (b) Discuta a posição relativa dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b.

12. Considere a família de retas $\mathcal{R}_a$ definidas pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases},$$

com $a \in \mathbb{R}$, e a família de planos $\mathcal{P}_b$ definidos pela equação geral $bx + by + z = 2$, com $b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa do plano $\mathcal{P}_b$ e da reta $\mathcal{R}_a$ em função dos parâmetros a e b.

13. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida por $x = 2y + z = 1$ e a família de retas $\mathcal{F}_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + s(0, 2, b), \quad s \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa das retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b.

14. Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes dos pontos $A(-1, 0, 2)$ e $B(1, -1, 1)$.

15. Considere o ponto $A(3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação geral $y + z = -1$.
   (a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto A.
   (b) Calcule a distância do ponto A ao plano $\mathcal{P}$ por dois processos distintos.

16. Considere o ponto $P(-1, 1, 2)$ e a reta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.
   (a) Escreva uma equação geral do plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta $\mathcal{R}$.
   (b) Calcule a distância do ponto P à reta $\mathcal{R}$.

17. Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ de equações $x + y + 2z = 3$ e $ax + 2y + 4z = b$, respectivamente, com $a, b \in \mathbb{R}$.
    (a) Discuta a posição relativa dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros reais a e b.
    (b) Determine a distância entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{2,2}$.

18. Verifique que o plano de equação geral $x-y+z = 1$ e a reta definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

são estritamente paralelos e calcule a distância entre eles.

19. Considere a família de planos $\mathcal{P}_k$ de equação geral $y + kz = 1$, com $k \in \mathbb{R}$, e a reta $\mathcal{R}$ definida por $x = 2y = z - 1$.
    (a) Discuta a posição relativa da reta $\mathcal{R}$ e do plano $\mathcal{P}_k$ em função do parâmetro k.
    (b) Determine equações gerais dos planos perpendiculares à reta $\mathcal{R}$, cuja distância à origem é 1.

20. Considere a reta $\mathcal{R}_1$ que passa pelo ponto $(1, 1, -1)$ e tem vetor diretor $(-1, 2, -1)$ e a reta $\mathcal{R}_2$ que passa pelos pontos $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$.
    (a) Determine a posição relativa das retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.
    (b) Calcule a distância entre as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

21. Considere as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ de equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

    (a) Verifique que as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são enviezadas.
    (b) Determine o plano que contém $\mathcal{R}_2$ e é paralelo a $\mathcal{R}_1$.
    (c) Calcule a distância e o ângulo entre as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

22. Considere os planos de equações

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(0, 1, -1) + t(4, -1, -1), \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

e $x + \alpha y + 2z = \beta$. Determine os valores dos parâmetros reais α e β para os quais a distância entre os dois planos é igual a 3.

23. Determine equações cartesianas das retas contidas no plano de equação $x+y = 0$ cuja distância ao plano de equação $x + y + z = 1$ é igual a $\sqrt{3}/3$.

1. (a) $X+Y=(0,-1,1)$ e $3X-2Y=(5,-8,3)$. (b) Não. Não. (c) i. $\frac{5\pi}{6}$; ii. $\frac{\pi}{6}$; iii. $\arccos(\frac{2}{\sqrt{7}})$. (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. (e) i. $\frac{2}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$; ii. $-\frac{2}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. (f) $X = -\frac{3}{2}(-1,1,0) + \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. (g) $\alpha(1,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (h) $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,2)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
2. Dois lados do triângulo têm comprimento $\sqrt{41}$.
3. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2+3z^2}, y, z\right)$, $y,z \in \mathbb{R}$, y e z não simultaneamente nulos.
5. (a) $(-1,2,4)$.
7. (b) i. $\sqrt{66}$; ii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; iii. 2.
8. (a) $\alpha(2,-1,-3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{14}$.
9. (b) i. 8; ii. 3.
10. Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $(x,y,z)=(1,1,0)+\alpha(0,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é $(x,y,z)=(2,2,1)+\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,1)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, e uma equação geral de $\mathcal{P}$ é $y-z=1$.
11. (a) $x-y-z+1=0$; (b) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a=-1$ e $b=1$; estritamente paralelos se $a=-1$ e $b\neq 1$; concorrentes se $a\neq -1$ e $b\in\mathbb{R}$.
12. $\mathcal{R}_a$ está contida em $\mathcal{P}_b$ se $a=b=1$; $\mathcal{R}_a$ e $\mathcal{P}_b$ são concorrentes se $a\neq 1$ e $b\neq 0$; estritamente paralelos se ($a=1$ e $b\neq 1$) ou ($a\in\mathbb{R}$ e $b=0$).
13. $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{a,b}$ são coincidentes se $a=1$ e $b=-4$; estritamente paralelas se $a\neq 1$ e $b=-4$; concorrentes se $a=1$ e $b\neq -4$; enviezadas se $a\neq 1$ e $b\neq -4$.
14. Todos os pontos do plano de equação geral $2x-y-z+1=0$.
15. (a) $(x,y,z)=(3,\frac{1}{2},-\frac{7}{2})+\alpha(0,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; (b) $\sqrt{2}$.
16. (a) $x-z+3=0$; (b) 1.
17. (a) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a=2$ e $b=6$; estritamente paralelos se $a=2$ e $b\neq 6$; concorrentes se $a\neq 2$ e $b\in\mathbb{R}$. (b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.
18. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
19. (a) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}_k$ são concorrentes se $k\neq -\frac{1}{2}$ e estritamente paralelos se $k=-\frac{1}{2}$. (b) $2x+y+2z=\pm 3$.
20. (a) estritamente paralelas; (b) $\frac{1}{6}\sqrt{30}$.
21. (b) $x+y+z=1$; (c) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e $\frac{1}{3}\pi$.
22. $\alpha=2$ e ($\beta=-8$ ou $\beta=10$).
23. $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=0 \\ z=2 \end{cases}$.