Cálculo II – agr. 4 – 2016/17

Observações sobre como resolver o 1.º teste

1. $f(x,y,z) := \sqrt{xy^2z^3}$

(a) $xz^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge z \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge z \leq 0)$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x \geq 0 \wedge z \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge z \leq 0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2z^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x.2y.z^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy^2 3z^2}{2\sqrt{xy^2z^3}}$,

válidas para $xy^2z^3 > 0$, o que é o caso se $x,y,z > 0$. Tratando-se de funções contínuas nos seus domínios de definição (por motivos análogos aos explicados no teste modelo), f é diferenciável em particular no subconjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\}$ desse domínio.

(b) Estando $(2,2,2)$ no domínio de diferenciabilidade de f, a direção e o sentido em que f mais cresce a partir de $(2,2,2)$ é a direção e o sentido do gradiente de f nesse ponto:

$$\nabla f(2,2,2) = \left(\frac{2^2.2^3}{\cancel{2}\sqrt{2.2^2.2^3}}, \frac{\cancel{2}.2.2.2^3}{\cancel{2}\sqrt{2.2^2.2^3}}, \frac{\cancel{2}.2^2.3.2^2}{\cancel{2}\sqrt{2.2^2.2^3}}\right)$$

$$= \left(\frac{2^4}{2^{6\cdot\frac{1}{2}}}, \frac{2^5}{2^{6\cdot\frac{1}{2}}}, \frac{2^4.3}{2^{6\cdot\frac{1}{2}}}\right) = (2, 2^2, 2\times3)$$

$$= (2,4,6).$$

A taxa de variação máxima de f em $(2,2,2)$ é o valor da derivada direcional de f nesse ponto segundo a direção e o sentido do respetivo vetor gradiente, e sabemos que isso é exatamente dado pela norma desse vetor gradiente. Assim, é

$$\|(2,4,6)\| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

(c) De acordo com a definição dada, para além da diferenciabilidade de f em $(2,2,2)$, devemos garantir que $\nabla f(2,2,2) \neq \vec{0}$, o que já vimos ser o caso. A equação cartesiana pedida é então, de acordo com a fórmula dada, e atendendo a que, de facto, $f(2,2,2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3} = 2^{6 \cdot \frac{1}{2}} = 8$ (ou seja, $(2,2,2)$ pertence à superfície de nível 8 de f),

$$\nabla f(2,2,2) \cdot \big((x,y,z)-(2,2,2)\big) = 0,$$

$$\Leftrightarrow (2,4,6)\cdot(x-2,y-2,z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-4+4y-8+6z-12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+4y+6z-24 = 0.$$

2. $f(x,y) := x^2 + 4y^2$.

(a) $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0) = 16 > 0$; $f''_{x^2}(0,0) = 2 > 0$.

$\therefore$ $(0,0)$ é um minimizante local de f.

(usámos o facto de as derivadas de 2.ª ordem serem contínuas — neste caso por serem constantes — em bolas abertas centradas em $(0,0)$).

(b) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 4 \}$.

A é um círculo de raio 2, logo é limitado.

É fechado por ser um círculo que contém a sua fronteira (a respetiva circunferência), atendendo à desigualdade $\leq$, ou usando um critério que demos para o efeito (explicação como no teste modelo).

f é contínua (em $\mathbb{R}^2$, logo também em A) por ser polinomial.

O Teorema de Weierstrass garante então que f restrita a A tem máximo e mínimo absolutos.

No interior de A, onde a função é diferenciável, pelo Teorema de Fermat os extremos absolutos só podem ocorrer em pontos críticos. Pela alínea (a), $(0,0)$ é o único ponto nessas condições, atendendo também a que $(0-1)^2+4\times 0^2=1<4$, logo pertence ao interior de A.

Falta-nos determinar os candidatos a extremantes na fronteira $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+4y^2=4\}$ de A, onde iremos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para $U=\mathbb{R}^2$, com justificação semelhante à do teste modelo, após despistarmos a possibilidade de se verificar $\nabla g(x,y)=\vec{0}$, onde $g(x,y):=(x-1)^2+4y^2$.

$$\nabla g(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (2(x-1),8y)=(0,0) \Leftrightarrow (x,y)=(1,0);$$

$$g(1,0)=0\neq 4, \text{ logo } (1,0)\notin \text{fr}A.$$

$$\begin{cases} f'_x=\lambda g'_x \\ f'_y=\lambda g'_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x=\lambda\cdot\cancel{2}(x-1) \\ \cancel{8}y=\lambda\cancel{8}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda)=-\lambda \\ y(1-\lambda)=0 \end{cases}$$

Se $1-\lambda\neq 0$ (e é de facto; de outro modo a 1ª equação obrigaria λ a ser simultaneamente 0 e 1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{\lambda-1} \\ y=0 \vee 1-\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{\lambda-1} \\ y=0 \end{cases}$$

Pois vimos que $\lambda=1$ é impossível

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}-1\right)^2+4\times 0^2=4 \Leftrightarrow \frac{(\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda}+1)^2}{(\lambda-1)^2}=4 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda-1=\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda=1\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{2} \vee \lambda=\frac{1}{2}$$

Então obtemos os candidatos $(x,y)=\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1},0\right)=(-1,0)$ e $(x,y)=\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1},0\right)=(3,0)$.

Agora calculamos e comparamos o valor de f em todos os candidatos a extremantes encontrados:

$$f(0,0) = 0^2 + 4\times 0^2 = 0;$$
$$f(-1,0) = 1 + 4\times 0^2 = 1;$$
$$f(3,0) = 9 + 4\times 0^2 = 9.$$

Assim, o mínimo absoluto é 0, sendo $(0,0)$ o correspondente minimizante absoluto, e o máximo absoluto é 9, sendo $(3,0)$ o correspondente maximizante absoluto.

3. (a) $y' + x^2 y = e^{x^3} \cdot \frac{y^4}{3}$.

EDO de <u>Bernoulli</u>. É equivalente, para $y \neq 0$, a

$$y^{-4}y' + x^2 y^{-3} = \frac{e^{x^3}}{3}. \qquad (1)$$

Mudança de variável $z = y^{-3}$.

$$z' = -3y^{-4}\cdot y'$$

$$(1) \Leftrightarrow -3y^{-4}\cdot y' - 3x^2 y^{-3} = -e^{x^3}$$

$$\Leftrightarrow z' - 3x^2 z = -e^{x^3} \qquad \text{EDO } \underline{\text{linear}} \qquad (2)$$

Resolução desta pelo método do fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -3x^2\,dx} = e^{-x^3}.$$

$$(2) \Leftrightarrow e^{-x^3}z' - 3x^2 e^{-x^3} z = -1$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x^3}z)' = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^3}z = -x + C \Leftrightarrow y^{-3} = e^{x^3}(C - x)$$

$$x \neq C \rightarrow \Leftrightarrow y^3 = \frac{e^{-x^3}}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{-\frac{x^3}{3}}}{\sqrt[3]{C-x}} \quad , \quad C \in \mathbb{R},$$

em intervalos onde $x \neq C$.

Este é um integral geral. A EDO dada tem também $y \equiv 0$ como integral singular.

(b) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$

$$\Leftrightarrow y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} =: f(x,y) \qquad (3)$$

se $x \neq 0$

Verifica-se que $f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = f(x,y)$ para $x \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, logo a EDO é homogénea.

Mudança de variável $z = \frac{y}{x}$, $\Leftrightarrow y = xz$

$y' = xz' + z$.

$$(3) \Leftrightarrow xz' + \cancel{z} = e^z + \cancel{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x} \qquad \text{EDO de var. separadas}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-z} dz = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -e^{-z} = \ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow e^{-z} = -\ln|x| - C \Leftrightarrow -z = \ln(-\ln|x| - C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\ln(\ln|x|^{-1} - C) \Leftrightarrow y = -x\ln(\ln|x|^{-1} - C),$$

$C \in \mathbb{R}$, em intervalos onde $x \neq 0$ e $\ln|x|^{-1} - C > 0$.

(c) $y^{(4)}+y''=0$.

EDO linear de ordem 4, homogénea de coeficientes constantes. Pode resolver-se pelo método da equação característica.

$$r^4+r^2=0 \Leftrightarrow r^2(r^2+1)=0$$

0 é raiz $\underbrace{}_{\text{real}}$ dupla; $\pm i$ é um par de raízes $\underbrace{\text{simples}}_{\text{complexas}}$

Sol. geral: $C_1 e^{0.x}+C_2 x e^{0.x}+C_3 e^{0.x}\cos(1.x)+C_4 e^{0.x}\sin(1.x)$,

i.e., $C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4 \sin x$, $C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}$.

4. $g(x,y):=f(x^2+y^2)$, onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é continuamente diferenciável.

(a) $\frac{\partial g}{\partial x}$ é a derivada ordinária de $x\mapsto f(x^2+y^2)$ considerando y como constante. Usando a regra da cadeia para funções de 1 variável,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(x^2+y^2).2x. \qquad (4)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=f'(x^2+y^2).2y. \qquad (5)$$

Como, por hipótese, f' é contínua e como $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ também é (função polinomial), então a composição $(x,y)\mapsto f'(x^2+y^2)$ também é contínua, assim como o seu produto por funções constantes e projeções. Isto tudo é válido em $\mathbb{R}^2$, logo, por um critério dado de diferenciabilidade, g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(b) De acordo com a definição dada, antes de se falar em reta tangente em $(1,1)$ à curva de nível de g que passa por este ponto, deve garantir-se que g é diferenciável em $(1,1)$ — o que já vimos na alínea anterior — e que $\nabla g(1,1) \neq \vec{0}$.

Ora $\nabla g(1,1) = \left(f'(1^2+1^2).2\times1, f'(1^2+1^2).2\times1\right) =$

pelas expressões (4) e (5) anteriormente obtidas

$= (2f'(2), 2f'(2))$

$= (2,2) \neq \vec{0}$.

usando a hipótese $f'(2)=1$, do enunciado

Ainda de acordo com a definição dada, a equação da reta tangente pedida é então

$$\nabla g(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 0,$$

$$\Leftrightarrow (2,2) \cdot (x-1, y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-2+2y-2=0 \Leftrightarrow 2x+2y-4=0.$$

5. $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$

(a) Supondo que é exata significa supor que existe $F(x,y)$ ~~no domínio comum~~ continuamente diferenciável de $M(x,y)$ e $N(x,y)$, suposto um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$dF = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

Foi indicado nas aulas que então as soluções se obtêm através de $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, i.e., esta equação é a sol. geral (na forma implícita) da EDO dada.

<u>Explicação:</u>

Se $y=\varphi(x)$, $x\in I$, for solução da EDO, então

$$M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0,$$

Propriedade dada dos diferenciais, tratando-se aqui do diferencial de F composta com $x\mapsto(x,\varphi(x))$

$$\Leftrightarrow M(x,\varphi(x))dx+N(x,\varphi(x))d\varphi=0$$

$$\Leftrightarrow dF(x,\varphi(x))=0 \Leftrightarrow \frac{dF(x,\varphi(x))}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow F(x,\varphi(x))=C \text{ constante},$$

i.e., $F(x,y)=C$ (com φ uma sol. diferenciável de $F(x,y)=C$)

E vice-versa, já que prosseguimos por equivalências na dedução acima.

(b) Um fator integrante é uma função $\mu(x,y)$ não nula tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)y'=0$$

seja uma EDO exata (que é equivalente à EDO dada).

(c) A maneira mais simples de dar um exemplo como o que se pede é provavelmente produzir uma EDO exata a partir de um $F(x,y)$ e depois "destruir" a exatidão.

Seja, por exemplo, $F(x,y)=x^2y+xy^2$.

$dF=2xy\,dx+2xy\,dy$, logo $2xy+2xyy'=0$ é exata. Mas $2y+2yy'=0$ não é: se fosse, então $2=\frac{\partial 2y}{\partial y}=\frac{\partial 2y}{\partial x}=0$ (já que estas derivadas são contínuas).

Naturalmente, x é um fator integrante em abertos onde x não seja 0 e $x^2y+xy^2=C$ é a sol. geral implícita com as mesmas restrições.