

# Matemática Discreta

## Lógica de Primeira Ordem - 1

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://elearning.ua.pt>

## Sistema lógico que estende a lógica proposicional.

### Exemplo

Considerando as proposições:

- $p$ : “todo o homem é mortal”
- $q$ : “Confúcio é homem”
- $r$ : “Confúcio é mortal”

- A metodologia da lógica proposicional não nos permite concluir que  $r$  é consequência lógica de  $p$  e de  $q$ .
- Além das proposições atômicas e das fórmulas da lógica proposicional, a lógica de primeira ordem conta com:
  - termos;
  - predicados;
  - quantificadores.

## Termos

### Definição (de termo)

Um **termo** define-se recursivamente da seguinte forma:

- 1) uma constante é um termo;
- 2) uma variável é um termo;
- 3) se  $f$  é um símbolo de uma função com  $n$  argumentos e  $t_1, t_2, \dots, t_n$  são termos, então  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  é um termo;
  - os termos são gerados somente por aplicação de 1), 2) e 3).

### Exemplos

- 1)  $12$ ;
- 2)  $y$ ;
- 3)  $\text{pai\_de}(\text{Luisa})$ .

## Predicados e átomos

### Definição (de predicado)

Um **predicado** é uma função que a uma dada lista de constantes faz corresponder um valor lógico.

### Exemplo

$\text{maior}(x, y)$  é um predicado que traduz a relação “ $x$  é maior do que  $y$ ”.

### Definição (de átomo)

Se  $P$  é um predicado com  $n$  argumentos e  $t_1, t_2, \dots, t_n$  são termos, então  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  é um **átomo**. Nenhuma outra expressão é um átomo.

## Quantificadores

átomos + conectivos lógicos + quantificadores  $\rightarrow$  fórmulas da lógica de primeira ordem.

- Quantificador universal ( $\forall$ )  $\rightarrow$  traduz "para todos os elementos...."

### Exemplo de aplicação do quantificador universal

$(\forall x) (\text{maior}(x, 1))$ .

- Quantificador existencial ( $\exists$ )  $\rightarrow$  traduz "existe pelo menos um elemento...."

### Exemplo de aplicação do quantificador existencial

$(\exists x) (\text{maior}(x, 1))$ .

## Alcance de um quantificador

### Definição (de alcance de um quantificador)

Designa-se por **alcance** de um quantificador a parte da fórmula sobre a qual o quantificador atua.

### Exemplo

Vamos determinar os alcances dos quantificadores na fórmula  $(\forall x) (\exists y) (P(x, y))$ .

alcance de  $\forall$ :  $(\exists y) (P(x, y))$ .

alcance de  $\exists$ :  $P(x, y)$ .

## Ocorrências ligadas e livres

### Definição (de ocorrência livre e ocorrência ligada)

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

### Exemplos

- 1)  $\forall x (P(x, y))$ ;
- 2)  $\forall x (P(x, y) \vee \forall y (Q(y)))$ ;
- 3)  $\forall x (P(x)) \Rightarrow Q(x)$ .

## Variáveis ligadas e livres

### Definição (de variável livre e ligada)

Uma variável diz-se **livre** numa fórmula se no mínimo uma sua ocorrência é livre. Uma variável diz-se **ligada** numa fórmula se no mínimo uma sua ocorrência é ligada.

### Exemplos

- 1)  $\forall x (P(x, y)) \rightarrow x$  é ligada e  $y$  é livre;
- 2)  $\forall x (P(x, y) \vee \forall y (Q(y))) \rightarrow x$  é ligada e  $y$  é livre e ligada;
- 3)  $\forall x (P(x)) \Rightarrow Q(x) \rightarrow x$  é livre e ligada.

### Observação

Uma fórmula sem variáveis livres é uma proposição.

## Fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem

### Definição (de fórmula bem formada)

As fórmulas bem formadas (fbf's) da lógica de primeira ordem são definidas sucessivamente da seguinte forma:

- 1) um átomo é uma fbf;
- 2) se  $F$  e  $G$  são fbf's, então  $\neg(F)$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \Rightarrow G)$  e  $(F \Leftrightarrow G)$  são fbf's;
- 3) se  $F$  é uma fbf e  $x$  é uma variável, então  $(\forall x)(F)$  e  $(\exists x)(F)$  são fbf's;
- 4) as fbf's são geradas somente por aplicação de um número finito de vezes de 1), 2) e 3).

## Exemplos de determinação de fórmulas da lógica de primeira ordem

### Exemplos

Vamos determinar as fórmulas que exprimem as seguintes afirmações:

- 1) Toda a gente gosta de alguém.
- 2) Todo o ser vivo que não é animal é vegetal.
- 3) Todos os números racionais são números reais.
- 4) Existem números primos.
- 5) O conjunto dos números reais é infinito.

## Interpretação na lógica de primeira ordem

### Definição (de interpretação)

Seja  $F$  uma fórmula. Uma interpretação de  $F$  consiste num domínio  $D$  e nas seguintes associações de valores:

- 1) para cada constante associamos um elemento de  $D$ ;
- 2) para cada símbolo de função com  $n$  argumentos associamos uma função de  $D^n$  em  $D$ ;
- 3) para cada símbolo de predicado com  $n$  argumentos associamos uma função de  $D^n$  em  $\{0, 1\}$  ( $\{V, F\}$ ).

- Trata-se de uma interpretação da fórmula  $F$  sobre  $D$ .

## Exemplos

Considerando a fórmula  $F : \forall x (P(x, a))$ , onde  $a$  denota uma constante,

- 1)  $D = \{1, 2, 3\}$ ,  $a = 1$ ,  $P(x, a)$ : " $x$  maior ou igual que  $a$ ", é uma interpretação de  $F$ ;
- 2)  $D = \{\text{Maria, Luísa, Antónia}\}$ ,  $a = \text{Maria}$ ,  $P(x, a)$ : " $x$  é amiga de  $a$ ", é uma interpretação de  $F$ .

Considerando a fórmula  $F : \forall x (x \geq a)$ , onde  $a$  é uma constante,

- 1)  $D = \{1, 2, 3\}$ ,  $a = 1$ , é uma interpretação de  $F$ ;
- 2)  $D = \mathbb{Z}$ ,  $a = 0$ , é uma interpretação de  $F$ .

**Nota:** no último exemplo não é necessário definir o predicado na interpretação, uma vez que está definido na fórmula.

## Avaliação de fórmulas da lógica de primeira ordem

Para qualquer interpretação de uma fórmula sobre um domínio  $D$ , a fórmula pode ser avaliada em 1 ( $V$ ) ou 0 ( $F$ ), segundo as seguintes regras:

- 1 se os valores verdadeiros ou falsos das fórmulas  $G$  e  $H$  estão avaliados, então os valores verdadeiros ou falsos das fórmulas  $\neg(G)$ ,  $(G \wedge H)$ ,  $(G \vee H)$ ,  $(G \Rightarrow H)$  e  $(G \Leftrightarrow H)$  ficam também avaliados;
- 2  $(\forall x)(G)$  é avaliada em 1 ( $V$ ) se  $G$  é avaliada em 1 ( $V$ ) para todas as concretizações possíveis de  $x$  em  $D$ . Caso contrário, o seu valor é 0 ( $F$ ).
- 3  $(\exists x)(G)$  é avaliada em 1 ( $V$ ) se  $G$  é avaliada em 1 ( $V$ ) para pelo menos uma concretização de  $x$  em  $D$ . Caso contrário, o seu valor é 0 ( $F$ ).

## Exemplo

Dadas as fórmulas

- 1)  $(\forall x)(P(x, a))$ ;
- 2)  $(\exists x)(P(x, a))$ .

onde  $a$  é uma constante, vamos utilizar a seguinte interpretação  $I$ :

domínio  $D = \mathbb{Z}$ ;

$P(x, a)$  é o predicado " $x$  é maior do que  $a$ ";

$a = 1$ .

Vamos avaliar as fórmulas 1) e 2) para a interpretação  $I$ .

## Fórmulas que não podem ser avaliadas

**Nota:** nenhuma fórmula com variáveis livres pode ser avaliada, a menos que se introduza uma função que atribui valores em  $D$  às variáveis livres.

### Exemplo

Se considerarmos a fórmula

$$(\forall x) (P(x, y)),$$

e a interpretação  $D = \mathbb{Z}$  e  $P(x, y)$ : “ $x$  é maior do que  $y$ ”, então a fórmula não pode ser avaliada.

- **Referência bibliográfica:**

D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).