Matemática Discreta

Lógica de Primeira Ordem - 2

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Fórmulas válidas, não válidas, inconsistentes e consistentes Consequência lógica Fórmulas equivalentes Forma normal prenex da lógica d

Fórmulas válidas e não válidas

Definição de fórmula válida (e não válida)

Uma fórmula F diz-se válida (ou uma tautologia) se é verdadeira para qualquer das suas possíveis interpretações e diz-se não válida (ou inválida) se não é válida.

Exemplo

A fórmula $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow P(x))$ é válida.

Fórmulas inconsistentes e consistentes

Definição de fórmula inconsistente (e consistente)

Uma fórmula F diz-se inconsistente (ou uma contradição) se é falsa qualquer que seja a sua interpretação e diz-se consistente se não é inconsistente.

Exemplo

A fórmula $(\exists x)\ (P(x) \wedge \neg(P(x)))$ é inconsistente.

Se uma fórmula toma o valor 1 (V) numa interpretação I dizemos que I é um modelo de F e que I satisfaz F.

Exemplo: Vamos verificar a consistência das fórmulas

1. $(\forall x)\,(P(x,a))$,
2. $(\exists x)\,(P(x,a))$.

Para isso vamos determinar uma interpretação que seja um modelo para as duas fórmulas.

Consequência lógica

Definição (de consequência lógica)

Uma fórmula G é consequência lógica das fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ se para toda a interpretação I, se a fórmula $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n$ é verdadeira para I então G também é verdadeira para I.

Teorema

Dadas as fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ e uma fórmula G, G é consequência lógica de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sse

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n) \Rightarrow G$$

é uma fórmula válida.

Fórmulas equivalentes

Definição (de fórmulas equivalentes)

Duas fórmulas F e G são equivalentes (e escreve-se $F \equiv G$) sse $F \Leftrightarrow G$ é um teorema (ou seja, uma tautologia).

Exemplos de fórmulas equivalentes:

1. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ e $\forall x\ (\neg P(x) \vee Q(x))$;
2. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ e $\forall y\ (\neg P(y) \vee Q(y))$;
3. $\forall x\, \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$ e $\forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))$;
4. $\neg(\forall x\ (P(x)))$ e $\exists x\ \neg(P(x))$.

Exemplos de fórmulas não equivalentes:

1. $\forall x\ (P(x))$ e $\exists x\ (P(x))$;
2. $\forall x(P(x, a))$ e $\forall x(P(x, b))$ onde a e b são constantes.

Forma normal prenex

Definição (de forma normal prenex)

Uma fórmula F da lógica de primeira ordem diz-se na forma normal prenex se F está na forma

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \ldots (Q_n x_n)\ M,$$

onde Q_i $(i = 1, \ldots, n)$, é um quantificador (universal ou existencial) e M é uma fórmula sem quantificadores.

Exemplos

Exemplos de fórmulas na forma normal prenex:

1) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y))$;

2) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))$;

3) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \vee R(z))$;

4) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \Rightarrow R(z))$.

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).