Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento IV 2017/2018

Soluções da 1.ª Prova (13/abril/2018) da Avaliação Discreta
(e algumas sugestões de resolução)

1. (a) $R = \frac{1}{4}$.

   (b) Usando a resposta à alínea anterior, o intervalo de convergência é $]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$. Resta analisar a natureza da série nos extremos desse intervalo. Para $x = \frac{3}{4}$, a série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Trata-se da série harmónica alternada, que é convergente (aplicar o Critério de Leibniz). Para $x = \frac{5}{4}$, a série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$. Trata-se da série harmónica, que é divergente. Logo, o domínio de convergência é $[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[$.

2. (a) $T_0^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$.

   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}} = f(\frac{1}{2}) \simeq T_0^2 f(\frac{1}{2})$. Com alguns cálculos adicionais, usando a alínea (a), obtém-se $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq \dfrac{5}{8}$. O erro absoluto cometido é dado por $|R_0^2 f(\frac{1}{2})|$, escreva a expressão do resto e majore.

3. (a) —

   (b) $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{n+1}$, para $-1 < x < 1$.

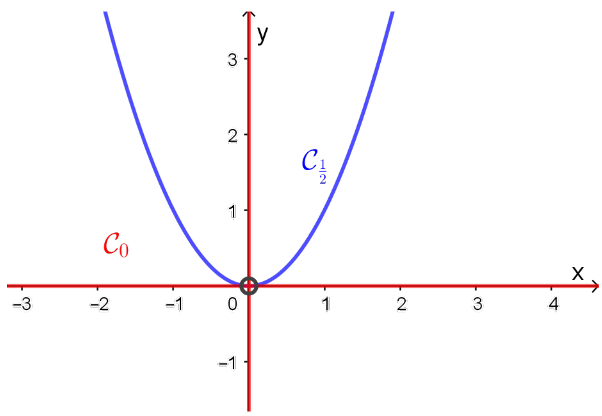
4. (a) $g(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8\cos[(2n-1)x]}{\pi(2n-1)^2}$.

   (b) Como g é contínua em $\mathbb{R}$ e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo Teorema de Dirichlet, a série de Fourier de g converge pontualmente para $g(x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Ou seja,
   $$g(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (c) Use o Critério de Weierstrass.

5. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   (b) $\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0 \vee y = 0\} \backslash \{(0,0)\}$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\} \backslash \{(0,0)\}$.



(c) Note que $(0,0)$ é ponto de acumulação de $\mathcal{C}_0$ e de $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ (ver alínea anterior). Como os seguinte limites (segundo conjuntos diferentes) :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_0}} f(x,y) = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}}} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

são distintos, o limite em causa não existe.