

# Aula 13

## Estruturas de Dados

### Árvores Binárias

*Programação II, 2017-2018*

*v1.12, 22-05-2018*

Árvore

Árvore Binária

Árvore Binária de  
Procura

Dicionário implementado  
como árvore binária de  
procura

Árvore

Árvore Binária

Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado  
como árvore binária de  
procura

## 1 **Árvore**

## 2 **Árvore Binária**

## 3 **Árvore Binária de Procura**

Dicionário implementado como árvore binária de procura

Árvore

Árvore Binária

Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado  
como árvore binária de  
procura

## 1 **Árvore**

## 2 **Árvore Binária**

## 3 **Árvore Binária de Procura**

Dicionário implementado como árvore binária de procura

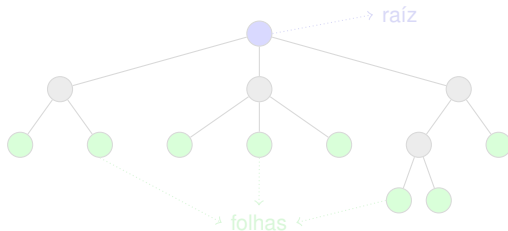
# Coleções de dados: o que vimos até agora

- `LinkedList`
  - `addFirst()`, `addLast()`, `removeFirst()`, `first()`, ...
- `SortedList`
  - `insert()`, `remove()`, `first()`, ...
- `Stack`
  - `push()`, `pop()`, `top()`, ...
- `Queue`
  - `in()`, `out()`, `peek()`, ...
- `KeyValueList` e `HashTable` (implementam o conceito de **dicionário**)
  - `set()`, `get()`, `remove()`, ...

- `LinkedList`
  - `addFirst()`, `addLast()`, `removeFirst()`, `first()`, ...
- `SortedList`
  - `insert()`, `remove()`, `first()`, ...
- `Stack`
  - `push()`, `pop()`, `top()`, ...
- `Queue`
  - `in()`, `out()`, `peek()`, ...
- `KeyValueList` e `HashTable` (implementam o conceito de **dicionário**)
  - `set()`, `get()`, `remove()`, ...

# Árvores: Introdução

- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

## Árvore

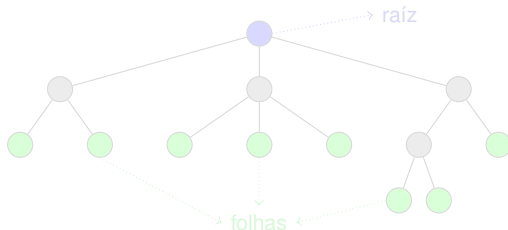
### Árvore Binária

#### Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura

# Árvores: Introdução

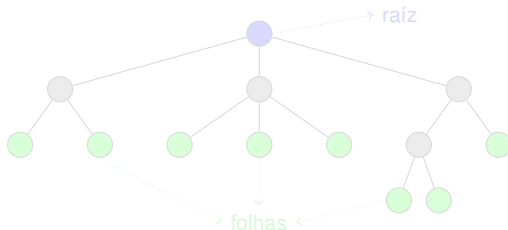
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

- O que são estruturas de dados em Árvore?

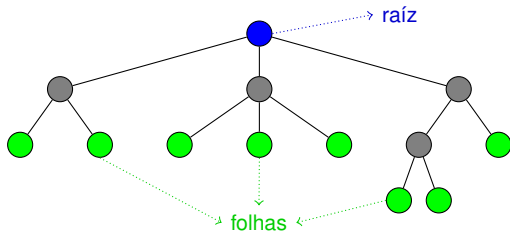


- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.



# Árvores: Introdução

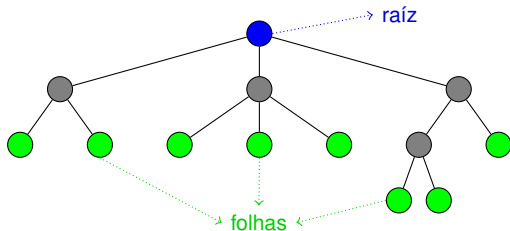
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

## Árvore

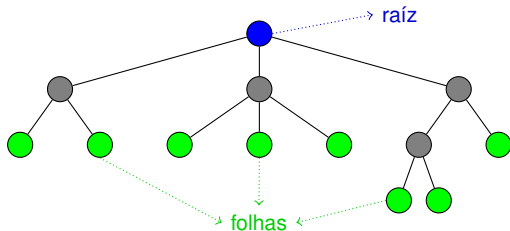
### Árvore Binária

### Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura

# Árvores: Introdução

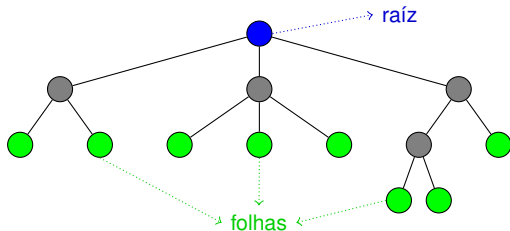
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

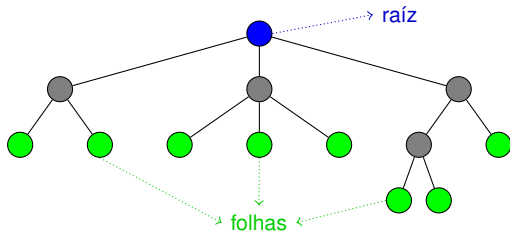
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

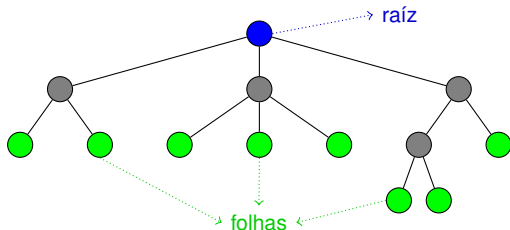
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

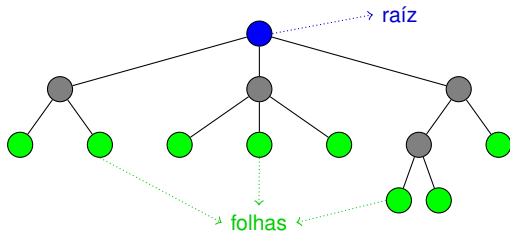
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

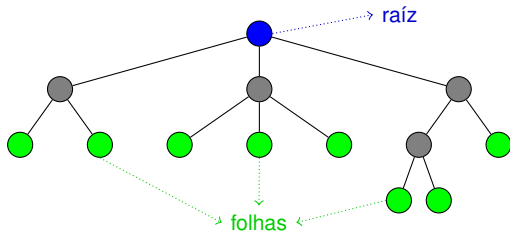
- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

# Árvores: Introdução

- O que são estruturas de dados em Árvore?



- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

## Árvore

### Árvore Binária

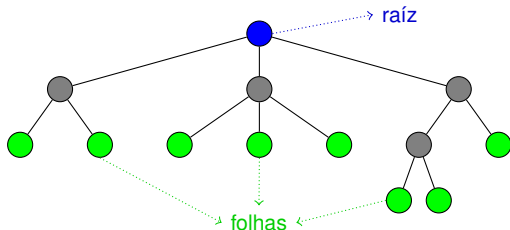
#### Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



# Árvores: Introdução

- O que são estruturas de dados em Árvore?



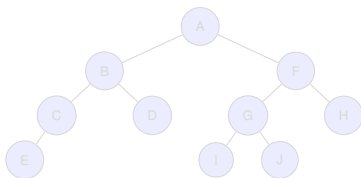
- A árvore consiste de nós ligados por ramos orientados (é um caso particular de grafo).
- Cada nó (pai) pode ter ramos para outros nós (filhos).
- Um dos nós não tem pai e é chamado raiz.
- Todos os outros nós têm um pai (e apenas um).
- Nós sem filhos são chamados folhas.
- A raiz representa-se no topo e as folhas na base.
- Uma árvore não pode incluir ciclos.
- Cada nó pode ser considerado como a raiz de uma subárvore.

## Árvore

## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



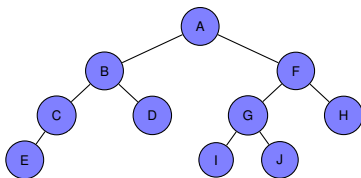
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



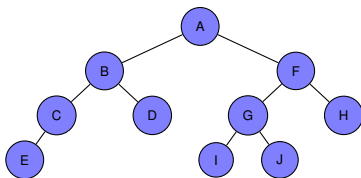
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



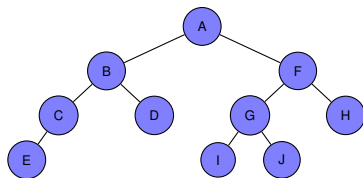
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



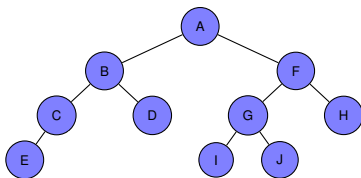
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

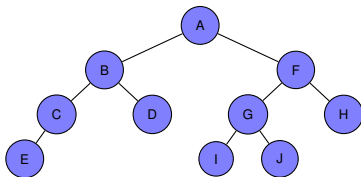
## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.



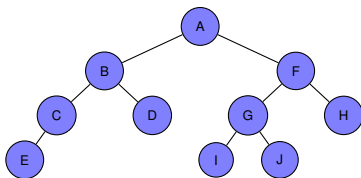
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

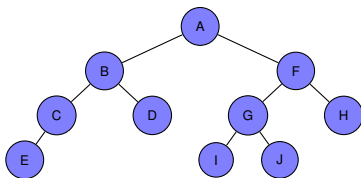


## Árvore

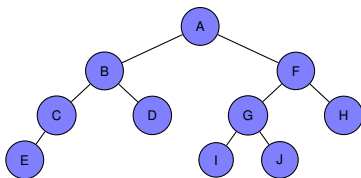
## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.



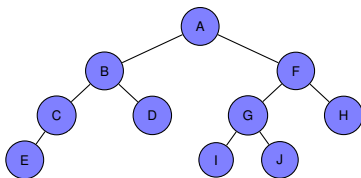
- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

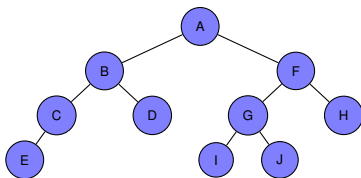
## Árvore Binária

## Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura



- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.



- Cada nó é atingível a partir da raiz através de uma sequência única de ramos, chamada de **caminho** do nó.
  - O caminho do nó J é: A-F-G-J.
- O número de ramos de um caminho é chamado de **comprimento** do caminho.
  - O comprimento do caminho A-F-G-J é: 3.
- O **nível** de um nó é o comprimento do caminho + 1.
  - O nível do nó J é: 4.
  - O nó raiz (A) tem nível 1.
- A **altura** de uma árvore é o nível do nó mais profundo.
  - A altura desta árvore é: 4.
  - Uma árvore vazia tem altura 0.

## Árvore

### Árvore Binária

### Árvore Binária de Procura

Dicionário implementado como árvore binária de procura

- **Atenção:** há outras definições de árvore!
- A definição acima é a mais usual em Informática.
- Na Matemática (teoria de grafos), uma *árvore* é definida de forma mais geral, como um *grafo* (não-orientado) *conexo* e *acíclico*.

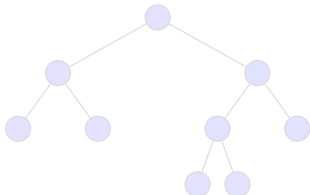
- **Atenção:** há outras definições de árvore!
- A definição acima é a mais usual em Informática.
- Na Matemática (teoria de grafos), uma *árvore* é definida de forma mais geral, como um *grafo* (não-orientado) *conexo* e *acíclico*.

- **Atenção:** há outras definições de árvore!
- A definição acima é a mais usual em Informática.
- Na Matemática (teoria de grafos), uma *árvore* é definida de forma mais geral, como um *grafo* (não-orientado) *conexo* e *acíclico*.

- **Atenção:** há outras definições de árvore!
- A definição acima é a mais usual em Informática.
- Na Matemática (teoria de grafos), uma *árvore* é definida de forma mais geral, como um *grafo* (não-orientado) *conexo* e *acíclico*.

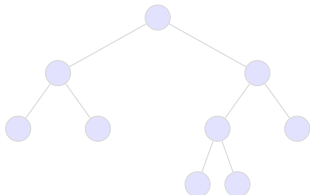


- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



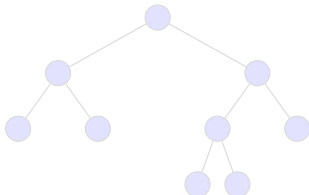
```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



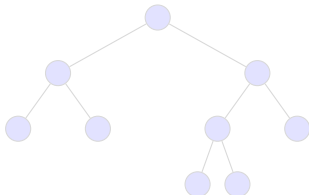
```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



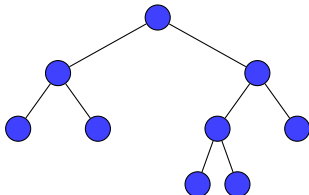
```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



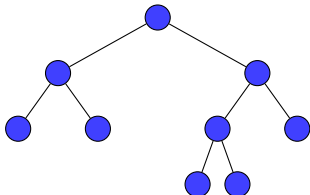
```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- Estrutura de dados recursiva em que cada nó se pode ligar, no máximo, a dois nós filhos.
- Cada nó pode ser encarado ele próprio como uma árvore binária.



```
class Node<T>
{
    T elem;
    Node<T> leftChild;
    Node<T> rightChild;
}
```

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em:
  - **Travessias em largura:** percorrem nos níveis antes de avançar para os filhos, por exemplo de esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade:** percorrem nos filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.



- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- **Percurso** ou **travessia** de uma árvore:
  - É um algoritmo que permite percorrer todos os nós da árvore de forma sistemática, sem repetições.
- Há muitas travessias possíveis e podem classificar-se em
  - **Travessias em largura**: percorrem nós irmãos antes de avançar para os filhos, por exemplo da esquerda para a direita, de cima para baixo.
  - **Travessias em profundidade**: percorrem nós filhos antes dos nós irmãos.
- Os diferentes percursos têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
  - Para cada aplicação, pode haver um percurso mais adequado.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo (Pré-ordem)** (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - 1. Percurso da raiz
  - 2. Percurso prefixo da sub-árvore esquerda
  - 3. Percurso prefixo da sub-árvore direita
- **Infixo (Em-ordem)** (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - 1. Percurso infixo da sub-árvore esquerda
  - 2. Percurso da raiz
  - 3. Percurso infixo da sub-árvore direita
- **Posfixo (Pós-ordem)** (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - 1. Percurso posfixo da sub-árvore esquerda
  - 2. Percurso posfixo da sub-árvore direita
  - 3. Percurso da raiz



- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.



- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

- As **travessias em profundidade** podem subclassificar-se em função da ordem em que a raiz é visitada em relação a seus descendentes.
- **Prefixo** (*Pré-ordem*) (RED: Raiz, Esquerda, Direita)
  - R: Processar o nó raiz.
  - E: Percurso prefixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso prefixo da sub-árvore direita.
- **Infixo** (*Em-ordem*) (ERD: Esquerda, Raiz, Direita)
  - E: Percurso infixo da sub-árvore esquerda.
  - R: Processar o nó raiz.
  - D: Percurso infixo da sub-árvore direita.
- **Posfixo** (*Pós-ordem*) (EDR: Esquerda, Direita, Raiz)
  - E: Percurso posfixo da sub-árvore esquerda.
  - D: Percurso posfixo da sub-árvore direita.
  - R: Processar o nó raiz.

# Árvores Binárias: Percursos em profundidade

Estruturas de Dados

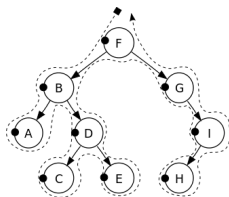
Árvore

Árvore Binária

Árvore Binária de  
Procura

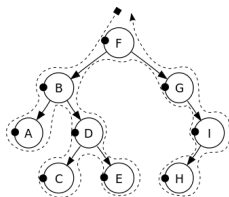
Dicionário implementado  
como árvore binária de  
procura

## Pré-ordem



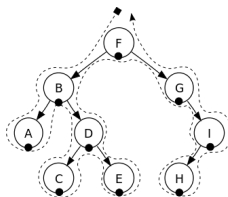
F, B, A, D, C, E, G, I, H

## Pré-ordem



F, B, A, D, C, E, G, I, H

## Em-ordem

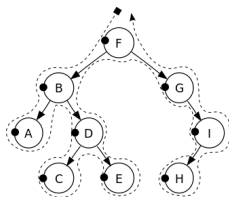


A, B, C, D, E, F, G, H, I



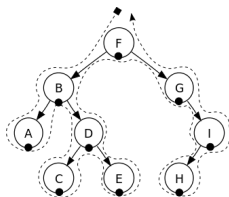
# Árvores Binárias: Percursos em profundidade

**Pré-ordem**



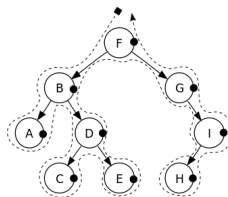
F, B, A, D, C, E, G, I, H

**Em-ordem**

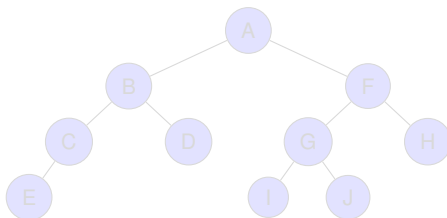


A, B, C, D, E, F, G, H, I

**Pós-ordem**



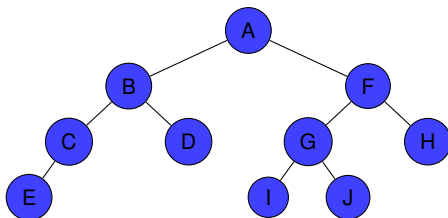
A, C, E, D, B, H, I, G, F



Prefixo (RED): A, B, C, E, D, F, G, I, J, H

Infixo (ERD): E, C, B, D, A, I, G, J, F, H

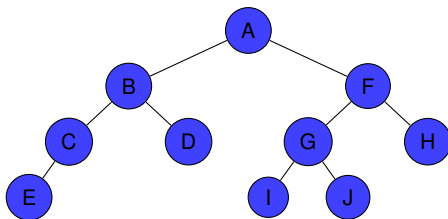
Posfixo (EDR): E, C, D, B, I, J, G, H, F, A



Prefixo (RED): A, B, C, E, D, F, G, I, J, H

Infixo (ERD): E, C, B, D, A, I, G, J, F, H

Posfixo (EDR): E, C, D, B, I, J, G, H, F, A



Prefixo (RED): A, B, C, E, D, F, G, I, J, H

Infixo (ERD): E, C, B, D, A, I, G, J, F, H

Posfixo (EDR): E, C, D, B, I, J, G, H, F, A

# Árvores Binárias de Procura: Motivação

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As tabelas *hashes* têm bom desempenho no Espaço, pois permitem uma localização dinâmica.
  - Os vetores (arrays) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vetor ordenado podemos utilizar "pesquisa binária".
  - Numas estruturas dinâmicas com tabelas *hashes* temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vetor ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar "pesquisa binária";
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar "pesquisa binária";
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar "pesquisa binária";
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.



- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar "pesquisa binária";
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar "pesquisa binária";
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar “pesquisa binária”;
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar “pesquisa binária”;
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar “pesquisa binária”;
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

- São outra forma de implementar **dicionários**
- Como já tínhamos analisado nas tabelas de dispersão:
  - A complexidade de uma estrutura de dados tem duas componentes: Espaço e Tempo.
  - As listas ligadas têm bom desempenho no Espaço pois permitem uma alocação dinâmica;
  - Os vectores (*arrays*) têm bom desempenho no Tempo.
- Se quisermos pesquisar um elemento:
  - Num vector ordenado podemos utilizar “pesquisa binária”;
  - Numa estrutura dinâmica com listas ligadas temos o problema do acesso sequencial (percorrer todos os elementos até encontrar o pretendido).
- Árvore Binária de Procura: uma implementação dinâmica com desempenho temporal (na pesquisa) similar ao de um vector ordenado.

# Árvore Binária de Procura: Definição

- Uma **árvore binária de procura** é uma árvore binária em que a *chave* armazenada em cada nó:
  - é maior que todas as chaves na sua subárvore esquerda;
  - é menor que todas as chaves na sua subárvore direita.(Chaves iguais podem ser colocadas à direita, por exemplo.)

- Uma **árvore binária de procura** é uma árvore binária em que a *chave* armazenada em cada nó:
  - é maior que todas as chaves na sua subárvore esquerda
  - é menor\* que todas as chaves na sua subárvore direita.
  - (\* Chaves iguais podem ser colocadas à direita, por exemplo.)

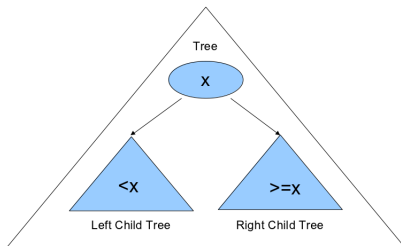


- Uma **árvore binária de procura** é uma árvore binária em que a *chave* armazenada em cada nó:
  - é maior que todas as chaves na sua subárvore esquerda
  - é menor\* que todas as chaves na sua subárvore direita.
  - (\* Chaves iguais podem ser colocadas à direita, por exemplo.)

- Uma **árvore binária de procura** é uma árvore binária em que a *chave* armazenada em cada nó:
  - é maior que todas as chaves na sua subárvore esquerda
  - é menor\* que todas as chaves na sua subárvore direita.
  - (\* Chaves iguais podem ser colocadas à direita, por exemplo.)

# Árvore Binária de Procura: Definição

- Uma **árvore binária de procura** é uma árvore binária em que a *chave* armazenada em cada nó:
  - é maior que todas as chaves na sua subárvore esquerda
  - é menor\* que todas as chaves na sua subárvore direita.
  - (\* Chaves iguais podem ser colocadas à direita, por exemplo.)



- Sendo as árvores binárias um exemplo de uma estrutura de dados recursiva, os algoritmos mais simples para as manipular tendem também a ser recursivos;
- Algoritmos recursivos em estruturas de dados recursivas replicam a recursividade existente na estrutura de dados para os próprios algoritmos;
- Neste caso, temos uma árvore constituída por um nó raiz e duas subárvores, pelo que o algoritmo recursivo repetirá, na ordem desejada, esta estrutura:  
processamento do nó raiz, invocação recursiva para cada subárvore.

- Sendo as árvores binárias um exemplo de uma estrutura de dados recursiva, os algoritmos mais simples para as manipular tendem também a ser recursivos;
- Algoritmos recursivos em estruturas de dados recursivas replicam a recursividade existente na estrutura de dados para os próprios algoritmos;
- Neste caso, temos uma árvore constituída por um nó raiz e duas subárvores, pelo que o algoritmo recursivo repetirá, na ordem desejada, esta estrutura: processamento do nó raiz, invocação recursiva para cada subárvore.

- Sendo as árvores binárias um exemplo de uma estrutura de dados recursiva, os algoritmos mais simples para as manipular tendem também a ser recursivos;
- Algoritmos recursivos em estruturas de dados recursivas replicam a recursividade existente na estrutura de dados para os próprios algoritmos;
- Neste caso, temos uma árvore constituída por um nó raiz e duas subárvores, pelo que o algoritmo recursivo repetirá, na ordem desejada, esta estrutura:  
processamento do nó raiz, invocação recursiva para cada subárvore.

- Sendo as árvores binárias um exemplo de uma estrutura de dados recursiva, os algoritmos mais simples para as manipular tendem também a ser recursivos;
- Algoritmos recursivos em estruturas de dados recursivas replicam a recursividade existente na estrutura de dados para os próprios algoritmos;
- Neste caso, temos uma árvore constituída por um nó raiz e duas subárvores, pelo que o algoritmo recursivo repetirá, na ordem desejada, esta estrutura:  
processamento do nó raiz, invocação recursiva para cada subárvore.

# Dicionário implementado como árvore binária de procura

- Nome do módulo:

```
dict = BinarySearchTree
```

- Serviços:

```
BinarySearchTree(): construtor  
get(key, elem): retorna elem se existir;  
get(key): devolve elemento associado a key ou None  
remove(key): remove o elemento com a chave key  
search(key): procura uma chave  
contains(key): procura uma chave  
isEmpty(): árvore vazia  
size(): número de elementos  
clear(): remove a estrutura  
keys(): devolve um vetor com todos os valores  
contidos
```



- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()`: construtor;
  - `set(key, elem)`: criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)`: devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)`: apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)`: existe uma chave;
  - `isEmpty()`: árvore vazia;
  - `size()`: número de entradas;
  - `clear()`: esvazia a estrutura;
  - `keys()`: devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()`: construtor;
  - `set(key, elem)`: criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)`: devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)`: apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)`: existe uma chave;
  - `isEmpty()`: árvore vazia;
  - `size()`: número de entradas;
  - `clear()`: esvazia a estrutura;
  - `keys()`: devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.



- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()` : construtor;
  - `set(key, elem)` : criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)` : devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)` : apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)` : existe uma chave;
  - `isEmpty()` : árvore vazia;
  - `size()` : número de entradas;
  - `clear()` : esvazia a estrutura;
  - `keys()` : devolve um vector com todas as chaves existentes.

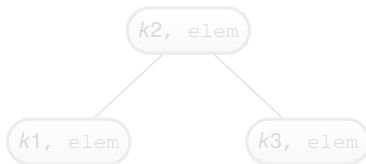
- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()`: construtor;
  - `set(key, elem)`: criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)`: devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)`: apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)`: existe uma chave;
  - `isEmpty()`: árvore vazia;
  - `size()`: número de entradas;
  - `clear()`: esvazia a estrutura;
  - `keys()`: devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()`: construtor;
  - `set(key, elem)`: criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)`: devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)`: apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)`: existe uma chave;
  - `isEmpty()`: árvore vazia;
  - `size()`: número de entradas;
  - `clear()`: esvazia a estrutura;
  - `keys()`: devolve um vector com todas as chaves existentes.

- Nome do módulo:
  - `BinarySearchTree`
- Serviços:
  - `BinarySearchTree()`: construtor;
  - `set(key, elem)`: criar/actualizar uma associação;
  - `get(key)`: devolve elemento associado a uma chave;
  - `remove(key)`: apaga uma chave com o elemento associado;
  - `contains(key)`: existe uma chave;
  - `isEmpty()`: árvore vazia;
  - `size()`: número de entradas;
  - `clear()`: esvazia a estrutura;
  - `keys()`: devolve um vector com todas as chaves existentes.

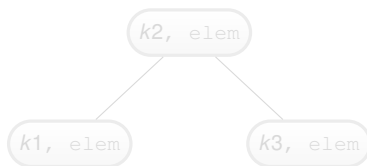
# Árvore Binária de Procura

- Os elementos (key, elem) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma key menor ao valor da key do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma key maior do que o valor da key do nó  $X$ .



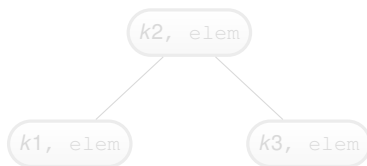
$k1 < k2 < k3$

- Os elementos (`key`, `elem`) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma `key` menor ao valor da `key` do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma `key` maior do que o valor da `key` do nó  $X$ .



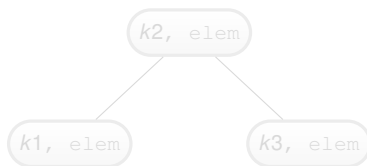
$$k1 < k2 < k3$$

- Os elementos (`key`, `elem`) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma `key` menor ao valor da `key` do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma `key` maior do que o valor da `key` do nó  $X$ .



$$k1 < k2 < k3$$

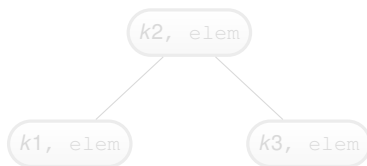
- Os elementos (`key`, `elem`) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma `key` menor ao valor da `key` do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma `key` maior do que o valor da `key` do nó  $X$ .



$$k1 < k2 < k3$$

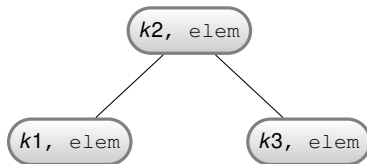


- Os elementos (`key`, `elem`) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma `key` menor ao valor da `key` do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma `key` maior do que o valor da `key` do nó  $X$ .



$$k1 < k2 < k3$$

- Os elementos (`key`, `elem`) estão armazenados na árvore binária da seguinte forma:
  - Todos os elementos na sub-árvore esquerda de cada nó  $X$  têm uma `key` menor ao valor da `key` do nó  $X$ .
  - Todos os elementos na sub-árvore direita de cada nó  $X$  têm uma `key` maior do que o valor da `key` do nó  $X$ .



$$k1 < k2 < k3$$

Árvore

Árvore Binária

Árvore Binária de  
Procura

Dicionário implementado  
como árvore binária de  
procura

- Algoritmo (tirando proveito da ABP):

```
search n in Tree.root
  if n.key < Tree.root.key then
    search n in LeftChildTree.root
  else if n.key > Tree.root.key then
    search n in RightChildTree.root
  else // n.key == Tree.root.key
    result = Tree.root // FOUND!
```

- Algoritmo (tirando proveito da ABP):

```
search n in Tree.root
  if n.key < Tree.root.key then
    search n in LeftChildTree.root
  else if n.key > Tree.root.key then
    search n in RightChildTree.root
  else // n.key == Tree.root.key
    result = Tree.root // FOUND!
```

- Algoritmo (tirando proveito da ABP):

```
search n in Tree.root
  if n.key < Tree.root.key then
    search n in LeftChildTree.root
  else if n.key > Tree.root.key then
    search n in RightChildTree.root
  else // n.key == Tree.root.key
    result = Tree.root // FOUND!
```

- Algoritmo (tirando proveito da ABP):

```
search n in Tree.root
  if n.key < Tree.root.key then
    search n in LeftChildTree.root
  else if n.key > Tree.root.key then
    search n in RightChildTree.root
  else // n.key == Tree.root.key
    result = Tree.root // FOUND!
```

# Árvores binárias de procura: inserir um elemento

- Algoritmo (inserir como “folha”)

```
insert n in Tree.root
  if Tree.root == null then
    Tree.root = n
  else if n.key < Tree.key then
    insert n in LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    insert n in RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: inserir um elemento

- Algoritmo (inserir como “folha”)

```
insert n in Tree.root
  if Tree.root == null then
    Tree.root = n
  else if n.key < Tree.key then
    insert n in LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    insert n in RightChildTree.root
```



# Árvores binárias de procura: inserir um elemento

- Algoritmo (inserir como “folha”)

```
insert n in Tree.root
  if Tree.root == null then
    Tree.root = n
  else if n.key < Tree.key then
    insert n in LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    insert n in RightChildTree.root
```

- Algoritmo (inserir como “folha”)

```
insert n in Tree.root
  if Tree.root == null then
    Tree.root = n
  else if n.key < Tree.key then
    insert n in LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    insert n in RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar no nó pai, a referência para esse nó e voltar.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Substituir o nó a remover fazendo o filho do nó pai ser o nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento da subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria fazer um swap entre os filhos do nó a eliminar e substituir o nó pelo filho resultante. Mas esta árvore poderia ficar desequilibrada.)

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)



# Árvores binárias de procura: remover um elemento

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

- Se é um nó folha (zero filhos):
  - Colocar, no nó pai, a referência para este nó a `null`.
- Se é um nó só com uma subárvore (1 filho):
  - Suprimir o nó a remover fazendo o ligação do seu pai ao nó da subárvore.
- Se é um nó com duas subárvores (2 filhos):
  - Substituir o nó a eliminar pelo menor elemento na subárvore da direita (ou pelo maior da esquerda).
  - (Uma alternativa seria inserir um dos filhos como folha do outro e substituir o nó pela raiz resultante. Mas cria árvores menos eficientes.)

# Árvores binárias de procura: remoção por procura de mínimo

## • Algoritmo

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      min = searchMinimum from RightChildTree.root
      delete min from RightChildTree.root
      min.LeftChildTree = LeftChildTree
      min.RightChildTree = RightChildTree
      Tree.root = min
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: remoção por procura de mínimo

- Algoritmo

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      min = searchMinimum from RightChildTree.root
      delete min from RightChildTree.root
      min.LeftChildTree = LeftChildTree
      min.RightChildTree = RightChildTree
      Tree.root = min
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: remoção por procura de mínimo

- Algoritmo

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      min = searchMinimum from RightChildTree.root
      delete min from RightChildTree.root
      min.LeftChildTree = LeftChildTree
      min.RightChildTree = RightChildTree
      Tree.root = min
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: remoção por procura de mínimo

- Algoritmo

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      min = searchMinimum from RightChildTree.root
      delete min from RightChildTree.root
      min.LeftChildTree = LeftChildTree
      min.RightChildTree = RightChildTree
      Tree.root = min
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

# Árvores binárias de procura: remoção por inserção como folha

## • Algoritmo:

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      Tree.root = insert LeftChildTree.root in RightChildTree.root
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

## • Cuidado: pode aumentar a altura da árvore!

# Árvores binárias de procura: remoção por inserção como folha

- Algoritmo:

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      Tree.root = insert LeftChildTree.root in RightChildTree.root
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

- Cuidado: pode aumentar a altura da árvore!



# Árvores binárias de procura: remoção por inserção como folha

- Algoritmo:

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      Tree.root = insert LeftChildTree.root in RightChildTree.root
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

- Cuidado: pode aumentar a altura da árvore!

# Árvores binárias de procura: remoção por inserção como folha

- Algoritmo:

```
delete n from Tree.root
  if n == Tree.root then
    if LeftChildTree.root == null then
      Tree.root = RightChildTree.root
    else if RightChildTree.root == null then
      Tree.root = LeftChildTree.root
    else
      Tree.root = insert LeftChildTree.root in RightChildTree.root
  else if n.key < Tree.key then
    delete n from LeftChildTree.root
  else // n.key >= Tree.key
    delete n from RightChildTree.root
```

- Cuidado: pode aumentar a altura da árvore!

# Árvores binárias de procura: remoção por inserção como folha

- Algoritmo:

```
delete n from Tree.root
if n == Tree.root then
  if LeftChildTree.root == null then
    Tree.root = RightChildTree.root
  else if RightChildTree.root == null then
    Tree.root = LeftChildTree.root
  else
    Tree.root = insert LeftChildTree.root in RightChildTree.root
else if n.key < Tree.key then
  delete n from LeftChildTree.root
else // n.key >= Tree.key
  delete n from RightChildTree.root
```

- **Cuidado:** pode aumentar a altura da árvore!

- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das duas sub-árvores não é superior a 1;
  - tanto as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.

- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das suas sub-árvores não é superior a 1;
  - todas as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.

- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das suas sub-árvores não é superior a 1;
  - todas as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.

- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das suas sub-árvores não é superior a 1;
  - todas as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.

- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das suas sub-árvores não é superior a 1;
  - todas as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.



- Uma árvore está equilibrada se:
  - a diferença das alturas das suas sub-árvores não é superior a 1;
  - todas as sub-árvores estão equilibradas.
- Para mantermos a árvore equilibrada temos de implementar operações de `insert` e `remove` que mantenham a árvore equilibrada.
- Manter uma árvore equilibrada permite garantir complexidade  $O(\log n)$  para as operações de pesquisa, inserção e remoção.