



FICHA DE EXERCÍCIOS 2

SUCESSÕES E SÉRIE DE FUNÇÕES; SÉRIES DE POTÊNCIAS(REVISITADAS) E SÉRIES DE FOURIER

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .  
(b) Justifique que a função (soma)  $S(x)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .
2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e  $\frac{1}{1-x}$ . Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a)  $e^{-x^2}$ ; (b)  $\cosh x$ ; (c)  $\sinh(3x)$ ; (d)  $2\cos^2 x$ ; (e)  $\frac{1}{4+x^2}$ .

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a)  $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$   
(b)  $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função  $\ln(x+1)$ .  
(Sugestão: desenvolva primeiro a função  $\frac{1}{x+1}$  em série de MacLaurin).  
(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a  $f(a)$ , onde  $a$  é um número óbvio e  $f$  é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ ; (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$ ; (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$ .

6. (a) Verifique que a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$  tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ ,  $-2 < x < 2$ . Explicite  $f(x)$ .

(Sugestão: use a representação em série de potências de  $\frac{1}{1-x}$ ).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8. Considere a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ .

(a) Determine o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule  $f'(4)$ , onde  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$  ( $f$  definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função  $f(x) = xe^{x^3}$  e indique o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral  $\int_0^1 xe^{x^3} dx$ .

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Desenvolva  $f(x)$  em série de MacLaurin.

(b) Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{n!}$

(Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

(c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar  $f(x)$  por  $T_0^2 f(x)$  no intervalo  $]0, 0.1]$ .

### Séries de Fourier:

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a)  $f(x) = x + x^2$ ,  $x \in [-\pi, \pi[$ ;

(b)  $g(x) = e^x$ ,  $x \in [-\pi, \pi[$ ;

(c)  $h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante  $f(x) = 2$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de  $f$  e represente graficamente as respectivas somas no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

14. Determine a série de Fourier de senos da função  $f$  dada  $f(x) = \cos x$  em  $[0, \pi]$ . Qual será a sua série de Fourier de cossenos?
15. Considere a função  $f$ ,  $2\pi$ -periódica, definida por  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- (a) Determine a série de Fourier de  $f$ .
- (b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

- (c) Usando a representação de  $f$  em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

- (d) Verifique que a série de Fourier de  $f$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .
- (e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

## Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).
2. (a)  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$   
(b)  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$   
(c)  $\sinh(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$   
(d)  $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$   
 $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$   
(e)  $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in ]-2, 2[.$
3. (a)  $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$   
(b)  $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in ]-1, 1[.$
4. (a)  $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in ]-1, 1[.$   
(Observação: a igualdade é também válida no ponto  $x = 1$ ; a justificação pode ser encontrada no Texto de Apoio).  
(b)  $(x+1) \ln(x+1) - x, \quad x \in ]-1, 1[$   
(por integração termo a termo da série da alínea anterior).
5. (a) 1; (b)  $\cosh(1)$ ; (c)  $-3 \ln(2/3)$ ; (d)  $2\sqrt{e}$ .
6. (a) —  
(b)  $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$
7. —
8. (a)  $]1, 5[.$   
(b)  $f'(4) = 1.$
9. (a)  $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$   
(b)  $\int_0^1 xe^{x^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)n!}.$
10. Representar  $e^{x^2}$  em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.
11. (a)  $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}.$$

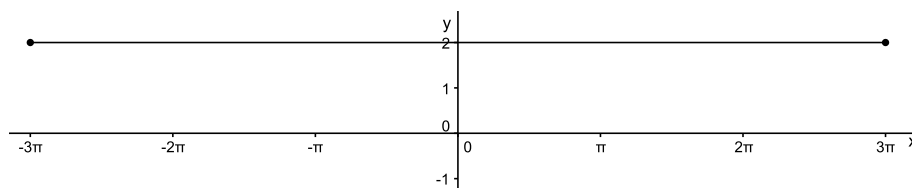
$$(c) |R_0^2 f(x)| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

$$12. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \right];$$

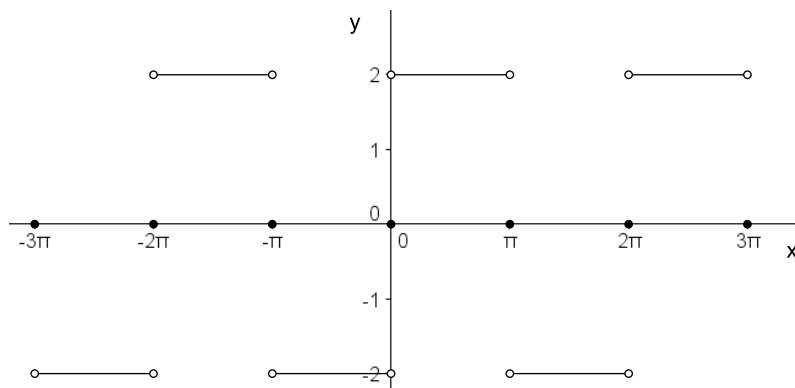
$$(b) g(x) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left[ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \sin(nx) \right];$$

$$(c) h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x).$$

13. Soma da série de cossenos:  $s(x) = 2$ ;



$$\text{Soma da série de senos: } S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in ]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[ \\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in ]2k\pi, \pi + 2k\pi[ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



$$14. \text{ Série de Fourier de senos: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2kx).$$

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função  $\cos x$ .

$$15. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) A função  $f$  é contínua e seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Portanto, a soma da série coincide com a própria função  $f$  (em  $\mathbb{R}$ ). Notar que  $f(x) = x^2$  em  $[-\pi, \pi]$ .

(c) Tomar, em particular,  $x = 0$  na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).