

- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Considera a função real de três variáveis reais definida pela expressão $f(x, y, z) := \sqrt{xy^2z^3}$.
 - (a) Indica o domínio de f e justifica a diferenciabilidade de f no subconjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ do seu domínio.
 - (b) Determina a direção e o sentido em que f mais cresce a partir do ponto $(2, 2, 2)$ e calcula a taxa de variação máxima de f nesse ponto.
 - (c) Justifica a existência de plano tangente à superfície de nível 8 de f no ponto $(2, 2, 2)$ e determina a equação cartesiana desse plano tangente.
2. Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x, y) := x^2 + 4y^2$.
 - (a) Determina e classifica os pontos críticos de f .
 - (b) Justifica a existência de extremos absolutos de f restrita ao conjunto definido pela desigualdade $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 4$ e calcula-os, assim como os respetivos extremantes absolutos, indicando também quais são maximizantes e quais são minimizantes.
3. Classifica e resolve as seguintes equações diferenciais ordinárias:
 - (a) $y' + x^2y = e^{x^3} \frac{y^4}{3}$;
 - (b) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$;
 - (c) $y^{(4)} + y'' = 0$.
4. Seja $g(x, y) := f(x^2 + y^2)$, onde f é uma função real continuamente diferenciável (i.e., com derivada contínua) em \mathbb{R} .
 - (a) Justifica que g é diferenciável em \mathbb{R}^2 .
 - (b) Sabendo que $f'(2) = 1$, determina a equação da reta tangente em $(1, 1)$ à curva de nível de g que passa por este ponto, após justificares a existência de uma tal reta tangente de acordo com a definição dada nesta unidade curricular.
5. Considera uma EDO da forma $M(x, y) + N(x, y) y' = 0$.
 - (a) Supondo que é exata, explica porque é que as suas soluções se obtêm da maneira indicada nesta unidade curricular.
 - (b) Supondo que não é exata, explica o que é um seu fator integrante.
 - (c) Dá um exemplo concreto de uma EDO que não seja exata e de um seu fator integrante e resolve essa EDO.

FIM

Cotação:

1. 4; 2. 5; 3. 6; 4. 2; 5. 3.