Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

1.ª ***Prova de Avaliação Discreta; 13 de abril de 2018***

Duração: **2h00**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere a seguinte série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$.

[17pts] (a) Calcule o raio de convergência da série.

[18pts] (b) Determine o seu domínio de convergência.

2. Seja $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

[15pts] (a) Sabendo que $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, determine o polinómio de MacLaurin de ordem n de f, isto é, $T_0^n f(x)$.

[25pts] (b) Usando o polinómio $T_0^2 f(x)$, calcule um valor aproximado de $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\dfrac{1}{48}$.

[20pts] 3. (a) Tendo em conta que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$, mostre que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ |x| < 1\ .$$

[15pts] (b) Determine um desenvolvimento em série de potências da função $h(x) = x^3 \ln(1+x^2)$, para $x \in]-1, 1[$.

4. Seja g a função real de variável real 2π–periódica tal que $g(x) = \pi - 2|x|,\ -\pi \leq x \leq \pi$.
Na resolução das alíneas seguintes, quando pertinente, considere como provado que:
g é par, contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

[20pts] (a) Determine a série de Fourier de g.

[10pts] (b) Justifique que $\displaystyle g(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2},\ x \in \mathbb{R}$.

[15pts] (c) Mostre que a série de Fourier de g é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

5. Considere f a função de domínio contido em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

[10pts] (a) Determine o domínio de f.

[20pts] (b) Determine as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ de f, para $k = 0$ e $k = \frac{1}{2}$, respetivamente. Faça os seus esboços gráficos.

[15pts] (c) Mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.