Capitolo 1

DEA

1.1 Introduzione

Il *Data Envelopment Analysis*, che indicheremo con l'acronimo *DEA*, è un metodo non parametrico per la stima delle frontiere di efficienza. È usato per misurare empiricamente l'efficienza produttiva delle unità decisionali, *DMU* (Decision Making Units). Gli approcci non parametrici hanno il vantaggio di non assumere particolari forme alla frontiera, ma non forniscono una relazione generale tra input e output.

Per introdurci allo studio della DEA, iniziamo con l'esporre un primo esempio esplicativo. Supponiamo di avere otto negozi $\{A, \cdots, H\}$, ciascuno dei quali dispone di un certo numero di impiegati e produce un certo quantitativo di vendite (quest'ultime in scala 1:100000). Una semplice misura di efficienza per ciascun negozio pu essere espressa dalla seguente formula:

$$\frac{Output}{Input} \tag{1.1}$$

dove le vendite sono gli output e gli impiegati l'input. Mostriamo in Tabella 1.1 i dati relativi al problema precedentemente esposto.

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Impiegato	2	3	3	4	5	5	6	8
Vendita	1	3	2	3	4	2	3	5
Vendita/Impiegato	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.1: Esempio con singolo input e singolo output

Analizzando i coefficienti contenuti nell'ultima riga della Tabella 1.1, possiamo identificare B come negozio più efficiente. Si può rappresentare graficamente questa situazione, mettendo sulle ascisse il numero di impiegati e sulle ordinate le vendite, come in Figura 1.1.

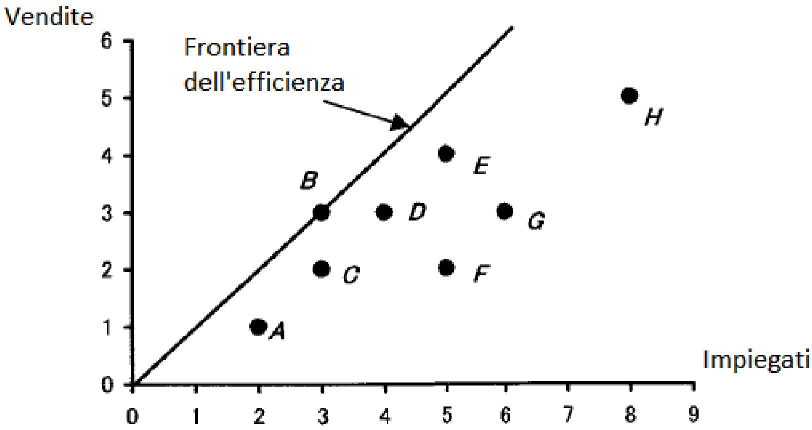

Figura 1.1: Rappresentazione grafica dell'esempio

Osserviamo dalla Figura 1.1 che per ogni negozio possiamo esprimere le vendite di ciascun dipendente come coefficiente angolare della retta che congiunge il punto del grafico corrispondente al negozio con l'origine. La retta con la pendenza maggiore (in questo caso quella passante per B) viene chiamata *Frontiera dell'efficienza*. La scelta del nome è dovuta al fatto che i punti del grafico non posso trovarsi al di sopra di questa retta.

Proseguiamo l'analisi dell'esempio valutando l'efficienza di tutti i negozi rispetto a B, con la formula

$$0 \leq \frac{\text{Vendite per impiegato del negozio i-esimo}}{\text{Vendite per impiegato di B}} \leq 1 \tag{1.2}$$

ottenendo:

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Efficienza	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.2: Esempio con singolo input e singolo output

A questo punto possiamo proporre delle strategia per rendere efficienti i negozi inefficienti: graficamente si traduce nell'avvicinare i punti rappresentanti i negozi alla frontiera dell'efficienza. Per esempio, il negozio A, può essere migliorato:

$$\text{riducendo l'input (numero di impiegati)} \tag{1.3}$$

$$\text{aumentando l'output (vendite)} \tag{1.4}$$

Le due alternative proposte equivalgono rispettivamente ai punti A_1 e A_2 riportati in Figura 1.2: il punto A_1 corrisponde alla situazione in cui si riducono gli impiegati da 2 a 1, mantenendo le vendite inalterate; il punto A_2 invece, corrisponde ad un aumento delle vendite da 1 a 2 lasciando inalterato il numero di impiegati. Infine, tutti gli altri punti del segmento $\overline{A_1A_2}$ rappresentano un miglioramento del negozio A non ottenibile tramite le opzioni (1.3) o (1.4).

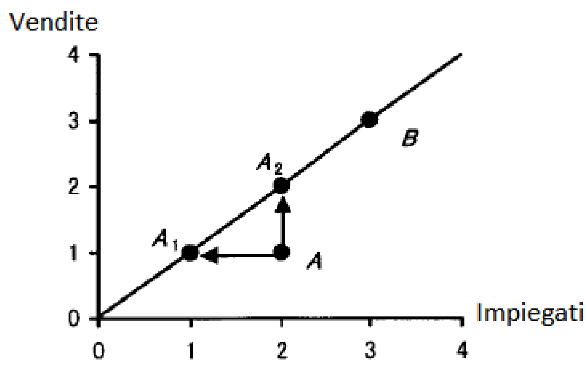

Figura 1.2: Miglioramento del negozio A

Osservazione 1.1.1 *Il nome 'Data Envelopement Analysis' proviene dalla proprietà della frontiera dell'efficienza che avvolge (*envelope*) tutte le rappresentazioni grafiche delle DMU.*

Non ragionevole ritenere che la frontiera dell'efficienza si estenda all'infinito con la stessa pendenza. Analizzeremo questo problema in seguito utilizzando diversi modelli DEA. Tuttavia, diamo per scontato che questa linea efficace nel range di interesse e chiamiamo tale assunzione 'rendimenti di scala costanti'.

Per concludere questa parte introduttiva cerchiamo di dare una definizione che possa caratterizzare le organizzazioni oggetto della *DEA*. Generalmente viene chiamata *DMU* un'entitá responsabile di convertire input in output e per la quale sia possibile valutarne le performances.

Capitolo 2

Metodi Test DEA

2.1 CCR

Proseguiamo la trattazione esponendo il modello presentato per la prima volta da Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978, che va sotto il nome di CCR.

Definizione 1 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(FP_o) \qquad & \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \theta = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \\
t.c \qquad & \frac{u_1 y_{1j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \cdots + v_m x_{mj}} \geq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
& v_1, \ldots, v_m \geq 0 \\
& u_1, \ldots, u_s \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

dove v_j e u_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Osserviamo che la 2.1 rappresenta un problema frazionale, quindi per poterlo eseguire con un elaboratore é risulta necessario riformularlo in modo da ottenere un problema lineare.

Definizione 2 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(FP_o) \qquad & \max_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \theta = \mu_1 y_{1o} + \cdots + \mu_s y_{so} \\
t.c \qquad & \nu_1 x_{1o} + \cdots + \nu_m x_{mo} = 1 \\
& \mu_1 y_{1j} + \cdots + \mu_s y_{sj} \leq \nu_1 x_{1j} + \cdots + \nu_m x_{mj} \quad (j = 1, \ldots, n) \\
& \nu_1, \ldots, \nu_m \geq 0 \\
& \mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

dove ν_j e μ_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Teorema 2.1.1 *La 2.1 é equivalente alla 2.2*

Teorema 2.1.2 *(Unit Invariant Theorem) La soluzione ottimale della 2.1 e 2.2 che indicheremo con* $\max\theta = \theta^*$ *sono indipendeti dalle unitá di misura con cui sono espressi output e input a patto che per ogni* DMU *essi siano valutati con la stessa unitá di misura.*

Definizione 3 *(CCR-Efficiency) La DMU é efficiente per il CCR-Model se* $\theta^* = 1$ *e* $(\boldsymbol{v^*}, \boldsymbol{u^*})$*, con* $\boldsymbol{v^*} \geq \boldsymbol{0}$ *e* $\boldsymbol{u^*} \geq \boldsymbol{0}$*. Altrimenti la DMU é inefficiente.*

Definizione 4 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Duale nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (DLP_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\ t.c \qquad & \theta \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\ & \boldsymbol{Y\lambda} \geq \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ *rappresenta il vettore dei pesi.*

Definizione 5 *Definiamo i vettori degli input in eccesso e degli output carenti, indicati rispettivamente come* $\boldsymbol{s^-}$ *e* $\boldsymbol{s^+}$*, nel seguente modo:*

$$\boldsymbol{s^-} = \theta \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \ , \ \boldsymbol{s^+} = \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{y_o} \tag{2.4}$$

Definizione 6 *Usando la soluzione ottima del modello CCR-DUAL risolviamo il seguente sistema:*

$$\begin{aligned} max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{s^-},\boldsymbol{s^+}} \qquad & \omega = \boldsymbol{es^-} + \boldsymbol{es^+} \\ t.c. \qquad & \boldsymbol{s^-} = \theta^* \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \\ & \boldsymbol{s^+} = \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{s^-} \geq \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{s^+} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$*. Definiamo tale modello II fase.*

Definizione 7 *Una soluzione ottima* $(\boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$ *del modello precedentemente esposto é chiamata "max-slack solution". Se tale soluzione soddisfa* $\boldsymbol{s^{-*}} = \boldsymbol{0}$ *e* $\boldsymbol{s^{+*}} = \boldsymbol{0}$ *viene chiamata "zero-slack".*

Definizione 8 *Se una soluzione ottimale* $(\boldsymbol{\theta^*}, \boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$ *dei due modelli esposti soddisfa* $\theta^* = 1$ *ed é una soluzione zero-slack allora la DMU é chiamata CCR-efficient. Altrimenti é inefficiente.*

Osservazione 2.1.3 *Anche in questo caso possiamo definire i vettori di slack:*

$$X\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{s^-} = \boldsymbol{x_o} Y\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{s^+} = \theta \boldsymbol{y_o} \tag{2.6}$$

Definizione 9 *(Pareto-Koopmans Efficiency) Una DMU é pienamente efficiente se e solo se non é possibile aumentare qualunque input o output senza peggiorarne un altro.*

Teorema 2.1.4 *LE due definizioni di CCR-Efficient sono equivalenti.*

Osservazione 2.1.5 *Per una DMU_o inefficiente, noi definiamo l'insieme di riferimento E_o, usando la max-slack solution ottenuta usando la 2.5 e la 2.2:*

$$E_o = \{j|\lambda_j^* \geq 0\} \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}). \tag{2.7}$$

Una soluzione ottimale puó essere espressa come:

$$\begin{aligned} \theta^* \boldsymbol{x_o} &= \sum_{j \in E_o} \boldsymbol{x_j \lambda_j^*} + \boldsymbol{s^{-*}} \\ \boldsymbol{y_o} &= \sum_{j \in E_o} \boldsymbol{y_j \lambda_j^*} - \boldsymbol{s^{+*}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Questo puó essere interpretato come segue:

$$\boldsymbol{x_o} \geq \theta^* \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{s^{-*}} = \sum_{j \in E_o} \boldsymbol{x_j \lambda_j^*} \tag{2.9}$$

quindi

$$\boldsymbol{x_0} \geq \textit{tecnice - mista inefficiente} = \textit{ una combinazione positiva degli input valutati} \tag{2.10}$$

In modo analogo

$$\boldsymbol{y_o} \leq \boldsymbol{y_o} + \boldsymbol{s^{+*}} = \sum_{j \in E_o} \boldsymbol{y_j \lambda_j^*} \tag{2.11}$$

quindi

$$\boldsymbol{y_0} \leq \textit{output + carenze} = \textit{ una combinazione positiva degli output valutati} \tag{2.12}$$

Concludendo queste relazioni suggeriscono che l'efficienza $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ per una DMU puó essere migliorata riducendo radialmente gli input usando la θ^* e eliminando gli eccessi s^{-*}. In modo analogo si puó agire sugli output aumentando gli output della quantitá espressa da s^{+*}.

Dalle considerazioni fatte fino ad ora possiamo enunziare la seguente definizione

Definizione 10 *Definiamo le* CCR-projection *come:*

$$\boldsymbol{\hat{x}_o} = \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{\Delta x_o} = \theta^* \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{s^{-*}} \leq \boldsymbol{x_o} \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\hat{y}_o} = \boldsymbol{y_o} + \boldsymbol{\Delta y_o} = \theta^* \boldsymbol{y_o} + \boldsymbol{s^{+*}} \geq \boldsymbol{y_o} \tag{2.14}$$

Teorema 2.1.6 *Le migliorie $(\boldsymbol{\hat{x}_o}, \boldsymbol{\hat{y}_o})$ espresse dalle 2.13 e 2.14 sono CCR-efficient*

Corollario 2.1.7 *I punti con coordinate $(\boldsymbol{\hat{x}_o}, \boldsymbol{\hat{y}_o})$ definite dalle 2.13 e 2.14 rappresentano il punto della frontiera dell'efficienza usata per valutare la performance della DMU_o.*

Lemma 2.1.8 *Per il punto $(\boldsymbol{\hat{x}_o}, \boldsymbol{\hat{y}_o})$, esiste una soluzione ottima $(\boldsymbol{\hat{v}_o}, \boldsymbol{\hat{u}_o})$ per il problema (LP_e), la quale é duale a (DLP_e), tale che:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\hat{v}_o} &\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\hat{u}_o} &\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\hat{v}_o x_j} &= \boldsymbol{\hat{u}_o y_j} \quad (j \in E_o) \\ \boldsymbol{\hat{v}_o X} &\geq \boldsymbol{\hat{u}_o Y} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Teorema 2.1.9 *Le DMU in E_o definito in 2.7 sono CCR-efficient*

Teorema 2.1.10 *Ciascuna combinazione semipositiva delle DMU in E_o é CCR-efficient.*

Definizione 11 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model orientato agli Output nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(DLPO_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\
t.c \qquad & \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{Y\lambda} \geq \theta \boldsymbol{y_o} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Osservazione 2.1.11 *Supponiamo di avere $(\theta^*, \boldsymbol{s^{*-}}, \boldsymbol{s^{*+}})$ soluzioni ottimali del CCR-Model e $(\mu^*, \boldsymbol{t^{*-}}, \boldsymbol{t^{*+}})$ soluzioni del CCR-Model orientato agli output, allora si ha che:*

$$
\boldsymbol{t^{*-}} = \boldsymbol{s^{*-}}/\theta^*, \boldsymbol{t^{*+}} = \boldsymbol{s^{*+}}/\theta^* \tag{2.17}
$$

2.2 BCC

Definizione 12 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(BCC_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\
t.c \qquad & \theta\boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{Y\lambda} \geq \boldsymbol{y_o} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{e\lambda} = 1
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\boldsymbol{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 13 *Se una soluzione ottima $(\theta^*, \boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$, ottenuta applicando la II fase al BCC-Model, soddisfa le condizioni $\theta^* = 1$ e "no slack solution" allora la DMU é chiamata BCC-efficient, altrimenti é inefficiente.*

Definizione 14 *Per una DMU_o inefficiente per BCC model definiamo il suo insieme di riferimento, E_o basato su una soluzione ottima $\boldsymbol{\lambda^*}$ come:*

$$
E_o = \{j | \lambda_j^* \geq 0\} \quad (j \in \{1, \dots, n\} \tag{2.19}
$$

Definizione 15 *Definiamo le proiezioni del BCC-Model come:*

$$
\hat{\boldsymbol{x_o}} = \theta^* \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{s^{-*}} \tag{2.20}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{y_o}} = boldsymboly_o + s^{+*} \tag{2.21}
$$

Teorema 2.2.1 *Il punto di coordinate $(\hat{\boldsymbol{x_o}}, \hat{\boldsymbol{y_o}})$ é BCC-efficient.*

Teorema 2.2.2 *Ogni DMU in E_o associata a un λ_j definita come 2.19 é BCC-efficient*

Teorema 2.2.3 *Una DMU che ha un il valore minimo per ogni input, oppure che ha valore massimo per ciascun output, é BCC-efficient.*

Definizione 16 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo il BCC orientato all'Output nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (BCC_0 - 0) \qquad & \max_{\theta, \boldsymbol{\lambda}} \theta \\ t.c \qquad & \boldsymbol{X\lambda} \leq \boldsymbol{x_o} \\ & \boldsymbol{Y\lambda} \geq \theta \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \\ & \boldsymbol{e\lambda} = 1 \end{aligned} \tag{2.22}$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ *rappresenta il vettore dei pesi ed* $\boldsymbol{e} = (1 \dots 1)$.

2.3 ADDITIVE MODEL

Definizione 17 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo l'ADDITIVE-MODEL nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (ADD_0) \qquad & \max_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s^+}, \boldsymbol{s^-}} \theta = \boldsymbol{es^-} + \boldsymbol{e^+} \\ t.c \qquad & \boldsymbol{X\lambda} + \boldsymbol{s^-} = \boldsymbol{x_o} \\ & \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{s^+} = \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{e\lambda} = 1 \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{s^-} \geq 0, \boldsymbol{s^+} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ *rappresenta il vettore dei pesi ed* $\boldsymbol{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 18 *Una DMU si dice* ADD-efficient *se e solo se* $\boldsymbol{s^{-*}} = \boldsymbol{0}$ *e* $\boldsymbol{s^{+*}} = \boldsymbol{0}$

Teorema 2.3.1 DMU_o *é ADD-efficient se e solo se é BCC-efficient*

Teorema 2.3.2 *Definiamo* $\hat{\boldsymbol{x_o}} = \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{s^{-*}}$ *e* $\hat{\boldsymbol{y_o}} = \boldsymbol{y_o} + \boldsymbol{s^{+*}}$. *Allora il punto* $(\hat{\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}}$ *é ADD-efficient.*

Definizione 19 *Definiamo* Mix *la proporzione nella quale gli input sono usati e gli output prodotti.*

Definizione 20 *Dato un qualunque problema, una modello DEA é detto* traslation invariant *se le traslazioni degli input e/o output iniziali generano un nuovo problema che ammette le stesse soluzioni del problema originale.*

Teorema 2.3.3 *L'Additive-model é* traslation invariant.

2.4 SBM MODEL

Definizione 21 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo SBM-DUALE nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (D - SBM) \qquad & \max_{\theta, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}} \theta \\ t.c \qquad & \theta + \boldsymbol{v x_o} - \boldsymbol{u y_o} = 1 \\ & \boldsymbol{uY} - \boldsymbol{vX} \leq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} \geq 1/m[1/\boldsymbol{x_o}] \\ & \boldsymbol{u} \geq \theta/s[1/\boldsymbol{y_o}] \end{aligned} \tag{2.24}$$

dove con $[1/\boldsymbol{x}]$ *rappresenta il vettore* $(1/x_1, \ldots, 1/x_m)$.

Definizione 22 *Una DMU si dice* SBM-efficient *se e solo se* $\theta = 1$

Definizione 23 *L'insieme degli indici corrispondenti ai valori positivi di* λ_j^* *é chiamato insieme di riferimento per il punto* $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$

Teorema 2.4.1 *La soluzione ottima del SBM-Model é sempre minore o uguale a quella del CCR-model.*

Teorema 2.4.2 *Una DMU é CCR-efficient se e solo se é SBM-efficient.*

2.5 HYBRID

Ci sono due tipo di approcci nella DEA: *radiale* e *non radiale.* La differenza esiste nella caratterizzazione degli input o degli output. Supponiamo di avere 4 input (x_1, x_2, x_3, x_4) tali che x_1, x_2 sono radiali e gli altri no. Questa differenza potrebbe riflettersi sulla valutazione dell'efficienza. Nei modelli fino ad ora analizzati osserviamo che il CCR e il BCC hanno un approccio radiale mentre SBM ha un approccio non-radiale. In questa sezione mostreremo un approccio ibrido per misurare l'efficienza.

Definizione 24 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ *la matrice degli Output. Decomponiamo la matrice degli input nella sua parte radiale* $\boldsymbol{X^R} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ *e non radiale* $\boldsymbol{X^{NR}} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$*, con* $m_1 + m_2 = m$*. In modo del tutto analogo decomponiamo la matrice degli output in* $\boldsymbol{Y^R} \in \mathbb{R}^{s_1 \times n}$ *e* $\boldsymbol{Y^{NR}} \in \mathbb{R}^{s_2 \times n}$*, con* $s_1 + s_2 = s$*. Supponiamo infine che l'insieme dei dati considerati sia assolutamente positivo, allora definiamo l'insieme delle possibilitá produttive come:*

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{X\lambda}, \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{Y\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}\} \tag{2.25}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ *é un vettore non negativo.*

Osservazione 2.5.1 *Diamo un equazione per descrivere un determinata* $DMU(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}) = (\boldsymbol{x_o^R}, \boldsymbol{x_o^{NR}}, \boldsymbol{y_o^R} \boldsymbol{y_o^{NR}} \in P$ *:*

$$\begin{aligned} \theta \boldsymbol{x_o^R} &= \boldsymbol{X^R \lambda} + \boldsymbol{s^{R-}} \\ \boldsymbol{x_o^{NR}} &= \boldsymbol{X^{NR} \lambda} + \boldsymbol{s^{NR-}} \\ \phi \boldsymbol{y_o^R} &= \boldsymbol{Y^R \lambda} - \boldsymbol{s^{R+}} \\ \boldsymbol{y_o^{NR}} &= \boldsymbol{Y^{NR} \lambda} - \boldsymbol{s^{NR+}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

con $\theta \leq 1, \phi \geq 1, \boldsymbol{\lambda \geq 0, s^{R-} \geq 0, s^{NR-} \geq 0, s^{R+} \geq 0, s^{NR+} \geq 0}$. *Infine definiamo l'indice* ρ *come:*

$$\rho = \frac{1 - \frac{m_1}{m}(1-\theta) - \frac{1}{m}\Sigma_{i=1}^{m_2} s_i^{NR-}/x_{io}^{NR}}{1 + \frac{s_1}{s}(\phi - 1) - \frac{1}{s}\Sigma_{r=1}^{s_2} s_r^{NR+}/y_{ro}^{NR}} \tag{2.27}$$

Definizione 25 *La* $DMU(\boldsymbol{x_o, y_o})$ *é hybrid efficient se e solo se* $\rho = 1$ *per ogni espressione possibile della 2.26, cioé,* $\theta = 1, \phi = 1, \boldsymbol{s^{NR-} = 0, s^{NR-} = 0}$

Definizione 26 *Utilizzando le considerazioni fatte fino a questo punto possiamo definire il modello Hybrid nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}
&\text{(HYBRID)} \qquad && \tau^* = \min t - \frac{m_1}{m}(\tau - \Theta) - \frac{1}{m}\Sigma_{i=1}^{m_2}\frac{S_i^{NR_-}}{x_{io}^{NR}} \\
&t.c && t + \frac{s_1}{s}(\Phi - t) + \frac{1}{s}\Sigma_{r=1}^{s_2}\frac{S_r^{NR_+}}{y_{ro}^{NR}} \\
& && \Theta \boldsymbol{x_o^R} \geq X^R \boldsymbol{\Lambda} \\
& && t\boldsymbol{x_o^{NR}} = X^{NR}\boldsymbol{\Lambda} + S^{NR_-} \\
& && \Phi \boldsymbol{y_o^R} \leq Y^R \boldsymbol{\Lambda} \\
& && t\boldsymbol{y_o^{NR}} = Y^{NR}\boldsymbol{\Lambda} - S^{NR_+} \\
& && \Theta \leq t, \Phi \geq t, \boldsymbol{\Lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{S^{NR_+}} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{S^{NR_-}} \geq \boldsymbol{0},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Teorema 2.5.2 *La* $DMU(\boldsymbol{x_o, y_o})$ *é hybrid efficient se e solo se* $\tau = 1$.

Osservazione 2.5.3 *Sia* $(t^*, \Theta^*, \Phi^*, \boldsymbol{\Lambda^*, S^{NR_-*}, S^{NR_+*}})$ *la soluzione ottima del HYBRID allora definiamo:*

$$\begin{aligned}
\theta^* &= \frac{\Theta^*}{t^*} \\
\phi^* &= \frac{\Phi^*}{t^*} \\
\boldsymbol{\lambda}^* &= \frac{\boldsymbol{\Lambda}^*}{t^*} \\
\boldsymbol{s^{NR_-*}} &= \frac{\boldsymbol{S^{NR_-*}}}{t^*} \\
\boldsymbol{s^{NR_+*}} &= \frac{\boldsymbol{S^{NR_+*}}}{t^*}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Se $\tau \leq 1$ *allora definiamo le proiezioni del HYBRID model come:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\hat{x}_o^R} &\longleftarrow \theta^* \boldsymbol{x_o^R} \\
\boldsymbol{\hat{x}_o^{NR}} &\longleftarrow \boldsymbol{x_o^{NR}} - \boldsymbol{s}^{NR_-*} \\
\boldsymbol{\hat{y}_o^R} &\longleftarrow \phi^* \boldsymbol{y_o^R} \\
\boldsymbol{\hat{y}_o^{NR}} &\longleftarrow \boldsymbol{y_o^{NR}} + \boldsymbol{s}^{NR_+*}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Teorema 2.5.4 *Le proiezioni definite nell'osservazione precedente sono* hybrid efficient.

2.5.1 Decomposizione inefficienza

Usiamo la soluzione ottima del modello HYBRID per decomporre l'inefficienza della DMU in quattro fattori:

$$\begin{aligned}
\text{inefficienza degli Input radiali:} \quad & \alpha_1 = \frac{m_1}{m}(1-\theta^*) \\
\text{inefficienza degli Input non radiale:} \quad & \alpha_2 = \Sigma_{i=1}^{m_2} \frac{s_i^{NR_{-*}}}{x_{io}^{NR}} \\
\text{inefficienza degli Outoput radiali:} \quad & \beta_1 = \frac{s_1}{m}(\phi^* - 1) \\
\text{inefficienza degli Output non radiale:} \quad & \beta_2 = \frac{1}{s}\Sigma_{r=1}^{s_2} \frac{s_r^{NR_{+*}}}{y_{io}^{NR}}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Possiamo definire l'inefficienza degli input e output come:

$$\begin{aligned}
\text{inefficienza degli Input:} \quad & \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\
\text{inefficienza degli Output:} \quad & \beta = \beta_1 + \beta_2
\end{aligned} \tag{2.32}$$

allora possiamo esprimere τ come:

$$\tau^* = \frac{1-\alpha}{1+\beta} = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1+\beta_1+\beta_2} \tag{2.33}$$

Tale espressione risulta utile nella ricerca delle cause che portano all'inefficienza della DMU in esame.

Osservazione 2.5.5 *Possiamo definire il CCR e SBM model come un caso particolare del modello Hybrid e quindi possiamo comparare le relazioni tra le rispettive soluzioni ottime. Il modello Hybrid puó essere trasformato in un CCR o SBM eliminando la distinzione tra input radiali e non. Mostriamo nel dettaglio quanto detto:*

$$\begin{aligned}
(CCR) \quad & \rho^*_{CCR} = \min \frac{\theta}{\phi} \\
(t.c) \quad & \theta \boldsymbol{x_o} \geq X\boldsymbol{\lambda} \\
& \phi \boldsymbol{x_o} \leq Y\boldsymbol{\lambda} \\
& \theta \leq 1, \phi \geq 1, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
(SBM) \quad & \rho^*_{SBM} = \min \frac{\theta}{\phi} \\
(t.c) \quad & \boldsymbol{x_o} = X\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{s^-} \\
& \boldsymbol{y_o} = Y\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{s^+} \\
& \boldsymbol{s^-} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{s^+} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

In modo analogo possiamo definire i modelli orientati agli input o agli output.

Teorema 2.5.6 *Utilizzando le notazioni usate nell'osservazione enunciamo le seguenti catene di disuguaglianze relative ai modelli mostrati in precedenza:*

$$\begin{aligned}
\rho^*_{CCR} &\geq \rho^* \geq \rho^*_{SBM} \\
\rho^*_{CCR-I} &\geq \rho^*_I \geq \rho^*_{SBM-I} \\
\rho^*_{CCR-O} &\geq \rho^*_O \geq \rho^*_{SBM-O} \\
\rho^*_{SBM-I} &\geq \rho^*_{SBM} \\
\rho^*_{SBM-O} &\geq \rho^*_{SBM} \\
\rho^*_{CCR-I} &\geq \rho^*_{CCR} \\
\rho^*_{CCR-O} &\geq \rho^*_{CCR}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Capitolo 3

Ritorno di Scala

3.1 Ritorno di scala

TODO: scrivere l'introduzione Ora consideriamo le condizioni per i ritorni di scala dei seguenti modelli

3.2 Il ritorno di scale del BBC-Model

Consideriamo le equazioni del BCC model:

$$\begin{array}{rl} \max & z = \boldsymbol{u}\boldsymbol{y_o} - u_o \\ \text{t.c} & \boldsymbol{v}\boldsymbol{x_o} = \mathbf{1} \\ & -\boldsymbol{v}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{Y} - u_o\boldsymbol{e} \leq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}, u_o \text{ qualunque} \end{array} \tag{3.1}$$

possiamo esprime i ritorni di scala per tale modello utilizzando il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 *Assumiamo che* $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ *sia una punto della frontiera dell'efficienza allora abbiamo che:*
(i)L'Increasing returns-to-scale prevale su $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ *se e solo se* $u_o^* < 0$ *per ogni soluzioni ottimale.*
(ii)Il Decreasing returns-to-scale prevale su $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ *se e solo se* $u_o^* > 0$ *per ogni soluzioni ottimale.*
(ii)Il Constant returns-to-scale prevale su $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ *se e solo se* $u_o^* = 0$ *in alcune soluzioni ottimali.*

3.3 Il ritorno di scale del CCR-Model

Teorema 3.3.1 *Sia* $(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o})$ *sia una punto della frontiera dell'efficienza, e consideriamo la soluzione ottima ottenuta dal CCR-Model* $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$*. Il ritorno di scale in tale punto pu essere determinato dalle seguenti condizioni:*
(i) Se $\Sigma_{j=1}^n \lambda_j^* = 1$ *in ciascuna soluzione ottimale allora prevale il constant returns-to-scale*
(ii) Se $\Sigma_{j=1}^n \lambda_j^* > 1$ *in ciascuna soluzione ottimale allora prevale il decreasing returns-to-scale*

(iii) Se $\Sigma_{j=1}^{n}\lambda_j^* < 1$ in ciascuna soluzione ottimale allora prevale l'increasing returns-to-scale

Enunciamo adesso un teorema che mette in relazione il BBC-Model e CCR-Model.

Teorema 3.3.2 *Consideriamo le soluzioni ottimali del CCR-Model e del BCC-Model si ha che:*
(i) $u_o^* > 0$ per ogni soluzione ottimale del BBC-Model se e solo se $\Sigma_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^* > 1$ per ogni soluzione ottimale del CCR-Model corrispondente.
(ii) $u_o^* < 0$ per ogni soluzione ottimale del BBC-Model se e solo se $\Sigma_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^* < 1$ per ogni soluzione ottimale del CCR-Model corrispondente.
(iii) $u_o^* = 0$ per alcune soluzione ottimali del BBC-Model se e solo se $\Sigma_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^* = 1$ per alcune soluzioni ottimali del CCR-Model corrispondente.

3.4 Grandezze di scala produttive

Teorema 3.4.1 *Una DMU_o efficiente per il CCR-Model sará efficiente anche per il BCC-Model model e prevará il constant returns-to-scale.*

TODO scrivere def MPSS

Definizione 27 *Una DMU_o si dice MPSS se soddisfa le seguenti condizioni:*

$$\begin{array}{ll} (i) & \beta^*/\alpha^* \\ (ii) & \textit{tutti gli slack sono zero} \end{array} \tag{3.2}$$

Teorema 3.4.2 *Consideriamo una DMU_o con input e output rappresentati dai vettori $\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}$. Si ha che una condizione necessaria per essere MPSS é $\beta^*/\alpha^* = \max \beta/\alpha = 1$. In tale caso $\beta^* = \alpha^*$ e i ritorni di scala sono costanti.*

Teorema 3.4.3 *Nel BCC model un insieme di riferimento per ciascuna DMU non efficiente non pu includere allo stesso tempo increasing e decreasing return-to-scale DMUs.*

Corollario 3.4.4 *Sia E_o l'insieme di riferimento di una $DMU(\boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_0})$. Allora, E_o4 sará costituita da una delle seguenti combinazioni di DMU efficienti:*

$$\begin{array}{rl} (i) & \textit{Tutte le DMU sono IRS} \\ (ii) & \textit{Tutte le DMU sono CRS} \\ (iii) & \textit{Tutte le DMU sono DRD} \\ (iv) & \textit{le DMU sono IRS o CRS} \\ (v) & \textit{le DMU sono DRS o CRS} \end{array} \tag{3.3}$$

dove IRS, CRS e DRS sta per increasing, constant e decresing return-to-scale rispettivamente.

Teorema 3.4.5 *Sia $(\hat{\boldsymbol{x_o}}, \hat{\boldsymbol{y_o}})$ la proiezione efficiente di una DMU_o che risulti BCC-inefficient, sia E_o l'insieme di riferimento relativo alla DMU_o. Allora si ha che:*

1. $(\hat{\boldsymbol{x_o}}, \hat{\boldsymbol{y_o}})$ é IRS se E_o /'e costituito da DMUs del tipo (i) o (iv) del Corollario 3.4.4

2. $(\hat{\boldsymbol{x_o}}, \hat{\boldsymbol{y_o}})$ é DRS se E_o /'e costituito da DMUs del tipo (iii) o (v) del Corollario 3.4.4

3.5 Rilassamento della condizione di convessitá

Possiamo estendere il BCC model rilassando la condizione di convessitá $\boldsymbol{e\lambda} = 1$ utilizzando:

$$L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \tag{3.4}$$

dove $L(0 \leq L \leq 1)$ e $U(1 \leq U)$ sono rispettivamente upper e lower bound per la somma dei λ_j. Notiamo che la condizione $L = 0$ e $U = \infty$ corrisponde al CCR model.

3.5.1 Increasing Returns-to-Scale (IRS) Model

Il caso $L = 1, U = \infty$ é chiamato IRS o NDRS (Non decreasing Returns-to-Scale) model. In questo modello il vincolo imposto ai valori di $\boldsymbol{\lambda}$ é:

$$\boldsymbol{e\lambda} \geq \mathbf{1} \tag{3.5}$$

Osserviamo che la condizione $L = 1$ corrisponde al fatto che non sar possibile ridurre i pesi della DMU ma sará possibile espandere quest'ultimi all'infinito (TODO inserire immagine con esempio).

3.5.2 Decreasing Returns-to-Scale (DRS) Model

Il caso $L = 0, U = 1$ é chiamato DRS o NIRS (Non increasing Returns-to-Scale) model. In questo modello il vincolo imposto ai valori di $\boldsymbol{\lambda}$ é:

$$0 \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq 1 \tag{3.6}$$

Osserviamo che la condizione $U = 1$ corrisponde al fatto che non sar possibile aumentare i pesi della DMU (TODO inserire immagine con esempio).