

La Data Envelopment Analysis: una metodologia per la valutazione dell'efficienza nelle vendite

Data Envelopment Analysis: an evaluation method of sale performance

Relatrice: Ch.ma Prof.ssa Alessandra Buratto

Studente: Luca Muraro

Indice

Introduzione.....	II
PARTE PRIMA.....	1
Capitolo 1.....	2
1.1 Evoluzione storica	2
1.2 Il contributo di Farrell	2
1.3 I modelli base	4
1.3.1 Singolo input e singolo output.....	4
1.3.2 Due input e un output	6
1.3.3 Due output e un input	8
1.3.4 Input e Output Slack	10
1.3.5 Modelli input oriented e output oriented	11
Capitolo 2.....	13
2.1 Scelta del modello	13
2.2 Il modello CCR	15
2.3 Il modello BCC	18
2.3.1 Rendimenti di scala.....	21
2.4 Il modello Additivo	23
2.5 Il modello Moltiplicativo	25
2.6 Vantaggi e svantaggi della dea	25
PARTE SECONDA	27
Capitolo 3.....	28
3.1 Il problema	28
3.2 L'analisi.....	28
Capitolo 4.....	30
4.1 L'interpretazione dei risultati.....	30
4.1.1 L'efficienza	30
4.1.2 I valori obiettivo	31
4.1.3 Il peer group	32
Capitolo 5.....	33
5.1 L'analisi per indici	33
5.2 L'analisi DEA CCR.....	34
5.3 L'analisi DEA BCC.....	41
5.4 Osservazioni	47
5.5 Conclusioni	48
APPENDICE.....	49
BIBLIOGRAFIA	50
WEBGRAGIA.....	50

Introduzione

L'argomento trattato in questo elaborato concerne l'analisi di efficienza di un insieme di unità organizzative indipendenti. Nell'ultimo decennio tale argomento è stato fortemente dibattuto in quanto, nell'attuale contesto economico di crescente competitività e dinamismo, risulta decisivo per un'azienda conoscere sia il proprio grado di efficienza rispetto ai concorrenti, sia l'efficienza relativa delle diverse unità operative interne (divisioni, reparti, funzioni) o dei singoli dipendenti. Questo lavoro si colloca in un'area di studi manageriale definita con il termine benchmarking, teoria basata sull'individuazione di riferimenti eccellenti con cui confrontare le prestazioni delle varie unità. Il Benchmarking è un'efficace metodologia per misurare e incrementare le performance di un'unità operativa. L'utilizzo sistematico di metodologie e di strumenti di Benchmarking stimola e integra i processi di apprendimento e cambiamento e, allo stesso tempo, stimola l'efficacia e l'efficienza dei processi aziendali e il rinnovamento della cultura aziendale, assicurando un miglioramento continuo grazie al costante confronto con le altre unità interne o esterne. È una tecnica che prevede diverse fasi come l'identificazione dell'area su cui si ritiene necessario fare l'analisi, gli indicatori da confrontare, la raccolta dei dati, l'elaborazione dei risultati e, infine, la valutazione e il controllo di questi. In questa tesi viene presentata la Data Envelopment Analysis, una tecnica di benchmarking e valutazione delle performance che negli ultimi anni si è affermata soprattutto grazie allo sviluppo di software specifici.

La Data Envelopment Analysis (DEA) è un metodo impiegato per la misurazione dell'efficienza delle unità decisionali (decision-making units - DMU) come, ad esempio, imprese o istituti pubblici. Essa è stata sviluppata teoricamente da Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978 come tecnica basata sulla programmazione lineare.

La Parte Prima del presente lavoro, dopo un breve excursus storico, è inerente alla definizione teorica della DEA, che parte dalle basi dettate da Farrell¹ per giungere ai modelli più complessi e di più recente introduzione. Il primo capitolo affronterà la storia della DEA, il contributo portato da Farrell, i modelli base con degli approfondimenti sugli slack e l'orientamento dei modelli. Il secondo capitolo dopo una breve digressione sulla scelta del modello, introdurrà il modello Charnes, Cooper e Rhodes (d'ora in poi CCR), e il modello Banker, Charnes e Cooper (d'ora in poi BCC) (con un approfondimento sui rendimenti di scala), Additivo, Moltiplicativo e infine analizzerà alcuni dei vantaggi e degli svantaggi della tecnica.

¹ M. Farrell, "The Measurement of Productive Efficiency"

La Parte Seconda verte sull'applicazione pratica della DEA ad un caso affrontato durante il mio periodo di stage. Più precisamente affronterò una breve analisi dell'attività di vendita degli agenti prima con un metodo più diffuso e "classico" basato su alcuni indici, poi attraverso la DEA. Il terzo capitolo introdurrà il problema oggetto dell'analisi e definirà gli aspetti principali di questa. Nel quarto capitolo troviamo una breve "guida" all'interpretazione dei risultati dell'analisi DEA. All'interno del quinto capitolo saranno esposti i risultati dell'analisi che prima è avvenuta con dei semplici indici e poi con i modelli DEA CCR e BCC output oriented; infine saranno tratte alcune conclusioni.

Tutti i risultati descritti sono stati da me ottenuti con l'ausilio del software DEAP 2.1² sviluppato dal professor Tim Coelli del dipartimento di econometria dell'Università del New England (AUS).

Nell'appendice sono proposti i dati dell'azienda su cui è stata condotta la mia analisi che, per questioni di riservatezza, non posso citare.

² Download da <http://www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.html>

PARTE PRIMA

Capitolo 1

1.1 Evoluzione storica

La storia della DEA inizia con la pubblicazione “Measuring the efficiency of decision making units” del 1978 di Charnes, Cooper e Rhodes. Partendo dall’indice di efficienza di Farrell, riuscirono a trasformare l’analisi che questo aveva condotto su un solo output, in un problema di programmazione lineare ed applicare tale teoria ad una moltitudine di output. Però, solamente il modello CCR è applicabile che si limita a misurare l’efficienza tecnica, dato che ammette solo ritorni di scala costanti (CRS). L’efficienza presa in considerazione è quella relativa e le poche applicazioni si limitano al settore pubblico.

Un successivo passo in avanti è stato fatto intorno alla metà degli anni ‘80 quando viene introdotto il modello BCC³, in cui si può misurare l’effetto di scala poiché il modello ammette rendimenti di scala variabili (VRS). Sempre intorno la metà degli anni ‘80, per merito di Charnes (et al.⁴), viene introdotto anche il modello moltiplicativo con frontiere lineari a tratti. L’attenzione rimane focalizzata sull’efficienza relativa ma si assiste ad un’estensione dell’applicazione anche al settore privato (banche, ospedali, industrie). I software sono, invece, ancora ai primi stadi.

Dagli anni ‘90 si assiste a un perfezionamento della tecnica ed a un riconoscimento come metodologia versatile per l’analisi dei dati. Inoltre, in concomitanza con lo sviluppo dei software applicativi, si assiste ad un incremento nell’applicazione della DEA a casi reali sempre più complessi e di larga scala.

1.2 Il contributo di Farrell

Le basi della DEA furono poste, intorno al 1957, da Farrell che introdusse una superficie di produzione lineare a tratti ma, tuttavia, non riuscì a determinare un programma di programmazione lineare che spiegasse gli indici di efficienza ottenuti graficamente.

³ Banker, Charnes, Cooper, (1984), “Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis”

⁴ Charnes, Cooper, Seiford, Stutz, (1983), “Invariant Multiplicative efficiency Analysis and Piecewise Cobb-Douglas Envelopment”

La funzione di produzione viene stimata risolvendo un sistema di equazioni lineari che soddisfano le condizioni di convessità ed esclusione dell'origine degli assi poste sull'unico isoquanto.⁵

Il contributo di Farrell alla misurazione dell'efficienza è utile solo in tre casi (che esamineremo in seguito):

- un solo input e un solo output;
- due input a parità di output;
- due output a parità di input.

Farrell ha inoltre scomposto l'efficienza di un'unità produttiva in due componenti, l'efficienza tecnica e l'efficienza allocativa. La prima consiste nell'abilità dell'unità produttiva di ottenere il massimo output a partire da un determinato (e limitato) set di input. Pertanto, in un'unità tecnicamente inefficiente, si assiste ad uno spreco di risorse produttive che implica la non minimizzazione dei costi di produzione, nell'orientamento agli Input mentre, nell'orientamento agli output, il prodotto realizzato è inferiore al massimo ottenibile dati i fattori impiegati. L'efficienza allocativa invece riflette la capacità dell'unità di utilizzare nelle proporzioni ottimali, dati i rispettivi prezzi. Nel caso di unità caratterizzate da inefficienza allocativa, nell'ipotesi di orientamento agli input, il mix dei fattori produttivi scelto non è in grado di garantire un livello tecnicamente efficiente di output (il saggio marginale di sostituzione dei fattori non eguaglia il rapporto tra i loro prezzi) mentre, nell'ipotesi di orientamento agli output, l'impresa multi-prodotto, non realizza quel mix di output in grado di massimizzare i ricavi (il MRS non eguaglia il rapporto tra i prezzi).

Inefficienza tecnica e allocativa possono verificarsi sia disgiuntamente che congiuntamente, contribuendo ad accrescere i costi produttivi rispetto al minimo possibile. Pertanto, tutti i casi in cui i costi non sono minimizzati possono dipendere sia da inefficienza tecnica sia da inefficienza allocativa.

Indicando con X l'input e con Y l'output, un livello di produzione sarà tecnicamente efficiente quando la combinazione (X, Y) si trova sotto la frontiera efficiente. Nella *Fig.1* il punto P risulta tecnicamente inefficiente perché per produrre la quantità di output Y_P basterebbe la quantità di risorse X_C , o, in alternativa, perché con la stessa quantità di risorse X_P si potrebbe produrre una quantità superiore di beni, pari a Y_B .

⁵ Curva indicante tutte le combinazioni di input che consentono di ottenere lo stesso volume di produzione (M. Katz, H. Rosen)

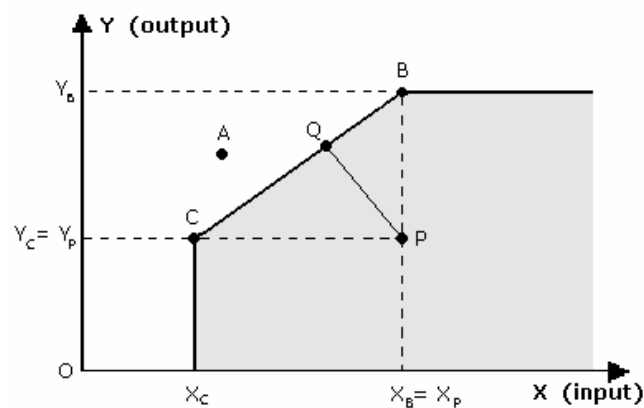


Figura 1

Efficienza

Il rapporto comunemente usato nella DEA per valutare l'efficienza è:

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}}$$

quando si sta analizzando un campione di DMU omogeneo, che utilizzano lo stesso set di risorse.

1.3 I modelli base

1.3.1 Singolo input e singolo output

Applichiamo ora, ad un semplice esempio⁶, il rapporto output/input, considerando quattro *DMU* che utilizzano il capitale investito come input e il valore aggiunto come output (entrambi in milioni di euro). I risultati di tale rapporto sono evidenziati nell'ultima riga della tabella.

UNITÀ	A	B	C	D
CAPITALE INVESTITO	8,6	2,2	15,6	31,6
VALORE AGGIUNTO	1,8	0,2	2,8	4,1
VALORE AGGIUNTO / CAPITALE INVESTITO	0,209	0,091	0,179	0,130

⁶ Esempio tratto da R. Ramanathan "An introduction to Data Envelopment Analysis – A Tool for Performance Measurement" pagg. 27-30

L'unità con il rapporto più alto, ossia A, risulta essere la più efficiente e sarà l'unità benchmark, mentre B è la meno efficiente. Come si può notare dal grafico in Fig. 2, il coefficiente angolare delle rette che congiungono l'origine a ciascun punto è il rapporto capitale investito/valore aggiunto che non è altro che l'efficienza delle singole unità. Da ciò ricaviamo la frontiera efficiente che è la retta passante per A che lascia alla sua destra tutte le altre unità, alla quale si fa riferimento per misurare l'efficienza relativa degli altri punti.

$$0 \leq \frac{\text{coeff. angolare delle altre rette}}{\text{coeff. angolare della frontiera eff.}} \leq 1$$

Si ottiene quindi:

$$E_B = \frac{\text{Coeff. angolare } \overline{OB}}{\text{Coeff. angolare } \overline{OA}} = \frac{0,091}{0,209} = 0.434$$

UNITÀ	A	B	C	D
VALORE AGGIUNTO / CAPITALE INVESTITO	0,209	0,091	0,179	0,130
EFFICIENZA RELATIVA	100,0%	43,4%	85,8%	62,0%

Si può notare, inoltre, che la retta di regressione (in rosso) definisce quali sono i punti eccellenti o meno; quelli sopra la retta saranno quelli eccellenti, mentre quelli sotto saranno insoddisfacenti.

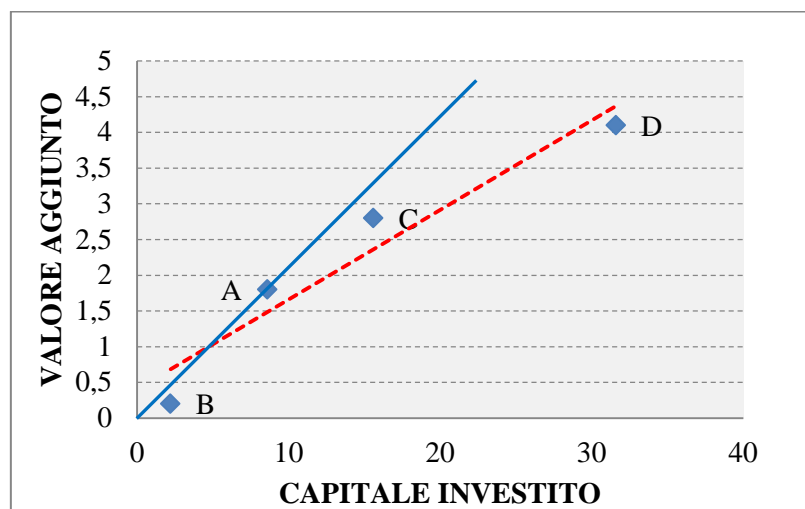


Figura 2

È anche possibile determinare come un punto inefficiente possa diventare efficiente definendo così l'input, o output, obiettivo affinché un punto possa portarsi sulla frontiera efficiente.

Consideriamo ad esempio il punto B:

$$Input\ Target = Input \times Efficienza\ relativa$$

$$Input\ Target = 2,2 \times 43,4\% = 0,955\ milioni\ di\ €$$

Ciò significa che l'unità B, con una riduzione del 56,6% degli input, si sposterebbe sulla frontiera efficiente. Infatti, ricalcolando l'efficienza di B:

$$E_B = \frac{Output}{Input\ Target} = \frac{0,2}{0,955} = 0,209 = E_A$$

Con la stessa logica si può calcolare Output Target:

$$Output\ Target = \frac{Output}{Efficienza\ relativa}$$

$$Output\ Target = \frac{0,2}{0,434} = 0,46\ milioni\ di\ €$$

Ciò significa che mantenendo inalterata la quantità di input utilizzata si potrebbe raggiungere un'efficienza pari a quella del punto A, con un aumento di 0,26 (130%) dell'output di B.

1.3.2 Due input e un output

Si supponga ora di avere due input (x_1 e x_2) e un output (y_2)⁷:

- x_1 : numero di impiegati
- x_2 : superficie (in 100m²)
- y : vendite (in 100.000 €)

⁷ Esempio tratto da W. Cooper, L. Seiford, K.Tone "Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software" pagg. 6-8

Tutte le vendite sono poste pari a 1 sotto l'ipotesi di ritorni di scala costanti (CRS). Dovremmo quindi preoccuparci di minimizzare gli input. Le coordinate del punto A, saranno date ad esempio:

$$A = \left(\frac{x_1^A}{y^A}, \frac{x_2^A}{y^A} \right)$$

UNITÀ	A	B	C	D	E	F	G
x_1	4	7	8	4	2	5	6
x_2	3	3	1	2	4	2	4
y	1	1	1	1	1	1	1

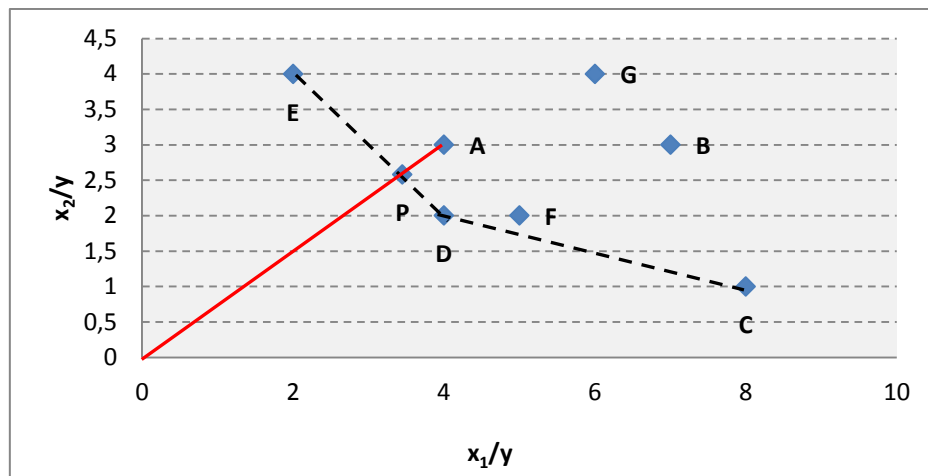


Figura 3

La linea tratteggiata indica la frontiera efficiente e i punti C, D, E che vi appartengono sono considerati efficienti. Nessun punto su questa, può diminuire il valore di uno degli input senza che aumenti l'altro. Tutta l'area sopra la frontiera è l'insieme delle possibili produzioni.

Tracciando un segmento che unisca l'origine al punto A, si identifica un punto P dato come l'intersezione del segmento \overline{OA} , con \overline{DE} appartenente alla frontiera efficiente. L'efficienza di A sarà quindi misurata attraverso il rapporto:

$$E_A = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{4,29}{5} = 0,85$$

Si possono anche determinare gli input obiettivo che permetterebbero di raggiungere la massima efficienza con un livello inferiore di input.

$$Input\ obiettivo = E_A(x_1; x_2) = 0,85(4; 3) = (3,4; 2,55) = P$$

Inoltre, si può notare che l'inefficienza di A dipende dai punti D, E poiché P è sul segmento che li congiunge; quindi i punti del segmento \overline{DE} è l'insieme di riferimento per il punto A, mentre sarà \overline{DC} per il punto F e così via.

Infine, tutti i punti che compongono la frontiera sono efficienti secondo la definizione di Pareto-Koopmans. Secondo questi, una DMU è efficiente se non è possibile diminuire la quantità di input utilizzata senza aumentare la quantità dell'altro input e diminuire la quantità di output ottenuta.

1.3.3 Due output e un input

Si supponga ora di avere due output (y_1 e y_2) e un input (x)⁸:

- x : numero di impiegati
- y_1 : clienti (in decine)
- y_2 : vendite (in 100.000 €)

Dovremmo quindi preoccuparci di massimizzare gli output. Le coordinate del punto A, saranno date ad esempio:

$$A = \left(\frac{y_1^A}{x^A}; \frac{y_2^A}{x^A} \right)$$

Osservando la *Fig. 4*, la frontiera efficiente sarà data dalla linea che unisce i punti B, E, F e G e l'area sotto a questa rappresenterà l'insieme delle possibili produzioni.

UNITÀ	A	B	C	D	E	F	G
x	1	1	1	1	1	1	1
y_1	1	2	3	4	4	5	6
y_2	5	7	4	3	6	5	2

⁸ Esempio tratto da W. Cooper, L. Seiford, K.Tone "Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software" pagg. 8-12

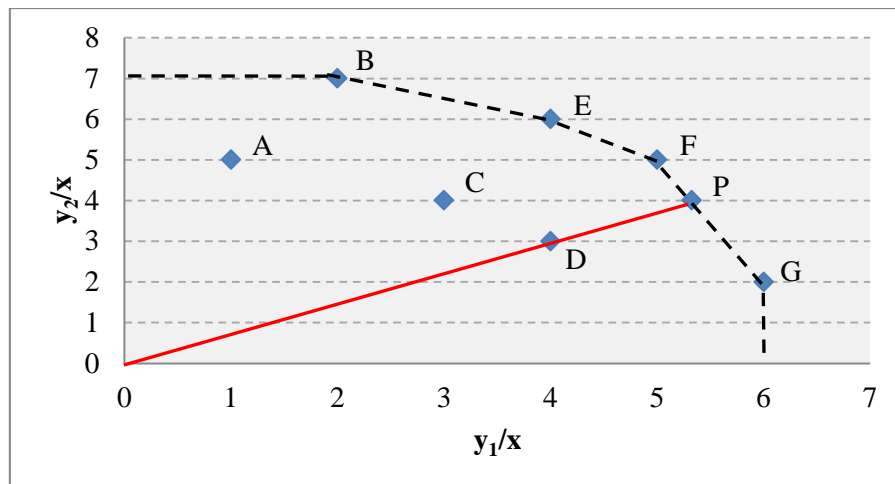


Figura 4

Usando la stessa logica degli esempi precedenti, l'efficienza (o inefficienza) di un punto sarà data dal rapporto tra la distanza del punto dall'origine e dalla distanza della proiezione del punto sulla frontiera efficiente. In esempio, l'efficienza di D sarà data da:

$$E_D = \frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \frac{5}{6,667} = 0,75$$

Per stabilire i miglioramenti da apportare agli output, affinché D diventi efficiente, serve calcolare il reciproco dell'efficienza, cioè:

$$\frac{1}{E_D} = \frac{1}{0,75} \cong 1,33$$

Ciò significa che moltiplicando le coordinate del punto D per 1,33 otterremo quelle del punto P situato nella frontiera efficiente.

$$1,33(4; 3) = (5,33; 4) = P$$

1.3.4 Input e Output Slack

Esaminiamo ora il grafico di Fig. 5 che propone una produzione caratterizzata da due input e un output.

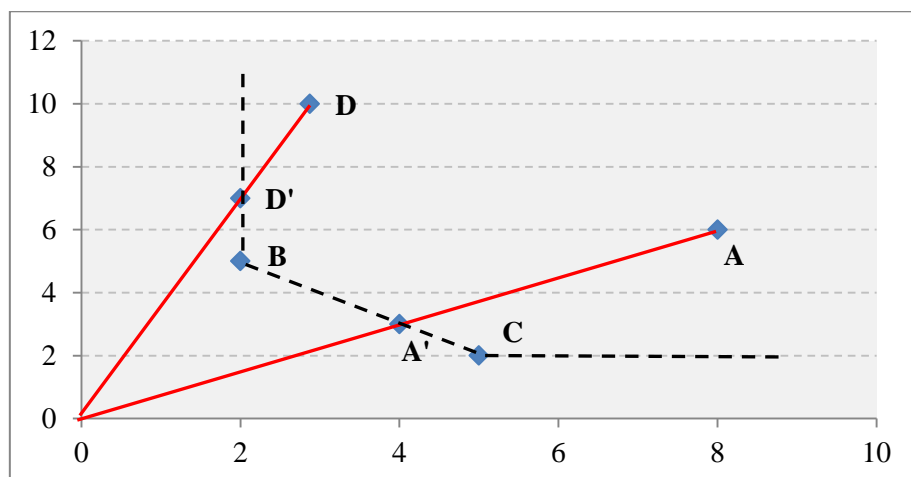


Figura 5

Focalizziamo ora l'attenzione sul punto D. Come si può notare questo non è efficiente e la sua proiezione (D') appartiene alla semiretta parallela all'asse che sembrerebbe essere la naturale continuazione della frontiera efficiente formata dai punti B e C. Come visto in precedenza, la riduzione radiale data dal rapporto $\overline{OD'}/\overline{OD}$ degli input renderebbe l'unità D efficiente. Si può altresì notare

che questa DMU potrebbe produrre lo stesso livello di output riducendo della distanza $\overline{BD'}$ l'input x_2 e mantenendo inalterato l'impiego dell'input x_1 . Il punto D si dice perciò caratterizzato da input slack (eccessi di input) positivi, in quanto è possibile ridurre la quantità di almeno un input immessa nel processo produttivo mantenendo inalterata la quantità di output ottenuta (e viceversa in caso di output slack).

$$\text{Input slack} = \text{Input attuale} - \text{Input Target}$$

$$\text{Output slack} = \text{Output Target} - \text{Input attuale}$$

1.3.5 Modelli input oriented e output oriented

Per stabilire se una DMU è efficiente o meno, si deve misurare se ci sono sprechi nella produzione. Infatti, un'unità produttiva può risultare tecnicamente inefficiente non solo quando spreca degli input durante la produzione (orientamento agli input) ma anche quando dati gli input, non riesce a raggiungere la quantità massima di output producibile. Quindi si avrà un orientamento agli output quando lo scopo dell'analisi è definire la quantità di output da produrre affinché la produzione passi da inefficiente a efficiente.

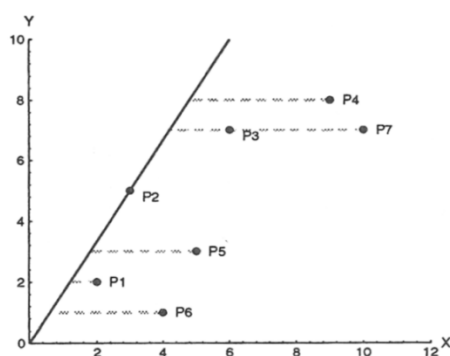


Figura 6 (A. Charnes, W. Cooper, A. Lewin, L. Seiford)

Nella Fig. 6 si evidenzia una misurazione input oriented. Questa sarà eseguita attraverso la misurazione della distanza orizzontale tra i punti inefficienti, a destra della frontiera efficiente, e quest'ultima. Per il punto P3:

$$E_{P3} = \frac{x_{P'3}}{x_{P3}} = \frac{4,2}{6} = 0,7$$

Il punto P3 ha un'efficienza del 70%, quindi con una riduzione del 30% degli input utilizzati si continuerà ad ottenere un output di sette unità, ma con un quantitativo di risorse inferiore.

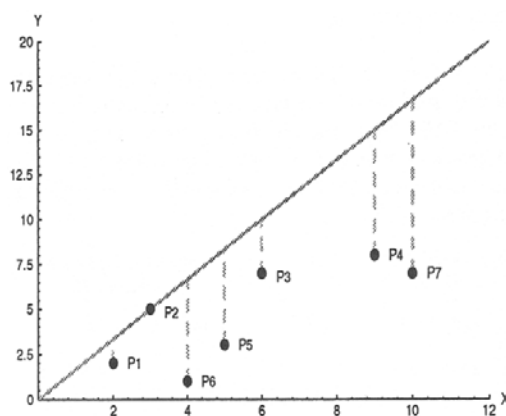


Figura 7 (A. Charnes, W. Cooper, A. Lewin, L. Seiford)

Nella *Fig. 7*, invece, si evidenzia una misurazione output oriented. La misurazione, questa volta, sarà effettuata sulla distanza verticale tra il punto che rappresenta la produzione inefficiente e la frontiera efficiente. Per il punto P''_3 :

$$E_{P''_3} = \frac{y_{P_3}}{y_{P''_3}} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Si può notare che con modelli caratterizzati da CRS l'efficienza non varia a seconda della scelta dell'uno o l'altro orientamento. La stessa cosa, invece, non accade per i modelli caratterizzati da VRS. Questa differenza è visibile graficamente nelle *Fig. 8*.

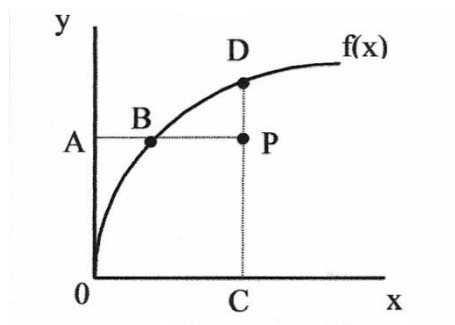


Figura 8 (T. Coelli)

Capitolo 2

2.1 Scelta del modello

Tutti i modelli DEA sono utili per valutare l'efficienza delle DMU ma l'orientamento e la loro attenzione è centrata su concetti e ipotesi diverse. L'analista, prima di compiere l'analisi per mezzo della DEA, deve, in primo luogo scegliere il modello più appropriato. Questa scelta dovrà essere ponderata considerando se la formulazione del problema ammette ritorni di scala costanti o variabili e se il problema è volto alla massimizzazione degli output, alla minimizzazione degli input o ad entrambe le soluzioni.

In base a quanto detto qui sopra, l'analista potrà scegliere uno dei modelli indicati nella sottostante.

	<i>Orientamento</i>		
	<i>Input</i>	<i>Output</i>	<i>Entrambi</i>
<i>Ritorni di scala costanti</i>	CCR_{INPUT}	CCR_{OUTPUT}	<i>Additivo</i>
<i>Ritorni di scala variabili</i>	BCC_{INPUT}	BCC_{OUTPUT}	<i>Additivo</i>

Si pone il caso di voler valutare la performance di n DMS che consumano m differenti risorse per produrre t differenti beni o servizi. In generale la DMU^j consuma una quantità $X^j = \{x_i^j\}$ di input ($i=1, \dots, m$) e produce una quantità $Y^j = \{y_r^j\}$ di output ($r=1, \dots, t$) posti, per convenzione, non negativi. Il set di possibilità di produzione si riduce a:

$$T \equiv \{(x; y) \in \mathbb{R}_+^{t+m} \mid x \text{ produce } y\}$$

mentre i set di input ($L(y)$) e output ($P(x)$) possibili saranno:

$$P(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^t \mid (x^T; y^T)^T \in T\}$$

$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^m \mid (x^T; y^T)^T \in T\}$$

In particolare si assume l'esistenza di una relazione inversa tra $L(y)$ e $P(x)$: $x \in L(y) \Leftrightarrow y \in P(x)$ y è una funzione di produzione $F(x; y)$ tale che:

$$T(P(x), P(y)) \equiv \{(x; y) \in \mathbb{R}_+^{t+m} \mid F(x; y) \leq 0\}$$

Per queste costanti, che generalmente assumono l'aspetto di osservazioni, assumiamo che la matrice ($t \times n$) degli output sia indicata con Y , e la matrice ($m \times n$) degli input sia indicata con X .

I modelli DEA non-parametrici si caratterizzano per la presenza di un insieme d'ipotesi che il set di produzione deve soddisfare:

- (H1) Convessità⁹ del set di produzione degli input:
 se per $y^o \in \mathfrak{R}_+^t, x^j \in L(y^o), e \lambda_j \geq 0 e \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \forall j$
 allora $\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \in L(y^o)$
- (H2) Convessità del set di produzione degli output:
 se per $x^o \in \mathfrak{R}_+^t, y^j \in P(x^o), e \lambda_j \geq 0 e \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \forall j$
 allora $\sum_{j=1}^n \lambda_j y^j \in P(x^o)$
- (H3) Convessità del set di produzione:
 se $(y^j; x^j) \in T, e \lambda_j \geq 0 e \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \forall j$
 allora $\sum_{j=1}^n \lambda_j (y^j; x^j) \in T$
- (H4) Forte disponibilità degli input:
 se $(y^j; x^j) \in T, e x^* \geq x$
 allora $(y; x^*) \in T$
- (H5) Forte disponibilità degli output:
 se $(y^j; x^j) \in T, e 0 \leq y^* \leq y$
 allora $(y^*; x) \in T$
- (H6) Rendimenti di scala costanti:
 se $(y^j; x^j) \in T$
 allora $(ky; kx) \in T, \forall k \geq 0$
- (H7) Appartenenza alla regione ammissibile:
 l'osservazione $(y_j; x_j) \in T, \forall j$

⁹ per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.

(H8) Estrapolazione minima:

se un set di produzione

T' soddisfa $(H1), (H2), (H4) - (H7)$ o $(H3) - (H7)$,

allora $T' \subset T$

Le ipotesi H1 e H2 sono incluse nell'ipotesi H3, ma, anche se soddisfatte, non implicano H3. L'ipotesi H6, come vedremo in seguito, è condizione necessaria per il modello CCR, caratterizzato da ritorni di scala costanti. Inoltre, si assumono solo DMU:

- omogenee in termini di industria, di input e di output;
- di cui si vogliono massimizzare gli output o minimizzare gli input.

2.2 Il modello CCR

Questo è il modello base e deve il suo nome ai suoi creatori, Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978. Questo modello è caratterizzato da:

- CRS;
- efficienza relativa;
- è vincolato dal fatto che i dati numerici devono essere positivi;
- tutti gli input e tutti gli output sono ricondotti ad un singolo input virtuale (espresso come somma pesata degli input) e un singolo output (espresso come somma pesata degli output).

Il modello, utilizzando la programmazione lineare (LP), determinerà i pesi dei vari input e output che massimizzano il rapporto

$$\frac{\text{virtual output}}{\text{virtual input}} = \frac{\sum_{j=1}^J v_j y_j}{\sum_{i=1}^I u_i x_i}$$

dove u e v sono, reciprocamente, i pesi ottimali di input e output che variano secondo l'unità decisionale. Questo rapporto rappresenta anche la nostra funzione obiettivo e sarà sottoposta al vincolo che prevede che sia minore o uguale a uno. Si pone inoltre il vincolo della positività dei pesi. Otterremo dunque il seguente modello di programmazione frazionaria:

$$\max E_m = \frac{\sum_{j=1}^J v_{jm} y_{jm}}{\sum_{i=1}^I u_{im} x_{im}}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{j=1}^J v_{jm} y_{jm}}{\sum_{i=1}^I u_{im} x_{im}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_{jm}, u_{im} \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad j = 1, 2, \dots, J$$

Questo però è un problema di programmazione lineare frazionaria che, per essere risolto, deve essere convertito in un problema di PL. Per ricondurre la forma frazionaria a quella lineare è sufficiente normalizzare il denominatore assegnandole un valore arbitrario pari, ad esempio, all'unità. Pertanto la soluzione si otterrà massimizzando il numeratore e includendo il vincolo $\sum_{i=1}^I u_{im} x_{im} = 1$. Risulterà quindi:

Modello CCR INPUT ORIENTED Modello dei moltiplicatori

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \max & v y_o \\ \text{s.t.} & \\ & u x_o = 1 \\ & vY - uX \leq 0 \\ & v, u \geq 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \max & H^0 = \sum_{r=1}^t v_r y_r^o \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{i=1}^I u_i x_i^o = 1 \\ & \sum_{r=1}^t v_r y_r^j - \sum_{i=1}^m u_i x_i^j \leq 0 \quad \forall j \\ & v_r, u_i \geq 0 \quad \forall j, r \end{aligned}$$

Modello dell'involuppo

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \\ & \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ & Y\lambda \geq y_o \\ & \lambda > 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \\ & \theta X^o - \sum_{j=1}^n \lambda_j X^j \geq 0 \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j \geq Y^o \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Si potrebbe anche porre $v_r, u_i \geq \varepsilon \geq 0$, dove ε è una quantità positiva infinitesima imposta per evitare che una DMU palesemente inefficiente nel consumo di un certo x_i possa rendere “trasparente” la propria inefficienza assegnando un peso nullo a tale fattore.

Una DMU sarà considerata efficiente se e solo se, contemporaneamente, la sua efficienza è pari all'unità e tutte le variabili slack sono nulle. La presenza di slack, infatti, indica che la DMU non è Pareto-Koopmans efficiente e sarebbe dunque possibile mantenere lo stesso livello di produzione riducendo le risorse impiegate.

Il passaggio dal problema primale al suo duale comporta il cambiamento del numero di variabili e vincoli da soddisfare: il problema dei moltiplicatori avrà tante variabili quanti sono i vincoli, e tanti vincoli quante sono le variabili del problema dell'involuppo¹⁰ (essendo il suo duale). Si noti anche che il duale del problema dei moltiplicatori output oriented non è altro che il problema dell'involuppo input oriented (e viceversa).

Modello CCR OUTPUT ORIENTED

Problema dei moltiplicatori:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min p x_o \\ \text{s.t.} \\ q y_o &= 1 \\ q Y - p X &\leq 0 \\ p, q &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \min q^o &= \sum_{i=1}^m u_i x_i^o \\ \text{s.t.} \\ \sum_{r=1}^t v_r y_r &= 1 \\ \sum_{i=1}^m u_i x_i^j - \sum_{r=1}^t v_r y_r^j &\geq 0 \\ v_r, u_i &\geq 0 ; \forall j, r \end{aligned}$$

Problema dell'involuppo:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \max \tau \\ \text{s.t.} \\ x_o - X\mu &\geq 0 \\ \tau y_o - Y\mu &\leq 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \max \varphi \\ \text{s.t.} \\ \varphi Y^o - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j &\leq 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j X^j &\leq X^o \\ \lambda_j &\geq 0 \forall j \end{aligned}$$

¹⁰ Un involuppo di una famiglia o di un insieme di curve piane è un insieme di curve tangenti a ciascun membro della famiglia in almeno un punto.

L'efficienza di ogni DMU, come detto in precedenza, è relativa, cioè valutata relativamente alle altre DMU. Infatti, per la DMU di efficienza più elevata vale:

$$\sum_{i=1}^I u_{i0} x_{i0} = 1$$

mentre le altre avranno un'efficienza compresa tra uno e zero.

2.3 Il modello BCC

Mentre il modello CCR del 1978 assume CRS, nella realtà accade spesso il contrario e, per l'analisi si rende necessario conoscere a priori la scala con cui operano le unità oggetto dell'analisi, o sapere la dimensione degli input/output in corrispondenza della quale l'inefficienza diventa una diretta conseguenza dei rendimenti di scala. Il modello BCC è caratterizzato da rendimenti di scala variabili e quindi è presa in considerazione la possibilità che la funzione di produzione possa assumere rendimenti di scala decrescenti o crescenti.

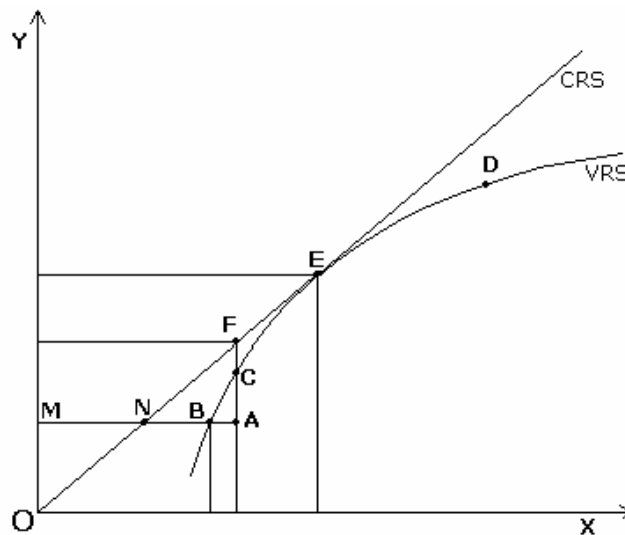


Figura 9 (S. C. Ray)

Nella Fig. 9 sono illustrati gli andamenti di due frontiere efficienti. La curva \overline{BED} corrisponde a una funzione di produzione con VRS, mentre la retta coincide alla frontiera efficiente se fosse caratterizzato da CRS. Osservando il grafico, possiamo dire che l'unità A non appartiene alla frontiera di produzione (per il caso di VRS e CRS). Analogamente al modello CCR, dovremmo confrontare

l'unità A con il punto C in caso di orientamento agli output e, con il punto B, in caso di orientamento agli input; si può quindi misurare la sua efficienza:

- $E_I^A = \frac{x_B}{x_A}$ è l'efficienza tecnica pura di A input oriented;
- $E_O^A = \frac{y_C}{y_A}$ è l'efficienza tecnica pura di A output oriented.

Confrontando i due modelli e le rispettive frontiere efficienti si nota che lungo la retta con CRS la produttività media ($AP_j = y_j/x_j$ quando si ha un solo input e un solo output) rimane costante, mentre nella frontiera con VRS varia in ciascun punto. Il punto con la produttività media più elevata lungo la frontiera VRS è E (punto di tangenza con la retta CRS) e corrisponde a ciò che Banker chiamava "most productive scale size (MPSS)". La produttività media del MPSS è uguale alla produttività media della frontiera efficiente CRS. L'efficienza complessiva (tecnica e di scala) di A si ottiene paragonando la stessa unità con i punti E o N (DMU che raggiungono la stessa produttività media, dato che appartengono alla frontiera CRS). Utilizzando un orientamento agli input si ottiene dal rapporto x_N/x_A .

L'efficienza di scala in ogni punto appartenente alla frontiera efficiente è uguale al rapporto tra la produttività media di quel punto e quella del MPSS. Pertanto l'efficienza di scala della DMU A sarà x_B/x_N che è anche la distanza orizzontale tra le frontiere CRS e VRS.

Infine si può notare che il prodotto tra efficienza complessiva ed efficienza di scala è l'efficienza tecnica pura:

$$\frac{x_N}{x_A} \times \frac{x_B}{x_N} = \frac{x_B}{x_A}$$

Questi concetti non sono però applicabili in contesto più complesso, dove sono tenuti in considerazione numerosi input e output, data l'impossibilità di determinare un set comune di pesi che possa essere accettato da tutte le DMU nella ponderazione delle variabili. Si deve quindi elaborare un modello che sia in grado di valutare la quota di efficienza "tecnica pura" in una situazione multi input e multi output, così da correggere l'errore del modello CCR di attribuire all'inefficienza tecnica della singola DMU gli eventuali svantaggi causati dalle economie di scala.

Il modello in questione, chiamato BCC, è simile al CCR, soddisfa tutte le ipotesi della DEA, ma ha vincoli più stringenti giacché è inserito il vincolo di convessità ($\sum \lambda = 1$) con il quale si ammette la variabilità dei rendimenti di scala.

Il problema di programmazione frazionaria è:

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{vy_o - v_o}{ux_o} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \frac{vy_j - v_o}{ux_o} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \\
 & v, u \geq 0 \quad v_o \text{ libero}
 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo i modelli di programmazione lineare riportati nelle seguenti pagine.

Modello BCC INPUT ORIENTED

Problema dei moltiplicatori:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned}
 & \max_{v,u,v_o} z = vy_o - v_o \\
 & \text{s.t.} \\
 & vx_o = 1 \\
 & vY - uX - ve \leq 0 \\
 & v, u \geq 0 \quad v_o \text{ libero}
 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned}
 & \max H^0 = \sum_{r=1}^t v_r y_r^o + \mu^o \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m u_i x_i^o = 1 \\
 & \sum_{r=1}^t v_r y_r^j - \sum_{i=1}^m u_i x_i^j + \mu \leq 0 \quad \forall j \\
 & u_r, v_r \geq 0; \mu^o \text{ libero}
 \end{aligned}$$

Problema dell'involuppo:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned}
 & \text{BCC - I) } \min_{\theta_B, \lambda} \theta_B \\
 & \text{s.t.} \\
 & \theta_B x_o - X \lambda \geq 0 \\
 & Y \lambda \geq y_o \\
 & e \lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \theta X^o - \sum_{j=1}^n \lambda_j X^j \geq 0 \quad \forall i, j \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j \geq Y^o \quad \forall j \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0; \theta \text{ libero}
 \end{aligned}$$

Modello BCC OUTPUT ORIENTED

Problema dei moltiplicatori:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min_{v,u,u_0} z &= ux_o - u_0 \\ \text{s.t.} \\ vy_o &= 1 \\ vY - uX - ve &\leq 0 \\ v, u &\geq 0 \quad u_0 \text{ libero} \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \min q^0 &= \sum_{i=1}^m u_i x_i^o + \rho^o \\ \text{s.t.} \\ \sum_{r=1}^t u_r y_r^o &= 1 \\ \sum_{i=1}^m v_i x_i^j - \sum_{r=1}^t u_r y_r^j + \rho^o &\geq 0 \quad \forall j \\ u_r, v_i &\geq 0; \quad \rho^o \text{ libero} \end{aligned}$$

Problema dell'involuppo:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \max_{\eta_B, \lambda} \eta_B \\ \text{s.t.} \\ \eta_B y_0 - Y\lambda &\leq 0 \\ X\lambda &\geq x_o \\ e\lambda &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \max \varphi \\ \text{s.t.} \\ \varphi Y^o - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j &\leq 0 \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j X^j - X^o &\leq 0 \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \end{aligned}$$

2.3.1 Rendimenti di scala

Come già accennato in precedenza il modello BCC (ma volendo anche il CCR) è caratterizzato da possibili rendimenti di scala. Con ciò si intende la relazione esistente tra la variazione degli input di produzione in una unità produttiva e la variazione del suo output.

I rendimenti di scala si definiscono:

- **costanti (CRS):** se ad un aumento (diminuzione) degli input segue un aumento (diminuzione) proporzionale dell'output;
- **crescenti (IRS):** se ad un aumento (diminuzione) degli input segue un aumento (diminuzione) più che proporzionale dell'output;
- **decrescenti (DRS):** se ad un aumento (diminuzione) degli input segue un aumento (diminuzione) meno che proporzionale dell'output.

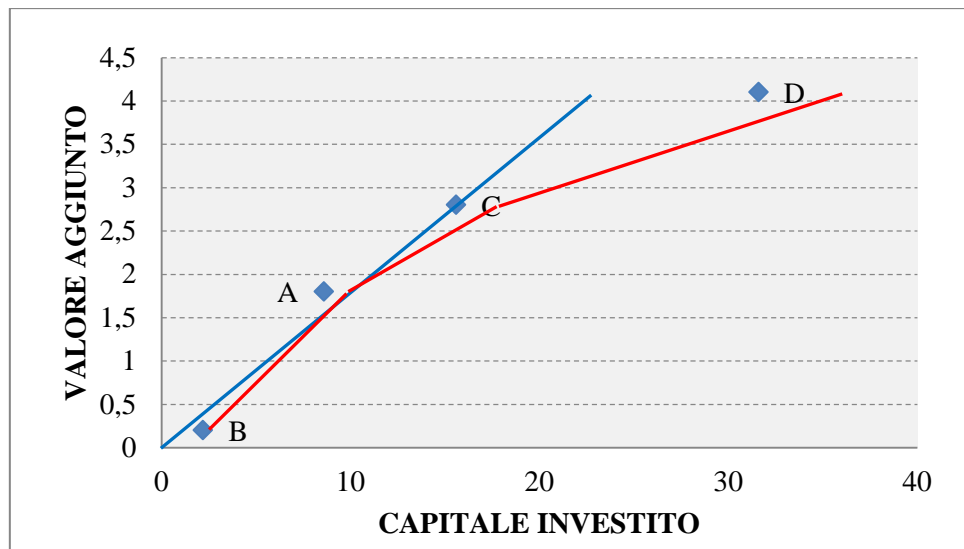


Figura 10

Osserviamo ora la Fig. 11 che rappresenta una frontiera CRS (in blu) e una frontiera VRS (in rosso). L'unità A è l'unica ad essere sia BCC che CCR efficiente ed è la MPSS dato che la sua produttività media coincide con la produttività media secondo il modello CCR. Esaminiamo ora le soluzioni del modello riportate nella tabella sottostante¹¹:

DMU	Efficienza	λ
A	1	1
B	0,434	0,256
C	0,858	1,814
D	0,620	3,674

Si noti che λ_A , l'unica efficiente, è uguale all'unità. Le unità che operano ad una minore grandezza di scala (per esempio B - $\lambda_B < 1$) sono caratterizzate da ritorni di scala crescenti mentre, viceversa, le unità C, D con λ maggiori dell'unità si distinguono per ritorni di scala decrescenti.

Facendo riferimento al problema dell'involuppo, possiamo dunque riassumere:

- $\sum_{n=1}^N \lambda_n < 1$ ritorni di scala crescenti (IRS);
- $\sum_{n=1}^N \lambda_n > 1$ ritorni di scala decrescenti (DRS);
- $\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$ ritorni di scala costanti (CRS).

¹¹ Esempio tratto da R. Ramanathan "An introduction to Data Envelopment Analysis – A Tool for Performance Measurement" pagg. 69-72

Se invece facciamo riferimento al problema dei moltiplicatori, dovremmo tenere conto del valore di u_0 e v_0 , assumendo che $(x_o; y_o)$ appartiene alla frontiera efficiente, tale punto sarà caratterizzato da rendimenti di scala:

- crescenti se e solo se $u_0^* o v_0^* < 0$ per tutte le soluzioni ottime;
- decrescenti se e solo se $u_0^* o v_0^* > 0$ per tutte le soluzioni ottime;
- costanti se e solo se $u_0^* o v_0^* = 0$ per tutte le soluzioni ottime.

Consideriamo ora una “forzatura” (*R. Ramanathan*) del modello BCC in cui poniamo $\sum_{n=1}^N \lambda_n \leq 1$ invece di $\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$. Se poniamo questo vincolo un’unità (ad esempio B) caratterizzata da IRS sarà considerata efficiente solo se $\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$ è forzato ma con $\sum_{n=1}^N \lambda_n \leq 1$ ciò non accade. Senza un vincolo di convessità B avrà il vincolo $\sum_{n=1}^N \lambda_n < 1$. Questo è permesso dalla condizione $\sum_{n=1}^N \lambda_n \leq 1$ perciò l’unità non sarà considerata efficiente. Al contrario le unità C, D, con $\sum_{n=1}^N \lambda_n > 1$ che non è ammessa dal vincolo e saranno considerate efficienti in quanto forzeranno la condizione $\sum_{n=1}^N \lambda_n \leq 1$. Così le unità che operano sotto IRS saranno considerate inefficienti mentre, le unità che operano sotto DRS, saranno valutate efficienti. Si dirà quindi che il modello opera sotto rendimenti di scala non crescenti (NIRS).

Analogamente, ponendo la condizione contraria alla precedente, ossia $\sum_{n=1}^N \lambda_n \geq 1$, il modello sarà caratterizzato da rendimenti di scala non decrescenti (NDRS). Pertanto l’unità B diventerà efficiente mentre C e D saranno considerate inefficienti.

2.4 Il modello Additivo

Nel modello Additivo, elaborato da Charnes (et al.)¹² nel 1985, diversamente dai precedenti, una DMU si dirà efficiente se e solo se gli indici dei problemi dell’inviluppo e dei moltiplicatori assumono contemporaneamente valore nullo. Risulterà invece inefficiente quando tali valori saranno negativi e le variabili slack (sugli input e sugli output) ne assumono uno positivo. La frontiera di efficienza verrà sempre stimata imponendo il passaggio per le DMU efficienti. Una particolarità del modello Additivo è che non esiste la distinzione tra input oriented e output oriented. Infatti, sono considerati contemporaneamente entrambi gli orientamenti attraverso l’adozione delle variabili slack che, se positive, indicano (graficamente) la distanza che l’unità inefficiente deve percorrere

¹² Charnes, Cooper, Golany, Seiford, Stutz, (1985), “Foundation of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions”

per raggiungere la frontiera e anche la direzione. In termini strategici ciò indica la variazione nelle quantità di input/output che l'unità inefficiente deve apportare alla sua performance per renderla efficiente. Il modello Additivo è anch'esso caratterizzato da VRS ed è qui sotto riportato.

Modello ADDITIVO

Problema dei moltiplicatori:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \max_{u,v,v_0} z &= v y_o - u x_o + v \\ \text{s.t.} \\ v Y - u X - v e &\leq 0 \\ v, u &\geq 1; v_0 \text{ libero} \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \max w^0 &= \sum_{r=1}^t v_r y_r^o - \sum_{i=1}^m u_i x_i^o + \mu^o \\ \text{s.t.} \\ \sum_{r=1}^t v_r y_r^j - \sum_{i=1}^m u_i x_i^j &+ \mu^o \\ v_r, u_i &\geq 1; \forall i, r, j \end{aligned}$$

Problema dell'involuppo:

Forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, s, t} &-s - t \\ \text{s.t.} \\ \lambda X - s &= -x_o \\ \lambda Y - t &= y_o \\ e\lambda &= 1 \\ \lambda, s, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma lineare:

$$\begin{aligned} \min Z^0 &= -\left(\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^t s_r \right) \\ \text{s.t.} \\ -\sum_{j=1}^n \lambda_j X^j - s_i &= -X^o \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j - s_r &= Y^o \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j, s_i, s_r &\geq 0; \forall i, j, r \end{aligned}$$

2.5 Il modello Moltiplicativo

Nei modelli visti finora portano alla stima della frontiera efficiente lineare a tratti che è frutto della stima di una funzione di produzione che si limita a sommare i diversi input e output. Nel 1983, Charnes, Cooper, Seiford e Stutz svilupparono il modello moltiplicativo che non fornisce più una frontiera lineare a tratti ma una frontiera log-lineare a tratti o Cobb-Douglas a tratti.

La tipica formulazione di una Cobb-Douglas è:

$$\alpha \prod_i x_i^\beta$$

quindi l'efficienza sarà misurata come:

$$\frac{\prod output}{\prod input}$$

2.6 Vantaggi e svantaggi della dea

Come abbiamo visto finora, la DEA, grazie alla sua flessibilità, può essere applicata in contesti diversi tra loro e con diversi scopi. Una prima distinzione tra i modelli e i diversi contesti di applicazione può essere fatta sulla frontiera efficiente:

- nel modello CCR assume la forma di una linea retta che ammette ritorni di scala costanti;
- nel modello BCC e nel modello Additivo assume la forma di una linea spezzata che ammette ritorni di scala variabili;
- nel modello Moltiplicativo assume la forma di una spezzata log-lineare che ammette ritorni di scala variabili.

Inoltre si possono fare alcune osservazioni sulle finalità dei diversi modelli:

- ◆ il modello CCR fornisce una valutazione oggettiva dell'efficienza globale;
- ◆ il modello BCC è capace di distinguere le inefficienze tecniche da quella di scala;
- ◆ il modello Additivo collega l'efficienza alla Pareto-efficienza;
- ◆ il modello Moltiplicativo fornisce un'interpretazione Cobb-Douglas della funzione di produzione.

Ora farò un elenco di alcune particolarità che contraddistinguono la DEA dalle altre metodologie di analisi e che la rendono o preferibile o meno rispetto ad altre tecniche.

La DEA permette di (A. Charnes, W. Cooper, A. Lewin, L. Seiford) :

- indagare su singole osservazioni e non su quelle medie;
- produrre una misura aggregata di efficienza per ciascuna DMU, utilizzando come variabili note i fattori produttivi (variabili indipendenti) e i beni prodotti (variabili dipendenti)
- utilizzare una molteplicità di fattori di input e output, considerando le unità di misura di ciascuno, anche se diverse tra loro;
- incorporare variabili dummy¹³;
- non conoscere a priori i prezzi di input e output;
- valutare l'efficienza di unità operative omogenee;
- ottenere valori obiettivi a cui far tendere gli input e gli output delle unità inefficienti;
- individuare la combinazione migliore dei fattori produttivi;
- ottenere soluzioni Pareto efficienti.

Però, durante le analisi con la DEA, dobbiamo prendere in considerazione alcune debolezze della tecnica che, se trascurate, vanno ad alterare la validità dell'intera analisi le quali sono riportate nel seguente elenco:

- ✓ l'impossibilità di dare una valutazione assoluta dell'efficienza della singola unità. Infatti, ricordo, che il valore di efficienza che viene attribuita a ciascuna DMU è relativo perciò dipende dall'efficienza delle altre unità che compongono il campione;
- ✓ analogamente al punto precedente, l'impossibilità che tutte le unità risultino inefficienti;
- ✓ la necessità di considerare un solo valore per ogni input e output, con la possibilità di incorrere in errori di misurazione, approssimazione, ...;
- ✓ la necessità di possedere un numero di unità decisionali superiore (indicativamente di almeno tre volte) alla somma degli input e output affinché possa avvenire una significativa distinzione tra DMU efficienti e inefficienti;
- ✓ la facilità con cui può essere spostata la frontiera efficiente. Basta, infatti, che un'unità produca più delle altre nel campione perché questa possa essere considerata efficiente e quindi in grado di modificare la frontiera di produzione.

¹³ È una variabile che assume valore 0 o 1, a seconda che sia soddisfatta o meno una data condizione

PARTE SECONDA

Capitolo 3

3.1 Il problema

In questa seconda parte, analizzerò e svilupperò un'analisi DEA al caso del controllo dell'attività di vendita. Controllare le performance di vendita di un'azienda e dei suoi venditori non significa semplicemente registrare dati per avere una fotografia della storia aziendale, quanto organizzare le informazioni sensibili legate all'attività di vendita che, se correttamente interpretate, permettono al management di correggere la rotta quando necessario e prendere le migliori decisioni per il futuro (V. Barocco (a cura di)). L'analisi e il controllo dell'attività di vendita, inoltre, rappresentano per il direttore vendite un efficace strumento per stimolare il miglioramento delle performance dei venditori, soprattutto quando a monte vi è stata una definizione chiara, precisa e ragionata degli obiettivi.

Spesso però si manifesta la tendenza, soprattutto nelle PMI, a sviluppare prevalentemente attività ed iniziative di marketing operativo volte ad incrementare quello che è l'aspetto più evidente dell'attività di vendita cioè i volumi di vendita e di conseguenza il fatturato (V. Barocco (a cura di)). Il controllo dell'attività di vendita avviene frequentemente per mezzo di indici che forniscono indicazioni più o meno precise sulla performance dell'attività di vendita. Questi indici hanno, a mio avviso, il difetto di focalizzarsi su singoli aspetti dell'attività di vendita. La DEA può essere un mezzo per dare un inquadramento all'insieme degli aspetti della vendita e, insieme a una definizione di una strategia di medio-lungo periodo, potrebbe essere un mezzo che favorisce un più chiaro inquadramento degli obiettivi e quindi delle performance richieste ai venditori che in base ai risultati delle analisi possono intraprendere le azioni correttive necessarie per diventare DMU più efficienti.

3.2 L'analisi

Le basi della mia analisi è un campione di quattordici agenti di vendita (monomandatari o plurimandatari) che, sotto le direttive dell'Area Manager (che risponde direttamente al Direttore Commerciale) sono incaricati della vendita dei prodotti direttamente ai dettaglianti secondo le provincie di loro competenza (ogni agente opera su più provincie).

Gli input che considererò nella mia analisi sono tre:

1. il numero di linee di prodotto che ogni agente commercializza (input 1);
2. il numero di punti vendita presenti in ogni area (input 2);
3. l'ampiezza dell'area di competenza (in migliaia di Km²) (input 3).

Il primo input prende in considerazione le linee di prodotto che ogni agente riesce a commercializzare. Infatti, ogni agente può riuscire a vendere solamente alcune linee di prodotti (ad es. solo le linee strategiche) mentre altri sono capaci di vendere tutte le linee di prodotto.

Il numero di punti vendita presenti nell'area tiene conto di tutte le imprese che si occupano della vendita al dettaglio dei prodotti dell'azienda (o prodotti concorrenti) ricercati in un database costruito sulla base di Pagine Gialle.

L'ampiezza dell'area di competenza non è altro che l'estensione geografica delle provincie in cui l'agente svolge la sua attività. Ad ogni agente sono assegnate alcune provincie ma può verificarsi il caso che le provincie con maggiori punti vendita siano suddivise tra più agenti (ad es. la provincia di Milano).

Gli output saranno invece due:

1. il fatturato dei primi tre trimestri del 2011 (output 1);
2. i punti vendita effettivamente serviti (output 2).

Il fatturato è il valore delle vendite effettuato da ogni agente fino al 31 settembre 2011 mentre i punti vendita effettivamente serviti tengono conto di tutti i dettaglianti che hanno compiuto degli acquisti dagli agenti nell'ultimo anno.

L'analisi sarà effettuata prima attraverso qualche semplice indice e poi, più dettagliatamente, con la metodologia DEA attraverso i modelli CCR e BCC output oriented, giacché l'interesse dell'agente, dell'area manager e del direttore commerciale è massimizzare fatturato e aumentare il numero di punti vendita serviti dai prodotti dell'azienda. Nell'analisi illustrerò solamente i risultati mentre i dati analizzati saranno consultabili negli allegati.

Capitolo 4

4.1 L'interpretazione dei risultati

Dopo aver introdotto gli aspetti principali del problema che affronterò in seguito, mi soffermo ora sull'uso che si può fare delle informazioni che si ottengono applicando i modelli DEA.

La misura dell'efficienza delle unità del campione è solo la più evidente informazione che la tecnica DEA è in grado di estrapolare. Infatti, la DEA è in grado di fornire un insieme di risultati che individuano le virtù e le debolezze di ogni singola DMU e, attraverso il confronto con le unità benchmark, gli obiettivi di miglioramento.

4.1.1 L'efficienza

Il risultato più evidente fornito dai modelli DEA è rappresentato dal livello di efficienza relativa raggiunta da ciascuna DMU del campione che consideriamo nell'analisi. Per livello di efficienza relativa si intende, nel modello output oriented, il fattore minimo di cui si dovrebbe aumentare il livello attuale degli output perché l'unità raggiunga l'efficienza, dato il livello attuale di input (e viceversa per il modello input oriented).

Il grado di efficienza raggiunto da ogni DMU ha rilevanza solo nel contesto in cui è avvenuta la misurazione, quindi solo in relazione al modello scelto e alle unità del campione considerato (e non in assoluto). È, infatti, sufficiente inserire una nuova unità nel campione o cambiare una delle caratteristiche del modello (orientamento, rendimenti di scala,...) per ottenere diverse unità efficienti o diversi valori di efficienza.

Con i risultati ottenuti sarà possibile eseguire un ranking delle unità indagate, facendo la distinzione tra quelle efficienti (che hanno un indice pari ad uno) da quelle inefficienti che hanno un indice inferiore ad uno. Gli indici calcolati non sono altro che la quantità di beni prodotti, in termini percentuali, che la DMU deve produrre per essere considerata efficiente.

4.1.2 I valori obiettivo

Le unità inefficienti hanno bisogno, per essere indirizzata ad un miglioramento della propria performance, di avere dei valori obiettivo specifici da raggiungere che siano stati fissati sulla base dei livelli di inefficienza raggiunti dalle stesse.

Gli obiettivi rappresentano dei veri e propri benchmark rispetto ai quali, le unità non efficienti, sono chiamati a monitorare in modo costante la loro attività.

Tutti i modelli DEA permettono di stabilire i livelli di input e output che ciascuna DMU dovrebbe raggiungere per spostarsi sulla frontiera efficiente, individuando un mix che assicura un dato livello di output utilizzando il livello di input indicato come obiettivo. Gli obiettivi che si vengono a definire non rappresentano che le traslazioni dei mix inefficienti sulla frontiera efficiente. Tutte le unità che non risultano efficienti avranno, quindi, la possibilità di ridurre l'impiego di risorse a parità di output o di aumentare la produzione a parità di input. Esistono anche approcci diversi da quello "classico" che sono in grado di determinare gli obiettivi di efficienza. Thanassoulis e Dyson sviluppano alcuni modelli DEA per definire dei valori obiettivo più compatibili con le preferenze definite a priori da ciascuna unità e relative ai livelli di input e output ritenuti prioritari. Questi modelli possono essere adottati nei seguenti casi (*E. Thanassoulis*) :

- se esiste un livello di input/output cui è data priorità nel miglioramento: i livelli obiettivo sono calcolati incrementando al più alto livello l'output prioritario (nel modello output oriented; viceversa in quello input oriented) senza permettere alcuna variazione nei livelli degli input e output rimanenti;
- se l'unità presenta una struttura preferenziale sull'ordine delle variazioni da apportare in input/output: i livelli obiettivo sono determinati in modo da riflettere la desiderabilità espressa dal decision maker.
- se l'unità specifica un set di livelli obiettivo ideali: la definizione degli obiettivi si articola in due fasi. La prima determina i set di input e output in linea con la possibilità dei cambiamenti espressa dal responsabile della DMU, mentre nella seconda si stimano i livelli obiettivo in modo che questi dominino quelli definiti durante la prima fase.
- se alcuni livelli di output (input) sono fissati esternamente: i livelli sono definiti in termini molto ampi, ma le preferenze sui cambiamenti si riferiscono solo a quei livelli che possono essere direttamente controllati dall'unità.

4.1.3 Il peer group

Per ciascuna unità inefficiente, la DEA identifica un insieme di unità, dette peer units, che risultano efficienti anche quando vengono valutate con la struttura di pesi ottimale per l'unità in esame. Queste unità costituiscono il cosiddetto peer group per l'unità inefficiente, cioè l'insieme dei riferimenti eccellenti, esempio di “good practices” per l'unità esaminata. Nel problema dell'inviluppo, le peer units sono DMU la cui combinazione convessa consente di individuare l'unità virtuale di confronto. Sono, infatti, associate ai λ di base, i cui valori forniscono informazioni sull'importanza relativa dei singoli riferimenti. Il peer group di ciascuna DMU varia a seconda dell'andamento dei rendimenti di scala e dell'orientamento perseguito dal modello.

La frequenza con cui un'unità diventa peer unit rappresenta uno degli indicatori di buona condotta, poiché misura le volte in cui un'unità può essere considerata un valido esempio che dovrebbe essere seguito dalle unità inefficienti. Se la frequenza è molto alta rispetto al numero di unità del campione significa che la stessa unità risulta efficiente non solo col proprio sistema di pesi, ma anche con quello di molte altre DMU. Viceversa, se risulta molto bassa, l'unità sotto indagine risulta un esempio poco valido perché, probabilmente, troppo particolare. L'analisi dei peer groups consente anche di discriminare fra le unità efficienti, che adottano un sistema di pesi molto equilibrato e quelle che risultano efficienti per averne adottato uno molto particolare, ma difficilmente condiviso. Generalmente si tende a riconoscere come “Mavericks” l'unità efficiente dal comportamento eccessivamente specializzato, anche se non è escluso che i pesi “particolari” (perché univocamente adottati) siano quelli in grado di rappresentare in modo più indicativo la realtà produttiva analizzata.

Capitolo 5

5.1 L'analisi per indici

Agente	Fatturato/clienti attivi		Clienti attivi/Punti vendita area	Fatturato/linee prod.	
1	€	4.996,55	43,39%	€	9.104,82
2	€	5.222,02	25,83%	€	15.920,80
3	€	3.011,91	50,00%	€	8.165,62
4	€	2.212,92	24,26%	€	8.282,63
5	€	2.469,19	48,99%	€	5.443,43
6	€	7.245,15	15,71%	€	7.534,96
7	€	3.263,14	30,99%	€	14.031,50
8	€	1.979,00	53,61%	€	6.643,79
9	€	3.657,68	38,35%	€	7.223,93
10	€	6.026,95	32,84%	€	5.642,26
11	€	5.423,09	24,78%	€	9.327,72
12	€	3.540,48	33,81%	€	11.291,27
13	€	3.467,97	53,25%	€	6.785,15
14	€	3.236,39	38,27%	€	8.867,72

Nella tabella sono presenti alcuni risultati di tre semplici indici, il fatturato medio per punto vendita, la percentuale di copertura del territorio ed il fatturato medio per linea di prodotto.

Il fatturato medio per cliente attivo ci indica il valore delle vendite di ogni agente per ogni punto vendita. Come si può notare l'agente che ha venduto mediamente di più è il 6 mentre quello che ha venduto meno è il 4. La copertura dell'area ci serve per capire quanti punti vendita sul totale disponibili nell'area sono clienti dell'azienda e ci indica che porzione di mercato è sfruttata dall'azienda. Il fatturato medio per linea di prodotto tiene conto del valore prodotto da ogni singola linea che l'agente commercializza.

Questi indici hanno però alcuni limiti. Ad esempio, un fatturato medio alto ci può far sorgere il dubbio che l'agente venda per un valore alto ad un ristretto numero di dettaglianti e ciò potrebbe significare che i clienti hanno un maggior potere sull'agente perché "producono" gran parte del fatturato. Al contrario un fatturato medio basso può significare che l'agente abbia molti clienti che magari compiono ordinazioni per importi esigui che possono non essere sufficienti per la copertura dell'intera spesa di vendita. Un indice di copertura basso può indicare che al venditore è stata asse-

gnata un'area troppo vasta o al contrario indica la “pigrizia” dell'agente che si accontenta di mantenere pochi clienti fedeli invece di cercare di aumentare il portfolio clienti. Infine un fatturato medio per linea di prodotto alto è influenzato dal numero di queste e dalla capacità dell'agente di saper vendere una linea piuttosto che un'altra.

A mio avviso, queste informazioni per un'analista sono sicuramente utili, tuttavia hanno il difetto di focalizzarsi solo su alcuni aspetti dell'attività di vendita, non vedendola come una singola attività influenzata da diverse variabili che possono essere parametriche o non-parametriche. La DEA può intervenire in questo caso dando una visione di insieme dell'attività di vendita, ricostruendo la funzione di produzione, che tiene conto di variabili parametriche e non-parametriche che spesso hanno anche unità di misura differenti. La finalità è stabilire quanti e quali agenti operano efficientemente individuando le eventuali debolezze da migliorare per raggiungere i target che rendono l'attività efficiente.

5.2 L'analisi DEA CCR

Questo è il problema di programmazione lineare da risolvere per l'agente 1:

$$\max \varphi$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned} \varphi 409717 - (409717\lambda_1 + 652753\lambda_2 + 367453\lambda_3 + 289892\lambda_4 + 239511\lambda_5 + 376748\lambda_6 + 561260\lambda_7 \\ + 279039\lambda_8 + 288957\lambda_9 + 265186\lambda_{10} + 466386\lambda_{11} + 417777\lambda_{12} + 312117\lambda_{13} \\ + 443386\lambda_{14}) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi 82 - (82\lambda_1 + 125\lambda_2 + 122\lambda_3 + 131\lambda_4 + 97\lambda_5 + 52\lambda_6 + 172\lambda_7 + 141\lambda_8 + 79\lambda_9 + 44\lambda_{10} + 86\lambda_{11} \\ + 118\lambda_{12} + 90\lambda_{13} + 137\lambda_{14}) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45\lambda_1 + 41\lambda_2 + 45\lambda_3 + 35\lambda_4 + 44\lambda_5 + 50\lambda_6 + 40\lambda_7 + 42\lambda_8 + 40\lambda_9 + 47\lambda_{10} + 50\lambda_{11} + 37\lambda_{12} + 47\lambda_{13} \\ + 50\lambda_{14} \leq 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 189\lambda_1 + 484\lambda_2 + 244\lambda_3 + 540\lambda_4 + 198\lambda_5 + 331\lambda_6 + 555\lambda_7 + 263\lambda_8 + 206\lambda_9 + 134\lambda_{10} + 347\lambda_{11} \\ + 349\lambda_{12} + 169\lambda_{13} + 358\lambda_{14} \leq 189 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7,858\lambda_1 + 4,904\lambda_2 + 4,867\lambda_3 + 1,984\lambda_4 + 4,943\lambda_5 + 5,367\lambda_6 + 16,691\lambda_7 + 5,422\lambda_8 + 11,974\lambda_9 \\ + 17,285\lambda_{10} + 11,014\lambda_{11} + 12,43\lambda_{12} + 5,46\lambda_{13} + 11,431\lambda_{14} \leq 7,858 \end{aligned}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j$$

Risolvendo 14 modelli analoghi a questo, con riferimento ad ogni agente, otterremo i risultati dell'analisi DEA CCR output oriented che, in questo capitolo, sono illustrati e commentati.

La tabella sottostante illustra quali agenti svolgono efficientemente la loro attività di vendita. Sono considerati efficienti tutti gli agenti, evidenziati in giallo, che totalizzano un punteggio uguale a 1 mentre gli altri sono inefficienti. Saranno pertanto efficienti 7 agenti su 14 (il 50%) e più precisamente gli agenti: 1, 2, 3, 4, 7, 8 e 13. Al contrario sono inefficienti gli agenti 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14. Come visto in precedenza, visto l'uso del modello CCR, saremmo giunti ai medesimi risultati di efficienza anche avendo scelto una formulazione input oriented che però avrebbe portato ad una differente definizione di movimenti radiali e slack.

Agente	Efficienza
1	1,000
2	1,000
3	1,000
4	1,000
5	0,930
6	0,737
7	1,000
8	1,000
9	0,827
10	0,913
11	0,807
12	0,970
13	1,000
14	0,922

Se ci limitiamo ad analizzare questi risultati l'analisi risulterebbe incompleta in quanto ci fornisce un'indicazione di quali agenti operano efficientemente ma non fornisce informazioni che servono a migliorare l'operato degli agenti inefficienti. Per avere queste dobbiamo focalizzarci sull'analisi per singolo agente che vedremo nelle seguenti tabelle.

Agente	1			
Efficienza	1,000			
Variabile	Valore originale	Spostamento Radiale	Slack	Valore obiettivo
Output 1	409717,000	0,000	0,000	409717,000
Output 2	82,000	0,000	0,000	82,000
Input 1	45	0,000	0,000	45
Input 2	189,000	0,000	0,000	189,000
Input 3	7,858	0,000	0,000	7,858
Peer group				
Peer	Λ			
1	1,000			

Questa tabella esamina l'agente 1. Si può notare che, essendo efficiente, i valori obiettivo sono uguali ai valori originali e non è previsto alcun movimento radiale né degli slack. Inoltre, il peer group sarà formato dall'agente stesso e $\sum \lambda = 1$. Queste stesse considerazioni sono valide per tutti gli agenti efficienti le cui tabelle sono riportate qui sotto.

Agente	2			
Efficienza	1			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	652753,000	0,000	0,000	652753,000
Output 2	125,000	0,000	0,000	125,000
Input 1	41,000	0,000	0,000	41,000
Input 2	484,000	0,000	0,000	484,000
Input 3	4,904	0,000	0,000	4,904
Peer group				
Peer	Λ			
2	1,000			

Agente	3			
Efficienza	1			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	367453,000	0,000	0,000	367453,000
Output 2	122,000	0,000	0,000	122,000
Input 1	45,000	0,000	0,000	45,000
Input 2	244,000	0,000	0,000	244,000
Input 3	4,867	0,000	0,000	4,867
Peer group				
Peer	Λ			
3	1,000			

Agente	4				
Efficienza	1				
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	289892,000	0,000	0,000	289892,000	
Output 2	131,000	0,000	0,000	131,000	
Input 1	35,000	0,000	0,000	35,000	
Input 2	540,000	0,000	0,000	540,000	
Input 3	1,984	0,000	0,000	1,984	
Peer group					
Peer	Λ				
4	1,000				
Agente	7				
Efficienza	1				
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	561260,000	0,000	0,000	561260,000	
Output 2	172,000	0,000	0,000	172,000	
Input 1	40,000	0,000	0,000	40,000	
Input 2	555,000	0,000	0,000	555,000	
Input 3	16,691	0,000	0,000	16,691	
Peer group					
Peer	Λ				
7	1,000				
Agente	8				
Efficienza	1				
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	279039,000	0,000	0,000	279039,000	
Output 2	141,000	0,000	0,000	141,000	
Input 1	42,000	0,000	0,000	42,000	
Input 2	263,000	0,000	0,000	263,000	
Input 3	5,422	0,000	0,000	5,422	
Peer group					
Peer	Λ				
8	1,000				
Agente	13				
Efficienza	1				
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	312117,000	0,000	0,000	312117,000	
Output 2	90,000	0,000	0,000	90,000	
Input 1	47,000	0,000	0,000	47,000	
Input 2	169,000	0,000	0,000	169,000	
Input 3	5,460	0,000	0,000	5,460	
Peer group					
Peer	Λ				
13	1,000				

Analizziamo ora un'agente non efficiente.

Agente	5			
Efficienza	0,93			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	239511,000	18110,914	0,000	257621,914
Output 2	97,000	7,335	0,000	104,335
Input 1	44,000	0,000	-7,203	36,797
Input 2	198,000	0,000	0,000	198,000
Input 3	4,943	0,000	0,000	4,943
Peer group				
Peer	Λ			
3	0,192			
13	0,201			
8	0,445			
	0.838			

Questa tabella evidenzia che l'agente 5 non è efficiente secondo il modello CCR. Infatti, la sua efficienza è $0,93 < 1$. Lo si può anche notare dal fatto che la sommatoria delle Lambda non è uguale all'unità, ma lo si può anche dedurre dal fatto che valori originali e valori obiettivo non sono uguali. Sono infatti presenti dei movimenti radiali e degli slack che equivalgono agli spostamenti che l'unità inefficiente (l'agente) deve fare nello spazio per portarsi sulla frontiera efficiente. La somma algebrica di valori originali, spostamenti radiali e slack darà, quindi, i valori obiettivo. In questo caso, basterà quindi che l'agente diminuisca di circa 7 unità le linee di vendita che riesce a commercializzare per divenire efficiente. Inoltre com'è previsto dai modelli CCR, la sommatoria dei pesi può assumere qualsiasi valore positivo purché diversi da 1 che è condizione valida solo per le unità efficienti. Nelle ultime righe della tabella è messo in rilievo il peer group che comprende le unità obiettivo con i relativi pesi.

Agente	6			
Efficienza	0,737			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	376748,000	134128,500	0,000	510876,500
Output 2	52,000	18,513	28,793	99,306
Input 1	50,000	0,000	-9,889	40,111
Input 2	331,000	0,000	0,000	331,000
Input 3	5,367	0,000	0,000	5,367
Peer group				
Peer	Λ			
1	0,416			
2	0,521			
	0.937			

Agente 9
Efficienza 0,827

Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	288957,000	60608,955	0,000	349565,955
Output 2	79,000	16,570	0,000	95,570
Input 1	40,000	0,000	0,000	40,000
Input 2	206,000	0,000	0,000	206,000
Input 3	11,974	0,000	-6,440	5,534

Peer group	
Peer	Λ
1	0,332
3	0,532
	<u>0,864</u>

Agente 10
Efficienza 0,913

Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	265186,000	25301,185	0,000	290487,185
Output 2	44,000	4,198	9,940	58,138
Input 1	47,000	0,000	-15,095	31,905
Input 2	134,000	0,000	0,000	134,000
Input 3	17,285	0,000	-12,037	5,248

Peer group	
Peer	Λ
1	0,709

Agente 11
Efficienza 0,807

Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	466386,000	111643,355	0,000	578029,355
Output 2	86,000	20,587	6,621	113,208
Input 1	50,000	0,000	0,000	50,000
Input 2	347,000	0,000	0,000	347,000
Input 3	11,014	0,000	-4,267	6,747

Peer group	
Peer	Λ
1	0,711
2	0,439
	<u>1,150</u>

Agente 12
Efficienza 0,97

Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	417777,000	12766,514	0,000	430543,514
Output 2	118,000	3,606	0,000	121,606
Input 1	37,000	0,000	0,000	37,000
Input 2	349,000	0,000	0,000	349,000
Input 3	12,430	0,000	-4,981	7,449

Peer group	
Peer	Λ
3	0,390
2	0,187
7	0,294
	<u>0,871</u>

Agente 14
Efficienza 0,922

Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	443386,000	37695,494	0,000	481081,494
Output 2	137,000	11,647	0,000	148,647
Input 1	50,000	0,000	0,000	50,000
Input 2	358,000	0,000	0,000	358,000
Input 3	11,431	0,000	-4,208	7,223

Peer group	
Peer	Λ
7	0,186
2	0,092
3	0,862
	<u>1,140</u>

5.3 L'analisi DEA BCC

$$\max \varphi$$

$$\text{s.t.}$$

$$\varphi 409717 - (409717\lambda_1 + 652753\lambda_2 + 367453\lambda_3 + 289892\lambda_4 + 239511\lambda_5 + 376748\lambda_6 + 561260\lambda_7 + 279039\lambda_8 + 288957\lambda_9 + 265186\lambda_{10} + 466386\lambda_{11} + 417777\lambda_{12} + 312117\lambda_{13} + 443386\lambda_{14}) \leq 0$$

$$\varphi 82 - (82\lambda_1 + 125\lambda_2 + 122\lambda_3 + 131\lambda_4 + 97\lambda_5 + 52\lambda_6 + 172\lambda_7 + 141\lambda_8 + 79\lambda_9 + 44\lambda_{10} + 86\lambda_{11} + 118\lambda_{12} + 90\lambda_{13} + 137\lambda_{14}) \leq 0$$

$$45\lambda_1 + 41\lambda_2 + 45\lambda_3 + 35\lambda_4 + 44\lambda_5 + 50\lambda_6 + 40\lambda_7 + 42\lambda_8 + 40\lambda_9 + 47\lambda_{10} + 50\lambda_{11} + 37\lambda_{12} + 47\lambda_{13} + 50\lambda_{14} \leq 45$$

$$189\lambda_1 + 484\lambda_2 + 244\lambda_3 + 540\lambda_4 + 198\lambda_5 + 331\lambda_6 + 555\lambda_7 + 263\lambda_8 + 206\lambda_9 + 134\lambda_{10} + 347\lambda_{11} + 349\lambda_{12} + 169\lambda_{13} + 358\lambda_{14} \leq 189$$

$$7,858\lambda_1 + 4,904\lambda_2 + 4,867\lambda_3 + 1,984\lambda_4 + 4,943\lambda_5 + 5,367\lambda_6 + 16,691\lambda_7 + 5,422\lambda_8 + 11,974\lambda_9 + 17,285\lambda_{10} + 11,014\lambda_{11} + 12,43\lambda_{12} + 5,46\lambda_{13} + 11,431\lambda_{14} \leq 7,858$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 1$$

Sono ora riportati i risultati dell'analisi DEA attraverso il modello BCC output oriented.

Agente	Eff. Complessiva	Eff. tecnica pura	Eff. di scala	Rendimenti di scala
1	1,000	1,000	1,000	
2	1,000	1,000	1,000	
3	1,000	1,000	1,000	
4	1,000	1,000	1,000	
5	0,930	1,000	0,930	IRS
6	0,737	0,743	0,992	IRS
7	1,000	1,000	1,000	
8	1,000	1,000	1,000	
9	0,827	1,000	0,827	IRS
10	0,913	1,000	0,913	IRS
11	0,807	0,864	0,934	DRS
12	0,970	1,000	0,970	IRS
13	1,000	1,000	1,000	
14	0,922	0,992	0,929	DRS

La tabella sopra riportata evidenzia i risultati dell'efficienza che, come prevede il modello BCC, tiene conto di rendimenti di scala variabili che sono evidenziati nell'ultima colonna. Le caselle vuote

te indicano che in quel caso siamo in presenza di CRS in quanto efficienza tecnica ed efficienza di scala sono pari all'unità.

$$\frac{eff. complessiva}{eff. scala} = eff. tecnica pura BCC$$

Dalla tabella si evince che sono efficienti le unità 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13 mentre gli agenti 6, 11, 14 non lo sono. Come detto per il modello CCR questo è solo un riassunto dell'informazione principale che si ricava dalla DEA che sarà molto più dettagliata se osserviamo le tabelle che riassumono i risultati per singolo agente.

Agente	1				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	1,000	(crs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	409717,000	0,000	0,000	409717,000	
Output 2	82,000	0,000	0,000	82,000	
Input 1	44,750	0,000	0,000	44,750	
Input 2	189,000	0,000	0,000	189,000	
Input 3	7,858	0,000	0,000	7,858	
Peer group					
Peer	Λ				
1	1,000				

La tabella evidenzia i risultati per l'agente 1 che, anche in questo caso, risulta efficiente. Si può capire, dato l'uguaglianza tra efficienza tecnica e di scala che l'agente opera sotto rendimenti di scala costanti che equivale a dire che per un aumento degli input avviene un aumento proporzionale degli output. Si noti anche, analogamente al modello CCR, per una DMU efficiente valori originali e valori obiettivo coincidono e il peer group è formato dalla medesima unità decisionale. Infine, la sommatoria dei pesi è uguale all'unità (ciò vale anche per gli agenti inefficienti) visto quanto previsto dal vincolo di convessità del modello BCC (vedi paragrafo 2.3).

Agente	2				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	1,000	(crs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	652753,000	0,000	0,000	652753,000	
Output 2	125,000	0,000	0,000	125,000	
Input 1	41,050	0,000	0,000	41,050	
Input 2	484,000	0,000	0,000	484,000	
Input 3	4,904	0,000	0,000	4,904	
Peer group					
Peer	Λ				
2	1,000				

Agente	3			
Efficienza tecnica pura	1			
Efficienza di scala	1,000	(crs)		
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	367453,000	0,000	0,000	367453,000
Output 2	122,000	0,000	0,000	122,000
Input 1	45,000	0,000	0,000	45,000
Input 2	244,000	0,000	0,000	244,000
Input 3	4,867	0,000	0,000	4,867
Peer group				
Peer	Λ			
3	1,000			

Agente	4			
Efficienza tecnica pura	1			
Efficienza di scala	1,000	(crs)		
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	289892,000	0,000	0,000	289892,000
Output 2	131,000	0,000	0,000	131,000
Input 1	35,000	0,000	0,000	35,000
Input 2	540,000	0,000	0,000	540,000
Input 3	1,984	0,000	0,000	1,984
Peer group				
Peer	Λ			
4	1,000			

Come si può osservare, l'unità 5 è caratterizzata da IRS. Ciò ci fa dedurre che, con riferimento al paragrafo 2.3.1, $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$. Infatti osservando lo stesso agente nel modello CCR, si nota che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.838 < 0$. Le stesse considerazioni si possono fare per tutti gli agenti caratterizzati da IRS.

Agente	5			
Efficienza tecnica pura	1			
Efficienza di scala	0,930	(irs)		
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	239511,000	0,000	0,000	239511,000
Output 2	97,000	0,000	0,000	97,000
Input 1	43,500	0,000	0,000	43,500
Input 2	198,000	0,000	0,000	198,000
Input 3	4,943	0,000	0,000	4,943
Peer group				
Peer	Λ			
4	1,000			

Agente	7				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	1,000	(crs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	561260,000	0,000	0,000	561260,000	
Output 2	172,000	0,000	0,000	172,000	
Input 1	40,350	0,000	0,000	40,350	
Input 2	555,000	0,000	0,000	555,000	
Input 3	16,691	0,000	0,000	16,691	
Peer group					
Peer	Λ				
7	1,000				

Agente	8				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	1,000	(crs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	279039,000	0,000	0,000	279039,000	
Output 2	141,000	0,000	0,000	141,000	
Input 1	42,300	0,000	0,000	42,300	
Input 2	263,000	0,000	0,000	263,000	
Input 3	5,422	0,000	0,000	5,422	
Peer group					
Peer	Λ				
8	1,000				

Agente	9				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	0,827	(irs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	288957,000	0,000	0,000	288957,000	
Output 2	79,000	0,000	0,000	79,000	
Input 1	39,500	0,000	0,000	39,500	
Input 2	206,000	0,000	0,000	206,000	
Input 3	11,974	0,000	0,000	11,974	
Peer group					
Peer	Λ				
1	1,000				

Agente	10				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	0,913	(irs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	265186,000	0,000	0,000	265186,000	
Output 2	44,000	0,000	0,000	44,000	
Input 1	47,250	0,000	0,000	47,250	
Input 2	134,000	0,000	0,000	134,000	
Input 3	17,285	0,000	0,000	17,285	
Peer group					
Peer	Λ				
10	1,000				

Agente	12				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	0,970	(irs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	417777,000	0,000	0,000	417777,000	
Output 2	118,000	0,000	0,000	118,000	
Input 1	37,100	0,000	0,000	37,100	
Input 2	349,000	0,000	0,000	349,000	
Input 3	12,430	0,000	0,000	12,430	
Peer group					
Peer	Λ				
12	1,000				

Agente	13				
Efficienza tecnica pura	1				
Efficienza di scala	1,000	(crs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	312117,000	0,000	0,000	312117,000	
Output 2	90,000	0,000	0,000	90,000	
Input 1	46,550	0,000	0,000	46,550	
Input 2	169,000	0,000	0,000	169,000	
Input 3	5,460	0,000	0,000	5,460	
Peer group					
Peer	Λ				
13	1,000				

Si esamini ora il caso di un agente inefficiente.

Agente	6				
Efficienza tecnica pura	0,743				
Efficienza di scala	0,992 (irs)				
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	376748,000	130008,000	0,000	506756,000	
Output 2	52,000	17,944	40,039	109,983	
Input 1	50,000	0,000	-6,756	43,244	
Input 2	331,000	0,000	0,000	331,000	
Input 3	5,367	0,000	0,000	5,367	
Peer group					
Peer	Λ				
3	0,228				
2	0,439				
1	0,333				

La sua efficienza è pari al prodotto tra efficienza tecnica e di scala e questo, essendo la DMU inefficiente, è inferiore all'unità. L'agente opera sotto rendimenti di scala crescenti pertanto ad un aumento degli input si assisterà ad un aumento più che proporzionale degli output. Essendo l'unità inefficiente dovrà migliorare in qualche verso la sua performance. Questo miglioramento, può individuato nella misura indicata dal movimento radiale e di slack dell'unità, viene algebricamente sommata ai valori originale ed otterremo così i valori obiettivo che l'agente deve raggiungere per portarsi sulla frontiera efficiente.

Agente	11				
Efficienza tecnica pura	0,864				
Efficienza di scala	0,934	(drs)			
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo	
Output 1	466386,000	73499,434	0,000	539885,434	
Output 2	86,000	13,553	5,477	105,030	
Input 1	50,000	0,000	-7,142	42,858	
Input 2	347,000	0,000	0,000	347,000	
Input 3	11,014	0,000	-5,607	5,407	
Peer group					
Peer	Λ				
1	0,464				
2	0,536				

L'unità 11, come la 14, ha la particolarità di operare sotto rendimenti di scala decrescenti che equivale a dire che ad un aumento degli input si assisterà ad un aumento meno che proporzionale degli input. Queste avranno $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ nella risoluzione del problema dell'involuppo CCR. Difatti, per l'agente 11 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.15 > 0$. Nelle ultime righe sono infine evidenziato, come nei casi precedenti, il peer group con i rispettivi pesi.

Agente	14			
Efficienza tecnica pura	0,992			
Efficienza di scala	0,929	(drs)		
Variabili	Valori originali	Spostamento radiale	Slack	Valori obiettivo
Output 1	443386,000	3581,734	0,000	446967,734
Output 2	137,000	1,107	0,000	138,107
Input 1	50,000	0,000	-6,842	43,158
Input 2	358,000	0,000	0,000	358,000
Input 3	11,431	0,000	-3,179	8,252
Peer group				
Peer	Λ			
3	0,619			
7	0,318			
2	0,062			

5.4 Osservazioni

Ulteriori osservazioni si possono fare confrontando l'analisi per indici e l'analisi DEA. Un aspetto da notare è che l'agente 6, quello con fatturato per cliente attivo maggiore, risulta inefficiente per la DEA. Ciò pone il dubbio sull'effettiva significatività di questo indice. Infatti, può sorgere il dubbio che l'agente possa vendere per grandi importi ad un numero esiguo di clienti oppure, che venda per piccoli importi ad un gran numero di clienti. Questo indice è, a mio avviso, un po' ambiguo perché è difficile stabilire se è preferibile avere pochi clienti che effettuano grandi ordinazioni piuttosto che molti clienti che fanno piccoli ordini. Si può anche notare che questo indice è diverso dal rapporto che misura l'efficienza, tipico della DEA, cioè *Output / Input*. Infatti nell'indice in questione sia numeratore che denominatore sono degli output. Sulla base di questo criterio si può considerare significativo l'indice di copertura del territorio. Per nulla significativo è, infine, l'indice *Fatturato/Linee di Prodotto* dato che un agente può fatturare lo stesso importo di un altro pur vendendo un minor numero di linee (ricordo che ogni agente dispone dello stesso numero di linee da commercializzare).

5.5 Conclusioni

Come abbiamo visto finora, la DEA è un mezzo utile nella valutazione dell'efficienza nell'attività di vendita e può essere un'analisi che alimenta i report diventando utile a individuare e risolvere i problemi di questa ma, più in generale, di qualsiasi attività di un'azienda. A mio parere è anche un utile strumento per applicare politiche di remunerazione che premiano gli agenti efficienti, inoltre ulteriori premi possono essere assegnati per le unità che sono più frequentemente assunte come peer group. Le informazioni che scaturiscono dall'analisi e controllo delle vendite devono però essere impiegate al meglio. Le analisi e i dati dovrebbero innanzitutto studiati, dedicando tempo a quest'attività. L'analisi per essere veramente utile non deve rimanere nelle mani del direttore commerciale ma condivisa con l'area manager e i venditori stessi nel modo e nella forma che questo ritiene più opportuno. Dopo questa fase, in accordo con i risultati dell'analisi, il direttore delle vendite deve prendere gli opportuni miglioramenti per colmare le lacune emerse dall'analisi. È inutile dire che le correzioni devono avvenire nei modi e nei tempi opportuni onde evitare di aggravare una situazione che in partenza è già negativa. Colui che analizza la performance dovrebbe porre l'attenzione su quei valori che si scostano dall'aspettativa. Solo in questo modo gli sforzi (economici e non) fatti per eseguire l'analisi porta benefici tangibili e permanenti all'azienda (V. Barocco *(a cura di)*) .

APPENDICE

Sono qui riportati i dati su cui è stata condotta l'analisi.

Agente	Fatturato	Clienti Attivi	Linee di prodotto vendute	Punti vendita Area	Area (migliaia di Km ²)
1	€ 409.717,00	82	45	189	7,858
2	€ 652.753,00	125	41	484	4,904
3	€ 367.453,00	122	45	244	4,867
4	€ 289.892,00	131	35	540	1,984
5	€ 239.511,00	97	44	198	4,943
6	€ 376.748,00	52	50	331	5,367
7	€ 561.260,00	172	40	555	16,691
8	€ 279.039,00	141	42	263	5,422
9	€ 288.957,00	79	40	206	11,974
10	€ 265.186,00	44	47	134	17,285
11	€ 466.386,00	86	50	347	11,014
12	€ 417.777,00	118	37	349	12,43
13	€ 312.117,00	90	46	169	5,46
14	€ 443.386,00	137	50	358	11,431

BIBLIOGRAFIA

A. Charnes, W. Cooper, A. Lewin, L. Seiford "*Data Envelopment Analysis - Theory, Methodology and Applications*". (1994).

E. Thanassoulis "*Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis – A foundation text with integrated software*". (2001).

J. Zhu "*Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking – Data Envelopment Analysis whit Spreadsheets*". (2009).

M. Farrell "*The Measurement of Productive Efficiency*". (1957).

R. Ramanathan "*An introduction to Data Envelopment Analysis – A Tool for Performance Measurement*". (2003).

S. C. Ray "*Data Envelopment Analysis – Theory and Technique for Economics and Operations Research*". (2004).

T. Coelli "*A Guide to DEAP Version 2.1: A Data Envelopment Analysis (Computer) Program*". (1996).

V. Barocco (a cura di) "*La gestione della Forza vendita – Come ottenere di più dall'attività di vendita*". (2009).

W. Cooper, R. Thompson, R. Thrall "*Annals of Operation Research - Extensions and New Developments in Data Envelopment Analysis*". (1996).

W. Cooper, L. Seiford, K. Tone "*Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*". (2007).

WEBGRAGIA

[Online] <http://deazone.com>.

[Online] <http://www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.html>.