Capitolo 1

DEA

1.1 Introduzione

Il *Data Envelopment Analysis*, che indicheremo con l'acronimo *DEA*, è un metodo non parametrico per la stima delle frontiere di efficienza. È usato per misurare empiricamente l'efficienza produttiva delle unità decisionali, *DMU* (Decision Making Units). Gli approcci non parametrici hanno il vantaggio di non assumere particolari forme alla frontiera, ma non forniscono una relazione generale tra input e output.

Per introdurci allo studio della DEA, iniziamo con l'esporre un primo esempio esplicativo. Supponiamo di avere otto negozi $\{A, \cdots, H\}$, ciascuno dei quali dispone di un certo numero di impiegati e produce un certo quantitativo di vendite (quest'ultime in scala 1:100000). Una semplice misura di efficienza per ciascun negozio pu essere espressa dalla seguente formula:

$$\frac{Output}{Input} \tag{1.1}$$

dove le vendite sono gli output e gli impiegati l'input. Mostriamo in Tabella 1.1 i dati relativi al problema precedentemente esposto.

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Impiegato	2	3	3	4	5	5	6	8
Vendita	1	3	2	3	4	2	3	5
Vendita/Impiegato	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.1: Esempio con singolo input e singolo output

Analizzando i coefficienti contenuti nell'ultima riga della Tabella 1.1, possiamo identificare B come negozio più efficiente. Si può rappresentare graficamente questa situazione, mettendo sulle ascisse il numero di impiegati e sulle ordinate le vendite, come in Figura 1.1.

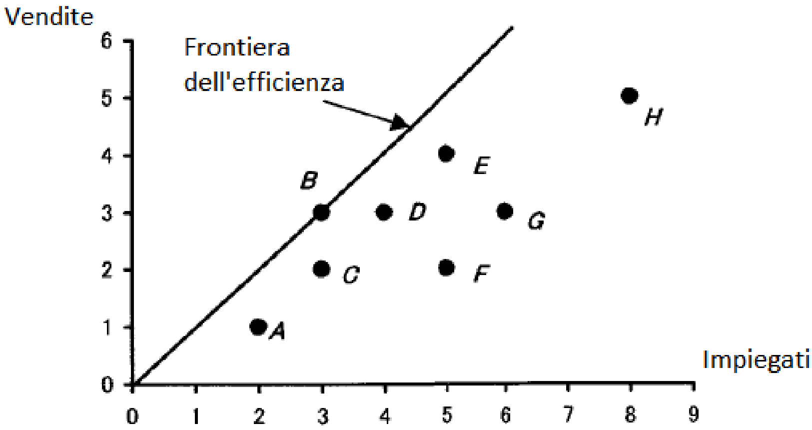

Figura 1.1: Rappresentazione grafica dell'esempio

Osserviamo dalla Figura 1.1 che per ogni negozio possiamo esprimere le vendite di ciascun dipendente come coefficiente angolare della retta che congiunge il punto del grafico corrispondente al negozio con l'origine. La retta con la pendenza maggiore (in questo caso quella passante per B) viene chiamata *Frontiera dell'efficienza*. La scelta del nome è dovuta al fatto che i punti del grafico non posso trovarsi al di sopra di questa retta.

Proseguiamo l'analisi dell'esempio valutando l'efficienza di tutti i negozi rispetto a B, con la formula

$$0 \leq \frac{\text{Vendite per impiegato del negozio i-esimo}}{\text{Vendite per impiegato di B}} \leq 1 \tag{1.2}$$

ottenendo:

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Efficienza	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.2: Esempio con singolo input e singolo output

A questo punto possiamo proporre delle strategia per rendere efficienti i negozi inefficienti: graficamente si traduce nell'avvicinare i punti rappresentanti i negozi alla frontiera dell'efficienza. Per esempio, il negozio A, può essere migliorato:

$$\text{riducendo l'input (numero di impiegati)} \tag{1.3}$$
$$\text{aumentando l'output (vendite)} \tag{1.4}$$

Le due alternative proposte equivalgono rispettivamente ai punti A_1 e A_2 riportati in Figura 1.2: il punto A_1 corrisponde alla situazione in cui si riducono gli impiegati da 2 a 1, mantenendo le vendite inalterate; il punto A_2 invece, corrisponde ad un aumento delle vendite da 1 a 2 lasciando inalterato il numero di impiegati. Infine, tutti gli altri punti del segmento $\overline{A_1 A_2}$ rappresentano un miglioramento del negozio A non ottenibile tramite le opzioni (1.3) o (1.4).

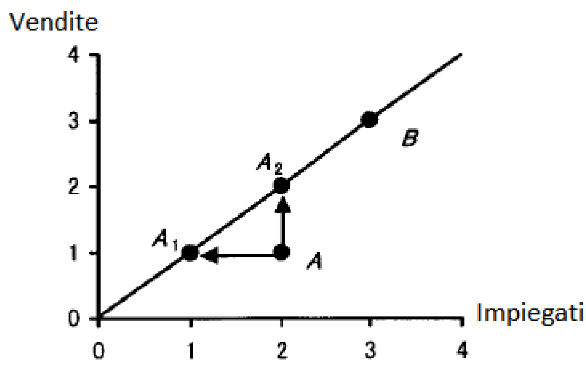

Figura 1.2: Miglioramento del negozio A

Osservazione 1.1.1 *Il nome 'Data Envelopement Analysis' proviene dalla proprietà della frontiera dell'efficienza che avvolge (*envelope*) tutte le rappresentazioni grafiche delle DMU.*

Non ragionevole ritenere che la frontiera dell'efficienza si estenda all'infinito con la stessa pendenza. Analizzeremo questo problema in seguito utilizzando diversi modelli DEA. Tuttavia, diamo per scontato che questa linea efficace nel range di interesse e chiamiamo tale assunzione 'rendimenti di scala costanti'.

Per concludere questa parte introduttiva cerchiamo di dare una definizione che possa caratterizzare le organizzazioni oggetto della *DEA*. Generalmente viene chiamata *DMU* un'entitá responsabile di convertire input in output e per la quale sia possibile valutarne le performances.

Capitolo 2

Metodi Test DEA

2.1 CCR

Proseguiamo la trattazione esponendo il modello presentato per la prima volta da Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978, che va sotto il nome di CCR.

Definizione 1 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(FP_o) \qquad & \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \theta = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \\
t.c \qquad & \frac{u_1 y_{1j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \cdots + v_m x_{mj}} \geq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
& v_1, \ldots, v_m \geq 0 \\
& u_1, \ldots, u_s \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

dove v_j e u_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Osserviamo che la 2.1 rappresenta un problema frazionale, quindi per poter eseguire con un elaboratore tale modello é necessario dare una formulazione lineare. A tale scopo definiamo una versione lineare del problema.

Definizione 2 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(FP_o) \qquad & \max_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \theta = \mu_1 y_{1o} + \cdots + \mu_s y_{so} \\
t.c \qquad & \nu_1 x_{1o} + \cdots + \nu_m x_{mo} = 1 \\
& \mu_1 y_{1j} + \cdots + \mu_s y_{sj} \leq \nu_1 x_{1j} + \cdots + \nu_m x_{mj} \quad (j = 1, \ldots, n) \\
& \nu_1, \ldots, \nu_m \geq 0 \\
& \mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

dove ν_j e μ_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Definizione 3 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Duale nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (DLP_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\ t.c \qquad & \theta \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\ & \boldsymbol{Y\lambda} \geq \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ *rappresenta il vettore dei pesi.*

Definizione 4 *Definiamo i vettori degli input in eccesso e degli output carenti, indicati rispettivamente come* $\boldsymbol{s}^-$ *e* $\boldsymbol{s}^+$*, nel seguente modo:*

$$\boldsymbol{s}^- = \theta \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \ , \ \boldsymbol{s}^+ = \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{y_o} \tag{2.4}$$

Definizione 5 *Usando la soluzione ottima del modello CCR-DUAL risolviamo il seguente sistema:*

$$\begin{aligned} max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{s}^-,\boldsymbol{s}^+} \qquad & \omega = \boldsymbol{es}^- + \boldsymbol{es}^+ \\ t.c. \qquad & \boldsymbol{s}^- = \theta^* \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \\ & \boldsymbol{s}^+ = \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{s}^- \geq \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{s}^+ \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$*. Definiamo tale modello II fase.*

Definizione 6 *Una soluzione ottima* $(\boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$ *del modello precedentemente esposto é chiamata "max-slack solution". Se tale soluzione soddisfa* $\boldsymbol{s^{-*}} = \boldsymbol{0}$ *e* $\boldsymbol{s^{+*}} = \boldsymbol{0}$ *viene chiamata "zero-slack".*

Definizione 7 *Se una soluzione ottimale* $(\boldsymbol{\theta^*}, \boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$ *dei due modelli esposti soddisfa* $\theta^* = 1$ *ed é una soluzione zero-slack allora la DMU é chiamata CCR-efficient. Altrimenti é inefficiente.*

Definizione 8 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model orientato agli Output nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} (DLPO_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\ t.c \qquad & \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\ & \boldsymbol{Y\lambda} \geq \theta \boldsymbol{y_o} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Osservazione 2.1.1 *Anche in questo caso possiamo definire i vettori di slack:*

$$X\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{s}^- = \boldsymbol{x_o} Y\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{s}^+ = \theta \boldsymbol{y_o} \tag{2.7}$$

Osservazione 2.1.2 *Supponiamo di avere* $(\theta^*, \boldsymbol{s}^{*-}, \boldsymbol{s}^{*+})$ *soluzioni ottimali del CCR-Model e* $(\mu^*, \boldsymbol{t}^{*-}, \boldsymbol{t}^{*+})$ *allora si ha che:*

$$\boldsymbol{t}^{*-} = \boldsymbol{s}^{*-}/\theta^*, \boldsymbol{t}^{*+} = \boldsymbol{s}^{*+}/\theta^* \tag{2.8}$$

2.2 BCC

Definizione 9 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC-Model nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(BCC_0) \qquad & \min_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\
t.c \qquad & \theta \boldsymbol{x_o} - \boldsymbol{X\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{Y\lambda} \geq \boldsymbol{y_o} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{e\lambda} = 1
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\boldsymbol{e} = (1 \ldots 1)$.

Definizione 10 *Se una soluzione ottima $(\theta^*, \boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-*}}, \boldsymbol{s^{+*}})$, ottenuta applicando la II fase al BCC-Model, soddisfa le condizioni $\theta^* = 1$ e "no slack solution" allora la DMU é chiamata BCC-efficient, altrimenti é inefficiente.*

Definizione 11 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC orientato all'Output nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(BCC_0 - 0) \qquad & \max_{\theta,\boldsymbol{\lambda}} \theta \\
t.c \qquad & \boldsymbol{X\lambda} \leq \boldsymbol{x_o} \\
& \boldsymbol{Y\lambda} \geq \theta \boldsymbol{y_o} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \\
& \boldsymbol{e\lambda} = 1
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\boldsymbol{e} = (1 \ldots 1)$.

2.3 ADDITIVE MODEL

Definizione 12 *Sia $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice degli Input e sia $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ la matrice degli Output. Definiamo l'ADDITIVE-MODEL nel seguente modo:*

$$
\begin{aligned}
(ADD_0) \qquad & \max_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s^+}, \boldsymbol{s^-}} \ \theta = \boldsymbol{es^-} + \boldsymbol{e^+} \\
t.c \qquad & \boldsymbol{X\lambda} + \boldsymbol{s^-} = \boldsymbol{x_o} \\
& \boldsymbol{Y\lambda} - \boldsymbol{s^+} = \boldsymbol{y_o} \\
& \boldsymbol{e\lambda} = 1 \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{s^-} \geq 0, \boldsymbol{s^+} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

dove $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\boldsymbol{e} = (1 \ldots 1)$.

Definizione 13 *Una DMU si dice* ADD-efficient *se e solo se $\boldsymbol{s^{-*} = 0}$ e $\boldsymbol{s^{+*} = 0}$*

2.4 SBM MODEL

Definizione 14 *Sia* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *la matrice degli Input e sia* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{s\times n}$ *la matrice degli Output. Definiamo SBM-DUALE nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}
(D-SBM) \qquad & \max_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}} \theta \\
t.c \qquad & \theta + \boldsymbol{v x_o} - \boldsymbol{u y_o} = 1 \\
& \boldsymbol{uY} - \boldsymbol{vX} \leq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{v} \geq 1/m[1/\boldsymbol{x_o}] \\
& \boldsymbol{u} \geq \theta/s[1/\boldsymbol{y_o}]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

dove con $[1/\boldsymbol{x}]$ *rappresenta il vettore* $(1/x_1, \ldots, 1/x_m)$*.*

Definizione 15 *Una DMU si dice* SBM-efficient *se e solo se* $\theta = 1$