

Capitolo 1

DEA

1.1 Introduzione

Il *Data Envelopment Analysis*, che indicheremo con l'acronimo *DEA*, è un metodo non parametrico per la stima delle frontiere di efficienza. È usato per misurare empiricamente l'efficienza produttiva delle unità decisionali, *DMU* (Decision Making Units). Gli approcci non parametrici hanno il vantaggio di non assumere particolari forme alla frontiera, ma non forniscono una relazione generale tra input e output.

Per introdurci allo studio della DEA, iniziamo con l'esporre un primo esempio esplicativo. Supponiamo di avere otto negozi $\{A, \dots, H\}$, ciascuno dei quali dispone di un certo numero di impiegati e produce un certo quantitativo di vendite (quest'ultime in scala 1:100000). Una semplice misura di efficienza per ciascun negozio pu essere espressa dalla seguente formula:

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}} \quad (1.1)$$

dove le vendite sono gli output e gli impiegati l'input. Mostriamo in Tabella 1.1 i dati relativi al problema precedentemente esposto.

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Impiegato	2	3	3	4	5	5	6	8
Vendita	1	3	2	3	4	2	3	5
Vendita/Impiegato	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.1: Esempio con singolo input e singolo output

Analizzando i coefficienti contenuti nell'ultima riga della Tabella 1.1, possiamo identificare B come negozio più efficiente. Si può rappresentare graficamente questa situazione, mettendo sulle ascisse il numero di impiegati e sulle ordinate le vendite, come in Figura 1.1.

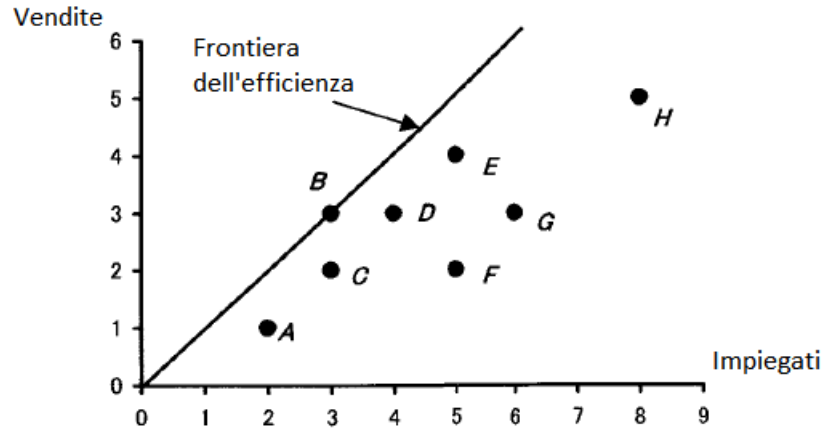


Figura 1.1: Rappresentazione grafica dell'esempio

Osserviamo dalla Figura 1.1 che per ogni negozio possiamo esprimere le vendite di ciascun dipendente come coefficiente angolare della retta che congiunge il punto del grafico corrispondente al negozio con l'origine. La retta con la pendenza maggiore (in questo caso quella passante per B) viene chiamata *Frontiera dell'efficienza*. La scelta del nome è dovuta al fatto che i punti del grafico non possono trovarsi al di sopra di questa retta.

Proseguiamo l'analisi dell'esempio valutando l'efficienza di tutti i negozi rispetto a B, con la formula

$$0 \leq \frac{\text{Vendite per impiegato del negozio } i\text{-esimo}}{\text{Vendite per impiegato di B}} \leq 1 \quad (1.2)$$

ottenendo:

Negozi	A	B	C	D	E	F	G	H
Efficienza	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.2: Esempio con singolo input e singolo output

A questo punto possiamo proporre delle strategie per rendere efficienti i negozi inefficienti: graficamente si traduce nell'avvicinare i punti rappresentanti i negozi alla frontiera dell'efficienza. Per esempio, il negozio A, può essere migliorato:

$$\text{riducendo l'input (numero di impiegati)} \quad (1.3)$$

$$\text{aumentando l'output (vendite)} \quad (1.4)$$

Le due alternative proposte equivalgono rispettivamente ai punti A_1 e A_2 riportati in Figura 1.2: il punto A_1 corrisponde alla situazione in cui si riducono gli impiegati da 2 a 1, mantenendo le vendite inalterate; il punto A_2 invece, corrisponde ad un aumento delle vendite da 1 a 2 lasciando inalterato il numero di impiegati. Infine, tutti gli altri punti del segmento A_1A_2 rappresentano un miglioramento del negozio A non ottenibile tramite le opzioni (1.3) o (1.4).

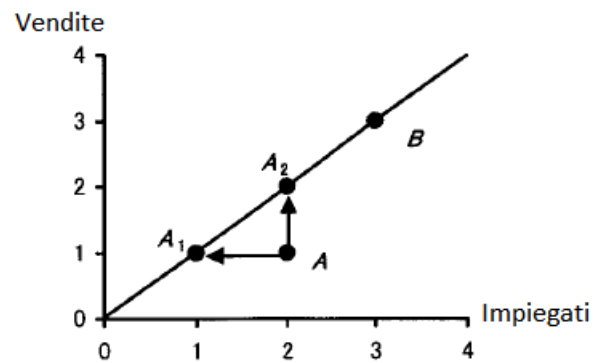


Figura 1.2: Miglioramento del negozio A

Osservazione 1.1.1 *Il nome 'Data Envelopment Analysis' proviene dalla proprietà della frontiera dell'efficienza che avvolge (envelope) tutte le rappresentazioni grafiche delle DMU.*

Non è ragionevole ritenere che la frontiera dell'efficienza si estenda all'infinito con la stessa pendenza. Analizzeremo questo problema in seguito utilizzando diversi modelli DEA. Tuttavia, diamo per scontato che questa linea è efficace nel range di interesse e chiamiamo tale assunzione 'rendimenti di scala costanti'.

Capitolo 2

Metodi Test DEA

2.1 CCR

Definizione 1 Sia $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $Y \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Duale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (DLP_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\ \text{t.c.} \quad & \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ & Y\lambda \geq y_o \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi.

Definizione 2 Definiamo i vettori degli input in eccesso e degli output carenti, indicati rispettivamente come s^- e s^+ , nel seguente modo:

$$s^- = \theta x_o - X\lambda, \quad s^+ = Y\lambda - y_o \tag{2.2}$$

Definizione 3 Usando la soluzione ottima del modello CCR-DUAL risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, s^-, s^+} \quad & \omega = es^- + es^+ \\ \text{t.c.} \quad & s^- = \theta^* x_o - X\lambda \\ & s^+ = Y\lambda - y_o \\ & \lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $e = (1, \dots, 1)$. Definiamo tale modello II fase.

Definizione 4 Una soluzione ottima $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ del modello precedentemente esposto é chiamata "max-slack solution". Se tale soluzione soddisfa $s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$ viene chiamata "zero-slack".

Definizione 5 Se una soluzione ottimale $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ dei due modelli esposti soddisfa $\theta^* = 1$ ed é una soluzione zero-slack allora la DMU é chiamata CCR-efficient. Altrimenti é inefficiente.

Definizione 6 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model orientato agli Output nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (DLPO_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \theta \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Osservazione 2.1.1 Anche in questo caso possiamo definire i vettori di slack:

$$\mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_o, \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \theta \mathbf{y}_o \tag{2.5}$$

Osservazione 2.1.2 Supponiamo di avere $(\theta^*, \mathbf{s}^{*-}, \mathbf{s}^{*+})$ soluzioni ottimali del CCR-Model e $(\mu^*, \mathbf{t}^{*-}, \mathbf{t}^{*+})$ allora si ha che:

$$\mathbf{t}^{*-} = \mathbf{s}^{*-} / \theta^*, \mathbf{t}^{*+} = \mathbf{s}^{*+} / \theta^* \tag{2.6}$$

2.2 BCC

Definizione 7 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC-Model nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (BCC_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \theta \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 8 Se una soluzione ottima $(\theta^*, \lambda^*, \mathbf{s}^{*-}, \mathbf{s}^{*+})$, ottenuta applicando la II fase al BCC-Model, soddisfa le condizioni $\theta^* = 1$ e "no slack solution" allora la DMU é chiamata BCC-efficient, altrimenti é inefficiente.

Definizione 9 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC orientato all'Output nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (BCC_0 - 0) \quad & \max_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x}_o \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \theta \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

2.3 ADDITIVE MODEL

Definizione 10 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo l'ADDITIVE-MODEL nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (ADD_0) \quad & \max_{\lambda, s^+, s^-} \theta = \mathbf{e}s^- + \mathbf{e}^+ \\
 t.c \quad & \mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_o \\
 & \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_o \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0, \mathbf{s}^- \geq 0, \mathbf{s}^+ \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 11 Una DMU si dice ADD-efficient se e solo se $\mathbf{s}^{-*} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{s}^{+*} = \mathbf{0}$

2.4 SBM MODEL

Definizione 12 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo SBM-DUALE nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (D - SBM) \quad & \max_{\theta, v, u} \theta \\
 t.c \quad & \theta + \mathbf{v}\mathbf{x}_o - \mathbf{u}\mathbf{y}_o = 1 \\
 & \mathbf{u}\mathbf{Y} - \mathbf{v}\mathbf{X} \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{v} \geq 1/m[1/\mathbf{x}_o] \\
 & \mathbf{u} \geq \theta/s[1/\mathbf{y}_o]
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dove con $[1/\mathbf{x}]$ rappresenta il vettore $(1/x_1, \dots, 1/x_m)$.

Definizione 13 Una DMU si dice SBM-efficient se e solo se $\theta = 1$