

Capitolo 1

DEA

1.1 Introduzione

Il *Data Envelopment Analysis*, che indicheremo con l'acronimo *DEA*, è un metodo non parametrico per la stima delle frontiere di efficienza. È usato per misurare empiricamente l'efficienza produttiva delle unità decisionali, *DMU* (Decision Making Units). Gli approcci non parametrici hanno il vantaggio di non assumere particolari forme alla frontiera, ma non forniscono una relazione generale tra input e output.

Per introdurci allo studio della DEA, iniziamo con l'esporre un primo esempio esplicativo. Supponiamo di avere otto negozi $\{A, \dots, H\}$, ciascuno dei quali dispone di un certo numero di impiegati e produce un certo quantitativo di vendite (quest'ultime in scala 1:100000). Una semplice misura di efficienza per ciascun negozio pu essere espressa dalla seguente formula:

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}} \quad (1.1)$$

dove le vendite sono gli output e gli impiegati l'input. Mostriamo in Tabella 1.1 i dati relativi al problema precedentemente esposto.

Negozio	A	B	C	D	E	F	G	H
Impiegato	2	3	3	4	5	5	6	8
Vendita	1	3	2	3	4	2	3	5
Vendita/Impiegato	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.1: Esempio con singolo input e singolo output

Analizzando i coefficienti contenuti nell'ultima riga della Tabella 1.1, possiamo identificare B come negozio più efficiente. Si può rappresentare graficamente questa situazione, mettendo sulle ascisse il numero di impiegati e sulle ordinate le vendite, come in Figura 1.1.

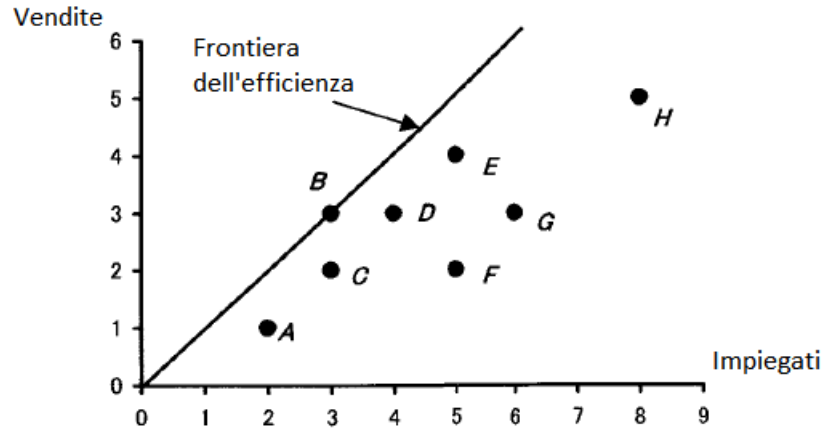


Figura 1.1: Rappresentazione grafica dell'esempio

Osserviamo dalla Figura 1.1 che per ogni negozio possiamo esprimere le vendite di ciascun dipendente come coefficiente angolare della retta che congiunge il punto del grafico corrispondente al negozio con l'origine. La retta con la pendenza maggiore (in questo caso quella passante per B) viene chiamata *Frontiera dell'efficienza*. La scelta del nome è dovuta al fatto che i punti del grafico non possono trovarsi al di sopra di questa retta.

Proseguiamo l'analisi dell'esempio valutando l'efficienza di tutti i negozi rispetto a B, con la formula

$$0 \leq \frac{\text{Vendite per impiegato del negozio } i\text{-esimo}}{\text{Vendite per impiegato di B}} \leq 1 \quad (1.2)$$

ottenendo:

Negozi	A	B	C	D	E	F	G	H
Efficienza	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabella 1.2: Esempio con singolo input e singolo output

A questo punto possiamo proporre delle strategie per rendere efficienti i negozi inefficienti: graficamente si traduce nell'avvicinare i punti rappresentanti i negozi alla frontiera dell'efficienza. Per esempio, il negozio A, può essere migliorato:

$$\text{riducendo l'input (numero di impiegati)} \quad (1.3)$$

$$\text{aumentando l'output (vendite)} \quad (1.4)$$

Le due alternative proposte equivalgono rispettivamente ai punti A_1 e A_2 riportati in Figura 1.2: il punto A_1 corrisponde alla situazione in cui si riducono gli impiegati da 2 a 1, mantenendo le vendite inalterate; il punto A_2 invece, corrisponde ad un aumento delle vendite da 1 a 2 lasciando inalterato il numero di impiegati. Infine, tutti gli altri punti del segmento A_1A_2 rappresentano un miglioramento del negozio A non ottenibile tramite le opzioni (1.3) o (1.4).

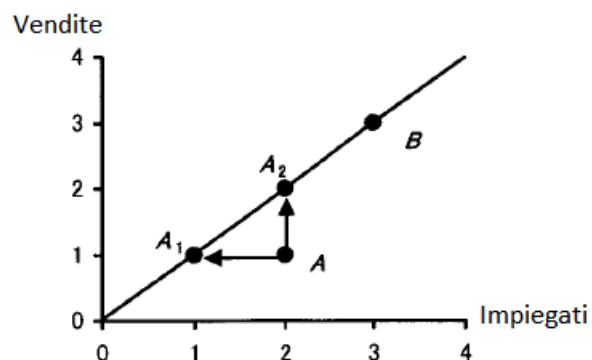


Figura 1.2: Miglioramento del negozio A

Osservazione 1.1.1 *Il nome 'Data Envelopment Analysis' proviene dalla proprietà della frontiera dell'efficienza che avvolge (envelope) tutte le rappresentazioni grafiche delle DMU.*

Non è ragionevole ritenere che la frontiera dell'efficienza si estenda all'infinito con la stessa pendenza. Analizzeremo questo problema in seguito utilizzando diversi modelli DEA. Tuttavia, diamo per scontato che questa linea è efficace nel range di interesse e chiamiamo tale assunzione 'rendimenti di scala costanti'.

Per concludere questa parte introduttiva cerchiamo di dare una definizione che possa caratterizzare le organizzazioni oggetto della *DEA*. Generalmente viene chiamata *DMU* un'entità responsabile di convertire input in output e per la quale sia possibile valutarne le performances.

Capitolo 2

Metodi Test DEA

2.1 CCR

Proseguiamo la trattazione esponendo il modello presentato per la prima volta da Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978, che va sotto il nome di CCR.

Definizione 1 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (FP_o) \quad & \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \theta = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \\ t.c \quad & \frac{u_1 y_{1j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \cdots + v_m x_{mj}} \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove v_j e u_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Osserviamo che la 2.1 rappresenta un problema frazionale, quindi per poterlo eseguire con un elaboratore é risulta necessario riformularlo in modo da ottenere un problema lineare.

Definizione 2 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (FP_o) \quad & \max_{\mu, \nu} \theta = \mu_1 y_{1o} + \cdots + \mu_s y_{so} \\ t.c \quad & \nu_1 x_{1o} + \cdots + \nu_m x_{mo} = 1 \\ & \mu_1 y_{1j} + \cdots + \mu_s y_{sj} \leq \nu_1 x_{1j} + \cdots + \nu_m x_{mj} \quad (j = 1, \dots, n) \\ & \nu_1, \dots, \nu_m \geq 0 \\ & \mu_1, \dots, \mu_s \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove ν_j e μ_j rappresentano i pesi che associamo a rispettivamente a ciascun input e output.

Teorema 2.1.1 La 2.1 é equivalente alla 2.2

Teorema 2.1.2 (*Unit Invariant Theorem*) La soluzione ottimale della 2.1 e 2.2 che indicheremo con $\max \theta = \theta^*$ sono indipendenti dalle unità di misura con cui sono espressi output e input a patto che per ogni DMU essi siano valutati con la stessa unità di misura.

Definizione 3 (*CCR-Efficiency*) La DMU è efficiente per il CCR-Model se $\theta^* = 1$ e (v^*, u^*) , con $v^* \geq 0$ e $u^* \geq 0$. Altrimenti la DMU è inefficiente.

Definizione 4 Sia $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $Y \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Duale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (DLP_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\ \text{t.c.} \quad & \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ & Y\lambda \geq y_o \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi.

Definizione 5 Definiamo i vettori degli input in eccesso e degli output carenti, indicati rispettivamente come s^- e s^+ , nel seguente modo:

$$s^- = \theta x_o - X\lambda, \quad s^+ = Y\lambda - y_o \tag{2.4}$$

Definizione 6 Usando la soluzione ottima del modello CCR-DUAL risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, s^-, s^+} \quad & \omega = es^- + es^+ \\ \text{t.c.} \quad & s^- = \theta^* x_o - X\lambda \\ & s^+ = Y\lambda - y_o \\ & \lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $e = (1, \dots, 1)$. Definiamo tale modello II fase.

Definizione 7 Una soluzione ottima $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ del modello precedentemente esposto è chiamata "max-slack solution". Se tale soluzione soddisfa $s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$ viene chiamata "zero-slack".

Definizione 8 Se una soluzione ottimale $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ dei due modelli esposti soddisfa $\theta^* = 1$ ed è una soluzione zero-slack allora la DMU è chiamata CCR-efficient. Altrimenti è inefficiente.

Osservazione 2.1.3 Anche in questo caso possiamo definire i vettori di slack:

$$X\lambda + s^- = x_o, \quad Y\lambda - s^+ = y_o \tag{2.6}$$

Definizione 9 (*Pareto-Koopmans Efficiency*) Una DMU è pienamente efficiente se e solo se non è possibile aumentare qualunque input o output senza peggiorarne un altro.

Teorema 2.1.4 LE due definizioni di CCR-Efficient sono equivalenti.

Osservazione 2.1.5 Per una DMU_o inefficiente, noi definiamo l'insieme di riferimento E_o , usando la max-slack solution ottenuta usando la 2.5 e la 2.2:

$$E_o = \{j | \lambda_j^* \geq 0\} \quad (j \in \{1, \dots, n\}). \quad (2.7)$$

Una soluzione ottimale può essere espressa come:

$$\begin{aligned} \theta^* \mathbf{x}_o &= \sum_{j \in E_o} \mathbf{x}_j \lambda_j^* + \mathbf{s}^{-*} \\ \mathbf{y}_o &= \sum_{j \in E_o} \mathbf{y}_j \lambda_j^* - \mathbf{s}^{+*} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Questo può essere interpretato come segue:

$$\mathbf{x}_o \geq \theta^* \mathbf{x}_o - \mathbf{s}^{-*} = \sum_{j \in E_o} \mathbf{x}_j \lambda_j^* \quad (2.9)$$

quindi

$$\mathbf{x}_o \geq \text{tecniche - mista inefficiente} = \text{una combinazione positiva degli input valutati} \quad (2.10)$$

In modo analogo

$$\mathbf{y}_o \leq \mathbf{y}_o + \mathbf{s}^{+*} = \sum_{j \in E_o} \mathbf{y}_j \lambda_j^* \quad (2.11)$$

quindi

$$\mathbf{y}_o \leq \text{output} + \text{carenze} = \text{una combinazione positiva degli output valutati} \quad (2.12)$$

Concludendo queste relazioni suggeriscono che l'efficienza $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o)$ per una DMU può essere migliorata riducendo radialmente gli input usando la θ^* e eliminando gli eccessi \mathbf{s}^{-*} . In modo analogo si può agire sugli output aumentando gli output della quantità espressa da \mathbf{s}^{+*} .

Dalle considerazioni fatte fino ad ora possiamo enunciare la seguente definizione

Definizione 10 Definiamo le CCR-projection come:

$$\hat{\mathbf{x}}_o = \mathbf{x}_o - \Delta \mathbf{x}_o = \theta^* \mathbf{x}_o - \mathbf{s}^{-*} \leq \mathbf{x}_o \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_o = \mathbf{y}_o + \Delta \mathbf{y}_o = \theta^* \mathbf{y}_o + \mathbf{s}^{+*} \geq \mathbf{y}_o \quad (2.14)$$

Teorema 2.1.6 Le migliori $(\hat{\mathbf{x}}_o, \hat{\mathbf{y}}_o)$ espresse dalle 2.13 e 2.14 sono CCR-efficient

Corollario 2.1.7 I punti con coordinate $(\hat{\mathbf{x}}_o, \hat{\mathbf{y}}_o)$ definite dalle 2.13 e 2.14 rappresentano il punto della frontiera dell'efficienza usata per valutare la performance della DMU_o .

Lemma 2.1.8 Per il punto $(\hat{\mathbf{x}}_o, \hat{\mathbf{y}}_o)$, esiste una soluzione ottima $(\hat{\mathbf{v}}_o, \hat{\mathbf{u}}_o)$ per il problema (LP_e) , la quale è duale a (DLP_e) , tale che:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_o &\geq \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{u}}_o &\geq \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{v}}_o \mathbf{x}_j &= \hat{\mathbf{u}}_o \mathbf{y}_j \quad (j \in E_o) \\ \hat{\mathbf{v}}_o \mathbf{X} &\geq \hat{\mathbf{u}}_o \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Teorema 2.1.9 *Le DMU in E_o definito in 2.7 sono CCR-efficient*

Teorema 2.1.10 *Ciascuna combinazione semipositiva delle DMU in E_o é CCR-efficient.*

Definizione 11 *Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il CCR-Model orientato agli Output nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}
 (DLPO_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \theta \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Osservazione 2.1.11 *Supponiamo di avere $(\theta^*, \mathbf{s}^{*-}, \mathbf{s}^{*+})$ soluzioni ottimali del CCR-Model e $(\mu^*, \mathbf{t}^{*-}, \mathbf{t}^{*+})$ soluzioni del CCR-Model orientato agli output, allora si ha che:*

$$\mathbf{t}^{*-} = \mathbf{s}^{*-} / \theta^*, \mathbf{t}^{*+} = \mathbf{s}^{*+} / \theta^* \tag{2.17}$$

2.2 BCC

Definizione 12 *Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC-Model nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}
 (BCC_0) \quad & \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \theta \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 13 *Se una soluzione ottima $(\theta^*, \lambda^*, \mathbf{s}^{*-}, \mathbf{s}^{*+})$, ottenuta applicando la II fase al BCC-Model, soddisfa le condizioni $\theta^* = 1$ e "no slack solution" allora la DMU é chiamata BCC-efficient, altrimenti é inefficiente.*

Definizione 14 *Per una DMU_o inefficiente per BCC model definiamo il suo insieme di riferimento, E_o basato su una soluzione ottima λ^* come:*

$$E_o = \{j | \lambda_j^* \geq 0\} \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \tag{2.19}$$

Definizione 15 *Definiamo le proiezioni del BCC-Model come:*

$$\hat{\mathbf{x}}_o = \theta^* \mathbf{x}_o - \mathbf{s}^{*-} \tag{2.20}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_o = \mathbf{y}_o + \mathbf{s}^{*+} \tag{2.21}$$

Teorema 2.2.1 *Il punto di coordinate $(\hat{\mathbf{x}}_o, \hat{\mathbf{y}}_o)$ é BCC-efficient.*

Teorema 2.2.2 *Ogni DMU in E_o associata a un λ_j definita come 2.19 é BCC-efficient*

Teorema 2.2.3 Una DMU che ha un il valore minimo per ogni input, oppure che ha valore massimo per ciascun output, é BCC-efficient.

Definizione 16 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo il BCC orientato all'Output nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (BCC_0 - 0) \quad & \max_{\theta, \lambda} \theta \\
 t.c \quad & \mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x}_o \\
 & \mathbf{Y}\lambda \geq \theta \mathbf{y}_o \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

2.3 ADDITIVE MODEL

Definizione 17 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo l'ADDITIVE-MODEL nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (ADD_0) \quad & \max_{\lambda, s^+, s^-} \theta = \mathbf{e}s^- + e^+ \\
 t.c \quad & \mathbf{X}\lambda + s^- = \mathbf{x}_o \\
 & \mathbf{Y}\lambda - s^+ = \mathbf{y}_o \\
 & \mathbf{e}\lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore dei pesi ed $\mathbf{e} = (1 \dots 1)$.

Definizione 18 Una DMU si dice ADD-efficient se e solo se $s^{-*} = \mathbf{0}$ e $s^{+*} = \mathbf{0}$

Teorema 2.3.1 DMU_o é ADD-efficient se e solo se é BCC-efficient

Teorema 2.3.2 Definiamo $\hat{\mathbf{x}}_o = \mathbf{x}_o - s^{-*}$ e $\hat{\mathbf{y}}_o = \mathbf{y}_o + s^{+*}$. Allora il punto $(\hat{\mathbf{x}}_o, \hat{\mathbf{y}}_o)$ é ADD-efficient.

Definizione 19 Definiamo Mix la proporzione nella quale gli input sono usati e gli output prodotti.

Definizione 20 Dato un qualunque problema, una modello DEA é detto traslation invariant se le traslazioni degli input e/o output iniziali generano un nuovo problema che ammette le stesse soluzioni del problema originale.

Teorema 2.3.3 L'Additive-model é traslation invariant.

2.4 SBM MODEL

Definizione 21 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice degli Input e sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ la matrice degli Output. Definiamo SBM-DUALE nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (D - SBM) \quad & \max_{\theta, \mathbf{v}, \mathbf{u}} \theta \\
 t.c \quad & \theta + \mathbf{v}\mathbf{x}_o - \mathbf{u}\mathbf{y}_o = 1 \\
 & \mathbf{u}\mathbf{Y} - \mathbf{v}\mathbf{X} \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{v} \geq 1/m[1/\mathbf{x}_o] \\
 & \mathbf{u} \geq \theta/s[1/\mathbf{y}_o]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

dove con $[1/\mathbf{x}]$ rappresenta il vettore $(1/x_1, \dots, 1/x_m)$.

Definizione 22 Una DMU si dice SBM-efficient se e solo se $\theta = 1$

Definizione 23 L'insieme degli indici corrispondenti ai valori positivi di λ_j^* é chiamato insieme di riferimento per il punto $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o)$

Teorema 2.4.1 La soluzione ottima del SBM-Model é sempre minore o uguale a quella del CCR-model.

Teorema 2.4.2 Una DMU é CCR-efficient se e solo se é SBM-efficient.