Opravná písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 21. 6. 2005

Skupina B

1. príklad. Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.

2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{R}\right)\wedge\left(x^2-3x+2=0\right)\right\}$

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ a $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ sú relácie nad $X=\{1,2,3\}$ a $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte $P\circ Q$, $Q\circ P$

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú podreťazec CFGA?

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x+y$, pre $A=\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

7. príklad. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou

$$x+\overline{x}=\mathbf{1}$$
$$x\cdot\overline{x}=\mathbf{0}$$
$$x+x=1$$

8. príklad. Riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcl} 2x & +2y & +z & = & 4 \\ x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & & = & 6 \end{array}$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

10. príklad. Pre ktoré hodnoty *n* je kompletný graf K_n bipartitný? Pre ktoré hodnoty *n* je cyklus C_n bipartitný? (Graf, ktorý má vlastnosť, že jeho vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín, sa volá *bipartitný graf*.)

11. príklad. Keď je *G* obyčajný graf o 15 hranách a jeho doplnkový graf $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf *G*? (*Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu *G* má rovnakú vrcholovú množinu ako *G*. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v *G*. Slučky neuvažujeme.)

Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi.

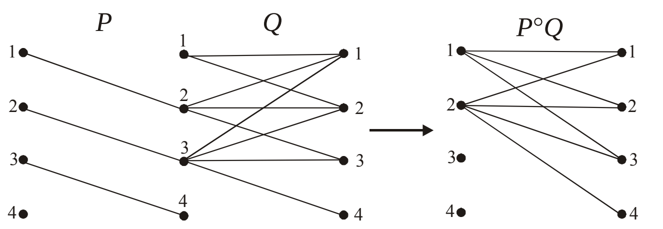
Riešenie

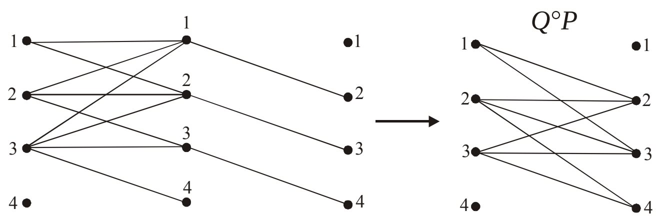
1. príklad.
$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow np(a \cdot b)$. Ak $a = 2k+1$ a $b = 2l+1$, potom $a \cdot b = 2(2kl+k+l)+1$.

2. príklad
$\{1,2\}$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel

3. príklad
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

4. príklad
$P \circ Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$
$Q \circ P = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$





5. príklad
$4! = 24$

6. príklad
Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do *A*.

7. príklad
$x = \mathbf{0} \vee x = \mathbf{1}$.
$x = \mathbf{0} \vee x = \mathbf{1}$.
$x = \mathbf{1}$.

8. príklad
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$z=4t, y=-3t,\ x=2+t,\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2+t\\-3t\\4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}.$

9. príklad

$(|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\\boxed{1}&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&\boxed{1}&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=2)$

10. príklad

Pre ktoré hodnoty *n* sú nasledujúce grafy bipartitné?

a) K_n

Riešenie: Iba pre n=2, pre viac ako 2 sú vždy aspoň dva vrcholy v jednej partícii, a ľubovoľné 2 vrcholy musia byť spojené hranou.

b) C_n

Riešenie: pre kružnice párneho stupňa, keď si oindexujeme postupne vrcholy idúc po hranách kružnice, do jednej partície dame vrcholy indexované párnym číslom, do druhej nepárnym číslom.

11. príklad

Keď je *G* obyčajný graf o 15 hranách a $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf *G*?

Riešenie: Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$2|E|=|V|\deg(v)$

$2\times 28=|V|\times(|V|-1)$

$|V|=8$