Otázky ku skúške Matematická analýza I.

1. Definícia limity funkcie v bode

Definícia 12 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ a a je hromadným bodom množiny A. Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje $\mathcal{O}^o_\delta(a)$ také, že $f(\mathcal{O}^o_\delta(a) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, hovoríme, že funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ má v bode a limitu b. Píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = b$.*

2. Veta o limite zúženia funkcie

Definícia 14 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $C \subset A$. Potom funkciu $(f|C) : C \to \mathbb{R}$, $(f|C)(x) = f(x)$ pre každé $x \in C$, nazývame zúženie funkcie f na množine C.*

Veta 2 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$, $C \subset A$ a $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny C. Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Potom aj $\lim_{x\to a}(f|C)(x) = b$.*

3. Veta o limite zloženej funkcie

Veta 6 *Nech $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ a $g : B \to \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé $x \in A \setminus \{a\}$ je $f(x) \neq b$.*
- *Funkcia g je spojitá v bode b.*

Potom $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

4. Definícia spojitosti funkcie v bode, na množine a spojitosti

Definícia 13 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, budeme hovoriť, že funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode a.*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in C \subset A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá na množine C.

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá.

5. Definícia postupnosti reálnych čísel. Definícia konvergentnej postupnosti

Definícia 18 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. Hodnotu $f(n) = a_n$ nazývame n-tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare $(a_n)_{n=1}^\infty$.*

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je konvergentná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.

6. Definícia nekonečného radu, jeho konvergencie a súčtu

Definícia 21 *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n nazývame n-tý člen radu.

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je priradená taká postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, že platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.

7. Bolzano - Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 21 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $m > n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

8. Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu. Uviesť príklad, že nie je postačujúcou podmienkou (harmonický rad)

Veta 22 *(Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

harmonický rad je rad tvaru

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

9. Definícia majorantného radu, majorantné kritérium konvergencie nekonečného radu

Definícia 25 *Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \le b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. (Je zrejmé, že $0 \le b_n$.) Potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 24 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 3 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný, tak je divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

10. D' Alembertovo (podielové) kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 25 *(d'Alembertovo kritérium konvergencie radu) Nech $a_n \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ak*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

11. Cauchyho (odmocninové) kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 26 *(Cauchyho kritérium konvergencie radu) Nech*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

12. Definícia radu so striedavými znamienkami, kritérium o jeho konvergencii

Definícia 27 *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 27 *(Leibnitzovo kritérium konvergencie radu) Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ a postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný.*

13. Definícia diferencovateľnosti funkcie v bode

Definícia 29 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A. Nech existuje vlastná limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a. Hodnotu $f'(a)$ nazývame derivácia funkcie f v bode a.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $a \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M. Ak funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

14. Veta o vzťahu diferencovateľnosti a spojitosti funkcie

Veta 30 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom je v tomto bode spojitá.*

15. Veta Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho

Veta 36 *(Rolleho veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b).*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f'(c) = 0$.

Veta 37 *(Lagrangeova veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b).*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veta 38 *(Cauchyho veta) Nech sú dané funkcie $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, o ktorých platí:*

1. *Sú spojité (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*
2. *Sú diferencovateľné na otvorenom intervale (a, b).*
3. *$g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$.*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)(c) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

16. Veta o l'Hospitalových pravidlách

Veta 39 *(l'Hospitalovo pravidlo) Nech sú dané také funkcie* $f : (a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *a* $g : (a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *že o nich platí:*

1. *Sú diferencovateľné (na intervale* $(a, b\rangle$*).*
2. $g(x) \neq 0$ *a* $g'(x) \neq 0$ *pre každé* $x \in (a, b\rangle$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Ak za týchto predpokladov existuje $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, *tak existuje aj* $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *a platí*

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Poznámka 2 *Veta platí v tom istom znení, keď v nej tretiu podmienku* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *nahradíme podmienkou* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

17. Definícia monotónnosti funkcie.

Definícia 34 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$. *Nech pre každé* $x_1, x_2 \in I$ *také, že* $x_1 < x_2$ *je*

1. $f(x_1) < f(x_2)$. *Potom hovoríme, že* f *je rýdzo rastúca funkcia.*
2. $f(x_1) > f(x_2)$. *Potom hovoríme, že* f *je rýdzo klesajúca funkcia.*
3. $f(x_1) \leq f(x_2)$. *Potom hovoríme, že* f *je rastúca funkcia.*
4. $f(x_1) \geq f(x_2)$. *Potom hovoríme, že* f *je klesajúca funkcia.*

Všetky uvedené funkcie nazývame monotónne funkcie. Funkcie uvedené v prvých dvoch bodoch sa nazývajú rýdzo monotónne funkcie.

Definícia 35 *Nech je daná funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *a interval* $I \subset A$. *Ak zúženie* $f|I : I \to \mathbb{R}$ *je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) na intervale* I.

18. Postačujúca podmienka monotónnosti funkcie na intervale

Veta 40 *Nech* I *je interval a je daná funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$. *Nech*

1. *Funkcia* f *je spojitá na intervale* I.
2. *Funkcia* f *je diferencovateľná na vnútri* $Int(I)$ *intervalu* I.
3. *Pre každé* $x \in Int(I)$ *je* $f'(x) \geq 0$.

Potom je $f : I \to \mathbb{R}$ *rastúca funkcia (na celom intervale* I*).*

Veta 41 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*
3. *Pre každé $x \in Int(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*
4. *Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f'(x) = 0$ pre každé $x \in J$.*

Potom je $f : I \to \mathbb{R}$ rýdzo rastúca funkcia (na celom intervale I).

19. Definícia konvexnosti a konkávnosti funkcie

Definícia 36 *Nech I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí:*

1. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konvexná funkcia.*
2. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konkávna funkcia.*
3. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konvexná funkcia.*
4. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konkávna funkcia.*

Definícia 37 *Nech je daná funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|I : I \to \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) na intervale I.*

20. Postačujúca podmienka konvexnosti (konkávnosti) na intervale sformulovaná pomocou druhej derivácie

Veta 43 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*
3. *Nech $f' : Int(I) \to \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca)*

Potom $f : I \to \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Veta 44 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*
2. *Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*
3. *Nech $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0, f''(x) \geq 0, f''(x) \leq 0)$ pre každé $x \in Int(I)$.*

Potom $f : I \to \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

21. Definícia integrovateľnosti funkcie

Definícia 39 *1. Nech $\langle a, b\rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. Potom $k+1-$ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazývame deliace intervaly.*

2. *Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D.*

3. *Nech $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.*

4. *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom číslo*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Definícia 40 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J, tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx.$$

22. Postačujúce podmienka integrovateľnosti funkcie

Veta 48 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 41 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$.*
2. *V intervale $\langle a, b\rangle$ existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.*
3. *V každom bode z intervalu (a, b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.*
4. *Existujú vlastné limity $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

Potom hovoríme, že funkcia f je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 49 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

23. Funkcia hornej hranice integrálu a jej základná vlastnosť

Definícia 42 *Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Potom funkciu*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_a^x f = \int\limits_a^x f(t)dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f.

Veta 55 *Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

je spojitá.

24. Hlavná veta integrálneho počtu

Veta 56 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$*) a navyše*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

25. Definícia primitívnej funkcie a vety o jej existencii

Definícia 43 *Nech je daná funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$, *kde* I *je interval. Nech existuje funkcia* $F : I \to \mathbb{R}$ *taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame primitívna funkcia funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$.

Veta 57 *Nech funkcia* $F_1 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$. *Potom funkcia* $F_2 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *práve vtedy, ak existuje* $c \in \mathbb{R}$ *také, že pre každé* $x \in I$ *je* $F_2(x) = F_1(x) + c$. *To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

26. Newtonova - Leibnitzova formula

Veta 58 *(Newtonov - Leibnitzov vzorec) Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je jej ľubovoľná primitívna funkcia. Potom*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Poznámka 4 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int\limits_a^a f = 0.$

2. *Ak $a > b$, definujeme* $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f.$

3. *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu*

$$G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt.$$

   Táto funkcia je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$) a platí

$$G'(x) = -f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

4. *Nech $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, I je interval a bod $a \in I$. Definujme funkciu $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a $G'(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.*

27. Veta o integrovaní metódou per partes

Veta 60 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I. Nech $H : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \to \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \to \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 5 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovoľne zvolené. Potom*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

28. Prvá veta o integrovaní substitučnou metódou

Veta 61 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $F : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 6 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovoľné. Potom*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

29. Druhá veta o integrovaní substitučnou metódou

Veta 62 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 7 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$