9. kapitola

Maticová algebra II – systém lineárnych rovníc, Frobeniova veta, Gaussova eliminačná metóda, determinanty, Cramerove pravidlo

1. Systém lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc, ktorý obsahuje m rovníc o n neznámych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9.1}$$

Zavedením matíc

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

prepíšeme systém (9.1) do kompaktného maticového tvaru

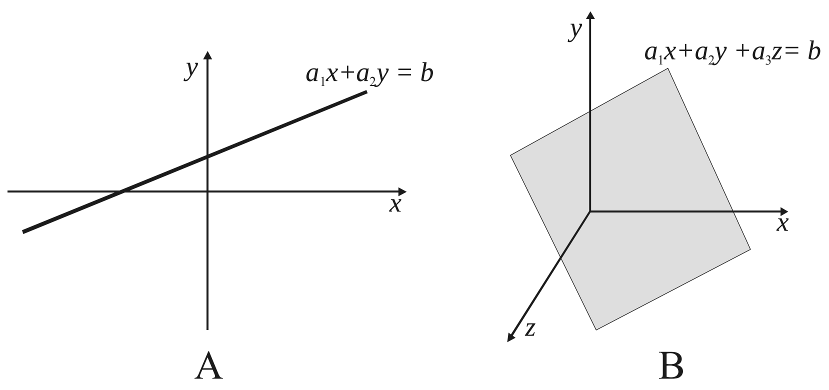
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

kde $\boldsymbol{A}$ sa nazýva ***matica koeficientov***, $\boldsymbol{x}$ sa nazýva ***vektor neznámych*** a $\boldsymbol{b}$ sa nazýva ***vektor konštantných členov***.

Riešenie systému (9.1) môže byť reprezentované stĺpcovým vektorom

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

ktorý keď dosadíme do (9.1), $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, dostaneme maticovú identitu $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$.



Obrázok 9.1. Geometrická interpretácia rovnice zo systému lineárnych rovníc pre (A) n = 2, rovnica je interpretovaná priamkou, (B) n = 3, rovnica je interpretovaná rovinou.

Geometrická interpretácia rovníc zo systému (9.1) je znázornená na obr. 9.1. Riešenie systému je potom určené prienikom týchto geometrických útvarov priradených jednotlivým rovniciam z (9.1). Označme „nadrovinu" priradenú i-tej lineárnej rovnici z (9.1) symbolom σ_i, potom riešenie je zadané ich prienikom

$$\mathcal{X} = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_m \tag{9.5}$$

Z geometrického pohľadu vyplýva, že prienik (9.5) buď obsahuje (i) len jeden element, (ii) má nekonečne mnoho elementov, alebo (iii) je prázdny. V prípade, že množina $\mathcal{X}$ je prázdna, potom systém nemá riešenie (môžeme povedať, že systém (9.1) je kontradiktórny). V prípade (i) systém má práve jedno riešenie, ktoré je jednoznačne určené systémom rovníc (porovnaj príklad 9.1). V druhom prípade (ii) existuje nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria „podrovinu". Táto kvalitatívna diskusia riešení systému lineárnych rovníc bude precizovaná v ďalšej časti tejto kapitoly.

Jeden z hlavných cieľov teórie systémov lineárnych rovníc je rozhodnúť za ktorých podmienok majú alebo nemajú riešenie a v prípade, že ho majú, tak ako ho zostrojiť.

Za predpokladu, že matica koeficientov $\boldsymbol{A}$ je regulárna, riešenie systému lineárnych rovníc má tento explicitný tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{9.5}$$

Príklad 9.1. Nájdite inverznú maticu k matici

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Zavedieme matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pomocou týchto matíc prepíšeme tento systém do maticového tvaru (9.3). V príklade 8.8 bola zostrojená inverzná matica vzhľadom k $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Použitím (9.5) zostrojíme riešenie systému v tvare

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Budeme študovať tri elementárne príklady, ktoré sú inštruktívne pre pochopenie geometrickej interpretácie lineárnych rovníc a s ním úzko súvisiaci problém počtu riešení:

(1) Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

má práve jedno riešenie $\boldsymbol{x} = (1/2, 1/2)^T$, geometrická interpretácia ja znázornená na obr. 9.2, diagram A.

(2) Systém lineárnych rovníc

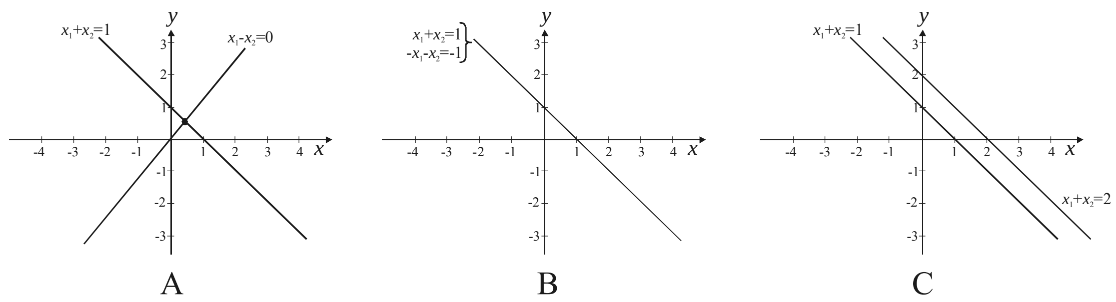
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

má nekonečne mnoho riešení, ktoré môžeme vyjadriť napr. vektorom $\boldsymbol{x} = (t, 1-t)^T, \forall t \in \mathbb{R}$, geometrická interpretácia ja znázornená na obr. 9.2, diagram B.

(3) Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

nemá riešenie, rovnice sú vo vzájomnom spore, geometrická interpretácia ja znázornená na obr. 9.2, diagram C.



Obrázok 9.2. Geometrické znázornenie troch rôznych systémov lineárnych rovníc pre $n = 2$. Diagram A znázorňuje prípad, v ktorom sú priamky nerovnobežné, ich prienik jednoznačne určuje práve jedno riešenie systému. Diagram B znázorňuje situáciu, keď obe priamky sú totožné, ich prienik je reprezentovaný priamkou, existuje nekonečne mnoho riešení, ktoré ležia na priamke. Diagram C znázorňuje situáciu, keď priamky sú rôzne ale rovnobežné, čiže ich prienik je prázdny, neexistuje žiadne riešenie.

Definujme **rozšírenú maticu (koeficientov)** $\boldsymbol{A}'$ tak, že matica koeficientov $\boldsymbol{A}$ je rozšírená o stĺpcový vektor konštantných členov

$$\boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Pomocou hodností matice koeficientov $\boldsymbol{A}$ a rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$ môžeme stanoviť, kedy systém lineárnych rovníc má alebo nemá riešenie.

Veta 9.1 (Frobeniova veta[1]). Systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') \qquad (9.6)$$

Pričom, podrobnejšou analýzou tejto podmienky zistíme, že

(1) ak $h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}')$, potom systém nemá riešenie,

(2) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = n$, potom systém má práve jedno riešenie,

(3) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') < n$, potom systém má nekonečne mnoho riešení.

Táto veta patrí medzi fundamentálny teoretický výsledok teórie lineárnych rovníc, špecifikuje nutné a postačujúce podmienky pre existenciu riešenia. Jej dôkaz je pomerne zdĺhavý a vyžaduje ďalšie pojmy z lineárnej algebry, preto ho nebudeme uvádzať. Séria troch nasledujúcich príkladov ilustruje jednotlivé prípady z Frobeniovej vety. Výsledky týchto

[1] Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) bol nemecký matematik, jeden zo zakladateľov teórie grúp.

príkladov je potrebné porovnať s textom za príkladom 9.1, kde sú uvádzané aj riešenia diskutovaných systémov lineárnych rovníc.

Príklad 9.2. Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém má práve jedno riešenie, $\boldsymbol{x} = (1/2, 1/2)^T$.

Príklad 9.3. Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(A) = h(A') = 1 < 2$$

To znamená, že systém má nekonečne mnoho riešení, $\boldsymbol{x} = (t, 1-t)^T, \forall t \in \mathbb{R}$.

Príklad 9.4. Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = 1 \neq h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém nemá riešenie.

Frobeniova veta nám len zabezpečuje či systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má alebo nemá riešenie, ale v prípade, že existuje, neumožňuje nám toto riešenie nájsť. Jej aplikácia vyžaduje stanovenie hodností tak matice koeficientov *A*, ako aj rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$, tento problém môže byť uskutočnený súčasne tak, že stanovíme hodnosť rozšírenej matice, pričom nebudeme používať elementárne operácie transpozície stĺpcových vektorov (menovite stĺpcového vektora konštantných členov $\boldsymbol{b}$ so stĺpcovými vektormi matice koeficientov, a taktiež, aj stĺpcových vektorov z matice $\boldsymbol{A}$ samotne). Týmto sa vyhneme zbytočným problémom s korektnou interpretáciou získaného riešenia (napr. označenie neznámych môže byť vzájomne poprehadzované). Naviac, upravená rozšírená matica v trojuholníkovom tvare je vhodná na konštrukciu riešenia pomocou metódy spätných substitúcií. Tento prístup tvorí obsah Gaussovej eliminačnej metódy (GEM), ktorá tvorí jeden z najefektívnejších algoritmov pre riešenie systému lineárnych rovníc.

Gaussova[2] eliminačná metóda riešenia systému lineárnych rovníc

Nad rozšírenou maticou ***A***' sa vykonáva postupnosť nasledujúcich elementárnych operácií nad jej riadkami:

(1) transpozícia dvoch riadkov,
(2) vynásobenie riadku nenulovým číslom a
(3) pripočítanie násobku vybraného riadku k inému riadku.

Cieľom týchto úprav je pretransformovať rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar. Riešenie získame z takto upravenej rozšírenej matice metódou spätných substitúcií.

Príklad 9.5. Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$\boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

1. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v prvom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

2. krok. Vykonáme vynulovanie prvku pod diagonálou v druhom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right)$$

K tretiemu riadku pripočítame druhý riadok

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

---

[2] Karl Friedrich Gauss (1977-1855), nemecký matematik, ktorý je pokladaný za jedného z najväčších matematikov v našej histórii. Už ako žiak elementárnej školy (v dnešnej terminológii je to 1.-4. ročník základnej školy) objavil formulu pre súčet prvých n prirodzených čísel, $1+2+...+n = n(n+1)/2$. Týmto výsledkom fascinoval svojho učiteľa, ktorý, aby mal kľud od žiakov, často im dával úlohy typu spočítať napr. prvých 100 prirodzených čísel.

Posledná matica znamená, že pôvodný systém rovníc bol pretransformovaný do tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ -7x_2 + \ 3x_3 &= -6 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostaneme x_3=5, dosadením tohto výsledku do predposlednej rovnice dostaneme x_2=3, dosadením týchto výsledkov do prvej rovnice dostaneme x_1=2.

Príklad 9.6. Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 \quad + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. krok, nulujeme prvky v 1. stĺpci pod diagonálou

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -8 & -6 & -14 \\ -2 & 0 & -6 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(i) Vynásobíme 2. a 3. riadok rozšírenej matice číslom –2

(ii) K druhému a tretiemu riadku pripočítame prvý riadok

(iii) Posledné tri riadky sú lineárne závislé, tak napr. 2. a 3. riadok získame vynásobením 4. riadku číslom –3 resp. –1, môžeme teda vynechať 2. a 3. riadok.

Procedúra stanovenia hodnosti rozšírenej matice končí, získali sme trojuholníkovú maticu. Rozšírenú maticu môžeme prepísať do tvaru systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_2 \ + x_3 \ + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Máme dve rovnice pre štyri neznáme, t. j. dve neznáme môžu byť charakterizované ako voľné parametre, $x_3 = u, x_4 = v$, potom upravený systém prepíšeme do formálneho tvaru dvoch lineárnych rovníc pre dve neznáme

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 - 5u - 3v \\ x_2 &= 3 \ - u \ - v \end{aligned}$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme konečné riešenie pre neznámu x_1

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(5 - 5u - 3v + \left(3 \ - u \ - v\right)\right) = 4 - 3u - 2v$$

Stĺpcový vektor riešenia má tvar

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4-3u-2v\\3-u-v\\u\\v\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}}-u\underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}-v\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{a}-u\boldsymbol{b}-v\boldsymbol{c}$$

Môžeme teda uzavrieť, že systém má nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria množinu

$$\mathcal{X}=\{\boldsymbol{a}-u\boldsymbol{b}-v\boldsymbol{c};\,u,v\in\mathbb{R}\}$$

Ak napríklad položíme $u = v = 1$, potom vektor riešení má tvar

$$\boldsymbol{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}}-\underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}-\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Dosadením týchto hodnôt neznámych do riešeného systému lineárnych rovníc získame identity, t. j. riešenie je korektné.

Homogénny systém lineárnych rovníc

Ak stĺpcový vektor konštantných členov je nulový, potom systém (9.3) sa nazýva homogénny

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad (9.7)$$

Homogénny systém má vždy tzv. triviálne riešenie, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, systém (9.7) potom je automaticky splnený. Môžeme si položiť otázku, kedy existuje netriviálne riešenie (keď aspoň jedna neznáma je nenulová). Tento problém je taktiež riešený Frobeniovou vetou 9.1.

Veta 9.2. Homogénny systém lineárnych rovníc má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice koeficientov je menšia ako počet neznámych

$$h(\boldsymbol{A})<n \qquad (9.8)$$

Jednoduchý dôsledok tejto vety je, že ak hodnosť matice sa rovná počtu neznámych, $h(\boldsymbol{A})=n$, potom homogénny systém má len triviálne „nulové“ riešenie.

Príklad 9.7. Hľadajme riešenie homogénneho systému rovníc

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+5x_3+3x_4&=0\\x_1+x_2+4x_3+3x_4&=0\\x_1\qquad+3x_3+2x_4&=0\\x_2+x_3\quad+x_4&=0\end{aligned}$$

Budeme hľadať hodnosť matice koeficientov tohto systému (pozri príklad 9.6)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&5&3\\\boxed{1}&1&4&3\\\boxed{1}&0&3&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&5&3\\-2&-2&-8&-6\\-2&0&-6&-4\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&5&3\\\cancel{0}&\cancel{-3}&\cancel{-3}&\cancel{-3}\\\cancel{0}&\cancel{-1}&\cancel{-1}&\cancel{-1}\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&5&3\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(A) = 2 < 4$, t. j. systém má nekonečne mnoho netriviálnych riešení. Pomocou trojuholníkovej matice, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou maticou koeficientov, zostrojíme ekvivalentný homogénny systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \quad + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Tento systém obsahuje 2 rovnice pre 4 neznáme, potom, napríklad x_3 a x_4 môžu byť zvolené ako voľné parametre, $x_3 = u$ a $x_4 = v$, pre $u, v \in \mathbb{R}$. Z poslednej rovnice ekvivalentného systému dostaneme $x_2 = -u - v$, ak tento výsledok dosadíme do prvej rovnice získame $x_1 = -3u - 2v$. Vektor neznámych má tvar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3u-2v \\ -u-v \\ u \\ v \end{pmatrix} = -u\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} - v\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} = -u\boldsymbol{a} - v\boldsymbol{b}$$

Ak položíme $u = v = 0$, potom dostávame triviálne riešenie (nulový vektor), ak položíme, napríklad $u = v = -1$, dostaneme netriviálne riešenie

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Množinu riešení potom môžeme vyjadriť takto

$$\mathcal{X} = \{-u\boldsymbol{a} - v\boldsymbol{b}; u, v \in \mathbb{R}\}$$

Príklad 9.8. Nájdite riešenie homogénneho systému

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Stanovíme hodnosť matice koeficientov (pozri príklad 9.5)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice koeficientov $h(\boldsymbol{A}) = 3$, čo je aj počet neznámych, t. j. homogénny systém má len triviálne riešenie. O tejto skutočnosti sa ľahko presvedčíme, keď pomocou trojuholníkovej matice zostrojíme ekvivalentný homogénny systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostaneme, že $x_3 = 0$, dosadením tohto výsledku do druhej rovnice dostaneme $x_2 = 0$, ak oba tieto výsledky dosadíme do prvej rovnice dostaneme $x_1 = 0$. Týmto sme ukázali na konkrétnom príklade, že ak hodnosť matice koeficientov sa rovná počtu neznámych, $h(\boldsymbol{A}) = n$, homogénny systém má len triviálne riešenie. Tieto úvahy môžeme zosumarizovať do nasledujúcej vety.

Veta 9.3. Homogénny systém lineárnych rovníc má buď len jedno triviálne riešenie, vtedy a len vtedy, ak $h(\boldsymbol{A})=n$, alebo má mnoho netriviálnych riešení vtedy a len vtedy, ak $h(\boldsymbol{A})<n$.

9.2 Determinanty

Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých možných matíc. Hodnosť matice môžeme formálne chápať ako zobrazenie množiny matíc $\mathcal{A}$ na množinu kladných celých čísel

$$h:\mathcal{A}\rightarrow\{1,2,...\}$$

Analogicky, pod pojmom ***determinant*** budeme rozumieť zobrazenie množiny štvorcových matíc $\mathcal{A}_{\square}\subset\mathcal{A}$ na množinu reálnych čísel

$$det:\mathcal{A}_{\square}\rightarrow\mathbb{R} \tag{9.9}$$

Determinant matice $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}_{\square}$ budeme označovať symbolom $|\boldsymbol{A}|$, je to reálne číslo z $\mathbb{R}$ priradené štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$.

Prv než pristúpime k definícii determinantu uvedieme základné skutočnosti o permutáciách. ***Permutáciu*** *P* priradenú *n* objektom budeme vyjadrovať symbolom

$$P=(p_1,p_2,...,p_n)$$

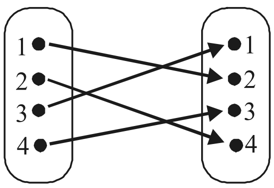
kde elementy p_1, p_2,..., p_n sú prirodzené čísla z množiny $\{1,2,...,n\}$, ktoré vyhovujú podmienke

$$i\neq j\Rightarrow p_i\neq p_j$$

Ako ilustračný príklad tohto pojmu uvedieme permutáciu štyroch objektov

$$P=(2,4,1,3)$$

Permutáciu interpretujeme, ako 1-1-značné zobrazenie množiny obsahujúcej prvých *n* kladných celých čísel na seba, grafická ilustrácia permutrácie je znázornená na obr. 9.3.



Obrázok 9.3. Znázornenie permutácie 4 objektov ako jedno-jednoznačné zobrazenie objektov na seba.

Celkový počet permutácií *n* objektov je *n*!, tieto permutácie tvoria symetrickú grupu (množinu) permutácií S_n.

Ku každej permutácii môžeme priradiť nezáporné celé číslo, ktoré sa nazýva počet inverzií: hovoríme, že prvky p_i a p_j tvoria inverziu v permutácia $P=(p_1,...,p_i,...,p_j,...,p_n)$, vtedy a len vtedy, ak platí

$$i<j\Rightarrow p_i>p_j$$

Celkový počet inverzií v permutácii *P* je označený *I*(*P*).

Príklad 9.9. Zostrojte všetky permutácie pre $n=2$ a $n=3$, charakterizujte každú permutáciu počtom inverzií.

Permutácie pre n=2 majú tvar

$$P=(1,2),\qquad I(P)=0$$
$$P=(2,1),\qquad I(P)=1$$

Permutácie pre n=3 majú tvar

$$P=(1,2,3),\qquad I(P)=0$$
$$P=(1,3,2),\qquad I(P)=1\qquad (3>2)$$
$$P=(2,1,3),\qquad I(P)=1\qquad (2>1)$$
$$P=(2,3,1),\qquad I(P)=2\qquad (2>1,3>1)$$
$$P=(3,1,2),\qquad I(P)=2\qquad (3>1,3>2)$$
$$P=(3,2,1),\qquad I(P)=3\qquad (3>2,3>1,2>1)$$

Definícia 9.1. Nech $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$ je štvorcová matica typu (n,n), ***determinant*** tejto matice je

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{P\in S_n}(-1)^{I(P)}A_{1p_1}A_{2p_2}\ldots A_{np_n}\tag{9.10}$$

kde sumácia obsahuje všetky možné permutácie z S_n . Alternatívne označenie determinantu je $det(A)$ alebo $D(A)$.

Príklad 9.10. Determinant matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

je podľa definície určený takto

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\sum_{P\in S_2}(-1)^{I(P)}A_{1p_1}A_{2p_2}\\ &=(-1)^{I(1,2)}A_{11}A_{22}+(-1)^{I(2,1)}A_{12}A_{21}\\ &=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\end{aligned}$$

Diagramatická interpretácia výpočtu determinantu matice typu 2×2

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\tag{9.11}$$

Príklad 9.11. Determinant matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$$

je podľa definície určený v tvare, ktorý môžeme jednoducho vyjadriť pomocou diagramatickej interpretácie (Sarrusove pravidlo)

$$\left|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - \\ A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} \end{matrix} \tag{9.12}$$

Základné vlastnosti determinantov

(1) Nech A je štvorcová matica, potom

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T| \tag{9.13}$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ľubovolná vlastnosť, ktorá platí pre riadky determinantu musí platiť aj pre jeho stĺpce (a naopak).

(2) Nech A je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch stĺpcov (riadkov)

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right) \to \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}| \tag{9.14a}$$

Nech matica $\boldsymbol{A}$ obsahuje dva rovnaké stĺpce v polohe $\boldsymbol{i}$ a j

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots\boldsymbol{s}_{j-1},\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}_{j+1},\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

Potom jednoduchým dôsledkom vlastnosti (9.14a) je, že táto matica je nulová

$$|\boldsymbol{A}| = 0 \tag{9.14b}$$

(3) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že jeden stĺpec (riadok) vynásobíme číslom α

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_n\right) \to \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\alpha\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$|\boldsymbol{B}| = \alpha|\boldsymbol{A}| \tag{9.15}$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ak matica $\boldsymbol{A}$ obsahuje nulový stĺpec (riadok), potom determinant matice je nulový.

(4) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že násobok vybraného stĺpca (riadka) pripočítame k inému stĺpcu (riadku)

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right) \to B = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i + \alpha\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \tag{9.16}$$

(5) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech pre jej vybraný stĺpec platí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i' + \boldsymbol{s}_i''$

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i' + \boldsymbol{s}_i'',\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| + |\boldsymbol{A}''| \tag{9.17}$$

kde matica $\boldsymbol{A}$' ($\boldsymbol{A}$") vznikne z pôvodnej matice tak, že i-tý stĺpec $\boldsymbol{s}_i$ je nahradený stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{s}_i'$ ($\boldsymbol{s}_i''$)

$$A' = (s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n), \quad A'' = (s_1, \ldots, s_i'', \ldots, s_n)$$

Veta 9.4. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. $|\boldsymbol{A}|=0$ vtedy a len vtedy, ak $h(A)<n$.

Dôsledkom tejto vety je, že štvorcová matica A má nenulový determinant vtedy a len vtedy, ak jej hodnosť sa rovná počtu riadkov

$$(|A| \neq 0) \equiv (h(A) = n)$$

Príklad 9.12. Dokážte, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1 \quad 2 \quad 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0 \quad 1 \quad -1)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (-1 \quad 1 \quad 1)$ sú lineárne nezávislé.. Tieto vektory môžeme formálne chápať ako riadkové vektory matice A typu 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Na základe dôsledku prechádzajúcej vety vieme, že ak sa nám podarí dokázať, že determinant tejto matice je nenulový, potom $h(A)=3$, t.j. jej riadkové vektory sú lineárne nezávislé. Determinant matice spočítame Sarrusovým pravidlom

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 1 + 2 + 0 + 3 + 1 - 0 = 7$$

Príklad 9.13. Dôsledok vety 9.4 o tom, že tri riadkové (stĺpcové) vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ rovnakého typu (1,3) sú lineárne závislé vtedy a len vtedy ak z nich zostrojený determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

je nulový, $|A| = 0$, bude použitý na určenie roviny σ v 3-rozmernom priestore, ktorá je určená bodmi A, B a C, ktoré sú reprezentované riadkovými vektormi (pozri obr. 9.4)

$$\boldsymbol{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3), \ \boldsymbol{b} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \text{ a } \boldsymbol{c} = (c_1 \quad c_2 \quad c_3)$$

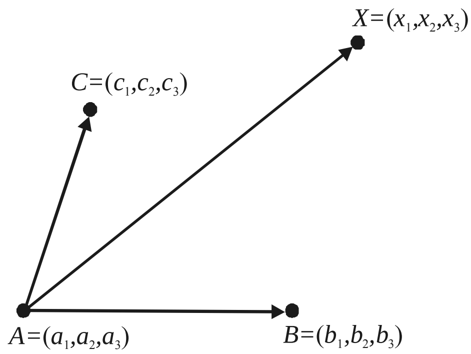
Všeobecný bod X, reprezentovaný vektorom $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$, leží v rovine σ, potom vektor $\overrightarrow{XA} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia vektorov $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ a $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, t.j. tieto tri vektory sú lineárne závislé

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

vypočítaním tohto determinantu pomocou Sarrusovho pravidla, dostaneme lineárnu rovnicu vzhľadom k premenným x_1, x_2 a x_3

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

kde a, b, c a d sú koeficienty rovnice popisujúcej rovinu σ.



Obrázok 9.4. Rovina σ je určená 3 bodmi *A*, *B* a *C*, ktoré neležia na priamke. Všeobecný bod *X* leží v rovine, to znamená, že trojica riadkových vektorov (***c***-***a***), (***b***-***a***) a (***x***-***a***) leží v rovine σ a preto musia byť lineárne závislé.

Veta 9.5. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová trojuholníková matica (nepožaduje sa, aby každý diagonálny element bol nenulový)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinant matice sa rovná súčinu jej diagonálnych elementov

$$|\boldsymbol{A}| = A_{11}A_{22}...A_{nn} \tag{9.18}$$

Dôkaz tejto vety vychádza z diskusie formuly (9.10), ktorá špecifikuje determinant pre ľubovolnú štvorcovú maticu. Každá neidentická permutácia $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ má aspoň jeden element p_i, pre ktorý platí $p_i<i$. Z vlastnosti trojuholníkovej matice vyplýva vlastnosť $A_{i,p_i}=0$. Potom v rozvoji (9.10) je aktívna len permutácia identity $P=(1,2,...,n)$, ktorá poskytuje práve súčin diagonálnych elementov z (9.18).

Ako jednoduchý dôsledok tejto vety je, že determinant jednotkovej matice $\boldsymbol{E}$ sa rovná jednej

$$|\boldsymbol{E}|=1 \tag{9.19}$$

Veta 9.5 umožňuje zostrojiť efektívny algoritmus pre výpočet determinantov ľubovolnej dimenzii n (pripomeňme, že sme odvodili v príkladoch 9.10 a 9.11 špeciálne formule pre výpočet determinantov, keď n = 2 a n = 3. Žiaľ, tieto formule nie sú zovšeobecniteľné pre n > 3, takže je dôležité mať k dispozícii algoritmus pre výpočet determinantu pre ľubovolné n. Použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý je veľmi podobný algoritmu stanovenia hodnosti matice a ktorý je založený na vlastnostiach determinantov (9.13-17). To znamená, že nad stĺpcami a riadkami budeme vykonávať jednoduché elementárne operácie tak, aby sme dostali trojuholníkovú maticu (t. j. nulujeme elementy pod diagonálou) . Na rozdiel od stanovenia hodnosti matice, pri tomto výpočte determinantu jeho hodnota sa môže meniť, tak napríklad po transpozícii dvoch stĺpcov (riadkov) dochádza k zmene znamienka determinantu, alebo ak riadok vynásobíme číslom α, tak potom pred determinat musíme vytknúť číslo $1/\alpha$. To znamená, že súčasťou algoritmu musí byť aj premenná v ktorej sa kumuluje táto zmena numerickej hodnoty determinatu v priebehu aplikácií elementárnych operácií.

Príklad 9.13. Vypočítajte determinant matice s $n = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup transformácie determinantu na trojuholníkový tvar je prezentovaný na tejto schéme:

$$|\boldsymbol{A}| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & -2 & 3 \\ \boxed{-1} & 3 & -2 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 8 \end{vmatrix}}_{A_3} = 6\cdot 8 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_4} =$$

$$6\cdot 8\cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_5} = 6\cdot 8\cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}}_{A_6} = 6\cdot 8\cdot 3\left(1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{3}\right) = 48$$

Transformáciu rozvrhneme na jednotlivé kroky:

1. krok, transformácia $A_1 \rightarrow A_2$ vynuluje vyznačené elementy pod diagonálou v 1. stĺpci.
2. krok, transformácia $A_2 \rightarrow A_3$ vynuluje vyznačené elementy pod diagonálou v 2.stĺpci.
3. krok, transformácia $A_3 \rightarrow A_4$ vykonáva prípravné úpravy 3. a 4. riadku tak, aby sa mohol vynulovať vyznačený element pod diagonálou v 3. stĺpci; z 3. (4.) riadku je vytknuté číslo 6 (8), tieto čísla sú uvedené aj pred determinantom.
4. krok, transformácia $A_4 \rightarrow A_5$ vynásobí tretí riadok číslom 1/3, pred determinant sa vytkne inverzná hodnota tohto čísla.
5. krok, transformácia $A_5 \rightarrow A_6$ vykoná po prípravných predchádzajúcich dvoch krokoch vynulovanie elementu pod diagonálou v 3.stĺpci, výsledok je, že sme dostali trojuholníkovú maticu.
6. krok, hodnota determinantu je vypočítaná ako súčin diagonálnych elementov matice krát kumulované čísla pred determinantom, ktoré vznikli ako dôsledok aplikácie elementárnych pravidiel.

Možno dokázať, že tento algoritmus patrí medzi najefektívnejšie prístupy k výpočtu determinantu. V prípade, že na diagonále sa nám vygenerovala nula, potom algoritmus môžeme ukončiť, výsledná hodnota determinantu je $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Bez dôkazu uvedieme dôležitú vetu o determinante súčinu dvoch matíc

Veta 9.6. Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (n,n)$, potom determinant súčinu týchto matíc sa rovná súčinu ich determinantov

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \tag{9.20}$$

Ako jednoduchý dôsledok tejto vety je formula pre determinant inverznej matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, ktorá vyhovuje podmienke $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$, použitím formuly (9.20) dostaneme

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \tag{9.21}$$

Ak tento výsledok spojíme s vetou 9.4, potom determinant inverznej matice $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ existuje vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná jej dimenzii n z typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, t. j. $h(\boldsymbol{A}) = n$.

Veta 9.7. Matica A je ***regulárna*** vtedy a len vtedy, ak jej determinant je nenulový

$$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \tag{9.22}$$

Jedna zo základných aplikácií determinantov je ich použitie k riešeniu systému lineárnych rovníc

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{$\clubsuit$}$$

ktorý má štvorcovú a regulárnu maticu koeficientov $\boldsymbol{A}$ (t. j. $|\boldsymbol{A}| \neq 0$). A maticu $\boldsymbol{A}$ vyjadríme pomocou stĺpcových vektorov, potom systém (♣) môžeme prepísať do tvaru

$$(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{s}_k \tag{$\spadesuit$}$$

Označme symbolom $\boldsymbol{A}_i$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že jej i-tý stĺpec nahradíme stĺpcovým vektorom konštantných členov $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}_i = (\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$$

Budeme počítať determinant tejto matice

$$|\boldsymbol{A}_i| = |\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{s}_n| = \left| \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_i \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{s}_n \right| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_i \underbrace{|\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{s}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{s}_n|}_{=0 \; pre \; k \neq i} = x_i |\boldsymbol{A}|$$

kde sme použili vlastnosť (9.17) a (9.14b). Za predpokladu, že $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, z poslednej rovnice vyplýva riešenie systému lineárnych rovníc v explicitnom tvare, tento poznatok sformulujeme ako vetu.

Veta 9.8 (Cramerove[3] pravidlo). Systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, má riešenie

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \text{(pre } i = 1, 2, \ldots, \text{n)} \tag{9.23}$$

[3] V r. 1750 toto pravidlo bolo formulované švajčiarskym fyzikom Gabrielom Cramerom.

Príklad 9.14. Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Zostrojíme jednotlivé determinanty z (9.23)

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Definujete maticu koeficientov $\boldsymbol{A}$, stĺpcový vektor neznámych $\boldsymbol{x}$ a stĺpcový vektor konštantných členov $\boldsymbol{b}$ pre systémy

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$,

(b) $\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$

(d) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

Cvičenie 9.2. Riešte pomocou inverznej matice systém rovníc

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 6z &= 4 \\ -x \ \ + y + 2z &= 3 \\ -3x + 5y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

Cvičenie 9.3. Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

(a) $\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & -2z & = & -2 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rrrcr} 2x & +2y & +z & = & 4 \\ x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & & = & 6 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\ x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3 \end{array}$

(d) $\begin{array}{rrcr} 2x & -3y & = & -4 \\ x & +2y & = & 5 \\ -4x & +6y & = & 8 \end{array}$

(e) $\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +x & = & -4 \\ x & +y & +2z & = & 2 \end{array}$

(f) $\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$

Cvičenie 9.4. Vypočítajte determinanty matíc:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} sin\,\alpha & -cos\,\alpha \\ cos\,\alpha & sin\,\alpha \end{pmatrix}$

(e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$