1. kontrolná písomka z mat. logiky, konaná dňa 19. 3. 2014

1. príklad: Odpovedzte na tieto otázky :

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models \varphi$?

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

3. príklad: Pre formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)$ zostrojte:

(a) syntaktický strom a množinu jej podformúl,

(b) sémantické tablo a duálne sémantické tablo.

4. príklad.

(a) Dokážte, že z predpokladov $\{(p \Rightarrow q),(p \Rightarrow r)\}$ sémanticky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow q \wedge r$, t. j. reláciu sémantického vyplývania $\{(p \Rightarrow q),(p \Rightarrow r)\} \models (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

(b) Pomocou rezolventy dokážte nekonzistentnosť množiny $T = \{\neg p, p \vee \neg q, r \vee q, \neg r\}$

Príklad 5. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

(b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$.

Poznámka: každý príklad sa hodnotí 4 bodmi, čas na písomku je 45 min.,

Riešenie

1. príklad: Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?

Riešenie:

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny $\{p,\ q,\ r,\ldots\}$ a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula ::= premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) Formula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in \boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T} \vDash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie $\boldsymbol{T}$ je aj modelom formuly φ (t. j. formula φ je v ňom pravdivá).

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Jana
q = na výlet pôjde Eva
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$$\varphi = \left(\left(p \wedge q\right) \Rightarrow \neg r\right) \equiv \left(\neg\left(p \wedge q\right) \vee \neg r\right)$$

$$\boxed{\neg\varphi = \left(p \wedge q\right) \wedge r}$$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: $\boxed{\text{Na výlet pôjde Jana, Eva a Tomáš.}}$

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Eva
q = na výlet pôjde Helena
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \Rightarrow \neg(q \wedge r)) \equiv (\neg p \vee \neg(q \wedge r))$

$\boxed{\neg\varphi = (p \wedge (q \wedge r))}$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: $\boxed{\text{Na výlet pôjde Eva, Helena a Tomáš.}}$

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

Riešenie:

p = Jano odpočíval

q = Jano pracoval

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \vee q)$

$\neg\varphi = (\neg p \wedge \neg q)$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: $\boxed{\text{Jano neodpočíval a nepracoval.}}$

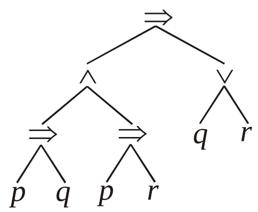
3. príklad: Pre formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)$ zostrojte:

(a) syntaktický strom a množinu jej podformúl,

(b) sémantické tablo a duálne sémantické tablo.

Riešenie:

(a) Syntaktický strom má tvar

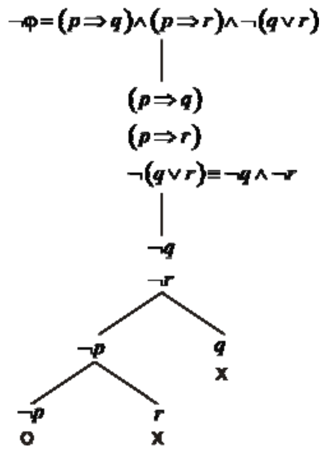


Množina podformúl má tvar

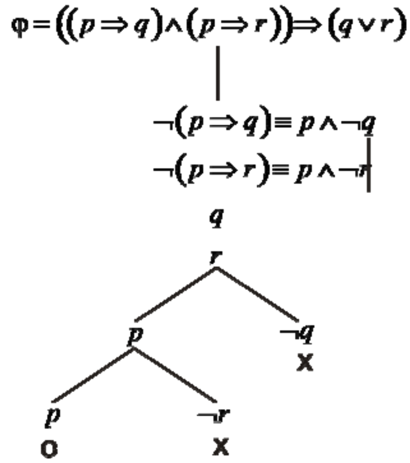
$\{p, q, r, p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, q \vee r, (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r), ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)\}$

(b) zostrojte sémantické tablo formuly a duálne sémantické tablo formuly.

sémantické tablo



duálne sémantické tablo



Príklad 4.

(a) Dokážte, že z predpokladov $T=\{(p\Rightarrow q),(p\Rightarrow r)\}$ sémanticky vyplýva formula $\varphi=p\Rightarrow(q\wedge r)$, t. j. reláciu sémantického vyplývania $\{(p\Rightarrow q),(p\Rightarrow r)\}\vDash(p\Rightarrow(q\wedge r))$.

p	*q*	*r*	*p*⇒*q*	*p*⇒*r*	*p*⇒(*q*∧*r*)
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

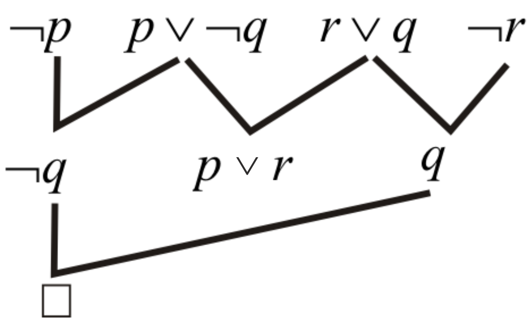
Model teórie má tvar $[\![T]\!]=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$, pre tieto pravdivostné hodnoty je pravdivá aj funkcia

$$\varphi=\overline{pq}\,\overline{r}+\overline{pq}\,r+\overline{p}q\overline{r}+\overline{p}q\,r+pq\,r=\overline{pq}\left(\overline{r}+r\right)+\overline{pr}\left(\overline{q}+q\right)+\overline{p}q\left(\overline{r}+r\right)+\overline{p}\,r\left(\overline{q}+q\right)+qr\left(\overline{p}+p\right)=$$

$$=\overline{pq}+\overline{pr}+\overline{p}\,r+\overline{p}q+qr=\overline{p}+\overline{p}q+qr=p\Rightarrow(q\wedge r)$$

$\varphi=p\Rightarrow(q\wedge r)$, t. j. platí $T\vDash\varphi$, QED.

(b) Pomocou rezolventy dokážte nekonzistentnosť množiny $T=\{\neg p,p\vee\neg q,r\vee q,\neg r\}$



Teória *T* nie je konzistentná, metóda rezolventy produkuje symbol □.

Príklad 5. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow q\wedge r)$

1	$(p\Rightarrow q)$	1.predpoklad
2	$(p\Rightarrow r)$	2.predpoklad
3	p	akt.pomoc.predpokladu
4	q	*aplik. m.p. na* 1 *a* 3
5	r	*aplik. m.p. na* 2 *a* 3
6	$q\wedge r$	*aplik.* $I\wedge$ *na* 4 *a* 5
7	$p\Rightarrow q\wedge r$	*deakt. pomoc. predpokladu* 3

(b) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow\neg p$.

1	$p \Rightarrow q$	1.*predpoklad*
2	$p \Rightarrow \neg q$	2.*predpoklad*
3	$q \Rightarrow \neg p$	*aplik.inverzie implikacie na* 2
4	$p \Rightarrow \neg p$	*aplik.hypot.sylogizmu na* 1 *a* 3
5	$\neg p \vee \neg p$	*aplik.disj.tvaru implik.*
6	$\neg p$	*aplik.idempot.implik.*

Druhé alternatívne odvodenie:

1	p	*akt.pomoc.predpokl.*
2	$p \Rightarrow q$	1.*predpokl.*
3	$p \Rightarrow \neg q$	2.*predpokl.*
4	q	*aplik. m.p. na* 1. *a* 2.
5	$\neg p$	*aplik. m.t. na* 3. *a* 4.
6	$p \Rightarrow \neg p$	*deakt.pomoc.predokl.*
7	$\neg p$	*ekv.prepis* 6