Algebra a diskrétna matematika

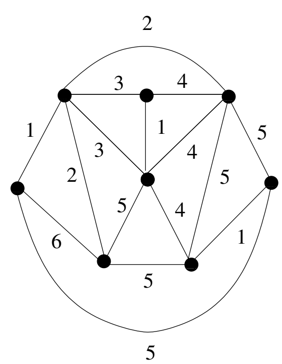
Úlohy na precvičenie

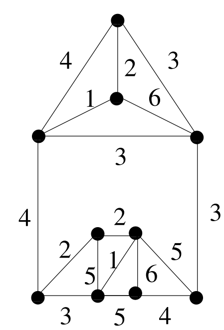
6. týždeň

**Úloha 1.** Zostrojte kostru Petersenovho grafu pomocou
(a) prehľadávania do hĺbky
(b) prehľadávania do šírky.
Riešte analogickú úlohu pre $K_n$ pre ľubovolné $n \geq 3$.

**Úloha 2.** Ukážte, že ak $G$ je súvislý graf, tak kostra vybudovaná z vrchola $v$ prehľadávaním do šírky nám určuje vzdialenosť vrchola $v$ v grafe $G$ a ľubovoľného iného vrchola v $G$ (ako?).

**Úloha 3.** Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite najlacnejšiu kostru v daných grafoch.



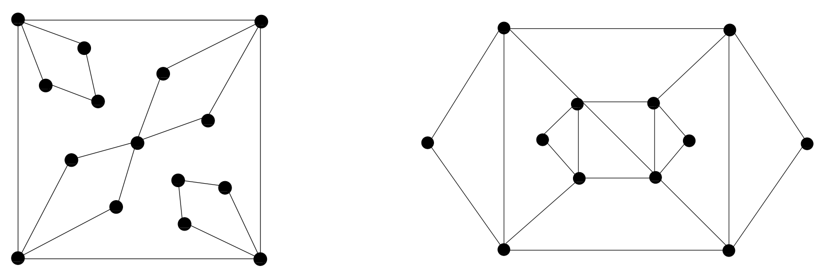


**Úloha 4.** Ukážte, že ak v strome existuje perfektné párovanie, tak je jediné.

**Úloha 5.** Zostrojte graf na $\leq 3t$ vrcholoch, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorého najväčšie párovanie obsahuje nanajvýš $2t$ vrcholov.

**Úloha 6.** Zistite, či Petersenov graf má
(a) hamiltonovskú kružnicu,
(b) hamiltonovskú cestu.

**Úloha 7.** Nakreslite dané grafy jedným ťahom.



**Úloha 8.** Nech $G$ je graf s vrcholom $v$ stupňa 3 a nech okolie bodu $v$ tvoria vrcholy $x, y, z$. Nech $H$ je graf, ktorý z $G$ vznikne vynechaním vrchola $v$ a hrán incidentných s ním a pridaním 3 nových vrcholov $a, b, c$ a 6 nových hrán $ax$, $by$, $cz$, $ab$, $bc$, $ca$. Ukážte, že $G$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď ju má $H$. Ukážte, že analogické tvrdenie platí pre hamiltonovské cesty.

**Úloha 9.** Pomocou Petersenovho grafu zostrojte pre každé párne $n \geq 10$ súvislý graf na $n$ vrcholoch bez hamiltonovskej kružnice, v ktorom má každý vrchol stupeň 3.

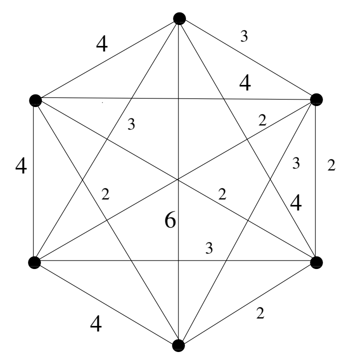
**Úloha 10.** Nech $G$ je graf s hamiltonovskou cestou. Ukážte na príklade, že kostra v $G$ zostrojená pomocou prehľadávania do hĺbky nemusí nutne byť hamiltonovskou cestou.

**Úloha 11.** Ukážte, že každý súvislý graf na aspoň 2 vrcholoch obsahuje aspoň 2 vrcholy $v$ také, že graf $G - v$ je súvislý.

**Úloha 12.** Ukážte, že v pravidelnom grafe $G$ stupňa $d$ platí: $G$ má chromatický index $d$ vtedy a len vtedy, keď jeho hranovú množinu možno rozlozit' na $d$ perfektných párovaní.

**Úloha 13.** Graf $G$ nazveme maximálny nehamiltonovský, ak nemá hamiltonovskú kružnicu, ale zároveň ak pre každé 2 nesusedné vrcholy $u, v$ platí, že $G + uv$ (pridáme 'novú' hranu $uv$) má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že Petersenov graf je maximálny nehamiltonovský.

**Úloha 14.** V danom grafe nájdite najlacnejšiu hamiltonovskú kružnicu.




**Úloha 15.*** Dokážte Oreho vetu: Ak v $n$-vrcholovom grafe $G$ pre každé 2 nesusedné vrcholy $u, v$ platí, že $deg(u)+deg(v) \geq n$, tak $G$ má hamiltonovskú cestu.