Náhradná 2. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 14. 12. 2009)

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, (1 bod)

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, (1 bod)

(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 15$, $A_1 \subseteq A_2$, (1 bod)

3. príklad. Nech $(N,*)$ je algebraická štruktúra, kde N je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(N,*)$ je pologrupa. (2 body)

(b) Rozhodnite, či $(N,*)$ je monoid, odôvodnite. (1 bod)

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z \qquad \text{(3 body)}$$

5. príklad. Stanovte hodnosť matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(3 body)}$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(2body)}$$

Riešenie príkladov

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}=1+21+35+7=64$$

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1|=12$, $|A_2|=18$, $A_1 \cap A_2=\emptyset$, $|A_1 \cup A_2|=|A_1|+|A_2|=30$

(b) $|A_1|=2$, $|A_2|=10$, $|A_1 \cap A_2|=1$, $|A_1 \cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2|=11$

(c) $|A_1|=8$, $|A_2|=15$, $A_1 \subseteq A_2$, $|A_1 \cup A_2|=|A_2|=15$

3. príklad. Nech $(\mathbb{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x*y=min\{x,y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $'*'$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x<y<z$

$$(x*y)*z=y*z=z$$
$$x*(y*z)=x*z=z$$

(a2) $x<z<y$

$$(x*y)*z=y*z=y$$
$$x*(y*z)=x*y=y$$

(a3) $y<x<z$

$$(x*y)*z=x*z=z$$
$$x*(y*z)=x*z=z$$

....

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z=x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa .

(b) Rozhodnite, či $\left(\mathbb{N},*\right)$ je monoid. (1 bod)

K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $\left(\mathbb{N},*\right)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element $e=\infty$, ktorý patrí do množiny $\mathbb{N}$

$$x*e=min\left\{x,\infty\right\}=x$$

$$e*x=min\left\{\infty,x\right\}=x$$

Avšak $\infty\notin\mathbb{N}$, t. j. štruktúra $\left(\mathbb{N},*\right)$ nie je monoid.

Poznámka: príklad uznať, aj keď tam táto negatívna poznámka nie je uvedená.

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}yz+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$$

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

$U_f^{(0)}$ (1110) (1101) (1011) (0101) (0010) (0001

$U_f^{(1)}$ (#101) (0#01)

$$\tilde{V}=\left\{(\#101),(0\#01),(1110),(1011),(0010)\right\}$$

$$\tilde{f}\left(w,x,y,z\right)=x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{y}z+wxy\overline{z}+w\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

5. príklad. Stanovte hodnosť matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\\boxed{1}&0&1&0&1\\\boxed{1}&1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow h\left(A\right)=2$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$