3. kapitola

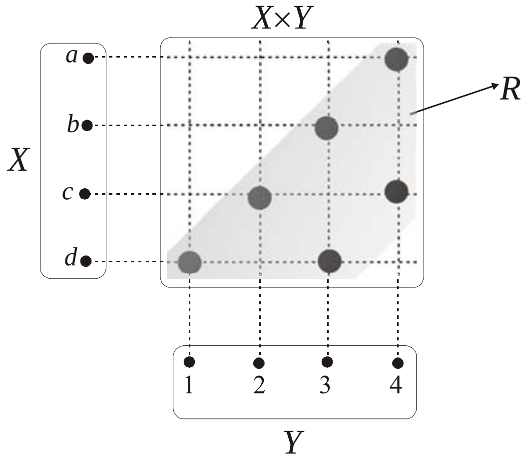
Teória množín II – relácie, operácie nad reláciami, rovnosť, usporiadanosť. Funkcie, zložená funkcia, funkcia.

3.1 Relácie

Definícia 3.1. Nech X a Y sú dve množiny, relácia R je definovaná podmnožina karteziánskeho súčinu týchto množín

$$R \subseteq X \times Y \tag{3.1}$$

Na obr. 3.1 je znázornená relácia $R \subseteq X \times Y$, kde $X = \{a,b,c,d\}$ a $Y = \{1,2,3,4\}$, táto relácie obsahuje 5 usporiadaných dvojíc z karteziánskeho súčiny $X \times Y$, ktorý obsahuje 4×4 = 16 elementov.



Obrázok 3.1. Znázornenie relácie R ako podmnožiny karteziánskeho súčinu (vytieňovaná oblasť) dvoch množín X a Y, $R = \{(d,1),(c,2),(b,3),(d,3),(a,4),(c,4)\}$.

Relácia R môže byť alternatívne zadaná pomocou charakteristickej funkcie

$$R = \{(x,y); \mu_R(x,y) = 1\} \tag{3.2}$$

V tomto prípade taktiež hovoríme o ***binárnej relácii***, každý element $(x,y) \in R$ je ohodnotený binárnym číslom $\mu_R(x,y) \in \{0,1\}$, ak platí $\mu_R(x,y) = 1(0)$, potom usporiadaná dvojica (element) (x,y) patrí (nepatrí) do relácie R.

Definícia 3.2. *Inverzná relácia* R^{-1} (k relácii $R \subseteq X \times Y$) je určená pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x) \in X \times Y$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y) \in R$

$$R^{-1} = \{(y,x); (x,y) \in R\} \tag{3.3}$$

Pre relácie, ktoré sú definované nad rovnakou dvojicou množín X a Y, môžeme definovať obvyklé množinové operácie prieniku, zjednotenia a negácie. Majme dve relácie $P,Q \subseteq X \times Y$, ktorých špecifikácia pomocou charakteristických funkcií má tvar

$$P = \{(x,y);\, \mu_P(x,y) = 1\}$$

$$Q = \{(x,y);\, \mu_Q(x,y) = 1\}$$

Definícia 3.3. Relácia $R = P \cup Q$ sa nazýva zjednotenie relácií P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

$$P \cup Q = \{(x,y);\, \mu_{P\cup Q}(x,y) = 1\} \tag{3.4a}$$

$$\mu_{P\cup Q}(x,y) = max\{\mu_P(x,y), \mu_Q(x,y)\} \tag{3.4b}$$

Relácia $R = P \cap Q$ sa nazýva prienik relácií P a Q vtedy a len vtedy, ak platí

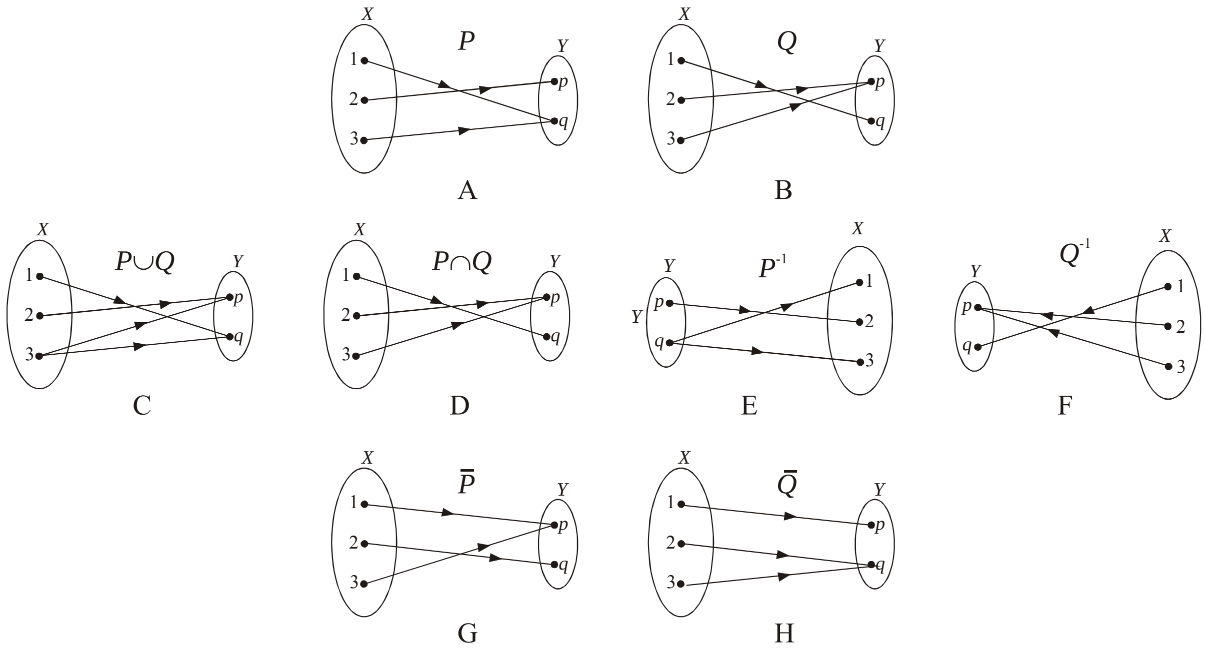
$$P \cap Q = \{(x,y);\, \mu_{P\cap Q}(x,y) = 1\} \tag{3.5a}$$

$$\mu_{P\cap Q}(x,y) = min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(x,y)\} \tag{3.5b}$$

Relácia $R = \overline{P}$ sa nazýva doplnok relácie P vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{P} = \{(x,y);\, \mu_{\overline{P}}(x,y) = 1\} \tag{3.6a}$$

$$\mu_{\overline{P}}(x,y) = 1 - \mu_P(x,y) \tag{3.6b}$$



Obrázok 3.2. Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q definované nad rovnakými množinami X a Y. Diagramy C a D znázorňujú zjednotenie resp. prienik týchto dvoch relácií. Diagramy E a F znázorňujú inveryné relácie P^{-1} resp. Q^{-1}. Diagramy G a H znázorňujú doplnky k reláciam P resp. Q.

Príklad 3.1. Nech $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{p,q\}$, relácie P a Q majú tvar

$$P = \{(1,q),(2,p),(3,q)\}$$

$$Q = \{(1,q),(2,p),(3,p)\}$$

Zjednotenie a prienik týchto relácií sú

$$P \cup Q = \{(1,q),(2,p),(3,p),(3,q)\}$$
$$P \cap Q = \{(1,q),(2,p)\}$$
Inverzné relácie sú špecifikované
$$P^{-1} = \{(q,1),(p,2),(q,3)\}$$
$$Q^{-1} = \{(q,1),(p,2),(p,3)\}$$
Doplnky k reláciám sú
$$\bar{P} = \{(1,p),(2,q),(3,p)\}$$
$$\bar{Q} = \{(1,p),(2,q),(3,q)\}$$
Tieto relácie sú znázornené na obr. 3.2.

Alternatívny spôsob špecifikácie relácie je pomocou binárnej matice (obsahujúcej len binárne 0 a 1 elementy). Nech $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sú dve množiny s mohutnosťami $|X| = m$ resp. $|Y| = n$. Relácia *R* špecifikovaná nad týmito množinami má tvar
$$R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j) = 1\}$$

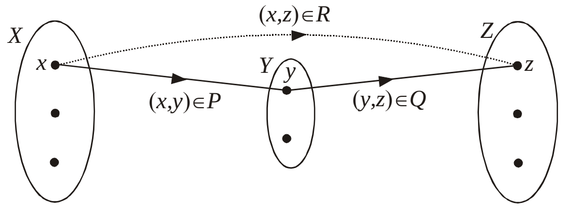
Definícia 3.4. Matica *A* reprezentuje reláciu *R* má *m* riadkov a *n* stĺpcov, jej maticové elementy sú špecifikované formulou
$$A_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & (dvojica\,(x_i, y_j) \in R) \\ 0 & (dvojica\,(x_i, y_j) \notin R) \end{cases} \tag{3.7}$$

Príklad 3.2. Maticová reprezentácia relácií *P* a *Q* z príkladu 3.1 má tvar
$$\boldsymbol{A}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompozícia relácií

Definícia 3.5. Kompozícia dvoch relácií $P = \{(x,y); \mu_P(x,y) = 1\} \subseteq X \times Y$ a $Q = \{(y,z); \mu_P(y,z) = 1\} \subseteq Y \times Z$, označená $R = P \circ Q = \{(x,z); \mu_R(x,z) = 1\}$, je definovaná pomocou charakteristickej funkcie
$$\mu_R(x,z) = \max_y \min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\} \tag{3.8}$$

Táto definícia kompozície dvoch relácií *P* a *Q* môže byť alternatívne vyjadrená takto
$$R = P \circ Q = \{(x,z); x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y \in Y : (x,y) \in P \wedge (y,z) \in Q\} \tag{3.9}$$
To znamená, že v kompozícii *R* dva elementy $x \in X$ a $z \in Z$ tvoria usporiadanú dvojicu $(x,z) \in R$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký „medzielement“ $y \in Y$, pre ktorá platí, že $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$, pozri obr. 3.3.



Obrázok 3.3. Znázornenie kompozície dvoch relácií P a Q, výsledná relácia R obsahuje dvojicu (x,z) vtedy a len vtedy, ak existuje taký element $y \in Y$, že platí $(x,y) \in P$ a $(y,z) \in Q$.

Veta 3.1. Nech P, Q a R sú relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$\left(P \circ Q\right)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1} \tag{3.10a}$$

$$\left(P \circ Q\right) \circ R = P \circ \left(Q \circ R\right) \tag{3.10b}$$

$$P \circ \left(Q \cup R\right) = \left(P \circ Q\right) \cup \left(P \circ R\right) \tag{3.10c}$$

$$\left(Q \cup R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cup \left(R \circ P\right) \tag{3.10d}$$

$$P \circ \left(Q \cap R\right) = \left(P \circ Q\right) \cap \left(P \circ R\right) \tag{3.10e}$$

$$\left(Q \cap R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cap \left(R \circ P\right) \tag{3.10f}$$

Dôkaz prvej vlastnosti (3.10a) priamo vyplýva z definícií kompozície a inverznej relácie. Nech $P \subseteq X \times Y$ a $Q \supseteq Y \times Z$, potom $\left(P \circ Q\right)^{-1} \subseteq Z \times X$ a pre každá $\left(z,x\right) \in Z \times X$ platí

$$\begin{aligned}\mu_{\left(P \circ Q\right)^{-1}}\left(z,x\right) &= \mu_{P \circ Q}\left(x,z\right) = \max_{y \in Y} \min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_Q\left(y,z\right)\right\}\\ &= \max_{y \in Y} \min\left\{\mu_{P^{-1}}\left(y,x\right),\mu_{Q^{-1}}\left(z,y\right)\right\} = \mu_{Q^{-1} \circ P^{-1}}\left(z,x\right)\end{aligned}$$

Dôkaz asociatívnosti (3.10b) vyplýva priamo z asociatívnosti operácie *max min*. Vzťah distributívnosti (3.10c) dokážeme takto

$$\begin{aligned}\mu_{P \circ (Q \cup R)}\left(x,z\right) &= \max_{y \in B} \min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_{Q \cup R}\left(y,z\right)\right\}\\ &= \max_{y \in B} \min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\max\left\{\mu_Q\left(y,z\right),\mu_R\left(y,z\right)\right\}\right\}\\ &= \max_{y \in B} \max\left\{\min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_Q\left(y,z\right)\right\},\min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_R\left(y,z\right)\right\}\right\}\\ &= \max \max_{y \in B}\left\{\min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_Q\left(y,z\right)\right\},\min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_R\left(y,z\right)\right\}\right\}\\ &= \max\left\{\underbrace{\max_{y \in B} \min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_Q\left(y,z\right)\right\}}_{\mu_{P \circ Q}(x,z)},\underbrace{\max_{y \in B} \min\left\{\mu_P\left(x,y\right),\mu_R\left(y,z\right)\right\}}_{\mu_{P \circ R}(x,z)}\right\}\\ &= \max\left\{\mu_{P \circ Q}\left(x,z\right),\mu_{P \circ R}\left(x,z\right)\right\} = \mu_{(P \circ Q) \cup (P \circ R)}\left(x,z\right)\end{aligned}$$

Pri dôkaze tejto distributívnej formuly sme použili identitu

$$\min\left\{a,\max\left\{b,c\right\}\right\} = \max\left\{\min\left\{a,b\right\},\min\left\{a,c\right\}\right\}$$

ktorá sa jednoducho dokáže metódou vymenovania možností (pozri 1. kapitolu) tak, že ju overíme pre všetkých šesť možností vzájomnej usporiadanosti čísel a, b a c.

Príklad 3.3. Uvažujme množiny $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ a $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$, definujme nad týmito množinami relácie $P\subseteq X\times Y$ a $Q\subseteq Y\times Z$, ktoré sú špecifikované binárnymi maticami

$$A_P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_Q=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Potom relácie P a Q majú tvar

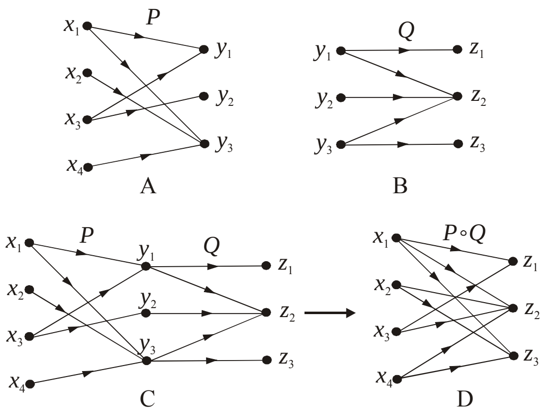
$$P=\{(x_1,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_3),\}$$

$$Q=\{(y_1,z_1),(y_1,z_2),(y_2,z_2),(y_3,z_2),(y_3,z_3)\}$$

Kompozícia týchto dvoch relácií má tvar

$$P\circ Q=\{(x_1,z_1),(x_1,z_2),(x_1,z_3),(x_2,z_2),(x_1,z_2),(x_3,z_1),(x_3,z_2),(x_4,z_2),(x_4,z_3)\}$$

Grafická interpretácia týchto relácií je znázornená na obr. 3.4.



Obrázok 3.4. Diagramy A a B znázorňujú relácie P a Q z príkladu 3.3, ich kompozícia $P\circ Q$ je vytvorená pomocou diagramu C, ktorý znázorňuje spojenie relácií P a Q prostredníctvom vrcholov y_i, Ak z vrcholu x_i existuje orientovaná cesta do vrcholu z_j, potom graf reprezentujúci kompozíciu $P\circ Q$ obsahuje hranu z x_i do z_j.

Vlastnosti relácií

V tomto odseku budeme študovať relácie $P\subseteq X\times X$, ktoré sú definované ako podmnožina karteziánskeho súčinu $X\times X$, takéto relácie budeme nazývať ***diagonálne***.

Definícia 3.6. Diagonálna relácia má tieto vlastnosti:

(1) ***reflexívna***, $\forall(x\in X)((x,x)\in R)$,

(2) ***symetrická***, $\forall(x,y\in X)((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$,

(3) ***antisymetrická***, $\forall(x,y\in X)((x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\Rightarrow x=y)$,

(4) ***tranzitívna***, $\forall(x,y,z\in X)((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$.

Príklad 3.4. Nech $X=\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel a diagonálna relácia $P\subseteq X\times X$ má interpretáciu

$$((x,y)\in P)\equiv(x\le y)$$

Takto definovaná relácia *P* vyhovuje týmto podmienkam:
(a) relácia *P* je reflexívna, pre každé reálne číslo $x\in X$ platí $x\le x$, t. j. $(x,x)\in P$,
(b) relácie *P* nie je symetrická, pretože pre $x\le y$ neimplikuje $y\le x$,
(c) relácia *P* je antisymetrická, z platnosti $x\le y$ a $y\le x$ plynie $x=y$, a naopak,
(d) relácia *P* je tranzitívna, z platnosti $x\le y$ a $y\le z$ plynie $x\le z$.

Príklad 3.5. Nech $X=\{a,b,c,d\}$, diagonálne relácia $P\subseteq X\times X$ je špecifikovaná množinou

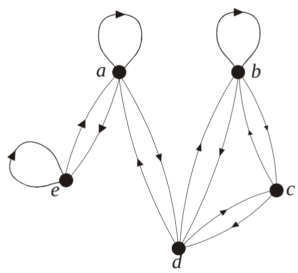
$$P=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(d,d)\}$$

Táto relácia nespĺňa žiadnu vlastnosť z definície 3.6:
(a) relácia *P* nie je reflexívna, $(b,b)\notin P$,
(b) relácia *P* nie je symetrická, implikácia $(a,c)\in P\Rightarrow(c,a)\in P$ nie je pravdivá,
(c) relácia *P* nie je antisymetrická, implikácia $(a,b),(b,a)\in P\Rightarrow(a,a)\in P$ nie je pravdivá,
(d) relácia *P* nie je tranzitívna, implikácia $(a,b),(b,d)\in P\Rightarrow(a,d)\in P$ nie je pravdivá.

Diagonálna relácia $P\subseteq X\times X$ má diagramatickú interpretáciu pomocou orientovaného grafu, V tomto prípade elementy množiny X sú vrcholy a usporiadané dvojice $(x,y)\in P$ sú orientované hrany, ktoré začínajú v *x* a končia v *y*. Vlastnosti z definície 3.6 majú v rámci tohto pohľadu na reláciu jednoduchú interpretáciu:

(a) Relácia *P* je reflexívna, potom každý vrchol $x\in X$ má slučku – orientovanú hranu, ktorá začína a končí v tom istom vrchole.
(b) Relácia *P* je symetrická, ak vrcholy $x,y\in X$ sú spojené hranou $(x,y)\in P$, potom existuje aj opačná hrana $(y,x)\in P$. V tomto prípade symetrickej relácie, jej grafická interpretácia obsahuje hrany medzi vrcholmi *x* a *y* vždy po dvojiciach, t. j. existencia hrany (*x*,*y*) implikuje existenciu hrany (*y*,*x*), a naopak.
(c) Relácia *P* je antisymetrická, medzi dvoma rôznymi vrcholmi $x\ne y$ nemôže existovať dvojica hrán (*x*,*y*) a (*y*,*x*). V prípade, že by existovala, potom z podmienky antisymtričnosti vyplýva, že $x=y$, čo je v spore s pôvodným predpokladom.
(d) Relácia *P* je tranzitívna, z existencie hrán (x,y) a (y,z), ktoré majú spoločnú hranu *y* a $x\ne z$, vyplýva existencia hrany (x,z)

Príklad 3.6. Nech $X=\{a,b,c,d,e\}$, diagonálna relácia definovaná nad touto množinou je určená grafom na obr. 3.5.



Obrázok 3.5. Grafická interpretácia diagonálnej relácie P nad množinou $X=\{a,b,c,d,e\}$

Z obrázku 3.5 vidíme, že
(1) relácia *P* nie je reflexívna, potrebné slučky neexistujú na vrcholoch *c* a *d*,
(2) relácia *P* je symetrická, ak medzi vrcholmi *x* a *y* existuje hrana (*x*,*y*), potom existuje aj opačná hrana (*y*,*x*),
(3) relácia *P* nie je antisymetrická, z existencie dvojíc opačne orientovaných hrán na rôznych vrcholoch, nevyplýva rovnosť týchto dvoch vrcholov.
(4) relácia *P* nie je tranzitívna, pretože existencia hrán (*e*,*a*) a (*a*,*d*) neimplikuje existenciu hrany (*e*,*d*).

Relácia ekvivalentnosti
Nech $P \subseteq X \times X$ je diagonálna relácia.

Definícia 3.7. Diagonálna relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***relácia ekvivalentnosti*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reláciu ekvivalentnosti *P* budeme označovať symbolom ′~′, t. j.

$$\forall (x, y \in X)\big(\big((x,y) \in P\big) \equiv (x \sim y)\big)$$

Pomocou relácie ekvivalentnosti môžeme množinu *X* rozdeliť na dve disjunktívne podmnožiny $X_1, X_2 \subset X$, kde $X = X_1 \cup X_2$ a $X_1 \cap X_2 = \varnothing$,

$$x, y \in X_1 \Rightarrow x \sim y \tag{3.11a}$$

$$x, y \in X_2 \Rightarrow x \sim y \tag{3.11b}$$

$$(x \in X_1) \wedge (y \in X_2) \Rightarrow (x \nsim y) \tag{3.11c}$$

Príklad 3.7. Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, diagonálne relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná takto:

$$\big((x,y) \in P\big) \equiv \big(x^2 = y^2\big)$$

(1) Relácia *P* je reflexívna, pretože $x^2 = x^2$, pre každé $x \in \mathbb{R}$,
(2) relácia *P* symetrická, pretože $x^2 = y^2$ implikuje $y^2 = x^2$,
(3) relácia *P* je tranzitívna, pretože $x^2 = y^2$ a $y^2 = z^2$ implikuje $x^2 = z^2$.
Z tohto vyplýva, že *P* je relácia ekvivalentnosti.

Definícia 3.8. Nech *P* je relácia ekvivalentnosti nad množinou *X* a nech $x \in X$. Trieda ekvivalentnosti $[x]$, priradená elementu *x*, je množina všetkých možných elementov *X* , ktoré sú ekvivalentné danému elementu *x*

$$[x] = \{y; (x,y) \in P\} \tag{3.12}$$

Veta 3.2. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti a nech $x, y \in X$. Potom podmienka $[x] = [y]$ je splnená vtedy a len vtedy, ak $(x,y) \in P$.

(1) Predpokladajme, že *P* je relácia ekvivalentnosti, dokážeme implikáciu

$$(x,y) \in P \Rightarrow ([x] = [y])$$

Nech $z \in [x]$, potom na základe definície (3.12) $(x,z) \in P$. Pretože P je symetrická relácia, z predpokladu $(x,y) \in P$ vyplýva, že taktiež $(y,x) \in P$. Relácia P je aj tranzitívna, z predpokladov $(x,z) \in P$ a $(y,x) \in P$ vyplýva, že $(y,z) \in P$, číže aj $z \in [y]$. Týmto sme dokázali, že $[x] \subseteq [y]$. Analogicky dokážeme aj $[y] \subseteq [x]$, tým sme dokázali, že $[x] = [y]$.
(2) Budeme dokazovať implikáciu

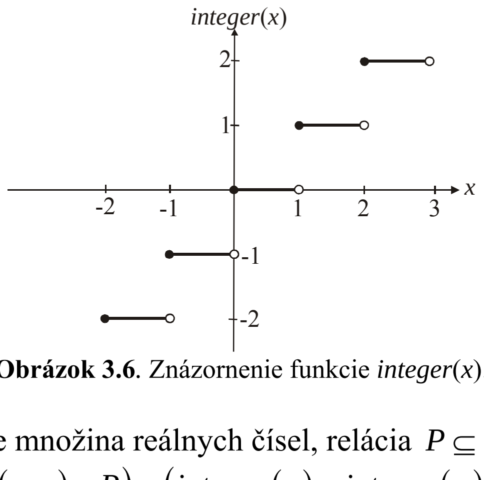
$$([x] = [y]) \Rightarrow (x,y) \in P$$

Potom , táto implikácia je priamy dôsledok definície (3.12).

Veta 3.3. Nech $P \subseteq X \times X$ je relácia ekvivalentnosti, potom množina X má disjunktný rozklad pomocou všetkých rôznych tried ekvivalentnosti

$$X = [x] \cup [y] \cup \ldots \cup [z] \tag{3.13}$$

Dôkaz tejto vety rozdelíme na dva kroky: v prvom kroku dokážeme, že každý element $x \in X$ patrí do nejakej triedy ekvivalentnosti. P je reflexívna relácia, preto pre každé $x \in X$ dvojica $(x,x) \in P$, čiže $\forall x (x \in [x])$.V druhom kroku dokážeme, že množina pre dva neekvivalentné elementy x a y, $(x,y) \notin P$, príslušné triedy ekvivalentnosti sú disjunktné, $[x] \cap [y] = \emptyset$. Nech $z \in [x] \cap [y]$, potom $z \in [x]$ a $z \in [y]$, potom $(z,x) \in P$ a $(z,y) \in P$. Použitím tranzitivity a symetričnosti P dostaneme $(x,y) \in P$, z čoho plynie $[x] = [y]$. To znamená, že z predpokladu neprázdnosti prieniku tried ekvivalentnosti $[x] \cap [y]$ dostaneme, že triedy sú totožné, čo je v spore s predpokladom, že elementy x a y sú neekvivalentné. Týmto sme nepriamo dokázali, že $[x] \cap [y] = \emptyset$. Spojením vlastností z prvého a druhého kroku dokážeme vetu, t. j. pre každý element $x \in X$ existuje trieda ekvivalentnosti, do ktorej tento element patrí, pričom triedy ekvivalentnosti sú navzájom disjunktné.



Obrázok 3.6. Znázornenie funkcie *integer*(*x*).

Príklad 3.8. Nech $X = \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, relácia $P \subseteq X \times X$ je definovaná

$$((x,y) \in P) \equiv (integer(x) = integer(y))$$

kde funkcia *integer*(*x*) je definovaná ako maximálne celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné reálnemu číslu *x* (pozri obr. 3.6). Táto funkcia je napr. implementovaná v programovacom jazyku Pascal. Ľahko sa presvedčíme, že takto definované P je relácia ekvivalentnosti nad množinou R reálnych čísel. Ako ilustračný príklad študujme $1/2 \in \mathbb{R}$, kde $integer(1/2)=0$, trieda ekvivalentnosti je $[0]=\{x;\, 0 \le x < 1\}$. Pre ďalšie reálne číslo $3/2 \in R$, $integer(3/2)=1$, dostaneme triedu ekvivalentnosti $[1]=\{x;\, 1 \le x < 2\}$: Množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ môžeme vyjadriť ako zjednotenie týchto tried ekvivalentnosti charakterizovanými celými číslami

$$\mathbb{R} = \bigcup_i [i] = ...[-2] \cup [-1] \cup [0] \cup [1] \cup [2]...$$

3.2 Relácia čiastočného usporiadania

Pre mnohé množiny je možné definovať reláciu usporiadania jej elementov. Tak napríklad, množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ majú prirodzené usporiadanie svojich elementov pomocou relácie $'\le'$ (pozri príklad 3.4). Táto relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia 3.9. Relácia $P \subseteq X \times X$ sa nazýva ***čiastočné usporiadanie*** vtedy a len vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Množina X spolu s touto reláciou sa nazýva ***čiastočne usporiadaná množina*** (***poset***).

Príklad 3.9.
(1) Relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ môže byť jednoducho realizovaná pomocou známej relácie $'\le'$, ktorá sa interpretuje ako „menší alebo rovný“ (pozri príklad 3.4).
(2) Ak by sme chceli reláciu P interpretovať pomocou relácie $'<'$, potom P nie je čiastočné usporiadanie, pretože P nie je reflexívna (t. j. neplatí $x < x$).
(3) Nech F je rodina podmnožín univerza U, $F=\{X;\, X \in \mathcal{P}(U)\}$. Pomocou množinovej relácie $'\subseteq'$ môžeme nad touto rodinou F definovať reláciu P tak, že $((X,Y) \in P) \equiv (X \subseteq Y)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto relácia je čiastočne usporiadanie, je reflexávna, antisymetrická a tranzitívna.
(3) Nech $X = \mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ je množina kladných celých čísel. Definujme nad touto množinou reláciu $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pomocou pojmu deliteľnosti; $((m,n) \in P) \equiv (m \text{ je deliteľné } n)$. Tak napríklad, pre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ relácia P obsahuje dvojice

$$P = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$$

Táto relácia je čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Maximálny a minimálny element
Nech $P \subseteq X \times X$ je čiastočné usporiadanie a nech $Y \subset X$, potom relácia

$$Q = P \cap (Y \times Y) \tag{3.14}$$

je čiastočne usporiadanie nad množinou Y. Z definície relácie Q vyplýva, že je podmnožinou relácie P, $Q \subset P$. Potom pre dva elementy $x,y \in Y$ platí, že $((x,y) \in Q) \equiv ((x,y) \in P)$. Relácia Q sa nazýva ***reštrikcia*** relácie P. Navyše, ak relácia P je čiastočné usporiadanie, potom aj relácia Q je čiastočné usporiadanie.

Príklad 3.10. Nech relácia P je čiastočné usporiadanie z príkladu 3.9, bod (3). Definujme množinu $Y=\{1,2,3,4\}\subset X$, potom reštrikcia relácie P je relácia Q

$$Q=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,1),(3,1),(4,1),(4,2)\}$$

Definícia 3.10. Nech $P\subseteq X\times X$ je čiastočné usporiadanie. ***Maximálny element*** (ak existuje) $x_{max}\in X$ je určený podmienkou

$$\neg\exists x\left((x_{max},x,)\in P\right) \tag{3.15a}$$

Minimálny element (ak existuje) $x_{min}\in X$ je určený podmienkou

$$\neg\exists x\left((x,x_{min})\in P\right) \tag{3.15b}$$

Táto definícia maximálneho elementu $x_{max}\in X$ je založená na podmienke, že neexistuje taký element $x\in X$, ktorý by bol „väčší“ ako element x_{max}. Podobne, pre minimálny element $x_{min}\in X$ neexistuje taký element $x\in X$, ktorý by bol menší ako x_{min}.

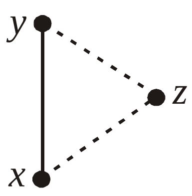
Príklad 3.11. Študujme množinu $X=\{1,2,3\}$, jej potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všetky možné podmnožiny X

$$\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

Ak čiastočne usporiadanie nad touto potenčnou množinou je relácia ´$\subseteq$´, potom maximálny (minimálny) element je $\{1,2,3\}$ ($\emptyset$). Definujme podmnožinu Q potenčnej množiny $\mathcal{P}(X)$ $Q=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$. Táto množina má dva maximálne elementy $\{1,2\}$ a $\{2,3\}$ a jeden minimálny element $\emptyset$.

Hasseho diagramy

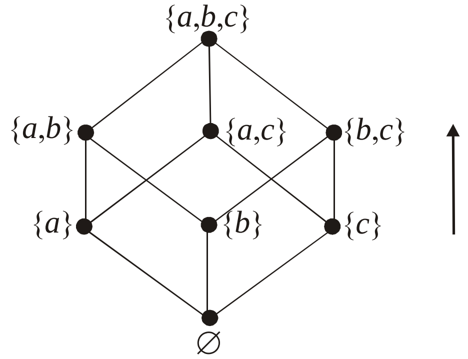
Nech P je čiastočne usporiadaná množina s reláciou $P\subseteq X\times X$. Hovoríme, že element y je pokrytý elementom x vtedy, ak $(x,y)\in P$ a neexistuje taký element z, pre ktorý súčasne platí $(x,z)\in P$ a $(z,y)\in P$, pozri obr. 3.7.



Obrázok 3.7. Znázornenie pojmu „element *y* je ***pokrytý*** elementom *x*“ , neexistuje taký element z, pre ktorý by platilo „element *z* je pokrytý *z*“ a „element *y* je pokrytý z“.

Hasseho diagram priradený konečnej množine X s reláciou $P\subseteq X\times X$ čiastočného usporiadania obsahuje vrcholy, ktoré sú stotožnené s elementami z X; pričom dva vrcholy x a **y** sú spojené hranou, ak element y pokrýva element x.

Príklad 3.12. Hasseho diagram pre množiny $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná pomocou relácie $'\subseteq'$ je znázornený na obr. 3.8.



Obrázok 3.8. Znázornenie Hasseho diagramu pre $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, ktorá je čiastočne usporiadaná reláciou $'\subseteq'$. Šípka v pravo znázorňuje orientáciu čiar, ktoré sú orientované zdola nahor.

Príklad 3.13. Relácia P čiastočného usporiadania je špecifikovaná Hasseho diagramom znázorneného na obr. 3.9. Našou úlohou je vydedukovať dvojice, ktoré obsahuje táto relácia:
(1) Množina nad ktorou je definovaná relácia má tvar $X = \{a,b,r,s,t,x,y,z\}$.
(2) Relácia P je reflexívna, t. j .obsahuje všetky možné dvojice (u,u), pre každé $u \in X$,

$$P^{(1)} = \{(a,a),(b,b),(r,r),(s,s),(t,t),(x,x),(y,y),(z,z)\}$$

(3) Relácia P obsahuje všetky hrany z Hasseho diagramu na obr. 3.9, pričom hrany sú orientované zdola nahor,

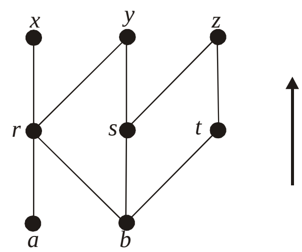
$$P^{(2)} = P^{(1)} \cup \{(a,r),(b,r),(b,s),(b,t),(r,x),(r,y),(s,y),(s,z),(t,z)\}$$

(4) Relácia P je tranzitívna, čiže, ak napr. obsahuje dvojice (a,r) a (r,x), potom musí obsahovať aj dvojicu (a,x),

$$P^{(3)} = P^{(2)} \cup \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(b,z)\}$$

Zjednotením týchto troch parciálnych výsledkov dostaneme konečný tvar relácia P

$$P = \left\{ \begin{matrix} (a,a),(b,b),(r,r),(s,s),(t,t),(x,x),(y,y),(z,z), \\ (a,r),(b,r),(b,s),(b,t),(r,x),(r,y),(s,y),(s,z), \\ (t,z),(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(b,z) \end{matrix} \right\}$$



Obrázok 3.9. Hasseho diagram pre hypotetickú reláciu čiastočného usporiadania nad množinou $X = \{a,b,r,s,t,x,y,z\}$. Šípka vpravo znázorňuje orientáciu čiar zdola nahor.

Hasseho diagram pre reláciu čiastočného usporiadania P nad konečnou množinou X ukazuje jasne maximálne a minimálne prvky. Minimálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, z ktorých hrany len vychádzajú, podobne, maximálne prvky sú také, ktoré sú reprezentované vrcholmi, do ktorých hrany len vchádzajú. Relácia čiastočného usporiadania *P*, ktorá je reprezentovaná Hasseho diagramom na obr. 3.9 má dva minimálne prvky *a* a *b*, tri maximálne prvky *x*, *y* a *z*.

Veta 3.4. Každá relácia čiastočného usporiadania $P \subseteq X \times X$ obsahuje aspoň jeden minimálny element a aspoň jeden maximálny element.

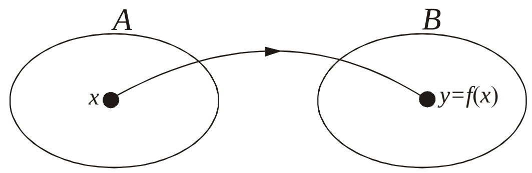
Nech $a_1 \in X$, ak je tento element minimálny, dôkaz je dokončený. V opačnom prípade existuje $a_2 \in X$ taký, že $(a_2, a_1) \in P$. Element a_2 je buď minimálny alebo ak nie, potom existuje taký element $a_3 \in X$, že $(a_3, a_2) \in P$. Pretože množina X má konečný počet elementov, tento proces predlžovania smerom dole, musí byť v nejakom momente ukončený elementom, ktorý je minimálny. Podobným spôsobom môžeme zostrojiť element, ktorý je maximálny.

3.3 Funkcie

Pojem funkcie (alebo zobrazenia) patrí medzi základné pojmy matematiky. V matematike pod funkciou *f* rozumieme jednoznačný predpis pomocou ktorého každému argumentu *x* z množiny *A* priradíme práve jednu funkčnú hodnotu označenú *f*(*x*) z množiny *B*. Túto špecifikáciu funkcie zapisujeme takto:

$$f : A \to B \tag{3.16a}$$

pozri obr. 3.10.



Obrázok 3.10. Schématické znázornenie zobrazenia $f : A \to B$.

Alternatívna forma definície funkcie (3.16) je pomocou množiny obsahujúcej usporiadané dvojice

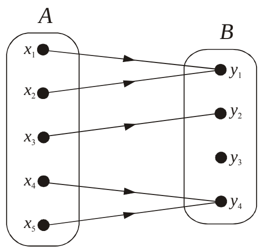
$$f = \{(x, f(x)); x \in A\} \tag{3.16}$$

Definícia 3.11. Relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva ***funkcia*** vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x, y) \in f$

$$\forall x \, \exists! y \, (x, y) \in f \tag{3.17}$$

Množina *A* sa nazýva ***doména*** funkcie *f*, *dom*(*f*), a množina B sa nazýva ***kodoména*** funkcie *f*, *codom*(*f*). Ak $(x, y) \in F$, potom *x* sa nazýva ***argument*** a *y* sa nazýva ***funkčná hodnota*** (***obraz***). Funkcia sa taktiež nazýva ***zobrazenie*** alebo ***transformácia***.

Funkcia je špeciálny prípad relácie, ktorá vyhovuje podmienke jednoznačnosti (3.17), pozri obr. 3.11.

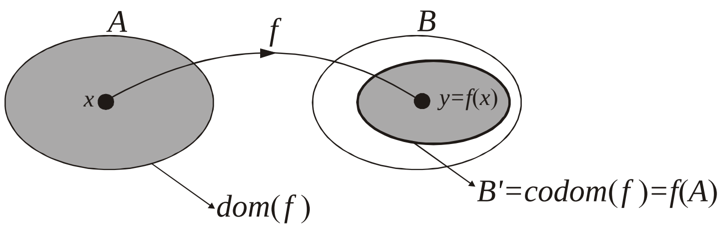


Obrázok 3.11. Znázornenie funkcie $f \subset A \times B$, pre každé $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $(x,y) \in f$. Funkcia f má tvar relácie $f = \{(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_4),(x_5,y_4)\}$

Z obrázku 3.11 vyplýva, že definícia 3.11 nám nezabezpečuje, aby množina funkčných hodnôt $\{f(x); x \in A\}$ bola totožná s množinou B, vo všeobecnosti platí len

$$B' = codom(f) = f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq B$$

pozri obr. 3.12.



Obrázok 3.12. Znázornenie skutočnosti, že pre funkciu $f : A \to B$, množina funkčných hodnôt $codom(f) = f(A)$ je vo všeobecnosti len podmnožinou B.

Definícia 3.12. Hovoríme, že dve funkcie $f : A \to B$ a $g : A' \to B'$ sa ***rovnajú*** vtedy a len vtedy, ak súčasne platí
(1) $A = A'$ a $B = B'$,
(2) $\forall(x \in A)(f(x) = g(x))$.

Táto definícia rovnosti dvoch funkcií ma praktický význam, často sa intuitívne hovorím že dve funkcie sa rovnajú, táto definícia nám presne špecifikuje, čo musí byť splnené, aby táto podmienka bola splnená.

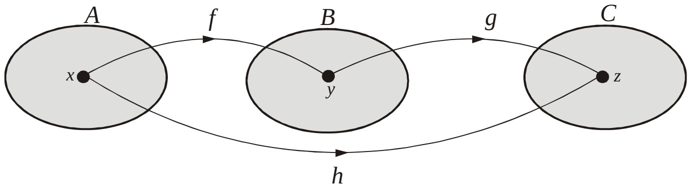
Špeciálnym prípadom funkcie je ***jednotková funkcia*** $i_A : A \to A$, pre ktorú platí

$$\forall(x \in A)(i_A(x) = x) \tag{3.18}$$

Jej doména a kodoména sú si rovné, $dom(i_A) = codom(i_A) = A$

Zložená funkcia

V kapitole 3.1 bola definovaná kompozícia $P \circ Q$ dvoch relácií P a Q. Podobný postup môže byť použitý aj pre kompozíciu funkcií, ktorej výsledok nazývame zložená funkcia. Majme dve funkcie $f: A \Rightarrow B$ a $g: B \Rightarrow C$, kompozíciou týchto dvoch funkcií (pozri obr. 3.13) vytvoríme novú funkciu $h = f \circ g : A \Rightarrow C$, ktorá sa nazýva zložená funkcia.



Obrázok 3.13. Znázornenie tvorby zloženej funkcie *h* z funkcií *f* a *g*. Táto zložená funkcia existuje len vtedy, keď prienik kodomény funkcie *f* a domény funkcie *g* je neprázdny, $codom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$.

Definícia 3.13. Hovoríme, že kompozíciou funkcií $f: A \to B$ a $g: B \to C$ vznikne ***zložená funkcia*** $h = g \circ f : A \to C$, vtedy a len vtedy, ak

$$h = g \circ f = \{(x,z) \in A \times C; \exists (y \in B)((x,y) \in f) \wedge ((y,z) \in g)\} \tag{3.19}$$

Z tejto definície priamo plynie, že zložená funkcia $h = g \circ f$ existuje len vtedy, ak pre danú dvojicu $(x,z) \in A \times C$ existuje taký element $y \in B$, pre ktorý súčasne platí $(x,y) \in f$ a $(y,z) \in g$. Ináč povedané, musí existovať neprázdny prienik medzi kodoménou funkcie *f* a doménou funkcie *g*, $codom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$.

Ako zostrojiť zloženú funkciu? Z obr. 3.13 aplikáciou funkcie *f* na argument *x* dostaneme obraz $y = f(x)$, podobne, aplikáciou funkcie *g* na argument *y* dostaneme obraz $z = g(y)$; ak do tohto výsledku dosadíme za *y* predchádzajúci výsledok $y = f(x)$, získame konečný tvar zloženej funkcie

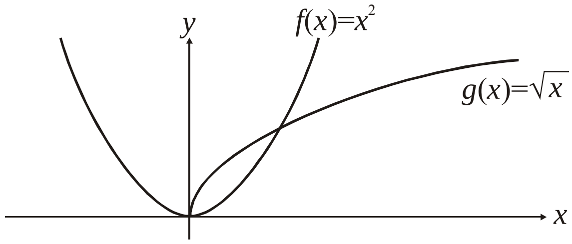
$$g(f(x)) = h(x) = g \circ f(x) = z \tag{3.20}$$

Príklad 3.14. Študujme dve funkcie

(1) $f: \mathbb{R} \to (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$, ktorej analytický tvar je $f(x) = x^2$, jej doména je $dom(f) = \mathbb{R}$ množina reálnych čísel a kodoména je $codom(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ množina nezáporných reálnych čísel.

(2) $g: (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \to (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$, ktorej analytický tvar je $g(x) = \sqrt{x}$, táto má rovnakú doménu a kodoménu $dom(g) = codom(g) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, množinu nezáporných reálnych čísel.

Grafy týchto funkcií sú znázornené na obr. 3.14.

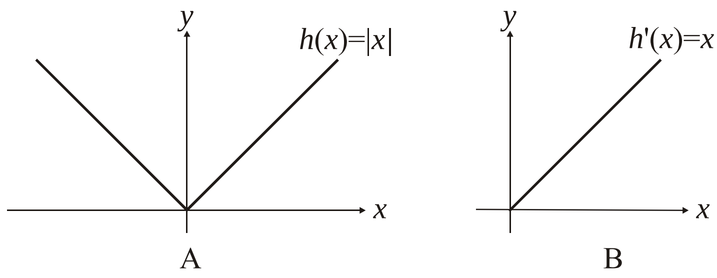


Obrázok 3.14. Grafy funkcií *f*(*x*) a *g*(*x*) z príkladu 3.14.

Prvá zložená funkcia má tvar $h(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{x^2}=|x|$, jej doména je $dom(h)=\mathbb{R}$ a kodoména je $codom(h)=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, t. j. zobrazuje množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ na množinu nazáporných reálnych čísel $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$. Priebeh funkcie $h(x)=|x|$ je znázornený na obr. 3.15.

Druhá zložená funkcia má tvar $h'(x)=f\left(g(x)\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, táto funkcia má rovnakú doménu a kodoménu, $dom(h')=codom(h')=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, t. j. zobrazuje „lineárne" množinu nezáporných reálnych čísel na tú istú podmnožinu. Priebeh funkcie $f'(x)=x$ je znázornený na obr. 3.15.

Môžeme si položiť otázku či sa zložené funkcie $h(x)$ a $h'(x)$ rovnajú alebo nie. Podľa definície 3.12, dve funkcie sú si rovné vtedy a len vtedy, ak majú rovnaké domény, kodomény a analytické tvary, ak je porušená jedna z týchto troch podmienok, potom funkcie sú rôzne. V našom prípade $dom(h)\neq dom(h')$, čiže zložené funkcie sú rôzne.



Obrázok 3.15. Diagram A znázorňuje graf zloženej funkcie $h(x)=g\left(f(x)\right)=|x|$, diagram B znázorňuje graf zloženej funkcie $h'(x)=f\left(g(x)\right)=x$.

Inverzná funkcia

Podľa definície 3.2 je inverzná relácia P^{-1} určená jednoducho inverziou usporiadaných dvojíc z relácia P (pozri obr. 3.2). Žiaľ, tento jednoduchý postup je neaplikovateľný pre konštrukciu inverznej funkcie, pretože vzniknutá relácia už nemusí spĺňať podmienku jednoznačnosti (pozri definíciu 3.11). Preto musíme zaviesť ešte dodatočné predpoklady na reláciu, aby bola nielen funkciou ale existovala k nej aj inverzná funkcia.

Definícia 3.14. Funkcia $f:A\rightarrow B$ sa nazýva jedno-jednoznačná vtedy a len vtedy, ak vyhovuje podmienke

$$\forall(x,x'\in A)\left(x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')\right) \qquad (3.21)$$

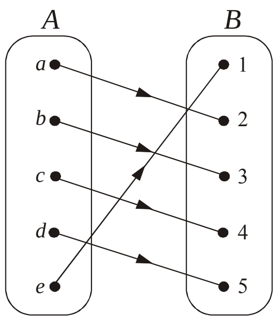
Pôvodnú podmienku jednoznačnosti z definície 3.11 môžeme vyjadriť takto

$$\forall(x,x'\in A)\left(f(x)\neq f(x')\Rightarrow x\neq x'\right) \qquad (3.22)$$

Spojením týchto dvoch podmienok dostaneme, že jedno-jednoznačná funkcia vyhovuje podmienke

$$\forall\left(x,x'\in A\right)\left(\left(x\neq x'\right)\equiv\left(f\left(x\right)\neq f\left(x'\right)\right)\right) \tag{3.23}$$

To znamená, že podmienka rôznosti argumentov je ekvivalentná podmienke rôznosti ich funkčných hodnôt, pozri obr. 3.16.



Obrázok 3.16. Schématické znázornenie jedno-jednoznačnej funkcie $f:A\rightarrow B$, kde každému argumentu je priradená práve jedna funkčná hodnota, a taktiež aj naopak, ku každej funkčnej hodnote existuje práve jeden argument.

Pomocou jedno-jednozněného zobrazenia $f:A\rightarrow B$, pričom $A=dom\left(f\right)$ a $B=codom\left(f\right)$, môžeme jednoducho dokázať, že množiny *A* a *B* majú rovnakú mohutnosť.

Veta 3.5. Ak medzi dvoma množinami *A* a *B* existuje jedno-jednojednoznačné zobrazenie $f:A\rightarrow B$, pričom platí $A=dom\left(f\right)$ a $B=codom\left(f\right)$, potom mohutnosti množín *A* a *B* sú rovnaké

$$\left|A\right|=\left|B\right| \tag{3.24}$$

Nebudeme dokazovať túto vetu, obr. 3.16 je jej dobrou ilustráciou a taktiež mnoho napovedá o jej možnom dôkaze.

Definícia 3.14. Hovoríme, že k funkcii $f:A\rightarrow B$ existuje inverzná funkcia $f^{-1}:B\rightarrow A$ vtedy a len vtedy, ak je funkcia *f* jedno-jednoznačná.

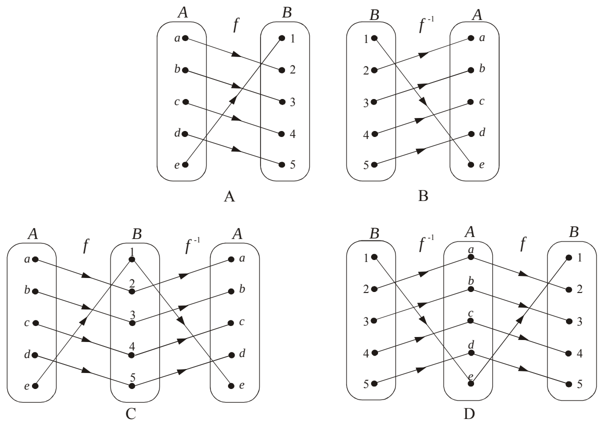
Na základe tejto definície máme „definotoricky“ zabezpečenú existenciu inverznej funkcie. Podobný prístup sa používa aj v lineárnej algebre, kde regulárnosť (nesingulárnosť) štvorcovej matice (detewrminant matice je nenulový) definotoricky zabezpečuje existenciu inverznej matice.

Veta 3.6. Nech funkcia $f:A\rightarrow B$ je jedno-jednoznačná, potom inverzná funkcia $f^{-1}:B\rightarrow A$ vyhovuje týmto podmienkam

$$f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=i_B\left(x\right) \tag{3.25a}$$

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=i_A\left(x\right) \tag{3.25b}$$

kde i_X je jednotková funkcia nad doménou *X*.



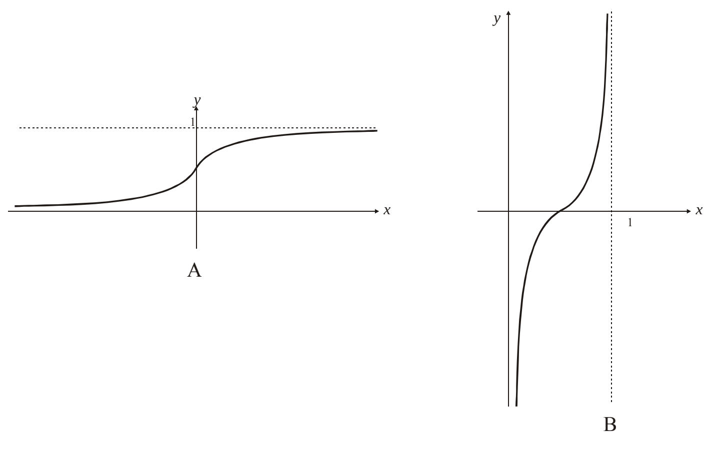
Obrázok 3.17. Diagramy A a B znázorňujú zobrazenia f a f^{-1} prevzaté z obr. 3.16. Diagram C znázorňuje zloženú funkciu $h = f^{-1} \circ f = i_A : A \to A$, diagram D znázorňuje zloženú funkciu $h' = f \circ f^{-1} = i_B : B \to B$.

Veta 3.6 je ilustrovaná obrázkom 3.17, kde v obidvoch prípadoch dostávame jednotkovú funkciu definovanú nad doménou *A* resp. doménou *B*.

Príklad 3.15. Zostrojte inverznú funkciu k funkcii $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Graf funkcie *f*(*x*) je znázornený na obr. 3.18. Táto funkcia[1] zobrazuje doménu $dom(f) = \mathbb{R}$ na kodoménu $codom(f) = (0,1)$. Funkcia je monotónne rastúca a vyhovuje asymptotickým podmienkam $f(\infty) = 1$ a $f(-\infty) = 0$. Z monotónnosti vyplýva, že funkcia je jedno-jednoznačná, čiže k nej existuje inverzná funkcia, pozri obr. 3.18.

$$f^{-1}(x) = ln\frac{x}{1-x}$$



Obrázok 3.18. Priebehy funkcií (A) $f(x) = 1/(1+e^{-x})$ a (B) $f^{-1}(x) = ln\, x/(1-x)$

Na záver budeme počítať zložené funkcie $f\left(f^{-1}(x)\right)$ a $f^{-1}\left(f(x)\right)$.

[1] V teórii neurónových sietí je táto funkcia známa ako sigmoidová prechodová (alebo aktivačná) funkcia, ktorá „stlačí" celú reálnu os na otvorenú úsečku (0,1).

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{1+exp\left(-f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{1+exp\left(-ln\,x/(1-x)\right)}=\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}=x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=ln\frac{f(x)}{1-f(x)}=ln\frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{1-\frac{1}{1+e^{-x}}}=ln\frac{\frac{1}{1+e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}=ln\,e^{x}=x$$

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R\subseteq A\times B$, $A=\{0,1,2,3,4\}$, kde $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x=y$,
(b) $x+y=4$,
(c) $x>y$,
(d) *x* je deliteľné *y*.

Cvičenie 3.2.
(a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$,
(b) znázornite túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.1.
(c) znázornite túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.2,
(d) repreyentujte reláciu pomocou binárnej matice ***A*** z definície 3.7.

Cvičenie 3.2. Pre každú z týchto relácií nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetyrická, alebo tranzitívna.
(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(c) $\{(2,4),(4,2)\}$
(d) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
(e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(f) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

Cvičenie 3.3. Zistite, či relácia *R* nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) *x* je menší ako *y*,
(b) *x* a *y* sa narodili v rovnakom dni,
(c) *x* má rovnaké krstné meno ako *y*,
(d) x a y majú rovnakých starých rodičov.

Cvičenie 3.4. Zistite, či relácia *R* nad množinou všetkých web stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) každý, kto navštívil túto stránku *x*, navštívil aj stránku *y*,

(b) neexistuje spoločné prepojenie medzi stránkami x a y,
(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y,
(d) existuje stránka, ktorá obsahuje všetky prepojenia stránok x a y.

Cvičenie 3.5. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x + y = 0$,
(b) $x = \pm y$,
(c) $x - y$ je racionálne číslo,
(d) $x = 2y$,
(e) $xy \geq 0$,
(f) $xy = 0$,
(g) $x = 1$,
(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.

Cvičenie 3.6. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1}\subseteq Y\times X$ pre relácie $R\subseteq X\times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R=\{(x,y);x<y\}$ nad množinou celých čísel.
(b) $R=\{(x,y);x \text{ je deliteľné } y\}$ nad množinou kladných celých čísel.
(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x,y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y.

Cvičenie 3.7.
Nech $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ a $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ sú relácie nad $X=\{1,2,3\}$ a $Y=\{1,2,3,4\}$. Nájdite

(a) $P\cup Q$, $P\cap Q$,
(b) $P-Q$, $Q-P$,
(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$,
(d) P^{-1}, Q^{-1},
(e) $P\circ Q$, $Q\circ P$,
(f) $(P\circ Q)^{-1}$, $(Q\circ P)^{-1}$,
(g) $Q^{-1}\circ P^{-1}$, $P^{-1}\circ Q^{-1}$.

Cvičenie 3.8. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:
Ak relácia $R\subseteq X\times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.
Dôkaz: Nech $x\in X$, zoberte taký element $y\in X$ pre ktorý $(x,y)\in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $(y,x)\in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $(x,x)\in R$, pretože $(x,y),(y,x)\in R$.

Cvičenie 3.9. Definujte nad množinou $X=[0,1]$ (uzavretý interval obsahujúci reálne čísla $0\leq x\leq 1$) päť relácií. Zistite, ktoré z týchto relácií sú reflexívne, symetrické, antisymetrické, alebo tranzitívne.

Cvičenie 3.10. Nech $P,Q \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:
(a) $R \cup S$ je reflexívna relácia,
(b) $R \cap S$ je reflexívna relácia,
(c) $R - S$ je reflexívna relácia,
(d) $R \circ S$ je reflexívna relácia,

Cvičenie 3.11. Dokážte tieto tvrdenia:
(a) Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$.
(b) Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej“ relácia $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$.
(c) Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia.
(d) Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom existuje také $n > 0$, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ ... \circ R}_{n-krát}$.

Cvičenie 3.12. Rozhodnite, či $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ak
(a) $f(x) = 1/x$,
(b) $f(x) = \sqrt{x}$,
(c) $f(x) = \pm\sqrt{1+x^2}$.

Cvičenie 3.13. Nájdite doménu a kodoménu funkcií:
(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,
(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,
(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo.

Cvičenie 3.14. Zistite, či funkcie $f : A \to A$, kde $A = \{a,b,c,d\}$, sú jedno-jednoznačné a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11.:
(a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$,
(b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$,
(c) $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$,

Cvičenie 3.15. Zistite, či funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ je množina prirodzených čísel:
(a) $f(n) = n-1$,
(b) $f(n) = n^2$,
(c) $f(n) = 1 + integer(n/2)$, kde *integer*(x) je celá časť reálneho čísla,
(d) $f(n) = n^3$.

Cvičenie 3.16. Nech $f : A \to A$, zostrojte $codom(f) = f(A)$ k de $A = \{-1,0,2,4,7\}$, pre

(a) $f(x)=1$,

(b) $f(x)=2x+1$,

(c) $f(x)=integer(x/5)$,

(d) $f(x)=integer\left(\left(1+x^2\right)/3\right)$.

Cvičenie 3.17. Nech $f(x)=2x$, zostrojte:

(a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel,

(b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel,

(c) $f(\mathbb{R})$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.

Cvičenie 3.18. Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$, dokážte, že ak funkcie f a g sú jedno-jednoznačné, potom aj ich kompozícia $g \circ f : A \to C$ je jedno-jednoznačná funkcia.

Cvičenie 3.19. Zostrojte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$, kde $f(x)=1+x^2$ a $g(x)=x+2$ sú funkcie s doménou reálnych čísel.

Cvičenie 3.20. Nech $f(x)=ax+b$ a $g(x)=cx+d$, kde a, b, c a d sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f(g(x))=g(f(x))$.

Cvičenie 3.21. Za ktorých podmienok existuje k funkcii $f(x)=ax+b$ funkcia inverzná $f^{-1}(x)$.

Cvičenie 3.22. Nech $f : A \to B$ a nech $A', A'' \subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$,

(b) $f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$.

Cvičenie 3.23. Nech $f(x)=x^2$ je funkcia s doménou reálnych čísel. Nájdite

(a) $f^{-1}(1)$,

(b) $f^{-1}(\{x; 0 < x < 1\})$

(c) $f^{-1}(\{x; x > 4\})$.

Cvičenie 3.24. Nech $f : A \to B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,

(b) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.

Cvičenie 3.25. Nech $f : A \to B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}\left(\overline{B'}\right) = \overline{f^{-1}(B')}$.