2. prednáška

Teória množín I

- množina
- operácie nad množinami
- množinová algebra
- mohutnosť a enumerácia
- karteziánsky súčin

Definícia množiny

- Koncepcia množiny patrí medzi základné formálne prostriedky matematiky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou.

- Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918).

Elementárnym pojmom teórie množín je ***element***, pod ktorým budeme rozumieť nejaký reálny alebo abstraktný objekt, pričom postulujeme, že objekty medzi sebou sú dobre odlíšiteľné.

Definícia. *Množina je neusporiadaný súbor elementov*.

Poznámky k definícii:

- Ak sa nejaké dva elementy nachádzajú v tej istej množine, potom musia byť od seba ***odlíšiteľné***,

- v množine sa neopakuje výskyt dvoch rovnakých (neodlíšiteľných) elementov

- v definícii množiny bol použitý elementárny pojem „***súbor***“, ktorý nebudeme bližšie špecifikovať

Element a ***patrí*** do množiny A označíme výrazom $a \in A$.

Tento výraz chápeme ako výrok, ktorý je pravdivý (nepravdivý), ak element a patrí (nepatrí, čo vyjadríme $a \notin A$) do množiny A.

$$a \in A = \begin{cases} 1 & (\mathit{element\ a\ patrí\ do\ A}) \\ 0 & (\mathit{element\ a\ nepatrí\ do\ A}) \end{cases}$$

$$a \notin A = \begin{cases} 1 & (\mathit{element\ a\ nepatrí\ do\ A}) \\ 0 & (\mathit{element\ a\ patrí\ do\ A}) \end{cases}$$

Špecifikácia množiny

Prvý spôsob špecifikácie množiny je založený na ***vymenovaní*** všetkých elementov, ktoré do nej patria

$$A = \{a, b, ..., u\}$$

Tento spôsob je vhodný len na špecifikácie množín, ktoré obsahujú konečný počet elementov.

Príklad. je množina mojich detí, $A = \{Michal, Jana, Eva\}$

Druhý spôsob špecifikácie množiny využíva ***predikát*** $P(x)$, ktorý ak je pravdivý (nepravdivý), potom element x patrí (nepatrí) do množiny

$$A = \{x; P(x)\}$$

Príklad. Množina A obsahujúca párne celé čísla

$$A = \{n; n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$$

Charakteristické funkcie

Druhý spôsob špecifikácie množiny je pretransformovaný na koncepciu ***charakteristických funkcií***. V tomto prístupe predikát $P(x)$ je určený takto

$$P(x)=\left(\mu_A(x)=1\right)$$

alebo

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$$

Uvažujme ***univerzum*** U, nad ktorou sú definované všetky ostatné množiny.

Definícia. Množina A (vzhľadom k univerzu U) je pomocou charakteristickej funkcie vyjadrená takto

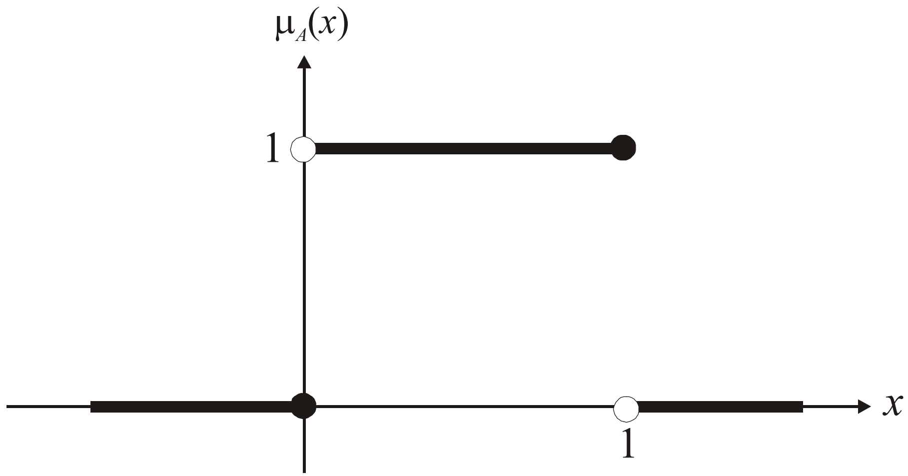
$$A=\left\{x\in U\,;\mu_A(x)=1\right\}$$

Príklad

Vyjadrite množinu $A = (0,1]$ pomocou charakteristickej funkcie.

Univerzum U je totožné s množinou reálnych čísel R. Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je definovaná takto

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } 0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$



Operácie nad množinami

Definícia. Hovoríme, že množina $A=\{x\,;\mu_A(x)=1\}$ sa ***rovná*** množine $B=\{x\,;\mu_B(x)=1\}$, $A = B$, vtedy a len vtedy, ak charakteristické funkcie oboch množín sú rovnaké

$$(A=B)=_{def}\ \forall(x\in U)\big(\mu_A(x)=\mu_B(x)\big)$$

Alternatívna definícia vzťahu rovnosti medzi množinami A a B je

$$(A=B)=_{def}\ \forall(x\in U)\big((x\in A)\equiv(x\in B)\big)$$

$$=_{def}\ \forall(x\in U)\big((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A)\big)$$

Definícia. Hovoríme, že množina $A=\{x\,;\mu_A(x)=1\}$ je ***podmnožinou*** množiny $B=\{x\,;\mu_B(x)=1\}$, $A \subseteq B$, vtedy a len vtedy, ak každý element z množiny A patrí aj do množiny B

$$A \subseteq B =_{def} \forall(x \in U)\left(\left(\mu_A(x)=1\right) \Rightarrow \left(\mu_B(x)=1\right)\right)$$

Alternatívna definícia podmnožiny je

$$A \subseteq B =_{def} \forall(x \in U)\left((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\right)$$

V prípade, že $A \neq B$, potom formula $A \subseteq B$ sa prepíše do tvaru $A \subset B$. Hovoríme, že A je ***vlastnou podmnožinou*** B , ak $A \subset B$ a $\mathrm{A} \neq \emptyset$. Rovnosť medzi množinami $A = B$ platí vtedy a len vtedy, ak $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Definícia. Hovoríme, že množina $A \cup B$ je ***zjednotenie množín*** A a B, vtedy a len vtedy, ak

$$A \cup B =_{def} \left\{x; \left(x \in A\right) \vee \left(x \in B\right)\right\} = \left\{x; \mu_{A \cup B}\left(x\right) = 1\right\}$$

$$\mu_{A \cup B}\left(x\right) = max\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right\}$$

Definícia. Hovoríme, že množina $A \cap B$ je ***prienik množín*** A a B, vtedy a len vtedy, ak

$$A \cap B =_{def} \left\{x; \left(x \in A\right) \wedge \left(x \in B\right)\right\} = \left\{x; \mu_{A \cap B}\left(x\right) = 1\right\}$$

$$\mu_{A \cap B}\left(x\right) = min\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right\}$$

Definícia. Hovoríme, že množina $\overline{A}$ je ***doplnok*** množiny A (vzhľadom k univerzu U), vtedy a len vtedy, ak

$$\overline{A} =_{def} \{x; x \notin A\} = \{x; \mu_{\overline{A}}(x) = 1\}$$

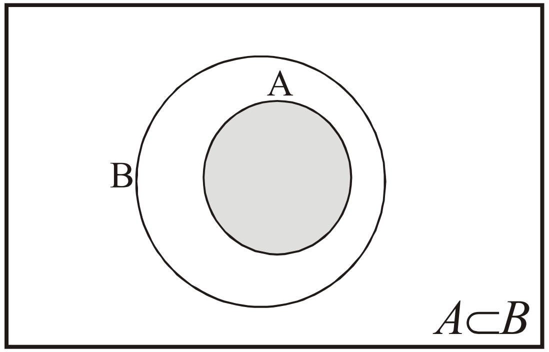
$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Definícia. Hovoríme, že množina $A - B$ (alebo $A \setminus B$) je ***rozdiel množín*** (***relatívny doplnok množín***) A a B, vtedy a len vtedy, ak

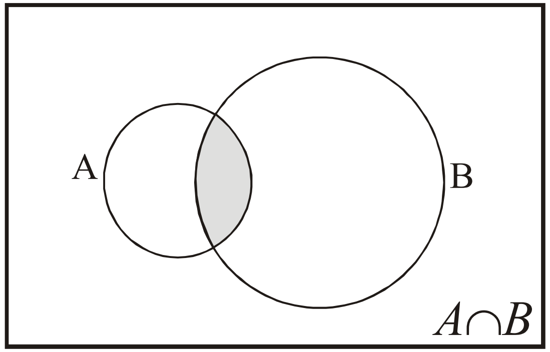
$$A - B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x; \mu_{A-B}(x) = 1\}$$

$$\mu_{A-B}(x) = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

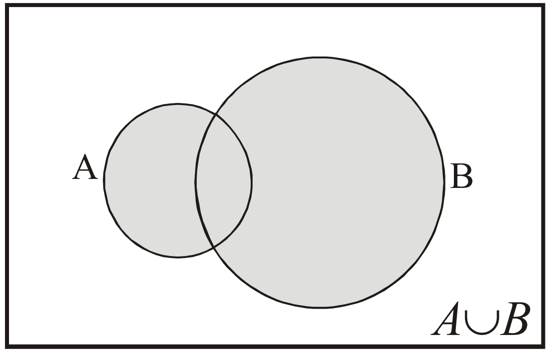
Vennove diagramy



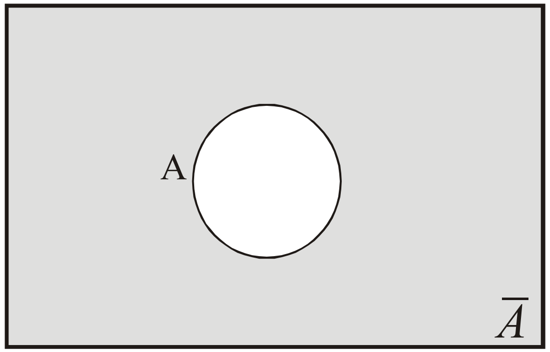
A



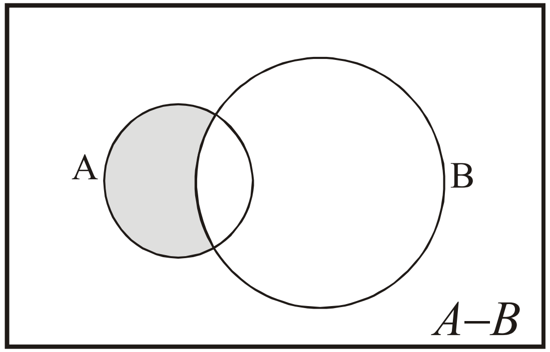
B



C



D

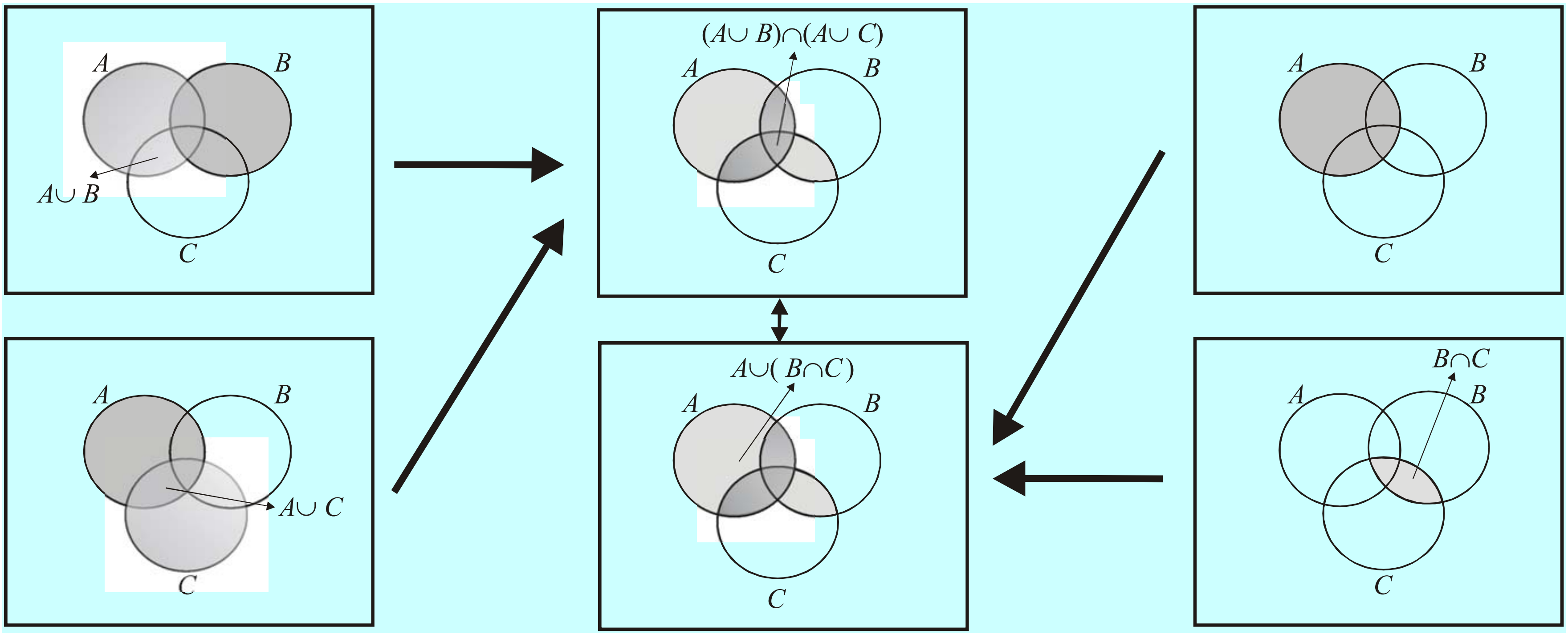


E

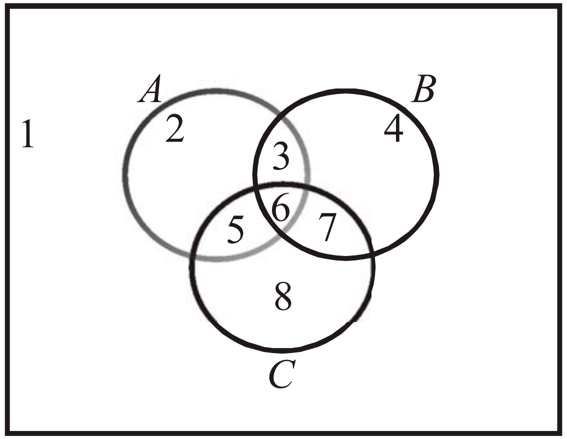
Algebra teórie množín

vlastnosť	formula teórie množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A,\ A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A,\ A \cup \emptyset = A$
absorpcia	$A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup U = U$
involúcia	$\overline{\overline{A}} = A,$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \overline{A} = U$
zákon sporu	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
rozdiel množín	$A - B = A \cap \overline{B}$
distributívne zákony pre rozdiel	$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\overline{A} \cup C),\ A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\overline{A} \cap C)$

Verifikácia korektnosti formuly $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Tabuľková metóda pre verifikáciu formúl teórie množín



A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

oblasť	A	B	C	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cap C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\overline{A} \cup C)$$

oblasť	A	B	C	$B - C$	$A \cap B$	$\overline{A} \cup C$	$A \cap (B - C)$	$(A \cap B) - (\overline{A} \cup C)$
1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0	1	0	0
6	1	1	1	0	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0	1	0	0

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ **a** } \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

A	B	$A \cup B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Použitie charakteristických funkcií k dôkazu formúl v teórii množín

Dôkaz De Morganovej formuly $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

Použitím algebraickej identity

$$1 - max\{a, b\} = min\{1 - a, 1 - b\}$$

dokážeme, že formule sú totožné pre ľubovolné charakteristické funkcie, čiže platí

$$\forall (x \in U)\left(\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x)\right)$$

Tým sme dokázali, že množiny $\overline{(A \cup B)}$ a $\bar{A} \cap \bar{B}$ sa navzájom rovnajú.

Dôkaz distributívneho zákona $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\} = max\{\mu_A(x), min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\}$$

$$\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = min\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_{A\cup C}(x)\}$$

$$= min\{max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}$$

Použitím algebraickej identity

$$max\{a, min\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, max\{a,c\}\}$$

dostaneme, že vyššie uvedené charakteristické funkcie sa rovnajú

$$\forall (x \in U)\left(\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) = \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}\right)$$

Tým sme dokázali, že množiny $A \cup (B \cap C)$ a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ sa rovnajú

Definícia. Ak množina A je konečná (obsahuje konečný počet elementov), potom jej ***mohutnosť*** (***kardinalita***), označená $|A|$, je počet elementov, ktoré obsahuje.

Ak množina obsahuje nekonečný počet elementov, potom jej mohutnosť je nekonečná, $|A| = \infty$.

Príklad

(a) $A = \{x; x \text{ je celé číslo ohraničené } 1/8 < x < 17/2\}$, $|A| = 8$,

(b) $A = \{x; \sqrt{x} \text{ je celé číslo}\} = \{0,1,4,9,16,...\}$, $|A| = \infty$,

(c) $A = \{x; x^2 = 1 \text{ alebo } 2x^2 = 1\} = \{1,-1,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\}$, $|A| = 4$,

(d) $A = \{a,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$, $|A| = 3$,

(e) $A = \{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$, $|A| = 3$.

(f) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{-2,-1,0,1,2\}$, $|A - B| = 4$.

Enumerácia elementov v množinách

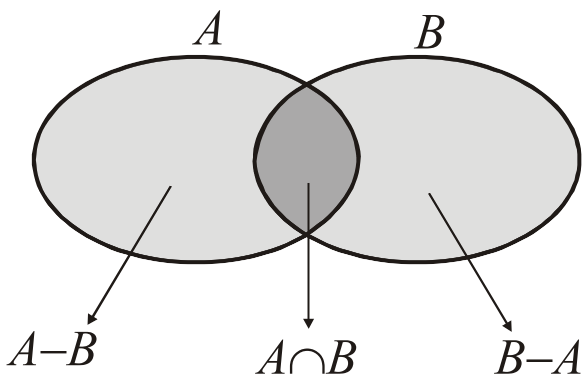
Jednoduchý príklad. Nech A a B sú disjunktné množiny ($A \cap B = \emptyset$), potom mohutnosť ich zjednotenia je určená súčtom mohutností jednotlivých množín

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Veta. Mohutnosť množiny $A \cup B$ je určená formulou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$\left|A \cup B\right| = \left|A - B\right| + \left|B - A\right| + \left|A \cap B\right|$$

Mohutnosť samotných množín A a B je určená takto

$$\left|A\right| = \left|A - B\right| + \left|A \cap B\right|$$

$$\left|B\right| = \left|B - A\right| + \left|A \cap B\right|$$

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots$$

$$(-1)^{n+1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

Príklad

Dokážte formulu

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$$

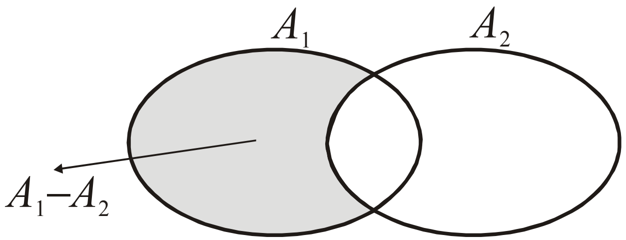
indukciou

$$\begin{aligned}\left|A \cup \left(B \cup C\right)\right| &= \left|A\right| + \left|B \cup C\right| - \left|A \cap \left(B \cup C\right)\right| \\ &= \left|A\right| + \left(\left|B\right| + \left|C\right| - \left|B \cap C\right|\right) - \left|\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)\right| \\ &= \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left(\left|A \cap B\right| + \left|A \cup C\right| - \left|\left(A \cap B\right) \cap \left(A \cap C\right)\right|\right) \\ &= \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cup C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|\underbrace{A \cap A}_{A} \cap B \cap C\right|\end{aligned}$$

Príklad

Dokážte formulu

$$\left|A_1 - A_2\right| = \left|A_1\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|$$



Dokážte formulu

$$\left|A_1 \cup \overline{A}_2\right| = N - \left|A_2\right| + \left|A_1 \cap A_2\right|$$

$$\left|A_1 \cup \overline{A}_2\right| = \left|A_1\right| + \left|\overline{A}_2\right| - \left|A_1 \cap \overline{A}_2\right| = \left|A_1\right| + \left(N - \left|A_2\right|\right) - \left|\underbrace{A_1 \cap \left(U - A_2\right)}_{A_1 - A_1 \cap A_2}\right|$$

$$= N + \left|A_1\right| - \left|A_2\right| - \left|A_1 - A_1 \cap A_2\right| = N + \left|A_1\right| - \left|A_2\right| - \left(\left|A_1\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|\right)$$

$$= N - \left|A_2\right| + \left|A_1 \cap A_2\right|$$

Príklad

Každý zo 100 študentov Fakulty informatiky UGBM študuje aspoň jeden z týchto odborov: matematika, informatika a ekonómia. Nech U je množina všetkých študentov FI UGBM, M je množina študentov matematiky, I je množina študentov informatiky a E je množina študentov ekonómie. Počty študentov sú určené tabuľkou:

študenti	symbol	počet
všetci	$\lvert U\rvert$	100
matematika	$\lvert M\rvert$	65
informatika	$\lvert I\rvert$	45
ekonómia	$\lvert E\rvert$	42
matematika a informatika	$\lvert M\cap I\rvert$	20
matematika a ekonómia	$\lvert M\cap E\rvert$	25
informatika a ekonómia	$\lvert I\cap E\rvert$	15

(i) ***Prvou úlohou*** je zistiť, koľko študentov súčasne študuje tri odbory, $|M \cap I \cap E| = ?$

$$|U| = |M \cup I \cup E| = |M| + |I| + |E| - |M \cap I| - |M \cap E| - |I \cap E| + |M \cap I \cap E|$$

Táto formulu nám špecifikuje počet študentov, ktorí súčasne študujú matematiku, informatiku a ekonómiu

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + |M \cap I \cap E|$$

potom $|M \cap I \cap E| = 8$.

(ii) ***Druhou úlohou*** je zistiť, koľko študentov matematiku a informatiku, ale nie ekonómiu, $|M \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Mohutnosť množiny $M \cap I$ môžeme vyjadriť takto

$$|M \cap I| = |M \cap I \cap E| + |M \cap I \cap \bar{E}| \Rightarrow |M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I|$$

Použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$|M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I| = 20 - 8 = 12$$

(iii) Poslednou ***treťou úlohou*** je zistiť, koľko študentov študuje len informatiku, ale nie matematiku a ekonómia, $\left|\bar{M}\cap I\cap\bar{E}\right|=?$ Množinu I rozložíme na štyri disjunktné podmnožiny

$$\left|I\right|=\left|I\cap\left(M\cup\bar{M}\right)\cap\left(E\cup\bar{E}\right)\right|=$$

$$\left|I\cap M\cap E\right|+\left|I\cap M\cap\bar{E}\right|+\left|I\cap\bar{M}\cap E\right|+\left|I\cap\bar{M}\cap\bar{E}\right|$$

Platia tieto identity

$$\left|I\cap\bar{M}\cap E\right|=\left|I\cap E\right|-\left|I\cap M\cap E\right|$$

$$\left|I\cap M\cap\bar{E}\right|=\left|I\cap M\right|-\left|I\cap M\cap E\right|$$

Dosadením týchto výsledkov do predošlého vzťahu dostaneme

$$\left|I\right|=-\left|I\cap M\cap E\right|+\left|I\cap E\right|+\left|I\cap M\right|+\left|I\cap\bar{M}\cap\bar{E}\right|$$

alebo

$$\left|I\cap\bar{M}\cap\bar{E}\right|=\left|I\right|+\left|I\cap M\cap E\right|-\left|I\cap E\right|-\left|I\cap M\right|=45+8-15-20=18$$

Upozornenie

- Pojem množina môže byť zovšeobecnený tak, že elementy množiny môžu byť taktiež množiny.
- Ak pristúpime na túto terminológiu, potom je korektný výrok

„množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“

- Russell poukázala na skutočnosť, že takto formulované výroky sú vnútorne rozporné (pokúste sa rozhodnúť, či táto množina obsahuje samu seba)
- Russell navrhol prekonať túto vnútornú kontradikčnosť intuitívnej teórie množín tak, že pojem množina sa môže používať len na ***prvej“ úrovni***, t. j. keď elementami tejto množiny sú elementy, ktoré nemajú svoju štruktúru. Na ***druhej úrovni*** používal termín „rodina množín“, jej elementy sú množiny z prvej úrovni. Na ďalšej ***tretej úrovni*** môžeme hovoriť o triede množín, jej elementy sú rodiny množín z predchádzajúcej druhej úrovne.
- Výrok „množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“ je nekorektný, jeho správna forma je „rodina všetkých možných množín“.

Rodina množín

Nech $I=\{1,2,\dots,n\}$ je množina indexov, ktorá obsahuje prvých n kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre každý index $i\in I$ má definovanú množinu A_i, potom rodina množín je definovaná takto

$$\mathcal{A}=\{A_i;i\in I\}=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$$

Pre rodinu množín $\mathcal{A}$ môžeme definovať operáciu prieniku a zjednotenie jej množín

$$\bigcap_{i\in I}A_i=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n=\{x;\forall i\left(x\in A_i\right)\}$$

$$\bigcup_{i\in I}A_i=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=\{x;\exists i\left(x\in A_i\right)\}$$

Príklad

A_i = {množina obsahuje binárne reťazce, ktorých dĺžka nie je väčšia ako i}

$$A_1 = \{0,1\}$$
$$A_2 = \{0,1,00,01,10,11\}$$

....

$$\bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = A_1$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_n$$

Potenčná množina

Definícia. Množina $\mathcal{P}(A)$ sa nazýva potenčná množina vzhľadom k množine A vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné podmnožiny množiny A

$$\mathcal{P}(A)=\{B; B\subseteq A\}$$

$$\emptyset\in\mathcal{P}(A) \text{ a } A\in\mathcal{P}(A)$$

Veta. Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ spĺňa tieto vlastnosti

$$(A\subseteq B)\equiv(\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B))$$

$$\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$$

$$\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$$

Príklad

$A = \emptyset$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$
$A = \{a\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$A = \{a,b\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$A = \{a,b,c\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

Poznámka. Pri práci s potenčnými množinami musíme veľmi starostlivo rozlišovať medzi symbolmi $\in$ a $\subseteq$. Ak $a \in A$, potom $\{a\} \subseteq A$ alebo $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Študujme množinu $A = \{1, 2, \{1\}\}$, potom potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1,2\}, \{1,\{1\}\}, \{2,\{1\}\}, \{1,2,\{1\}\}\}$$

Pripomíname, že elementy 1, $\{1\}$ $\{\{1\}\}$ sú rôzne.

Veta. Mohutnosť ***potenčnej množiny*** $\mathcal{P}(A)$ je určená jednoduchým vzťahom

$$\left|\mathcal{P}\left(A\right)\right| = 2^{|A|}$$

Nech množina A obsahuje n elementov, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, každá podmnožina $A' \subseteq A$ môže byť určená pomocou binárneho vektora dĺžky n, ak v i-tej polohe tohto vektora je 1 (0), potom $a_i \in A'$ ($a_i \notin A'$). Každá podmnožina z potenčnej množiny $\mathcal{P}\left(A\right)$ je jednoznačne špecifikovaná binárnym vektorom dĺžky n. Pretože celkový počet rôznych binárnych vektorov dĺžky n je 2^n, toto číslo špecifikuje aj mohutnosť potenčnej množiny, $\left|\mathcal{P}\left(A\right)\right| = 2^n$, kde $|A| = n$. Tento jednoduchý výsledok viedol niektorých autorov k tomu, že potenčnú množinu označili symbolom 2^A, jej mohutnosť sa rovná $2^{|A|}$.

Karteziánsky súčin množín

V mnohých matematických disciplínách alebo v ich aplikáciách vystupujú ***usporiadané dvojice elementov***. Napríklad, komplexné číslo môže byť charakterizované, ako usporiadaná dvojica reálnych čísel, $z = (x,y)$, kde x (y) je reálna (komplexná) časť. Základná relácia pre usporiadané dvojice je rovnosť: $(x,y) = (x',y')$, ktorá platí vtedy a len vtedy, ak sú si rovné ich prvé a druhé časti, $x = x'$ a $y = y'$. Táto podmienka rovnosti platí aj pre komplexné čísla, ktoré sú si rovné vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti.

Definícia. Množina $X \times Y$ sa nazýva ***kartézianský súčin*** dvoch množín X a Y vtedy a len vtedy, ak

$$X \times Y = \left\{ \left(x, y \right); x \in X \ a \ y \in Y \right\}$$

Poznámky

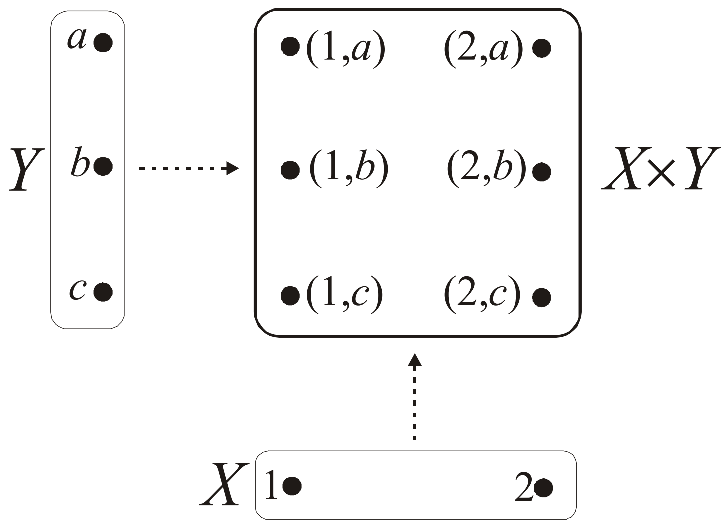
- V prípade, že $X = Y$, potom $X \times X = X^2$.
- Ak aspoň jedna z množín X alebo Y je prázdna množina, potom aj karteziánsky súčin $X \times Y$ je prázdny.
- Ak množiny X a Y sú obe neprázdne, potom $X \times Y = Y \times X$ vtedy a len vtedy, ak $X = Y$

Znázornenie kartézianského súčinu pomocou Vennových diagramov

Nech $X=\{1,2\}$ a $Y=\{a,b,c\}$, potom

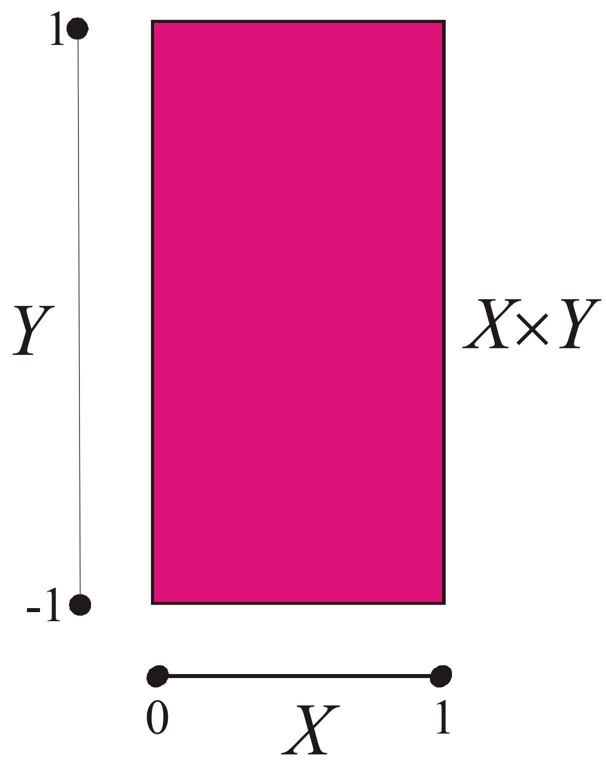
$$X\times Y=\{(1,a),(1,b),\{1,c\},(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

reprezentácia tohto súčinu pomocou Vennovho diagramu je znázornená



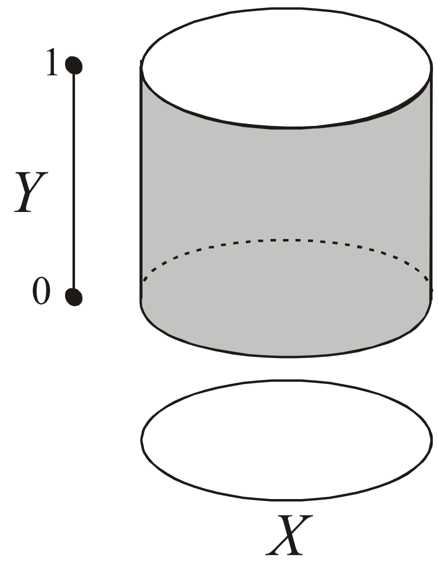
Príklad

Nech $X = [0,1]$ a $Y = [-1,1]$ sú uzavreté intervaly reálnych čísel, karteziánsky súčin týchto dvoch intervalov poskytuje obdĺžnikovú oblasť reálnych čísel



Príklad

Nech $X=\{(x,y); x^2+y^2=1\}$ je kružnica o polomere 1 so stredom v centre súradnicového systému a $Y=[0,1]$ je jednotková úsečka, karteziánsky súčin týchto dvoch oblastí produkuje povrch valca dĺžky 1 a s polomerom 1



Koncepcia usporiadanej dvojice môže byť zovšeobecnená na usporiadanú n-ticu, pomocou karteziánskeho súčinu n množín.

$$\left(\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)\right) \equiv \forall i\left(x_i = x_i'\right)$$

Definícia. Množina $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ sa nazýva karteziánsky súčin n množín X_1, X_2, ..., X_n vtedy a len vtedy, ak

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \left\{\left(x_1, x \ , \ldots, x_n\right); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\right\}$$

Ak všetky množiny z karteziánskeho súčiny sa rovnajú množine X, potom výraz $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ je zjednodušený na X^n. Kartézianský súčin môžeme taktiež vyjadriť symbolicky takto

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$$

Príklad

Nech $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$ a $C = \{\alpha,\beta\}$, potom karteziánsky súčin týchto množín má tvar

$$A \times B \times C = \{(1,a,\alpha),(1,a,\beta),(1,b,\alpha),(1,b,\beta),(2,a,\alpha),(2,a,\beta),(2,b,\alpha),(2,b,\beta)\}$$

Príklad

Nech $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = R$, kde R je množina reálnych čísel. Potom R^n je množina obsahujúca n-tice reálnych čísel

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

a môže byť interperetovaná ako ***n-rozmerný lineárny priestor***.

Veta. Mohutnosť karteziánskeho súčinu $X \times Y$ dvoch množín X a Y s konečnou mohutnosťou, $|X| = m$ a $|Y| = n$, sa rovná súčinu mohutností jej zložiek

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n$$

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

Veta. Karteziánsky súčin množiny A s prienikom alebo zjednotením dvoch množín X a Y vyhovuje podmienkam distributívnosti

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$$

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A)$$

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$$

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$$

Dôkaz vlastnosti $A\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(A\times Y)$

Nech $(a,x)\in A\times(X\cap Y)$, potom $a\in A$ a $x\in(X\cap Y)$. Z posledného výrazu vyplýva, že x sa súčasne vyskytuje v X a taktiež aj v Y. Potom $(a,x)\in A\times X$ a taktiež aj $(a,x)\in A\times Y$, čiže $(a,x)\in(A\times X)\cap(A\times Y)$, čo bolo potrebné dokázať.

Príklad

Nech $A=\{a,b\}$, $X=\{x,y\}$ a $Y=\{y,z\}$.

$$\begin{aligned}A\times(X\cap Y)&=\{a,b\}\times(\{x,y\}\cap\{y,z\})=\{a,b\}\times\{y\}\\&=\{(a,y),(b,y)\}\end{aligned}$$

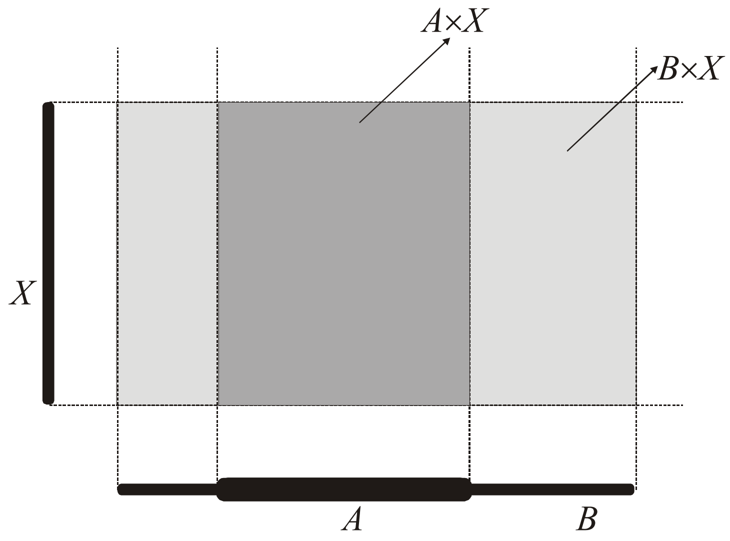
$$\begin{aligned}(A\times X)\cap(A\times Y)&=(\{a,b\}\times\{x,y\})\cap(\{a,b\}\times\{y,z\})\\&=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y)\}\cap\{(a,y),(a,z),(b,y),(b,z)\}\\&=\{(a,y),(b,y)\}\end{aligned}$$

Veta. Pre ľubovolné tri množiny A, B a X platí implikácia

$$(A\subseteq B)\Rightarrow\big((A\times X)\subseteq(A\times X)\big)$$

Ak X je neprázdna množina, potom

$$\big((A\times X)\subseteq(A\times X)\big)\Rightarrow(A\subseteq B)$$



Množina ako dátová štruktúra v informatike

- V mnohých aplikáciách množinová dátová štruktúra podstatne uľahčuje implementáciu algoritmov, ktoré sú založené na formalizme teórie množín. Ako príklad takýchto algoritmov môže slúžiť teória grafov, ktorej jednoduchá a súčasne aj elegantná teória je založená na množinách.

- Základný prístup k implementácii dátovej štruktúry množiny je jej charakteristická binárna funkcia, ktorá môže byť reprezentovaná binárnym vektorom. Maximálna dĺžka tohto vektora (napr. $2^8 = 256$) špecifikuje maximálnu mohutnosť implementovanej množiny.

Uvažujme binárne vektory dĺžky $2^3 = 8$, ktoré určujú množiny v rámci univerzálnej množiny $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Binárny vektor `(11001100)` špecifikuje množinu $A=\{1,2,5,6\}$.

Ak binárny vektor obsahuje len nuly, potom množina $A = \emptyset$; ak binárny vektor obsahuje len jednotky, potom $A = U$.

Operácia zjednotenia množín A a B, $C = A \cup B$, ktoré sú reprezentované binárnymi vektormi

$$\mu_A = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right),\ \mu_B = \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$$

je realizovaná pomocou binárnej operácie ´disjunkcie´

$$\mu_{A \cup B} = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right) = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \vee \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$$

kde

$$c_i = max\left\{a_i, b_i\right\}$$

Operácia prieniku množín A a B, $C = A \cap B$, je realizovaná pomocou binárnej operácie ´konjunkcie´

$$\mu_{A \cap B} = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right) = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \wedge \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$$

kde

$$c_i = min\left\{a_i, b_i\right\}$$

Operácia rozdielu množín A a B, $C = A - B$, je realizovaná pomocou binárnej operácie ´rozdielu´

$$\mu_{A-B} = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right) = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) - \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$$

kde

$$c_i = min\left\{a_i, 1 - b_i\right\}$$

Operácia komplementu množiny A, $C = \overline{A}$, je realizovaná pomocou binárnej operácie ´komplementu´

$$\mu_{\overline{A}} = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right) = \left(1 - a_1, 1 - a_2, ..., 1 - a_n\right)$$

Príklad

Definujme dva binárne vektory dĺžky 8 (t. j. univerzum U={1,2,3,4,5,6,7,8})

$$\mu_A = (11001111) \Leftrightarrow A = \{1,2,5,6,7,8\}$$

$$\mu_B = (00011001) \Leftrightarrow B = \{4,5,8\}$$

Zjednotenie $A \cup B$ je určené pomocou binárnej operácie ´disjunkcie´

$$(11001111) \vee (00011001) = (11011111)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{1,2,4,5,6,7,8\}$.

Prienik $A \cap B$ je určený pomocou binárnej operácie ´konjunkcie´

$$(11001111) \wedge (00011001) = (00001011)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{5,7,8\}$.

Rozdiel *A–B* je určené pomocou binárnej operácie ´rozdiel´

$$(11001111) - (00011001) = (11000110)$$

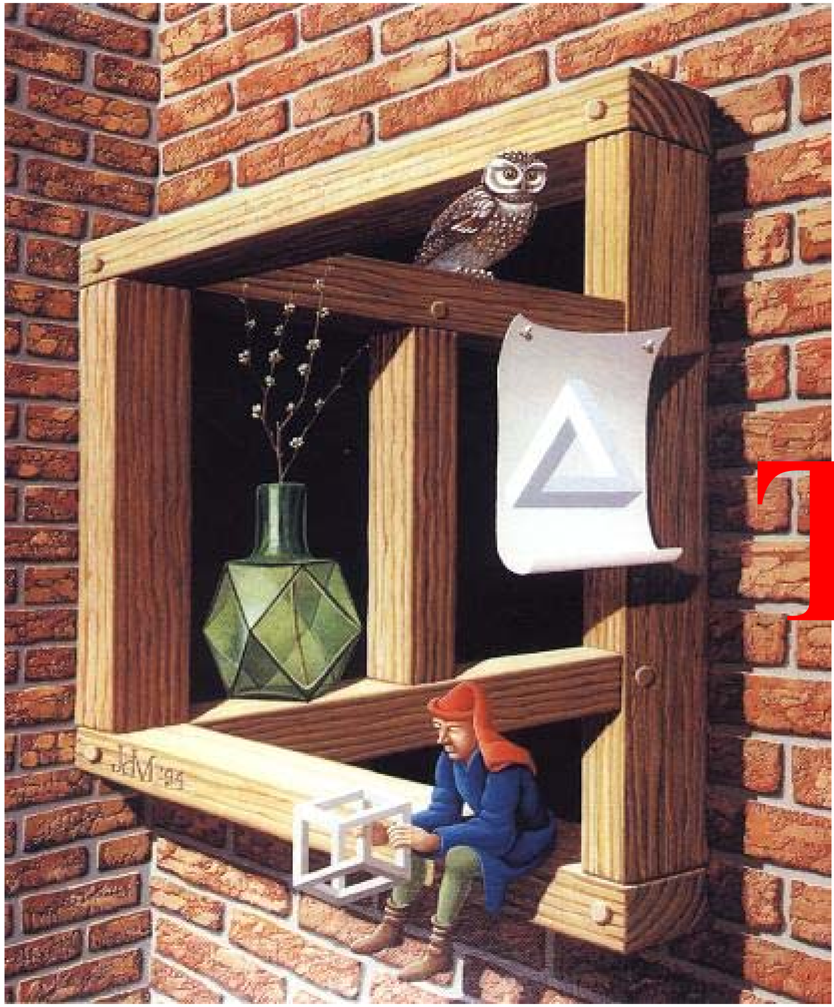
Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{1,2,6,7\}$.

Komplementy $\overline{A}$ a $\overline{B}$ sú vykonané pomocou operácie negácie pre binárne vektory

$$\mu_{\overline{A}} = \neg(11001111) = (00110000)$$

$$\mu_{\overline{B}} = \neg(00011001) = (11100110)$$

Výsledné vektory reprezentujú množiny $C = \overline{A} = \{3,4\}$ a $C = \overline{B} = \{1,2,3,6,7\}$.


Jos de Mey (1927 - 2007)

The End