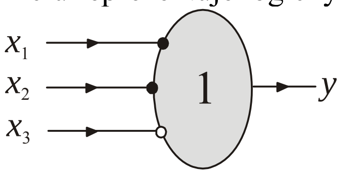
Písomná skúška z Matematickej logiky (8. 6. 2010 o 13.30)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Ako je definovaná formula?
(b) Aký je rozdiel medzi tautológiou a splniteľnou formulou?
(c) Ako sa interpretuje výraz $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$?
(d) Ako sa interpretuje výraz $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models \varphi$?
(e) Kedy je teória konzistentná?

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či formula α je sémantickým dôsledkom *T*, $T \models \alpha$, $T = \{q \Rightarrow (r \vee \neg p), p \Rightarrow q, \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg r), t \Rightarrow p\}$, $\alpha = r$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Nie všetky ryby sa množia ikrami.
(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé párne číslo nie je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Každý dym je s ohňom.

Príklad 5. Odôvodnite prečo formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$,
(b) $\forall x (P(x) \wedge \neg P(x))$,
(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,
(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$.

Príklad 6. Ako sú definované tautológie pre modálne spojky $w \models \Box\varphi$ a $w \models \Diamond\varphi$.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy pomocou predikátovej logiky:

(a)	(b)
Každý študent je maturant	niektorí študenti sú kominári
Niektorí nematuranti sú analfabeti	niektorí kominári sú maturanti
?	?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(b) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formuly sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $w \vDash (\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi))$.

Príklad 11. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. ***Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník***. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie príkladov

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Ako je definovaná formula?
(b) Aký je rozdiel medzi tautológiou a splniteľnou formulou?
(f) Ako sa interpretuje výraz $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$?
(g) Ako sa interpretuje výraz $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models \varphi$?
(h) Kedy je teória konzistentná?

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny {p,q,q,…} a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

premenná::=p | q | r ...
formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

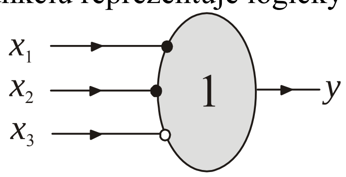
(b) Pre tautológiu každá interpretácia (špecifikácia) premenných poskytuje pravdivostnú hodnotu formule ´pravda´, pre splniteľnú formulu existuje aspoň jedna interpretácia premenných, ktoré poskytujú hodnotu ´pravdu´. Môžeme povedať, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnej formuly.

(c)Formula φ sa nazýva ***logický dôsledok*** množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

(d) Formula φ sa nazýva ***tautologický dôsledok*** teórie T (čo označíme $T \models \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

(e) Teória $T=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sa nazýva konzistentná vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia τ výrokových premenných, pre ktorú všetky formule z teórie T sú pravdivé, $val_\tau(\varphi_i)=1$, pre i = 1, 2,..., n.

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



$$y = s\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1\right)$$

#	x_1	x_2	x_3	$s\left(x_1 + x_2 - x_3 - 1\right)$	y
1	0	0	0	s(-1)	0
2	0	0	1	s(-2)	0
3	0	1	0	s(0)	1
4	0	1	1	s(-1)	0
5	1	0	0	s(0)	1
6	1	0	1	s(-1)	0
7	1	1	0	s(1)	1
8	1	1	1	s(0)	1

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3\right) \vee$$
$$\left(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right)$$

Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T, $T \vDash \alpha$,
$T = \left\{q \Rightarrow \left(r \vee \neg p\right), p \Rightarrow q, \neg t \Rightarrow \left(t \wedge \neg r\right), t \Rightarrow p\right\}$, $\alpha = r$

Ak $T = \left\{C_1, C_2, \ldots, C_n\right\}$, potom vlastnosť $T \vDash \alpha$ je ekvivalentná platnosti implikácie

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \Rightarrow \alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \neg\alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T \vDash \alpha$.

$$\left(q \Rightarrow \left(r \vee \neg p\right)\right) \wedge \left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(\neg t \Rightarrow \left(t \wedge \neg r\right)\right) \wedge \left(t \Rightarrow p\right) \wedge \neg r$$

Prepíšeme ju do tvaru NKF

$$\left(\neg q \vee \left(r \vee \neg p\right)\right) \wedge \left(\neg p \vee q\right) \wedge \underbrace{\left(t \vee \left(t \wedge \neg r\right)\right)}_{t \wedge \left(t \vee \neg r\right)} \wedge \left(\neg t \vee p\right) \wedge \neg r$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idenpotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$\left(\neg q \vee r \vee \neg p\right) \wedge \left(\neg p \vee q\right) \wedge t \wedge \left(t \vee \neg r\right) \wedge \left(\neg t \vee p\right) \wedge \neg r$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee r \vee \neg p$	$t \vee \neg r$	t	$\neg r$	$\neg t \vee p$	7	8				
r		1	0		0		$\neg q \vee t \vee \neg p$	$\neg q \vee \neg p$	9	10		
q	1						0	0	$\neg p \vee t$	$\neg p$	11	
p						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	$\square$

Záver: Platí sémantické vyplývanie

$$\{q \Rightarrow (r \vee \neg p), p \Rightarrow q, \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg r), t \Rightarrow p\} \vDash r$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Nie všetky ryby sa množia ikrami.

$\neg\forall x\big(ryba(x) \Rightarrow mnoz\_ikr(x)\big)$

$\forall x\big(ryba(x) \Rightarrow mnoz\_ikr(x)\big)$

Každá ryba sa množí ikrami.

(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.

$\exists x\big(sport(x) \wedge fyz\_kond(x)\big)$

$\forall x\big(\neg sport(x) \vee \neg fyz\_kond(x)\big) \equiv \forall x\big(sport(x) \Rightarrow \neg fyz\_kond(x)\big)$

Každý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé párne číslo nie je prvočíslo.

$\forall x\big(parne(x) \Rightarrow \neg prime(x)\big) \equiv \forall x\big(\neg parne(x) \vee \neg prime(x)\big)$

$\exists x\big(parne(x) \wedge prime(x)\big)$

Existuje párne číslo, ktoré je prvočíslo.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.

$\forall x\big(navst\_UK(x) \Rightarrow hovori\_angl(x)\big)$

$\exists x\big(navst\_UK(x) \wedge \neg hovori\_angl(x)\big)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Každý dym je s ohňom.

$\forall x\big(dym(x) \Rightarrow ohen(x)\big) \equiv \forall x\big(\neg dym(x) \vee ohen(x)\big)$

$\exists x\big(dym(x) \wedge \neg ohen(x)\big)$

Existuje dym bez ohňa.

Príklad 5. Odôvodnite prečo formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $\big(\exists x\, P(x)\big) \vee \big(\exists x\, \neg P(x)\big)$,

Pomocou formule z príkladu 7.2 $\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \big(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\big)$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

$$\exists x \underbrace{\big(P(x) \vee \neg P(x)\big)}_{1} \equiv 1$$

(b) $\forall x\big(P(x) \wedge \neg P(x)\big)$, táto formula je automatický kontradikcia, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\big(P(x) \wedge \neg P(x)\big) \equiv 1$ pre každé indivíduum x je nepravdivá.

(c) $\left(\exists x\, P(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x)\right)$, navrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo". Ľavá časť implikácie $\exists x\, P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne". Pravá časť implikácie $\forall x\, P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne". To znamená, že celková implikácia ($1 \Rightarrow 0$) je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo").

(d) $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \left(\exists x\, \neg P(x)\right)$, túto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora ($\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$) prepísať do ekvivalentného tvaru $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \neg\left(\forall x\, P(x)\right)$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p / \forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 6. Ako sú definované tautológie pre modálne spojky $w \models \Box\varphi$ a $w \models \Diamond\varphi$.

(a) $\left(w \models \Box\varphi\right) =_{def} \forall w' \in \Gamma(w) : \left(w' \models \varphi\right)$

Formula $w \models \Box\varphi$, ktorá sa číta, že formula φ je nutne pravdivá vo svete w práve vtedy, ak formula φ je pravdivá v každom svete w´, do ktorého sa môžeme dostať zo sveta w.

(b) $\left(w \models \Diamond\varphi\right) =_{def} \exists w' \in \Gamma(w) : \left(w' \models \varphi\right)$

Formula $w \models \Diamond\varphi$, ktorá sa číta, že formula φ je možne pravdivá vo svete w práve vtedy, ak formula φ je pravdivá v niektorom svete w´, do ktorého sa môžeme dostať zo sveta w.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy pomocou predikátovej logiky:

(a)

Každý študent je maturant

Niektorí nematuranti sú analfabeti

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

$\varphi_1 : \forall x \left(st(x) \Rightarrow mat(x)\right) \Rightarrow \left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$

$\varphi_2 : \exists x \left(\neg mat(x) \wedge analf(x)\right) \Rightarrow \left(\neg mat(t) \wedge analf(t)\right)$

$\left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$

$\left(\neg mat(t) \wedge analf(t)\right)$

$\neg mat(t)$

$analf(t)$

$\neg st(t)$

$\neg st(t) \wedge analf(t)$

$\exists x \left(\neg st(x) \wedge analf(x)\right)$

$\exists x\left(\neg st(x)\wedge analf(x)\right)$

Záver zo sylogizmu je: „existuje analfabet, ktorý nie je študent“

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

$\varphi_1 : \exists x\left(st(x)\wedge kom(x)\right)\Rightarrow\left(st(a)\wedge kom(a)\right)$
$\varphi_2 : \exists x\left(kom(x)\wedge mat(x)\right)\Rightarrow\left(kom(b)\wedge mat(b)\right)$

Vo všeobecnosti platí $a\neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$\varphi_1 : \exists x\left(fyz(x)\wedge astr(x)\right)\Rightarrow\left(fyz(a)\wedge astr(a)\right)$
$\varphi_2 : \forall x\left(chem(x)\Rightarrow\neg fyz(x)\right)\Rightarrow\left(chem(a)\Rightarrow\neg fyz(a)\right)$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *fyz*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg$*chem*(*a*). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a)\wedge\neg chem(a)\Rightarrow\exists x\, astr(x)\wedge\neg chem(x)$$

alebo, „niektorý astronómovia nie sú chemici“.

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$\varphi_1 : \forall x\left(st(x)\Rightarrow\neg analf(x)\right)\Rightarrow\left(st(a)\Rightarrow\neg analf(a)\right)\Rightarrow\left(analf(a)\Rightarrow\neg st(a)\right)$
$\varphi_2 : \exists x\left(analf(x)\wedge vce(x)\right)\Rightarrow\left(analf(a)\wedge vce(a)\right)$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(*a*) a *vce*(*a*) . Použitím *analf*(*a*) s prvou premisou dostaneme $\neg$*st*(a) , spojením s *vce*(*a*) dostaneme

$$vce(a)\wedge\neg st(a)\Rightarrow\exists x\, vce(x)\wedge\neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje analfabet): „niektorý včelár nie je študent“

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

1.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\neg q$	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
4.	$\neg p$	(modus tollens na 1. a 2.)
6.	$\neg q \Rightarrow \neg p$	(deaktivácia 2.)
7.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(deaktivácia 1.)

(b) $\forall x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$

1.	$\forall x \varphi(x)$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\varphi(t)$	odstránenie univerz. kvantifikátora, $\forall t \in U$
3.	$\varphi(a)$	(zámena t za a, $\exists a \in U$)
4.	$\exists y \varphi(y)$	(zavedenie existenč. kvantifikátora)
7.	$\forall x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$	(deaktivácia 1.)

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1
½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $w \vDash (\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi))$.

$$w \nvDash (\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi))$$

$$w \vDash \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$$
$$w \nvDash \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$$

$$w \nvDash (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

$$w \vDash \Box\varphi$$
$$w \nvDash \Box\psi$$

$$w' \vDash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \forall w' \in \Gamma(w)$$

$$w'' \vDash \varphi \qquad \forall w'' \in \Gamma(w)$$
$$w''' \nvDash \psi \qquad \exists w''' \in \Gamma(w)$$

$w' = w''$ $\qquad$ $w' = w'''$

$w' \nvDash \varphi$ $\qquad$ $w' \vDash \psi$

X $\qquad$ X

Príklad 11.

$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)) = 1$

$p \leq (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

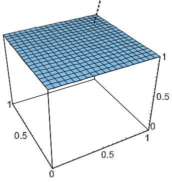
$(p \Rightarrow q) \leq q$ $\qquad$ $(p \Rightarrow q) > q$

$p \leq 1$ $\qquad$ $p \leq 1 - (p \Rightarrow q) + q$

$p \leq q$ $\qquad$ $p > q$

$p \leq 1 - 1 + q$ $\qquad$ $p \leq 1 - (1 - p + q) + q$

$p \leq q$ $\qquad$ $p \leq p$



Študovaná formula je pravdivá pre všetky hodnoty *p* a *q*.