1. kontrolná písomka z ADM, skupina B
(konaná dňa 16. 3. 2006)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že $2^n > n^2 + n$ keď n je prirodzené číslo väčšie ako 4 (3 body)

2. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov vlastnosť

$$c \cdot \left(max\{a,b\} + min\{a,b\} \right) = c \cdot (a+b) \quad \text{(3 body)}$$

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

(a) $X - Y = Y - X$ (1 bod)

(b) $X \cap Y = Y \cap X$ (1 bod)

(c) $A \cup B = \overline{A}$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(3,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ (1 bod)

5. príklad. Nájdite koeficient x^6y^2 v rozvoji $(2x + y)^8$. (3 body)

Prémiový príklad. Dokážte, že rozdiel množín nie je asociatívny. (2 body).

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že $2^n > n^2 + n$ keď n je prirodzené číslo väčšie ako 4 (3 body)

(1) Indukčný predpoklad $P(n) = 2^n > n^2 + n$

(2) Platnosť pre n=5 $P(5) = 2^5 > 5^2 + 5$ $(32 > 25 + 5)$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + n) > (n+1)^2 + (n+1)$$

$$2(n^2 + n) > n^2 + 2n + 1 + n + 1$$

$$n^2 + n + n^2 + n > n^2 + n + 2n + 1 + 1$$

$$n^2 + n > 2n + 2$$

$$n^2 > 2n \quad \text{a} \quad n > 2 \quad \text{pre} \quad n > 4$$

2. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov vlastnosť

$$c \cdot (max\{a,b\} + min\{a,b\}) = c \cdot (a + b) \quad \text{(3 body)}$$

(1) c=0, a, b

$$0=0$$

(2) $c \neq 0$, a< b

$$c \cdot (max\{a,b\} + min\{a,b\}) = c \cdot (a + b)$$

$$(max\{a,b\} + min\{a,b\}) = (a + b)$$

$$(b + a) = (a + b)$$

(3) $c \neq 0$, a= b

$$c \cdot (max\{a,b\} + min\{a,b\}) = c \cdot (a + b)$$

$$(max\{a,b\} + min\{a,b\}) = (a + b)$$

$$(b + a) = (a + b)$$

(4) $c \neq 0$, a> b

$$c \cdot (max\{a,b\} + min\{a,b\}) = c \cdot (a + b)$$

$$(max\{a,b\} + min\{a,b\}) = (a + b)$$

$$(a + b) = (a + b)$$

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

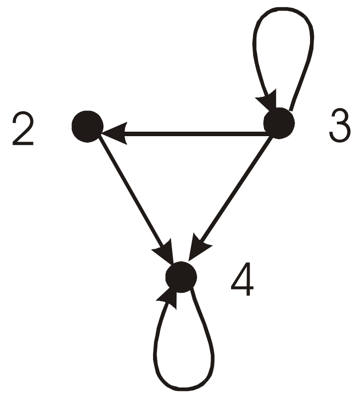
(a) $X - Y = Y - X$ (1 bod) X=Y

(b) $X \cap Y = Y \cap X$ (1 bod) nič nevyplýva

(c) $A \cup B = \overline{A}$ (1 bod) A=$\emptyset$, $B = \overline{A}$

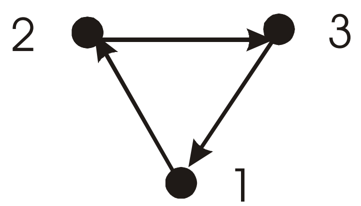
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(3,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ (1 bod)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient x^6y^2 v rozvoji $(2x+y)^8$. (3 body)

$$(2x+y)^8=\sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}(2x)^{8-j}y^j=\ldots+\binom{8}{2}(2x)^6y^2+\ldots$$

Koeficient pri x^6y^2 je binomiálny koeficient vynásobený 6 mocninou 2

$(8/2)2^6=8!/(6!\,2!)2^6=28\cdot 64=1792$

Prémiový príklad. Dokážte, že rozdiel množín nie je asociatívny. (2 body).

Majme množiny A,B,C, máme dokázať, že obecne neplatí $(A-B)-C=A-(B-C)$.

Stačí ukázať, že neplatí pre jeden prípad, napr. $A=\{1,2\},B=\{1\},C=\{2\}$, potom po dosadení $\varnothing\neq\{1\}$.