Boolove funkcie a Boolova algebra výrokovej logiky

Boolova funkcia

$$\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \quad \text{alebo} \quad y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Príklad.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\left((x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \Rightarrow x_4)\right) \Rightarrow x_1\right)$$

Táto „výroková funkcia“ ma $16=2^4$ rôznych špecifikácií premenný. Použitím tabuľkovej metódy môžeme vypočítať pravdivostné (funkčné) hodnoty tejto funkcie

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$
1	0	0	0	0	0
....					
16	1	1	1	1	1

Unárne Boolove funkcie

#	x	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1

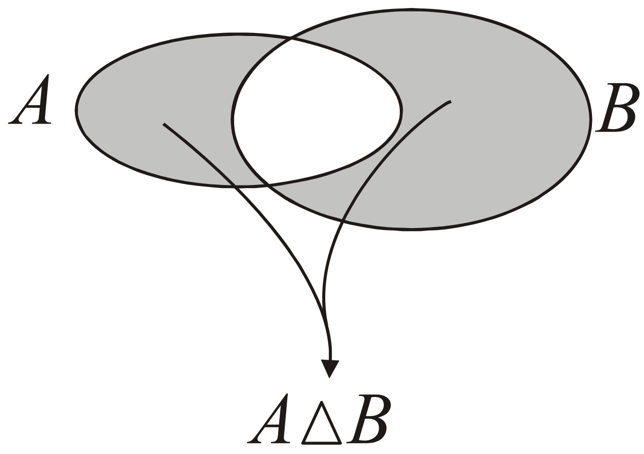
Binárne Boolove funkcie

#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
log. spojky				$\wedge$		x_1		x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$		$\neg x_1$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	

Nové binárne spojky

(1) Funkcia f_7, nazývaná *exkluzívne alebo* (XOR), ktorá aj keď v klasickej výrokovej logike nemá svoju obdobu, často sa využíva v elektronických aplikáciách teórie Boolových funkcií. Jej ilustračný príklad je množinová operácia symetrického rozdielu.

#	x_1	x_2	$\oplus$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0



$$A \triangle B = \left\{ x; \left(x \in A \right) \oplus \left(x \in B \right) \right\}$$

(2) Funkcia f_9 , nazývaná *Peircov symbol* (negácia disjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non OR, NOR) má podobnú vlastnosť ako Shefferov symbol, pomocou tejto spojky sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Podobne ako pre Shefferov symbol tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná:

(a) Negácia $\neg p$ je ekvivalentná $p \downarrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q$ je ekvivalentná $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q$ je ekvivalentná $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

#	x_1	x_2	$\downarrow$
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	0

(3) Funkcia f_{15}, nazývaná *Shefferov symbol* (negácia konjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non AND, NAND) je zaujímavá tým, že pomocou nej sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Môžeme konštatovať, že táto netradičná logická spojka tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná. Štandardné logické spojky sú pomocou Shefferovho symbolu vyjadrené takto:

(a) Negácia $\neg p$ je ekvivalentná $p \uparrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q$ je ekvivalentná $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q$ je ekvivalentná $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.

#	x_1	x_2	$\uparrow$
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Definícia.

1. ***Literál*** je výroková premenná alebo jej negácia, t. j. $l = p$ alebo $l = \neg p$, dva literály l a l' sa nazývajú komplementárne, ak sú tvorené výrokovou premennou a jej negáciou, t. j. $l = p$ a $l' = \neg p$.
2. ***Konjunktívna klauzula*** je vytvorená pomocou konjunkcie literálov ($l_1 \wedge l_2 \wedge ...$). Podobne, ***disjunktívna klauzula*** je vytvorené pomocou disjunkcie literálov ($l_1' \vee l_2' \vee ...$).
3. ***Konjunktívna normálna forma (KNF)*** je tvorená pomocou konjunkcie disjunktívnych klauzúl ($(l_1 \vee l_2 \vee ...) \wedge (l_1' \vee l_2' \vee ...) \wedge ...$). Podobne, ***disjunktívna normálna forma (DNF)*** je tvorená pomocou disjunkcie konjunktívnych klauzúl ($(l_1 \wedge l_2 \wedge ...) \vee (l_1' \wedge l_2' \wedge ...) \vee ...$).
4. Hovoríme, že formuly $\varphi = \varphi(p_1, p_2, ..., p_n)$ a $\psi = \psi(p_1, p_2, ..., p_n)$ sú (logicky) ***ekvivalentné***, čo zapisujeme $\varphi \sim \psi$, vtedy a len vtedy, ak ich pravdivostné hodnoty sú rovnaké pre každdú interpretáciu $\tau \in \{0,1\}^n$
$$(\varphi \sim \psi) =_{def} (\forall \tau)\left(val_\tau(\varphi) = val_\tau(\psi)\right)$$

Veta 1.

(1) Pre každú formulu φ ***existuje*** ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***disjunktívnej normálnej formy*** $\varphi_{DNF} \sim \varphi$

$$\forall(\varphi \in L)\exists(\varphi_{DNF} \in L)(\varphi \sim \varphi_{DNF})$$

(2) Pre každú formulu φ ***existuje*** ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***konjunktívnej normálnej formy*** $\varphi_{KNF} \sim \varphi$

$$\forall(\varphi \in L)\exists(\varphi_{KNF} \in L)(\varphi \sim \varphi_{KNF})$$

Veta 2.

(1) Formula φ je ***kontradikcia*** práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

(2) Formula φ je tautológiu práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

Prvý alternatívny dôkaz vety 1

Upriamime našu pozornosť najprv na konštrukciu ekvivalentnej formuly v disjunktívnom tvare. Budeme uvažovať len tie interpretácie premenných $\boldsymbol{\tau}$, ktoré vytvárajú jednotkovú pravdivostnú hodnotu formuly φ, t.j. pre dané $\boldsymbol{\tau}$ platí $val_{\tau}(\varphi)=1$. Podobne pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$x_i^{(\tau)}=\begin{cases} x_i & \left(\text{ak } val_{\tau}(x_i)=1\right) \\ \neg x_i & \left(\text{ak } val_{\tau}(x_i)=0\right) \end{cases}$$

Konjunkcia týchto premenných môže byť chápaná ako pomocná Boolova funkcia

$$\psi_{\tau}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^{(\tau)}\wedge x_2^{(\tau)}\wedge\ldots\wedge x_n^{(\tau)}$$

Táto konjunkcia je pravdivá len pre také hodnoty premenných, ktoré sú totožné s binárnymi hodnotami interpretácie $\boldsymbol{\tau}$, pre všetky ostatné hodnoty premenných je funkčná pravdivostná hodnota nulová.

Potom disjunktívna forma funkcie φ_{DNF}, ktorá je ekvivalentná formule φ, $\varphi_{DNF} \equiv \varphi$, má tvar

$$\varphi_{DNF} = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)}$$

kde disjunkcia beží cez všetky τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi) = 1$.

Analogickým spôsobom zostrojíme aj konjunktívnu formu φ_{KNF} formuly φ, kde $\varphi_{KNF} \sim \varphi$. V tomto prípade budeme uvažovať len také interpretácie $\boldsymbol{\tau}$, ktoré majú nulovú pravdivostnú funkčnú hodnotu, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi) = 0$. Definujme pre dané $\boldsymbol{\tau}$ nové funkčné premenné (literály)

$$\tilde{x}_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & \left(\text{ak } val_\tau(x_i) = 0\right) \\ \neg x_i & \left(\text{ak } val_\tau(x_i) = 1\right) \end{cases}$$

Disjunkcia týchto premenných tvorí pomocnú Boolovu funkciu

$$\tilde{\psi}_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)}$$

Táto disjunkcia je nepravdivá len pre také hodnoty premenných, ktoré sú totožné s binárnymi hodnotami interpretácie $\boldsymbol{\tau}$, pre všetky ostatné hodnoty premenných je funkčná pravdivostná hodnota jednotková

Konjunktívny tvar formuly φ je

$$\varphi_{KNF} = \bigwedge_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=0)}} \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)}$$

kde konjunkcia beží cez všetky špecifikácie τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi) = 0$.

To, akým spôsobom zostrojíme Boolovu funkciu, či v disjunktívnej alebo konjunktívnej forme, je určené počtom jednotkových resp. nulových funkčných hodnôt. Tak napr. ak v tabuľke sú dominantné nulové (jednotkové) funkčné hodnoty, potom je výhodné použiť konjunktívnu (disjunktívnu) normálnu formu, týmto výberom sa minimalizuje rozsah zostrojovanej formy. V prípade, keď tabuľka obsahuje približne rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt, konštrukcia Boolovej funkcie je približne rovnako obtiažna v oboch formách.

Príklad

#	x_1	x_2	x_3	α	β
τ_1	0	0	0	0	1
τ_2	0	0	1	0	1
τ_3	0	1	0	1	0
τ_4	0	1	1	0	1
τ_5	1	0	0	0	1
τ_6	1	0	1	1	1
τ_7	1	1	0	0	0
τ_8	1	1	1	0	1

$$\alpha = \varphi_{NDF}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \underbrace{\left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3\right)}_{\tau_3} \vee \underbrace{\left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right)}_{\tau_6}$$

$$\beta = \varphi'_{NDF}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \underbrace{\left(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3\right)}_{\tau_1} \vee \underbrace{\left(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right)}_{\tau_2} \vee \underbrace{\left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right)}_{\tau_4} \vee$$

$$\underbrace{\left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3\right)}_{\tau_5} \vee \underbrace{\left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right)}_{\tau_6} \vee \underbrace{\left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right)}_{\tau_8}$$

Analogickým spôsobom zostrojíme aj konjunktívnu formu formuly φ.

$$\alpha = \varphi_{NKF}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \underbrace{\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)}_{\tau_1} \wedge \underbrace{\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3\right)}_{\tau_2} \wedge \underbrace{\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right)}_{\tau_4} \wedge$$

$$\underbrace{\left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right)}_{\tau_5} \wedge \underbrace{\left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)}_{\tau_7} \wedge \underbrace{\left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right)}_{\tau_8}$$

$$\beta = \varphi'_{NDF}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \underbrace{\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)}_{\tau_3} \wedge \underbrace{\left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)}_{\tau_7}$$

Druhý alternatívny dôkaz vety 1

Metóda dôkazu spočíva v tom, že formulu φ postupne prepisujeme do tvaru φ_{DNF} pomocou známych ekvivalencií výrokovej logiky, akými sú De Morganove zákony a distributívne zákony medzi disjunkciou a konjunkciou. Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom k syntaktickému stromu formuly φ. V tabuľke sú uvedené základné formuly pre prepis do tvaru DNF.

Tabuľka. Elementárne transformácia prepisu formuly φ na φ_{DNF}.

#	Pôvodná formula		Transformovaná formula
1	$(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge (\beta)$
2	$(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \vee (\beta)$
3	$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee (\beta)$
5	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee \neg(\beta)$
6	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
7	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
9	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
10	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Príklad

Vykonajte transformáciu formuly

$$\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$$

do tvaru DNF pomocou elementárnych transformácií z tabuľky. Tento prepis bude vykonaný pre názornosť ako postupnosť elementárnych krokov:

Krok 1: Centrálna konjunkcia (tvoriaca koreň príslušného syntaktického stromu) v φ je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 1

$$\varphi = \left(\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\alpha} \wedge \underbrace{(r \vee \neg(r \vee \neg p))}_{\beta} \right)$$

$$\downarrow$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$$

Krok 2: Centrálna spojka ekvivalencie na ľavej strane je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 4 a centrálna spojka disjunkcie pravej strane je prepísaná pomocou 2

$$\left(\underbrace{(p)}_{\alpha}\Rightarrow\underbrace{(q)}_{\beta}\right)\wedge\left(\underbrace{(r)}_{\gamma}\vee\underbrace{(\neg(r\vee\neg p))}_{\delta}\right)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg(p)\vee(q))\wedge((r)\vee(\neg(r)\wedge\neg(\neg p)))$$

$$\downarrow$$

$$(\neg p\vee q)\wedge((r)\vee(\neg r\wedge p))$$

Krok 3. Centrálna spojka konjunkcie je prepísané (roznásobená) pomocou 9

$$\underbrace{(\neg p \vee q)}_{\alpha} \wedge \left(\underbrace{(r)}_{\beta} \vee \underbrace{(\neg r \wedge p)}_{\gamma}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\underbrace{(\neg p \vee q)}_{\alpha} \wedge \underbrace{r}_{\beta}\right) \vee \left(\underbrace{(\neg p \vee q)}_{\alpha} \vee \underbrace{(\neg r \wedge p)}_{\gamma}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)\right) \vee \left(\underbrace{(\neg p \wedge q \wedge \neg r)}_{\neg p \wedge q \wedge \neg r} \vee \cancel{\underbrace{(\neg p \wedge q \wedge p)}_{0}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)}_{\varphi_{DNF}}$$

To znamená, že výsledná formula φ_{DNF} je určená poslednou formulou z predchádzajúcej schémy formúl

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Ukázali, že každá formula výrokovej logiky môže byť prepísaná do ekvivalentného DNF tvaru pomocou postupnosti elementárnych transformácií.

Spôsob dôkazu vety 1 môže byť charakterizovaný ako úplná indukcia vzhľadom k syntaktickému stromu danej formuly. Idúc zhora nadol, vždy pomocou vhodnej elementárnej transformácie vykonáme vhodný prepis formuly tak, aby bol bližšie k tvaru DNF formuly. Poznamenajme, že analogický dôkaz môže byť vykonaný aj pre konštrukciu KNF formuly.

Podľa vety 1 ku každej výrokovej formule φ existuje jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi \sim \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \sim \varphi_{KNF}$. V mnohých prípadoch, tento tvar formuly je zbytočne zložitý, použitím jednoduchý vlastnosti konjunkcie a disjunkcie (napr. $p \wedge p \equiv p$ a $p \wedge 1 \equiv p$) môžeme formulu podstatne zjednodušiť do ekvivalentného tvaru DNF alebo KNF. Podľa vety 2 formula φ je kontradikcia (tautológia) práve vtedy, ak jej DNF (KNF) tvar obsahuje v každej klauzule dvojicu komplementárnych literálov. Potom taktiež formula φ je *splniteľná* práve vtedy, ak jej DNF alebo KNF tvar obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad

DNF formula

$$\varphi = \left(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4\right) \vee \left(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_2 \wedge \neg p_4\right)$$

nie je kontradikcia, je len splniteľná, prvý konjunktívny člen neobsahuje komplementárne literály. Pre interpretáciu $\tau = \left(p_1/0, p_2/0, p_3/1, p_4/1\right)$ pravdivostná hodnota formule φ je špecifikovaná vzťahom $v_\tau(\varphi) = 1$. DNF formula $\varphi' = \left(\neg p_3 \wedge p_3 \wedge p_4\right) \vee \left(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_1\right)$ je kontradikcia, každý konjuktívny člen obsahuje dvojicu $p_i \wedge \neg p_i$, čiže sú kontradikcie, disjunkcia dvoch kontradikcií je taktiež kontradikcia.

Príklad

Pretransformujte formule $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ a $\psi = \neg\varphi$ do DNF resp. do KNF.

$$\begin{aligned}\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)\\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)\end{aligned}$$

Použitím distribučných zákonov pre disjunkciu a konjunkciu získame tieto ekvivalentné formuly

$$\varphi_{DNF} = (\neg p) \vee (q) \vee (\neg q)$$

$$\varphi_{KNF} = \left(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee q \right) \wedge \left(\neg p \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1} \right) \equiv 1$$

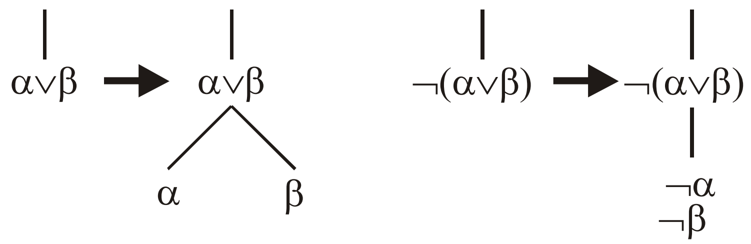
Podobným spôsobom zostrojíme aj ekvivalentné funkcie pre ψ

$$\psi_{DNF} = \left(\underbrace{p \wedge \neg p}_{0} \wedge \neg q \right) \vee \left(p \wedge \underbrace{q \wedge \neg q}_{0} \right) \equiv 0$$

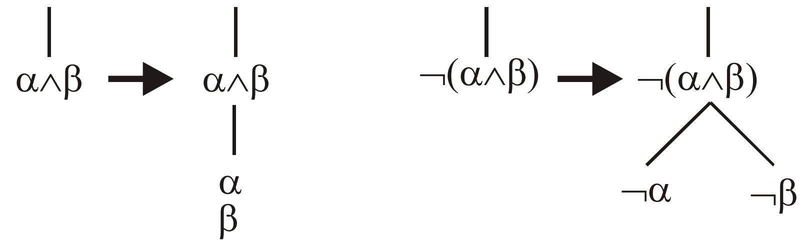
$$\psi_{KNF} = (p) \wedge (q) \wedge (\neg q)$$

Pre funkciu φ jej ekvivalentná funkciu φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia φ je tautológia. podobne, pre funkciu ψ jej ekvivalentná funkcia ψ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia ψ je kontradikcia.

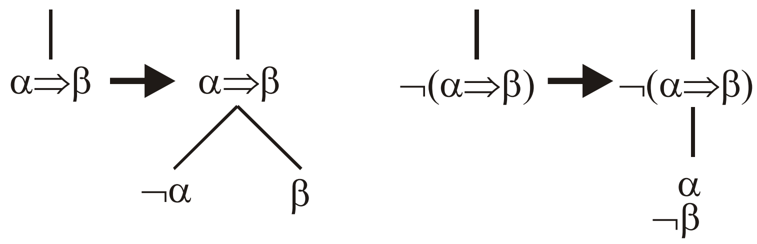
Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde konštrukciu DNF formuly



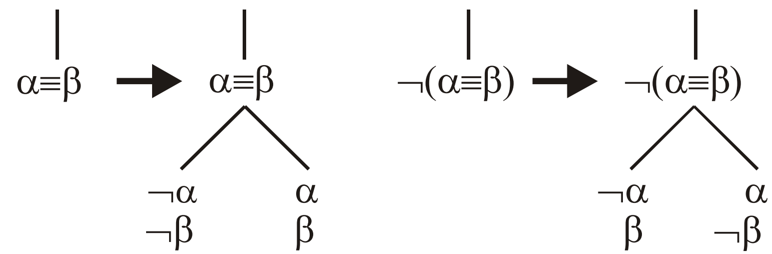
A (*disjunkcia*)



B (*konjunkcia*)

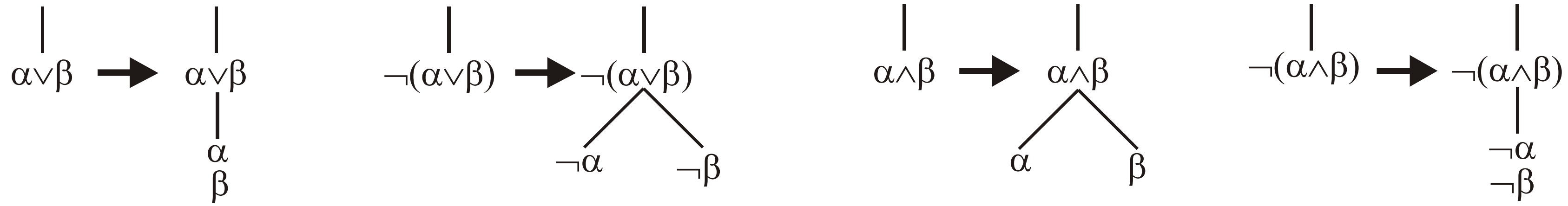


C (*implikácia*)



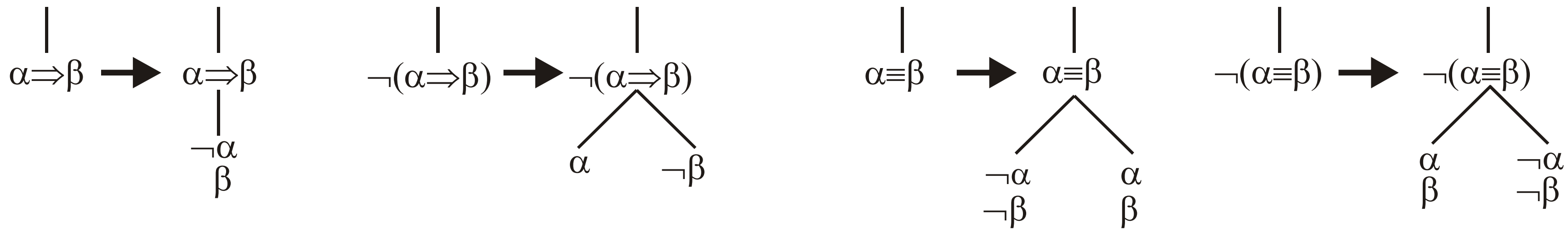
D (*ekvivalencia*)

Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde konštrukciu KNF formuly



A (*disjunkcia*)

B (*konjunkcia*)

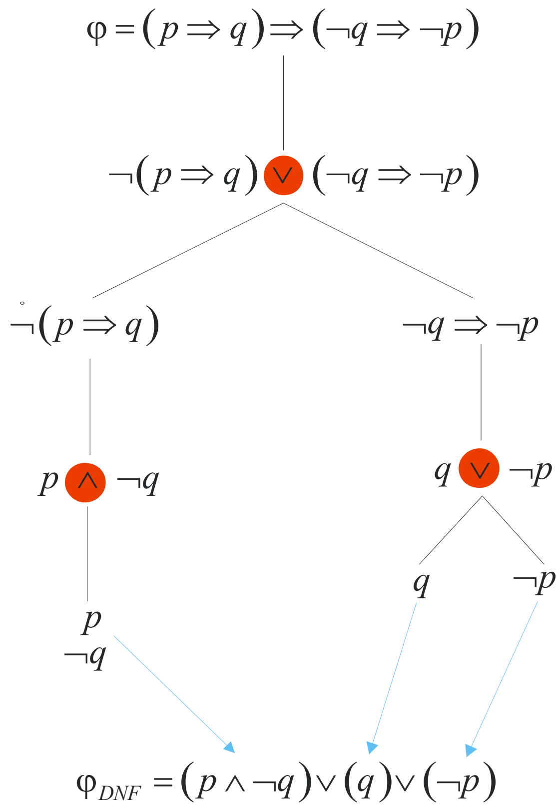


C (*implikácia*)

D (*ekvivalencia*)

Príklad

Pre formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ a $\psi = \neg\varphi$ zostrojte pomocou metódy binárnych stromov funkcie DNF a KBF.



$$\neg\varphi = \neg\left(\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\neg q \Rightarrow \neg p\right)\right)$$

$$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \neg\left(\neg q \Rightarrow \neg p\right)$$

$$p \Rightarrow q$$
$$\neg q \;\wedge\; p$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p \qquad\qquad q$$

$$\neg q \qquad\qquad \neg q$$
$$p \qquad\qquad p$$

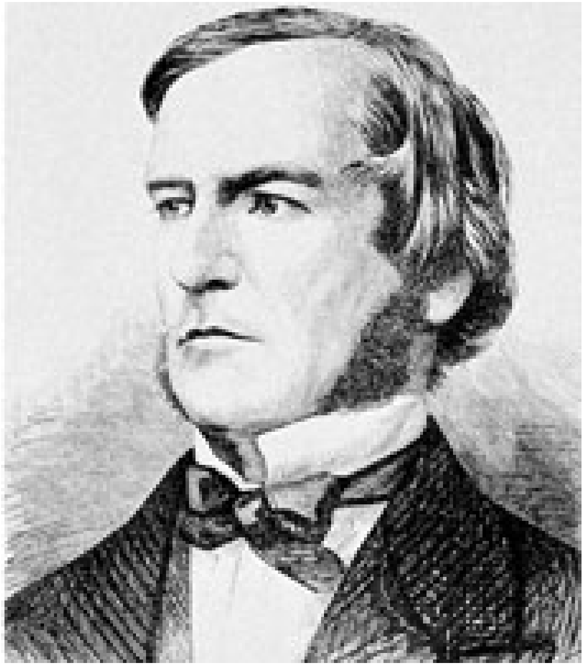
$$\varphi_{KNF} = \left(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee \neg q\right) \vee \left(p \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1}\right) \equiv 1$$

Úplnosť logických spojok

$S = \{\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee, \equiv, \uparrow, \downarrow\}$ z pohľadu podmienky ich úplnosti, t.j. schopnosti vyjadriť ľubovolnú výrokovú formulu (Boolovu funkciu) len pomocou niektorých logických spojok tvoriacich podmnožinu $S' \subset S$.

Veta.
(1) *Podmnožina* $S' = \{\neg, \wedge, \vee\}$ *je úplná,*
(2) *podmnožiny* $S' = \{\neg, \wedge\}$ *a* $S'' = \{\neg, \vee\}$ *sú úplné,*
(3) *podmnožina* $S' = \{\neg, \Rightarrow\}$ *je úplná a*
(4) *podmnožiny* $S' = \{\uparrow\}$ *a* $S'' = \{\downarrow\}$ *sú úplné.*

Boolova algebra výrokovej logiky



Zásluhou anglického matematika George Boola (1815-1864) bola výroková logika preformulovaná do tvaru algebry. Logika sa takto stala algebraickou disciplínou, ktorá má len málo spoločného s klasickou interpretáciou logiky.

Definícia.
Boolova algebra výrokovej logiky *je usporiadaná 6-tica* $\mathcal{A}=\left(\Omega,\vee,\wedge,\neg,\top,\bot\right)$, kde $\Omega=\left\{\varphi,\psi,\omega,...\right\}$ *je neprázdna množina elementov, ktorá obsahuje dva špeciálne odlíšené elementy* $\bot,\top\in\Omega$ *a nad* Ω *sú definované binárne operácie disjunkcie a konjunkcie*

$$\vee:\Omega\times\Omega\to\Omega,\ \ \wedge:\Omega\times\Omega\to\Omega$$

a unárna operácia negácie

$$\neg:\Omega\to\Omega$$

ktoré vyhovujú týmto podmienkam

(*1*) *komutatívnosť:* $\varphi\vee\psi=\psi\vee\varphi,\ \ \varphi\wedge\psi=\psi\wedge\varphi$

(*2*) *asociatívnosť:* $\left(\varphi\vee\psi\right)\vee\omega=\varphi\vee\left(\psi\vee\omega\right),\left(\varphi\wedge\psi\right)\wedge\omega=\varphi\wedge\left(\psi\wedge\omega\right)$

(*3*) *distributívnosť:* $\varphi\vee\left(\psi\wedge\omega\right)=\left(\varphi\vee\psi\right)\wedge\left(\varphi\vee\omega\right),$

$$\varphi\wedge\left(\psi\vee\omega\right)=\left(\varphi\wedge\psi\right)\vee\left(\varphi\wedge\omega\right)$$

(*4*) *vlastnosť konštanty* $\bot$: $\varphi=\varphi\vee\bot,\ \varphi\wedge\left(\neg\varphi\right)=\bot$

(*5*) *vlastnosť konštanty* $\top$: $\varphi=\varphi\wedge\top,\ \varphi\vee\left(\neg\varphi\right)=\top$

Veta

(1) Pre každé $\varphi \in \Omega$ existuje negácia $\neg\varphi \in \Omega$ jednoznačne

(2) involutívnosť negácie $\neg(\neg\varphi) = \varphi$,

(3) idempotentnosť $\varphi \vee \varphi = \varphi$, $\varphi \wedge \varphi = \varphi$,

(4) De Morganove zákony $\neg(\varphi \vee \psi) = \neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi) = \neg\varphi \vee \neg\psi$.

(5) nulitnosť $\varphi \vee \top = \top$, $\varphi \wedge \bot = \bot$

(6) absorbcia $\varphi \vee (\psi \wedge \varphi) = \varphi$, $\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) = \varphi$

Veta 3.4. *Aplikáciou binárnych operácií disjunkcie a konjunkcie a binárnej operácie negácie na premenné* $\{\bot,\top\}\subset\Omega$ *dostaneme tieto relácie:*

(1) *Disjunkcia*

$$\bot\vee\bot=\bot,\quad \bot\vee\top=\top,\quad \top\vee\bot=\top,\quad \top\vee\top=\top$$

(2) *Konjunkcia*

$$\bot\wedge\bot=\bot,\quad \bot\wedge\top=\bot,\quad \top\wedge\bot=\bot,\quad \top\wedge\top=\top$$

(3) *Negácia*

$$\neg\top=\bot,\quad \neg\bot=\top$$

Definícia Boolovej algebry obsahuje dve binárne operácie konjunkcie a disjunkcie, ostatné dve operácie implikácie a ekvivalencie, obvyklé vo výrokovej logike, sú definované pomocou týchto už definovaných operácií

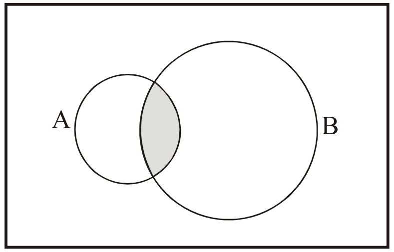
$$(\varphi \Rightarrow \psi) =_{def} (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$(\varphi \equiv \psi) =_{def} (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) = (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$$

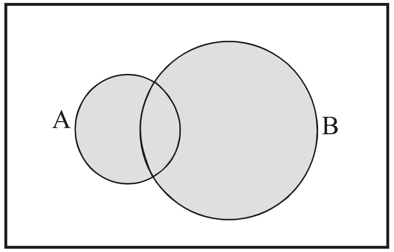
Poznámky.

- Boolova algebra výrokovej logiky poskytuje ***algebraický pohľad*** nielen na syntax, ale aj na sémantiku výrokovej logiky.
- Sémantický pohľad je v Boolovej algebre substituovaná dvoma pravdivostnými konštantami $\{\bot,\top\} \subset \Omega$. Každá formula výrokovej logiky môže byť ***vyhodnotená pre danú interpretáciu*** τ, či sa rovná konštante $\top$ (potom formula je pravdivá) alebo $\bot$ (potom formula je nepravdivá).

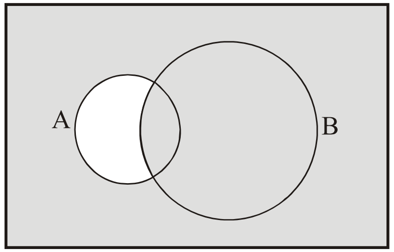
Množinová interpretácia logických spojok



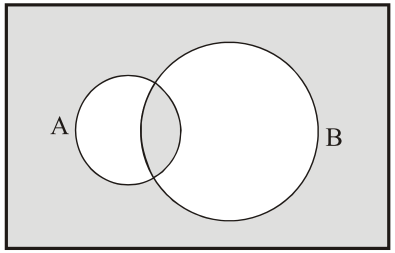
$(A\wedge B)=_{\text{def}}(A\cap B)$



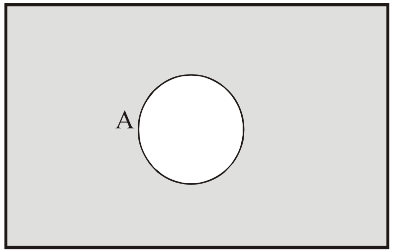
$(A\vee B)=_{\text{def}}(A\cup B)$



$(A\Rightarrow B)=_{\text{def}}(A\supset B)$



$(A\equiv B)=_{\text{def}}(A\supset B)\cap(A\supset B)$



$\overline{A}=_{\text{def}}(\neg A)$

Vzťah medzi formulami teórie množín a výrokovej logiky

vlastnosť	teória množín	výroková logika
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg q \vee \neg p$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg q \wedge \neg p$
idempotentnosť	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
identita	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$

vlastnosť	teória množín	výroková logika
absorbcia	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$	$p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 1 \equiv 1$
involúcia	$\overline{\overline{A}} = A$	$\neg(\neg p) \equiv p$
z. v. t.	$A \cup \overline{A} = U$	$p \vee \neg p \equiv 1$
zákon sporu	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$p \wedge \neg p \equiv 0$


Áno!
Myš mám v pravom hornom rohu...
...a klikám, ale stále to nepracuje!!!
sranda.kdecoje.cz

The End