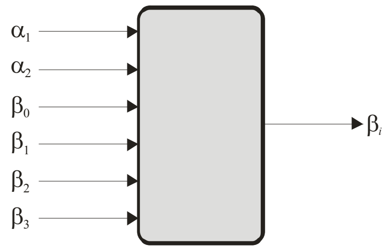
2. kontrólna písomka z Matematicke logiky
písaná dňa 8. 4. 2010

1. príklad. Zostrojte neurónovú sieť z logických neurónov, ktorá simuluje multiplex $\beta_i = f(\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, kde index i je špecifikovaný formulou $i = \mathrm{int}(\alpha_1,\alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$ (celé číslo i je priradené binárnemu číslu (α_1,α_2)) (3 body)



kde výstup je špecifikovaný Boolovou funkciou

$$f(0,0,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_0$$
$$f(0,1,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_1$$
$$f(1,0,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_2$$
$$f(1,1,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_3$$

2. príklad. Pomocou rezolventy **d**okážte nekonzistentnosť množiny

$$\boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$$

(3 body)

3. príklad. Jednoduchými úpravami a úvahami (nie pomocou sémantických tabiel) dokážte, že tieto tri formuly sú tautológie

(a) $P(a) \Rightarrow (\exists x)P(x)$, kde a je vybraný objekt – konštanta z univerza U (1 bod)

(b) $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(t)$, kde t je ľubovolný object – konštanta z univerza U (1 bod)

(c) $\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$ (1 bod)

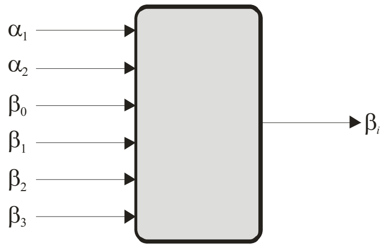
4. príklad. Použitím techniky sémantického tabla dokážte, že formula je zákonom predikátovej logiky

$(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \Rightarrow (\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (3 body)

5. príklad. Pre teóriu $\boldsymbol{T} = \{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (q \Rightarrow p), q \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$ zostrojte pomocou sémantického tabla model $M(\boldsymbol{T})$. (3 body)

Riešenie

1. príklad. Zostrojte neurónovú sieť z logických neurónov, ktorá simuluje multiplex $\beta_i = f(\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, kde index i je špecifikovaný formulou $i = \mathrm{int}(\alpha_1, \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2$ (celé číslo i je priradené binárnemu číslu (α_1, α_2))



kde výstup je špecifikovaný Boolovou funkciou

$$f(0,0,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_0$$
$$f(0,1,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_1$$
$$f(1,0,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_2$$
$$f(1,1,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_3$$

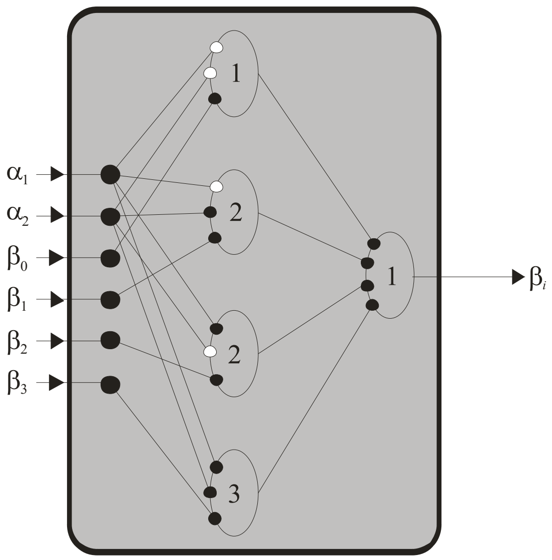
Riešenie: Obvod je špecifikovaný tabuľkou

α_1	α_2	f
0	0	β_0
0	1	β_1
1	0	β_2
1	1	β_3

Pomocou tejto tabuľky zostrojíme Boolovu funkciu

$$f = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\beta_0 + \bar{\alpha}_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_3$$

Ku ktorej zostrojíme neurónovú sieť



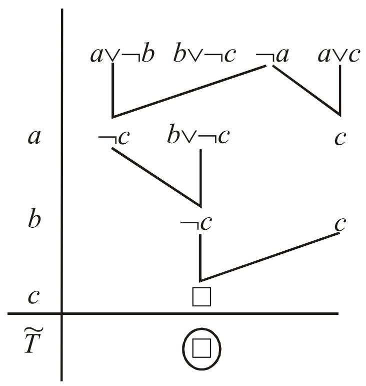
QED

2. príklad. Dokážte nekonzistentnosť množiny $\boldsymbol{T}=\{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$

Dôkaz pomocou tabuľky

	$a \vee \neg b$	$b \vee \neg c$	$\neg a$	$a \vee c$				
a	1		0	1	$\neg b$	c		
b		1			0		$\neg c$	
c						1	0	$\square$

Vizulalizácia dôkazu pomocou tabuľky



3. príklad. Jednoduchými úpravami a úvahami (nie pomocou sémantických tabiel) dokážte, že tieto dve formuly sú tautológie

(a) $P(a) \Rightarrow (\exists x) P(x)$, kde a je vybraný objekt – konštanta z univerza U

(b) $(\forall x) P(x) \Rightarrow P(t)$, kde t je ľubovolný object – konštanta z univerza U.

(c) $\neg(\forall x) P(x) \equiv (\exists x) \neg P(x)$

Riešenie.

(a) Podľa vyrokovej logiky formula $p \Rightarrow p \vee q$ je tautológia, ktorú indukciou môžeme zovšeobecniť do tvaru $\left(p_i \Rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_i \vee \ldots \vee p_n\right) \equiv \left(p_i \Rightarrow \bigvee_j p_j\right)$. Potom platí

$$P(a) \Rightarrow \bigvee_{x \in U} P(x) \equiv (\exists x) P(x) \quad \text{QED}$$

(b) Podľa vyrokovej logiky formula $p \wedge q \Rightarrow p$ je tautológia, ktorú indukciou môžeme zovšeobecniť do tvaru $\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_i \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow p_i\right) \equiv \bigwedge_j p_j \Rightarrow p_i$. Potom platí

$$\left(\bigwedge_{x \in U} P(x) \Rightarrow P(a)\right) \equiv (\forall x) P(x) \quad \text{QED}$$

(c) Použitím De Morganovho vzťahu dostaneme

$$\neg(\forall x) P(x) \equiv \neg\left(\bigwedge_{x \in U} P(x)\right) \equiv \left(\bigvee_{x \in U} \neg P(x)\right) \equiv (\exists x) \neg P(x) \quad \text{QED}$$

4. príklad. Použitím techniky sémantického tabla dokážte, že formula je zákonom predikátovej logiky

$\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$ (3 body)

Riešenie.

$\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$

$$\neg\left(\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)\right)$$

$$\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\wedge\neg\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$$

$$\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)$$
$$\neg\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$$

$$P(a)\wedge Q(a)$$

$$P(a)$$
$$Q(a)$$

$$\left(\forall x\neg P(x)\right)\vee\left(\forall x\neg Q(x)\right)$$

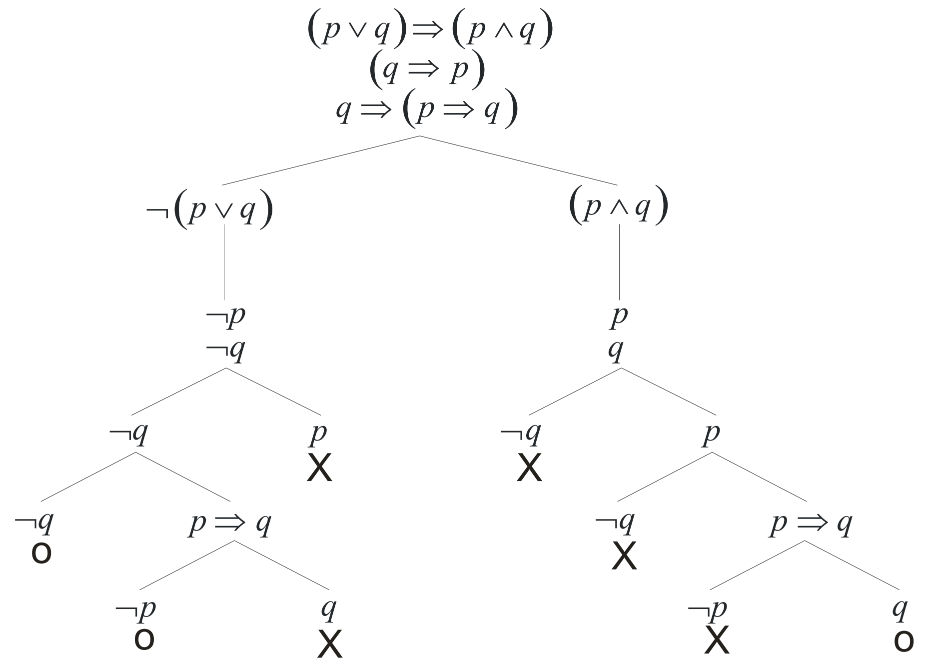
$t=a$ $t'=a$

$\forall x\neg P(x)$	$\forall x\neg Q(x)$
$\neg P(t)$	$\neg Q(t')$
X	X

Sémantické tablo je uzavreté, preto formula je tautológia. QED

5. príklad. Pre teóriu $\boldsymbol{T}=\left\{\underbrace{(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)}_{\varphi_1},\underbrace{(q\Rightarrow p)}_{\varphi_2},\underbrace{q\Rightarrow(p\Rightarrow q)}_{\varphi_3}\right\}$ zostrojte pomocou sémantického tabla model $M(\boldsymbol{T})$.

Riešenie. Zostrojíme sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3)$



Tablo obsahuje tri otvorené cesty, pričom dve obsahujú rovnaké literály, týmto otvoreným cestám môžeme priradiť interpretácie $\boldsymbol{\tau}_1=(p/1,q/1)$ a $\boldsymbol{\tau}_2=(p/0,q/0)$, potom model tejto teórie obsahuje tie dve interpretácie

$$M(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{\tau}_1=(p/1,q/1),\boldsymbol{\tau}_2=(p/0,q/0)\}$$