

Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“, 31. 1. 2011

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

2. príklad. Dokážte, že binárna operácia \oplus (XOR) vzhovuje týmto formulám:
 $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ a $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

4. príklad.

Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je väčší ako y ,

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

5. príklad.

Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve dve jednotky

(b) maximálne jedni jednotku,

(c) minimálne tri jednotky.

6. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa. (3 body)

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid, odôvodnite. (2 bod)

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej x platia nasledujúce podmienky

(a) $\bar{x} \cdot 0 = 1$, (b) $\bar{x} + 1 = 0$, (c) $x \cdot 1 = 0$, (d) $\bar{x} + \bar{x} = 1$, (e) $x \cdot 1 = x$.

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 6$$

$$2x - 2y - z = -5$$

$$3x - y = 1$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

10. príklad. Existuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,1,1,4,4,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Prémiový príklad. Nech $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sú indexy, zložený index je zostrojený pomocou predpisu $\sigma(i, j) = (i-1) \cdot 9 + j$. Predpokladajme, že poznáme zložený index $\sigma(i, j)$, nájdite indexy i a j , ktoré ho vytvárajú.

Poznámka: Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi (alebo 60 bodmi, v prípade korektného riešenie prémiového príkladu), čas na písomku je 90 minút.

Riešenie

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

Riešenie:

(1) Formula platí pre $n = 2$, $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (známa De Morganova formula pre komplement zjednotenia).

(2) Pomocou predošlej formuly ju dokážeme pre $n = 3$.

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} &= \overline{\underbrace{(A_1 \cup A_2)}_B \cup A_3} = \overline{B \cup A_3} = \overline{B} \cap \overline{A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \overline{A_3} = \\ &= (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cap \overline{A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \end{aligned}$$

(3) Teraz, keď poznáme túto formulu pre $n=3$, môžeme pristúpiť k dôkazu pre $n=4$, atď., postupne je dokážeme pre ľubovoľné prirodzené n .

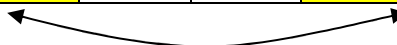
2. príklad. Dokážte, že binárna operácia \oplus (XOR) je asociatívna a distributívna vzhľadom ku konjunkcii, t. j. platí $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ a $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$.

Riešenie: Dôkaz vykonáme pomocou tabuľkovej metódy (čo môžeme pokladať za dôkaz vymenovaním všetkých prípadov).

x	y	z	$y \oplus z$	$x \oplus (y \oplus z)$	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \oplus z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1



x	y	z	$y \oplus z$	$x \wedge (y \oplus z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0



3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

(a) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny A a B

(b) $A - B = B - A$, platí ak $A = B$.

(c) $A - B = A$, platí ak $A \cap B = \emptyset$

4. príklad.

Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je väčší ako y ,

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

(a) x je väčší ako y ,

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x > y) \wedge (y > z) \Rightarrow (x > z))$

antisymetrická: $\forall (x, y \in X) ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

reflexívna: $\forall x ((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

5. príklad.

Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve dve jednotky, $\binom{10}{2} = 45$

(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

(c) minimálne tri jednotky,

$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$

$120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 968$

$= 2^{10} - C(10,0) - C(10,1) - C(10,2) = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$

6. príklad. 3. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $*$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x < y < z$

$$(x * y) * z = x * z = x$$

$$x * (y * z) = x * y = x$$

(a2) $x < z < y$

$$(x * y) * z = x * z = x$$

$$x * (y * z) = x * z = x$$

$$(a3) y < x < z$$

$$(x * y) * z = y * z = y$$

$$x * (y * z) = x * y = y$$

.....

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid. (2 body)

Daná algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ nie je monoid, neexistuje jednotkový element e , ktorý patrí do množiny \mathbb{N} (jednotkovým prvkom by potenciálne mohlo byť ∞ , ktoré však nepatrí do \mathbb{N}).

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej x platia nasledujúce podmienky

(a) $\bar{x} \cdot 0 = 1$

(b) $\bar{x} + 1 = 0$

(c) $x \cdot 1 = 0$,

(d) $\bar{x} + \bar{x} = 1$,

(e) $x \cdot 1 = x$.

Riešenie:

(a) neplatí pre žiadne x

(b) neplatí pre žiadne x

(c) $x = 0$,

(d) $x = 0$,

(e) platí pre každé x

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 6$$

$$2x - 2y - z = -5$$

$$3x - y = 1$$

Riešenie:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = t, -4y - 3z = -17 \Rightarrow y = \frac{17}{4} - \frac{3}{4}t, x + y + z = 6 \Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}t, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

10. príklad. Existuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,1,1,4,4,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť nasledovne:

4,4,4,1,1,1,1

3,3,0,0,1,1

3,3,1,1,0,0

2,0,0,0,0

0,-1,-1,0,0

Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6 \times 4/2 - 6 + 1 + 1 = 8$.

kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.

Prémiový príklad. Nech $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sú indexy, zložený index je zostrojený pomocou predpisu $\sigma(i, j) = (i-1) \cdot 9 + j$. Predpokladajme, že poznáme zložený index $\sigma(i, j)$, nájdite indexy i a j , ktoré ho vytvárajú.

Riešenie: Nech $\alpha = \sigma(i, j) \div 9$, $\beta = \sigma(i, j) \bmod 9$, potom

$$i = \begin{cases} \alpha + 1 & (\beta > 0) \\ \beta & (\beta = 0) \end{cases}, \quad j = \alpha - (i - 1) \cdot 9$$