Opravná 1. kontrolná písomka z mat. logiky, konaná dňa 22. 5. 2013

1. príklad: Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\vdash\varphi$ a $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\models\varphi$?
(e) čo je dôkaz formuly φ ?

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

3. príklad: Pre formulu $\varphi=\big((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\big)\Rightarrow(q\vee r)$

(a) zostrojte syntaktický strom,

(b) množinu podformúl

(c) zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt a verifikujte tvrdenie, že formula φ je splniteľná.

4. príklad. Pomocou sémantického tabla dokážte alebo vyvráťte platnosť formuly

$$\varphi=(\forall x)\big(p(x)\vee q(x)\big)\Rightarrow(\forall x)\,p(x)\vee(\forall x)\,q(x)$$

5. príklad.
Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\begin{array}{l} p\Rightarrow q \\ \underline{p\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} p\Rightarrow q \\ \underline{q\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} p\Rightarrow q \\ \underline{\neg p\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} p\Rightarrow q \\ \underline{\neg q\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} \neg p\Rightarrow q \\ \underline{p\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} \neg p\Rightarrow q \\ \underline{q\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} \neg p\Rightarrow q \\ \underline{\neg p\qquad} \\ ? \end{array},\quad \begin{array}{l} \neg p\Rightarrow q \\ \underline{\neg q\qquad} \\ ? \end{array}.$$

Prémiový príklad.
Dokáže správnosť záveru

predpoklad 1: Jano študuje
predpoklad 2: Ak Jano pracuje, potom neštuduje
predpoklad 3: Jano pracuje alebo športuje

---

záver: Jano športuje

Poznámky: Na priložený linajkový dvojlist napíšte krstné meno, priezvisko a číslo krúžku. Čas písomky je 45 v min. Zadanie príkladov nevkladajte späť do písomky, môžete si ho ponechať.

Riešenie

1. príklad: Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\vdash\varphi$ a $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\models\varphi$?
(e) čo je dôkaz formuly φ ?

Riešenie:

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny {*p*, *q*, *r*,…} a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula ::= premenná | (formula) | (formula ∧ formula) | (formula ∨ formula) |
(formula ⇒ formula) | (¬formula)

(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) Formula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T\vdash\varphi$) vtedy a len vtedy, ak $\varphi\in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

(e) Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T\models\varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t. j. formula φ je v ňom pravdivá).

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Jana
q = na výlet pôjde Eva
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi=\left((p\wedge q)\Rightarrow\neg r\right)\equiv\left(\neg(p\wedge q)\vee\neg r\right)$

$\boxed{\neg\varphi=(p\wedge q)\wedge r}$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Jana, Eva a Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Eva
q = na výlet pôjde Helena
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \Rightarrow \neg(q \wedge r)) \equiv (\neg p \vee \neg(q \wedge r))$

$\boxed{\neg\varphi = (p \wedge (q \wedge r))}$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Eva, Helena a Tomáš.

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

Riešenie:

p = Jano odpočíval

q = Jano pracoval

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \vee q)$

$\neg\varphi = (\neg p \wedge \neg q)$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Jano neodpočíval a nepracoval.

3. príklad: Pre formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)$

(a) zostrojte syntaktický strom,

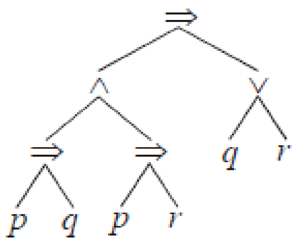
(b) množinu podformúl

(c) zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt, a podľa nej rozhodnite, či daná formula je tautologiou, kontradikciou alebo splniteľnou.

Riešenie:

(a) zostrojte syntaktický strom,

Riešenie:



(b) zostrojte množinu podformúl

Riešenie: $\{p, q, r, p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, q \vee r, (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\}$

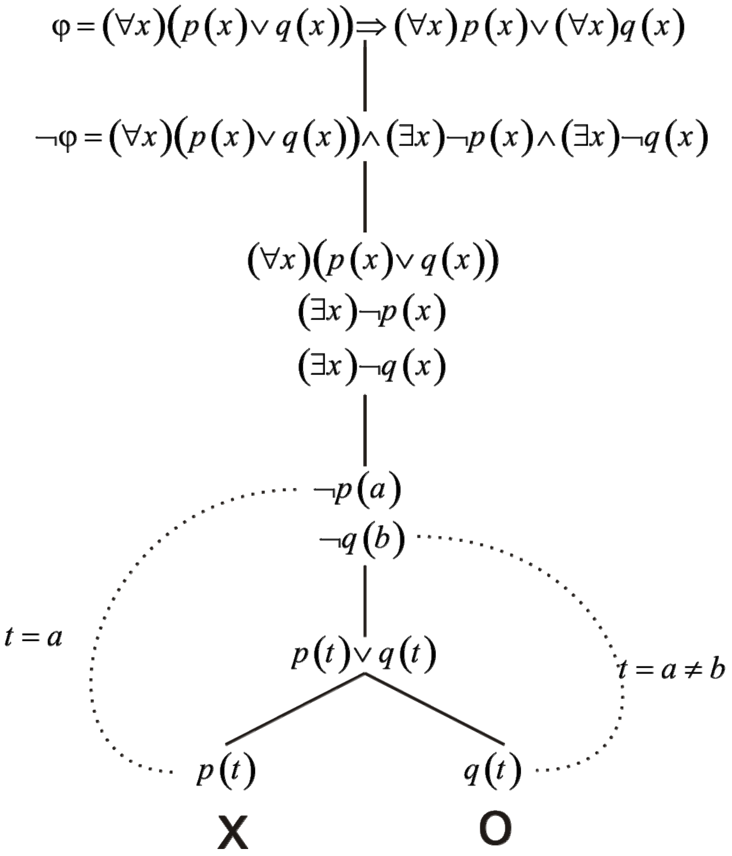
(c) zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt.

Riešenie:

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$4 \wedge 5$	$q \vee r$	$6 \Rightarrow 7$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Formula je splniteľná.

4. Príklad.



5. príklad.

Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \hline p \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ p \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}.$$

Riešenie.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \text{nemá} \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \text{nemá} \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \text{nemá} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \text{nemá} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}.$$

Prémiový príklad.

p = Jano študuje
q = Jano pracuje
r = Jano športuje

$$\begin{array}{ll} \text{predpoklad 1:} & p \\ \text{predpoklad 1:} & q \Rightarrow \neg p \\ \text{predpoklad 2:} & q \vee r \\ \hline \text{záver:} & r \end{array}$$

Máme dokázať $\{p, q \Rightarrow \neg p \wedge q, q \vee r\} \vdash r$

1.	p	1. predpoklad
2.	$q \Rightarrow \neg p$	2. predpoklad
3.	$q \vee r$	3. predpoklad
4.	$\neg q$	aplikácia modus tollens na 1. a 2.
5.	$\neg q \Rightarrow r$	prepis 3. pomocou implikácie
6.	r	aplikácia modus ponens na 4. a 5.