<u>**Príklad 1.**</u> $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, tak že párne čísla z $\mathbb{N}$ sa zobrazia na nezáporné zo $\mathbb{Z}$ a všetky párne čísla z $\mathbb{N}$ sa zobrazia na záporné zo $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ll} \varphi(0) = 0 & \varphi(1) = -1 \\ \varphi(2) = 1 & \varphi(3) = -2 \\ \varphi(4) = 2 & \varphi(5) = -3 \end{array}$$

$$\varphi(k) = \begin{cases} k/2 & \text{ak } k \in Ev \\ -\lceil k/2 \rceil & \text{ak } k \in Odd \end{cases}$$

φ je bijektívne zobrazenie => $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

Príklad 2. $|Odd| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín Odd a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : Odd \rightarrow \mathbb{N}$, tak že každé nepárne číslo sa zobrazí na dolnú celú časť jeho polovice.

$$\begin{array}{rcccccccc} Odd: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

$\varphi(1) = 0$
$\varphi(3) = 1$
$\varphi(5) = 2$
$\varphi(7) = 3$
$\vdots$
$\varphi(k) = \lfloor k/2 \rfloor \qquad$ pre $\forall k \in Odd$

φ je bijektívne zobrazenie => $|Odd| = |\mathbb{N}|$

Príklad 3. $|\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N}^+$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$, tak že $\varphi(k) = k - 1$ pre $\forall k \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{array}{rccccccc} \mathbb{N}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & ... \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... \\ \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... \end{array}$$

φ je bijektívne zobrazenie $=>$ $|\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}|$

Príklad 4. $|\{7k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{7k+5 \mid k\in\mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $A=\{7k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{7k+5 \mid k\in\mathbb{N}\}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi:\mathbb{N}\to A$ nasledujúcim spôsobom.

$$\begin{array}{rcccccccc} Ev: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 7k+1: & 1 & 8 & 15 & 22 & 29 & 36 & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} Odd: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 7k+5: & 5 & 12 & 19 & 26 & 33 & 40 & \dots \end{array}$$

$\varphi(3)=12$
$\varphi(8)=29$
$\vdots$
$\varphi(2i)=7i+1 \qquad \forall i\in\mathbb{N}$
$\varphi(2i+1)=7i+5 \qquad \forall i\in\mathbb{N}$

<u>Príklad 5.</u> $|\{5k+2 \mid k \in \mathbb{N}\} = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{5k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \to A$ nasledujúcim spôsobom.

$$\begin{array}{rccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... \\ A: & 2 & 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & ... \end{array}$$

$\varphi(0) = 2$
$\varphi(1) = 7$
$\varphi(2) = 12$
$\varphi(3) = 17$
$\vdots$
$\varphi(k) = 5k + 2 \qquad$ pre $\forall k \in \mathbb{N}$

$\psi : A \to \mathbb{N}$
$\psi(l) = (l-2)/5 \qquad \forall l \in A$
$\psi(l) = \lfloor l/5 \rfloor \qquad \forall l \in A$

<u>Príklad 6.</u> $|\{ak+b\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{ak + b \mid a, b \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a \neq 0\}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \to A$, tak že $\varphi(k) = ak + b$ pre $\forall k \in \mathbb{N}$

<u>Príklad 7.</u> $|\{5k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- $A = \{\underline{0}, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \underline{35}, 40, \ldots\} \cup \{\underline{0}, 7, 14, 21, 28, \underline{35}, 42, \ldots\}$
- Zjednotenie A rozdelíme na 3 podmnožiny a ukážeme, že každá je ekvivalentná s $\mathbb{N}$.
  $A = X \cup Y \cup Z$

  $X = \{5k,\ k \in \mathbb{N},\ k \neq 7m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 45, \ldots\}$
  $Y = \{7k,\ k \in \mathbb{N},\ k \neq 5m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{7, 14, 21, 28, 42, 49, \ldots\}$
  $Z = \{35k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{0, 35, 70, \ldots\}$

  $\varphi : X \to \mathbb{N} \qquad \varphi(i) = i/5 - 1 - \lfloor i/35 \rfloor, \quad i \in X$
  $\psi : Y \to \mathbb{N} \qquad \psi(i) = i/7 - 1 - \lfloor i/35 \rfloor, \quad i \in Y$
  $\nu : Z \to \mathbb{N} \qquad \nu(i) = i/35, \qquad i \in Z$

  Potom použijeme vetu o disjunktných množinách (nech A, B sú disj. množ., pre ktoré platí $|A| = |B| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{N}| = |A| \cup |B|$)

Príklad 8. $|\mathbb{N} \times \{2,4,6\}\,| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N} \times \{2,4,6\}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom.

2	4	6
(0,2) $\mapsto$ 0	(0,4) $\mapsto$ 1	(0,6) $\mapsto$ 2
(1,2) $\mapsto$ 3	(1,4) $\mapsto$ 4	(1,6) $\mapsto$ 5
(2,2) $\mapsto$ 6	(2,4) $\mapsto$ 7	(2,6) $\mapsto$ 8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\varphi : (i,2) \longmapsto 3i$
$\varphi : (i,4) \longmapsto 3i+1$
$\varphi : (i,6) \longmapsto 3i+2$

$\varphi(i,j) = 3i + j/2 - 1$

Príklad 9. $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\mathbb{R}$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = tg(x) \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

Príklad 10. $|\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.

Riešenie:

- definujme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom.

...	(0,-3)$\mapsto$15	(0,-2)$\mapsto$8	(0,-1)$\mapsto$3	(0,0)$\mapsto$0	(0,1)$\mapsto$1	(0,2)$\mapsto$4	(0,3)$\mapsto$9	...
...	(1,-3)$\mapsto$23	(1,-2)$\mapsto$14	(1,-1)$\mapsto$7	(1,0)$\mapsto$2	(1,1)$\mapsto$5	(1,2)$\mapsto$10	(1,3)$\mapsto$17	...
...	(2,-3)$\mapsto$33	(2,-2)$\mapsto$22	(2,-1)$\mapsto$13	(2,0)$\mapsto$6	(2,1)$\mapsto$11	(2,2)$\mapsto$18	(2,3)$\mapsto$27	...
...	(3,-3)$\mapsto$45	(3,-2)$\mapsto$32	(3,-1)$\mapsto$21	(3,0)$\mapsto$12	(3,1)$\mapsto$19	(3,2)$\mapsto$28	(3,3)$\mapsto$39	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$\varphi(3,0) = 9 + 3 = 12$
$\varphi(1,-2) = 9 + 5 = 14$
$\varphi(1,2) = 9 + 1 = 10$

$$\varphi(m,n) = \begin{cases} (m+|n|)^2 + m & \text{pre } n \geq 0 \qquad m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z} \\ (m+|n|)^2 + (m+|n|) + |n| & \text{pre } n < 0 \qquad m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Príklad 11.</u> $|(0,1)| = |(0,2)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0,1)$ a $(0,2)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : (0,1) \to (0,2)$

$\varphi(x) = 2x \qquad x \in (0,1)$

Príklad 12. $|(0,1)| = |(a,b)|$

Zadanie:

- Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0,1)$ a (a,b), kde $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

  $\varphi : (0,1) \to (a,b)$

  $\varphi(x) = a + (b-a) * x \qquad x \in (0,1),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$

<u>Príklad 13.</u> $|(0,1)| = |(0,\infty)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0,1)$ a $(0,\infty)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : (0,1) \to (0,\infty)$

1) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - 1 \qquad x \in (0,1)$

2) $\varphi(x) = tg(\dfrac{\pi}{2}x) \qquad x \in (0,1)$

3) $\varphi(x) = -logx \qquad x \in (0,1)$

Príklad 14. $|\langle 0,1\rangle| = |(0,1)|$

Zadanie:

- Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle 0,1\rangle$ a $(0,1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : \langle 0,1\rangle \to (0,1)$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\varphi(\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Príklad 15a. $|\langle 0,1)| = |(0,1)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle 0,1)$ a $(0,1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \langle 0,1) \to (0,1)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq 0,\ \frac{1}{n} \qquad n = 2,3,\dots$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} \qquad n = 2,3,\dots$$

Príklad 15b. $|\langle 0,1)| = |(0,1)|$

Zadanie:

- Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle 0,1)$ a $(0,1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \langle 0,1) \to (0,1)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq 0,\ \frac{n-1}{n} \qquad n = 2,3,\dots$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(\tfrac{n-1}{n}) = \frac{n}{n+1} \qquad n = 2,3,\dots$$

Príklad 16. $|(0,1)| = |(0,2\rangle \cup\ (4,7)|$

Zadanie:

- Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0,1)$ a $(0,2\rangle \cup (4,7)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : (0,1) \to (0,2\rangle \cup (4,7)$

$\varphi(x) = 4x \qquad x \in (0, \frac{1}{2}\rangle$

$\varphi(x) = 6x + 1 \qquad x \in (\frac{1}{2}, 1)$

<u>Príklad 17.</u> $|\langle a,b\rangle| = |(a,b)|$

Zadanie:

- Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle a,b\rangle$ a (a,b).

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$\varphi : \langle a,b\rangle \to (a,b)$

$$\varphi(x) = x \qquad x \in \langle a,b\rangle;\ x \neq a,\ b,\ a+\tfrac{b-a}{n},\ a+(n-1)\left(\tfrac{b-a}{n}\right)$$

$$\varphi(a) = a + \frac{b-a}{4}$$

$$\varphi\left(a+\frac{b-a}{n}\right) = a + \frac{b-a}{n+1} \qquad n = 4,5,6,\ldots$$

$$\varphi(b) = a + 3\left(\frac{b-a}{4}\right)$$

$$\varphi\left(a+(n-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right) \qquad n = 4,5,6,\ldots$$