3. kontrolná písomka z matematickej logiky (9. 5. 2011)

Príklad 1.
Zistite, či formuly sú tautológie fuzzy logiky

(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Príklad 2.
Nech $X = \{1,2,3,4\}$, definujme dve fuzzy relácie $P \subseteq X \times X$ a $Q \subseteq X \times X$ „približne rovný“ pomocou charakteristických funkcii takto

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0.8 & (|x-y|=1) \\ 0.3 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}, \quad \mu_Q(x,y) = \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0.7 & (|x-y|=1) \\ 0.4 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}$$

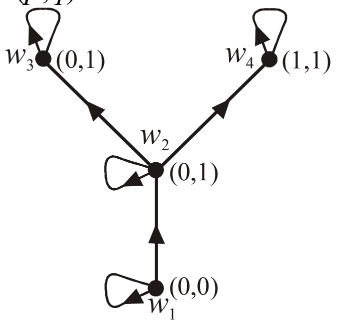
Zostrojte zjednotenie, $\mu_{P\cup Q}(x,y)$, a prienik, $\mu_{P\cap Q}(x,y)$, týchto dvoch relácií $\mu_P(x,y)$ a $\mu_Q(x,y)$.

Príklad 3.
Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautológia

Príklad 4. Vypočítajte pravdivostné hodnoty formuly modálnej logiky a všetkých jej podformúl vo svetoch w_1 až w_4

$$p \Rightarrow ((\Box(p \wedge q)) \vee \Diamond(p \vee q))$$

pre Kripkeovský model s reláciou R znázornenou grafom, kde sú uvedené taktiež pravdivostné hodnoty premenných (p,q)



kde napr. $\Gamma(w_1)=\{w_1,w_2\}$, $\Gamma(w_2)=\{w_2,w_3,w_4\}$,…; vo svete w_1 pravdivostná hodnota premennej p je 0, vo svete w_2 pravdivostná hodnota q je 1.

Príklad 5.
Zistite pomocou sémantického tabla, či formuly modálnej logiky sú tautológie

(a) $\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

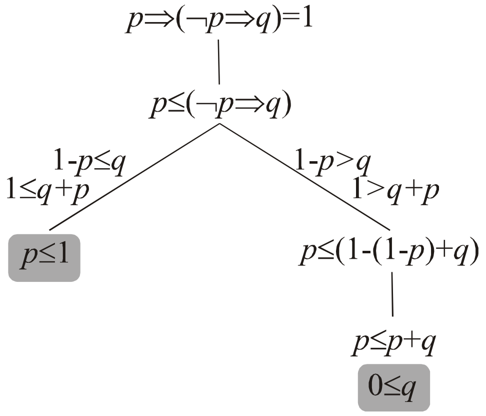
(b) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.

Všetky príklady budú hodnotené po 3 bodoch.

Riešenie

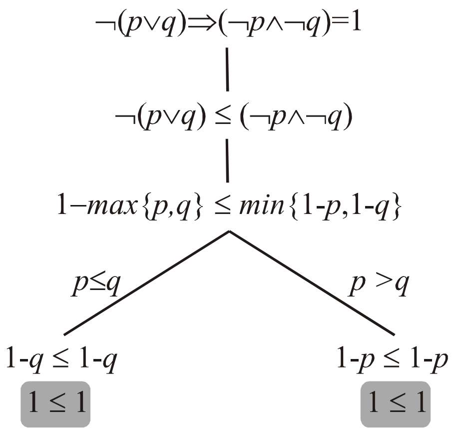
Príklad 1. Zistite či formuly sú tautológie fuzzy logiky:

(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$



Formula je tautológia fuzzy logiky.

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$



Formula je tautológia fuzzy logiky.

Príklad 2.

Nech $X = \{1,2,3,4\}$, definujme dve fuzzy relácie $P \subseteq X \times X$ a $Q \subseteq X \times X$ „približne rovný“ pomocou charakteristických funkcii takto

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.8 & (|x-y|=1) \\ 0.3 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases} , \quad \mu_Q(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.7 & (|x-y|=1) \\ 0.4 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}$$

Zostrojte zjednotenie, $\mu_{P\cup Q}(x,y)$, a prienik, $\mu_{P\cap Q}(x,y)$, týchto dvoch relácií $\mu_P(x,y)$ a $\mu_Q(x,y)$.

$\mu_P(x,y)$		Y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.3	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.3
	3	0.3	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.3	0.8	1

$\mu_Q(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.7	0.4	0.1
	2	0.7	1	0.7	0.4
	3	0.4	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.4	0.7	1

$\mu_{P\cap Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.7	0.3	0.1
	2	0.7	1	0.7	0.3
	3	0.3	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.3	0.7	1

$\mu_{P\cup Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.4	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.4
	3	0.4	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.4	0.8	1

Príklad 3.

Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula je tautológia Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky.

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

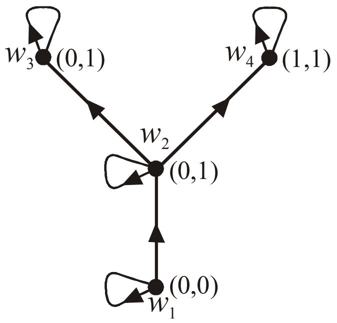
φ	ψ	$\varphi\Rightarrow\psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi\Rightarrow\neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	½	1	½	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
½	0	½	1	½	½	1
½	½	1	½	½	1	1
½	1	1	0	½	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	½	½	½	0	½	1
1	1	1	0	0	1	1

Formula je tautológia.

Príklad 4. Vypočítajte pravdivostné hodnoty formuly modalnej logiky vo svetoch w_1 až w_4

$$p \Rightarrow \left(\left(\Box(p \wedge q)\right) \vee \Diamond(p \vee q)\right)$$

pre Kripkeovský model M s reláciou R znázornenou grafom, kde sú uvedené pravdivostné hodnoty premenných (p,q)



kde napr. $\Gamma(w_1)=\{w_1,w_2\}$, $\Gamma(w_2)=\{w_2,w_3,w_4\},\ldots$; vo svete w_1 pravdivostná hodnota premennej p je 0, vo svete w_2 pravdivostná hodnota q je 1.

	podformula	w_1	w_2	w_3	w_4
1	p	0	0	0	1
2	q	0	1	1	1
3	$p\wedge q$	0	0	0	1
4	$p\vee q$	0	1	1	1
5	$\Box(p\wedge q)$	0	0	0	1
6	$\Diamond(p\vee q)$	1	1	1	1
7	$\Box(p\wedge q)\vee\Diamond(p\vee q)$	1	1	1	1
8	$p\Rightarrow(\Box(p\wedge q)\vee\Diamond(p\vee q))$	1	1	1	1

Komentár:

3. riadok – konjunkcia riadkov 1. a 2.

4. riadok – disjunkcia riadkov 1 a 2.

5. riadok– rozklad do konjunkcií

$$w_1 \models \Box(p\wedge q) = \underbrace{\left(w_1 \models (p\wedge q)\right)}_{0} \wedge \underbrace{\left(w_2 \models (p\wedge q)\right)}_{0} = 0$$

$$w_2 \models \Box(p\wedge q) = \underbrace{\left(w_2 \models (p\wedge q)\right)}_{0} \wedge \underbrace{\left(w_3 \models (p\wedge q)\right)}_{0} \wedge \underbrace{\left(w_4 \models (p\wedge q)\right)}_{1} = 0$$

$$w_3 \models \Box(p\wedge q) = \underbrace{\left(w_3 \models (p\wedge q)\right)}_{0} = 0$$

$$w_4 \models \Box(p\wedge q) = \underbrace{\left(w_4 \models (p\wedge q)\right)}_{1} = 1$$

6. riadok – rozklad do disjunkcií

$$w_1 \models \Diamond(p\vee q) = \underbrace{\left(w_1 \models (p\vee q)\right)}_{0} \vee \underbrace{\left(w_2 \models (p\vee q)\right)}_{1} = 1$$

$$w_2 \models \Diamond(p\vee q) = \underbrace{\left(w_2 \models (p\vee q)\right)}_{1} \vee \underbrace{\left(w_3 \models (p\vee q)\right)}_{1} \vee \underbrace{\left(w_4 \models (p\vee q)\right)}_{1} = 1$$

$$w_3 \models \Diamond(p\vee q) = \underbrace{\left(w_3 \models (p\Diamond q)\right)}_{1} = 1$$

$$w_4 \vDash \Diamond(p \vee q) = \underbrace{\left(w_4 \vDash (p \vee q)\right)}_{1} = 1$$

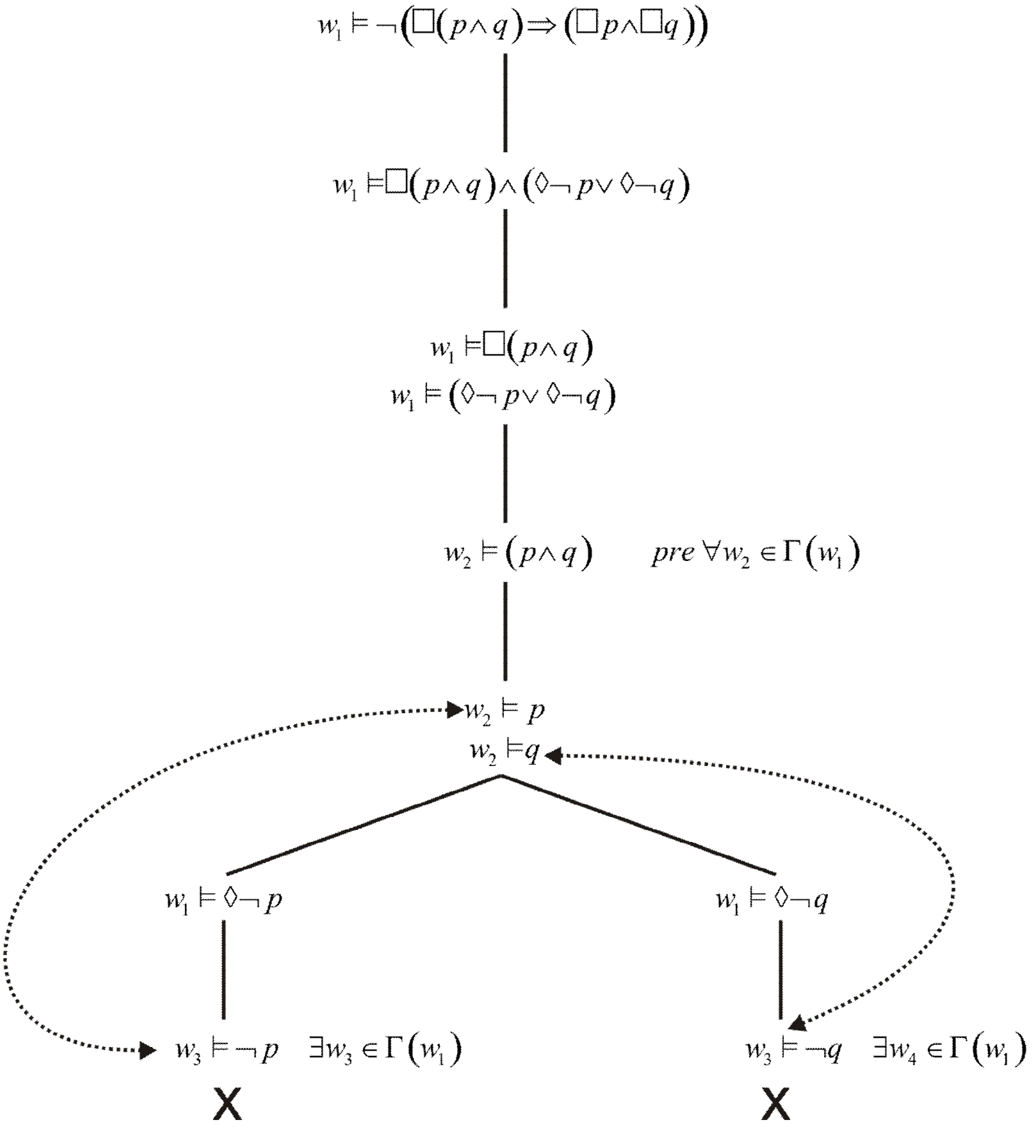
7, riadok – disjunkcia 5. a 6. riadku
8. riadok – implikácia 1. a 7. riadku

Príklad 5.

Zistite pomocou sémantického tabla, či formuly modálnej logiky sú tautológie vo svete w_1
(a) $\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
(b) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.

Riešenie:

(a) je tautológia



(b) nie je tautológia