

A) Intenzitu elektrického poľa vypočítame Gaussovým zákonom $\oint \vec{E} d\vec{S} = Q_C/\varepsilon_0$, kde za integračnú plochu zvolíme povrch gule vo vnútri nevodivej vrstvy, teda pre jej polomer platí $a < r < b$. Potom náboj uzavretý vo vnútri tejto plochy je:

$$Q_C = \int_a^r \rho dV = \int_a^r \alpha r^2 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \int_a^r r^4 dr = 4\pi\alpha \left[\frac{r^5}{5} \right]_a^r = \frac{4}{5}\pi\alpha(r^5 - a^5).$$

Tento náboj dosadíme do Gaussovho zákona a pre intenzitu elektrického poľa dostaneme:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_C}{\varepsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{5}\pi\alpha(r^5 - a^5)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\alpha(r^5 - a^5)}{5\varepsilon_0 r^2} \quad (2 \text{ body})$$

B) Intenzita elektrického poľa vo vodiči pri statickom rozložení náboja je nulová. Intenzita elektrického poľa totiž zodpovedá elektrickej sile. To znamená, že v prípade nenulovej intenzity \vec{E} pôsobí na elektrón s nábojom q sila $\vec{F} = q\vec{E}$. Elektróny sa vo vodivom kove môžu voľne pohybovať. Sila pôsobiaca na elektrón vo vodiči by teda vyvolala zrýchlený pohyb tohoto elektrónu v smere pôsobiacej sily. To by ale bolo v rozpore so statickým rozložením náboja. Odpoveď je teda $E = 0$. (1 bod)

C) Celkový náboj v nevodivej guľovej vrstve určíme rovnakým spôsobom ako v časti **A**). Rozdiel je iba v hornej integračnej hranici:

$$Q'_C = \int_a^b \rho dV = \int_a^b \alpha r^2 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \int_a^b r^4 dr = 4\pi\alpha \left[\frac{r^5}{5} \right]_a^b = \frac{4}{5}\pi\alpha(b^5 - a^5). \quad (2 \text{ body})$$

D) Keď zvolíme integračnú plochu Gaussovho zákona ako povrch gule s polomerom $c < r < d$, vo vnútri tejto plochy sa nachádza celý náboj vo vnútri nevodivej vrstvy Q'_C ako aj náboj indukovaný na vnútornom povrchu vodivej vrstvy Q_{vn} . Pritom intenzita elektrického poľa vo vnútri vodiča a teda na celej našej integračnej ploche je nulová. Teda musí platiť:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q'_C + Q_{vn}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{Q'_C + Q_{vn}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{vn} = -Q'_C = -\frac{4}{5}\pi\alpha(b^5 - a^5) \quad (1 \text{ bod})$$

Keďže vodivá vrstva je dokopy elektricky neutrálna, náboj indukovaný na jej vonkajšej ploche musí byť opačný ako náboj indukovaný na jej vnútornej ploche, teda $Q_{vo} = -Q_{vn} = \frac{4}{5}\pi\alpha(b^5 - a^5)$ (1 bod).