Opravná písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 21. 6. 2005

Skupina B

1. príklad. Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.

2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\left\{x\,;\left(x \in \mathbb{R}\right) \wedge \left(x^2 - 3x + 2 = 0\right)\right\}$

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4. príklad. $P = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \subseteq X \times Y$ a
$Q = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\} \subseteq X \times Y$ sú relácie nad $X = \{1,2,3\}$ a
$Y = \{1,2,3,4\}$. Zostrojte $P \circ Q$, $Q \circ P$

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú podreťazec CFGA?

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x * y = x + y$, pre $A = \mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

7. príklad. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
$x + \overline{x} = \mathbf{1}$
$x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$
$x + x = 1$

8. príklad. Riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & +2y & +z & = & 4 \\ x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & & = & 6 \end{array}$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

10. príklad. Pre ktoré hodnoty *n* je kompletný graf K_n bipartitný? Pre ktoré hodnoty *n* je cyklus C_n bipartitný? (Graf, ktorý má vlastnosť, že jeho vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín, sa volá *bipartitný graf*.)

11. príklad. Keď je *G* obyčajný graf o 15 hranách a jeho doplnkový graf $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf *G*? (*Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu *G* má rovnakú vrcholovú množinu ako *G*. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v *G*. Slučky neuvažujeme.)

Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi.

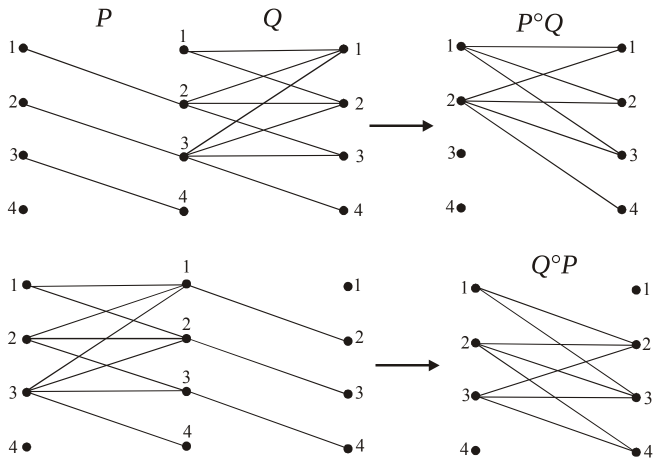
Riešenie

1. príklad.
$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow np(a \cdot b)$. Ak $a = 2k+1$ a $b = 2l+1$, potom $a \cdot b = 2(2kl + k + l) + 1$.

2. príklad
$\{1,2\}$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel

3. príklad
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

4. príklad
$P \circ Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$
$Q \circ P = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$



5. príklad
$4! = 24$

6. príklad
Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do *A*.

7. príklad
$x = \mathbf{0} \vee x = \mathbf{1}$.
$x = \mathbf{0} \vee x = \mathbf{1}$.
$x = \mathbf{1}$.

8. príklad
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 4t,\ y = -3t\ ,\ x = 2 + t\ ,\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -3t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. príklad

$$(|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,)$$

10. príklad

Pre ktoré hodnoty *n* sú nasledujúce grafy bipartitné?

a) K_n

Riešenie: Iba pre n=2, pre viac ako 2 sú vždy aspoň dva vrcholy v jednej partícii, a ľubovoľné 2 vrcholy musia byť spojené hranou.

b) C_n

Riešenie: pre kružnice párneho stupňa, keď si oindexujeme postupne vrcholy idúc po hranách kružnice, do jednej partície dame vrcholy indexované párnym číslom, do druhej nepárnym číslom.

11. príklad

Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G?

Riešenie: Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E| = |V|\deg(v)$$

$$2 \times 28 = |V| \times (|V| - 1)$$

$$|V| = 8$$