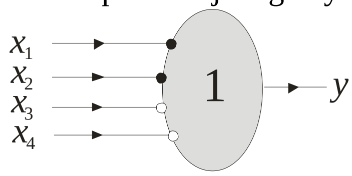
Záverečná písomka (5. 6. 2014)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je syntaktický (derivačný) graf formuly?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) Ako je definovaná konzistetná teória, aké sú jej vlastnosti?

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej DNF formu



Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je logickým dôsledkom T, $T \vdash \alpha$,

$T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa množia vajciami.
(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Neexistuje dym bez ohňa.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula,:

(a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$,
(b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$,
(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,
(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$.

Príklad 6. Pomocou metódy sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia alebo kontradikciadokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $(\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\forall x)\psi(x))$

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

? ?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(b) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Príklad 10. Tabuľka špecifikuje 2-argumentovú Boolovu funkciu $(y_A, y_B) = f(x_1, x_2, x_3)$

#	x_1	x_2	x_3	y_A	y_B
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	0	1	1	0	0
5	1	0	0	1	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	1
8	1	1	1	0	0

Zostrojte Boolovu funkciu špecifikovanú touto tabuľkou tak, aby medzi výstupnými premennými y_A a y_B bol čo najväčší prekryv.

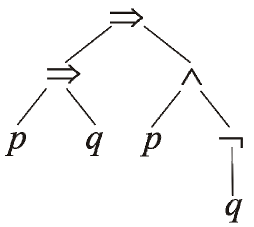
Poznámka: Každý príklad je hodnotený 6 bodmi, maximálny počet bodov je 60. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a meno cvičiaceho pedagóga.. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je syntaktický (derivačný) graf formuly, uvedte príklad?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) Ako je definovaná konzistetná teória, aké sú jej vlastnosti?

(a) Je znázornenie formuly pomocou stromu s jedným koreňovým vrcholom (priradený centrálnej spojke) a koncové vrcholy sú priradené výrokovým premenným. Pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ dostaneme tento derivačný strom

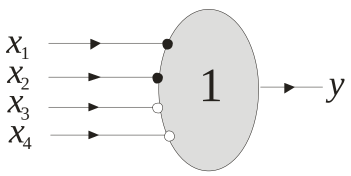


(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou *T* sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) Konzistentná teória je taká teória, ktorá má model, z konyistetnej teórie vyplýva práve len formula φ a nie formula $\neg\varphi$, ak je teória nekonyistetná, potom z nej vyplývajú súčasne φ a $\neg\varphi$.

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



$$y = s(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1)$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$s(x_1+x_2-x_3-x_4-2)$	y
1	0	0	0	0	s(-1)	0
2	0	0	0	1	s(-2)	0
3	0	0	1	0	s(-2)	0
4	0	0	1	1	s(-3)	0
5	0	1	0	0	s(0)	1

6	0	1	0	1	s(-1)	0
7	0	1	1	0	s(-1)	0
8	0	1	1	1	s(-2)	0
9	1	0	0	0	s(0)	1
10	1	0	0	1	s(-1)	0
11	1	0	1	0	s(-1)	0
12	1	0	1	1	s(-2)	0
13	1	1	0	0	s(1)	1
14	1	1	0	1	s(0)	1
15	1	1	1	0	s(0)	1
16	1	1	1	1	s(-1)	0

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x}_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_3\wedge\overline{x}_4)\vee(x_1\wedge\overline{x}_2\wedge\overline{x}_3\wedge\overline{x}_4)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_3\wedge\overline{x}_4)\vee$$
$$(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_3\wedge x_4)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2\wedge\overline{x}_3\wedge x_4)$$

Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T, $T\vDash\alpha$,
$T=\{x\Rightarrow y, y\Rightarrow(z\vee\neg x), \neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z), t\Rightarrow x\}$, $\alpha=z$

Ak $T=\{C_1,C_2,...,C_n\}$, potom vlastnosť $T\vDash\alpha$ je ekvivaletná platnosti implikácie

$$C_1\wedge C_2\wedge...\wedge C_n\Rightarrow\alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1\wedge C_2\wedge...\wedge C_n\wedge\neg\alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T\vDash\alpha$.

$$(x\Rightarrow y)\wedge(y\Rightarrow(z\vee\neg x))\wedge(\neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z))\wedge(t\Rightarrow x)\wedge\neg z$$

Prepíšeme ju do tvaru NKF

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge\underbrace{(t\vee(t\wedge\neg z))}_{t\wedge(t\vee\neg z)}\wedge(\neg t\vee x)\wedge\neg z$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idenpotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge(t\vee\neg z)\wedge t\wedge(\neg t\vee x)\wedge\neg z$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg x\vee y$	$\neg y\vee z\vee\neg x$	$t\vee\neg z$	t	$\neg z$	$\neg t\vee x$	7	8				
z		1	0		0		$\neg y\vee t\vee\neg x$	$\neg y\vee\neg x$	9	10		
y	1						0	0	$\neg x\vee t$	$\neg x$	11	
x						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	$\square$

Záver: Platí tautologické vyplývanie

$$\{x\Rightarrow y, y\Rightarrow(z\vee\neg x), \neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z), t\Rightarrow\}\vDash z$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa množia vajciami.

$\forall x\left(Vtak(x) \Rightarrow Mnoz\_vaj(x)\right)$

$\exists x\left(Vtak(x) \wedge \neg Mnoz\_vaj(x)\right)$

Existuje taký vták, ktorý sa nemnoží vajciami.

(b) Niektorý športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.

$\exists x\left(sport(x) \wedge fyz\_kond(x)\right)$

$\forall x\left(\neg sport(x) \vee \neg fyz\_kond(x)\right)$

$\forall x\left(sport(x) \Rightarrow \neg fyz\_kond(x)\right)$

Žiadny športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.

$\forall x\left(neparne(x) \Rightarrow prime(x)\right)$

$\exists x\left(neparne(x) \wedge \neg prime(x)\right)$

Niektoré nepárne čísla nie sú prvočíslava.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.

$\forall x\left(navst\_UK(x) \Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$

$\exists x\left(navst\_UK(x) \wedge \neg hovori\_angl(x)\right)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Neexistuje dym bez ohňa.

$\exists x\left(dym(x) \wedge \neg ohen(x)\right)$

$\forall x\left(\neg dym(x) \vee ohen(x)\right)$

$\forall x\left(dym(x) \Rightarrow ohen(x)\right)$

Každý dym je s ohňom.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $\left(\exists x\, P(x)\right) \vee \left(\exists x\, \neg P(x)\right)$,

Pomocou formule z príkladu 7.2 $\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right) \equiv \left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right)$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

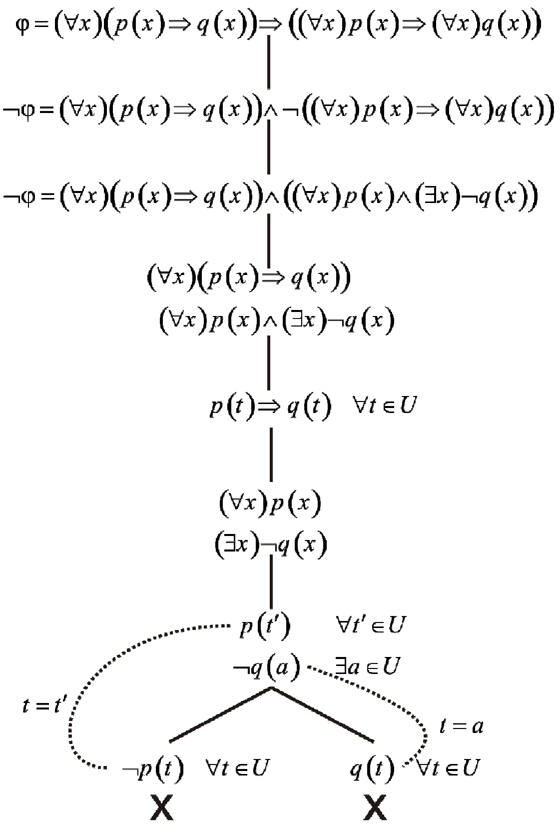
$$\exists x \underbrace{\left(P(x) \vee \neg P(x)\right)}_{1} \equiv 1$$

(b) $\forall x\left(P(x) \vee \neg P(x)\right)$, táto formula je automatický pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\left(P(x) \vee \neg P(x)\right) \equiv 1$ pre každé indivíduum *x*.

(c) $\left(\exists x\, P(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x)\right)$, nvrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\, P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\, P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia $(1 \Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo“).

(d) $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \left(\exists x\, \neg P(x)\right)$, tto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora $\left(\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)\right)$ do ekvivalentného tvaru $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \neg\left(\forall x\, P(x)\right)$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p / \forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 6. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $(\forall x)\left(p(x) \Rightarrow q(x)\right) \Rightarrow \left((\forall x)\, p(x) \Rightarrow (\forall x)\, q(x)\right)$



Formula je tautológia.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

$$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow mat(x)\right) \Rightarrow \left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(mat(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(mat(t) \Rightarrow \neg analf(t)\right)$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$
dostaneme

$\left(st(t) \Rightarrow \neg analf(t)\right)$ pre ľubovolné indivíduum *t*, čiže platí aj

$$\forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right)$$

Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

$$\varphi_1: \exists x\left(st(x) \wedge kom(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge kom(a)\right)$$
$$\varphi_2: \exists x\left(kom(x) \wedge mat(x)\right) \Rightarrow \left(kom(b) \wedge mat(b)\right)$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a)\right)$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *fyz*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg$*chem*(*a*). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg chem(x)$$

alebo, „niektorý astronómovia nie sú chemici“.

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$\varphi_1: \forall x \left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x) \right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a) \right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a) \right)$

$\varphi_2: \exists x \left(analf(x) \wedge vce(x) \right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a) \right)$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *analf*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg$*st*(a) , spojením s *vce*(a) dostaneme

$$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, vce(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je „niektorý včelár nie je študent“

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \right)$

1.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$q \Rightarrow r$	(aktivácie 2. pomocného predpokladu)
3.	p	(aktivácia 3. pomocného predpokladu)
4.	q	(modus ponens na 1. a 3.)
5.	r	(modus ponens na 2. a 4.)
6.	$p \Rightarrow r$	(deaktivácia 3.)
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(deaktivácia 2.)
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \right)$	(deaktivácia 1.)

(b) $\left(\forall x\, \varphi(x) \right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y) \right)$

1.	$\forall x\, \varphi(x)$
2.	$\varphi(t)$
3.	$\exists x\, \varphi(x)$
4.	$\left(\forall x\, \varphi(x) \right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y) \right)$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

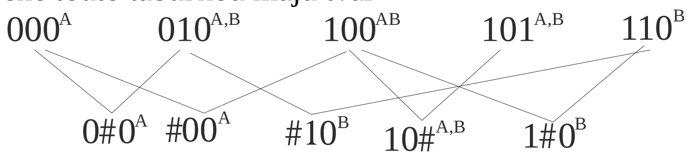
φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1

Príklad 10. Tabuľka špecifikuje 2-argumentovú Boolovu funkciu $(y_A, y_B) = f(x_1, x_2, x_3)$

#	x_1	x_2	x_3	y_A	y_B
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	0	1	1	0	0
5	1	0	0	1	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	1
8	1	1	1	0	0

Zostrojte Boolovu funkciu špecifikovanú touto tabuľkou tak, aby medzi výstupnými premennými y_A a y_B bol čo najväčší prekryv.

Boolove funkcie určené touto tabuľkou majú tvar



Potom optimalizované Boolove funkcie pre podsystémy majú tvar, ktorý obsahuje spoločné „podbloky" pre tieto podsystémy

$$f_A = 0\#0^A + \#00^A + 10\#^{AB} = \overline{x}_1\overline{x}_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2$$

$$f_B = \#10^B + 10\#^{AB} + 1\#0^B = x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_3$$

Tieto dve Boolove funkcie majú spoločný jeden blok $10\#^{A,B}$, čo môže zjednodušiť ich reprezentáciu pomocou logických brán, pozri nasledujúci obrázok