3. kontrolná písomka (13. 12. 2007)

Príklad 1.
Nájdite riešenie sylogizmov (ak existuje, uveďte aj nutné podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý študent je včelár
niektorí včelári sú analfabeti
?

(b) každý včelár nie je analfabet
niektorí študenti sú včelári
?

(c) niektorí študenti sú chemici
každý kominár nie je chemik
?

Príklad 2.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte

(a) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vdash ((p \vee q) \Rightarrow r)$

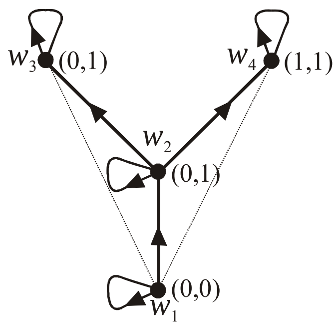
(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow (q \wedge r))$

Príklad 3.
Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautológia

Príklad 4. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg p \vee \neg q))$$

pre Kripkeovské modely s reláciou *R*, pričom každý vrchol je ohodnotený dvojicou pravdivostných hodnôt premenných p a q.



Príklad 5.
Zistite pomocou sémantického tabla, či formula fuzzy logiky $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ je tautológia.

Príklad 6 (premiový).
Zistite pomocou sémantického tabla, či formula intuicionisticej logiky $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ je tautológia.

Poznámka: Premiový 6. príklad sa nemusí počítať, poskytuje určitú šancu tým, čo nevyriešili ostatné príklady. **Všetky príklady budú hodnotené po 3 bodoch.**

Riešenie

Príklad 1.
Nájdite riešenie sylogizmov (ak existuje, uveďte aj nutné podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý študent je včelár
niektorí včelári sú analfabeti
?

$\forall x\left(st(x) \Rightarrow vc(x)\right)$

$\exists x\left(vc(x) \wedge an(x)\right)$

$st(a) \Rightarrow vc(a)$

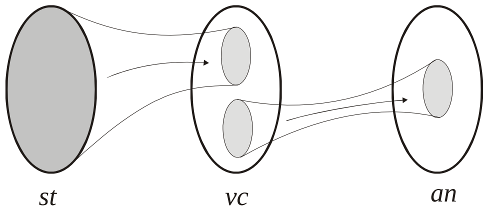
$vc(a) \wedge an(a)$

$vc(a)$

$an(a)$

nie je čo dokazovať

riešenie: neexistuje



(b) každý včelár nie je analfabet
niektorí študenti sú včelári
?

$\forall x\left(vc(x) \Rightarrow \neg an(x)\right)$

$\exists x\left(st(x) \wedge vc(x)\right)$

$st(a) \wedge vc(a)$

$st(a)$

$vc(a)$

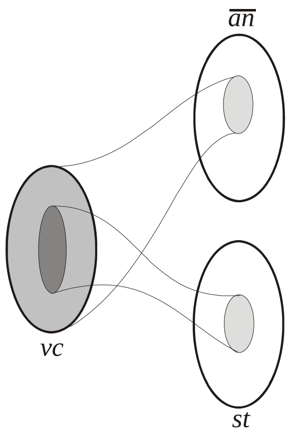
$vc(a) \Rightarrow \neg an(a)$

$\neg an(a)$

$st(a) \wedge \neg an(a)$

$\exists x\left(st(x) \wedge \neg an(x)\right)$

riešenie: niektorí študenti nie sú analfabeti.

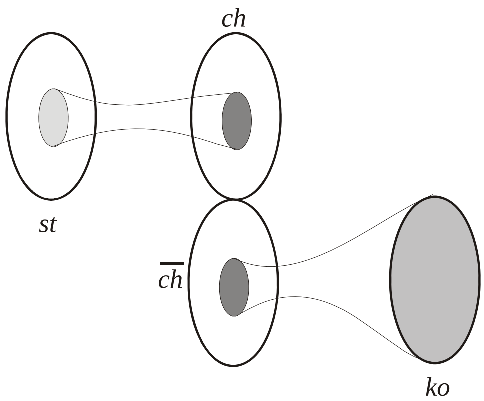


(c) niektorí študenti sú chemici
každý kominár nie je chemik
?

$\exists x\left(st(x) \wedge ch(x)\right)$

$\forall x\left(ko(x) \Rightarrow \neg ch(x)\right)$

$st(a) \wedge ch(a)$



$st(a)$

$ch(a)$

$ko(a) \Rightarrow \neg ch(a)$

$\neg ko(a)$

$st(a) \wedge \neg ko(a)$

$\exists x\left(st(x) \wedge \neg ko(x)\right)$

riešenie: niektorí študenti nie sú kominári

Príklad 2.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vdash \left((p \vee q) \Rightarrow r\right)$

1	$p \Rightarrow r$	1. predpoklad
2	$q \Rightarrow r$	2. predpoklad
3	$p \vee q$	akt. pomocného predpokladu
4	$p \qquad q$	eliminácia disjunkcie na 3, 2 alternat. prípady
5	r	aplikácia modus ponens na 1 a 4
6	$p \vee q \Rightarrow r$	deaktivácia pomoc. predpokladu

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right)$

1	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
2	$p \Rightarrow r$	2. predpoklad
3	p	akt. pomocného predpokladu
4	q	aplikácia m.p. na 1 a 3
5	r	aplikácia m.p. na 2 a 3
6	$q \wedge r$	introdukcia konjunkcie na 4 a 5
7	$p \Rightarrow q \wedge r$	deaktivácia pomocného predpokladu

Príklad 3.
Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula je tautológia Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky.
$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	½	1	½	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
½	0	½	1	½	½	1
½	½	1	½	½	1	1

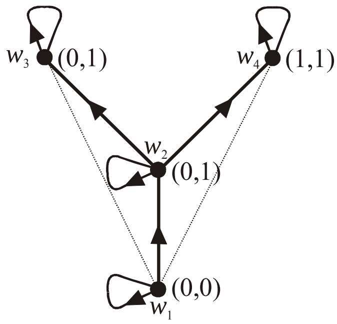
½	1	1	0	½	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	½	½	½	0	½	1
1	1	1	0	0	1	1

Formula je tautológia.

Príklad 4. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly

$$p \Rightarrow \left(\left(\neg\left(p \wedge q\right)\right) \vee \left(\neg p \vee \neg q\right)\right)$$

pre Kripkeovské modely s reláciou R, pričom každý vrchol je ohodnotený dvojicou pravdivostných hodnôt premenných p a q.



podformula	w_1	w_2	w_3	w_4
p	0	0	0	1
q	0	1	1	1
$p \wedge q$	0	0	0	1
$\neg p$	0	0	1	0
$\neg q$	0	0	0	0
$\neg p \vee \neg q$	0	0	1	0
$\neg\ (p \wedge q)$	0	0	1	0
$(\neg\ (p \wedge q)) \vee (\ \neg p \vee \neg q)$	0	0	1	0
$p \Rightarrow (\neg\ (p \wedge q)) \vee (\ \neg p \vee \neg q)$	0	0	1	0

Príklad 5.

Zistite či formula fuzzy logiky je tautológia: $p \Rightarrow \left(\neg p \Rightarrow q\right)$

Riešenie:

$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) = 1$

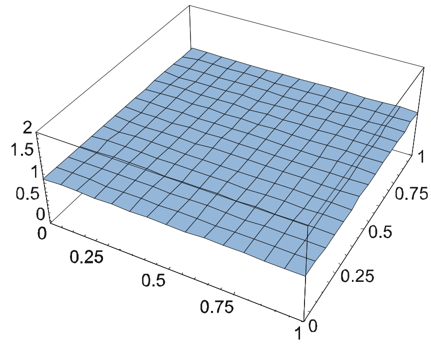
$p \leq (\neg p \Rightarrow q)$

$1-p \leq q)$ $\quad$ $1-p > q)$

$\boxed{p \leq 1}$ $\quad$ $p \leq (1-(1-p)+q)$

$p \leq p+q$

$\boxed{0 < q}$



Príklad 6 (premiový).
Zistite pomocou sémantického tabla, či formula intuicionisticej logiky $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ je tautológia.

$v(w_1, \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)) = 0$

$v(w_2, \neg(p \wedge q)) = 1$ $\quad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$
$v(w_2, \neg p \vee \neg q) = 0$

$v(w_3, p \wedge q) = 0$ $\quad \forall w_3 \in \Gamma(w_2)$
$v(w_2, \neg p) = 0$
$v(w_2, \neg q) = 0$

$v(w_4, p) = 1$ $\quad \exists w_4 \in \Gamma(w_2)$
$v(w_5, q) = 1$ $\quad \exists w_5 \in \Gamma(w_2)$

$w_4 = w_3$ $\quad$ $w_5 = w_3$?

$v(w_3, p) = 0$ $\quad$ $v(w_3, q) = 0$

X $\quad$ **O**

Formula nie je tautológia, len jedna vetva je uzavretá.