1. kontrolná písomka z Matematickej logiky konaná dňa 12. 3. 2009

1. príklad. Pre formulu $\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ zostrojte syntaktický strom, pomocou neho zostrojte všetky možné podformuly danej formuly a pomocou tabuľkovej metódy zistite, či je tautológia.

2. príklad. Pomocou vety o dedukcii dokážte, že z teórie $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ logicky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow r$, t. j. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$.

3. príklad. Nájdite riešenie týchto jednoduchých schém usudzovania (ak existujú).

(a) $\dfrac{\begin{array}{l} \textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem} \\ \textit{padá sneh} \end{array}}{?}$, (b) $\dfrac{\begin{array}{l} \textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem} \\ \textit{kúpem sa} \end{array}}{?}$

(c) $\dfrac{\begin{array}{l} \textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem} \\ \textit{nepadá sneh} \end{array}}{?}$, (d) $\dfrac{\begin{array}{l} \textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem} \\ \textit{nekúpem sa} \end{array}}{?}$

4. príklad.

Dokážte tieto ekvivalencie:

(a) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

(b) $(p \vee q) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

5. príklad. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

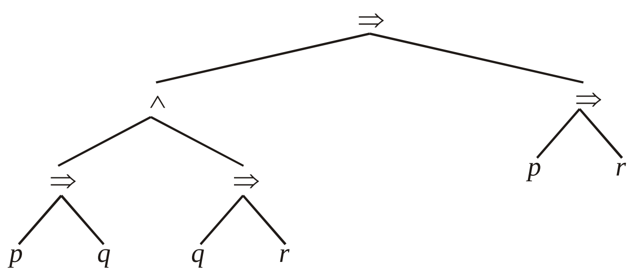
$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\,\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \end{array}$$

Poznámka. Každý príklad je hodnotený 3 bodmi, t. j. maximálny počet bodov za túto písomku je 5x3 = 15 bodov. Čas na písomku je 45 minút .

Riešenie

1. príklad. Pre formulu $\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ zostrojte syntaktický strom, pomocou neho zostrojte všetky možné podformuly danej formuly a pomocou tabuľkovej metódy zistite, či je tautológia.

Riešenie. Syntaktický strom tejto formuly má tvar



Množina podformúl je zostrojená pomocou tohto stromu tak, že pre každý vrchol pomocou daného podstromu zostrojíme podformulu

$$\{p, q, r, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \Rightarrow r, (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$$

#	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	φ
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	0	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Formula $\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ je tautológia.

2. príklad. Pomocou vety o dedukcii dokážte, že z teórie $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ logicky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow r$, t. j. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$.

Riešenie.

1.	p	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
3.	$q \Rightarrow r$	2. predpoklad
4.	q	aplikácia modus ponens na 1 a 2
5.	r	aplikácia modus ponens na 3 a 4
6.	$p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu 1 na 5, QED

3. príklad. Nájdite riešenie týchto jednoduchých schém usudzovania (ak existujú).

(a) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{padá sneh}\end{array}}{?}$, (b) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{kúpem sa}\end{array}}{?}$

(c) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nepadá sneh}\end{array}}{?}$, (d) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nekúpem sa}\end{array}}{?}$

Riešenie.

(a) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{padá sneh}\end{array}}{\textit{nekúpem sa}}$, (b) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{kúpem sa}\end{array}}{\textit{nepadá sneh}}$

(c) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nepadá sneh}\end{array}}{\emptyset}$, (d) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nekúpem sa}\end{array}}{\emptyset}$

4. príklad.

Dokážte tieto ekvivalencie:

(c) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

(d) $(p \vee q) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

Riešenie.

(a) $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \equiv (\neg p) \downarrow (\neg q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$

(d) $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \equiv \neg((\neg p) \wedge (\neg q)) \equiv p \vee q$

5. príklad. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \end{array}$$

Riešenie. Tabuľka všetkých možných hodnôt argumentov a priradených výsledkov má tvar

#	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	interpretácia
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0×0=0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0×1=0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0×2=0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	0×3=0
5	0	1	0	0	0	0	0	0	1×0=0
6	0	1	0	1	0	0	0	1	1×1=1
7	0	1	1	0	0	0	1	0	1×2=2
8	0	1	1	1	0	0	1	1	1×3=3
9	1	0	0	0	0	0	0	0	2×0=0
10	1	0	0	1	0	0	1	0	2×1=2
11	1	0	1	0	0	1	0	0	2×2=4
12	1	0	1	1	0	1	1	0	2×3=6
13	1	1	0	0	0	0	0	0	3×0=0
14	1	1	0	1	0	0	1	1	3×1=3
15	1	1	1	0	0	1	1	0	3×2=6
16	1	1	1	1	1	0	0	1	3×3=9

$$\beta_1 = (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = {} & (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = {} & (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 = {} & (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)\end{aligned}$$