

Príklad 1. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín \mathbb{N} a \mathbb{Z} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, tak že párne čísla z \mathbb{N} sa zobrazia na nezáporné zo \mathbb{Z} a všetky párne čísla z \mathbb{N} sa zobrazia na záporné zo \mathbb{Z} .

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi(1) = -1$$

$$\varphi(2) = 1 \qquad \varphi(3) = -2$$

$$\varphi(4) = 2 \qquad \varphi(5) = -3$$

$$\varphi(k) = \begin{cases} k/2 & \text{ak } k \in Ev \\ -\lceil k/2 \rceil & \text{ak } k \in Odd \end{cases}$$

φ je bijektívne zobrazenie $\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

Príklad 2. $|Odd| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

- Dokážte rovnosť mohutností množín Odd a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : Odd \rightarrow \mathbb{N}$, tak že každé nepárne číslo sa zobrazí na dolnú celú časť jeho polovice.

$Odd:$	1	3	5	7	9	11	...
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	...
$\mathbb{N}:$	0	1	2	3	4	5	...

$$\varphi(1) = 0$$

$$\varphi(3) = 1$$

$$\varphi(5) = 2$$

$$\varphi(7) = 3$$

\vdots

$$\varphi(k) = \lfloor k/2 \rfloor \quad \text{pre } \forall k \in Odd$$

φ je bijektívne zobrazenie $\Rightarrow |Odd| = |\mathbb{N}|$

Príklad 3. $|\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín \mathbb{N}^+ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, tak že $\varphi(k) = k - 1$ pre $\forall k \in \mathbb{N}^+$

\mathbb{N}^+ :	1	2	3	4	5	6	...
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	...
\mathbb{N} :	0	1	2	3	4	5	...

φ je bijektívne zobrazenie $\Rightarrow |\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}|$

Príklad 4. $|\{7k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{7k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ nasledujúcim spôsobom.

$$\begin{array}{ccccccc} Ev: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 7k + 1: & 1 & 8 & 15 & 22 & 29 & 36 & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} Odd: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 7k + 5: & 5 & 12 & 19 & 26 & 33 & 40 & \dots \end{array}$$

$$\varphi(3) = 8$$

$$\varphi(8) = 29$$

\vdots

$$\varphi(2i) = 7i + 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\varphi(2i + 1) = 7i + 5 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\psi : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\psi(k) = 4k + (1 - \lfloor k/2 \rfloor) \quad k = 2i + 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\psi(k) = 7k/2 + 1 \quad k = 2i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Príklad 5. $|\{5k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{5k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ nasledujúcim spôsobom.

\mathbb{N} :	0	1	2	3	4	5	...
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	...
A :	2	7	12	17	22	27	...

$$\varphi(0) = 2$$

$$\varphi(1) = 7$$

$$\varphi(2) = 12$$

$$\varphi(3) = 17$$

\vdots

$$\varphi(k) = 5k + 2 \quad \text{pre } \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\psi : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\psi(l) = (l - 2) / 5 \quad \forall l \in A$$

$$\psi(l) = \lfloor l/5 \rfloor \quad \forall l \in A$$

Príklad 6. $|\{ak + b\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{ak + b \mid a, b \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a \neq 0\}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujeme zobrazenie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$, tak že $\varphi(k) = ak + b$ pre $\forall k \in \mathbb{N}$

Príklad 7. $|\{5k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- $A = \{\underline{0}, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \underline{35}, 40, \dots\} \cup \{\underline{0}, 7, 14, 21, 28, \underline{35}, 42, \dots\}$
- Zjednotenie A rozdelíme na 3 podmnožiny a ukážeme, že každá je ekvivalentná s \mathbb{N} .
 $A = X \cup Y \cup Z$

$$X = \{5k, k \in \mathbb{N}, k \neq 7\}$$

$$Y = \{7k, k \in \mathbb{N}, k \neq 5\}$$

$$Z = \{35k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X \quad \varphi(i) = 5(i + \lfloor i/7 \rfloor), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$\psi: \mathbb{N} \rightarrow Y \quad \psi(i) = 7(i + \lfloor i/5 \rfloor), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$\nu: \mathbb{N} \rightarrow Z \quad \nu(i) = 35i, \quad i \in \mathbb{N}$$

Potom použijeme vetu o disjunktných množinách (nech A, B sú disj. množ., pre ktoré platí $|A| = |B| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{N}| = |A \cup B|$)

Príklad 8. $|\mathbb{N} \times \{2, 4, 6\}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N} \times \{2, 4, 6\}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom.

2	4	6
$(0,2) \mapsto 0$	$(0,4) \mapsto 1$	$(0,6) \mapsto 2$
$(1,2) \mapsto 3$	$(1,4) \mapsto 4$	$(1,6) \mapsto 5$
$(2,2) \mapsto 6$	$(2,4) \mapsto 7$	$(2,6) \mapsto 8$
\vdots	\vdots	\vdots

$$\varphi : (i, 2) \longmapsto 3i$$

$$\varphi : (i, 4) \longmapsto 3i + 1$$

$$\varphi : (i, 6) \longmapsto 3i + 2$$

$$\varphi(i, j) = 3i + j/2 - 1$$

Príklad 9. $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a \mathbb{R} .

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = \operatorname{tg}(x) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Príklad 10. $|\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Zadanie:

■ Dokážte rovnosť mohutností množín $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ a \mathbb{N} .

Riešenie:

- definujme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom.

...	$(0,-3) \mapsto 15$	$(0,-2) \mapsto 8$	$(0,-1) \mapsto 3$	$(0,0) \mapsto 0$	$(0,1) \mapsto 1$	$(0,2) \mapsto 4$	$(0,3) \mapsto 9$...
...	$(1,-3) \mapsto 23$	$(1,-2) \mapsto 14$	$(1,-1) \mapsto 7$	$(1,0) \mapsto 2$	$(1,1) \mapsto 5$	$(1,2) \mapsto 10$	$(1,3) \mapsto 17$...
...	$(2,-3) \mapsto 33$	$(2,-2) \mapsto 22$	$(2,-1) \mapsto 13$	$(2,0) \mapsto 6$	$(2,1) \mapsto 11$	$(2,2) \mapsto 18$	$(2,3) \mapsto 27$...
...	$(3,-3) \mapsto 45$	$(3,-2) \mapsto 32$	$(3,-1) \mapsto 21$	$(3,0) \mapsto 12$	$(3,1) \mapsto 19$	$(3,2) \mapsto 28$	$(3,3) \mapsto 39$...
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

$$\varphi(3, 0) = 9 + 3 = 12$$

$$\varphi(1, -2) = 9 + 5 = 14$$

$$\varphi(1, 2) = 9 + 1 = 10$$

$$\varphi(m, n) = \begin{cases} (m + |n|)^2 + m & \text{pre } n \geq 0 \\ (m + |n|)^2 + (m + |n|) + |n| & \text{pre } n < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Príklad 11. $|(0, 1)| = |(0, 2)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0, 1)$ a $(0, 2)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 2)$$

$$\varphi(x) = 2x \quad x \in (0, 1)$$

Príklad 12. $|(0, 1)| = |(a, b)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0, 1)$ a (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (a, b)$$

$$\varphi(x) = a + (b - a) * x \quad x \in (0, 1), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Príklad 13. $|(0, 1)| = |(0, \infty)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0, 1)$ a $(0, \infty)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$$

$$1) \varphi(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad x \in (0, 1)$$

$$2) \varphi(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x \in (0, 1)$$

$$3) \varphi(x) = -\log x \quad x \in (0, 1)$$

Príklad 14. $|(0, 1)| = |(0, 1)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0, 1)$ a $(0, 1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Príklad 15a. $|\langle 0, 1 \rangle| = |(0, 1)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle 0, 1 \rangle$ a $(0, 1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow (0, 1)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq 0, \frac{1}{n} \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \qquad n = 2, 3, \dots$$

Príklad 15b. $|\langle 0, 1 \rangle| = |(0, 1)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle 0, 1 \rangle$ a $(0, 1)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow (0, 1)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \neq 0, \frac{n-1}{n} \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \qquad n = 2, 3, \dots$$

Príklad 16. $|(0, 1)| = |(0, 2) \cup (4, 7)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $(0, 1)$ a $(0, 2) \cup (4, 7)$.

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 2) \cup (4, 7)$$

$$\varphi(x) = 4x \qquad x \in (0, \tfrac{1}{2})$$

$$\varphi(x) = 6x + 1 \qquad x \in (\tfrac{1}{2}, 1)$$

Príklad 17. $|\langle a, b \rangle| = |(a, b)|$

Zadanie:

■ Dokážte ekvivalenciu intervalov $\langle a, b \rangle$ a (a, b) .

Riešenie:

- definujeme zobrazenie φ nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow (a, b)$$

$$\varphi(x) = x \qquad x \in \langle a, b \rangle; \ x \neq a, \ b, \ a + \frac{b-a}{n}, \ a + (n-1) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

$$\varphi(a) = a + \frac{b-a}{4}$$

$$\varphi \left(a + \frac{b-a}{n} \right) = a + \frac{b-a}{n+1} \qquad n = 4, 5, 6, \dots$$

$$\varphi(b) = a + 3 \left(\frac{b-a}{4} \right)$$

$$\varphi \left(a + (n-1) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) = a + n \left(\frac{b-a}{n+1} \right) \qquad n = 4, 5, 6, \dots$$