Maticová algebra II

- systém lineárnych rovníc
- Frobeniova veta
- Gaussova eliminačná metóda
- Determinanty
- Cramerove pravidlo

Systém lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc, ktorý obsahuje *m* rovníc o *n* neznámych

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Zavedením matíc

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

prepíšeme systém do kompaktného maticového tvaru

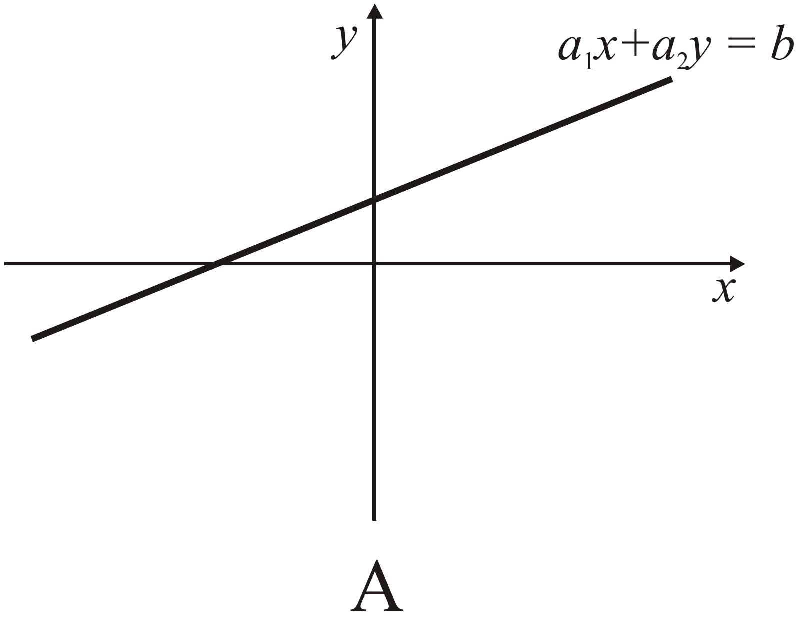
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

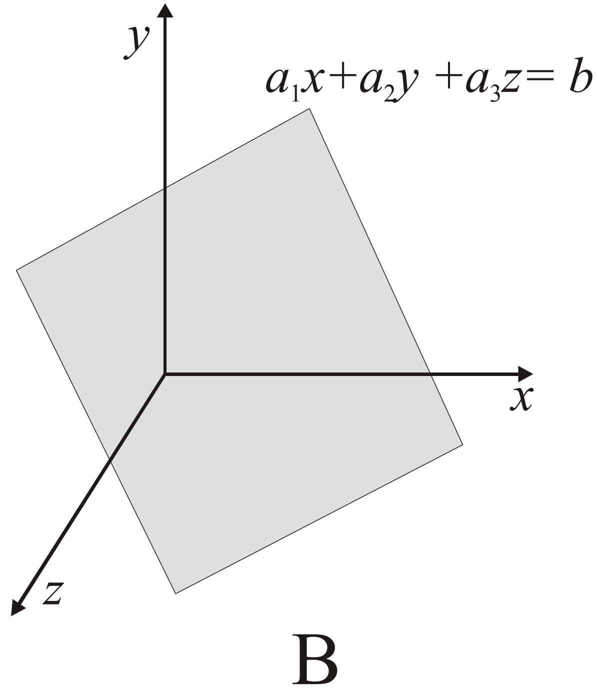
kde $\boldsymbol{A}$ sa nazýva ***matica koeficientov***, $\boldsymbol{x}$ sa nazýva ***vektor neznámych*** a $\boldsymbol{b}$ sa nazýva ***vektor konštantných členov***.

Riešenie systému môže byť reprezentované stĺpcovým vektorom

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ktorý keď dosadíme do $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, dostaneme maticovú identitu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$.





Geometrická interpretácia rovnice zo systému lineárnych rovníc pre (A) $n = 2$, rovnica je interpretovaná priamkou, (B) $n = 3$, rovnica je interpretovaná rovinou.

Riešenie systému $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je potom určené prienikom týchto geometrických útvarov priradených jednotlivým rovniciam. Označme „nadrovinu“ priradenú i-tej lineárnej rovnici z $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ symbolom σ_i, potom riešenie je zadané ich prienikom

$$\mathcal{X} = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_m$$

Z geometrického pohľadu vyplýva, že tento prienik buď obsahuje

(i) len jeden element,
(ii) má nekonečne mnoho elementov,
(iii) je prázdny.

Jeden z hlavných cieľov teórie systémov lineárnych rovníc je rozhodnúť za ktorých podmienok majú alebo nemajú riešenie a v prípade, že ho majú, tak ako ho zostrojiť.

Za predpokladu, že matica koeficientov $\boldsymbol{A}$ je regulárna, riešenie systému lineárnych rovníc má tento explicitný tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Zavedieme matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pomocou týchto matíc prepíšeme tento systém do maticového tvaru $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. V predchádzajúcej prednáške príklade 8.8 bola zostrojená inverzná matica vzhľadom k $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Použitím $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ zostrojíme riešenie systému v tvare

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Príklady

(1) Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

má práve jedno riešenie $\boldsymbol{x} = \left(1/2, 1/2\right)^T$.

(2) Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$-x_1 - x_2 = -1$$

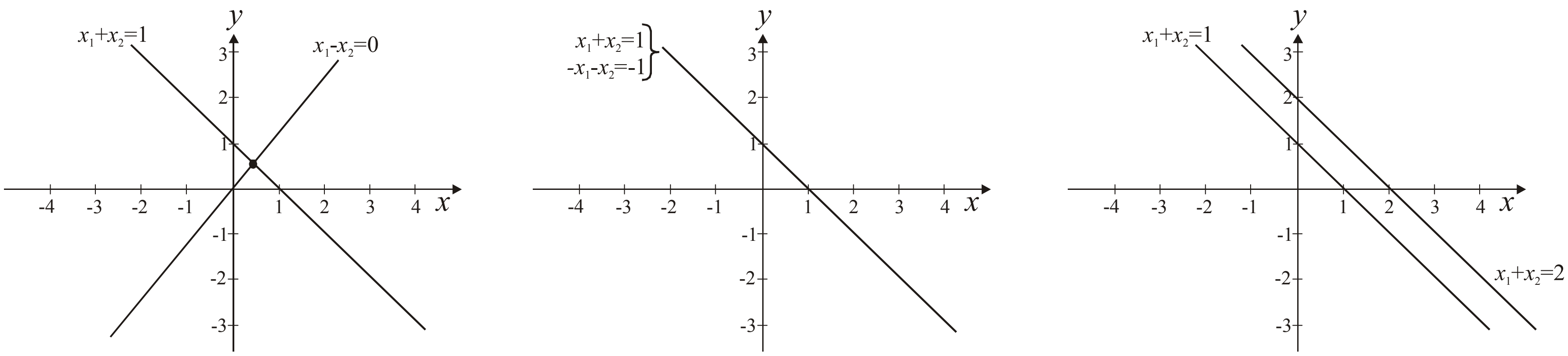
má nekonečne mnoho riešení, ktoré môžeme vyjadriť napr. vektorom $\boldsymbol{x} = \left(t, 1-t\right)^T, \forall t \in \mathbb{R}$

(3) Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

nemá riešenie, rovnice sú vo vzájomnom spore

Geometrická interpretácia rovníc



A B C

Rozšírená matica

Definujme **rozšírenú maticu (koeficientov)** $\boldsymbol{A}'$ tak, že matica koeficientov $\boldsymbol{A}$ je rozšírená o stĺpcový vektor konštantných členov

$$\boldsymbol{A}' = \left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Pomocou hodností matice koeficientov $\boldsymbol{A}$ a rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$ môžeme stanoviť, kedy systém lineárnych rovníc má alebo nemá riešenie.

Veta (Frobeniova veta). Systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}')$$

Pričom, podrobnejšou analýzou tejto podmienky zistíme, že

(1) ak $h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}')$, potom systém nemá riešenie,

(2) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = n$, potom systém má práve jedno riešenie,

(3) ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') < n$, potom systém má nekonečne mnoho riešení.

Táto veta patrí medzi fundamentálny teoretický výsledok teórie lineárnych rovníc, špecifikuje nutné a postačujúce podmienky pre existenciu riešenia.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém má práve jedno riešenie, $\boldsymbol{x} = (1/2, 1/2)^T$.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(A) = h(A') = 1 < 2$$

To znamená, že systém má nekonečne mnoho riešení, $\boldsymbol{x} = (t, 1-t)^T$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Príklad

Systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Matica koeficientov a rozšírená matica majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnosti týchto matíc vyhovujú podmienke

$$h(\boldsymbol{A}) = 1 \neq h(\boldsymbol{A}') = 2$$

To znamená, že systém nemá riešenie.

Komentár

- Frobeniova veta nám len zabezpečuje či systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má alebo nemá riešenie, ale v prípade, že existuje, neumožňuje nám toto riešenie nájsť.
- Aplikácia vety vyžaduje stanovenie hodností tak matice koeficientov *A,* ako aj rozšírenej matice $\boldsymbol{A}'$, tento problém môže byť uskutočnený súčasne tak, že stanovíme hodnosť rozšírenej matice, pričom nebudeme používať elementárne operácie transpozície stĺpcových vektorov (menovite stĺpcového vektora konštantných členov $\boldsymbol{b}$ so stĺpcovými vektormi matice koeficientov, a taktiež, aj stĺpcových vektorov z matice $\boldsymbol{A}$ samotne).
- Upravená rozšírená matica v trojuholníkovom tvare je vhodná na konštrukciu riešenia pomocou metódy spätných substitúcií. Tento prístup tvorí obsah Gaussovej eliminačnej metódy (GEM), ktorá tvorí jeden z najefektívnejších algoritmov pre riešenie systému lineárnych rovníc.

Gaussova eliminačná metóda (GEM) riešenia systému lineárnych rovníc

Nad rozšírenou maticou ***A***' sa vykonáva postupnosť nasledujúcich elementárnych operácií nad jej riadkami:

(1) transpozícia dvoch riadkov,
(2) vynásobenie riadku nenulovým číslom a
(3) pripočítanie násobku vybraného riadku k inému riadku.

Cieľom týchto úprav je pretransformovať rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar. Riešenie získame z takto upravenej rozšírenej matice metódou spätných substitúcií.

Príklad

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3\\
2x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

Rozšírená matica má tvar

$$
\boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)
$$

1. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v prvom stĺpci

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ \boxed{1} & 2 & -1 & 3\\ \boxed{2} & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 3 & -6\\ 0 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right)
$$

2. krok. Vykonáme vynulovanie prvku pod diagonálou v druhom stĺpci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right)$$

K tretiemu riadku pripočítame druhý riadok

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Posledná matica znamená, že pôvodný systém rovníc bol pretransformovaný do tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^T = (1,3,5)$$

Príklad

Použitím Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 \phantom{{}+3x_3} + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Rozšírená matica má tvar

$$\boldsymbol{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. krok, nulujeme prvky v 1. stĺpci pod diagonálou

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -8 & -6 & -14 \\ -2 & 0 & -6 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(i) Vynásobíme 2. a 3. riadok rozšírenej matice číslom –2
(ii) K druhému a tretiemu riadku pripočítame prvý riadok
(iii) Posledné tri riadky sú lineárne závislé, tak napr. 2. a 3. riadok získame vynásobením 4. riadku číslom –3 resp. –1, môžeme teda vynechať 2. a 3. riadok.

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

Máme dve rovnice pre štyri neznáme, t. j. dve neznáme môžu byť charakterizované ako volné parametre, $x_3 = u,\ x_4 = v$, potom upravený systém prepíšeme do formálneho tvaru dvoch lineárnych rovníc pre dve neznáme

$$2x_1 - x_2 = 5 - 5u - 3v$$
$$x_2 = 3 - u - v$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme konečné riešenie pre neznámu x_1

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(5 - 5u - 3v + \left(3 - u - v\right)\right) = 4 - 3u - 2v$$

Stĺpcový vektor riešenia má tvar

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4-3u-2v\\ 3-u-v\\ u\\ v\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}}-u\underbrace{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}-v\underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{a}-u\boldsymbol{b}-v\boldsymbol{c}$$

Môžeme teda uzavrieť, že systém má nekonečne mnoho riešení, ktoré tvoria množinu $\mathcal{X}=\left\{\boldsymbol{a}-u\boldsymbol{b}-v\boldsymbol{c};\, u,v\in\mathbb{R}\right\}$. Ak napríklad položíme $u=v=1$, potom vektor riešení má tvar

$$\boldsymbol{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}}-\underbrace{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}-\underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Homogénny systém lineárnych rovníc

Ak stĺpcový vektor konštantných členov je nulový, potom systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sa nazýva homogénny

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

Homogénny systém má vždy tzv. triviálne riešenie, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Môžeme si položiť otázku, kedy existuje netriviálne riešenie (keď aspoň jedna neznáma je nenulová). Tento problém je taktiež riešený Frobeniovou vetou.

Veta. Homogénny systém lineárnych rovníc má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice koeficientov je menšia ako počet neznámych

$$h(\boldsymbol{A}) < n$$

Jednoduchý dôsledok tejto vety je, že ak hodnosť matice sa rovná počtu neznámych, $h(\boldsymbol{A}) = n$, potom homogénny systém má len triviálne „nulové“ riešenie.

Príklad

Hľadajme riešenie homogénneho systému rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \qquad + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Budeme hľadať hodnosť matice koeficientov tohto systému

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(\boldsymbol{A}) = 2 < 4$, t. j. systém má nekonečne mnoho netriviálnych riešení. Pomocou trojuholníkovej matice, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou maticou koeficientov, zostrojíme ekvivalentný homogénny systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \quad + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Tento systém obsahuje 2 rovnice pre 4 neznáme, potom, napríklad x_3 a x_4 môžu byť zvolené ako volné parametre, $x_3 = u$ a $x_4 = v$, pre $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3u - 2v \\ -u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} = -u \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} - v \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} = -u\boldsymbol{a} - v\boldsymbol{b}$$

Množinu riešení potom môžeme vyjadriť takto

$$\mathcal{X} = \left\{ u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b};\, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Príklad

Nájdite riešenie homogénneho systému

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Stanovíme hodnosť matice koeficientov

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

Hodnosť matice koeficientov $h(\boldsymbol{A}) = 3$, čo je aj počet neznámych, t. j. homogénny systém má len triviálne riešenie.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^T = \left(0,0,0\right)$$

Týmto sme ukázali na konkrétnom príklade, že ak hodnosť matice koeficientov sa rovná počtu neznámych, $h(\boldsymbol{A}) = n$, homogénny systém má len triviálne riešenie. Tieto úvahy môžeme zosumarizovať do nasledujúcej vety.

Veta. Homogénny systém lineárnych rovníc má buď len jedno triviálne riešenie, keď $h\left(\boldsymbol{A}\right) = n$, alebo má mnoho netriviálnych riešení, keď $h\left(\boldsymbol{A}\right) < n$.

Determinanty

Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých možných matíc. Hodnosť matice môžeme formálne chápať ako zobrazenie množiny matíc $\mathcal{A}$ na množinu kladných celých čísel

$$h:\mathcal{A}\to\{1,2,...\}$$

Analogicky, pod pojmom ***determinant*** budeme rozumieť zobrazenie množiny štvorcových matíc $\mathcal{A}_{\square}\subset\mathcal{A}$ na množinu reálnych čísel

$$det:\mathcal{A}_{\square}\to\mathbb{R}$$

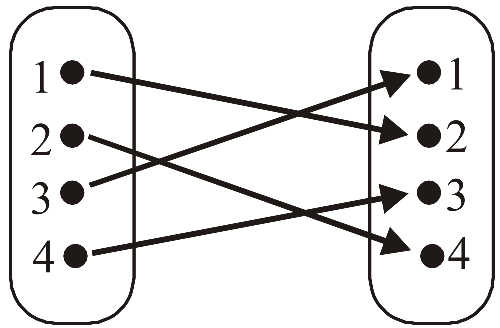
Determinant matice $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}_{\square}$ budeme označovať symbolom $|\boldsymbol{A}|$, je to reálne číslo z $\mathbb{R}$ priradené štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$.

Prv než pristúpime k definícii determinantu uvedieme základné skutočnosti o permutáciách. ***Permutáciu*** P priradenú n objektom budeme vyjadrovať symbolom

$$P = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n \right)$$

kde elementy p_1, $p_2, \ldots,$ p_{n} sú prirodzené čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré vyhovujú podmienke

$$i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$$



Celkový počet permutácií n objektov je $n!$, tieto permutácie tvoria symetrickú grupu (množinu) permutácií S_{n}.

Ku každej permutácii môžeme priradiť nezáporné celé číslo, ktoré sa nazýva ***počet inverzií***: hovoríme, že prvky p_i a p_j tvoria inverziu v permutácia $P=(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots,p_n)$, vtedy a len vtedy, ak platí

$$i < j \Rightarrow p_i > p_j$$

Celkový počet inverzií v permutácii P je označený $I(P)$.

Príklad

Zostrojte všetky permutácie pre $n = 2$ a $n = 3$, charakterizujte každú permutáciu počtom inverzií.
Permutácie pre n=2 majú tvar

$$P = (1,2), \qquad I(P) = 0$$

$$P = (2,1), \qquad I(P) = 1$$

Permutácie pre n=3 majú tvar

$$
\begin{array}{lll}
P=(1,2,3), & I(P)=0 & \\
P=(1,3,2), & I(P)=1 & (3>2) \\
P=(2,1,3), & I(P)=1 & (2>1) \\
P=(2,3,1), & I(P)=2 & (2>1,\,3>1) \\
P=(3,1,2), & I(P)=2 & (3>1,\,3>2) \\
P=(3,2,1), & I(P)=3 & (3>2,\,3>1,\,2>1)
\end{array}
$$

Definícia 9.1. Nech $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$ je štvorcová matica typu (n,n), ***determinant*** tejto matice je

$$
|\boldsymbol{A}|=\sum_{P\in S_n}(-1)^{I(P)}A_{1p_1}A_{2p_2}\ldots A_{np_n} \tag{9.10}
$$

kde sumácia obsahuje všetky možné permutácie z S_{n} . Alternatívne označenie determinantu je $det(\boldsymbol{A})$ alebo $D(\boldsymbol{A})$.

Príklad

Determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený takto

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum_{P \in S_2} (-1)^{I(P)} A_{1p_1} A_{2p_2} \\ &= (-1)^{I(1,2)} A_{11}A_{22} + (-1)^{I(2,1)} A_{12}A_{21} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{aligned}$$

Diagramatická interpretácia výpočtu determinantu matice typu 2×2

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Príklad

Determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je podľa definície určený v tvare, ktorý môžeme jednoducho vyjadriť pomocou diagramatickej interpretácie (Sarrusove pravidlo)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix}$$

$$= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

Základné vlastnosti determinantov

(1) Nech A je štvorcová matica, potom

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T|$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ľubovolná vlastnosť, ktorá platí pre riadky determinantu musí platiť aj pre jeho stĺpce (a naopak).

(2) Nech A je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch stĺpcov (riadkov)

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_i, \ldots, \boldsymbol{s}_j, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right) \rightarrow \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_j, \ldots, \boldsymbol{s}_i, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$$

Nech matica $\boldsymbol{A}$ obsahuje dva rovnaké stĺpce v polohe i a j

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_i, \ldots \boldsymbol{s}_{j-1}, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{j+1,} \ldots, \boldsymbol{s}_n\right)$$

Potom jednoduchým dôsledkom vlastnosti je, že táto matica je nulová

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = 0$$

(3) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že jeden stĺpec (riadok) vynásobíme číslom α

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_i, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right) \to \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{s}_j, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{B}\right| = \alpha\left|\boldsymbol{A}\right|$$

Dôsledok tejto vlastnosti je, že ak matica $\boldsymbol{A}$ obsahuje nulový stĺpec (riadok), potom determinant matice je nulový.

(4) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že násobok vybraného stĺpca (riadka) pripočítame k inému stĺpcu (riadku)

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)\to B=\left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i+\alpha\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_j,\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|$$

(5) Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica a nech pre jej vybraný stĺpec platí $\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{s}_i'+\boldsymbol{s}_i''$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i'+\boldsymbol{s}_i'',\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

potom

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}'\right|+\left|\boldsymbol{A}''\right|$$

kde matica $\boldsymbol{A}'$ ($\boldsymbol{A}''$) vznikne z pôvodnej matice tak, že i-tý stĺpec $\boldsymbol{s}_i$ je nahradený stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{s}_i'(\boldsymbol{s}_i'')$

$$\boldsymbol{A}'=\left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i',\dots,\boldsymbol{s}_n\right),\quad \boldsymbol{A}''=\left(\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_i'',\dots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

Veta. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica typu $n\times n$. $|\boldsymbol{A}|=0$ vtedy a len vtedy, ak $h(A)<n$.

Dôsledkom tejto vety je, že štvorcová matica A má nenulový determinant vtedy a len vtedy, ak jej hodnosť sa rovná počtu riadkov

$$\left(\left|\boldsymbol{A}\right| \neq 0\right) \equiv \left(h\left(\boldsymbol{A}\right) = n\right)$$

Príklad

Dokážte, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ sú lineárne nezávislé.. Tieto vektory môžeme formálne chápať ako riadkové vektory matice A typu 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ak determinant tejto matice je nenulový, potom $h(A)$=3, t.j. jej riadkové vektory sú lineárne nezávislé

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 1 + 2 + 0 + 3 + 1 - 0 = 7$$

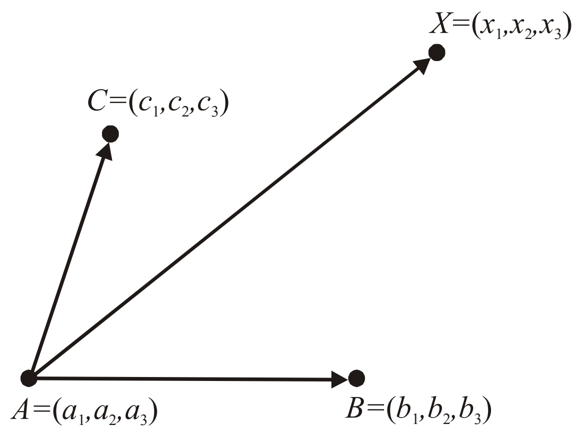
Príklad

Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ sú lineárne závislé vtedy a len vtedy ak z nich zostrojený determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

je nulový, $|\boldsymbol{A}| = 0$, bude použitý na určenie roviny σ v 3-rozmernom priestore, ktorá je určená bodmi *A*, *B* a *C*, ktoré sú reprezentované riadkovými vektormi

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{ a } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$



Všeobecný bod X, reprezentovaný vektorom $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, leží v rovine σ, potom vektor $\overrightarrow{XA} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia vektorov $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ a $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, t.j. tieto tri vektory sú lineárne závislé

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

vypočítaním tohto determinantu pomocou Sarrusovho pravidla, dostaneme lineárnu rovnicu vzhľadom k premenným x_1, x_2 a x_3

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

kde a, b, c a d sú koeficienty rovnice popisujúcej rovinu σ.

Veta. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová trojuholníková matica (nepožaduje sa, aby každý diagonálny element bol nenulový)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinant matice sa rovná súčinu jej diagonálnych elementov

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = A_{11}A_{22}...A_{nn}$$

Dôsledok tejto vety je, že determinant jednotkovej matice $\boldsymbol{E}$ sa rovná jednej

$$\left|\boldsymbol{E}\right| = 1$$

Táto veta umožňuje zostrojiť efektívny algoritmus pre výpočet determinantov ľubovolnej dimenzii n.

- Použijeme jednoduchý algoritmus, ktorý je veľmi podobný algoritmu stanovenia hodnosti matice a ktorý je založený na vlastnostiach determinantov.
- To znamená, že nad stĺpcami a riadkami budeme vykonávať jednoduché elementárne operácie tak, aby sme dostali trojuholníkovú maticu (t. j. nulujeme elementy pod diagonálou).
- Na rozdiel od stanovenia hodnosti matice, pri tomto výpočte determinantu jeho hodnota sa môže meniť, tak napríklad po transpozícii dvoch stĺpcov (riadkov) dochádza k zmene znamienka determinantu, alebo ak riadok vynásobíme číslom α, tak potom pred determinant musíme vytknúť číslo $1/\alpha$.
- To znamená, že súčasťou algoritmu musí byť aj premenná v ktorej sa kumuluje táto zmena numerickej hodnoty determinantu v priebehu aplikácií elementárnych operácií.

Príklad

Vypočítajte determinant matice s $n = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup transformácie determinantu na trojuholníkový tvar je prezentovaný na tejto schéme:

$$|\boldsymbol{A}| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 8 \end{vmatrix}}_{A_3} = 6 \cdot 8 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_4} =$$

$$6 \cdot 8 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix}}_{A_5} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}}_{A_6} = 6 \cdot 8 \cdot 3 \left(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = 48$$

Veta 9.6. Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A})=t(\boldsymbol{B})=(n,n)$, potom determinant súčinu týchto matíc sa rovná súčinu ich determinantov

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

Ako jednoduchý dôsledok tejto vety je formula pre determinant inverznej matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, ktorá vyhovuje podmienke $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$, použitím formuly $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$ dostaneme

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$$

Determinant inverznej matice $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ existuje vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná jej dimenzii n z typu $t(\boldsymbol{A})=(n,n)$, t. j. $h(\boldsymbol{A})=n$.

Veta. Matica A je ***regulárna*** vtedy a len vtedy, ak jej determinant je nenulový

$$|\boldsymbol{A}| \neq 0$$

Jedna zo základných aplikácií determinantov je ich použitie k riešeniu systému lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, ktorý má štvorcovú a regulárnu maticu koeficientov $\boldsymbol{A}$. Maticu $\boldsymbol{A}$ vyjadríme pomocou stĺpcových vektorov, potom systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ môžeme prepísať do tvaru

$$\left(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{s}_k$$

Označme symbolom $\boldsymbol{A}_i$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že jej i-tý stĺpec nahradíme stĺpcovým vektorom konštantných členov $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}_i = \left(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{s}_n\right)$$

Budeme počítať determinant tejto matice

$$\left|\boldsymbol{A}_i\right| = \left|\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{s}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right| = \left|\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{i-1},\sum_{k=1}^{n} x_i\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_i \underbrace{\left|\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{i-1},\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{s}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right|}_{=0 \; pre \; k\neq i} = x_i\left|\boldsymbol{A}\right|$$

Za predpokladu, že $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, z poslednej rovnice vyplýva riešenie systému lineárnych rovníc v explicitnom tvare, tento poznatok sformulujeme ako vetu.

Veta (Cramerove pravidlo). Systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, má riešenie

$$x_i = \frac{\left|\boldsymbol{A}_i\right|}{\left|\boldsymbol{A}\right|} \qquad \text{(pre } i = 1, 2, \ldots, \text{n)}$$

Príklad

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

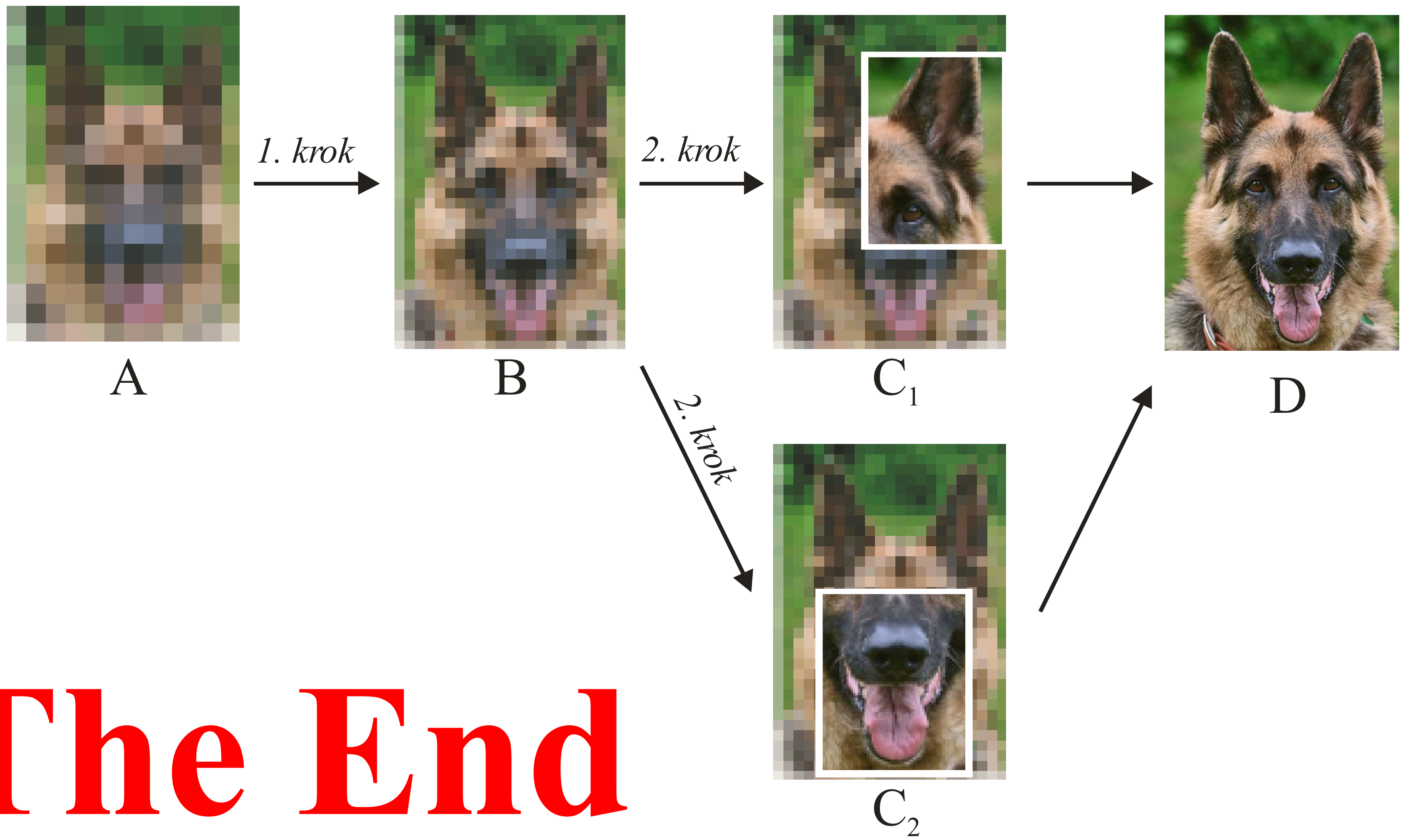
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Zostrojíme jednotlivé determinanty

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$



The End