Práca a kinetická energia

Práca konštantnej sily

$$W = \vec{F} \bullet \vec{d}$$

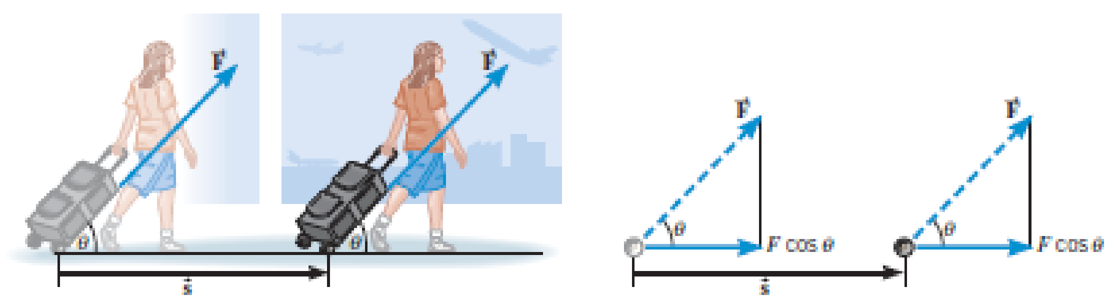
práca

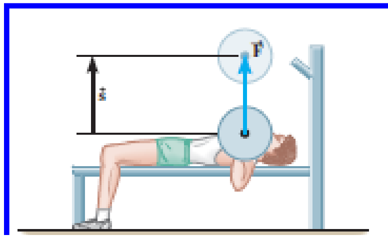
Pôsobiaca sila

Posunutie pôsobiska sily

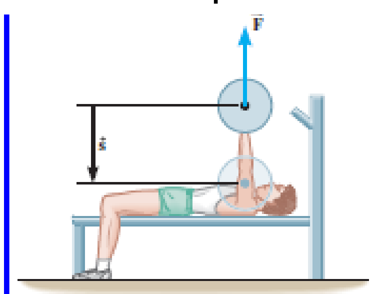
Práca je niečo iné ako fyziologická námaha

Do práce vstupuje len priemet sily do smeru posunutia



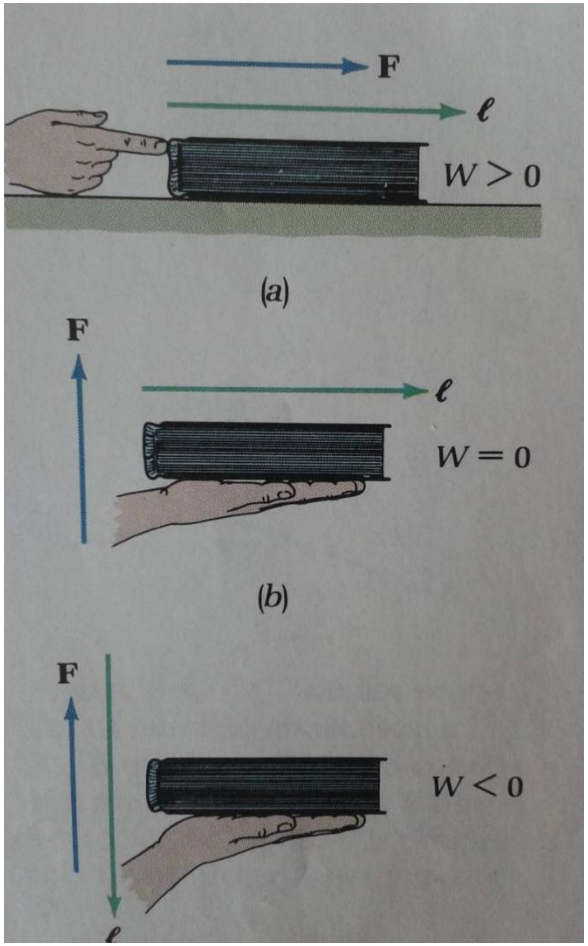


Sila F koná prácu W>0



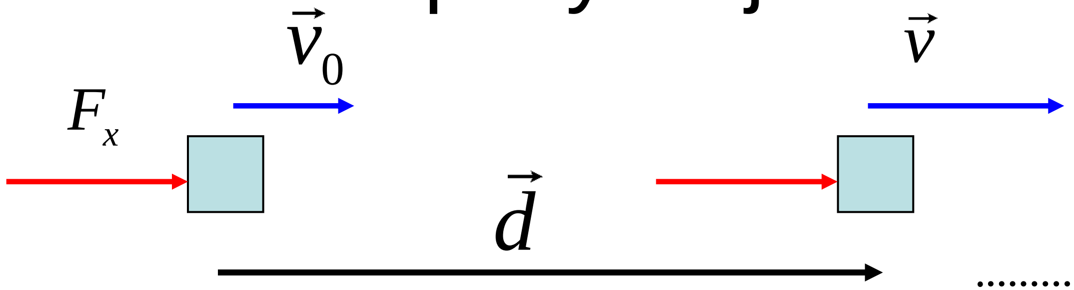
Sila F “spotrebováva“ prácu W<0

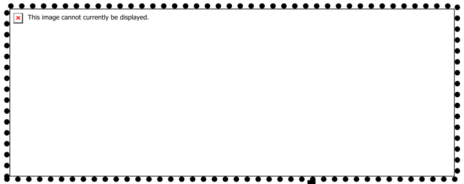
JEDNOTKA PRÁCE : 1 Joule = 1J



Práca sily, kolmej na smer posunutia je nulová.

Práca a kinetická energia
pohyb v jednom smere





$$W = m a_x d$$

$$F_x d = \boxed{\frac{1}{2} m v^2} - \boxed{\frac{1}{2} m v_0^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná práci vykonanej silami, ktoré na časticu pôsobia v smere posunutia

Rovnomerne zrýchlený pohyb

a = konštanta

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2$$

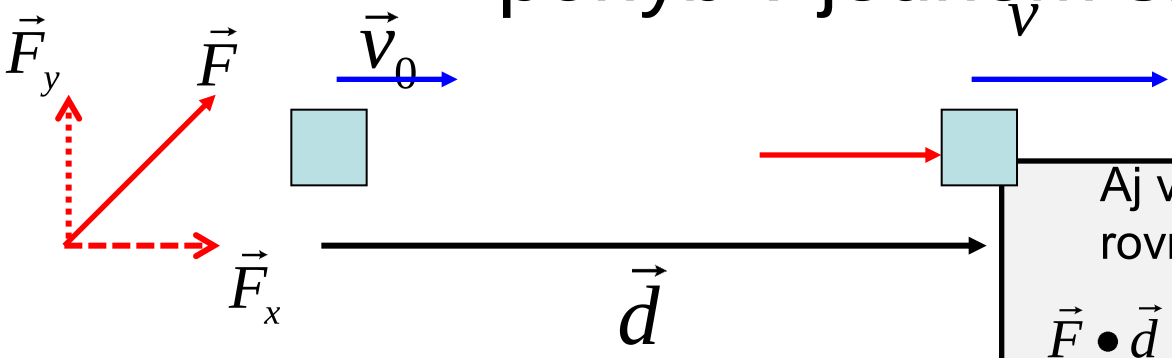
$$v = v_{0x} + at$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

Práca a kinetická energia pohyb v jednom smere



Aj v prípade, kebyže sila nie je rovnobežná so smerom posunutia

$$\vec{F} \bullet \vec{d} = \left[\vec{F}_x + \vec{F}_y \right] \bullet \vec{d} = \vec{F}_x \bullet \vec{d} = F_x \, d$$

$$\boxed{F_x d = F \cos\varphi \, d}$$

$$\vec{F} \bullet \vec{d} = \boxed{\frac{1}{2} m v^2} - \boxed{\frac{1}{2} m v_0^2} = \Delta E_k$$

Výsledná sila

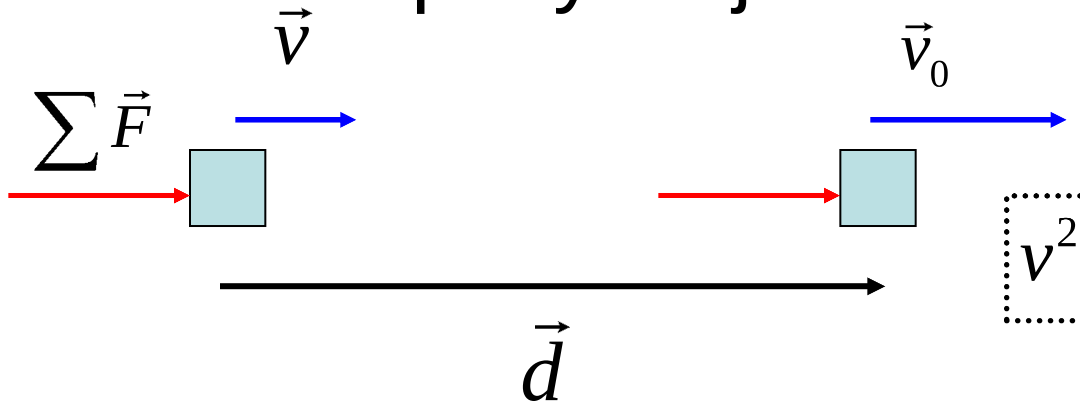
Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Práca a kinetická energia pohyb v jednom smere



$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

$$\left[\sum \vec{F}\right] \bullet \vec{d} = \boxed{\frac{1}{2}mv_f^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_i^2} = \Delta E_k$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n \bullet \vec{d} = W_1 + W_2 + \ldots W_n$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Všeobecný prípad trojrozmerný priestor

Rýchlosť zmeny kinetickej energie:

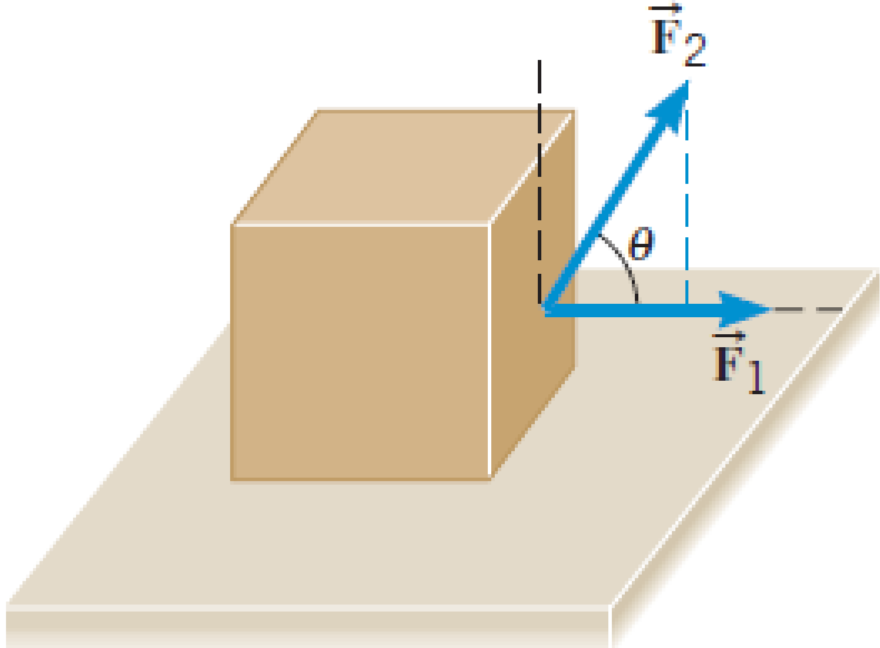
$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}} \qquad \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}m\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{v} + \vec{v}\bullet\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = m\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}}\,\boxed{\vec{v}} = m\vec{a}\bullet\frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow \boxed{dE_k = m\vec{a}\bullet d\vec{l}}$$

$$\boxed{\int_i^f\left[\sum\vec{F}\right]\bullet d\vec{l} = \int_i^f dE_k}$$

Zmena kinetickej energie častice sa rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

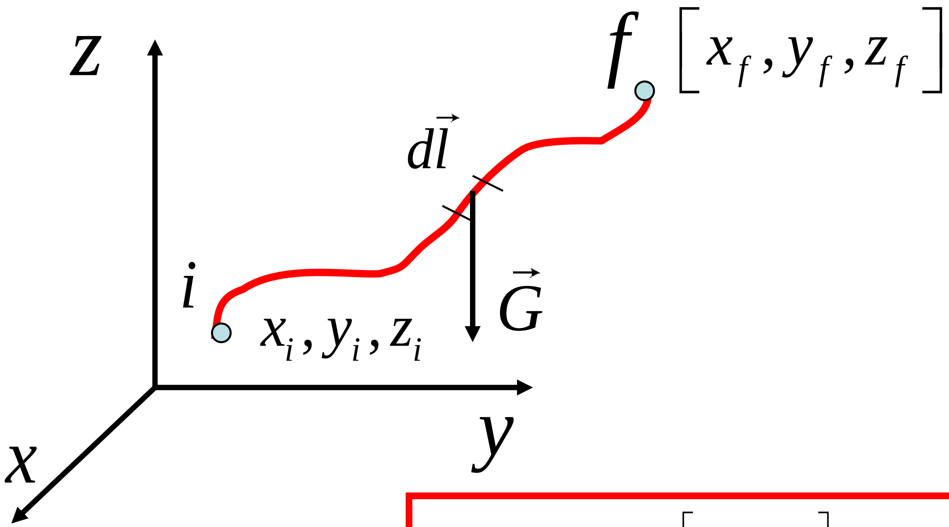
$$\boxed{W = \Delta E_k}$$



$\vec{F}_2$
θ
$\vec{F}_1$

PRÁCA ŠPECIALNYCH SÍL

Práca tiažovej sily homogénne gravitačné pole



$$\boxed{W = \int \vec{G} \bullet d\vec{l}}$$

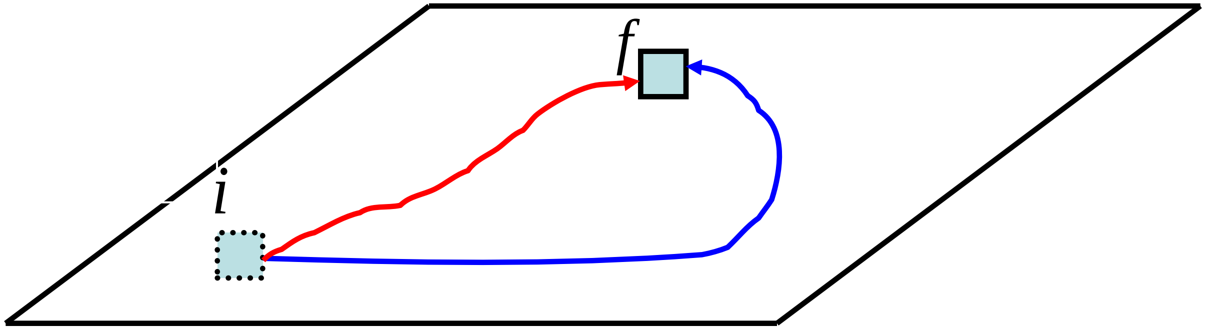
$\Rightarrow$

$$\boxed{W = \vec{G} \bullet \vec{d} = \int_{x_i, y_i, z_i}^{\left[x_f, y_f, z_f\right]} 0, 0, -mg \bullet dx, dy, dz \int = -mg \;\; z_f - z_i \;\; = \Delta E_k}$$

$\Rightarrow$

Práca vykonaná gravitačnou silou <u>nezávisí</u> od tvaru trajektórie, ale iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa.

Práca trecej sily



$$W = \vec{F}_T \bullet \vec{d}$$

$$W = -F_t s$$

Práca vykonaná trecou silou pri premiestnení telea z bodu i do bodu f závisí od dĺžky dráhy, t.j. <u>závisí</u> od tvaru trajektórie.

Konzervatívne a nekonzervatívne sily (polia)

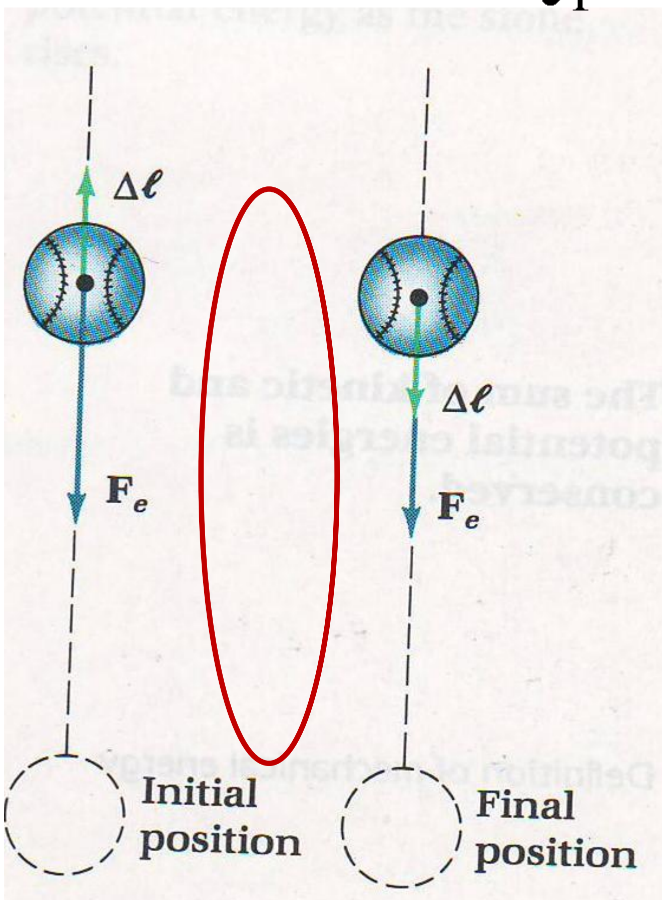
Podľa toho, či práca danej sily pri premiestnení telesa z jedného bodu do druhého závisí (nezávisí) od výberu trajektórie, možno pôsobiace sily rozdeliť do dvoch kategórii:

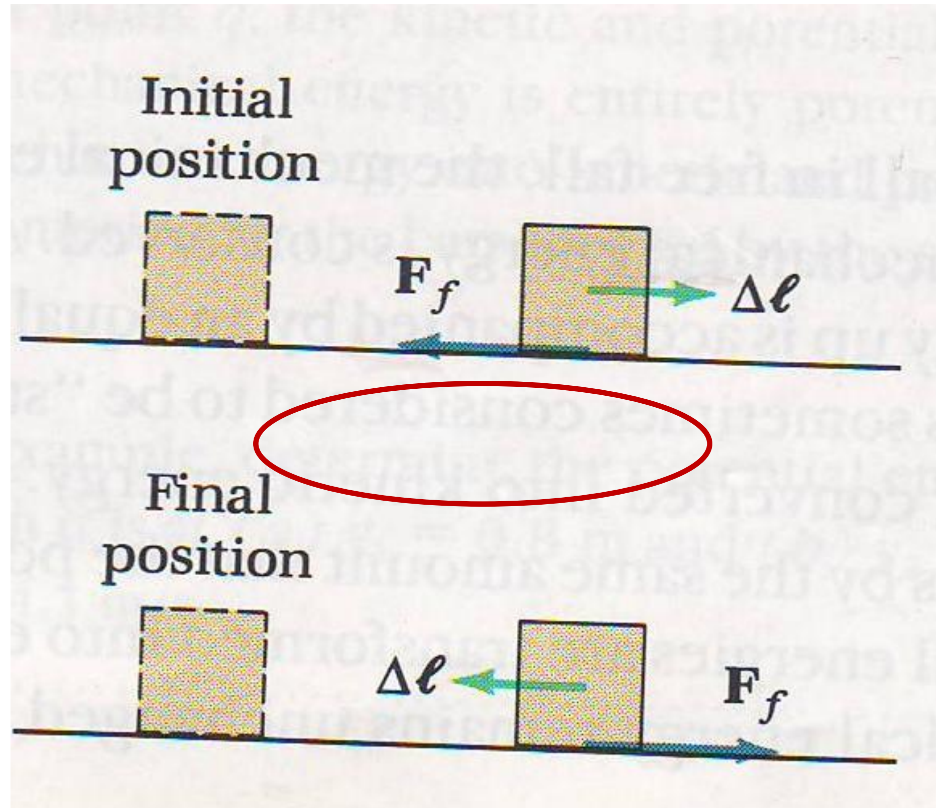
Konzervatívne – práca nezávisí od tvaru trajektórie, ale iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa (napr. gravitačná)

Nekonzervatívne sily – práca závisí od tvaru rajektórie (napr. trecia)

Alternatívna podmienka konzervatívnosti. Pre ľubovoľné uzavreté krivky musí byť splnená rovnica: $\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$$





Tiažová sila počas výstupu “spotrebúva” rovnakú prácu ako vykonáva pri spätnom páde

Konzervativne polia
Potenciálna energia

•Pre zjednodušenie výpočtu práce v konzervatívnych poliach zadefinujeme pre každý bod priestoru novú veličinu – **potenciálna energia Ep** s nasledovnou vlastnosťou:

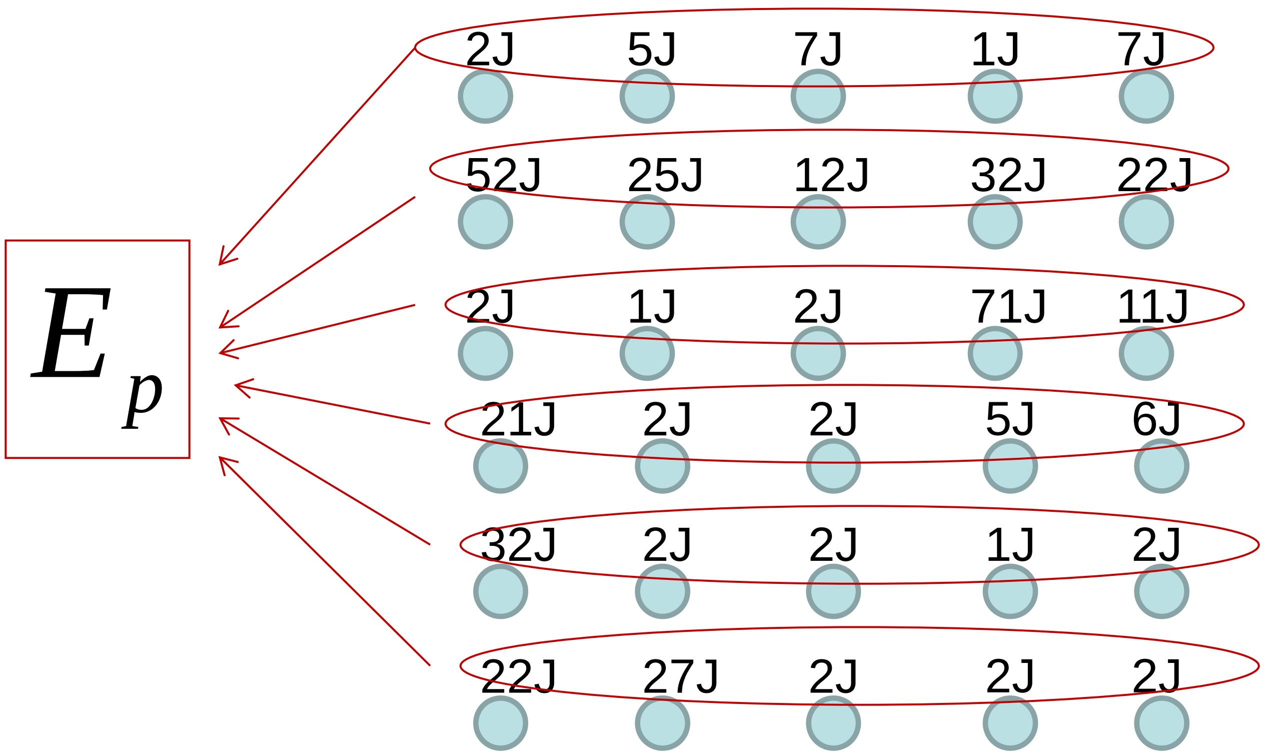
Zmena potenciálnej energie ΔEp pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu je rovná záporne vzatej práci:

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p \;\; \vec{r}_2 \;\; - E_p \;\; \vec{r}_1 \;\; \right] = -\Delta E_p}$$

Informácia o tom, aký má byť rozdiel medzi funkciami

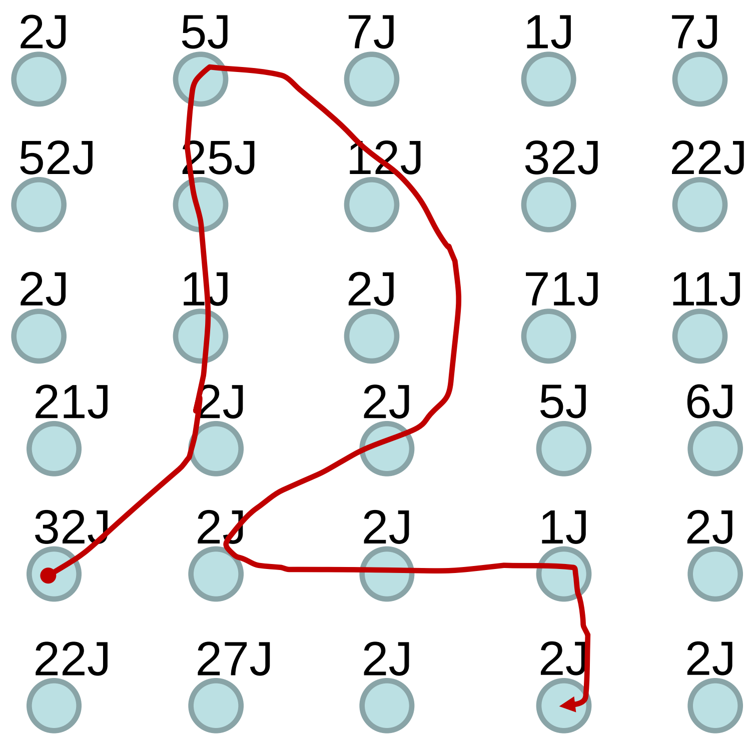
Príprava polotovaru nazývaného potenciálna energia

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) \right] = -\Delta E_p$$



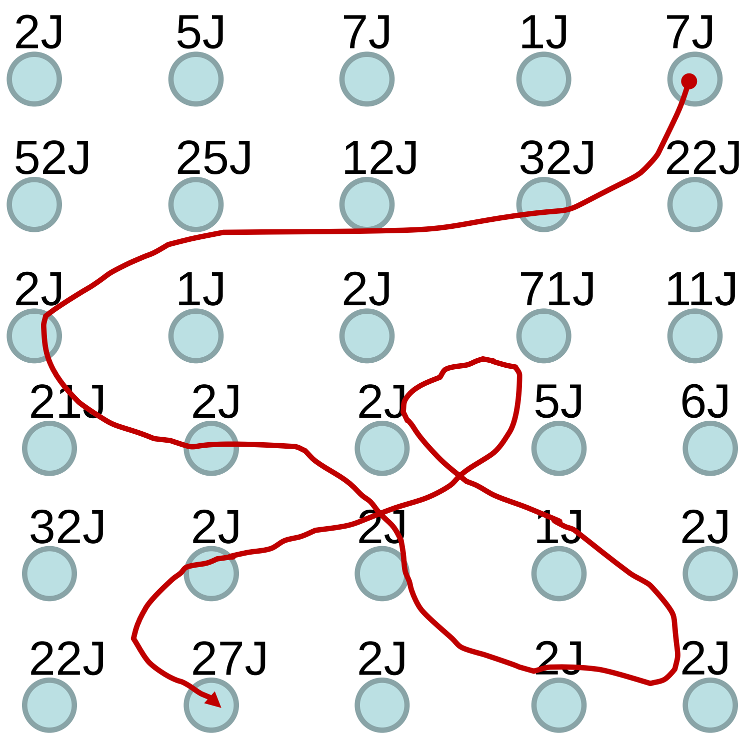
Príprava polotovaru nazývaného potenciálna energia

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p \;\; \vec{r}_2 \; - E_p \;\; \vec{r}_1 \;\; \right] = -\Delta E_p$$

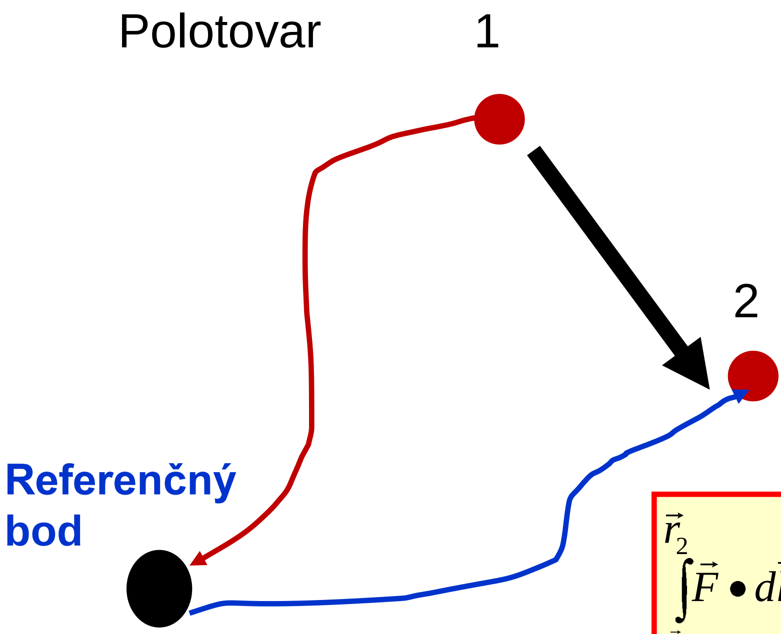


Príprava polotovaru nazývaného potenciálna energia

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) \right] = -\Delta E_p$$



Hľadáme tvar U (r)



$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l = -\left[E_p(\vec r_2) - E_p(\vec r_1)\right]$$

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l = \int_{\vec r_1}^{\vec r_{ref}} \vec F \bullet d\vec l + \int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l = \left[-\int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_1} \vec F \bullet d\vec l\right] - \left[-\int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l\right]$$

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l = \int_{\vec r_1}^{\vec r_{ref}} \vec F \bullet d\vec l + \int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l = -\left\{\underbrace{\left[-\int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_2} \vec F \bullet d\vec l\right]}_{E_p(r_2)} - \underbrace{\left[-\int_{\vec r_{ref}}^{\vec r_1} \vec F \bullet d\vec l\right]}_{E_p(r_1)}\right\}$$

Zovšeobecnenie tvaru:

$$E_p(\vec r) = -\int_{\vec r_{ref}}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec l$$

Potenciálna energia

$$E_p\left(\vec{r}\right) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

POTENCIÁLNA ENERGIA Ep

- **Nejednoznačná funkcia, pokiaľ sa nevyjadruje vzhľadom na ľubovolne zvolený referenčný bod**
- **Nemá fyzikálny význam**
- **fyz. význam iba rozdiel ΔEp (záporne vzatá práca poľa; resp. práca vonkajších síl vykonaná pri premiestnení telesa z referenčného bodu, do miesta, kde sa teleso nachádza)**

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$$

Konzervatívne sily

Gravitačná sila

Sila pružnosti

Elektrická sila

NEkonzervatívne sily

Sila trenia

Odpor prostredia

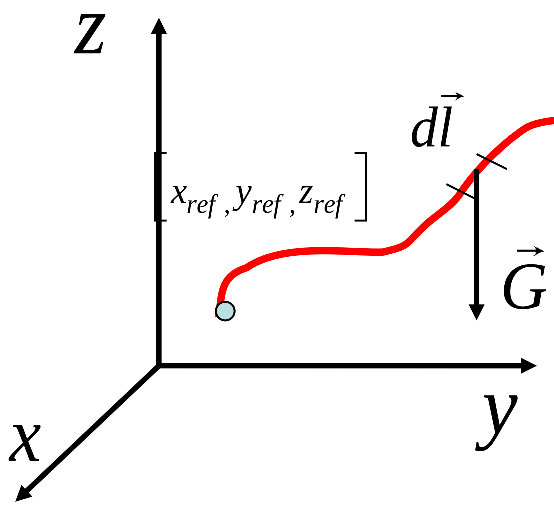
Sila napätia /lanka/

Normálové, tlakové

Výpočet potenciálnej energie

- Tiažová potenciálna energia
- Potenciálna energia pružnosti

Potenciálna energia v homogénom gravitačnom poli



$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$E_p = -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} \vec{G} \bullet d\vec{l} = -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} (0, 0, -mg) \bullet (dx, dy, dz) =$$

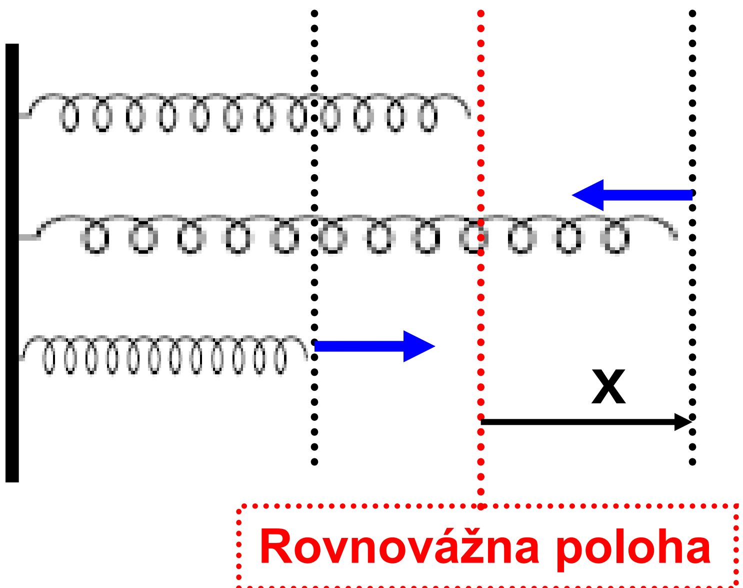
$$= -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} (0, 0, -mg) \bullet (dx, dy, dz) = mg\overbrace{(z - z_{ref})}^{h}$$

Referenčný bod zvoľme v počiatočnom bode súradnicovej sústavy:

$$[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}] = [0, 0, 0]$$

$$E_p = mgz = mgh$$

Potenciálna energia pružných síl



$$F = -kx$$

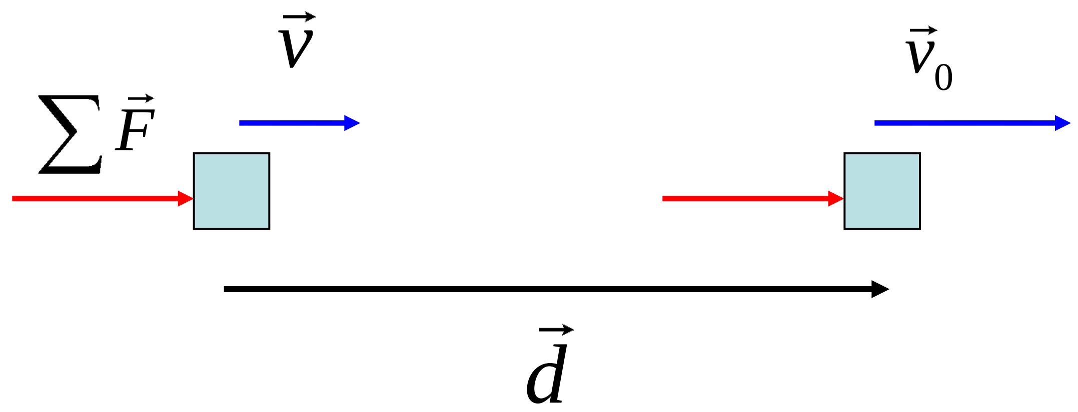
$$E_p = -\int_{x_{ref}}^{x} F_x dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_{ref}^2$$

Referenčný bod zvoľme v rovnovážnej polohe $x_{ref} = 0$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

ZHRNUTIE poznatkov o práci

Práca a kinetická energia



$$W = \boxed{\frac{1}{2}mv_f^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_i^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Práca v <u>konzervatívnych poliach</u>

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p \;\; \vec{r}_2 \;\; - E_p \;\; \vec{r}_1 \;\; \right] = -\Delta E_p$$

Práca síl konzervatívneho poľa (pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu) sa rovná záporne vzatej zmene potenciálnej energie ΔEp.

Práca v konzervatívnych poliach

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Zmena kinetickej energie častice sa rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$W = \Delta E_k$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

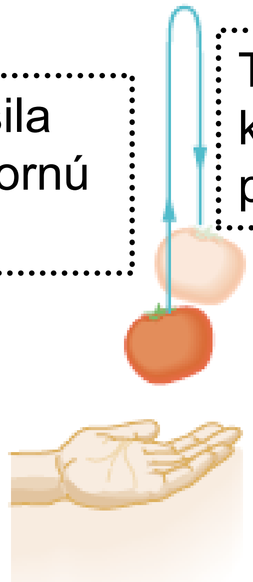
Zmena potenciálnej energie ΔEp pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu je rovná záporne vzatej práci (konzervatívne polia) :

$$W = -\Delta E_p$$

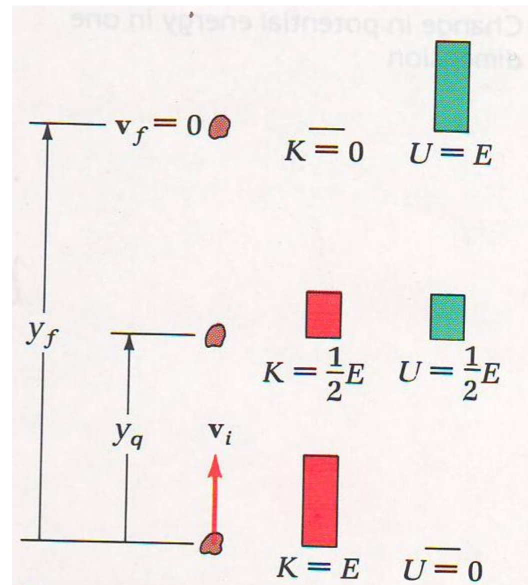
$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Pohyb telesa v tiažovom poli Zeme

Tiažová sila koná zápornú prácu.



Tiažová sila koná kladnú prácu.



$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = 0}$$

Mechanická energia sústavy je stála, pokiaľ v sústave pôsobia **iba konzervatívne sily**

- **Teleso sa pohybuje nahor, potenciálna energia rastie $\Delta E_p > 0$**
  $\Rightarrow$ kinetická energia klesá $\Delta E_k < 0$
- **Teleso sa pohybuje nadol, potenciálna energia klesá $\Delta E_p < 0$**
- **$\Rightarrow$ kinetická energia stúpa $\Delta E_k > 0$**

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = W = \int \boxed{\vec{F}} \bullet d\vec{l}$$

$$F \begin{cases} F_K \\ F_{NK} \end{cases}$$

Konzervatívne sily

Gravitačná sila

Sila pružnosti

Elektrická sila

NEkonzervatívne sily

Sila trenia

Odpor prostredia

Sila napätia /lanka/

Normálové, tlakové

$$\boxed{\Delta E_k = \int \boxed{\vec{F}_K} \bullet d\vec{l} + \int \boxed{\vec{F}_{NK}} \bullet d\vec{l}}$$

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = \boxed{\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} + \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Výslednica všetkých konzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

Výslednica všetkých NEkonzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

$$\Delta E_k - \int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} = -\Delta E_p$$

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Mechanická energia

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

Niektoré druhy potenciálnej energie

Potenciálna energia gravitačného poľa

$$E_p = mgh$$

Potenciálna energia pružných síl

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Výpočet práce v sústavách

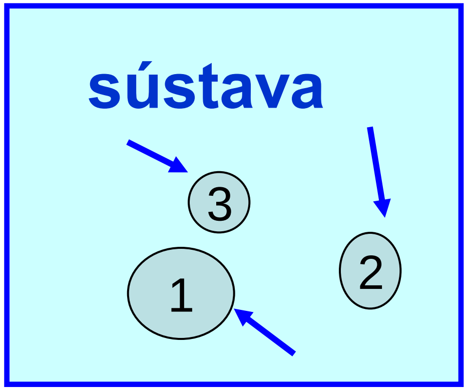
- Sústava sa skladá z dvoch alebo viacerých objektov
- Na objekty sústavy pôsobia vzájomné <u>*interakčné sily*</u> ako aj okolie

$$\Delta E_{k_1} + \Delta E_{p_1} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_1$$

$$\Delta E_{k2} + \Delta E_{p_2} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_2$$

$$\Delta E_{k_3} + \Delta E_{p_3} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_3$$

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \left(\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right)_i$$

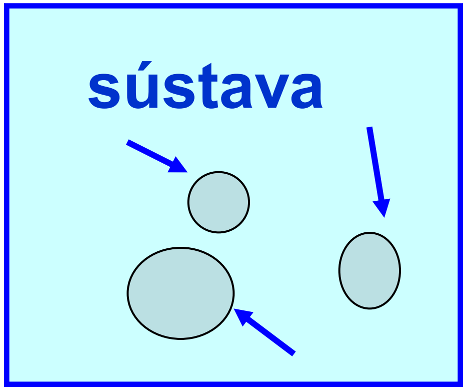


Práca výslednej nekonzervatívnej sily pôsobiacej na i-ty objekt sústavy

Mechanická energia sústavy

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \left(\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right)_i$$

Zákon zachovania mechanickej energie



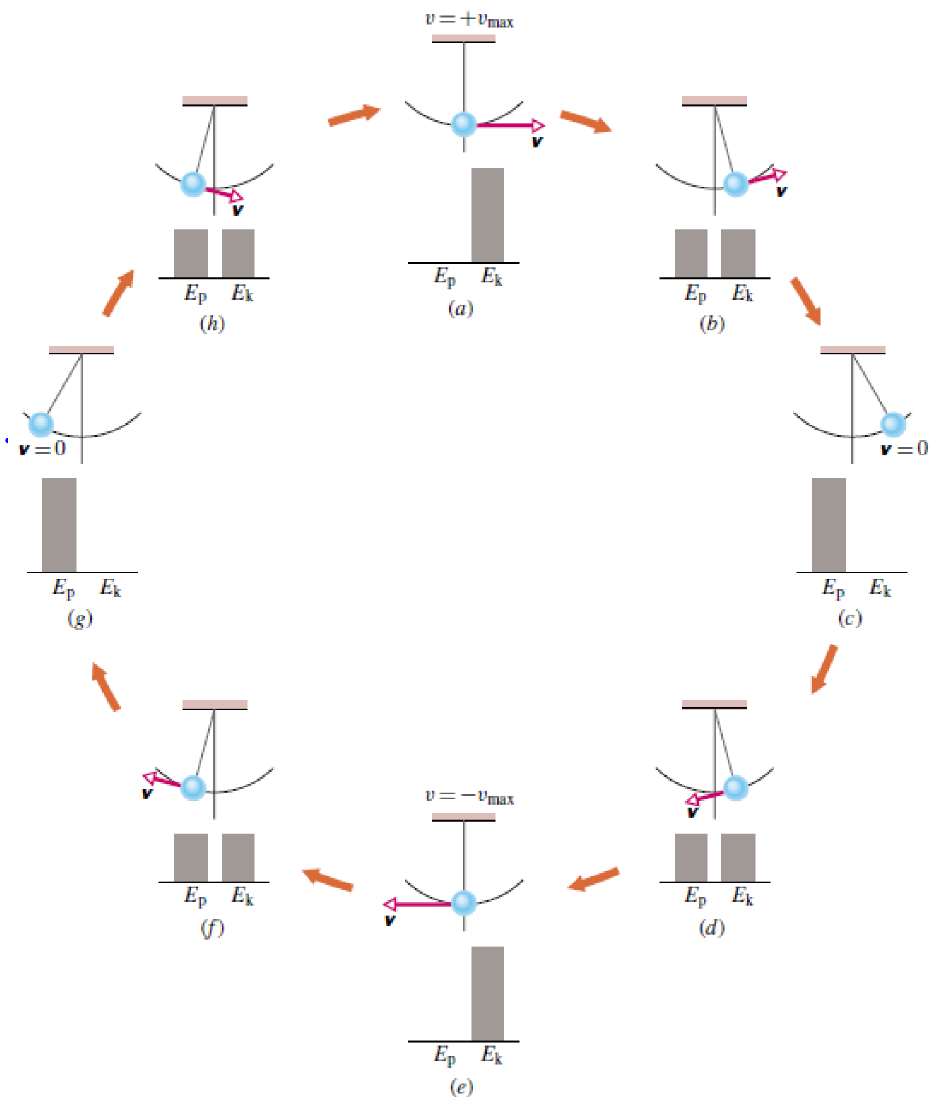
Mechanická energia sústavy

$$\boxed{\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total}} = \sum_i \left(\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right)_i$$

Zmena mechanickej energie sústavy sa rovná celkovej práci nekonzervatívnych síl pôsobiacich na objekty sústavy.

Ak v sústave pôsobia len konzervatívne sily, potom sa celková mechanická (t.j. celková kinetická +potenciálna) energia zachováva

ZZ mechanickej energie na kyvadle



Kmity kyvadla v tiažovom poli zeme.

Neuvažujeme trenie

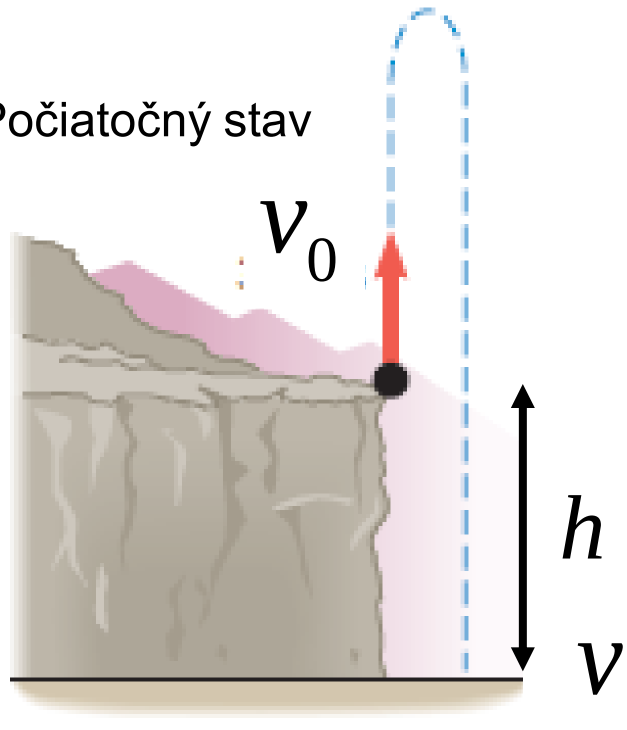
V každom okamihu:

$$\boxed{\begin{gathered} E_k + E_p = konst \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgh = konst \end{gathered}}$$

Jedna forma energie sa "prelieva" na inú formu energie

Z výšky h je vorovne vrhnuté teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0. Určte rýchlosť telesa pri jeho dopade na zem.

Počiatočný stav



Konečný stav

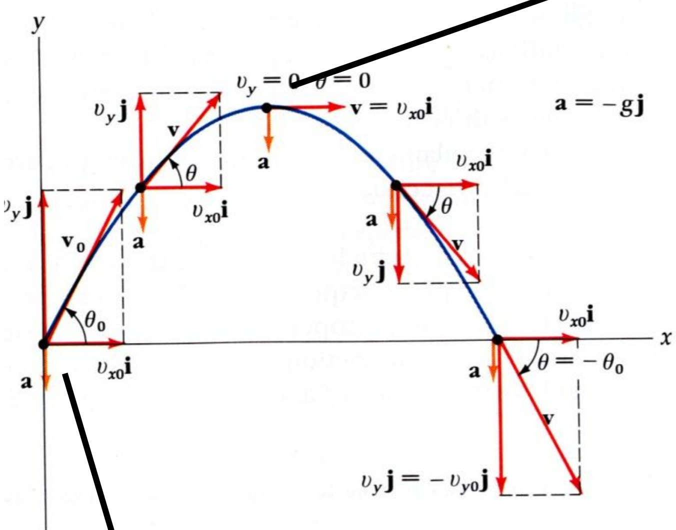
$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \int \vec{F}_{NK_{int\,erné}} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right] + mgh = 0$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

Teleso je vrhnuté pod uhlom α k horizontálnemu smeru počiatočnou rýchlosťou v0. Určte maximálnu výšku výstupu.

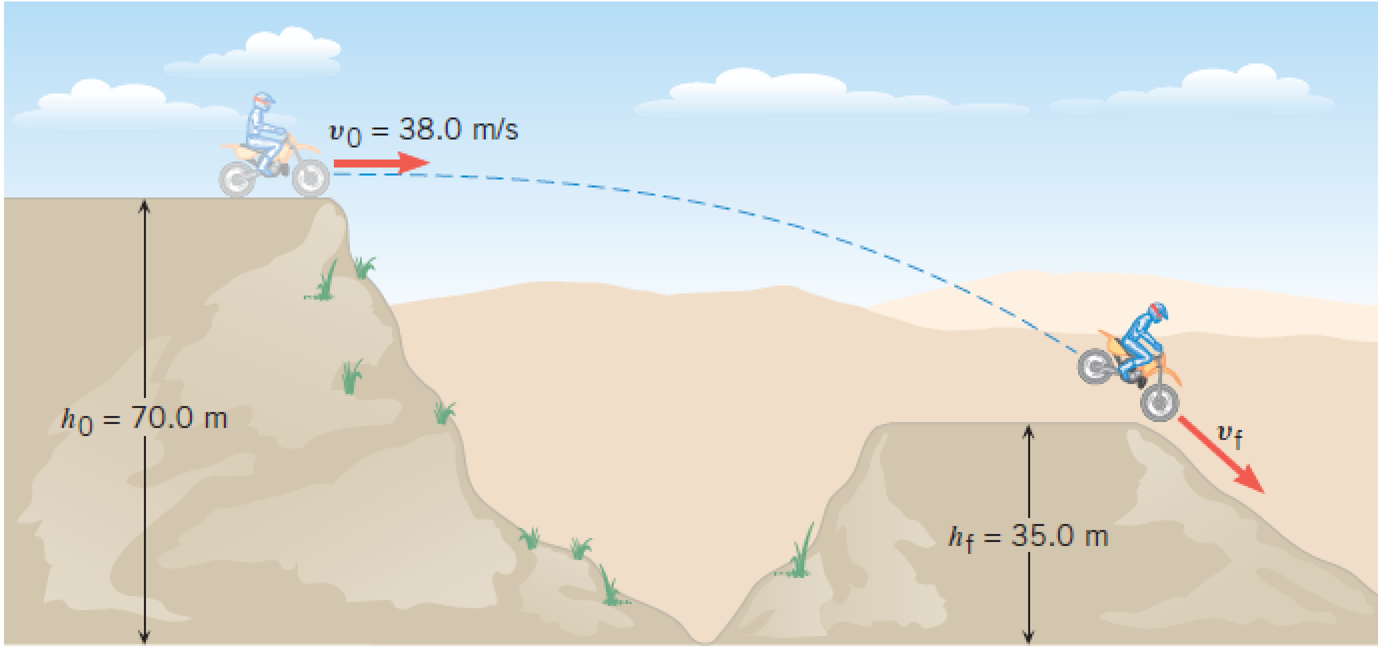
Konečný stav



Počiatočný stav

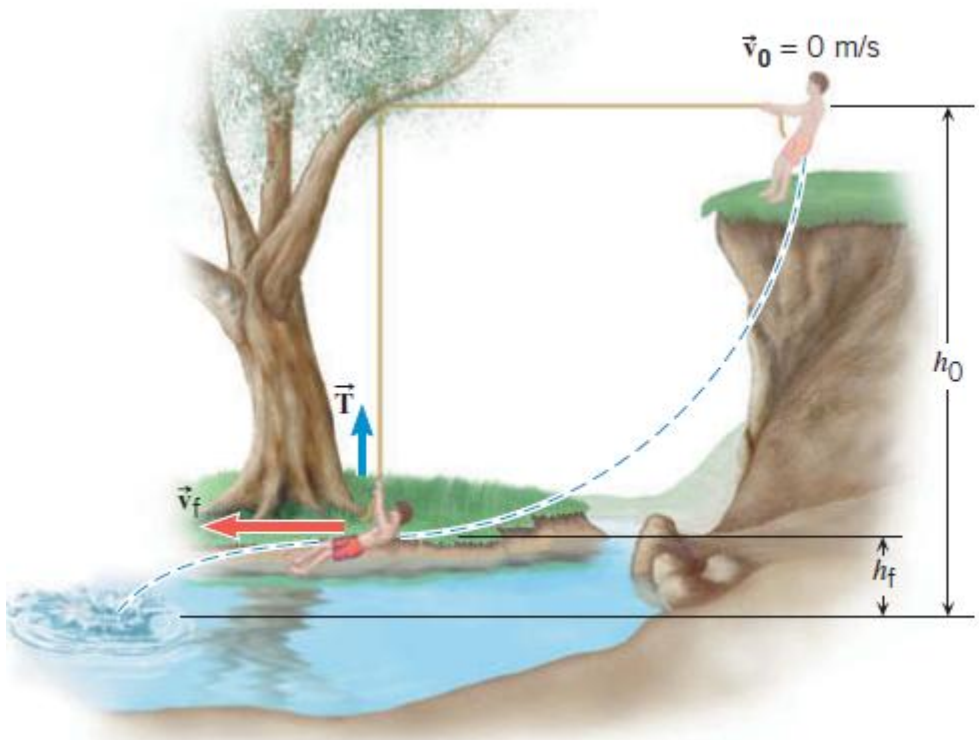
$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \int \vec{F}_{NK_{int\,ern\acute{e}}} \bullet d\vec{l} \\ \left[\frac{1}{2}mv_x^{\,2} - \frac{1}{2}mv_0^2\right] + mgh = 0 \\ h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\end{gathered}}$$



$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \int \vec{F}_{NK_{\mathrm{int}\,erné}} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv_f{}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right] + \left[mgh_f - mgh_0\right] = 0$$

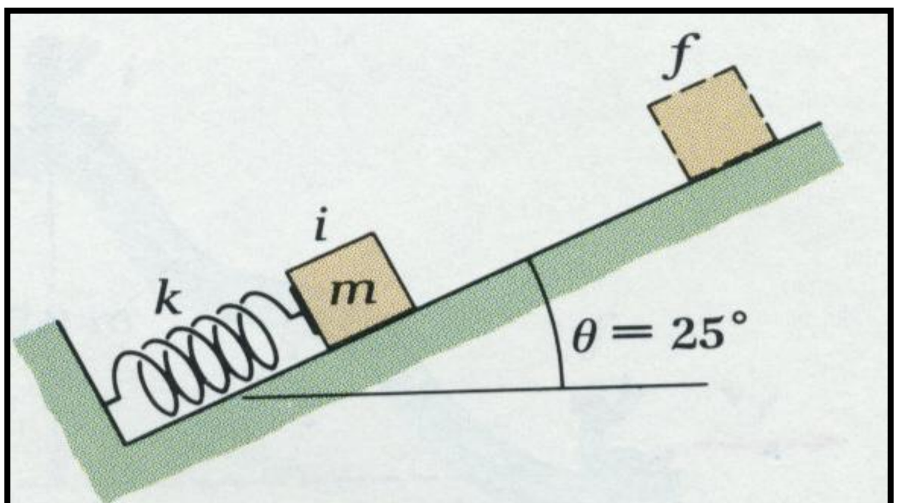


$\vec{v}_0 = 0$ m/s
$\vec{T}$
$\vec{v}_f$
h_0
h_f

Príklad

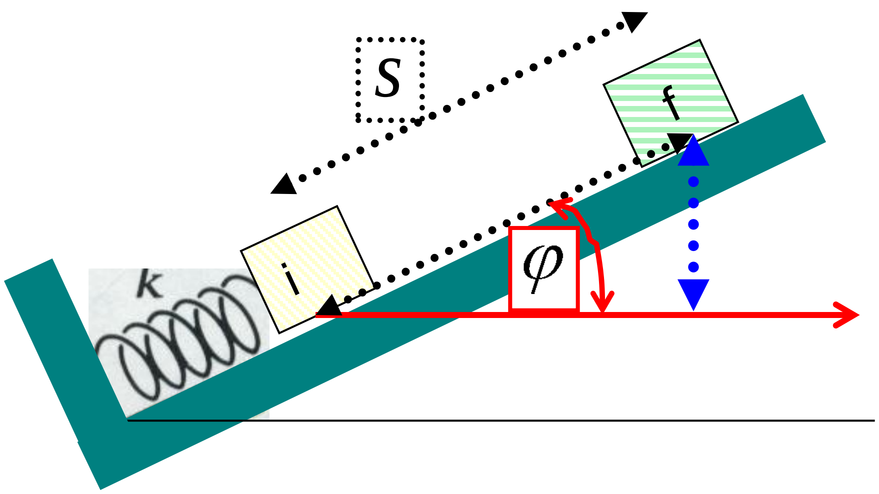
Teleso s hmotnosťou m je položené na pružine s tuhosťou k=2400 N/m, ktorá je stlačená o Δx=0.15m a leží na naklonenej rovine s uhlom sklonu φ = 25 stupňov. Pružinu uvolníme.

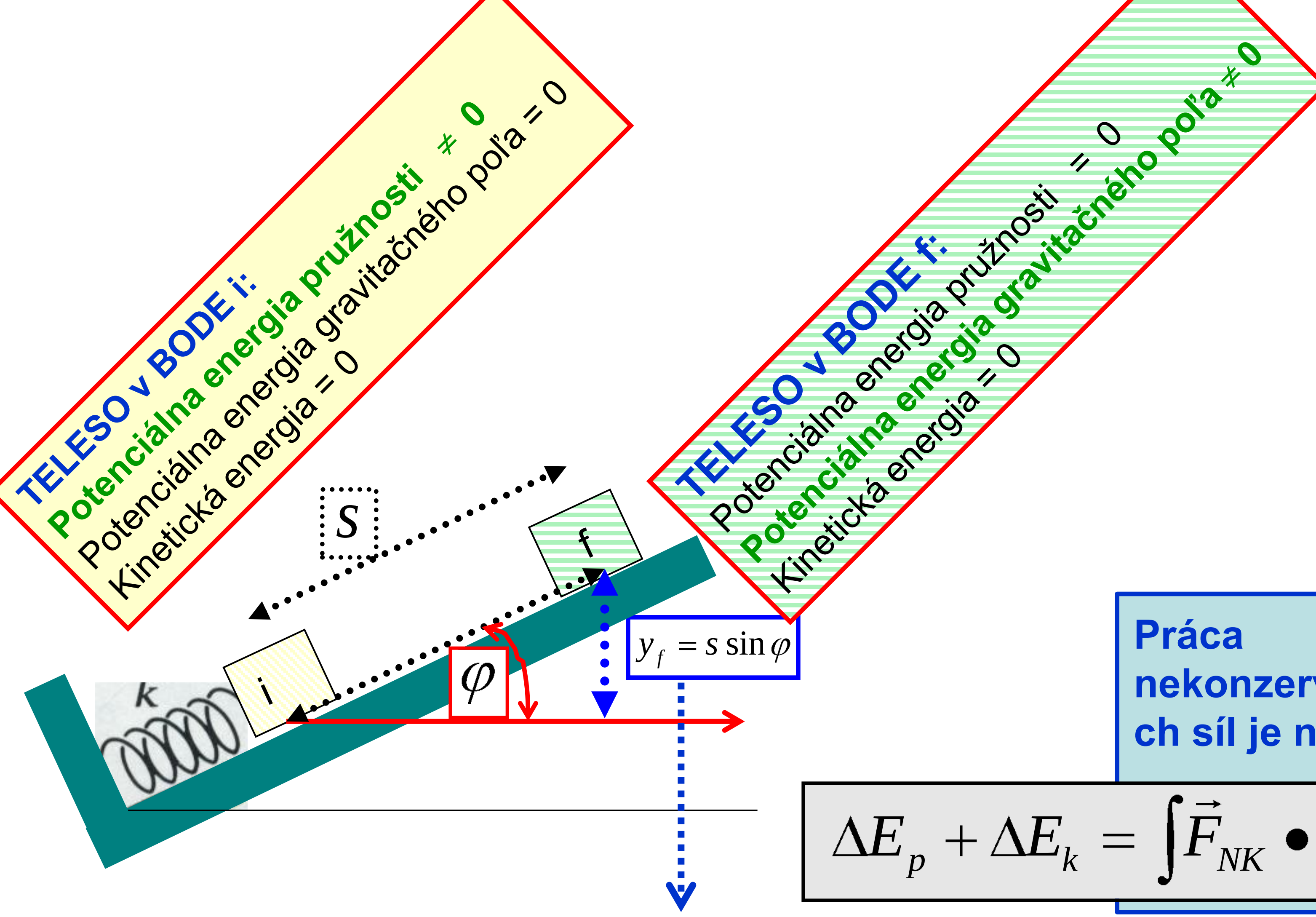
- Určte akú vzdialenosť prešlo teleso kým sa zastavilo.
- Určte, akú rýchlosť dosiahne teleso pri návrate späť, keď sa dostane do polovičnej vzdialenosti medzi bodom f a i. Trenie neuvažujte.



$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

POSOBIA 3 SILY –
gravitačná,
pružnosti
tlaková sila





Práca nekonzervatívnych síl je nulová

$$\boxed{\Delta E_p + \Delta E_k = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

$$\left[mgy_f - 0 + \left(0 - \frac{1}{2} k \ \Delta x^{2} \right) \right] + \left[\cancel{\frac{1}{2} m v_f^2} - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2} \right] = 0$$

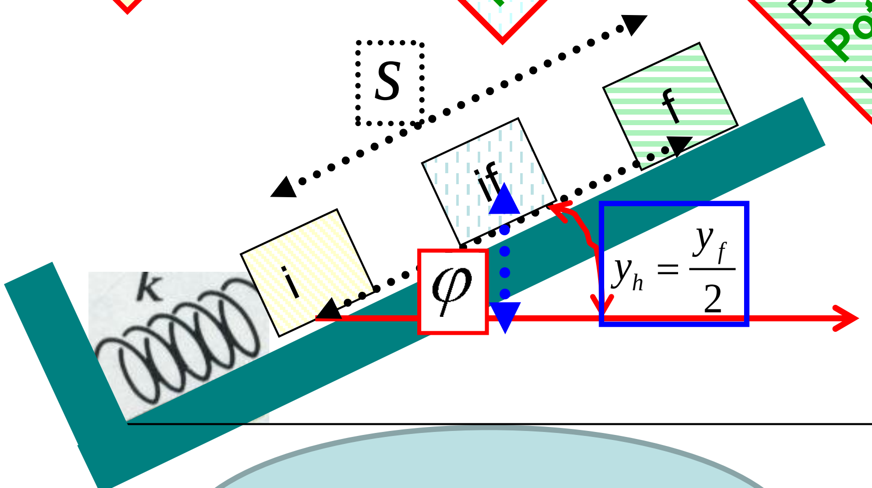
$$mgy_f = \frac{1}{2} k \ \Delta x^{2} \qquad \boxed{s = \frac{y_f}{\sin\varphi}}$$

TELESO v BODE i:
Potenciálna energia pružnosti ≠ 0
Potenciálna energia gravitačného poľa = 0
Kinetická energia = 0

TELESO v BODE if:
Potenciálna energia pružnosti = 0
Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia ≠ 0

TELESO v BODE f:
Potenciálna energia pružnosti = 0
Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia = 0

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$



Práca nekonzervatívnych síl je nulová

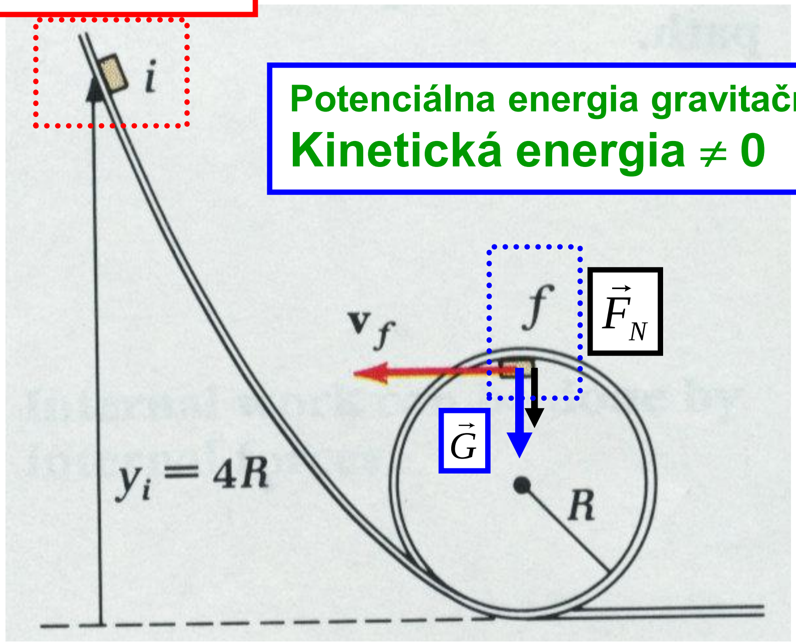
$$\left[\overbrace{mg\,y_h - 0}^{\Delta E_{p_1}} + \overbrace{\left(0 - \frac{1}{2}k\,\Delta x^{2}\right)}^{\Delta E_{p2}}\right] + \frac{1}{2}m v_h^2 = 0$$

$$\boxed{y_h = \frac{1}{2} y_f}$$

POSOBIA 3 SILY –
gravitačná, pružnosti a tlaková sila

Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia = 0

- Malá kocka ľadu s hmotnosťou m sa začne bez trenia šmýkať z výšky $y_i=4R$. Určte rýchlosť, ktorú dosiahne v najvyššom bode kružnice s polomerom R. Určte tlakovú silu v tomto okamihu.



Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia ≠ 0

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[E_{k_f} - E_{k_i}\right] + \left[E_{pf} - E_{pi}\right] = 0$$

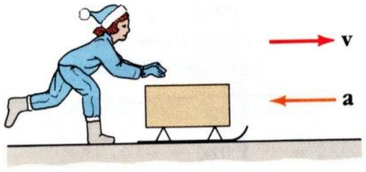
$$\left[\frac{1}{2} m v_f^2 - 0\right] + \left[mg\ \ 2R\ - mg\ \ 4R\ \right] = 0 \quad \Rightarrow v_f = \sqrt{4gR}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow F_N + mg = \frac{m v_f^2}{R}$$

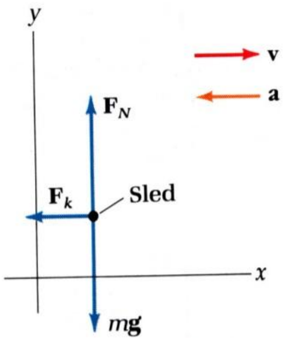
$$F_N = 3mg$$

Práca nekonzervatívnych síl

Dievča naskočilo na sánky, ktoré sa začali pohybovať rýchlosťou v=2.5 m/s. Sánky prešli dráhu d=6.4m a zastavili sa. Určte koeficient dynamického trenia.

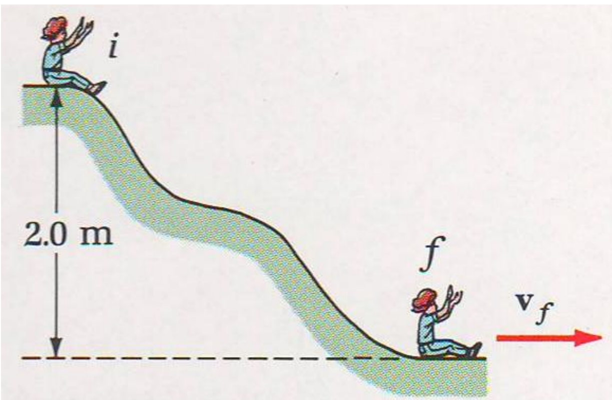


(a)



$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[\cancel{E_{k_f}} - E_{k_i}\right] + \left[\cancel{E_{pf}} - \cancel{E_{pi}}\right] = -\mu_k mgd$$



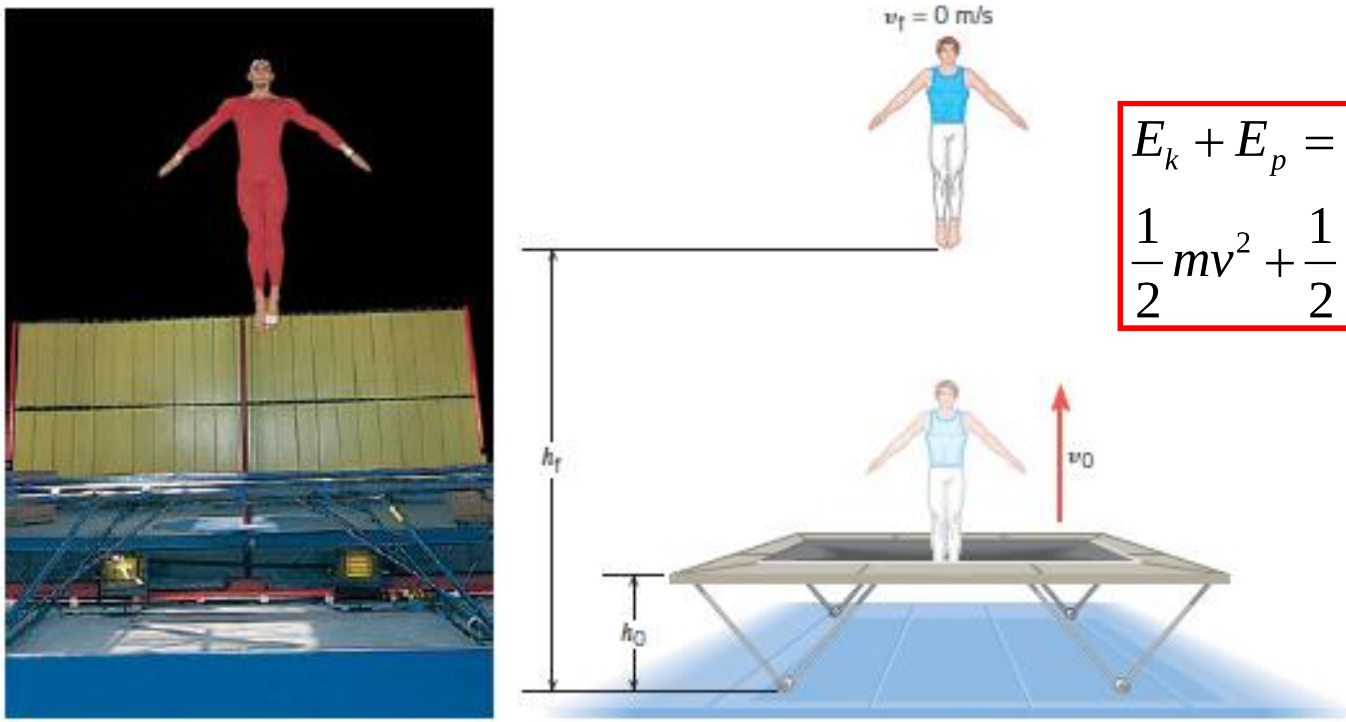
Dieťa s hmotnosťou m=17kg sa spustilo z výšky h=2m a dosiahlo rýchlosť 4,2 m/s.
Určte prácu trecej sily

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \boxed{\int \vec{F}_{NK_{\text{int}\,erné}} \bullet d\vec{l}}$$

$$\left[E_{k_f} - E_{k_i}\right] + \left[E_{pf} - E_{pi}\right] = A$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_f - mgh_i = A$$

ZZE pri skoku na trampolíne



(a) (b)

$$E_k + E_p = konst$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh = konst$$