

Algebra a diskrétna matematika

Prehľad z 2. týždňa

Matice, operácie s maticami, inverzná matica

Matica je usporiadaná obdĺžniková tabuľka čísel.

Ak matica pozostáva z m riadkov a n stĺpcov, hovoríme, že je **typu** $m \times n$.

Všeobecný zápis matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Štvorcová matica rádu n je matica s n riadkami a n stĺpcami.

Hlavná diagonála štvorcovej matice pozostáva z prvkov $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Súčet prvkov na hlavnej diagonále je **stopa** matice a značujeme ju $\text{tr}(A)$.

Diagonálna matica je štvorcová matica, ktorej všetky prvky nachádzajúce sa mimo hlavnej diagonály sú nulové.

Dve matice sa **rovnajú**, ak sú rovnakého typu a majú rovnaké prvky na všetkých príslušných miestach.

Súčtom matíc rovnakého typu je matica toho istého typu s prvkami získanými sčítaním prvkov daných matíc na príslušných pozíciách, t. j.

ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tak $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Rozdielom matíc $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a $B = (b_{ij})_{m \times n}$ je matica

$$C = A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}.$$

Nie je možné sčítat' ani odčítat' matice rôznych typov!

Sčítanie matíc je komutatívne aj asociatívne.

Nulová matica O je matica pozostávajúca zo samých núl.

Pre každú maticu platí: $A_{m \times n} + O_{m \times n} = O_{m \times n} + A_{m \times n} = A_{m \times n}$

Násobenie matice konštantou c znamená vynásobenie každého prvku danej matice číslom c , t. j. $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})_{m \times n}$.

Súčin matíc $A = (a_{ik})_{m \times s}$ a $B = (b_{kj})_{s \times n}$ v poradí $A \cdot B$ je matica $C = (c_{ij})_{m \times n}$, kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{is}b_{sj}$.

Vo výslednej matici súčinu je prvok v i -tom riadku a j -tom stĺpci skalárnym súčinom vektora tvoreného i -tym riadkom ľavej matice s vektorom tvoreným j -tym stĺpcom pravej matice.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \mathbf{a}_{i3} & \dots & \mathbf{a}_{is} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \mathbf{b}_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \mathbf{b}_{2j} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & \mathbf{b}_{3j} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & \mathbf{b}_{sj} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc **nie je komutatívne**. $AB \neq BA$ (vo všeobecnosti)

Násobenie matíc **je asociatívne**. $(AB)C = A(BC)$

Jednotková matica I je štvorcová matica, ktorá má jednotky na hlavnej diagonále a inde nuly.

Pre každú maticu $A_{m \times n}$ platí: $A_{m \times n} \cdot I_{n \times n} = A_{m \times n}$ $I_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$

Transponovaná matica A^T sa získa z matice A výmenou riadkov so stĺpcami, t. j. ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, potom $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

Inverzná matica k štvorcovej matici A je matica A^{-1} (rovnakého typu), ktorá vyhovuje rovniciam

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{a} \quad A^{-1} \cdot A = I.$$

Ak inverzná matica k štvorcovej matici A existuje, je jednoznačne určená.

Inverzná matica existuje iba k štvorcovej matici, ktorá po úprave na redukovaný tvar (pomocou ERO 1 - 3) nemá nulové riadky.

Inverznú maticu k matici A hľadáme pomocou Gaussovej eliminačnej metódy aplikovanej na maticu A rozšírenú o jednotkovú maticu.

$$(A \mid I) \sim (\text{ERO 1 - 3}) \sim (I \mid A^{-1})$$

Sústavu lineárnych rovníc môžeme riešiť aj pomocou inverznej matice.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Sústavu prepíšeme do maticovej formy

$$A \cdot X = B$$

Riešenie má potom tvar

$$X = A^{-1} \cdot B$$