Matematická logika

2. prednáška

- Teória a model
- Odvodzovanie formúl
- Logický dôkaz
- Úplnosť

Definícia.

(1) ***Teóriou*** T výrokovej logiky je ľubovolná neprázdna množina formúl, $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subset \Omega(P)$.

(2) Ak pre teóriu T existuje taká interpretácia τ, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé, $val_\tau(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom táto špecifikácia τ sa nazýva **model teórie**.

(3) Teória T je **konzistentná**, ak má model.

Príklad

$$T=\left\{\underbrace{(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)}_{\varphi_1},\underbrace{(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)}_{\varphi_2},\underbrace{(\neg p\wedge\neg q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)}_{\varphi_3}\right\},$$

$$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$$

1	2	3	4	5
p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$3\Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$$\varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

1	2	3	4	5
p	q	$p \Rightarrow q$	$3 \wedge q$	$4 \Rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\varphi_3 = (\overline{p} \wedge \overline{q}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3 \wedge 4$	$p \Rightarrow q$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

$\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$

Definícia. *Formula* φ *je* ***tautologickým dôsledkom*** *teórie T (čo označíme* $T \vDash \varphi$*), ak každý model teórie T je aj modelom formuly* φ *(t.j. formula* φ *je v ňom pravdivá).*

- Majme teóriu $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, potom pre každú interpretáciu τ, ktorá je modelom teórie T platí, že pravdivostné hodnoty všetkých formúl sú 1, $val_\tau(\varphi_i) = 1$.

- Nech φ je ***tautologickým dôsledkom*** teórie T, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_\tau(\varphi) = val_\tau(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, ..., n$.

Príklad

Nech teória T je definovaná rovnako ako v predchádajúcom príklade

$$T = \left\{ \underbrace{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)}_{\varphi_1}, \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}_{\varphi_2}, \underbrace{(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)}_{\varphi_3} \right\}$$

má dva modely určené špecifikáciami premenných $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$. Uvažujem formulu $\varphi = (p \equiv q)$, formula je ***tautologickým dôsledkom*** teórie T, pretože pre oba modely τ_1 a τ_2 je formula pravdivá, $val_{\tau_1}(\varphi) = 1$ resp. $val_{\tau_2}(\varphi) = 1$.

- Nech $T = \varnothing$ je prázdna teória (neobsahuje žiadnu formulu), formálne môžeme teda povedať, že ľubovolná špecifikácia τ je modelom tejto teórie.

- Ak formula φ je ***tautológia*** (pre každú špecifikáciu τ platí $val_{\tau}(\varphi) = 1$), potom $\varnothing \models \varphi$, alebo jednoduchšie $\models \varphi$.

Veta. *Nech T je teória a φ, ψ sú formuly. Ak súčasne platí $T \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ a $T \vDash \varphi$, potom $T \vDash \psi$.*

Z predpokladov vety vyplýva, že existuje taký model τ teórie T, že formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ sú pravdivé, $val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = val_\tau(\varphi) = 1$, potom z vlastností implikácie vyplýva (pozri tabuľku 1.1), že platí aj $val_\tau(\psi) = 1$. To znamená, že formula ψ logický vyplýva z teórie T, $T \vDash \psi$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta. *Nech formula* φ *je* ***tautologickým dôsledkom*** *teórie* $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, *potom formula* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ *je tautológia.*

Ak existuje taká interpretácia premenných τ, že $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi) = 0$, potom musí súčasne platiť $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 1$ a $val_\tau(\varphi) = 0$, čo je však v protiklade s predpokladom vety.

Predpokladajme, že teória T je nekonzistentná, t.j. nemá model, potom pre každú špecifikáciu premenných τ platí $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 0$, to znamená, že pre ľubovolnú špecifikáciu τ je výrok $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ pravdivý, čiže táto formula je tautológia, tým sme dokázali, že *pre nekonzistentnú teóriu* ***T*** *každá formula* φ *je jej tautologickým dôsledkom*

.

.

Príklad

Nech $T=\{p\wedge\neg p\}$ je teória obsahujúca jednu formulu - kontradikcia, ktorá je pre každdú pravdivostnú hodnotu premennej p je nepravdivá, $val_{p=0,1}(p\wedge\neg p)=0$, potom však formula $(p\wedge\neg p)\Rightarrow\varphi$ je tautológiou, čiže platí $\{p\wedge\neg p\}\vDash\varphi$.

Odvodzovanie formúl výrokovej logiky, logický dôkaz

Logický dôkaz je presne špecifikovaný spôsob odvodzovania výrokových formúl tautológií, pričom sa vychádza z niekoľko málo vopred daných tautológií (axióm), z ktorých pomocou presne formulovaného spôsobu dôkazu zostrojujeme nové tautológie.

Pravidlá odvodzovania

(1) ***Pravidlo modus ponens*** (pravidlo odlúčenia) . Ak formuly φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ sú pravdivé, potom je pravdivá aj formula ψ. Toto pravidlo sa zapisuje aj ako schéma

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$$

(2) ***Pravidlo substitúcie***. Nech φ je tautológia, ktorá obsahuje výrokové premenné $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Nech $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ je množina ľubovolných formúl (ktorých počet je rovnaký ako počet premenných v φ). Nech formula ψ vznikne z φ tak, že každá premenná je substituovaná formulou ψ_i, pre $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\psi = A\left(p_1/\psi_1, p_2/\psi_2, \ldots, p_n/\psi_n\right)$$

Potom takto vytvorená formula ψ je opäť tautológia.

(3) ***Pravidlo nahradenia ekvivalentých podformúl***. Nech φ je tautológia a nech ψ vznikne z φ substitúciou jej ľubovolnej podformuly $\varphi' \subset \varphi$ formulou ψ', ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi' \equiv \psi'$

$$\psi = \varphi\left(\varphi'/\psi'\right)$$

potom aj ψ je tautológia

Príklad

$$\varphi = \left(\left(\left(p \vee \left(q \wedge r\right)\right) \Rightarrow \left(\left(p \vee q\right) \wedge \left(p \vee r\right)\right)\right)\right),$$

vyberieme si podformulu $\varphi' = \left(p \vee q\right)$, nahradíme ju za ekvivalentnú formulu $\psi' = \left(\overline{p} \Rightarrow q\right)$, týmto spôsobom zostrojíme novú tautológiu, ktorá má tvar

$$\psi = \left(\left(p \vee \left(q \wedge r\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\overline{p} \Rightarrow q\right) \wedge \left(p \vee r\right)\right)\right).$$

Definícia.

(1) *Formula* φ *je* **bezprostredným logickým dôsledkom** *množiny formúl T, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z T.*

(2) *Formula* φ *je* **logickým dôsledkom** *množiny formúl T (čo označíme* $T \vdash \varphi$*, ak T=*$\emptyset$*, potom* $\vdash \varphi$*), ak* $\varphi \in T$*, alebo je bezprostredným logickým dôsledkom T, alebo je bezprostredným logickým dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej bezprostredné logické dôsledky.*

(3) **Dôkazom** *formuly* φ *z množiny T je každá konečná postupnosť formúl* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$*, pričom* $\varphi = \varphi_n$ *a každá formula z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z T alebo formúl* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Príklad

$$T=\left\{\underbrace{p\Rightarrow p\vee q}_{\varphi_1},\underbrace{p\vee\neg p}_{\varphi_2},\underbrace{p\Rightarrow(q\Rightarrow p)}_{\varphi_3}\right\}.$$

Krok 1. Na φ_3 aplikujeme pravidlo substitúcie, premennú p nahradíme φ_2

$$\varphi_2\left(p/p\vee\neg p\right)=\varphi_2'=\left(p\vee\neg p\right)\Rightarrow\left(q\Rightarrow\left(p\vee\neg p\right)\right)$$

Krok 2. Použijeme pravidlo modus ponens vzhľadom k φ_2

$$\frac{\begin{array}{l}p\vee\neg p\\ \left(p\vee\neg p\right)\Rightarrow\left(q\Rightarrow\left(p\vee\neg p\right)\right)\end{array}}{q\Rightarrow\left(p\vee\neg p\right)}$$

Krok 3. Formula $\varphi=\left(q\Rightarrow\left(p\vee\neg p\right)\right)$ je logickým dôsledkom množiny T

$$\boldsymbol{T}\vdash q\Rightarrow\left(p\vee\neg p\right).$$

Hilbertov systém axióm výrokovej logiky

Ax$_1$. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Ax$_2$. $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \omega)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \omega))$

Ax$_3$. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$

Ax$_4$. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$

Ax$_5$. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

Ax$_6$. $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

Ax$_7$. $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

Ax$_8$. $(\varphi \Rightarrow \omega) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \omega) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \omega))$

Ax$_9$. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow \neg\varphi)$

Ax$_{10}$. $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$

Príklad

$$\vdash \varphi \Rightarrow \varphi.$$

1.krok dôkazu.
V Ax_1 vykonáme substitúciu $\psi/(\varphi \Rightarrow \varphi)$, dostaneme $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$.

2.krok dôkazu.
V Ax_2 vykonáme substitúciu $\psi/(\varphi \Rightarrow \varphi)$ a ω/φ, dostaneme

$$(\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$$

3.Krok dôkazu.
V Ax_1 vykonáme substitúciu ψ/φ, dostaneme $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$.

4.krok dôkazu.
Aplikujeme modus ponens na formuly z 2. a 1. kroku, dostaneme

$$\left(\varphi \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \varphi\right)\right) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \varphi\right)$$

5.krok dôkazu.
Aplikujeme modus ponens na formuly z 3. a 4. kroku, dostaneme $\varphi \Rightarrow \varphi$, čo bolo treba dokázať.

Veta o dedukcii.
Nech T *je množina formúl a* φ, ψ *sú nejaké dve formuly, potom* $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ *platí práve vtedy a len vtedy ak* $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

$$\left(T \vdash \varphi \Rightarrow \psi\right) \quad \text{vtt} \quad \left(T \cup \{\varphi\} \vdash \psi\right)$$

Tato veta umožňuje podstatné skrátenie dôkazov formúl výrokovej logiky. Môžeme ju chápať ako nové (štvrté) pravidlo odvodzovania.

Príklad

Dokážte $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ pomocou vety o dedukcii, pričom $T=\{\varphi\}$.

1. krok dôkazu. $\{\varphi\} \vdash \varphi$.

2. krok dôkazu. Použitím vety o dedukcii dostaneme $\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi)$

Všeobecné vlastnosti výrokovej logiky

- Výroková logika je **rozhodnuteľná,** existuje algoritmus (napr. tabuľková metóda), pomocou ktorého jednoznačne rozhodneme, či daná výroková formula je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná.

- Formálny systém výrokovej logiky je **korektný**, ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia. Rozhodnutie o tom, či výroková logika je korektná, sa redukuje na rozhodnutie o tom, či pravidlá odvodzovania sú korektné.

- Výroková logika je **úplná** ak každá tautológia je dokázateľná z axióm.

Nech φ je formula, ktorá má premenné $r_1, r_2, \ldots, r_m$ a nech τ je interpretácia týchto premenných, potom

$$r^{(\tau)} = \begin{cases} r & \left(ak\ val_\tau(r) = 1\right) \\ \neg r & \left(ak\ val_\tau(r) = 0\right) \end{cases}$$

Churchova veta. Nech φ je formula, ktorá obsahuje n výrokových premenných $p_1, p_2, \ldots p_n$ a nech τ je interpretácia týchto premenných, potom pre každú interpretáciu τ platí

$$\left\{p_1^{(\tau)}, p_2^{(\tau)}, \ldots, p_n^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi^{(\tau)}$$

Dôkaz tejto vety sa vykoná pomocou indukcie podľa zložitosti konštrukcie formuly φ.

Postova veta. Pre ľubovolnú výrokovú formulu φ vzťah $\vdash \varphi$ platí práve vtedy a len vtedy, ak $\models \varphi$, t.j. formuly logicky dokázateľné z axióm výrokovej logiky sú tautológie.

Množina ***T*** sa nazýva **nerozporná**, ak súčasne logicky nevyplývajú z T tak formula φ, ako aj jej negácia $\neg\varphi$, t.j. súčasne neplatia vzťahy $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \neg\varphi$.

Postova veta v silnejšej verzii.
(a) Množina ***T*** je splniteľná práve vtedy, keď je nerozporná.
(b) Pre ľubovolnú výrokovú formulu φ vzťah $T \vdash \varphi$ platí práve vtedy, ak $T \models \varphi$.

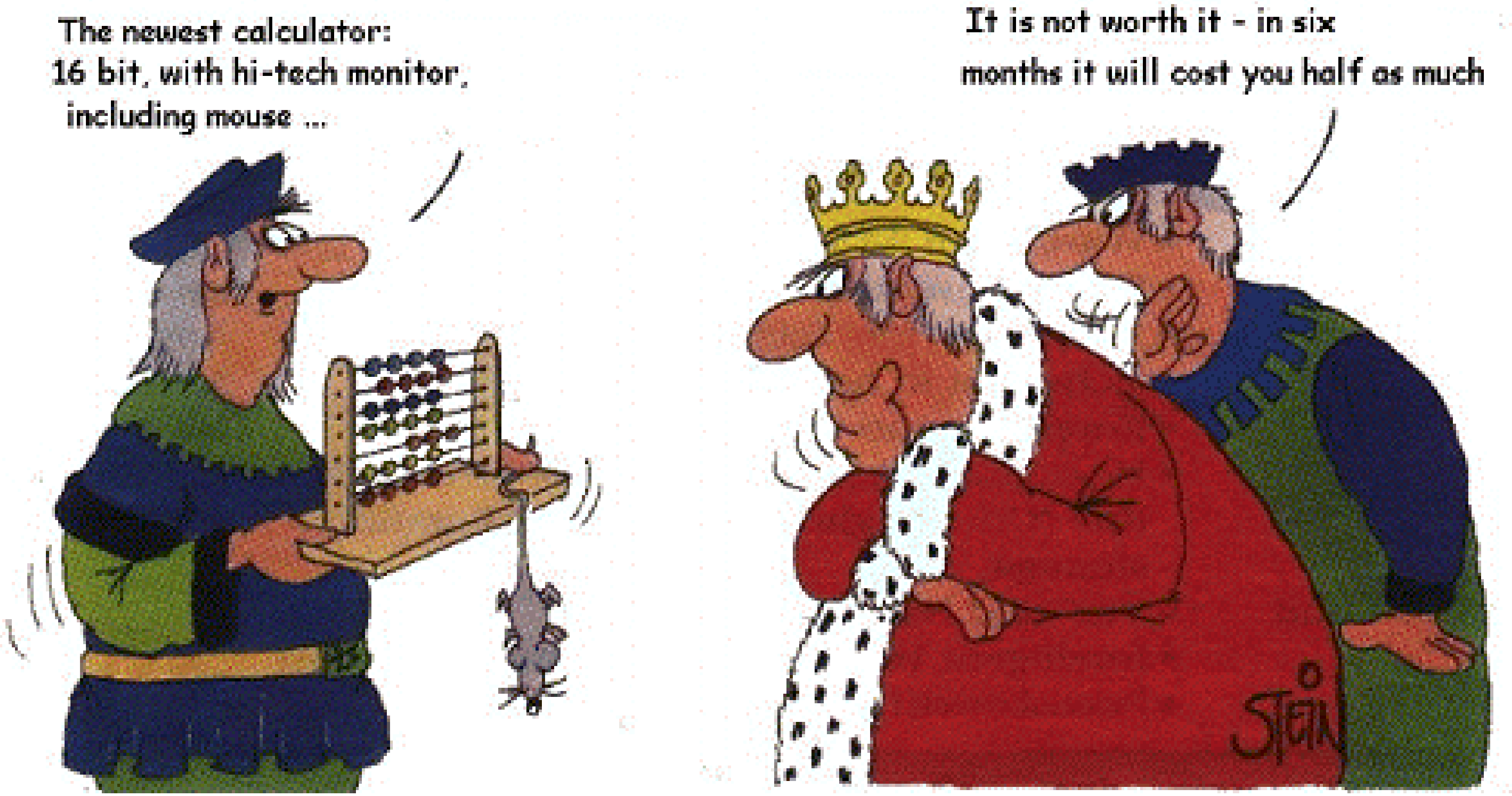
Postova veta ***o úplnosti*** patrí medzi základné výsledky výrokovej logiky. Na jej základe vieme, že každá formula je tautológia vtedy a len vtedy ak je logicky dokázateľná z axióm.

Syntaktický pojem logickej dokázateľnosti splýva so sémantickým pojmom tautologickej dokázateľnosti, čo je jedinečná vlastnosť výrokovej logiky a ojedinelá vlastnosť formálnych systémov, kde obvykle existuje zreteľná demarkačná čiara medzi syntaxom a sémantikou daného systému.

Výroková logika je

- **korektná** (ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia),
- **nerozporná** (ak zo systému axióm súčasne logicky nevyplývajú formuly φ a ¬φ**),**
- **úplná** (ak každá tautológia je logicky dokázateľná z axióm.),
- **rozhodnuteľná** (existuje jednoduchý algoritmus, pomocou ktorého sme schopný rozhodnúť či pre dané pravdivostné hodnoty premenných je formula pravdivá alebo nie)**.**

The End


The newest calculator:
16 bit, with hi-tech monitor,
including mouse ...
It is not worth it - in six
months it will cost you half as much
STEIN