

Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 13. 1. 2010

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov vlastnosť: Tretie mocniny celých čísel sú reprezentované celými číslami, ktoré končia nejakou číslicou z $\{0,1,2,\dots,8,9\}$, pričom každá číslica z tejto množiny je použitá aspoň raz.

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A = \emptyset$.

3. príklad. Nech A a B sú množiny, dokážte vymenovaním všetkých prípadov pomocou charakteristických funkcií tieto vlastnosti:

(a) $(A \cap B) \subseteq A$,

(b) $A \subseteq (A \cup B)$.

4. príklad.

(α) Definujte pre diagonálnu reláciu $R \subseteq A \times A$ vlastnosť reflexívnosti, symetričnosti, antisymetričnosti a tranzitivity.

(β) Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x ma väčšiu hmotnosť ako y ,

(b) x nosí rovnaké číslo topánok ako y ,

(c) x a y sa narodili v piatok.

5. príklad.

Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve tri nuly,

(b) maximálne tri nuly,

(c) minimálne tri nuly.

6. príklad

Na fakulte je 500 študentov, pričom 345 študentov si zapísalo predmet Matematická analýza, 212 študentov si zapísalo predmet Diskrétna matematika a 188 študentov si zapísalo súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Zistite:

(1) Koľko študentov má zapísaný predmet Matematická analýza a nemá zapísaný predmet Diskrétna matematika,

(2) koľko študentov má zapísaný predmet Diskrétna matematika a nemá zapísaný predmet Matematická analýza,

(3) koľko študentov má zapísaný predmet Diskrétna matematika alebo Matematická analýza,

(4) koľko študentov si nezapísalo žiadny z týchto dvoch predmetov?

7. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny výraz k Boolovej funkcii

$$wxyz + wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z.$$

8. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2 ?

9. príklad.

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápalek, kedy máte na začiatku hry 5 zápalek, každý hráč môže odobrať alebo jednu, alebo 2 zápalky, a kto odoberie poslednú zápalku, tak prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnoťte pomocou minimax princípu. Existuje víťazná stratégia pre prvého hráča? Ak áno, tak ju naformulujte.

11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Odvodením určite, na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu. (2,5 bodu)

Odvodením určite maximálny stupeň týchto oblastí. (2,5 bodu)

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov vlastnosť:

Tretie mocniny celých čísel sú reprezentované celými číslami, ktoré končia nejakou číslicou z $\{0,1,2,\dots,8,9\}$, pričom každá číslica z tejto množiny je použitá aspoň raz.

Riešenie:

- (1) číslo $n = (\dots 0)$, potom $n^2 = (\dots 0)$, potom $n^3 = (\dots 0)$,
- (2) číslo $n = (\dots 1)$, potom $n^2 = (\dots 1)$, potom $n^3 = (\dots 1)$,
- (3) číslo $n = (\dots 2)$, potom $n^2 = (\dots 4)$, potom $n^3 = (\dots 8)$,
- (4) číslo $n = (\dots 3)$, potom $n^2 = (\dots 9)$, potom $n^3 = (\dots 7)$,
- (5) číslo $n = (\dots 4)$, potom $n^2 = (\dots 6)$, potom $n^3 = (\dots 4)$,
- (6) číslo $n = (\dots 5)$, potom $n^2 = (\dots 5)$, potom $n^3 = (\dots 5)$,
- (7) číslo $n = (\dots 6)$, potom $n^2 = (\dots 6)$, potom $n^3 = (\dots 6)$,
- (8) číslo $n = (\dots 7)$, potom $n^2 = (\dots 9)$, potom $n^3 = (\dots 3)$,
- (9) číslo $n = (\dots 8)$, potom $n^2 = (\dots 4)$, potom $n^3 = (\dots 2)$,
- (10) číslo $n = (\dots 9)$, potom $n^2 = (\dots 1)$, potom $n^3 = (\dots 9)$.

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A = \emptyset$.

Riešenie:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

3. príklad. Nech A a B sú množiny, dokážte vymenovaním všetkých prípadov pomocou charakteristických funkcií tieto vlastnosti:

Riešenie:

(a) $(A \cap B) \subseteq A$

$$\mu_{A \cap B} \leq \mu_A \Rightarrow \min\{\mu_A, \mu_B\} \leq \mu_A$$

(1) Nech $\mu_A \leq \mu_B$, potom $\mu_A \leq \mu_A$, t. j. vlastnosť platí

(2) Nech $\mu_A > \mu_B$, potom $\mu_B \leq \mu_A$, čo je totožné s pôvodným predpokladom, t. j. vlastnosť platí

(b) $A \subseteq (A \cup B)$

$$\mu_A \leq \mu_{A \cup B} \Rightarrow \mu_A \leq \max\{\mu_A, \mu_B\}$$

(1) Nech $\mu_A \leq \mu_B$, potom $\mu_A \leq \mu_B$, čo je totožné s pôvodným predpokladom, t. j. vlastnosť platí

(2) Nech $\mu_A > \mu_B$, potom $\mu_A \geq \mu_A$, t. j. vlastnosť platí

4. príklad.

Riešenie:

(α)

(1) Relácia R je *reflexívna* práve vtedy, ak $\forall x((x, x) \in R)$

(2) Relácia R je *symetrická* práve vtedy, ak $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

(3) Relácia R je *antisymetrická* práve vtedy, ak $\exists x \exists y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

(4) Relácia R je *tranzitívna* práve vtedy, ak $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

(β)

Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x ma väčšiu hmotnosť ako y ,

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z))$

antisymetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

(b) x nosí rovnaké číslo topánok ako y ,

reflexívna: $\forall x((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

(c) x a y sa narodili v piatok,

reflexívna: $\forall x((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

5. príklad.

Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

Riešenie:

(a) obsahujú práve tri nuly, $\binom{10}{3} = 120$

(b) maximálne tri nuly, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

(c) minimálne tri nuly,

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$$

$$120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 968$$

Alternatívny výsledok pomocou (b) je

$$2^{10} - C(10,0) - C(10,1) - C(10,2) = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$$

6. príklad

Na fakulte je 500 študentov, pričom 345 študentov si zapísalo predmet Matematická analýza, 212 študentov si zapísalo predmet Diskrétna matematika a 188 študentov si zapísalo súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Zistite:

$$|U| = 500, |MA| = 345, |DM| = 212, |MA \cap DM| = 188.$$

Riešenie:

(1) Koľko študentov má zapísaný predmet Matematická analýza a nemá zapísaný predmet Diskrétna matematika?

$$|MA \cap \overline{DM}| = |MA| - |MA \cap DM| = 345 - 188 = 157$$

(2) koľko študentov má zapísaný predmet Diskrétna matematika a nemá zapísaný predmet matematická analýza?

$$|\overline{MA} \cap DM| = |DM| - |MA \cap DM| = 212 - 188 = 24$$

(3) koľko študentov má zapísaný predmet Diskrétna matematika alebo Matematická analýza,

$$|MA \cup DM| = |MA| + |DM| - |MA \cap DM| = 345 + 212 - 188 = 369$$

(4) koľko študentov si nezapísalo žiadny z týchto dvoch predmetov?

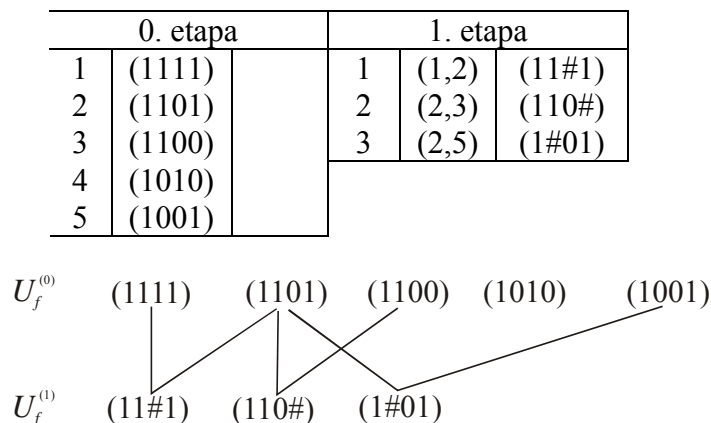
$$\begin{aligned} |\overline{MA} \cap \overline{DM}| &= |\overline{MA \cup DM}| = |U| - |MA \cup DM| = |U| - |MA| - |DM| + |MA \cap DM| \\ &= 500 - 345 - 212 + 188 = 131 \end{aligned}$$

7. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny výraz k Boolovej funkcii

$$wxyz + wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z,$$

Riešenie:



Klausele z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klausele z 0. etapy, preto vyberieme klausele ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

$$\tilde{V} = \{(11\#1), (110\#), (1\#01), (1010)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w, x, y, z) = wxz + wx\bar{y} + w\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z}$$

8. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2 ?

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p = -3-2q$ a $1+p = 3+q$, riešením tohto systému dostaneme $p=3$ a $q=1$, potom posledná ekvivalentná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

9. príklad.

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Riešenie:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápalek, kedy máte na začiatku hry 5 zápalek, každý hráč môže odobrať alebo jednu, alebo 2 zápalky, a kto odoberie poslednú zápalku, tak prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnoťte pomocou minimax princípu. Existuje víťazná stratégia pre prvého hráča? Ak áno, tak ju naformulujte.

The diagram illustrates a minimax search tree for a 3-disk Tower of Hanoi problem. The tree has four levels of nodes, alternating between Max and Min players. The root node is a Max node, and its children are Min nodes. The tree continues to a third level of Max nodes and a fourth level of Min nodes. Red numbers indicate the values propagated up the tree. The root node has a value of 1. The leftmost path (root -> left child -> left child -> left child) is highlighted with a thick line, indicating the optimal solution path.

Riešenie:

Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6 \times 4/2 - 6 + 1 + 1 = 8$.
kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.
Keďže $2|E| = \sum \deg(R)$ a minimálny stupeň oblasti je 3 (polygon s nižším počtom hrán neexistuje)
 $24 \geq 8 \times 3$
Keďže ide o rovnosť $24 = 8 \times 3$, minimálny stupeň oblasti 3 je zároveň aj maximálnym stupňom.