

Príklad 1. $\#_0 w = \#_1 w$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ w \mid \#_0 w = \#_1 w, w \in \{0, 1\}^* \}$

Príklady slov z jazyka:

$\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 0101, 1100, 001011, \dots$

Riešenie 1:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, A, B\}$
- ◇ $T = \{0, 1\}$
- ◇ $P = \{$
 $S \rightarrow 0A \mid 1B \mid \varepsilon$
 $A \rightarrow 1S \mid 0AA$
 $B \rightarrow 0S \mid 1BB$
 $\}$

Odvodenie slov:

► 0011

$S \Rightarrow 0A \Rightarrow 00AA \Rightarrow 001SA \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011S \Rightarrow 0011$

► 1001

$S \Rightarrow 1B \Rightarrow 10S \Rightarrow 100A \Rightarrow 1001S \Rightarrow 1001$

► 001011

$S \Rightarrow 0A \Rightarrow 00AA \Rightarrow 001SA \Rightarrow 0010AA \Rightarrow 00101SA \Rightarrow 00101A \Rightarrow 001011S \Rightarrow 001011$

Riešenie 2:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S\}$
- ◇ $T = \{0, 1\}$
- ◇ $P = \{$
 $S \rightarrow \varepsilon \mid 01 \mid 10 \mid 1S0 \mid 0S1$
 $S \rightarrow S01 \mid S10 \mid 10S \mid 01S$
 $\}$

Odvodenie slov:

► 0011

$$S \Rightarrow 0A \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 0011$$

► 1001

$$S \Rightarrow 10S \Rightarrow 1001S \Rightarrow 1001$$

► 001011

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 001011$$

Príklad 2. wcw

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ wcw \mid w \in \{a,b\}^* \}$

Príklady slov z jazyka:

$c, aca, abcab, baacbaa, aabcaab, ababcabab, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, A, B, C\}$
- ◇ $T = \{a, b, c\}$
- ◇ $P = \{$
 - $S \rightarrow aAS \mid bBS \mid C$
 - $Aa \rightarrow aA$
 - $Bb \rightarrow bB$
 - $Ba \rightarrow aB$
 - $Ab \rightarrow bA$
 - $BC \rightarrow Cb$
 - $AC \rightarrow Ca$
 - $C \rightarrow c$ $\}$

Vysvetlenie:

- ▷ Generujem vetnú formu tak, že obsahuje všetko $2x$ a C je nakonci a potom tú druhú polovicu prenesiem za C tak, aby sa nepomiešala.

Odvodenie slov:

- aca

$$S \Rightarrow aAS \Rightarrow aAC \Rightarrow aCa \Rightarrow aca$$

- $aabcaab$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aAS \Rightarrow aAaAS \Rightarrow aaAAS \Rightarrow aaAAbBS \Rightarrow aaAbABS \Rightarrow aabAABS \Rightarrow aabAABC \\ &\Rightarrow aabAACb \Rightarrow aabACab \Rightarrow aabCaab \Rightarrow aabcaab \end{aligned}$$

Príklad 3. $a^n b^n c^n$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$

Príklady slov z jazyka:

$abc, aabbcc, aaabbbccc, aaaabbbbcccc, \dots$

Riešenie:

$$\diamond G = \{N, T, P, S\}$$

$$\diamond N = \{S, B, C\}$$

$$\diamond T = \{a, b, c\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$S \rightarrow aSBC \mid abC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$bC \rightarrow bc$$

$$bB \rightarrow bb$$

$$cC \rightarrow cc$$

$$\}$$

Vysvetlenie:

▷ Nagenerujem vetnú formu so správnymi počtami abc - ABC a potom ich prepisujem na konečné slovo, aby boli v správnom poradí.

Odvodenie slov:

► abc

$$S \Rightarrow abC \Rightarrow abc$$

► $aabbcc$

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcC \Rightarrow aabbcc$$

Príklad 4. $a^n b^n c^n d^n$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^n b^n c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$

Príklady slov z jazyka:

$abcd, aabbccdd, aaabbbccdd, aaaabbbbccccdd, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, B, C, D\}$
- ◇ $T = \{a, b, c, d\}$
- ◇ $P = \{$
 - $S \rightarrow aSBCD \mid abCD$
 - $DB \rightarrow BD$
 - $DC \rightarrow CD$
 - $CB \rightarrow BC$
 - $bC \rightarrow bc$
 - $bB \rightarrow bb$
 - $cC \rightarrow cc$
 - $cD \rightarrow cd$
 - $dD \rightarrow dd$ $\}$

Odvodenie slov:

► $abcd$

$$S \Rightarrow abCD \Rightarrow abcD \Rightarrow abcd$$

► $aabbccdd$

$$S \Rightarrow aSBCD \Rightarrow aabCDBCD \Rightarrow aabCBDCD \Rightarrow aabBCDCD \Rightarrow aabBCCDD \Rightarrow aabbCCDD \Rightarrow aabbCDD \Rightarrow aabbccDD \Rightarrow aabbccdd \Rightarrow aabbccdd$$

Príklad 5. $a^i b^j c^i d^j$

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}^+ \}$

Príklady slov z jazyka:

$abcd, aabccd, abbbccdd, aabbccdd, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, L, P, B, C\}$
- ◇ $T = \{a, b, c, d\}$
- ◇ $P = \{$
 - $S \rightarrow LP$
 - $L \rightarrow aLC \mid aC$
 - $P \rightarrow BPd \mid Bd$
 - $CB \rightarrow BC$
 - $aB \rightarrow ab$
 - $DC \rightarrow CD$
 - $bB \rightarrow bb$
 - $bC \rightarrow bc$
 - $cC \rightarrow cc$
 - $\}$

Vysvetlenie:

- ▷ Rozdeliť na dve časti, nechať generovať časti slova umocnené na i a časti slova umocnené na j a potom preusporiadať.

Odvodenie slov:

► $abcd$

$$S \Rightarrow LP \Rightarrow aCP \Rightarrow aCBd \Rightarrow aBCd \Rightarrow abCd \Rightarrow abcd$$

► $aabccd$

$$S \Rightarrow LP \Rightarrow aLCP \Rightarrow aaCCP \Rightarrow aaCCBd \Rightarrow aaCBCd \Rightarrow aaBCCd \Rightarrow aabCCd \Rightarrow aabcCd \Rightarrow aabccd$$

► $abbbccdd$

$$S \Rightarrow LP \Rightarrow aLCP \Rightarrow aaCCP \Rightarrow aaCCBPd \Rightarrow aaCCBBdd \Rightarrow aaCBCBdd \Rightarrow aaBCCBdd \Rightarrow aaBCBCdd \Rightarrow aaBBCCdd \Rightarrow aabBCCdd \Rightarrow aabbCCdd \Rightarrow aabbcCdd \Rightarrow abbbccdd$$

Príklad 6a. Viacznačnosť gramatiky G ¹

Zadanie:

- Dokážte, že gramatika G je viacznačná.

$$G = (N, T, P, S)$$

$$N = \{S\}$$

$$T = \{a\}$$

$$P = \{$$

$$S \rightarrow aaSaa \mid a$$

$$S \rightarrow aS$$

$$\}$$

Riešenie:

► $aaaaaa$

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaaaa$$

► $aaaaaa$

$$S \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaaaa$$

Vysvetlenie:

- ▷ Našli sme dva rôzne stromy odvodenia pre slovo $aaaaaa$ a preto je gramatika G viacznačná.

Príklad 6b. Viacznačnosť gramatiky G ²

Zadanie:

- Dokážte, že gramatika G je viacznačná.

$$G = (N, T, P, S)$$

$$N = \{S\}$$

$$T = \{if, (1), else, a\}$$

$$P = \{$$

$$S \rightarrow if (1) S \mid a$$

$$S \rightarrow if (1) S else S$$

$$S \rightarrow a$$

$$\}$$

Riešenie:

$$\blacktriangleright if (1) if (1) a else a$$

$$S \Rightarrow if (1) S else S \Rightarrow if(1) if (1) S else S \Rightarrow if (1) if (1) a else S \Rightarrow if (1) if (1) a else a$$

$$\blacktriangleright if (1) if (1) a else a$$

$$S \Rightarrow if (1) S \Rightarrow if (1) if (1) S else S \Rightarrow if (1) if (1) a else S \Rightarrow if (1) if (1) a else a$$

Vysvetlenie:

- ▷ Našli sme dva rôzne stromy odvodenia pre slovo $if (1) if (1) a else a$ a preto je gramatika G viacznačná.

Príklad 7a. Homomorfizmus - viacznačnosť gramatiky G ¹

Zadanie:

- Nájdite homomorfizmus h , tak aby gramatika $G' = \{N, h(T), P', S\}$ bola viacznačná. Množina P' vznikne z P aplikovaním h na každý terminál.

$$G = (N, T, P, S)$$

$$N = \{S, A, B\}$$

$$T = \{a, b, c, d\}$$

$$P = \{ \\ S \rightarrow abA \mid a \\ A \rightarrow cS \mid dbB \mid b \\ B \rightarrow cBd \mid bA \mid cA \\ \}$$

Riešenie:

$$\diamond G' = (N, h(T), P', S)$$

$$\diamond N = \{S, A, B\}$$

$$\diamond h(T) = \{4\}$$

resp.

$$h(a) = 4$$

$$h(b) = 4$$

$$h(c) = 4$$

$$h(d) = 4$$

$$\diamond P' = \{$$

$$S \rightarrow 44A$$

$$A \rightarrow 4S \mid 44B \mid 4$$

$$B \rightarrow 4B4 \mid 4A$$

$$\}$$

► 444444

$$S \Rightarrow 44A \Rightarrow 444S \Rightarrow 44444A \Rightarrow 444444$$

► 444444

$$S \Rightarrow 44A \Rightarrow 4444B \Rightarrow 44444A \Rightarrow 444444$$

Vysvetlenie:

- ▷ Našli sme dva rôzne stromy odvodenia pre slovo 444444 a preto je gramatika G' viacznačná.

Príklad 7b. Homomorfizmus - viacznačnosť gramatiky G ²

Zadanie:

- Nájdite homomorfizmus h , tak aby gramatika $G' = \{N, h(T), P', A\}$ bola viacznačná. Množina P' vznikne z P aplikovaním h na každý terminál.

$$G = (N, T, A, S)$$

$$N = \{A, B\}$$

$$T = \{a, b, c, d\}$$

$$P = \{ \\ A \rightarrow bcBdA \mid c \mid bA \\ B \rightarrow cBd \mid b \\ \}$$

Riešenie:

$$\diamond G' = (N, h(T), P', A)$$

$$\diamond N = \{A, B\}$$

$$\diamond h(T) = \{4\}$$

resp.

$$h(a) = 4$$

$$h(b) = 4$$

$$h(c) = 4$$

$$h(d) = 4$$

$$\diamond P' = \{$$

$$A \rightarrow 44B4A \mid 4 \mid 4A$$

$$B \rightarrow 4B4 \mid 4$$

$$\}$$

► 4444444

$$S \Rightarrow 44B4A \Rightarrow 4444A \Rightarrow 44444A \Rightarrow 444444A \Rightarrow 4444444$$

► 4444444

$$S \Rightarrow 44B4A \Rightarrow 444B44A \Rightarrow 444444A \Rightarrow 4444444$$

Vysvetlenie:

- ▷ Našli sme dva rôzne stromy odvodenia pre slovo 4444444 a preto je gramatika G' viacznačná.