# Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ , 31. 1. 2011

**1. príklad**. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$$

**2. príklad**. Dokážte, že binárna operácia $\oplus$ (XOR) vzhovuje týmto formulám: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ a $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

**3. príklad**. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

**4. príklad.**
Zistite, či relácia *R* nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) *x* je väčší ako *y*,
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

**5. príklad**.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve dve jednotky
(b) maximálne jedni jednotku,
(c) minimálne tri jednotky.

**6. príklad**. Nech $(\mathcal{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathcal{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathcal{N}, *)$ je pologrupa. (3 body)

(b) Rozhodnite, či $(\mathcal{N}, *)$ je monoid, odôvodnite. (2 bod)

**7. príklad.** Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{1}$, (b) $\overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, (c) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, (d) $\overline{x} + \overline{x} = \mathbf{1}$, (e) $x \cdot \mathbf{1} = x$.

**8. príklad** Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**10. príklad**. Existuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,1,1,4,4,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

**11. príklad.** Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

**Prémiový príklad**. Nech $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sú indexy , zložený index je zostrojený pomocou predpisu $\sigma(i,j) = (i-1)*9 + j$ . Predpokladajme, že poznáme zložený index $\sigma(i,j)$, nájdite indexy *i* a *j*, ktoré ho vytvárajú.

**Poznámka**: Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi (alebo 60 bodmi, v prípade korektného riešenie prémiového príkladu), čas na písomku je 90 minút.

## Riešenie

**1. príklad**. Dokážte pomocou matematickej indukcie formulu

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

Riešenie:

(1) Formula platí pre $n$ = 2, $\overline{A_1 \cup A_{2n}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (známa De Morganova formula pre komplement zjednotenia).

(2) Pomocou predošlej formuly ju dokážeme pre $n$ =3.

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{\underbrace{\left(A_1 \cup A_2\right)}_{B} \cup A_3} = \overline{B \cup A_3} = \overline{B} \cap \overline{A_3} = \overline{\left(A_1 \cup A_2\right)} \cap \overline{A_3} =$$

$$\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \cap \overline{A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$$

(3) Teraz, keď poznáme túto formulu pre n=3, môžeme pristúpiť k dôkazu pre $n$=4, atď., postupne je dokážeme pre ľubovolné prirodzené $n$ .

**2. príklad**. Dokážte, že binárna operácia ⊕ (XOR) je asociatívna a distributívna vzhľadom ku konjunkcii, t. j. plati $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ a $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$.

Riešenie: Dôkaz vykonáme pomocou tabuľkovej metódy (čo môžeme pokladať za dôkaz vymenuvaním všetkých prípadov).

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \oplus z$ | $x \oplus (y \oplus z)$ | $x \oplus y$ | $(x \oplus y) \oplus z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \oplus z$ | $x \wedge (y \oplus z)$ | $x \wedge y$ | $x \wedge z$ | $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**3. príklad**. Čo môžeme povedať o množinách $A$ a $B$, ak platí
(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

(a) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny $A$ a $B$
(b) $A - B = B - A$, platí ak $A = B$.
(c) $A - B = A$, platí ak $A \cap B = \emptyset$

**4. príklad.**
Zistite, či relácia $R$ nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x$ je väčší ako $y$,
(b) $x$ a $y$ sa narodili v rovnakom dni,

(a) $x$ je väčší ako $y$,
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left( (x > y) \wedge (y > z) \Rightarrow (x > z) \right)$
antisymetrická: $\forall (x, y \in X)\left( (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R \right)$

(b) $x$ a $y$ sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x \left( (x,x) \in R \right)$
symetrická: $\forall x \forall y \left( (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left( (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \right)$

**5. príklad**.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve dve jednotky, $\binom{10}{2} = \boxed{45}$
(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = \boxed{176}$
(c) minimálne tri jednotky,
$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$
$120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = \boxed{968}$
$=2^{10}$-C(10,0)-C(10,1)-C(10,2)=1024-1-10-45=968

**6. príklad**. **3. príklad**. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto
$$x * y = min\{x, y\}$$
(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia ´$*$´ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)
(a1) $x < y < z$
$$(x * y) * z = x * z = x$$
$$x * (y * z) = x * y = x$$
(a2) $x < z < y$

$$(x*y)*z = x*z = x$$
$$x*(y*z) = x*z = x$$

(a3) $y < x < z$

$$(x*y)*z = y*z = y$$
$$x*(y*z) = x*y = y$$

..........................

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z = x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa .

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N},*)$ je monoid. (2 body)

Daná algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ nie je monoid, neexistuje jednotkový element *e*, ktorý patrí do množiny $\mathbb{N}$ (jednotkovým prvkom by potenciálne mohlo byť ∞, ktoré však nepatrí do $\mathbb{N}$).

**7. príklad.** Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{1}$
(b) $\overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$
(c) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$,
(d) $\overline{x} + \overline{x} = \mathbf{1}$,
(e) $x \cdot \mathbf{1} = x$.
Riešenie:
(a) neplatí pre žiadne *x*
(b) neplatí pre žiadne *x*
(c) $x = \mathbf{0}$,
(d) $x = \mathbf{0}$,
(e) platí pre každé *x*

**8. príklad** Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

Riešenie:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & -5 \\ \boxed{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{-3} & \cancel{-17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array}\right)$$

$$z = t,\ -4y - 3z = -17 \Rightarrow y = \frac{17}{4} - \frac{3}{4}t,\ x + y + z = 6 \Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}t,\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

**10. príklad.** Existuje obyčajný graf s 7 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,1,1,4,4,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo.

Podľa vety 10.3. upravujeme postupnosť nasledovne:
4,4,4,1,1,1,1
3,3,0,0,1,1
3,3,1,1,0,0
2,0,0,0,0
0,-1,-1,0,0
Postupnosť nie je grafová, neexistuje obyčajný graf s danými stupňami vrcholov.

**11. príklad.** Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6\times4/2-6+1+1=8$.
kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.

**Prémiový príklad**. Nech $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sú indexy , zložený index je zostrojený pomocou predpisu $\sigma(i,j)=(i-1)*9+j$ . Predpokladajme, že poznáme zložený index $\sigma(i,j)$, nájdite indexy *i* a *j*, ktoré ho vytvárajú.

Riešenie: Nech $\alpha=\sigma(i,j)\ \mathit{div}\ 9$, $\beta=\sigma(i,j)\ \mathit{mod}\ 9$, potom

$$i=\begin{cases}\alpha+1 & (\beta>0)\\ \beta & (\beta=0)\end{cases}, \quad j=\alpha-(i-1)*9$$