Rýchla Diskrétna Fourierova transformácia

Úvod

Majme polynóm v neurčitej t
$f(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots x_{n-1} t^{n-1}$
kde $x_0, x_1, x_2, \dots, n_{n-1}$ sú prvky nejakého poľa (napr. $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$)

Ako je možné tento polynóm zadať?

Spôsoby zadania polynómu

1. koeficientami $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$
2. koreňmi (a koeficientom pri najvyššej mocnine)
3. hodnotami v bodoch, t.j. dvojicami $(a_i, f(a_i))$), pre $i = 1, 2, \ldots, n$
4. hodnotami v špeciálnych bodoch, konkrétne v koreňoch rovnice $x^n - 1 = 0$

Riešenie rovnice $x^n - 1 = 0$

Koreňmi rovnice $x^n - 1 = 0$ sú prvky ω_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

pričom

$$\omega_j = \omega^j$$

a

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n}).$$

Diskrétna Fourierova transformácia

Definition

Diskrétna Fourierova transformácia n čísel je prechod od zadania polynómu stupňa $n-1$ pomocou koeficientov k jeho zadaniu cez hodnoty v koreňoch rovnice $x^n - 1 = 0$.

Diskrétna Fourierova transformácia

$$f(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots x_{n-1} t^{n-1}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

$$f(\omega_j) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (\omega_j)^k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Diskrétna Fourierova transformácia

Definition

$$DFT(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (f(\omega_0), f(\omega_1), f(\omega_2), \ldots, f(\omega_{n-1})),$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}},\ f(\omega_j) = f(\omega^j) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}}.$$

Vektorový zápis DFT

$$\begin{aligned} f(\omega_0) = x_0 + x_1(\omega^0)^1 + x_2(\omega^0)^2 + \cdots + x_{n-1}(\omega^0)^{n-1} = \\ x_0 + x_1 1^1 + x_2 1^2 + \cdots + x_{n-1} 1^{n-1} \\ f(\omega_1) = x_0 + x_1(\omega^1)^1 + x_2(\omega^1)^2 + \cdots + x_{n-1}(\omega^1)^{n-1} \\ f(\omega_2) = x_0 + x_1(\omega^2)^1 + x_2(\omega^2)^2 + \cdots + x_{n-1}(\omega^2)^{n-1} \\ \vdots \\ f(\omega_{n-1}) = x_0 + x_1(\omega^{n-1})^1 + x_2(\omega^{n-1})^2 + \cdots + x_{n-1}(\omega^{n-1})^{n-1} \end{aligned}$$

Vektorový zápis DFT

$$H = (H_{k,l}) = (\omega^{(k-1)(l-1)})$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & (\omega^2)^1 & (\omega^2)^2 & (\omega^2)^3 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\omega^{n-1})^1 & (\omega^{n-1})^2 & (\omega^{n-1})^3 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vektorový zápis DFT

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{n-1} \\
1 & (\omega^2)^1 & (\omega^2)^2 & (\omega^2)^3 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & (\omega^{n-1})^1 & (\omega^{n-1})^2 & (\omega^{n-1})^3 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1}
\end{pmatrix}
.
\begin{pmatrix}
x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}
\end{pmatrix}
=
$$

$$
= H.X = DFT(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).
$$

Inverzná DFT

$$H' = (H'_{k,l}) = (\omega^{-(k-1)(l-1)})$$

Platí: $H.H' = n.I_n$

$$Y = DFT(X) = H.X$$
$$X = \frac{1}{n} H'.Y$$

Inverzná DFT

Definition

Inverzná DFT je určená vzťahom $X = \frac{1}{n} H'.Y$, resp.
$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_j) e^{\frac{-2\pi ijk}{n}}.$$

Klasický výpočet DFT

Pomocou tzv. Hornerovej schémy

```
int value(int *X, int n, int t)
{
  // vypočíta hodnotu polynómu
  // f(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_{n-1} t^{n-1}
  int v = 0;
  int j;
  for(j = n - 1; j >= 0; --j)
    v = t * v + x[j];
  return v;
}
```

Klasický výpočet DFT

- Treba vypočítať n hodnôt,
- výpočet každej má pomocou Hornerovej schémy zložitosť n,
- teda celková zložitosť klasického výpočtu DFT je n^2.

nech $n = 2^r$

$$f(\omega_j) = f(\omega^j) = \sum_{k=0}^{2^r-1} x_k e^{\frac{2\pi ijk}{2^r}}$$

zmeníme poradie indexov (párne + nepárne)

$$f(\omega_j) = f(\omega^j) = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}} + (\sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m+1} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}}) e^{\frac{2\pi ij}{2^r}}$$

Treba vypočítať $Q(j) = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}}$.

Theorem

Suma $Q(j)$ je periodická, s periódou 2^{r-1}.

Dôkaz: treba ukázať, že $Q(j) = Q(j + 2^{r-1})$.

$$Q(j + 2^{r-1}) = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m} e^{\frac{2\pi i (j + 2^{r-1}) m}{2^{r-1}}} = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}} . e^{2\pi im}.$$

$$e^{2\pi im} = \cos(2\pi m) + i \sin(2\pi m) = 1.$$

$$Q(j + 2^{r-1}) = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}} = Q(j).$$

FFT

Podobne pre $\displaystyle\sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} x_{2m+1} e^{\frac{2\pi ijm}{2^{r-1}}}$.

FFT - algoritmus

AZA 31

```
function FFT (n: integer; x: complex array) : complex array;
{ vypočíta DFT(x)};
if n=1 then FFT[0] = x[0];
       else evenarray := {x[0], ..., x[n-2]};
            oddarray := {x[1], x[3], ..., x[n-1]};
  {u[0], u[1], ..., u[n/2 - 1]} = FFT(n/2; evenarray);
  {v[0], v[1], ..., v[n/2 - 1]} = FFT(n/2; oddarray);
    for j=0 to n-1 do begin
        κ = exp(2πij/n) = e^{2πij/n}
      FFT[j] = u[j mod n/2] + κ.v[j mod n/2]
    end;
end.
```

Obrázok: Graf.

FFT - zložitosť

$n = 2^r$

$y(r)$ - počet násobení komplexných čísel pri FFT

volanie FFT($n/2$ even (odd) array): $y(r-1)$ násobení

cyklus for: 2^r násobení

$y(r) = 2y(r-1) + 2^r, \quad r \geq 1, y(0) = 0$

substitúcia $y(r) = 2^r z_r$

$2^r z_r = 2^r z_{r-1} + 2^r$

$z_r = z_{r-1} + 1$

$z_r = r$

$y(r) = 2^r r = n \log_2 n$

FFT - zložitosť

Theorem

Keď n je mocninou 2, potom FFT postupnosti n komplexných čísel môžeme vypočítať s $n \log_2 n$ násobeniami komplexných čísel, a teda zložitosť FFT je $\mathcal{O}(n \log_2 n)$.

FFT - aplikácia

Rýchle násobenie polynómov, $C(t) = A(t).B(t)$.
Aký môže byť stupeň $C(t)$?

- Doplnenie polynómov $A(t), B(t)$ nulami na stupeň $n = 2^r \geq \deg A(t) + \deg B(t)$.
- FFT($A(t)$), FFT($B(t)$), $(2.\mathcal{O}(n \log_2 n))$.
- Násobenie po bodoch, $(\mathcal{O}(n))$.
- Inverzná DFT, alebo interpolácia, $(\mathcal{O}(n \log_2 n))$.