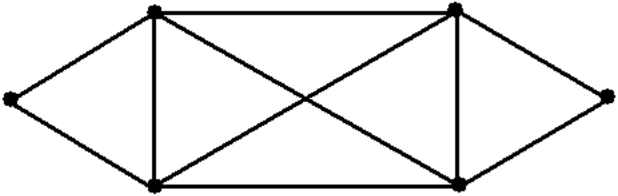
# Farbenie grafov

# Farbenie grafu

Graf $G = (V, E)$
Množina farieb $K$
Chceme nájsť takú funkciu $F : V \to K$, ktorá priradí vrcholom spojeným hranou rôznu farbu, t.j. $(u, v) \in E(G) \Rightarrow F(u) \neq F(v)$.

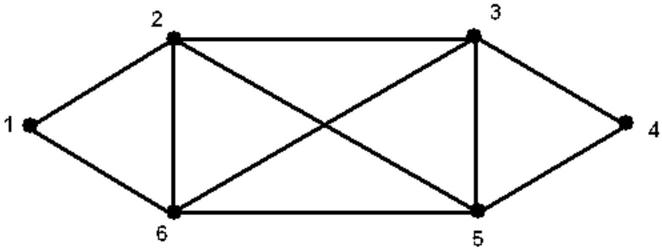
# Príklad

Úloha: nájsť ofarbenie grafu



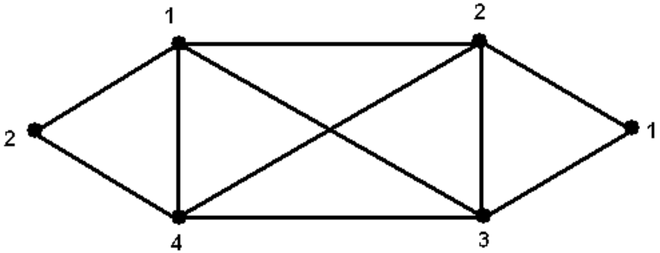
Obrázok: Graf.

# Príklad - triviálne riešenie




Obrázok: Ofarbený graf.

# Príklad - ideálne riešenie




Obrázok: Ofarbený graf.

# Chromatické číslo grafu

**Definition**

Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu $G$ je minimálny počet farieb, potrebných na ofarbenie grafu $G$.

# Planárny graf

Graf $G$ je planárny, keď sa jeho hrany pretínajú najviac vo vrcholoch.
Grafy zodpovedajúce mapám na glóbuse sú planárne.
Na ofarbenie planárneho grafu stačia 4 farby. (Appel, Haken, Bull. AMS 1976, 82, 711-712.)

# Farbenie grafu - všeobecnejšie

Graf $G = (V, E)$
Množina farieb $K$

Koľko existuje $K$-ofarbení grafu $G$.

# Triviálny prípad

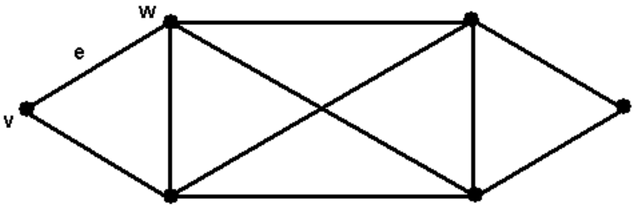
Graf $G = (V, E) = \overline{K_n}$, $V(G) = n$
t.j. graf nemá hrany, všetky vrcholy majú stupeň 0
Množina farieb $K$

Otázka: Koľko existuje $K$-ofarbení grafu $G = \overline{K_n}$?

Odpoveď: $|K|^n$.

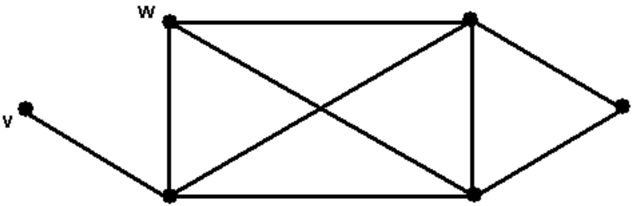
# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

Uvažujme graf $G$, v ktorom je hrana $e = (v, w)$.




Obrázok: Graf.

Odstráňme hranu $e = (v, w)$, t.j. vytvoríme graf $G \backslash \{e\}$.




Obrázok: Graf.

# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

Koľko existuje $K$-ofarbení grafu $G \backslash \{e\}$?
Sú tieto možnosti:

1. Vrcholy $v$ a $w$ majú rôznu farbu.
2. Vrcholy $v$ a $w$ majú rovnakú farbu.

# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

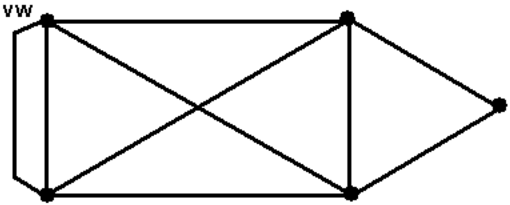
Uvažujme situáciu, kedy vrcholy $v$ a $w$ majú rôznu farbu.

**Theorem**

*Nech $e = (v, w)$ je hrana grafu $G$. Potom počet $K$-ofarbení grafu $G \backslash \{e\}$, v ktorých majú vrcholy $v$ a $w$ rôznu farbu je rovný počtu $K$-ofarbení grafu $G$.*

# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

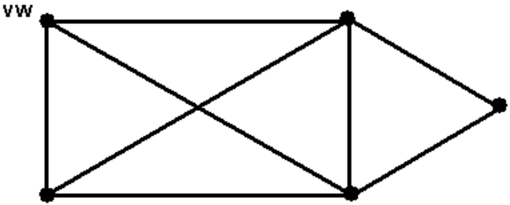
Uvažujme situáciu, kedy vrcholy $v$ a $w$ majú rovnakú farbu.




Obrázok: Graf.

# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

Násobné hrany netreba uvažovať.




Obrázok: Graf.

# Počet $K$-ofarbení - myšlienka

**Theorem**

*Nech $e = (v, w)$ je hrana grafu $G$. Potom počet $K$-ofarbení grafu $G \backslash \{e\}$, v ktorých majú vrcholy $v$ a $w$ rovnakú farbu je rovný počtu $K$-ofarbení grafu $G|e$.*

# Počet $K$-ofarbení

**Theorem**

$$P(K, G\backslash\{e\}) = P(K, G) + P(K, G|e).$$

$$P(K, G) = P(K, G\backslash\{e\}) - P(K, G|e).$$

# $P(K, G)$

**Definition**

$P(K, G)$ je tzv. chromatický polynóm grafu.

**Theorem**

*$P(K, G)$ je polynóm v neurčitej $K$ stupňa $|V(G)|$.*

# Nájdenie chromatického polynómu

```
polynóm Chrompoly(graf G)
{
  // vypočíta chromatický polynóm grafu G
  polynóm poly1, poly2;
  if (|E(G)| == ∅)
    return K^|V(G)|;
  else
  {
    vyber hranu e ∈ E(G);
    poly1 = Chrompoly(G\{e});
    poly2 = Chrompoly(G|e);
    return poly1 − poly2;
  }
}
```

# Chrompoly - zložitosť

$|E(G)| = n$
$F(V, E)$ - max. zložitosť výpočtu chrom. polynómu pre graf $G$ s $|V(G)|$ vrcholmi a $|E(G)|$ hranami
$F(V, E) \leq F(V, E-1) + c.E + F(V-1, E-1)$
$F(E) \sim 2.2^n$

# Chrompoly - zložitosť, iný prístup

$\gamma(G) = |V(G)| + |E(G)|$
$\gamma(G \backslash \{e\}) = \gamma(G) - 1$
$\gamma(G|e) = \gamma(G) - 2$
$h(\gamma)$ - zložitosť výpočtu chrom. polynómu v závislosti od $\gamma(G)$
$h(\gamma) \leq h(\gamma - 1) + h(\gamma - 2) + k.\gamma$
$h(\gamma) = \mathcal{O}(1,62^{\gamma})$

# Chrompoly - zložitosť

**Theorem**

*Chromatický polynóm grafu $G$ možno vypočítať so zložitosťou* $\min(2^{|E(G)|}; 1,62^{|E(G)|+|V(G)|})$.