

## Opravná písomná skúška predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 3. 2. 2010

**1. príklad.** Aký záver vyplýva z množiny výrokov?

„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.

**2. príklad.** Zostrojte potenčné množiny  $\mathcal{P}(A)$  a  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  pre  $A = \{a\}$ .

**3. príklad.**

Zistite, či relácia  $R$  je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom  $(x, y) \in R$  vtedy a len vtedy, ak

(a)  $x \leq y$ ,

(b)  $x$  má rovnaké krstné meno ako  $y$ ,  $km(x) = km(y)$ ,

(c)  $x$  je deliteľné 2 a  $y$  je deliteľné 2 a 4.

**4. príklad.** Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu  $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$  pre  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

**5. príklad**

**Cvičenie 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,

**6. príklad.**

Nech na turnaji je  $2^k$  družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

**7. príklad.** Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z.$$

**8. príklad.** Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

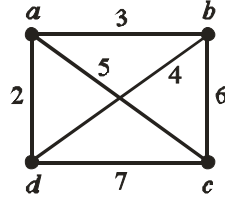
$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**10. príklad.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.

**11. príklad.** Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie  $\otimes$  a keď ju nepredpokladáme?

- (a)  $x \otimes y \otimes z$
- (b)  $t \oplus x \otimes y \otimes z$
- (c)  $t \otimes x \oplus y \otimes z$

**Poznámka:** Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

## Riešenie

**1. príklad.** Aký záver vyplýva z množiny výrokov?

„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.

$p$  = som chytrý

$q$  = mám šťastie

$r$  = zvíťazím v lotérii

$p \vee q$	predpoklad <sub>1</sub>
$\neg q$	predpoklad <sub>2</sub>
$q \Rightarrow r$	predpoklad <sub>3</sub>
<hr/>	
$p$	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad <sub>1</sub> a predpoklad <sub>2</sub>

záver: som chytrý

**2. príklad.** Zostrojte potenčné množiny  $\mathcal{P}(A)$  a  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  pre  $A = \{a\}$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$$

**3. príklad.**

Zistite, či relácia  $R$  je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom  $(x, y) \in R$  vtedy a len vtedy, ak

(a)  $x \leq y$ ,

(b)  $x$  má rovnaké krstné meno ako  $y$ ,  $km(x) = km(y)$ ,

(c)  $x$  je deliteľné 2 a  $y$  je deliteľné 2 a 4.

(a)

je reflexívna,  $x \leq x$ ,

nie je symetrická, neplatí implikácia  $x \leq y \Rightarrow y \leq x$ ,

nie je antisymetrická, neplatí implikácia  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ,

je tranzitívna, platí implikácia  $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ .

(b)

je reflexívna, platí  $km(x) = km(y)$ , pre  $x = y$ ,

je symetrická, platí implikácia  $(km(x) = km(y)) \Rightarrow (km(y) = km(x))$ ,

nie je antisymetrická (je symetrická)

je tranzitívna, platí implikácia  $(km(x) = km(y)) \wedge (km(y) = km(z)) \Rightarrow (km(x) = km(z))$ .

(c)

nie je reflexívna, nie každé číslo  $x$  je súčasne deliteľné 2 a 4,

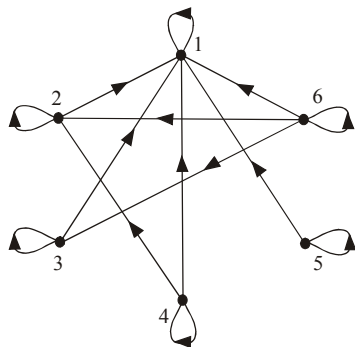
nie je symetrická, nie každá dvojica  $x$  a  $y$  je taká, že  $x$  je deliteľné 2 a  $y$  je deliteľné 4 a súčasne  $y$  je deliteľné 2 a  $x$  je deliteľné 4,

nie je antisymetrická, existujú také dvojice  $x$  a  $y$ , že  $x$  je deliteľné 2 a  $y$  je deliteľné 4 a súčasne  $y$  je deliteľné 2 a  $x$  je deliteľné 4 (napríklad 4 a 8),

je tranzitívna, ak máme dve dvojice  $x,y$  a  $y,z$ , ktoré vyhovujú podmienkam relácie, potom tieto podmienky musia platiť aj pre dvojicu  $x,z$ .

**4. príklad.** Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu  $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$  pre  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

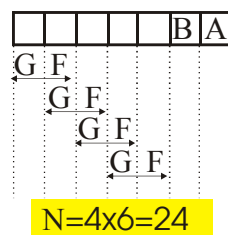
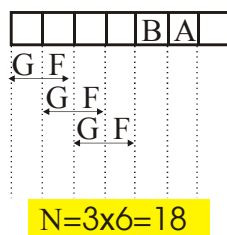
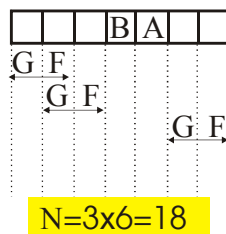
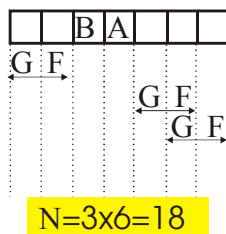
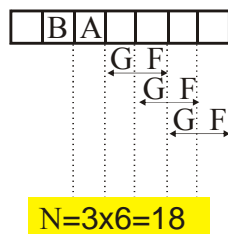
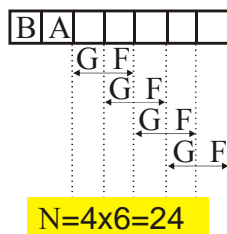
$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5. príklad

**Cvičenie 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je  $2 \times 24 + 4 \times 18 = 120$ .

## 6. príklad.

Nech na turnaji je  $2^k$  družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

1. kolo: pre  $2^k$  družstiev existuje  $2^{k-1}$  zápasov.

2. kolo: pre  $2^{k-1}$  družstiev existuje  $2^{k-2}$  zápasov.

.....  
(k-1). kolo: pre  $2^1$  družstiev existuje 2 zápasy (semifinále).

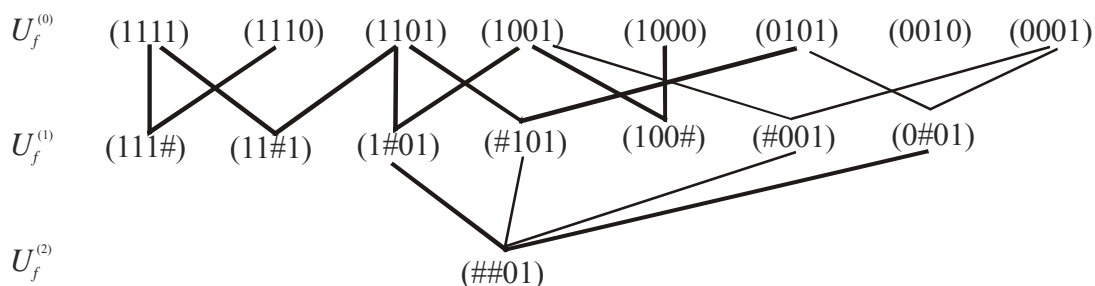
k. kolo: pre  $2^0$  existuje 1 zápas (finále)

Celkový počet zápasov je teda  $2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1 = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = \boxed{2^k - 1}$

**7. príklad.** Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z.$$

0. etapa			1. etapa			2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)	1	(3,7)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)	2	(4,6)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)			
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)			
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)			
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)			
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)			
8	(0001)							



$$\tilde{V} = \{(111\#), (##01), (100\#), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = wxy + \bar{y}z + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

**8. príklad.** Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$A' = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\square \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_4 = l, \quad x_3 = k, \quad x_2 = 3 - k - l, \quad x_1 = 4 - 3k - 2l, \quad \text{kde } k, l \in \mathbb{R},$$

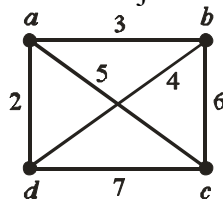
$$x = \begin{pmatrix} 4 - 3k - 2l \\ 3 - k - l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

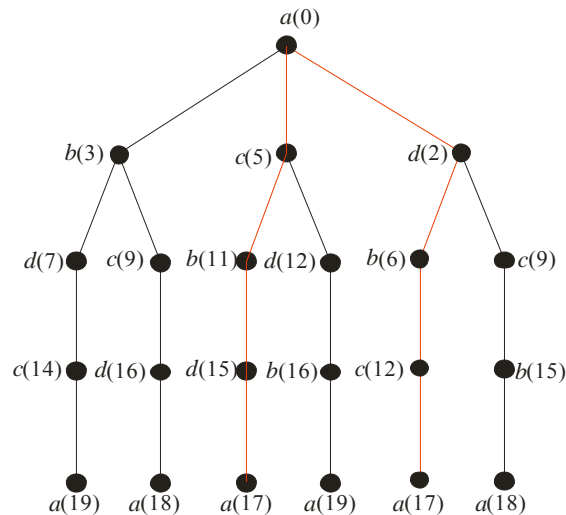
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1/2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 5/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 37/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{7}{2} (-1) 2 \frac{2}{7} 4 = 8 \end{aligned}$$

**10. príklad.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.



Minimálna hamiltonovská kružnica je a-d-b-c-a (prípadne reprezentovaná v opačnej orientácii) s dĺžkou 17.

**11. príklad.** Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie  $\otimes$  a keď ju nepredpokladáme?

- (d)  $x \otimes y \otimes z$
- (e)  $t \oplus x \otimes y \otimes z$
- (f)  $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Riešenie:

Keď predpokladáme asociatívnosť operácie  $\otimes$

- (a) 1 interpretácia,  $x \otimes y \otimes z$
- (b) 3 interpretácie,  $(t \oplus x) \otimes y \otimes z$ ,  $t \oplus (x \otimes y \otimes z)$ ,  $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$
- (c) 4 interpretácie,  $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$ ,  $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$ ,  $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$ ,  $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$

Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie  $\otimes$

- (a) 2 interpretácie,  $(x \otimes y) \otimes z$ ,  $x \otimes (y \otimes z)$
- (b) 5 interpretácií,  $(t \oplus x) \otimes (y \otimes z)$ ,  $t \oplus ((x \otimes y) \otimes z)$ ,  $t \oplus (x \otimes (y \otimes z))$ ,  $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$ ,  $((t \oplus x) \otimes y) \otimes z$
- (c) 5 interpretácií,  $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$ ,  $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$ ,  $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$ ,  $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$ ,  $t \otimes ((x \oplus y) \otimes z)$