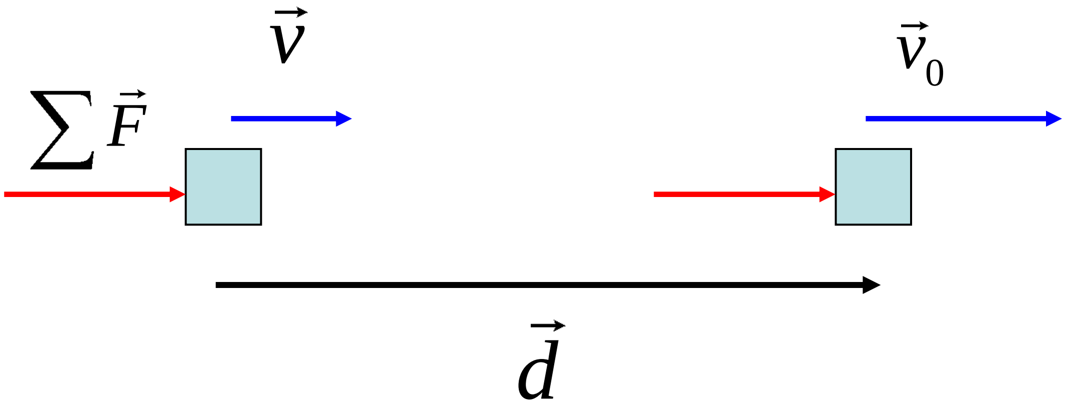
ZHRNUTIE poznatkov o práci

Práca a kinetická energia



$$W = \boxed{\frac{1}{2}mv_f^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_i^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Práca v konzervatívnych poliach

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p \;\; \vec{r}_2 \;\; - E_p \;\; \vec{r}_1 \;\; \right] = -\Delta E_p$$

Práca síl konzervatívneho poľa (pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu) sa rovná záporne vzatej zmene potenciálnej energie ΔEp.

Práca v konzervatívnych poliach

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Zmena kinetickej energie častice sa rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$W = \Delta E_k$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

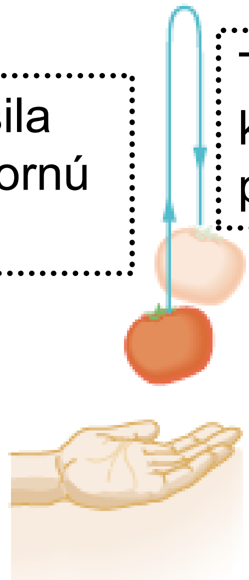
Zmena potenciálnej energie ΔEp pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu je rovná záporne vzatej práci (konzervatívne polia) :

$$W = -\Delta E_p$$

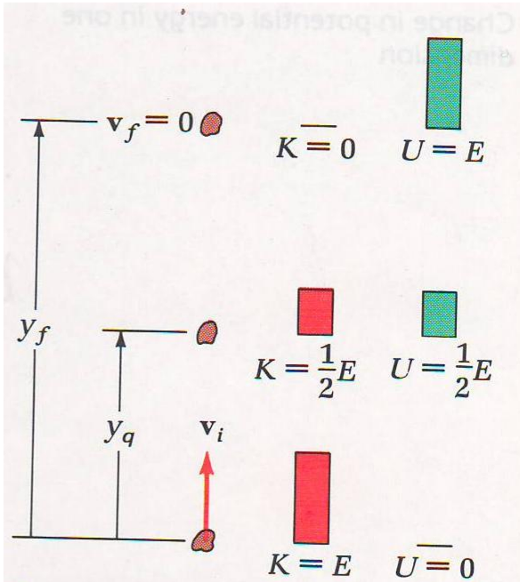
$$E_p \; \vec{r} \; = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Pohyb telesa v tiažovom poli Zeme

Tiažová sila koná zápornú prácu.



Tiažová sila koná kladnú prácu.



$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = 0}$$

Mechanická energia sústavy je stála, pokiaľ v sústave pôsobia **iba konzervatívne sily**

- **Teleso sa pohybuje nahor, potenciálna energia rastie $\Delta E_p > 0$**
$\Rightarrow$ kinetická energia klesá $\Delta E_k < 0$
- **Teleso sa pohybuje nadol, potenciálna energia klesá $\Delta E_p < 0$**
- **$\Rightarrow$ kinetická energia stúpa $\Delta E_k > 0$**

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = W = \int \boxed{\vec{F}} \bullet d\vec{l}$$

$$F \begin{cases} F_K \\ F_{NK} \end{cases}$$

Konzervatívne sily

Gravitačná sila

Sila pružnosti

Elektrická sila

NEkonzervatívne sily

Sila trenia

Odpor prostredia

Sila napätia /lanka/

Normálové, tlakové

$$\Delta E_k = \boxed{\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} + \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = \boxed{\boxed{\int \vec{F}_K} \bullet d\vec{l} + \boxed{\int \vec{F}_{NK}} \bullet d\vec{l}}$$

Výslednica všetkých konzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

Výslednica všetkých NEkonzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

$$\boxed{\Delta E_k - \int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

$$\boxed{\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} = -\Delta E_p}$$

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Mechanická energia

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

Niektoré druhy potenciálnej energie

Potenciálna energia gravitačného poľa

$$E_p = mgh$$

Potenciálna energia pružných síl

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Výpočet práce v sústavách

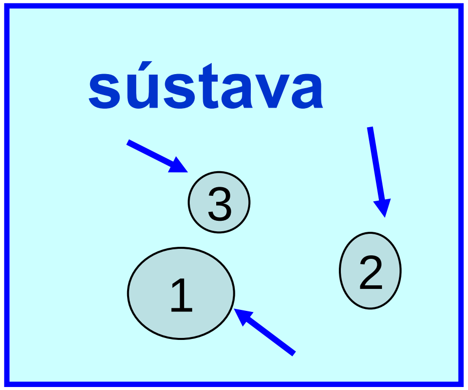
- Sústava sa skladá z dvoch alebo viacerých objektov
- Na objekty sústavy pôsobia vzájomné <u>*interakčné sily*</u> ako aj okolie

$$\Delta E_{k_1} + \Delta E_{p_1} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_1$$

$$\Delta E_{k2} + \Delta E_{p_2} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_2$$

$$\Delta E_{k_3} + \Delta E_{p_3} = \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_3$$

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_i$$

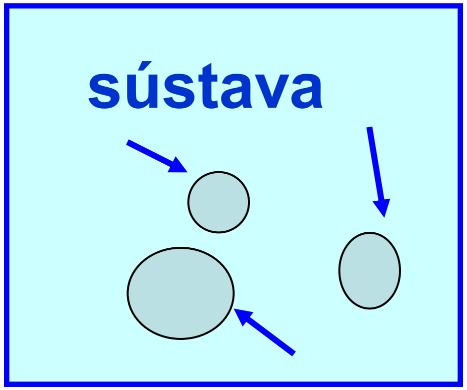


Práca výslednej nekonzervatívnej sily pôsobiacej na i-ty objekt sústavy

Mechanická energia sústavy

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \left[\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right]_i$$

Zákon zachovania mechanickej energie



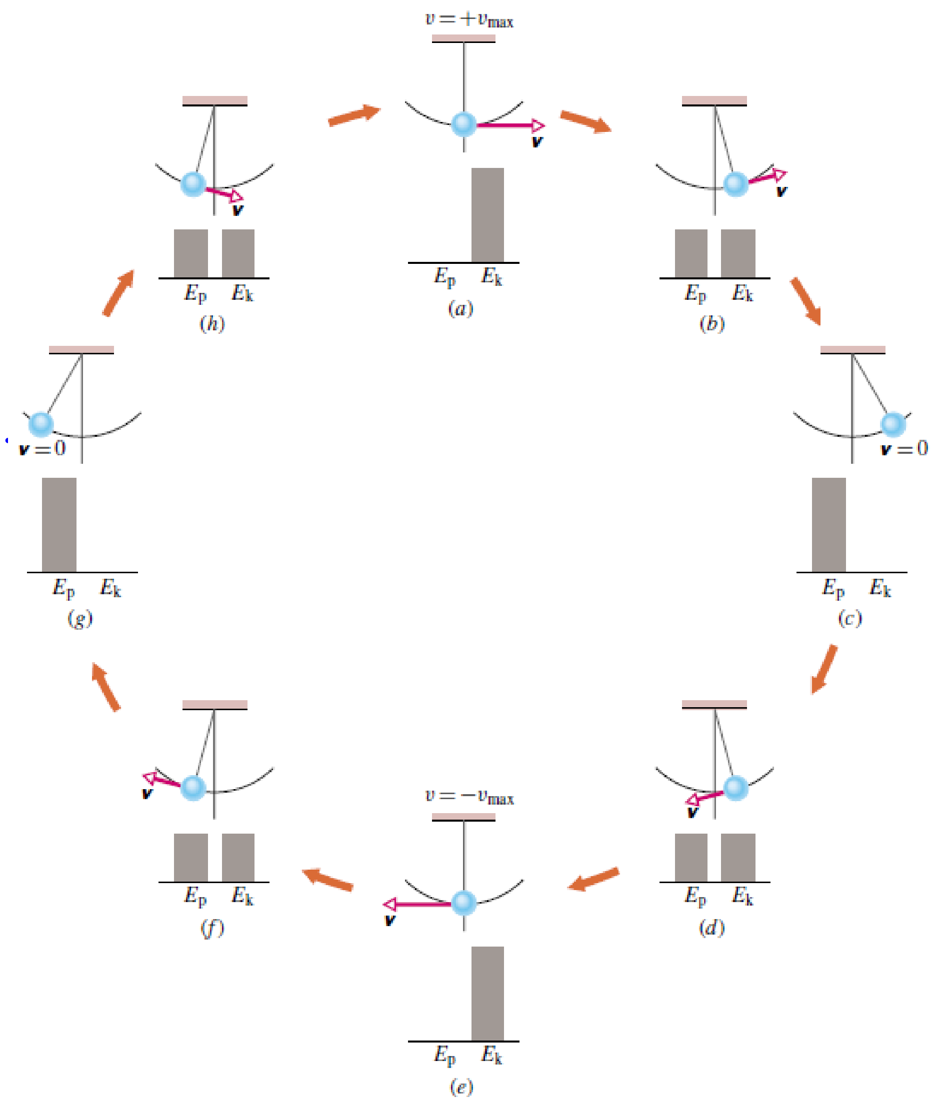
Mechanická energia sústavy

$$\boxed{\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total}} = \sum_i \left(\int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \right)_i$$

Zmena mechanickej energie sústavy sa rovná celkovej práci nekonzervatívnych síl pôsobiacich na objekty sústavy.

Ak v sústave pôsobia len konzervatívne sily, potom sa celková mechanická (t.j. celková kinetická +potenciálna) energia zachováva

ZZ mechanickej energie na kyvadle



Kmity kyvadla v tiažovom poli zeme.

Neuvažujeme trenie

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$E_{k_i} + E_{p_i} = E_{f_i} + E_{f_i}$$

V každom okamihu:

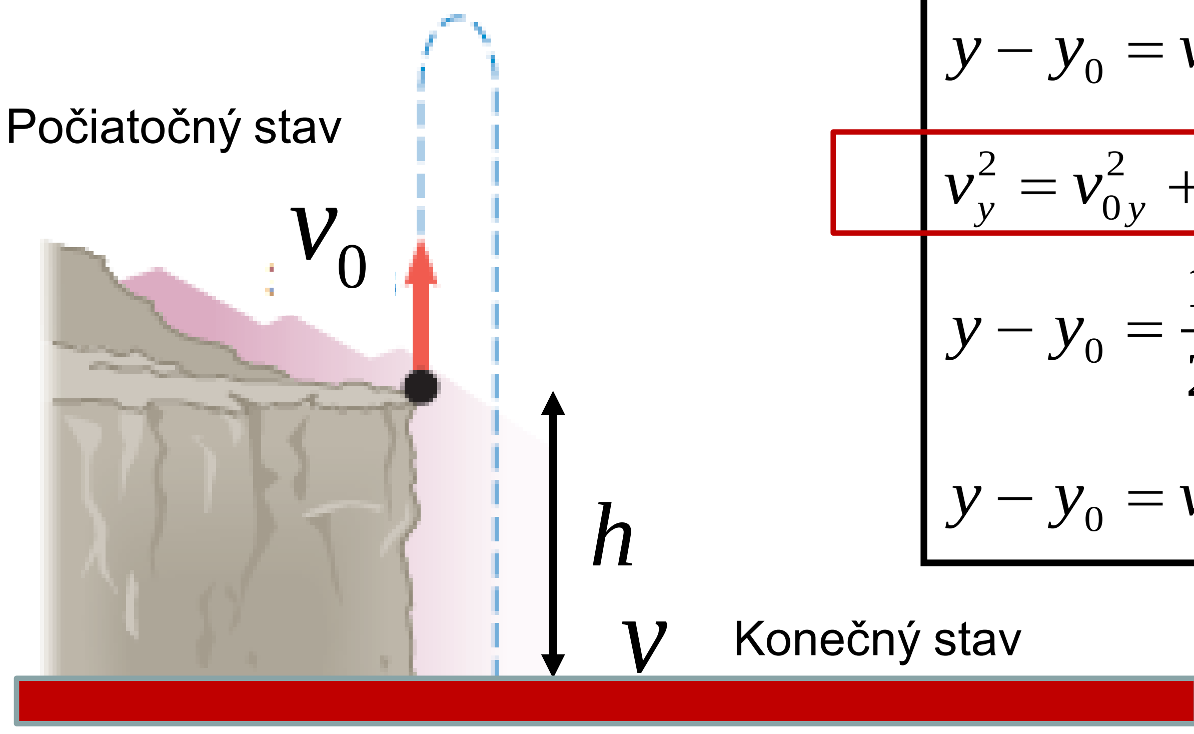
$$E_k + E_p = konst$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgh = konst$$

Jedna forma energie sa "prelieva" na inú formu energie

y smer				
$y-y_0$	a_y	v_y	v_{0y}	t
0-h	-9.80 m/s^2 -g	**?** v	v_0	

Z výšky h je vorovne vrhnuté teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0. Určte rýchlosť telesa pri jeho dopade na zem.



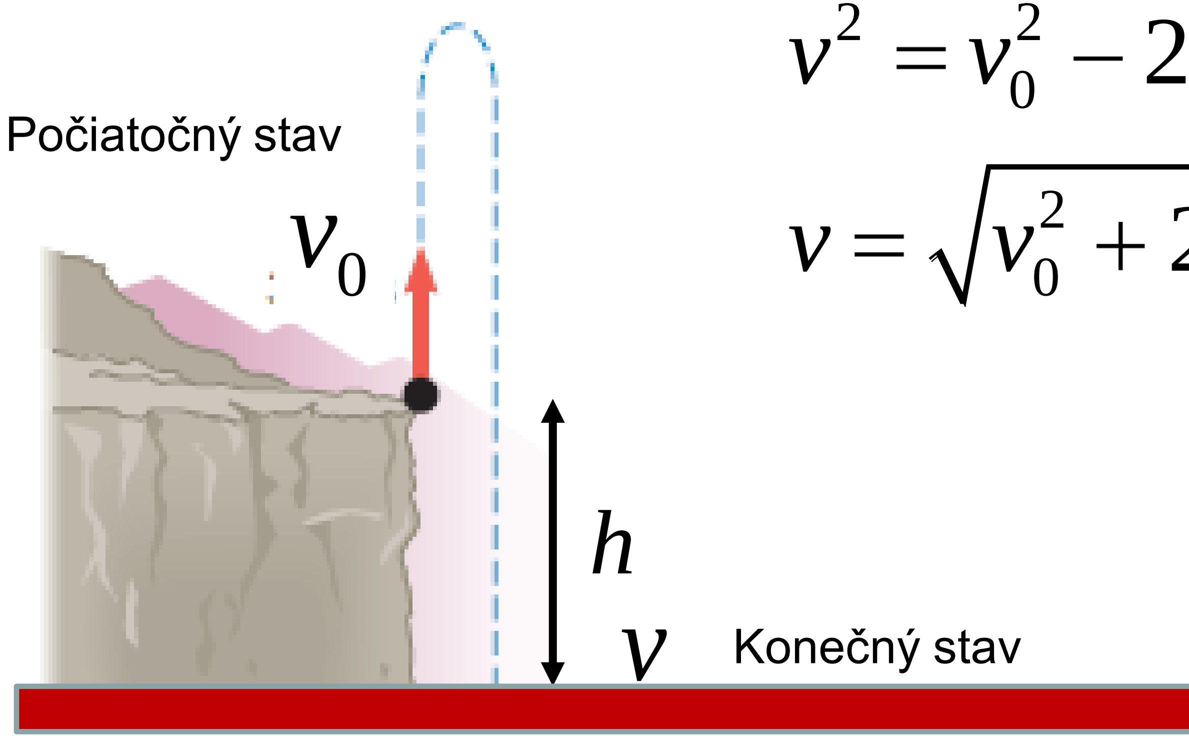
Rovnica	**Chýbajúca veličina**
$v_y = v_{0y} + a_y t$	$y - y_0$
$y - y_0 = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$	v_y
$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y \;\; y - y_0$	t
$y - y_0 = \frac{1}{2} \;\; v_{0y} + v_y \;\; t$	a_y
$y - y_0 = v_y t - \frac{1}{2} a_y t^2$	v_{0y}

y smer				
$y-y_0$	a_y	v_y	v_{0y}	t
0-h	$-9.80\ m/s^2$ $-g$	?	v_0	

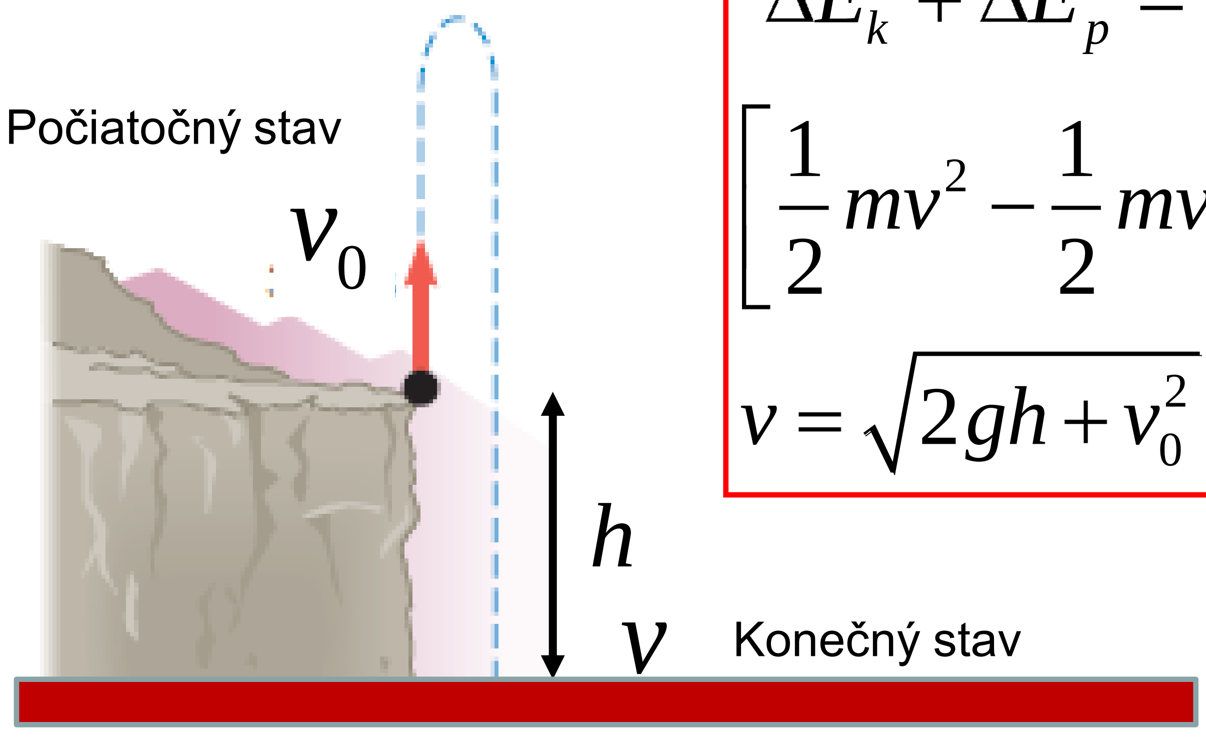
$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y \quad y - y_0$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g \quad 0 - h$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



Z výšky h je vorovne vrhnuté teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0. Určte rýchlosť telesa pri jeho dopade na zem.



Referenčná hladina

Energetický pohľad

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK_{\text{int}\,erné}} \bullet d\vec{l}$$

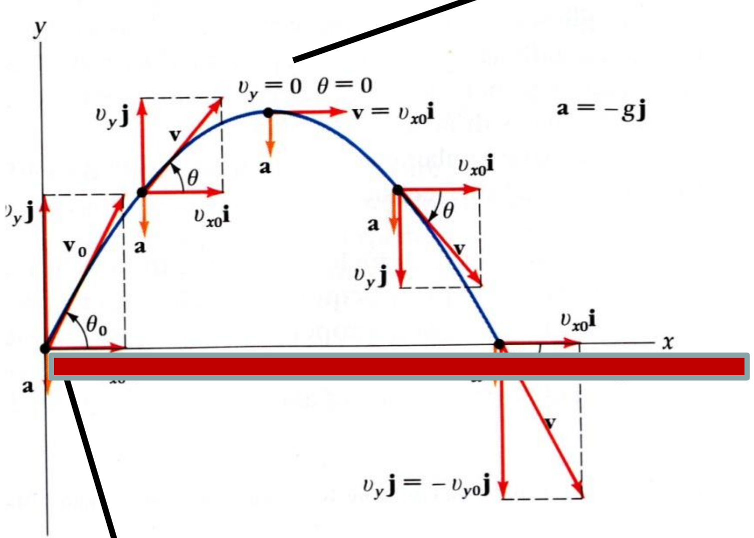
$$\left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right] + \; 0 - mgh \; = 0$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

Teleso je vrhnuté pod uhlom α k horizontálnemu smeru počiatočnou rýchlosťou v0. Určte **maximálnu výšku výstupu**.

$$\boxed{v_x = v_0 \cos\alpha}$$

Konečný stav



Počiatočný stav

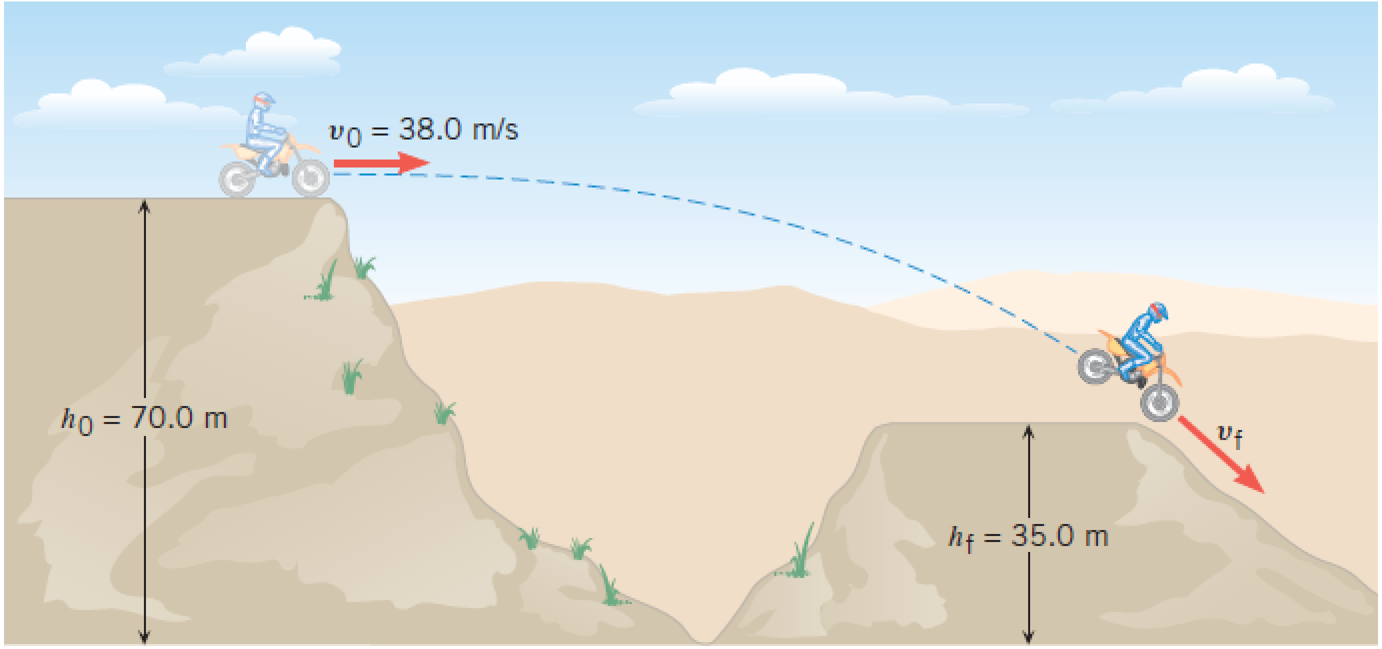
$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK_{\text{int erné}}} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[\frac{1}{2} m \boxed{v_f}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2\right] + mgh = 0$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$\left[\frac{1}{2} m \boxed{v_x}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2\right] + mgh = 0$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$



$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK_{\text{int erné}}} \bullet d\vec{l}$$

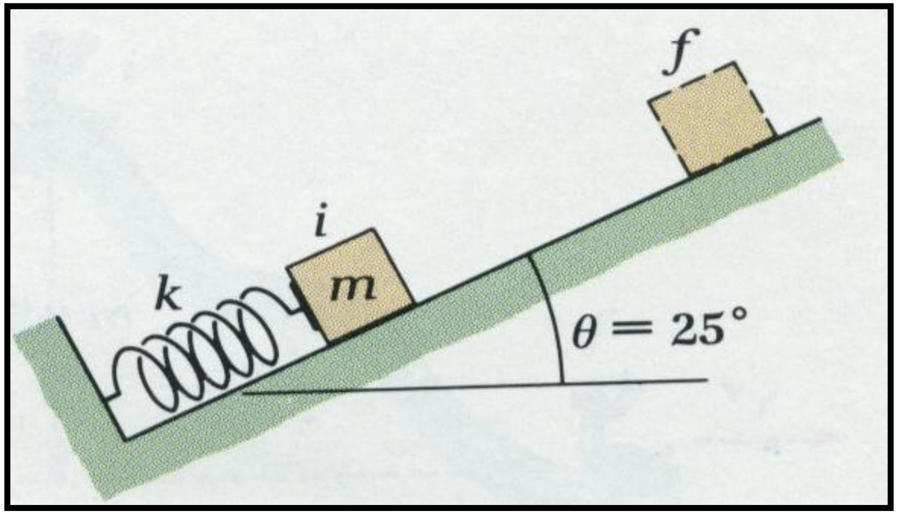
$$\left[\frac{1}{2}mv_f{}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right] + \left[mgh_f - mgh_0\right] = 0$$

$$v_f = \sqrt{2\left[g\left[h_0 - h_f\right] + \frac{1}{2}v_0^2\right]}$$

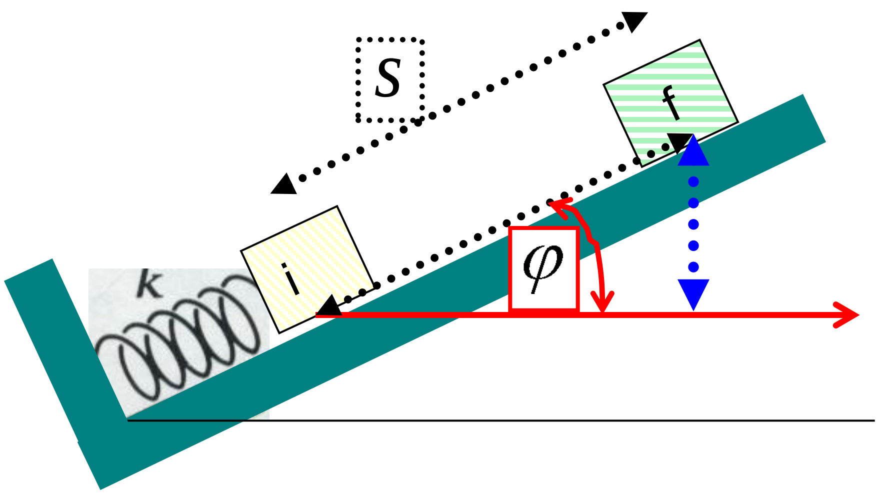
Príklad

Teleso s hmotnosťou m je položené na pružine s tuhosťou k=2400 N/m, ktorá je stlačená o $\Delta x=0.15$m a leží na naklonenej rovine s uhlom sklonu φ = 25 stupňov. Pružinu uvolníme.

- Určte akú vzdialenosť prešlo teleso kým sa zastavilo.
- Určte, akú rýchlosť dosiahne teleso pri návrate späť, keď sa dostane do polovičnej vzdialenosti medzi bodom f a i. Trenie neuvažujte.



$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

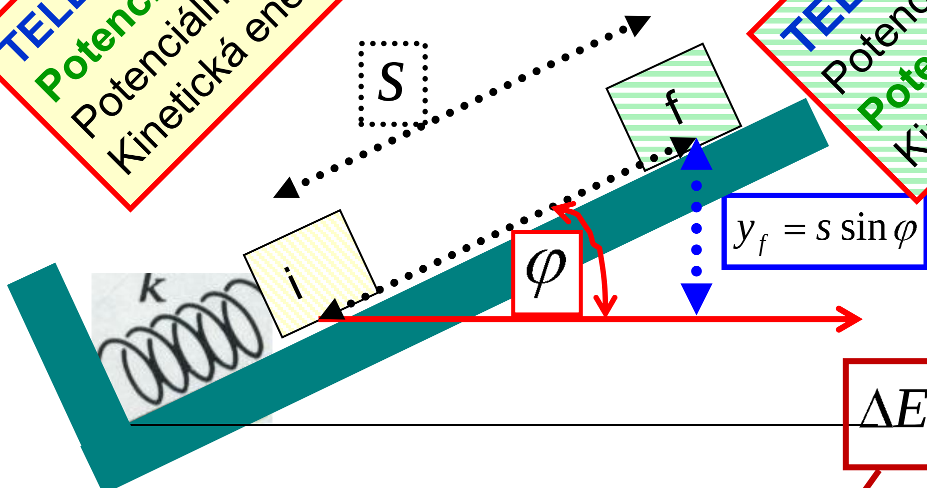


POSOBIA 3 SILY –
gravitačná,
pružnosti
tlaková sila

SÚSTAVA : pruzina a teleso

TELESO v BODE i:
Potenciálna energia pružnosti $\neq 0$
Potenciálna energia gravitačného poľa = 0
Kinetická energia = 0

TELESO v BODE f:
Potenciálna energia pružnosti = 0
Potenciálna energia gravitačného poľa $\neq 0$
Kinetická energia = 0



$y_f = s \sin\varphi$

Práca nekonzervatívnych síl je nulová

$$\Delta E_p + \Delta E_k = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

ΔE_{p_1} ΔE_{p2}

$$\left[mgy_f - 0 + \left(0 - \frac{1}{2} k \, \Delta x^2 \right) \right] + \left[\cancel{\frac{1}{2} mv_f^2} - \cancel{\frac{1}{2} mv_i^2} \right] = 0$$

$$s = \frac{y_f}{\sin\varphi}$$

$$mgy_f = \frac{1}{2} k \, \Delta x^2$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{k \, \Delta x^2}{mg \sin\varphi}$$

TELESO v BODE i:
Potenciálna energia pružnosti $\neq 0$
Potenciálna energia gravitačného poľa = 0
Kinetická energia = 0

TELESO v BODE if:
Potenciálna energia pružnosti = 0
Potenciálna energia gravitačného poľa $\neq 0$
Kinetická energia $\neq 0$

Určte, akú rýchlosť dosiahne teleso pri návrate späť, keď sa dostane do polovičnej vzdialenosti medzi bodom f a i. Trenie neuvažujte.

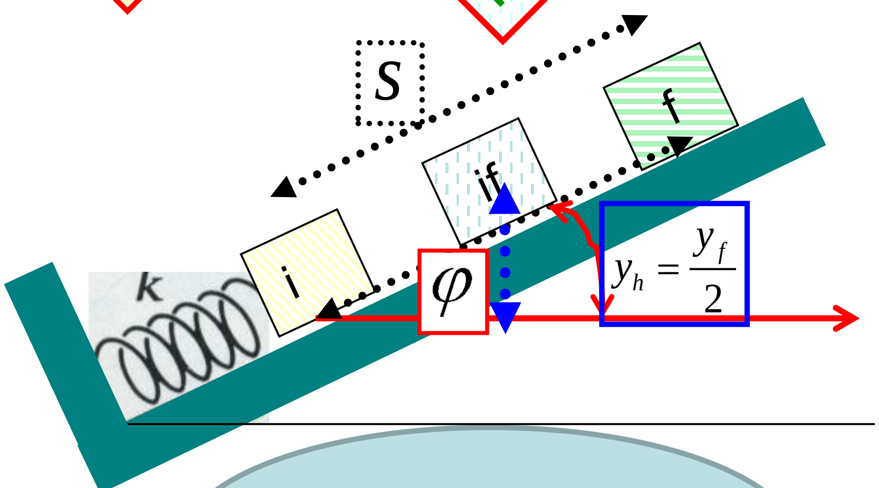
$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Práca nekonzervatívnych síl je nulová

$$\Delta E_{p_1} \qquad \Delta E_{p2}$$

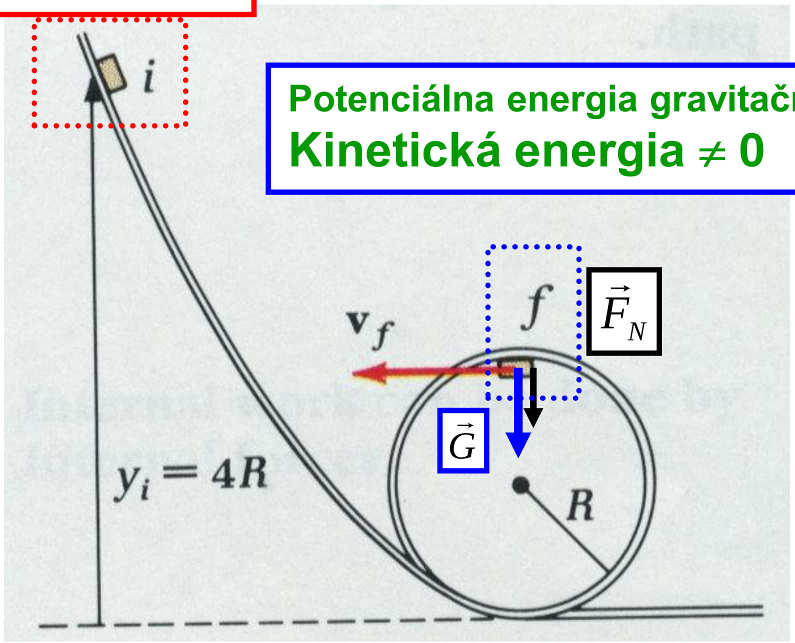
$$\left[mg\ y_h - 0 + \left(0 - \frac{1}{2}k\ \Delta x^2 \right) \right] + \frac{1}{2} m v_h^2 = 0$$

$$\boxed{y_h = \frac{1}{2} y_f}$$



POSOBIA 3 SILY –
gravitačná, pružnosti a tlaková sila

Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia = 0



Potenciálna energia gravitačného poľa ≠ 0
Kinetická energia ≠ 0

- Malá kocka ľadu s hmotnosťou m sa začne bez trenia šmýkať z výšky y_i=4R. Určte rýchlosť, ktorú dosiahne v najvyššom bode kružnice s polomerom R. Určte tlakovú silu v tomto okamihu.

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[E_{k_f} - E_{k_i}\right] + \left[E_{pf} - E_{pi}\right] = 0$$

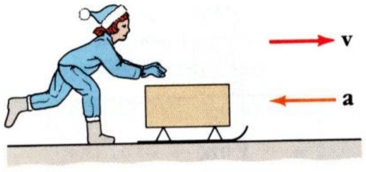
$$\left[\frac{1}{2} m v_f^2 - 0\right] + \left[mg\ \ 2R\ - mg\ \ 4R\ \right] = 0 \quad \Rightarrow v_f = \sqrt{4gR}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow F_N + mg = \frac{m v_f^2}{R}$$

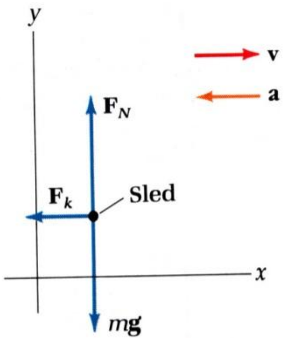
$$F_N = 3mg$$

Práca nekonzervatívnych síl

Dievča naskočilo na sánky, ktoré sa začali pohybovať rýchlosťou v=2.5 m/s. Sánky prešli dráhu d=6.4m a zastavili sa. Určte koeficient dynamického trenia.

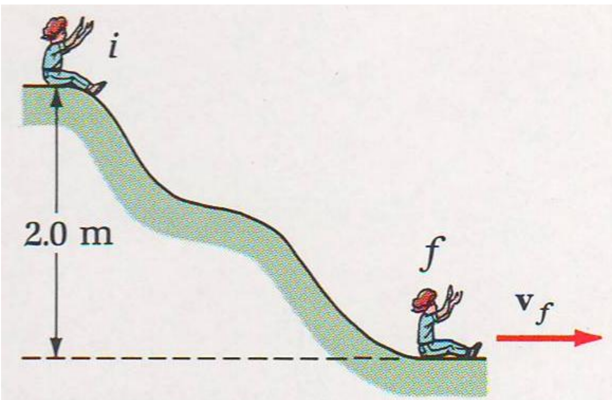


(a)



$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

$$\left[\cancel{E_{k_f}} - E_{k_i}\right] + \left[\cancel{E_{pf}} - \cancel{E_{pi}}\right] = -\mu_k mgd$$



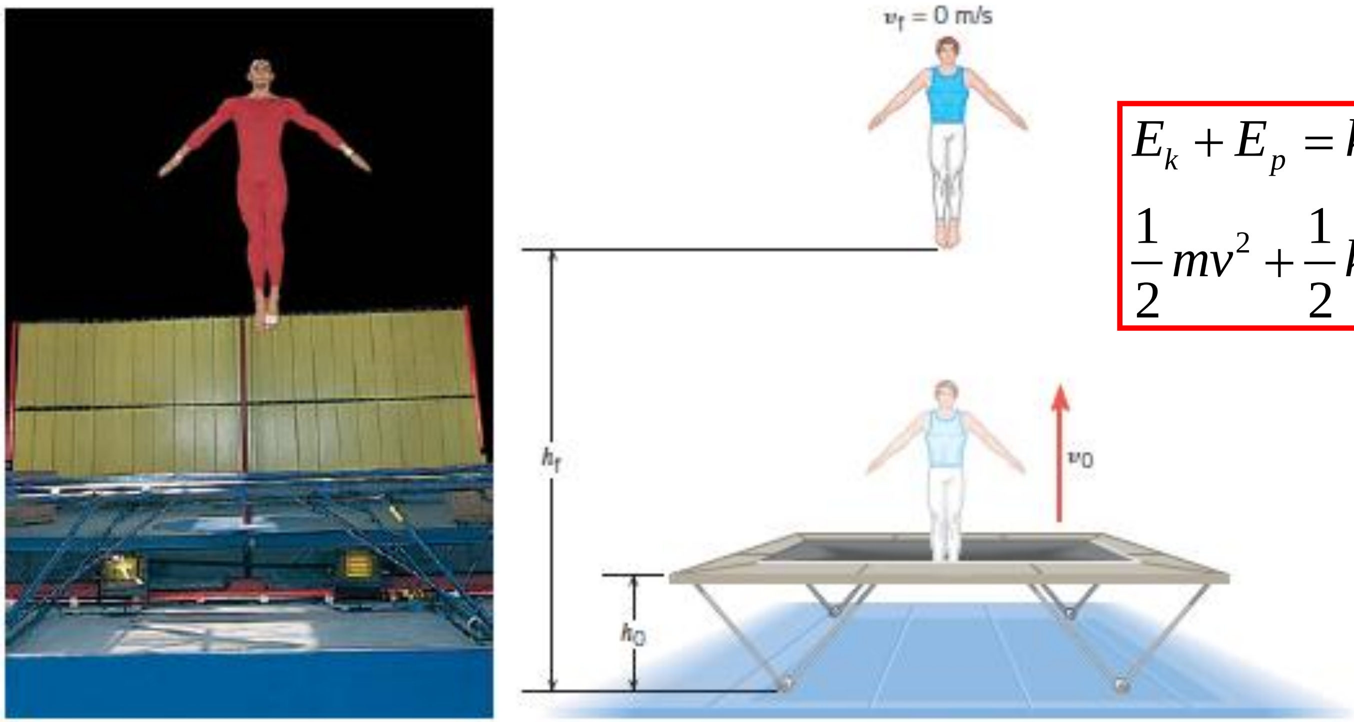
Dieťa s hmotnosťou m=17kg sa spustilo z výšky h=2m a dosiahlo rýchlosť 4,2 m/s.
Určte prácu trecej sily

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \boxed{\int \vec{F}_{NK_{\text{int}\,erné}} \bullet d\vec{l}}$$

$$\left[E_{k_f} - E_{k_i}\right] + \left[E_{pf} - E_{pi}\right] = A$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_f - mgh_i = A$$

ZZE pri skoku na trampolíne



(a) (b)

$$E_k + E_p = konst$$

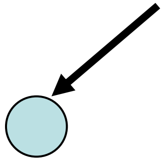
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh = konst$$

Zákon sily - hybnosť

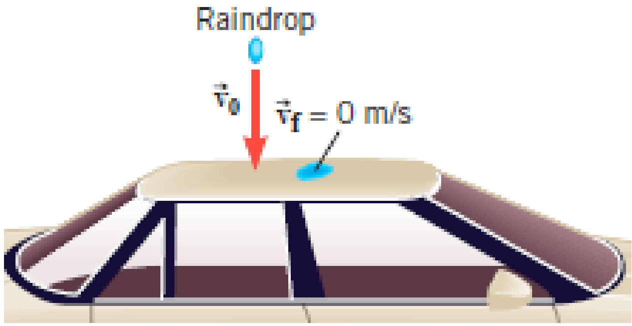
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\; m\vec{v} \;= \frac{d}{dt}\,\vec{p}}$$

Časová zmena hybnosti hmotného bodu je rovná výslednice síl, pôsobiacich na časticu

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$



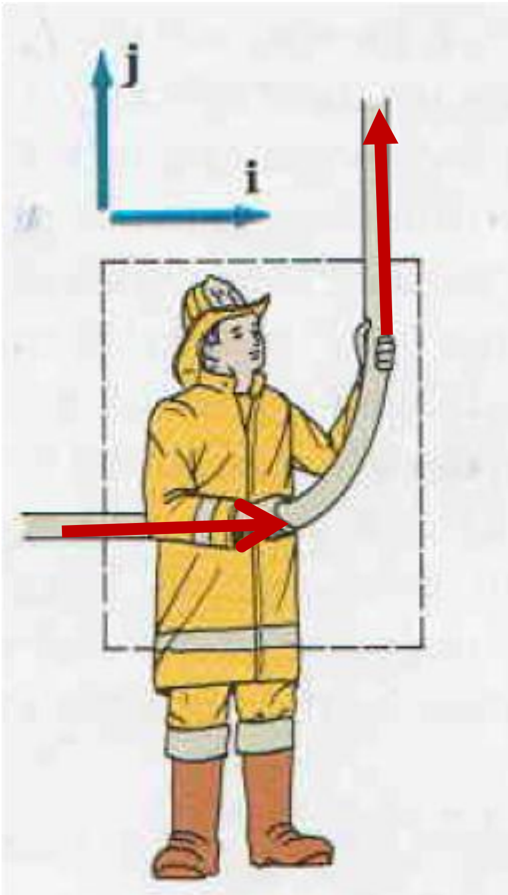
Počas búrky dažďové kvapky dopadali na strechu automobilu s počiatočnou rýchlosťou v_0=15 m/s a po kontakte s ním ich rýchlosť klesla na nulu. Určte priemernú silu, ktorou pôsobia kvapky na strechu automobilu, ak viete že za jednu sekundu dopadne na strechu μ=0,06kg/s

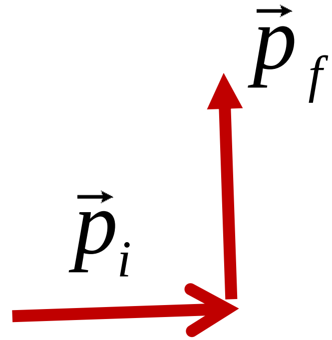


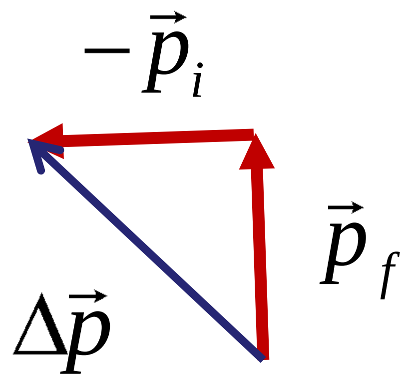
Sila pôsobiaca na kvapky a spôsobila ich zmenu hybnosti.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\mu \Delta t \vec{v}_f - \mu \Delta t \vec{v}_i}{\Delta t} = \mu\left[\vec{v}_f - \vec{v}_i\right] = -\mu \vec{v}_0}$$

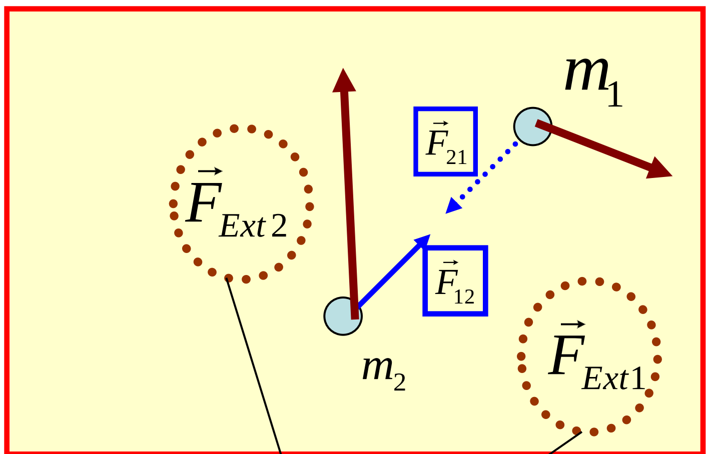
$$\vec{v}_0 = -15\frac{m}{s}\vec{i}$$


j
i


$\vec{p}_f$
$\vec{p}_i$


$-\vec{p}_i$
$\vec{p}_f$
$\Delta\vec{p}$

Pohybová rovnica pre sústavu hmotných bodov



Externé sily

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{ext2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{ext1} + \boxed{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{ext2} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$$

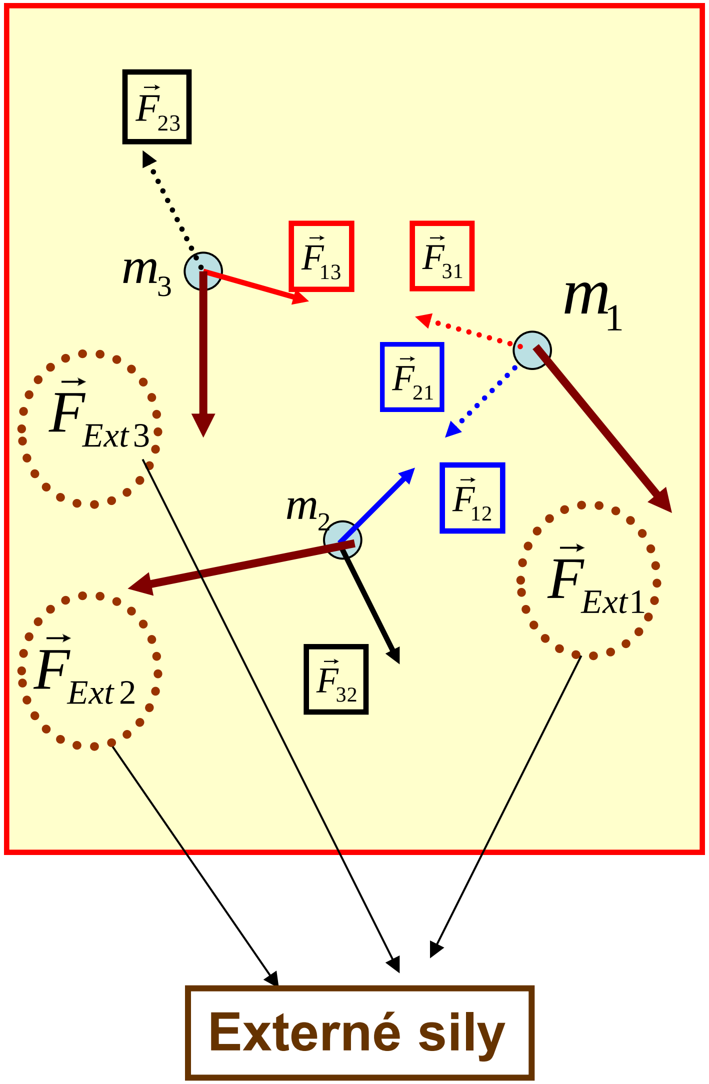
Akcia - reakcia

$$\vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} = \frac{d}{dt}\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Pohybová rovnica pre sústavu HB

$$\sum_j \vec{F}_j^{\,externé} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i$$

Pohybová rovnica pre sústavu hmotných bodov



$$\cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{31}} + \vec{F}_{ext1} = m_1\vec{a}_1$$
$$\cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{32}} + \vec{F}_{ext2} = m_2\vec{a}_2$$
$$\cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \vec{F}_{ext3} = m_3\vec{a}_3$$

Akcia - reakcia

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$
$$\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$$
$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} + \vec{F}_{ext3} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3$$

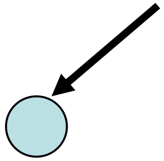
Pohybová rovnica pre sústavu HB

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,externé} = \sum_i m_i\vec{a}_i$$

Hybnosť

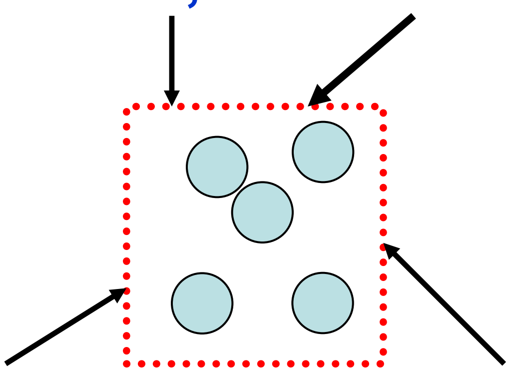
Časová zmena hybnosti hmotného bodu je rovná výslednice síl, pôsobiacich na časticu

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$



Časová zmena hybnosti sústavy hmotných bodov je rovná vektorovej výslednice vonkajších síl, pôsobiacich na sústavu

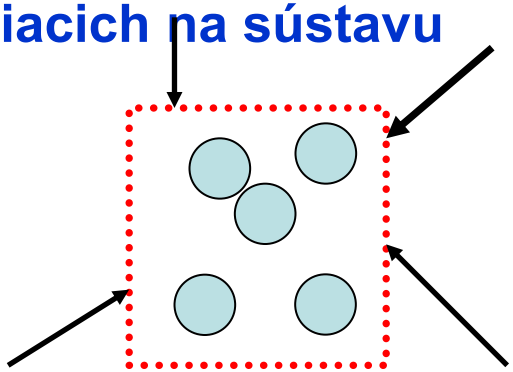
$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$



Zákon zachovania hybnosti

Časová zmena hybnosti sústavy hmotných bodov je rovná vektorovej výslednici vonkajších síl, pôsobiacich na sústavu

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$



$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

V izolovanej sústave sa hybnosť zachováva.

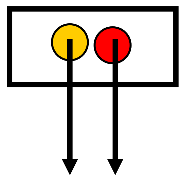
Ak niektorá zo zložiek výslednej vonkajšej sily pôsobiacej pôsobiacich na uzavretú sústavu je nulová, potom odpovedajúca zložka celkovej hybnosti sústavy sa zachováva.

$$Ak \quad \frac{dP_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = konš$$

$$Ak \quad \frac{dP_y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_y = konš$$

$$Ak \quad \frac{dP_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_z = konš$$

Posúdenie ZZH pre rôzne postavené sústavy

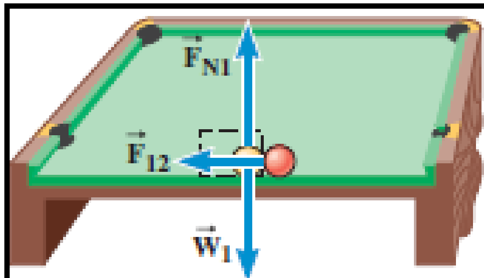


Sústava : obe guličky
Externé sily : gravitačné

$$\sum \vec{F}_{externé} \neq \vec{0}$$

NEplatí ZZH pre sústavu

Trenie neuvažujeme, guličky sa pohybujú po stole:

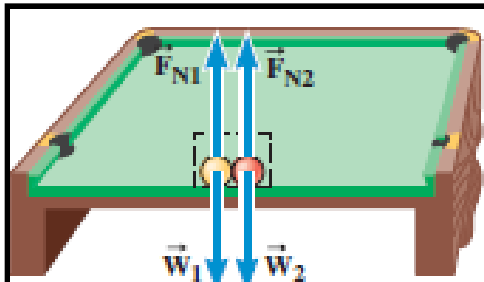


(a)

Sústava : gulička
Externé sily : gravitačná sila, <u>tlaková sila</u>, ktorou pôsobí červená gulička, <u>tlaková sila stola</u>

$$\sum \vec{F}_{externé} \neq \vec{0}$$

NEplatí ZZH pre sústavu



Sústava : guličky
Externé sily : gravitačné sily, <u>tlakové</u>

$$\sum \vec{F}_{externé} = \vec{0}$$

vykompenzované

Platí ZZH pre sústavu

Stratégia použitia ZZH

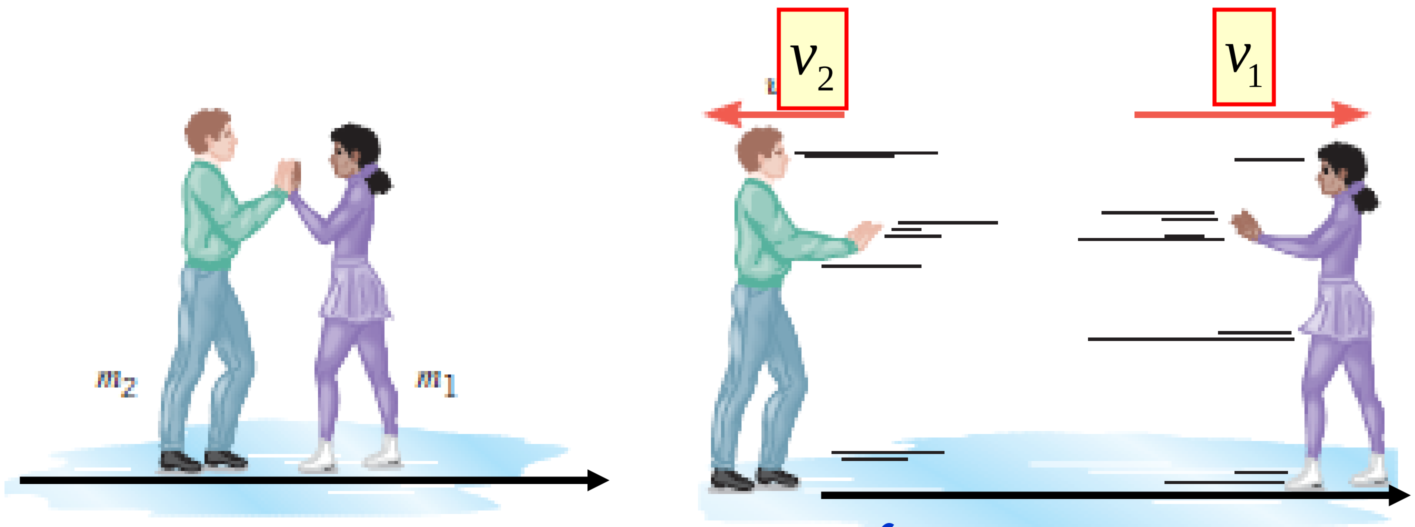
1, Definujte objekty, ktoré patria do sledovaného systému
2, určte vonkajšie sily pôsobiace na systém
3, overte, či je systém izolovaný, t.j. či vektorový súčet externých síl je nulový
4, pre izolovaný systém môžete použiť zákon zachovania hybnosti. Zákon je možné použiť aj pre tie zložky, pre ktoré sú externé sily nulové

Zákony zachovania a ich použitie

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

$$\boxed{\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}_{\;i}}$$

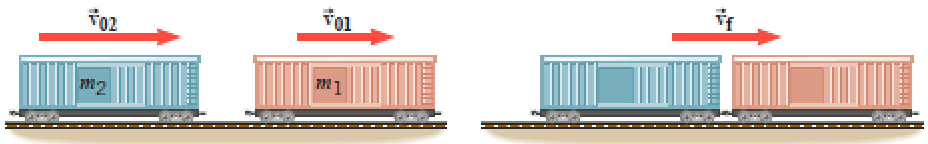
Dvaja krasokorčuliari s hmotnosťou m_1 a m_2 sa odtlačili na hladkom ľade, na ktorom trecie sily možno zanedbať. Určte rýchlosť krasokorčuliara v_2, keď rýchlosť krasokorčuliarky bola v_1.



$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}}$$

$$\boxed{-m_2 v_2 + m_1 v_1 = 0}$$

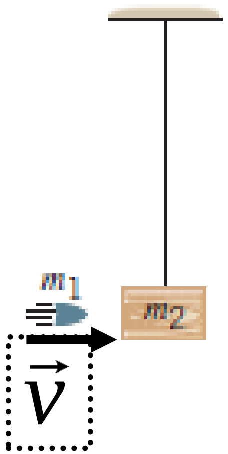
Určte rýchlosť dvoch vozňov, ktoré sa nepruzne zrazili. Trecie sily zanedbajte



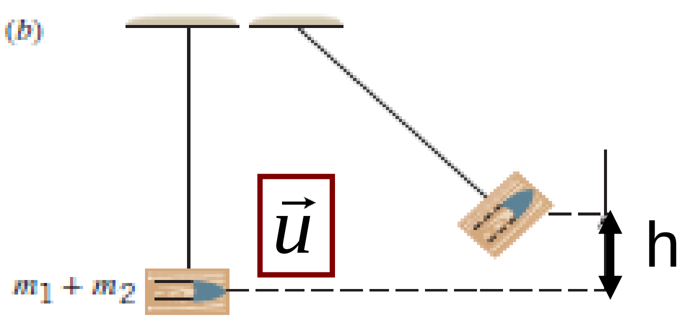
(*a*) Before coupling (*b*) After coupling

$$\underbrace{(m_1 + m_2)v_f}_{\text{Total momentum after collision}} = \underbrace{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}_{\text{Total momentum before collision}}$$

Využitie balistického kyvadla na meranie rýchlostí striel

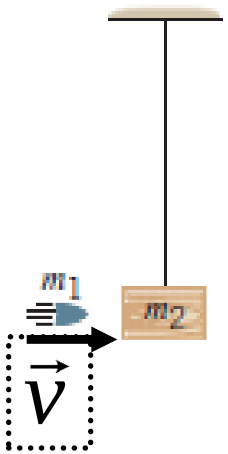


Do dreveného hranola s hmotnosťou m_2 narazí strela s hmotnosťou m_1 a vychýli kyvadlo do výšky h. Určte jej počiatočnú rýchlosť.

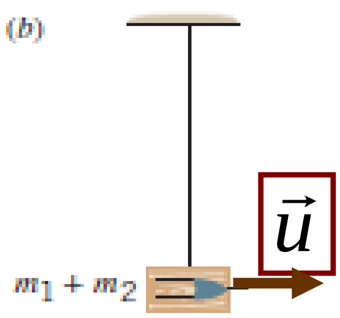


Prvá fáza

Pred interakciou



Po interakciou



Ktorý zákon použiť ???

Použitý ZZE

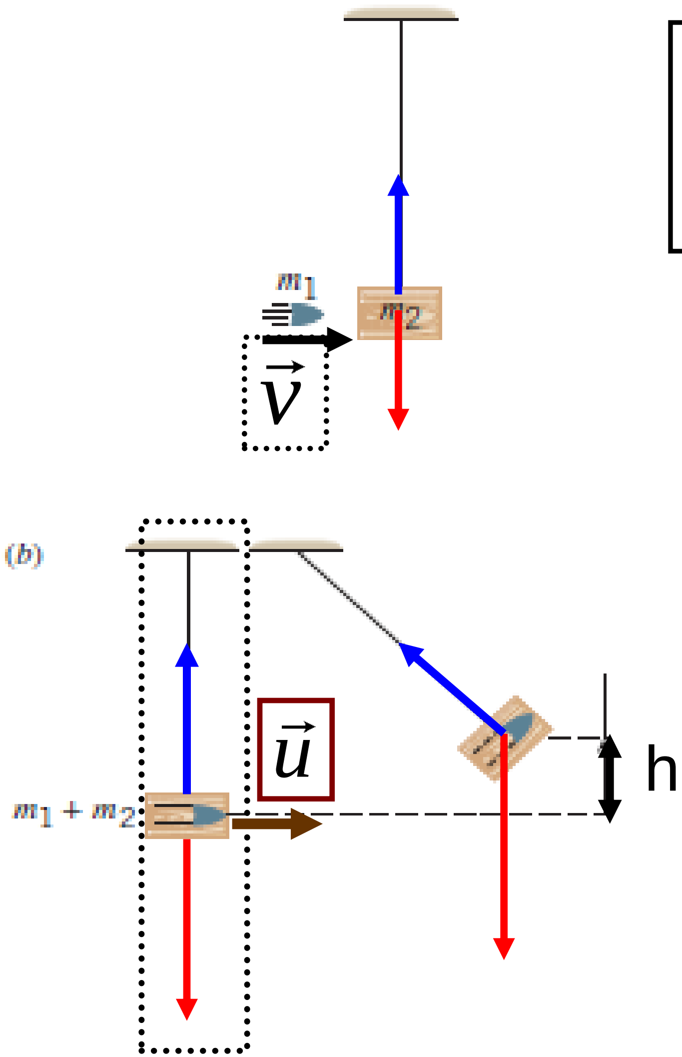
$$\boxed{\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 \quad \Rightarrow \quad u = v\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}}$$

Použitý ZZH

$$m_1 v = \; m_1 + m_2 \; u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

?

Využitie balistického kyvadla na meranie rýchlostí striel



Do dreveného hranola s hmotnosťou m_2 narazí strela s hmotnosťou m_1 a vychýli kyvadlo do výšky h. Určte jej počiatočnú rýchlosť.

Dve fázy:

1, **Zrážka** (dokonale nepružná)

Platí ZZH, neplatí ZZ mechanickej energie (pôsobia disipačné sily)

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \qquad \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} \neq 0$$

2, **stúpanie**

Platí ZZE (práca nekonzervatívnych síl =0), neplatí ZZH – externá sila nie je nulová

$$\sum \vec{F}_{ext} \neq 0 \qquad \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$m_1 v = m_1 + m_2 \quad u$$

$$\frac{1}{2} \; m_1 + m_2 \;\; u^2 = \; m_1 + m_2 \;\; gh$$

$$\boxed{v = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}}$$