Príklady

Príklad 1. Ktoré z formúl sú polynómy?
(a) $P(x)=x+1+sin\,x$,

(b) $P(x)=(x+1)^2$,

(c) $P(x)=\sqrt{1+x+x^2}$,

(d) $P(x)=|x|^2+x+1$,

(e) $P(x)=sign\left(1+x^2\right)x^2+x+1$, kde $sign(x)=\begin{cases}1 & (pre\ x\geq 0)\\ -1 & (pre\ x<0)\end{cases}$.

***Riešenie*:**
(a) $P(x)$ nie je polynóm.
(b) $P(x)$ je polynóm, môže byť prepísaný do ekvivalentného tvaru $P(x)=x^2+2x+1$.
(c) $P(x)$ nie je polynóm.
(d) $P(x)$ je polynóm, pomocou $|x|^2=x^2$ môže byť prepísaný do ekvivalentného tvaru $P(x)=x^2+x+1$.
(e) $P(x)$ je polynóm, pretože platí $sign\left(1+x^2\right)=1$ $\quad(\forall x\in\mathbb{R})$, môže byť prepísaný do ekvivalentného tvaru $P(x)=x^2+x+1$.

Príklad 2. Majme tieto polynómy
$p_1(x)=x^2+x+1,\quad p_2(x)=ax^2-bx+c,\quad p_3(x)=x-1,\quad p_4(x)=\alpha x+\beta$
Vykonajte nasledujúce operácie nad týmito polynónmi
(a) $p_1(x)=p_2(x)$
(b) $p_1(x)=\left(p_4(x)\right)^2$
(c) $2*p_1(x)=p_3(x)+p_2(x)$
(d) $p_3(x)=p_4(x)$
(e) $p_3(x)*p_4(x)=p_1(x)$

***Riešenie*:**
(a) Relácia rovnosti $p_1(x)=p_2(x)$ platí vtedy a len vtedy ak $\alpha=1,b=-1,c=1$.
(b) Relácia rovnosti $p_1(x)=\left(p_4(x)\right)^2$ platí vtedy a len vtedy ak $\alpha^2=1,2\alpha\beta=1,\beta^2=1$, tento systém má dve riešenia, $\alpha=\beta=1$ a $\alpha=\beta=-1$.
(c) Relácia rovnosti $2*p_1(x)=p_3(x)+p_2(x)$ platí vtedy a len vtedy ak

$$2x^2+2x+2=ax^2+b(1-x)+(c-1)$$

potom platí $a=2$, $b=2$, $c=3$.
(d) Relácia rovnosti $p_3(x)=p_4(x)$ platí vtedy a len vtedy ak $\alpha=1,\ \beta=-1$.

(e) Relácia rovnosti $p_3(x)*p_4(x)=p_1(x)$ neplatí, podmienka môže byť prepísaná do tvaru $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x-\beta=x^2+x+1$, potom musí platiť $\alpha=1$, $\beta=-1$, avšak potom $\beta-\alpha=1$ už neplatí.

Príklad 3. Majme tieto polynómy

$p_1(t)=-1+t+t^2$

$p_2(t)=1+3t-t^2+t^3-t^4$

$p_3(t)=4-2t+3t^2-2t^3$

$p_4(t)=6-2t+3t^2$

(a) Vypočítajte pre tieto polynómy ich funkčné hodnoty priamo z definície v bodoch $t=-1,2,3$.

(b) Vypočítajte funkčné hodnoty z predchádzajúceho bodu (a) pomocou Hornerovej schémy.

***Riešenie*:**

(a) $p_1(-1)=-1+(-1)+(-1)^2=-1-1+1=-1$

$p_1(2)=-1+(2)+(2)^2=-1+2+4=5$

$p_1(3)=-1+(3)+(3)^2=-1+3+9=11$

$p_2(-1)=1+3(-1)-(-1)^2+(-1)^3-(-1)^4=1-3-1-1-1=-5$

$p_2(2)=1+3(2)-(2)^2+(2)^3-(2)^4=1+6-4+8-16=-5$

$p_2(3)=1+3(3)-(3)^2+(3)^3-(3)^4=1+9-9+27-81=-53$

$p_3(-1)=4-2(-1)+3(-1)^2-2(-1)^3=4+2+3+2=11$

$p_3(2)=4-2(2)+3(2)^2-2(2)^3=4-4+12-16=-4$

$p_3(2)=4-2(3)+3(3)^2-2(3)^3=4-6+27-54=-29$

$p_4(-1)=6-2(-1)+3(-1)^2=6+2+3=11$

$p_4(2)=6-2(2)+3(2)^2=6-4+12=14$

$p_4(3)=6-2(3)+3(3)^2=6-6+27=27$

(b) Hornerova schéma pre $p_1(t)=-1+t+t^2$

$$\begin{array}{r|rrl}
 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & -1=p_1(-1) \\
2 & 1 & 3 & 5=p_1(2) \\
3 & 1 & 4 & 11=p_1(3)
\end{array}$$

Hornerova schéma pre $p_2(t) = 1 + 3t - t^2 + t^3 - t^4$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 2 & -3 & 6 & -5 = p_2(-1) \\ 2 & -1 & -1 & -3 & -3 & -5 = p_2(2) \\ 3 & -1 & -2 & -7 & -18 & 53 = p_2(3) \end{array}$$

Hornerova schéma pre $p_3(t) = 4 - 2t + 3t^2 - 2t^3$

$$\begin{array}{r|rrrl} & -2 & 3 & -2 & 4 \\ \hline -1 & -2 & 5 & -7 & 11 = p_3(-1) \\ 2 & -2 & -1 & -4 & -4 = p_3(2) \\ 3 & -2 & -3 & -11 & -29 = p_2(3) \end{array}$$

Hornerova schéma pre $p_4(t) = 6 - 2t + 3t^2$

$$\begin{array}{r|rrl} & 3 & -2 & 6 \\ \hline -1 & 3 & -5 & 11 = p_4(-1) \\ 2 & 3 & 4 & 14 = p_4(2) \\ 3 & 3 & 7 & 27 = p_4(3) \end{array}$$

Príklad 4. Vykonajte tieto operácie delenia polynómov

(a) $\left(x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 3\right) : \left(2x^2 - 1\right) =$

(b) $\left(x^4 + x^2 + 1\right) : \left(x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1\right) =$

(c) $\left(x^4 + 2x^2 - 1\right) : \left(x^2 + 1\right) =$

(d) $\left(x^4 - 1\right) : \left(x^2 + 1\right)$

Riešenie:

(a) $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 1} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{10x - 9}{4\left(2x^2 - 1\right)}$

(b) $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1} = 1 + \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1}$

(c) $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 + x^2 - \dfrac{2}{1 + x^2}$

(d) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1$

Príklad 5.
Zostrojte všetkých možných kandidátov na racionálny koreň pre danú algebraickú rovnicu a verifikujte tieto hodnoty pomocou Hornerovej schémy
(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
(b) $x^4 - 1 = 0$
(c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
(d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Riešenie:
(a) $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$
(b) $\alpha \in \{\pm 1\}$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = i$, $\alpha_4 = -i$
(c) $\alpha \in \{\pm 1\}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = i$, $\alpha_4 = -i$
(d) $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -2$

Príklad 6. Z predchádzajúceho príkladu pre každú algebraickú rovnicu (a-d) vyberte jeden racionálny koreň α (ak existuje) a podeľte polynón algebraickej rovnice elementárnym členom $x - \alpha$. V takto získanom výsledku – polynómu porovnajte jeho koeficienty s aplikáciou Hornerovej schémy na polynóm danej algebraicke rovnice.

Návod: Nech $P(x) = 0$ je algebraická rovnica a nech α je jej koreň. Realizujte delenie $P(x):(x\text{-}\alpha) = Q(x)$. Výsledok Hornerovej schémy aplikovanej na $P(x)$ pre $x = \alpha$ porovnajte s koeficientmi polynómu $Q(x)$.

Riešenie:
(a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, $\alpha_1 = 1$,

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

(b) $P(x) = x^4 - 1 = 0$, $\alpha_1 = -1$

$$\frac{x^4 - 1}{x + 1} = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

(c) $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, $\alpha_1 = 1$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

(d) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $\alpha_4 = -2$

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x+2} = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 0 & +4 \\ \hline -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Príklad 7. Rozložte polynóm $P(x)$ na súčin elementárnych koreňových členov.

(a) $P(x) = \left(x^4 + x^2 - 2\right)$, kde $\alpha = \sqrt{2}i$ je koreňom

(b) $P(x) = \left(x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6\right)$

(c) $P(x) = x^7 - 7x^6 + 20x^5 - 32x^4 + 35x^3 + 29x^2 + 16x - 4$

Riešenie:

(a) $P(x) = \left(x^2 + 2\right)(x-1)(x+1)$

(b) $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\left(x^2 + 1\right)$

(c) $P(x) = (x-1)^3 (x-2)^2 \left(x^2 + 1\right)$

Príklad 8. Rozložte racionálnu funkciu $R(x) = P(x)/Q(x)$ na sumu elementárnych parciálnych zlomkov.

(a) $R(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 3x - 4\right)/\left(x^2 + x - 2\right)$

(b) $R(x) = \left(1 + x + x^2\right)/\left(-1 + x - 2x^2 + 2x^3 - x^4 + x^5\right)$

(c) $R(x) = \left(1 + x^5\right)/\left(1 - x^4\right)$

Riešenie:

(a) $R(x) = 2 + x + 1/(x-1) + 2/(x+2)$

(b) $R(x) = 3/\left(4(x-1)\right) + (1-x)/\left(2\left(1+x^2\right)^2\right) - \left(3(1+x)\right)/\left(4\left(1+x^2\right)\right)$

(c) $R(x) = -x - 1/\left(2(x-1)\right) + (1+x)/\left(2\left(1+x^2\right)\right)$