1. [4b] Dokážte matematickou indukciou, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

2. [2b] Dokážte alebo na kontrapríklade vyvráťte výrok: súčet druhých mocnín troch po sebe idúcich prirodzených čísel je vždy deliteľný siedmimi.
3. Nech ρ je binárna relácia na množine M.
   a) [1b] Napíšte, akú podmienku spĺňa relácia ρ, ak NIE JE funkcia.
   b) [2b] Kedy je ρ čiastočným usporiadaním? (Odpovedzte jednou vetou.) Nakreslite Hasseho diagram pre čiast.usporiadanie "$a|b$" na množine $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
4. Je daná relácia

$$\rho = \{(x, y) \in R^2 : x \cdot y = 1\}.$$

   a) [2b] Je ρ antisymetrická? Prečo?
   b) [1b] Nájdite ρ^{-1} a $\rho \circ \rho^{-1}$.
5. a) [1b] Aká je mohutnosť $\mathcal{P}(M)$, ak $M = \{n \in \mathbb{N} : 3|(n+2) \wedge n^2 \leq 101\}$?
   b) [2b] Čo môžeme povedať o množine $(A \cup C) - B$, ak

$$((A - B) \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq B?$$

   (Použite Vennove diagramy.)

Prémia: [2b] Koľko existuje rôznych binárnych relácií na štvorprvkovej množine, ktoré sú symetrické a NIE SÚ reflexívne?

---

1. (3 b.) Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. (2 b.) Je daná množina $S = \{2, 7, 12, 17, 22\}$. Zadajte množinu S pomocou predikátu a napíšte jej charakteristickú funkciu.
3. (2 b.) Pomocou pravidiel o charakteristických funkciách dokážte, že

$$(A - B) \cap C = (A \cap C) - B.$$

4. (4 b.) Na množine $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná relácia $P \subset M \times M$ takto:

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in P : \quad a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

   Dokážte, že P je ekvivalencia. Aký tvar majú jej triedy? (Načrtnite.) Do ktorej triedy patrí prvok $(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$? (Zapíšte túto triedu ako množinu.)
5. (4 b.) Na množine $K = \{2, 3, 4, 7, 10, 19\}$ je daná relácia $R \subset K \times K$ takto:

$$(x, y) \in R : \quad (x - 1) \,|\, (y - 1).$$

   Dokážte, že R je čiastočné usporiadanie a nakreslite príslušný Hasseho diagram.

Prémia: (2b.) Je daná množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Čomu sa rovná $|M|$, ak $M = \{(a + bi, a - bi, 7 + ai), a, b \in A\}$?

(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí: $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(2) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí: $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$.

(3) Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

(4) Nech M je množina všetkých bodov v rovine, nech $\rho \subseteq M \times M$ je relácia definovaná predpisom

$$A \rho B :\Longleftrightarrow |AB| \in \mathbb{Q},$$

kde $|AB|$ je dĺžka úsečky AB. Dokážte alebo vyvráťte, že ρ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(5) Nakreslite Hasseho diagram čiastočného usporiadania $\sqsubseteq$ množiny $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, kde $\sqsubseteq$ je dané predpisom

$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (y_2 \leq x_2)$$

Pozor, nie je to rovnaký príklad ako na cvičeniach.

(6) (prémia) Dokážte, že ak M je nejaká množina a $\theta \subseteq M \times M$ je čiastočne usporiadanie, potom aj θ^{-1} je čiastočné usporiadanie.