Algebra a diskrétna matematika
Prehľad z 8. týždňa

Kombinatorika, princíp zapojenia a vypojenia,

systémy rôznych reprezentantov, lineárne rekurencie

Kombinatorika

Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním: všetky možné usporiadané výbery k prvkov z n prvkov; prvky sa môžu opakovať

$$V^*(n,k) = n^k$$

Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania: všetky možné usporiadané výbery navzájom rôznych k prvkov z n prvkov

$$V(n,k) = n(n-1)...(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutácia n prvkov: variácia n-tej triedy z n prvkov bez opakovania

$$P(n) = V(n,n) = n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov: všetky možné neusporiadané výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov

$$C(n,k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(k!(n-k)!)} = \binom{n}{k}$$

Príklad 1: Koľkými spôsobmi možno rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín?

Ekvivalentne, aký je počet nezáporných celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Riešenie:

Predstavme si, že máme $n + k - 1$ vyhradených miest v jednom riadku.

Rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín je ekvivalentné umiestneniu $k-1$ priehradiek do našich $n+k-1$ vyhradených miest (a n nerozlíšiteľných objektov do zvyšných n miest).
Teda, hľadaný počet je počet kombinácii $k-1$ miest spomedzi vyhradených $n+k-1$ miest, čiže

$$C(n+k-1,k-1) = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Kombinácie s opakovaním

Príklad 2: Aký je počet tzv. kombinácií k-tej triedy z n prvkov *s opakovaním*, t.j. počet všetkých *neusporiadaných* výberov k prvkov (nie nutne navzájom rôznych) z n prvkov?

Ekvivalentne, aký je počet k-prvkových postupností $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ prirodzených čísiel takých, že $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq n$?

Riešenie:
Určenie počtu uvedených postupností je ekvivalentné určeniu počtu rastúcich postupností

$$1 \leq x_1 < x_2+1 < x_3+2 < \ldots < x_k + (k-1) \leq n+k-1,$$

a tých je toľko, koľko je neusporiadaných výberov k *navzájom rôznych* čísel z $\{1, 2, \ldots, n+k-1\}$, čo sú kombinácie k prvkov z $n+k-1$ prvkov, čiže

$$C^*(n,k) = C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Permutácie s opakovaním

Permutácie n objektov rozdelených na s skupiniek z k_i $(1 \leq i \leq s)$ nerozlíšiteľných objektov v každej skupinke, t.j. $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$: Ich počet je

$$P^*(n; k_1, k_2, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s}$$

Multinomická veta Pre ľubovoľné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R$ a celé n platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

Princíp zapojenia a vypojenia
(inclusion-exclusion principle)

Pre konečné množiny A_1 a A_2 platí:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Pre 3 konečné množiny platí:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Odvodenie je jednoduché, napr. pomocou Vennových diagramov.

Vo všeobecnosti máme tzv. **princíp zapojenia a vypojenia** pre konečné množiny $A_1, \ldots, A_n$:

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| \;-\; \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \;+\; \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \;-$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < \ell \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Kratší zápis:

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,2,\ldots n\}} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

Odvodenie princípu zapojenia a vypojenia

Každý prvok $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$ je na ľavej strane započítaný presne raz.
Stačí ukázať, že x je presne raz započítaný aj na pravej strane.

Nech x patrí do presne t množín spomedzi A_i. Bez újmy na všeobecnosti (t.j. až na označenie) môžme predpokladať, že x je v $A_1, ..., A_t$ a nie v $A_{t+1}, ..., A_n$. Uvedomme si, že x sa vyskytuje v prieniku každého výberu z množín $A_1, ..., A_t$.

Prepíšeme binomickú vetu pre $(1-1)^n$ do tvaru

$$1 = \binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \ldots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t} \; .$$

Číslo $\binom{t}{i}$ vyjadruje *počet* prienikov i množín z výberu $A_1, ..., A_t$, t.j. x sa celkovo započíta len raz na pravej strane v rovnosti zapojenia-vypojenia. Tento fakt je potrebné aplikovať pre *každé* $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$.

<u>Príklad 3:</u> Aký je počet usporiadaní n prvkov na očíslovaných miestach $1, 2, \ldots, n$ tak, aby sa žiaden prvok i neocitol na mieste s číslom i?

Iná formulácia: Koľkými spôsobmi si n pánov môže preusporiadať svoje klobúky, aby žiaden z nich nemal na hlave svoj vlastný klobúk?

Jedná sa o derangement = "rozhádzanie".

<u>Riešenie:</u>
Nech A_i je množina permutácií fixujúcich i.
$|A_i| = (n-1)!$ $\qquad |A_1 \cap A_2| = (n-2)!$
$|A_1 \cap A_4 \cap A_7| = (n-3)!$ $\qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots A_{i_k}| = (n-k)!,$
Podľa princípu zapojenia a vypojenia máme

$$|A_1 \cup A_2 \ldots A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}$$

Odpoveď:

$$n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{n!}{k!} = n!\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{1}{k!}\right)$$

<u>Príklad 4:</u> S akou pravdepodobnosťou "chaos v šatni" skončí tak, že žiaden z n pánov nedostane svoj vlastný klobúk?

<u>Riešenie:</u>

Pravdepodobnosť chápeme intuitívne ako pomer počtu priaznivých možností (viď vyššie) ku počtu všetkých možností.

V našom prípade je všetkých možností $n!$.

$$P = n!\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{1}{k!}\right)/n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{1}{k!} \approx 1/e \approx 0.368 \quad \text{pre} \quad n \to \infty$$

Príklad 5: Aký je počet všetkých surjektívnych zobrazení $[k] \to [n]$?

Riešenie: Ak A značí všetky zobrazenia $[k] \to [n]$, tak $|A| = n^k$.
Nech $A_i = \{f : [k] \to [n];\ f(x) \neq i \text{ pre } x \in [k]\}$.
Potom $|A_i| = (n-1)^k$, $\quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (n-j)^k$
Podľa princípu zapojenia a vypojenia

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Počet všetkých surjekcií je

$$|S| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = n^k - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k =$$

$$|S| = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Systémy rôznych reprezentantov

Hovoríme, že sústava množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má **systém rôznych reprezentantov**, alebo **transverzálu**, ak existuje n *navzájom rôznych* prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takých, že $a_i \in A_i$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Príklad 6: Nájdite systém rôznych reprezentantov pre $A_1 = \{1,3,6\}$, $A_2 = \{1,2,3,8\}$, $A_3 = \{3,5\}$, $A_4 = \{4,8\}$, $A_5 = \{1,5\}$.

Odpoveď: $1, 2, 3, 4, 5$ alebo $3, 2, 5, 8, 1$, prípadne iné.

Príklad 7: Nájdite transverzálu pre
$A_1 = \{1,3\}$, $A_2 = \{1,2,3,8\}$, $A_3 = \{3,5\}$, $A_4 = \{2,3,4,5\}$, $A_5 = \{1,5\}$, $A_6 = \{2,5,6,7,8\}$, $A_7 = \{2,4,6,7\}$, $A_8 = \{1,3,5\}$.

Odpoveď: Nedá sa nájsť.

Veta (Ph. Hall, 1935) Sústava množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má **systém rôznych reprezentantov** práve vtedy, keď pre každú $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ platí:
$$|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I| \quad \text{(Hallova podmienka)}$$

V našom príklade 6, kde

$A_1 = \{1,3\},\ A_2 = \{1,2,3,8\},\ A_3 = \{3,5\},\ A_4 = \{2,3,4,5\},\ A_5 = \{1,5\},$
$A_6 = \{2,5,6,7,8\},\ A_7 = \{2,4,6,7\},\ A_8 = \{1,3,5\},$

vezmime $I = \{1,3,5,8\}$,

vidíme, že $3 = |A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_8| < |I| = 4$,

t.j. nie je splnená Hallova podmienka, a teda v tomto prípade systém rôznych reprezentantov neexistuje.

Transverzály a perfektné párovanie

Veta (König, 1916) Každý pravidelný bipartitný graf stupňa $d \geq 1$ má perfektné párovanie.

Dôkaz.

Nech G je pravidelný bipartitný graf stupňa $d \geq 1$ a nech (A,B) je bipartícia jeho vrcholov; nutne $|A| = |B|$.

Označme $B = [n] = \{1,2,\ldots,n\}$.

Pre každé $i \in [n]$ nech $A_i \subset A$ sú susedia vrchola $i \in B$; zrejme $|A_i| = d$.

Overme Hallovu podmienku:

Nech $I \subset [n]$ a nech E je množina hrán medzi vrcholmi z I a vrcholmi z $\cup_{i\in I} A_i$.

Ak na tieto hrany hľadíme ako na vychádzajúce z I, ich počet je $|I|d$, teda $|E| = |I|d$.

Na druhej strane, ak na ne hľadíme ako na vychádzajúce z $\cup_{i\in I} A_i$, tak každý vrchol z $\cup_{i\in I} A_i$ "vysiela" do B najviac d hrán a teda $|\cup_{i\in I} A_i|d \geq |E|$.

Máme tak nerovnosti $|\cup_{i\in I} A_i|d \geq |E| = |I|d$,

odkiaľ $|\cup_{i\in I} A_i| \geq |I|$, čo je presne Hallova podmienka.

Podľa Hallovej vety má sústava $A_1, A_2, \ldots, A_i$ systém rôznych reprezentantov $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Keďže A_i je okolie vrchola $i \in B = [n]$, tak ia_i je hrana v G;

a teda sústava hrán $\{ia_i;\ i \in B = [n]\}$ tvorí perfektné párovanie v G. $\square$

Lineárne rekurencie

Uvažujme Fibonacciho postupnosť (r. 1202)

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \ldots$$

Jej zápis je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Uvedený vzťah nazývame **lineárna rekurencia**.
Hodnoty pre F_0, F_1 sú **počiatočné podmienky**.

Vedeli by sme vyriešiť

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (*)$$

bez hodnôt $F_0 = 1, F_1 = 1$?

Riešenie skúsime hľadať v tvare r^n.

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$
$$r^2 = r + 1$$

Máme kvadratickú rovnicu s koreňmi r_1, r_2.
Ak $b_n = r_1^n, c_n = r_2^n$ spĺňajú rovnicu $(*)$, potom aj $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ ju spĺňa.

Dôvod:

$$r_1^2 = r_1 + 1$$
$$r_1^n = r_1^{n-1} + r_1^{n-2}$$
$$\alpha r_1^n = \alpha r_1^{n-1} + \alpha r_1^{n-2}$$

Podobne $$\beta r_2^n = \beta r_2^{n-1} + \beta r_2^{n-2}$$

Z uvedeného vyplýva, že $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ spĺňa $(*)$.

Teraz chceme vypočítať α, β tak, aby $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Pre $n = 0$ a $n = 1$ dostaneme

$$F_0 = \alpha + \beta = 1$$
$$F_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = 1$$

Pomocou Cramerovho pravidla nájdeme riešenie

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}$$

$$F_n = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1}\ r_1^n + \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}\ r_2^n$$

Aké hodnoty majú r_1, r_2?

Platí pre ne $r_i^2 = r_i + 1$.

Sú teda koreňmi **charakteristickej rovnice**

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

<u>Príklad</u> Nájdite explicitné riešenie rekurentnej rovnice

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

s podmienkami $a_0 = 6, a_1 = -1$.

<u>Riešenie</u> (stručný postup):

$r^n = 4r^{n-1} - 3r^{n-2}$

$r^2 = 4r - 3$

$r^2 - 4r + 3 = 0$

$r_1 = 1, r_2 = 3$

$a_n = \alpha 1^n + \beta 3^n$

Do totho riešenia dosadíme počiatočné podmienky a vypočítame α a β.

$6 = \alpha + \beta$

$-1 = \alpha + 3\beta$

$\alpha = 9,5; \beta = -3,5$

Riešenie je $a_n = 9,5 - 3,5 \cdot 3^n$.

Lineárne rekurencie - zovšeobecnenie

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0$$

Riešenie hľadáme v tvare x^n.

$$r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0$$

$$r_k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Vo všeobecnosti dostenme k riešení $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Ak sú všety rôzne, tak **všeobecné riešenie** má tvar

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

Hodnoty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dopočítame z počiatočných podmienok pre $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.