

# Opravná písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 21. 6. 2005

## Skupina A

1. príklad. Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.
2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny  $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1)\}$
3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu  $\mathcal{P}(A)$  pre  $A = \{a\}$
4. príklad.  $P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\} \subseteq X \times Y$  a  
 $Q = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\} \subseteq X \times Y$  sú relácie nad  $X = \{1,2,3\}$  a  $Y = \{1,2,3,4\}$ , zostrojte  $P \cup Q$ ,  $P \cap Q$ ,
5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú podreťazec BCD.
6. príklad. Rozhodnite, či symbol  $*$  definovaný ako  $x * y = x - y$ ,  $A = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  špecifikuje binárnu operáciu na množine  $A$ . Ak nie, tak vysvetlite prečo.
7. príklad. Aká je hodnota Boolovej premennej  $x$ , ktorá je určená podmienkou
$$\begin{aligned}x \cdot \mathbf{1} &= \mathbf{0}, \\x + x &= \mathbf{0}, \\x \cdot \mathbf{1} &= x.\end{aligned}$$
8. príklad. Riešte systémy lineárnych rovníc
$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\2x - 2y - z &= 2 \\3x - y &= 4\end{aligned}$$
9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy jej transformácie na trojuholníkový tvar
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
10. príklad. Keď je  $G$  obyčajný graf o  $|V|$  vrcholech a  $|E|$  hranách, koľko hrán má graf  $\bar{G}$ ?  
(Doplňkový (complementary) graf  $\bar{G}$  ku grafu  $G$  má rovnakú vrcholovú množinu ako  $G$ . Dva vrcholy sú spojené hranou v  $\bar{G}$  vtedy, keď nie sú spojené v  $G$ . Slučky neuvažujeme.)
11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 40 hranách?

Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi.

## Riešenie

1. príklad.

$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow p(a+b)$ . Ak  $a = 2k+1$  a  $b = 2l+1$ , potom  $a+b = 2(k+l+1)$ .

2. príklad

$\{-1, 1\}$ , kde  $\mathbb{R}$  je množina reálnych čísel

3. príklad

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

4. príklad

$$P \cup Q = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

$$P \cap Q = P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$$

5. príklad

$$5! = 120$$

6. príklad

Nie je binárna operácia, pretože pre  $x, y \in A$  výsledok binárnej operácie  $x * y \notin A$  (napr. pre  $x < y$  dostaneme záporné  $z = x - y$ ), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do  $A$ .

7. príklad

$$x = \mathbf{0}.$$

$$x = \mathbf{0}.$$

$$x = \mathbf{1} \vee x = \mathbf{0}$$

8. príklad

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ \hline 0 & -4 & -3 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$z = 4t, -4y - 3z = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - 3t, x + y + z = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} - t, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. príklad.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

10. príklad. Keď je  $G$  obyčajný graf o  $|V|$  vrcholech a  $|E|$  hranách, koľko hrán má graf  $\bar{G}$ ?

Riešenie:  $|V|(|V|-1)/2 - |E|$

11. príklad

Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 40 hranách?

$$2|E| = |V|\deg(v)$$

Riešenie:  $2 \times 40 = |V| \times 4$

$$20 = |V|$$