

2. kontrolná opravná písomka z ADM (konaná dňa 14. 5. 2008)

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet núl (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, (1 bod)

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, (1 bod)

(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 15$, $A_1 \subseteq A_2$, (1 bod)

3. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \max\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa. (2 body)

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid, odôvodnite. (1 bod)

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxyz + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z \quad (3 \text{ body})$$

5. príklad. Zostrojte spínacie zariadenie, ktoré je reprezentované Boolovou funkciou

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1x_2 + x_3x_4)x_5$$

(3 body)

Prémiový príklad.

(1) Ako je definovaná permutácia?

(2) Ako je definovaný súčin dvoch permutácií? Uveďte ilustračný príklad.
(2 body)

Riešenie príkladov

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet núl (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = 1 + 21 + 35 + 7 = 64$$

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12, |A_2| = 18, A_1 \cap A_2 = \emptyset, |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 30$

(b) $|A_1| = 2, |A_2| = 10, |A_1 \cap A_2| = 1, |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 11$

(c) $|A_1| = 8, |A_2| = 15, A_1 \subseteq A_2, |A_1 \cup A_2| = |A_2| = 15$

3. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \max\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $'*'$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x < y < z$

$$(x * y) * z = y * z = z$$

$$x * (y * z) = x * z = z$$

(a2) $x < z < y$

$$(x * y) * z = y * z = y$$

$$x * (y * z) = x * y = y$$

(a3) $y < x < z$

$$(x * y) * z = x * z = z$$

$$x * (y * z) = x * z = z$$

.....
Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid. (1 bod)

K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element $e = 0$, ktorý patrí do množiny \mathbb{N}

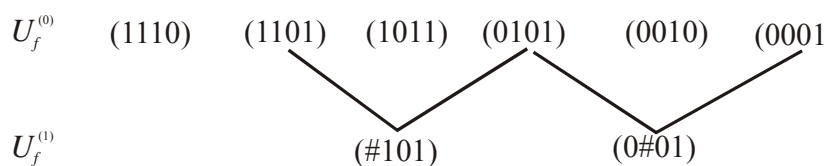
$$x * e = \max\{x, 0\} = x$$

$$e * x = \max\{0, x\} = x$$

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

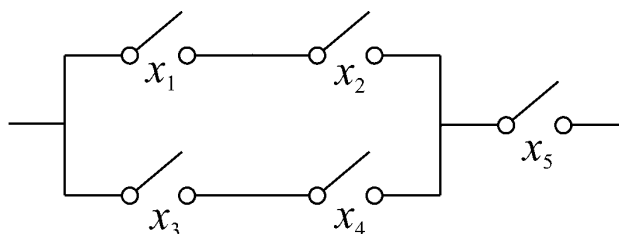


$$\tilde{V} = \{(\#101), (0\#01), (1110), (1011), (0010)\}$$

$$\tilde{f}(w, x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{w}\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}yz$$

5. príklad. Zostrojte spínacie zariadenie, ktoré je reprezentované Boolovou funkciou

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1x_2 + x_3x_4)x_5$$



Prémiový príklad.

(3) Ako je definovaná permutácia?

(4) Ako je definovaný súčin dvoch permutácií, uveďte ilustračný príklad