Náhradná 3. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 14. 12. 2009)

1. príklad. Riešte systém lineárnych rovníc metódou GEM. (3 body)

$$
\begin{array}{rrrrcr}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 6 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -4 \\
-x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4
\end{array}
$$

2. príklad. Úpravou matice determinantu na trojuholníkový tvar vypočítajte determinant matice (3 body)

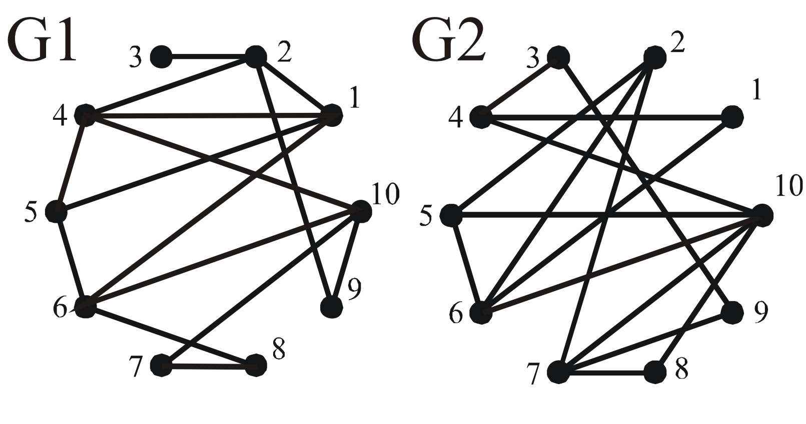
$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

3. príklad. Existuje obyčajný graf s 8 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,4,4,4,1,1,1,1? Ak áno, dokážte použitím Havlovej vety a nakreslite ho. (3 body)

4. príklad. *Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G. Keď je G obyčajný graf o 25 hranách a $\overline{G}$ má 53 hrán, koľko vrcholov má graf G? (3 body)

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má dve komponenty po 8 vrcholoch, každý vrchol stupňa 3. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu? (3 body)

Prémiový príklad. Dá sa niektorý z grafov na nasledujúcom obrázku nakresliť jedným ťahom? Prečo áno a prečo nie? (Číslice u vrcholov sú iba indexy) (2 body)



Riešenie príkladov

1. príklad. Riešte systém lineárnych rovníc metódou GEM. (3 body)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -4 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -14 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{14} \end{array}\right)$$

Z druhej rovnice $x_2 = 2,$ zavedieme substitúciu $x_4 = u$, kde $u \in R$, potom z prvej a tretej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 7 - u \\ x_4 &= u \end{aligned}$$

Vektor neznámych má tvar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pre $\forall u \in R$. Ak položíme napr. $u = 4$, potom vektor neznámych má tvar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

t. j. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$

2. príklad. Vypočítajte determinant matice (3 body)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}3&1&2&1\\1&2&0&1\\0&1&1&2\\1&0&0&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\0&1&1&2\\3&1&2&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&1&1&2\\0&1&2&-2\end{vmatrix}=(-1)(2)\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&-2\end{vmatrix}$$

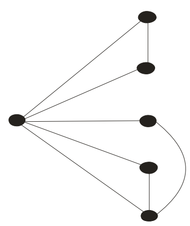
$$=(-1)(2)\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\end{vmatrix}=12$$

3. príklad. Existuje obyčajný graf s 8 vrcholmi, ktorého stupne sú 4,4,4,4,1,1,1,1? Ak áno, nakreslite ho, ak neexistuje, zdôvodnite prečo. (3 body)

Postupným použitím Havlovej vety dostaneme

4,4,4,4,1,1,1,1
3,3,3,3,~~0,0,0,0~~
2,2,2,2
1,1,1,1
0,0,0,0

To znamená, že existuje graf s 8 vrcholmi, ktorých stupne sú špecifikované postupnosťou 4,4,4,4,1,1,1,1



4. príklad. *Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G. Keď je G obyčajný graf o 25 hranách a $\overline{G}$ má 53 hrán, koľko vrcholov má graf G? (3 body)

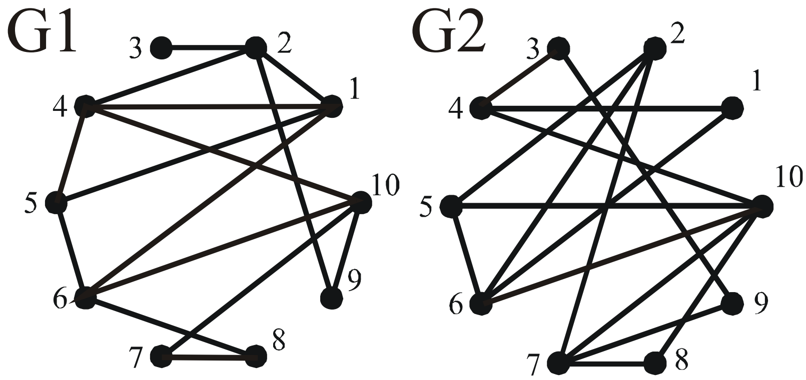
Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E|=|V|\deg(v)$$
$$2\times 78=|V|\times(|V|-1)$$
$$|V|=13$$

5. príklad. Predpokladajme, že planárny graf má dve komponenty po 8 vrcholoch, každý vrchol stupňa 3. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu? (3 body)

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$,
teda $|R|=16\times 3/2-16+2+1=11$.

Prémiový príklad. Dá sa niektorý z grafov na nasledujúcom obrázku nakresliť jedným ťahom? Prečo áno a prečo nie? (Číslice u vrcholov sú iba indexy) (2 body)



V grafe G1 sú iba dva vrcholy (s indexmi 3 a 5) nepárneho stupňa, teda existuje eulerovský ťah. V grafe G2 sú 4 vrcholy (s indexmi 2, 4, 5, 10) nepárneho stupňa, teda neexistuje eulerovský ťah.