

Algebra a diskrétna matematika

Úlohy na precvičenie

7. týždeň

Úloha 1. Určte počet všetkých usporiadaných dvojíc (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Úloha 2. Koľko päťciferných čísel deliteľných piatimi môžeme vytvoriť z čísiel 0, 2, 4, 5, 6, 8?

Úloha 3. Koľko existuje $n \times n$ matíc s prvkami z množiny $\{0, 1, \dots, q-1\}$?

Úloha 4. Koľko je 4-ciferných čísel $abcd$ spĺňajúcich podmienku $|b-c| = 2$?

Úloha 5. Aký je počet podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, ktoré obsahujú všetky nepárne čísla $\leq n$?

Úloha 6. Koľko existuje permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s jediným cyklom?

Úloha 7. Koľko existuje permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s dvoma cyklami?

Úloha 8. Aký je počet variácií k -tej triedy z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ bez opakovania a permutácii z $\{1, 2, \dots, n\}$ takých, že 1 je vľavo od 2?

Úloha 9. Koľko je rôznych preusporiadaní písmen P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z, v ktorých sa nachádza reťazec STU?

Úloha 10. Aký je počet slov dĺžky k nad abecedou z n písmen, v ktorých každé 2 za sebou idúce písmená sú rôzne?

Úloha 11. Aký je počet slov dĺžky k nad abecedou $\{0, 1\}$, v ktorých je párny počet jednotiek?

Úloha 12. Katedra matematiky má 29 členov, z toho 10 žien. Koľkými spôsobmi je možné zostaviť z katedry 5-člennú komisiu, ak

- a) vedúci katedry v komisii nebude?
- b) v komisii bude práve jedna žena?
- c) v komisii bude práve jedna žena, ale nebudú tam spolu pán Novák a pán Kávon?
- d) v komisii bude aspoň jedna žena?

Úloha 13. Koľkými spôsobmi je možné usadiť do radu 7 detí a 4 dospelých, aby žiadni dvaja dospelí nesedeli vedľa seba?

Úloha 14. Podľa šachových pravidiel útočí veža na najbližšiu figúrku stojacu v tom istom rade alebo stĺpci. Koľkými spôsobmi je možné umiestniť 8 veží na šachovnicu tak, aby žiadne dve na seba neútočili? Ako sa zmení riešenie pri tom istom počte veží a veľkosti šachovnice 10×10 ?

Úloha 15. Aký je počet ciest na štvorčekovom papieri (štvorce s jednotkovou dĺžkou umiestnené v súradnicovej sústave) z bodu $(0, 0)$ do bodu (m, n) pre $m, n \geq 0$, ak je dovolené postupovať len vpravo a nahor?

Úloha 16. Z definície kombinačného čísla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ odvodte súčtový vzorec

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Úloha 17. Ukážte, že platí

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + \binom{n}{1}^3$$

Úloha 18. Odvodte nasledujúcu identitu

$$\sum_{j=0}^r \binom{m}{j} \binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}$$

Úloha 19. Ukážte, že platí

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Úloha 20. Koľko racionálnych členov obsahujú rozklady

a) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{15}$

b) $(\sqrt{7} + \sqrt[4]{5})^{88}$

c) $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{100}$

Úloha 21. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n , je možné napísať výraz 3^n ako lineárnu kombináciu mocnín dvojky s maximálnym exponentom n .