A
3. kontrolná písomka (14. 12. 2004)

Príklad 1.
(a) Navrhnite takú interpretáciu, aby ste dokázali, že formula nie je tautológia
$\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, P(x)\right)\vee\left(\forall x\, Q(x)\right)$
U...univerzum prirodzených čísel
P(*x*)...číslo *x* je párne
Q(x)...číslo *x* je nepárne
Ľavá strana implikácie: každé číslo je buď párne alebo nepárne (pravda)
Pravá strana implikácie: každé číslo je párne alebo každé číslo je nepárne (nepravda)
Výrok je nepravdivý pre túto interpretáciu, to znamená, že **formula nie je tautológia**.

(b) Rozhodnite, či formule sú tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná
$\exists x\left(P(x)\vee\neg P(x)\right)$
Podformula $P(x)\vee\neg P(x)$ je pravdivá pre každé *x*, čiže formula $\exists x\left(P(x)\vee\neg P(x)\right)$ je **tautológia.**

$\left(\exists x\, P(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, P(x)\right)$
U...univerzum všetkých labutí
P(*x*)...labuť *x* je biela
Ľavá strana implikácie: existuje biela labuť (pravda)
Pravá strana implikácie: každá labuť je biela (nepravda)
Výrok je nepravdivý pre túto interpretáciu, to znamená, že **formula môže byť len splniteľná**.

Príklad 2.
Dokážte pomocou rezolventy, že formula je tautológia
$\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left(\left(\forall x\, P(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, Q(x)\right)\right)$
Negáciu formuly prepíšeme do prenexnej Skolemovej formy

$$\neg\left(\neg\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\vee\left(\left(\forall x\, P(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, Q(x)\right)\right)\right)$$
$$\neg\left(\neg\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\vee\left(\neg\left(\forall x\, P(x)\right)\vee\left(\forall x\, Q(x)\right)\right)\right)$$
$$\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\neg\left(\neg\left(\forall x\, P(x)\right)\vee\left(\forall x\, Q(x)\right)\right)$$
$$\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\left(\left(\forall x\, P(x)\right)\wedge\left(\neg\forall x\, Q(x)\right)\right)$$
$$\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\left(\left(\forall x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\,\neg Q(x)\right)\right)$$
$$\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\left(\left(\forall y\, P(y)\right)\wedge\left(\neg Q(a)\right)\right)$$
$$\forall x\forall y\left(\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge P(y)\wedge\neg Q(a)\right)$$
$$\left\{\left\{\neg P(x),Q(x)\right\},\left\{P(y)\right\},\left\{\neg Q(a)\right\}\right\}$$

Ľahko sa dokáže, že po dvoch rezolventách dostaneme $\{\square\}$, t. j. formula je tautológia.

Príklad 3.
Nájdite riešenie sylogizmov (ak existuje, uveďte aj nutné podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý študent je včelár
každý informatik je včelár

?

$$\forall x\left[st(x)\Rightarrow vc(x)\right]$$
$$\forall x\left[in(x)\Rightarrow vc(x)\right]$$

nie je čo dokazovať
riešenie: neexistuje

(b) každý informatik nie je študent
každý včelár je študent

?

$$\forall x\left[in(x)\Rightarrow \neg st(x)\right]$$
$$\forall x\left[vc(x)\Rightarrow st(x)\right]$$

$$in(x)\Rightarrow \neg st(x)$$
$$\neg st(x)\Rightarrow \neg vc(x)$$
$$in(x)\Rightarrow \neg vc(x)$$
$$\forall x\left(in(x)\Rightarrow \neg vc(x)\right)$$
riešenie: každý informatik nie je včelár.

(c) každý jogín je Ind
každý jogín je svalnatý

?

$$jo(a)$$
$$\forall x\left[jo(x)\Rightarrow In(x)\right]$$
$$\forall x\left[jo(x)\Rightarrow sv(x)\right]$$

$$In(a)$$
$$sv(a)$$
$$In(a)\wedge sv(a)$$

$\exists x\left(In(x)\wedge sv(x)\right)$
riešenie: niektorý Ind je svalnatý (za predpokladu, že existuje aspoň jeden jogín).

Príklad 4.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
$\{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}\vdash\left(p\Rightarrow(q\vee r)\right)$

1. p (aktivácia dodatočného predpokladu)
2. $p\Rightarrow q$
3. $p\Rightarrow r$
4. q (m.p. na 1 a 2)
5. $q\vee r$ (I$\vee$ na 4)
6. $p\Rightarrow q\vee r$ (deaktivácia dodatočného predpokladu)

Príklad 5.
Zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky. Pomocou tabuľky zistite, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná.
$\varphi\Rightarrow\left((\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\psi\right)$

φ	ψ	$\varphi\Rightarrow\psi$	$(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\psi$	$\varphi\Rightarrow\left((\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\psi\right)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

Formula je tautológia.

Príklad 6.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula intuicionistickej logiky je tautológia.
$\neg(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

1. $v\left(w_1,\neg(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q)\right)=0$
2. $v\left(w_2,\neg(p\vee q)\right)=1$ $\exists w_2\in\Gamma(w_1)$
3. $v\left(w_1,\neg p\wedge\neg q\right)=0$
4. $v\left(w_2,p\vee q\right)=0$
5. $v\left(w_2,p\right)=0$

6. $v(w_2, q) = 0$

7. $(v(w_2, p) = 1) \vee (v(w_2, q) = 1)$

$$(v(w_2,q)=0) \wedge (v(w_2,p)=1) \wedge ((v(w_2,p)=0) \vee (v(w_2,q)=1))$$

$$((v(w_2,q)=0) \wedge (v(w_2,p)=1) \wedge (v(w_2,p)=0)) \vee$$

$$((v(w_2,q)=0) \wedge (v(w_2,p)=1) \wedge (v(w_2,q)=1))$$