Písomná skúška z Matematickej logiky, konaná dňa 22.1.2008

1. príklad. Pre formulu $(q \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$

(a) zostrojte syntaktický strom,
(b) zostrojte množinu podformúl
(c) zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt.

2. príklad. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pre operáciu troch bitových číslic

$$\alpha_1 \times (\alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 \beta_2$$

3. príklad. Pomocou <u>ohodnoteného</u> sémantického tabla dokážte, že formula je tautológia
$p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Príklad 4. Pomocou vhodnej interpretácie dokážte, že sentencie nie sú tautológie (P a Q sú unárne predikáty).
(a) $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$.
(b) $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x)) \Rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$.
(c) $(\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)) \Rightarrow (\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)))$.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú sentenciou, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná sentencia.
(a) $(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$
(b) $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x))$
(c) $\forall x (\exists y Q(x,y) \vee \exists z \neg Q(x,z))$

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy pomocou prirodzenej dedukcie a odôvodnite výsledok:

(a)
Každý vodič má viac ako 15 rokov.
<u>Každý kto má viac ako 15 rokov má OP.</u>

(b)
Niektorí študenti sú hasiči.
<u>Niektorí hasiči sú slobodní.</u>

(c)
niektorí chemici sú astronómovia
<u>každý fyzik nie je chemik</u>

(c)
Každý študent nie je včelár
<u>niektorí včelári sú analfabeti</u>

Príklad 7.
Zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky. Pomocou tabuľky zistite, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná.
(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$, (b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Príklad 8.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vdash (p \vee r \Rightarrow q)$
(b) $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Príklad 9.
Nech $X = \{1,2,3,4\}$, definujme dve fuzzy relácie $P \subseteq X \times X$ a $Q \subseteq X \times X$ „približne rovný“ pomocou charakteristických funkcii takto

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.8 & (|x-y|=1) \\ 0.3 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}, \quad \mu_Q(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.7 & (|x-y|=1) \\ 0.4 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}$$

Zostrojte zjednotenie, $\mu_{P\cap Q}(x,y)$, a prienik, $\mu_{P\cup Q}(x,y)$, týchto dvoch relácií $\mu_P(x,y)$ a $\mu_Q(x,y)$.

Príklad 10.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula intuicionistickej logiky je tautológia.
$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

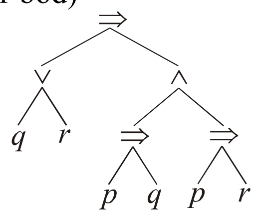
Príklad 11. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, že formula modálnej logiky $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$ je teoréma, t. j. $\vdash (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

1. príklad. Pre formulu $(q \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$

(d) zostrojte syntaktický strom, (1 bod)



(e) zostrojte množinu podformúl (1 bod)

$$\{p, q, r, q \vee r, p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r), (q \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))\}$$

(f) zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt. (1 bod)

$$(q \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$5 \wedge 6$	$4 \Rightarrow 7$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

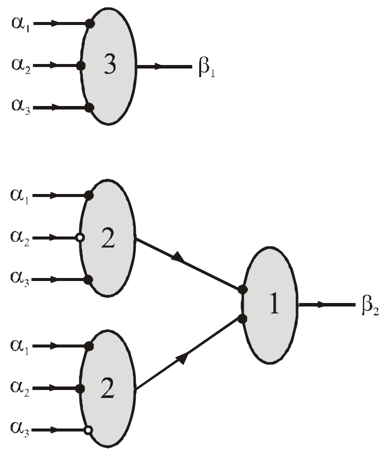
2. príklad. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pre operáciu troch bitových číslic (3 body)

$$\alpha_1 \times (\alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 \beta_2$$

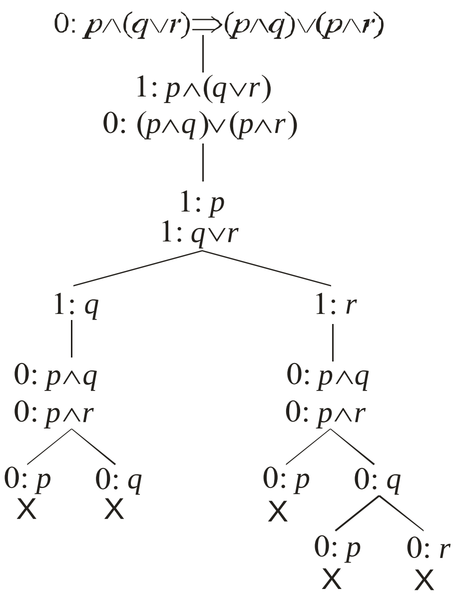
#	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	0	1
8	1	1	1	1	0

$$\beta_1 = (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)$$

$$\beta_2 = (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3)$$



3. príklad. Pomocou ohodnoteného sémantického tabla dokážte, že formula je tautológia $p\wedge(q\vee r)\Rightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$



Všetky vetvy sémantického tabla sú uzavreté, potom formula je tautológia.

Príklad 4. Pomocou vhodne interpretácie dokážte, že sentencie nie sú tautológie (P a Q sú unárne predikáty).

Nech U je množina prirodzených čísel, $U=\{0,1,2,3,...\}$ a nech predikáty $P(x)$ a $Q(x)$ sú interpretované ako „x je párne číslo" resp. „x je nepárne číslo".

(a) $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{\forall x\left(\underbrace{P(x)\vee Q(x)}_{1}\right)}_{1}\right)\Rightarrow\left(\underbrace{\underbrace{\forall x\,P(x)}_{0}\vee\underbrace{\forall x\,Q(x)}_{0}}_{0}\right)}_{0}$$

Ľavá strana implikácie má význam „každé x je párne alebo nepárne číslo“, čo je evidentne pravdivý výrok. Pravá strana je disjunkcia „každé x je párne“ alebo „každé x je nepárne“, čo je evidentne nepravdivý výrok, t. j. študovaná formula nie je tautológiou.

(b) $\left(\exists x\, P(x)\right) \wedge \left(\exists x\, Q(x)\right) \Rightarrow \left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\exists x\, P(x)\right)}_{1} \wedge \underbrace{\left(\exists x\, Q(x)\right)}_{1}}_{1} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists x \underbrace{\left(P(x) \wedge Q(x)\right)}_{0}\right)}_{0}}_{0}$$

Ľavá strana implikácie „existuje také x, ktoré je párne“ alebo „existuje také x, ktoré je nepárne“ je pravdivá. Pravá strana implikácie „existuje také x, ktoré je súčasne párne a nepárne“ je evidentne nepravdivá, potom aj celý výrok je nepravdivý, t. j. formula nie je tautológia.

(c) $\left(\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)\right)$.

$$\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\forall x\, P(x)}_{0} \Rightarrow \underbrace{\forall x\, Q(x)}_{0}\right)}_{1} \Rightarrow \underbrace{\left(\forall x \underbrace{\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)}_{0}\right)}_{0}}_{0}$$

Ľavá strana implikácie je pravdivá, „ak každé x je párne, potom každé x je nepárne“, jednotlivé časti tejto implikácie sú nepravdivé, ale celá implikácia je pravdivá. Pravá strana implikácie „pre každé x platí, že ak x je párne, potom x je nepárne“ je evidentne nepravdivý výrok, čiže aj celá formula je nepravdivá, študovaná formula preto nemôže byť tautológia.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú sentenciou, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná sentencia.

(a) $\left(\exists x P(x)\right) \vee \left(\exists x \neg P(x)\right)$

Keď predikát $\neg P(x)$ pomenujeme $Q(x)$, môžeme použiť distributívny zákon kvantifikátora na str. 111, formula (b),

$\left(\exists x P(x)\right) \vee \left(\exists x \neg P(x)\right) \equiv \exists x \underbrace{\left(P(x) \vee \neg P(x)\right)}_{1} \equiv 1$ a teda formula je tautológia

(b) $\left(\forall x P(x)\right) \wedge \left(\exists x \neg P(x)\right) \equiv \left(\forall x P(x)\right) \wedge \left(\neg \forall x P(x)\right)$, po substitúcii

$\forall x P(x) = p$ dostávame kontradikciu $p \wedge \neg p \equiv 0$

(c) $\forall x\left(\exists y Q(x,y) \vee \exists z \neg Q(x,z)\right)$

Druhú časť disjunkcie upravíme v prvom kroku tak, že premennú z nahradíme premennou y a potom v druhom kroku vytkneme existenčný kvantifikátor pred zátvorku (používame formulu c z príkladu 7.2)

$$\forall x\left(\exists y\, Q(x,y) \vee \exists z\, \neg Q(x,z)\right) \equiv \forall x\left(\exists y\, Q(x,y) \vee \exists y\, \neg Q(x,y)\right) \equiv \forall x\, \exists y\left(Q(x,y) \vee \neg Q(x,y)\right)$$

Pretože podformula stojaca za kvantifikátormi ($Q(x,y) \vee \neg Q(x,y)$) je tautológia, potom aj študovaná formula je tautológia.

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP.

?

Vykonáme prepis sylogizmu do predikátovej logiky

$$\varphi_1: \forall x\left(vodic(x) \Rightarrow nad15(x)\right) \Rightarrow \left(vodic(t) \Rightarrow nad15(t)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(nad15(x) \Rightarrow maOP(x)\right) \Rightarrow \left(nad15(t) \Rightarrow maOP(t)\right)$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ dostaneme

$\left(vodic(t) \Rightarrow maOP(t)\right)$ pre ľubovoľné indivíduum *t*, čiže platí aj

$$\forall x\left(vodic(x) \Rightarrow maOP(x)\right)$$

Záver zo sylogizmu je: „každý vodič má OP.“

(b)

Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

?

$$\varphi_1: \exists x\left(st(x) \wedge hasic(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge hasic(a)\right)$$
$$\varphi_2: \exists x\left(hasic(x) \wedge slob(x)\right) \Rightarrow \left(hasic(b) \wedge slob(b)\right)$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí chemici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

?

$$\varphi_1: \exists x\left(chem(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \wedge astr(a)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(fyz(x) \Rightarrow \neg chem(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \Rightarrow \neg chem(a)\right)$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *chem*(a) a *astr*(a). Použitím *chem*(a) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg$*fyz*(a). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg fyz(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg fyz(x)$$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú fyzici“.

(d)
Každý študent nie je včelár
Niektorí včelári sú analfabeti

?

$$\varphi_1 : \forall x\,(st(x) \Rightarrow \neg vce(x)) \Rightarrow (st(a) \Rightarrow \neg vce(a)) \Rightarrow (vce(a) \Rightarrow \neg st(a))$$

$$\varphi_2 : \exists x\,(vce(x) \wedge anal(x)) \Rightarrow (vce(a) \wedge anal(a))$$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *vce*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg$*st*(a) , spojením s *anal*(a) dostaneme

$$anal(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, anal(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje včelár): „niektorý analfabet nie je študent“

Príklad 7.
(a)
$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$

φ	ψ	$\varphi\Rightarrow\psi$	$(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\psi$	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

Formula je tautológia.

(b)
$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(p\vee q)\Rightarrow\neg p\wedge\neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	½	½	½	1	½	½	1
0	1	1	0	1	0	0	1
½	0	½	½	½	1	½	1

½	½	½	½	½	½	½	1
½	1	1	0	½	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	½	1	0	0	½	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Príklad 8.

Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte

(a) $\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vdash (p \vee r \Rightarrow q)$

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad)
2.	$r \Rightarrow q$	(1. predpoklad)
3.	$p \vee r$	(aktivácia dodatočného predpokladu)
4.	p $\quad\quad\quad$ r	(rozklad 3, dve alternatívy)
5.	q	(modus ponens 4,1 alebo 4,2)
6.	$p \vee r \Rightarrow q$	(deaktivácia dodatočného predpokladu na 5)

(b) $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

1.	p	(aktivácia 1. dodatočného predpokladu)
2.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 2. dodatočného predpokladu)
3.	$q \Rightarrow r$	(aktivácia 3. dodatočného predpokladu)
4.	q	(m. p. na 1. a 2.)
5.	r	(m. p. na 3. a 4.)
6.	$p \Rightarrow r$	(deaktivácia dodatočného predpokladu 1. na 5.)
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(deaktivácia dodatočného predpokladu 3. na 6.)
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(deaktivácia dodatočného predpokladu 2. na 7.)

Príklad 9.

Nech $X = \{1,2,3,4\}$, definujme dve fuzzy relácie $P \subseteq X \times X$ a $Q \subseteq X \times X$ „približne rovný" pomocou charakteristických funkcii takto

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0.8 & (|x-y|=1) \\ 0.3 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases} \quad , \quad \mu_Q(x,y) = \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0.7 & (|x-y|=1) \\ 0.4 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}$$

Zostrojte zjednotenie, $\mu_{P\cap Q}(x,y)$, a prienik, $\mu_{P\cup Q}(x,y)$, týchto dvoch relácií $\mu_P(x,y)$ a $\mu_Q(x,y)$.

$\mu_P(x,y)$		Y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.3	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.3
	3	0.3	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.3	0.8	1

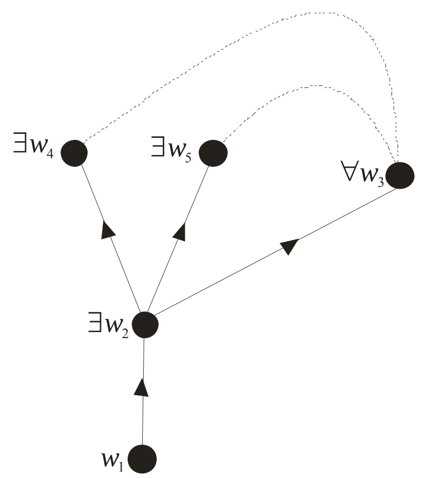
$\mu_Q(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.7	0.4	0.1
	2	0.7	1	0.7	0.4
	3	0.4	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.4	0.7	1

$\mu_{P\cap Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.7	0.3	0.1
	2	0.7	1	0.7	0.3
	3	0.3	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.3	0.7	1

$\mu_{P\cup Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.4	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.4
	3	0.4	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.4	0.8	1

Príklad 10.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula intuicionistickej logiky je tautológia.
$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

1. $v(w_1, \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)) = 0$
2. $v(w_2, \neg(p \wedge q)) = 1$ (pre $\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$)
3. $v(w_2, \neg p \vee \neg q) = 0$ (pre $\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$)
4. $v(w_3, p \wedge q) = 0$ (pre $\forall w_3 \in \Gamma(w_2)$)
5. $v(w_2, \neg p) = 0$
6. $v(w_2, \neg q) = 0$
7. $v(w_4, p) = 1$ (pre $\exists w_4 \in \Gamma(w_2)$)
8. $v(w_5, q) = 1$ (pre $\exists w_5 \in \Gamma(w_2)$)
9. $(v(w_3, p) = 0) \vee (v(w_3, q) = 0)$



Pretože vo všeobecnosti platí $w_4 \neq w_5$ riadky 7-9 a 8-9 neprodukujú kontradikciu, t. j. formula nie je tautológia.

Príklad 11. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, že formula modálnej logiky $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$ je teoréma, t. j. $\vdash \left(\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)\right)$.