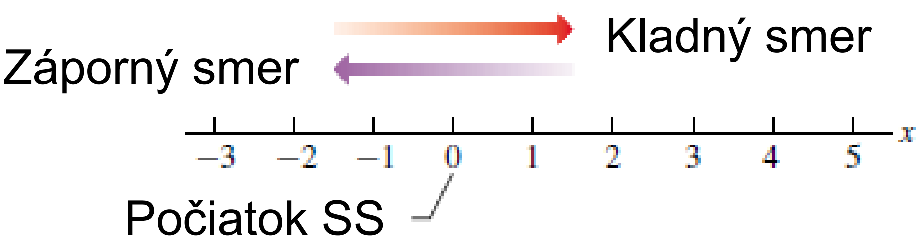
Základy mechaniky

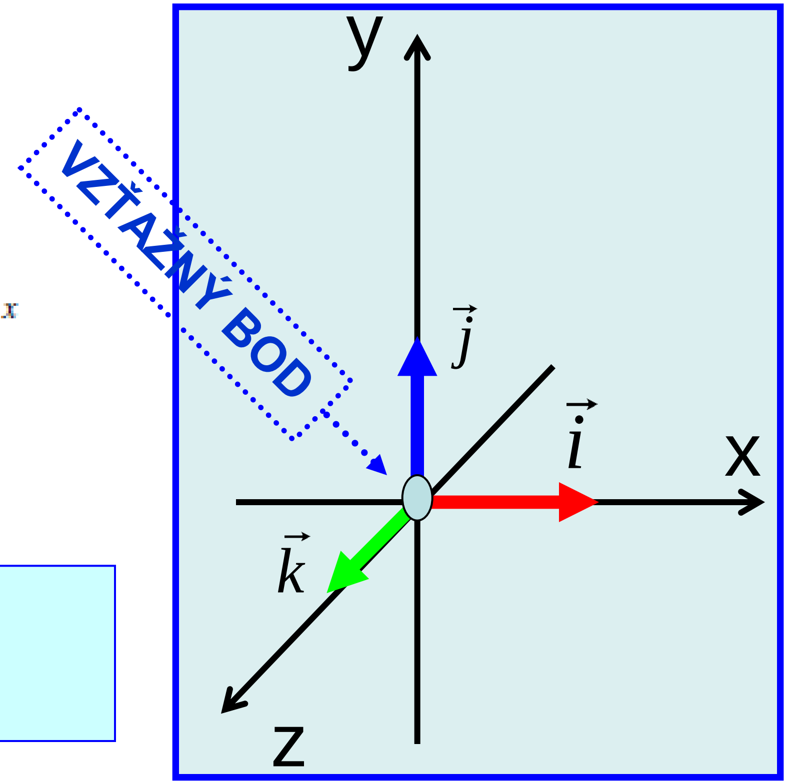
Kinematika

Kinematika - popisuje pohyb telesa pomocou rôznych charakteristík (poloha, posunutie, rýchlosť, zrýchlenie).

Hmotný bod – najjednoduchší objekt, ktorý zastupuje pohybujúce sa teleso

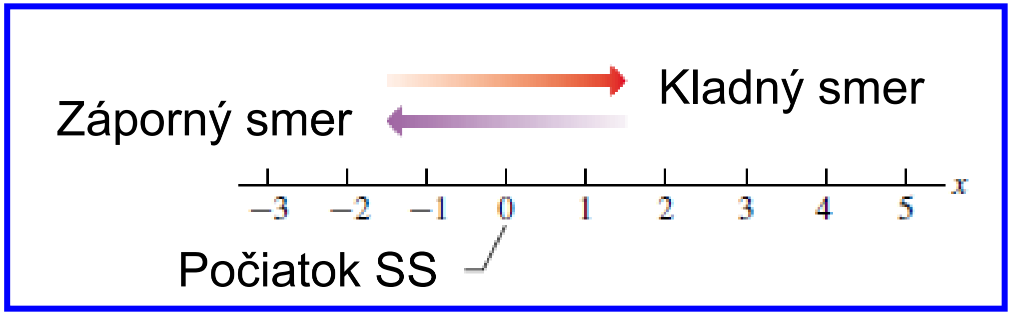
Poloha – určuje sa vždy vzhľadom k nejakému **vzťažnému bodu** (najčastejšie k počiatku SS)





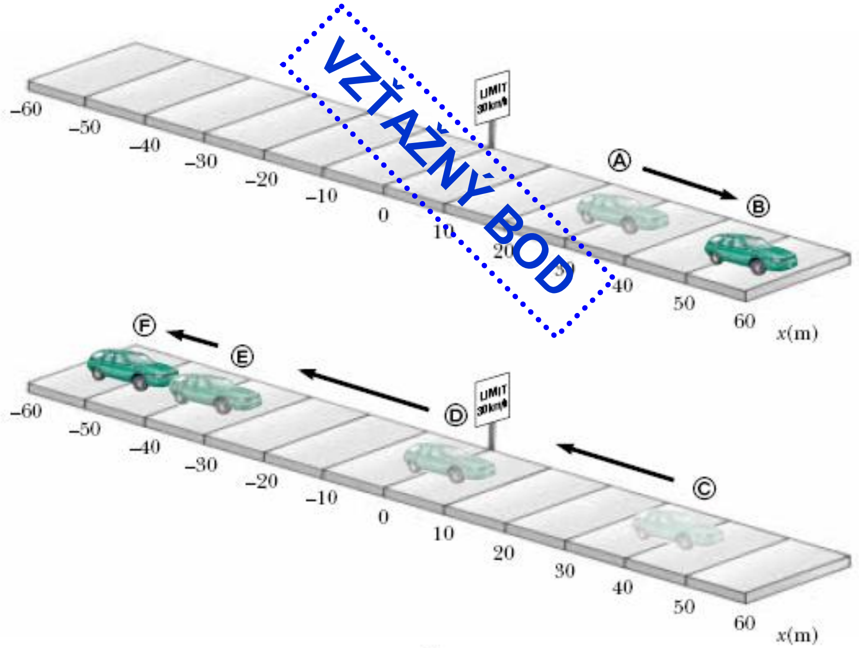
Kartézska súradnícová sústava je tvorená pravotočivou sústavou súradníc, určenou navzájom kolmými jednotkovými vektormi.

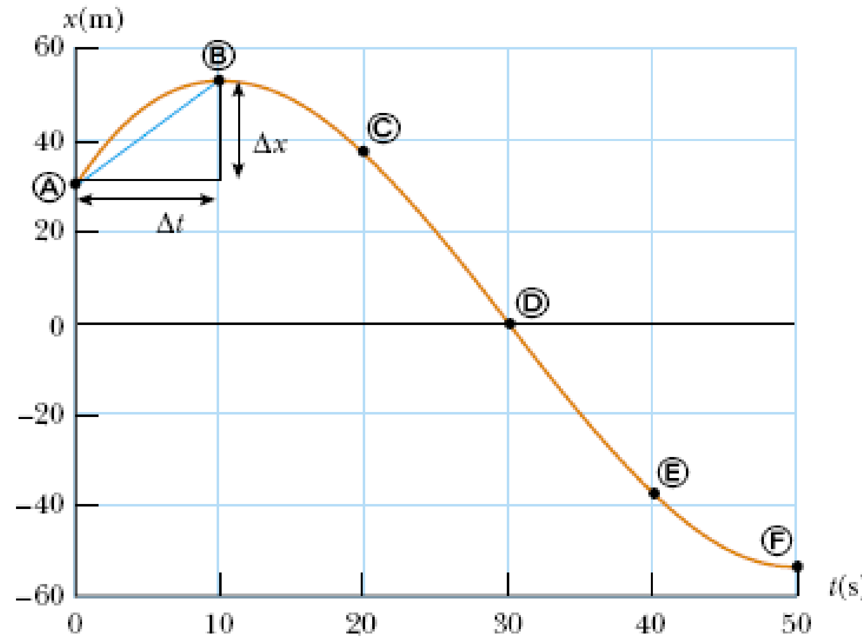
Jednorozmerný prípad

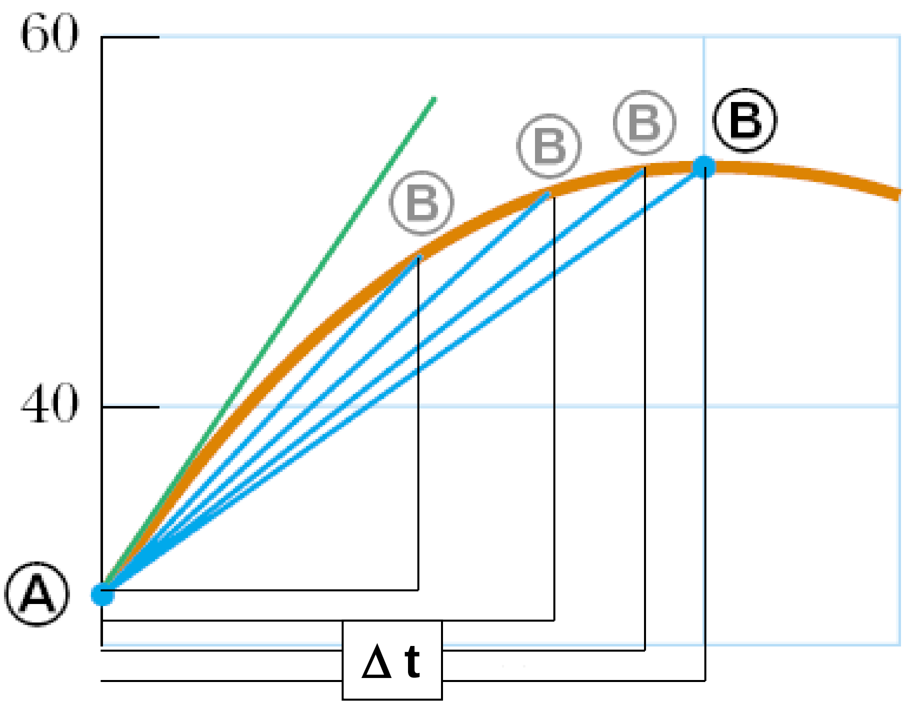


Posunutie $\Delta x = x_2 - x_1$

Vektorová veličina, závisí len od počiatočnej a konečnej polohy

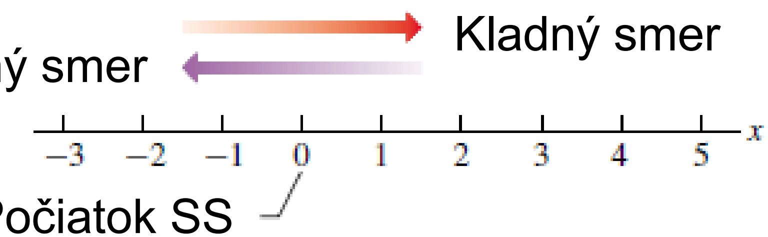






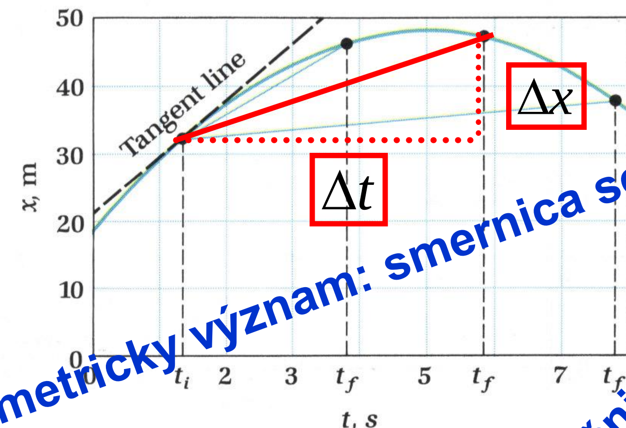
Zmenšovaním časového intervalu Δt nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

Jednorozmerný prípad



Priemerná rýchlosť

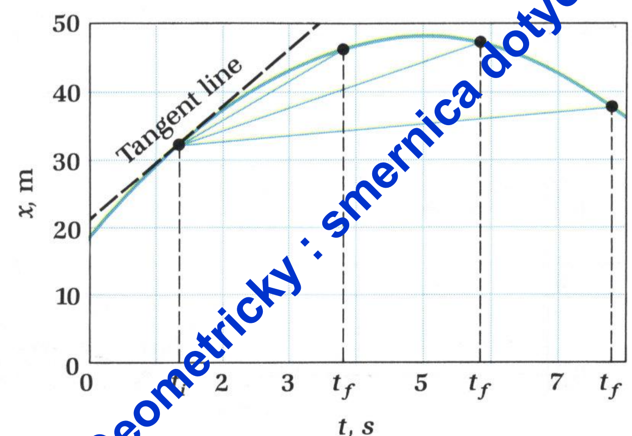
$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Geometricky význam: smernica sečnice

Okamžitá rýchlosť

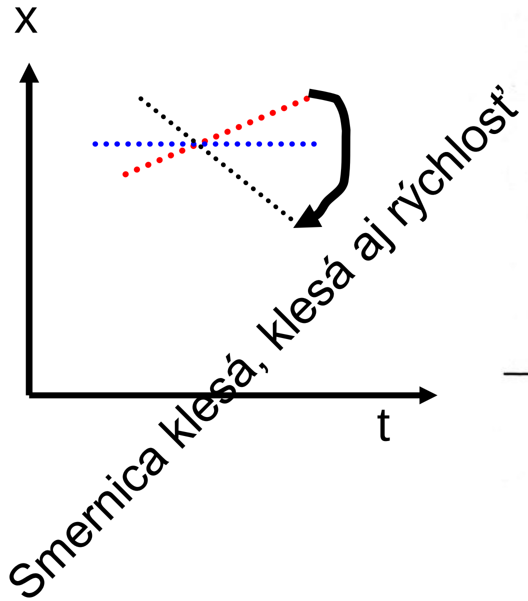
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

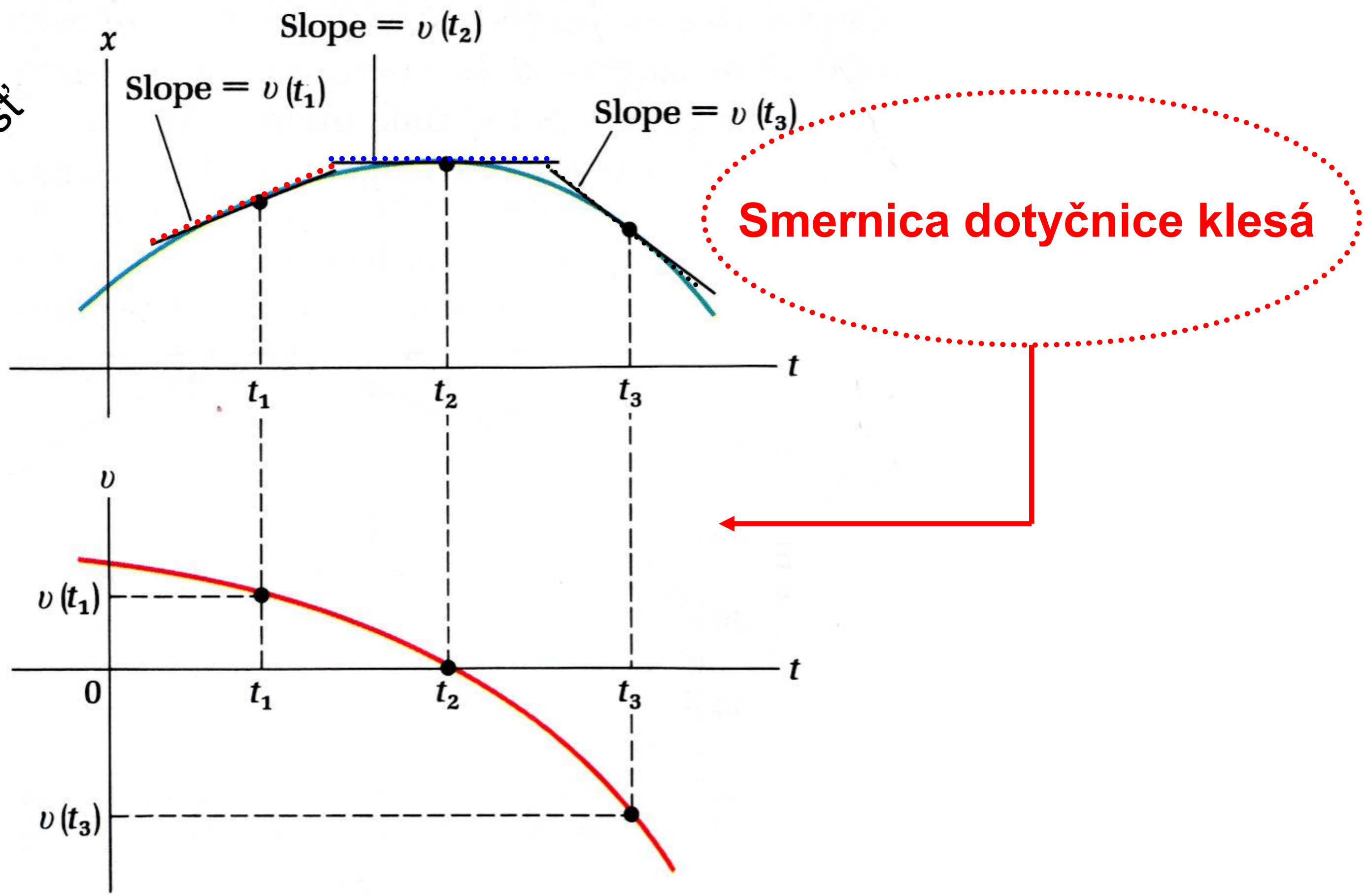


Geometricky : smernica dotyčnice

Zmenšovaním intervalu Δt nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

Využitie geometrického významu





Smernica dotyčnice v gafe x(t) v každom čase určuje veľkosť rýchlosti

Fyzikálny význam derivácie

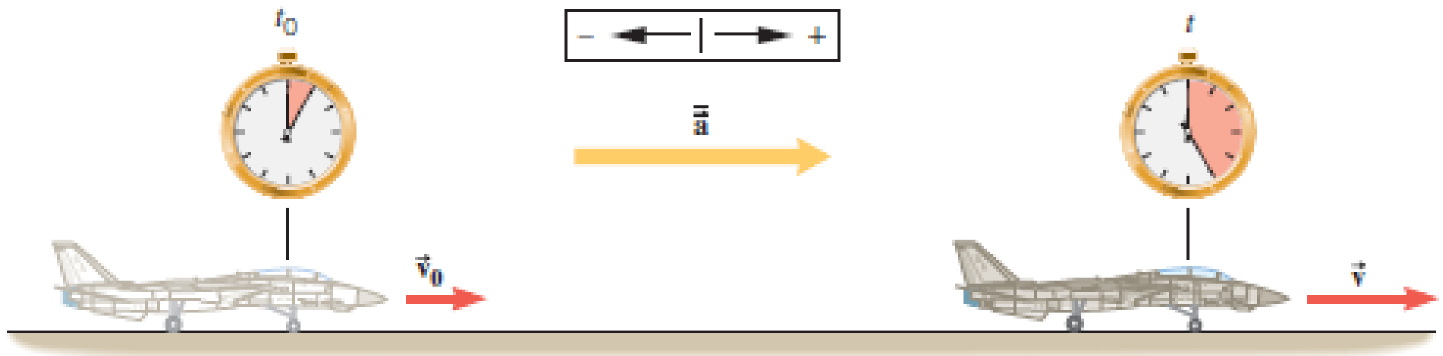
Okamžitá rýchlosť je limita, ku ktorej sa blíži **priemerná rýchlosť** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

$$v = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t}}}$$

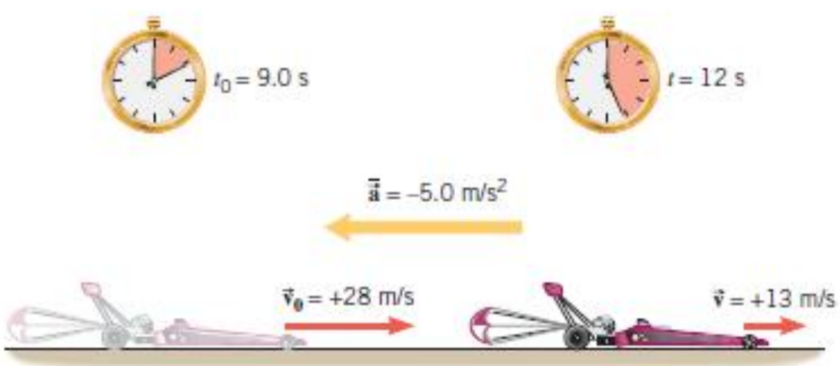
Priemerná rýchlosť

Okamžitá rýchlosť

Zmena rýchlosti častice sa charakterizuje zrýchlením



Veľkosť rýchlosti sa zväčšuje



Veľkosť rýchlosti sa zmenšuje

Jednorozmerný prípad

Priemerná zrýchlenie

$$\boxed{\overline{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}}$$

Okamžité zrýchlenie

$$\boxed{a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}}$$

Zrýchlenie

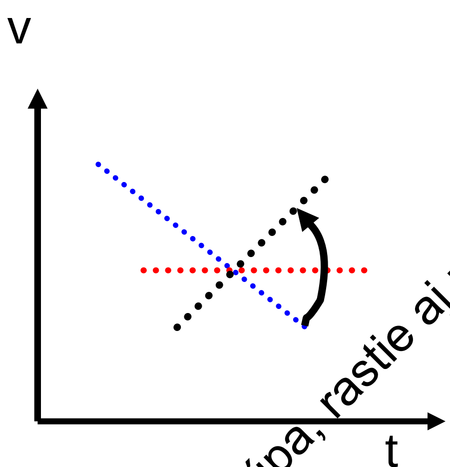
Okamžité zrýchlenie je limita, ku ktorej sa blíži **priemerné zrýchlenie** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

$$a = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta t}}}$$

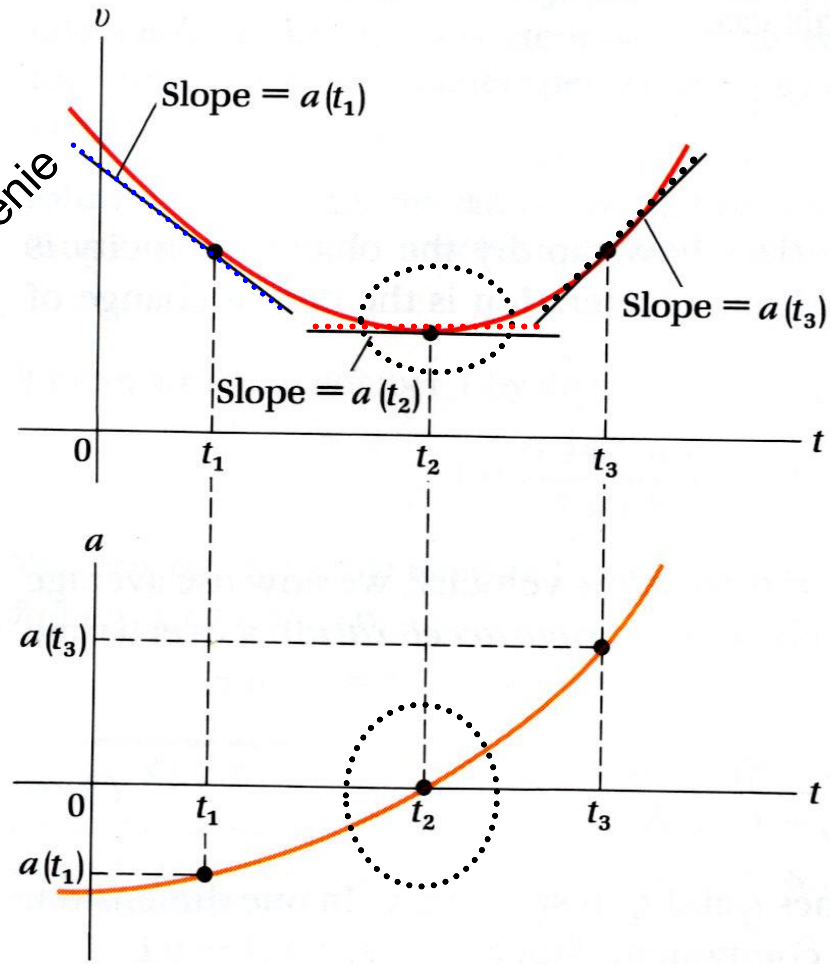
priemerné zrýchlenie

Okamžité zrýchlenie

Jednotka zrýchlenia je $m\ s^{-2}$



Smernica stúpa, rastie aj zrýchlenie



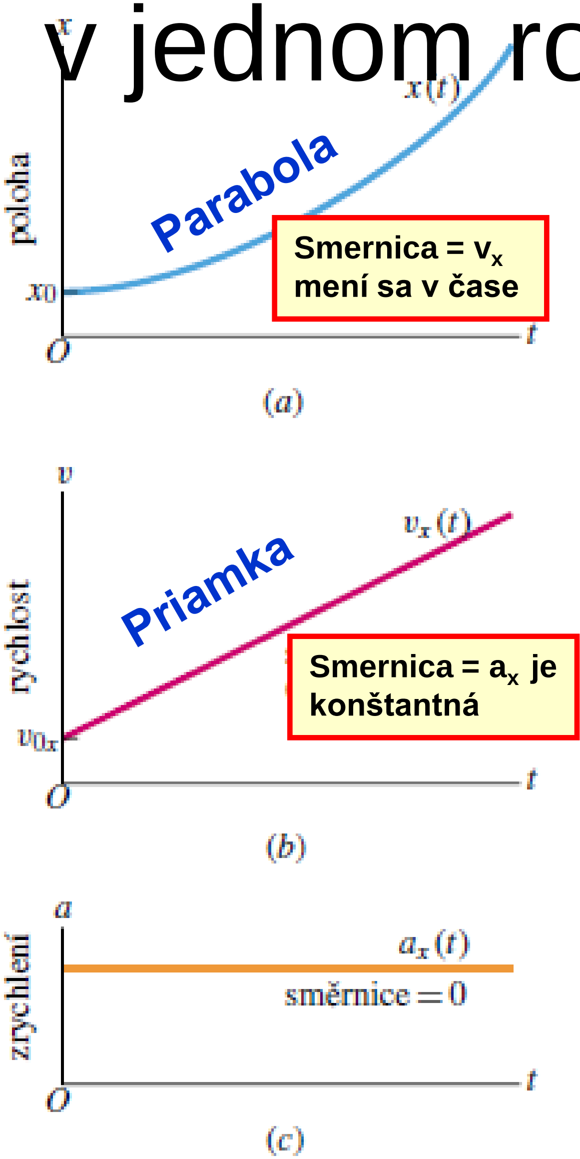
Smernica dotyčnice v gafe v(t) v každom čase určuje veľkosť zrýchlenia a

Rovnomerne zrýchlený pohyb v jednom rozmere

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = konst$$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$



Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$a_x = konst$$

$$\Downarrow$$

Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Počiatočné podmienky

(hodnoty v čase t = 0):

v_{0x} – počiatočná rýchlosť

x_0 – počiatočná poloha

Hodnoty veličín v čase t

(hodnoty v čase t):

v_x –rýchlosť v čase t

x – poloha v čase t

POZOR na znamienka !!!!

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$\boxed{a_x = konst \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ x &= v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0 \end{aligned}}$$

Rovnomerný pohyb

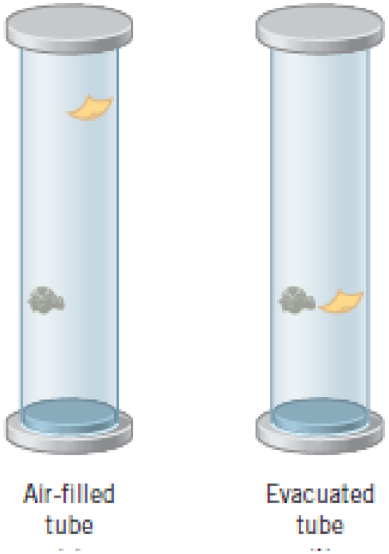
$$\boxed{v_x = konst \qquad (a_x = 0)}$$

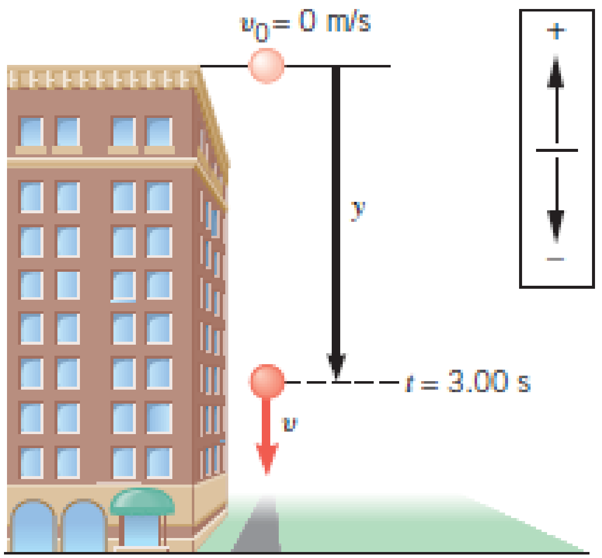
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ x &= v_{0x} t + x_0 \end{aligned}}$$

Zvislý vrh

Voľný pád v gravitačnom poli zeme

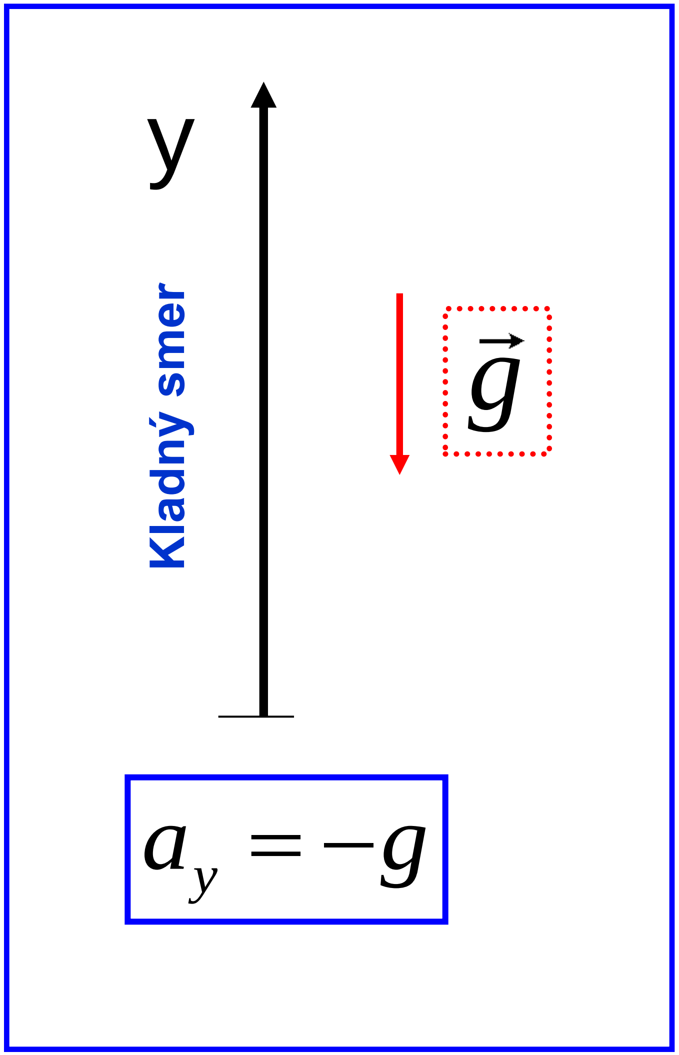




$$\boxed{g = 9,8 ms^{-2}}$$

Zanedbávame odpor prostredia

Zvislý vrh

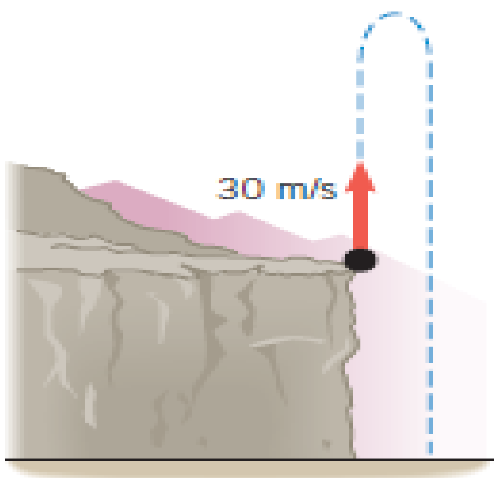


Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

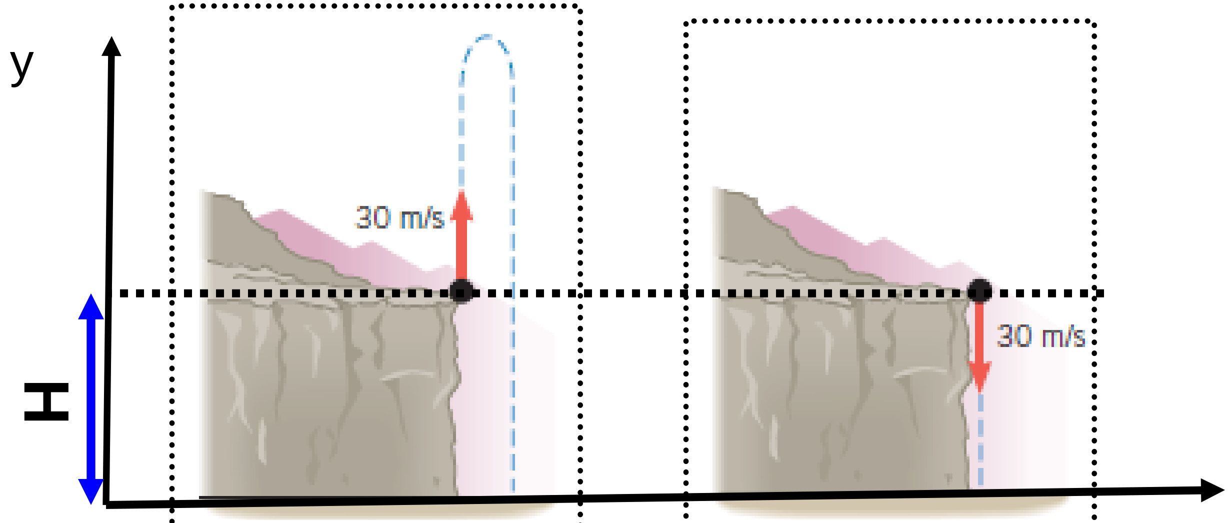
$$x \rightarrow y$$
$$a_y = -g$$

Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$	v_y
$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g (y - y_0)$	t
$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y) t$	g
$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2} g t^2$	v_{0y}

- Gulička bola vyhodená priamo nahor počiatočnou rýchlosťou 30 m / s a po dosiahnutí maximálnej výšky padá späť na zem, pod útes. Druhykrát bola guľička vyhodená nadol tou istou rýchlosťou. Porovnajte rýchlosti dopadu na Zem v oboch prípadoch.



$v_1 = ???$ $v_2 = ???$



$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	v_y
$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(y - y_0\right)$	t
$y - y_0 = \frac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right)t$	g
$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$	v_{0y}

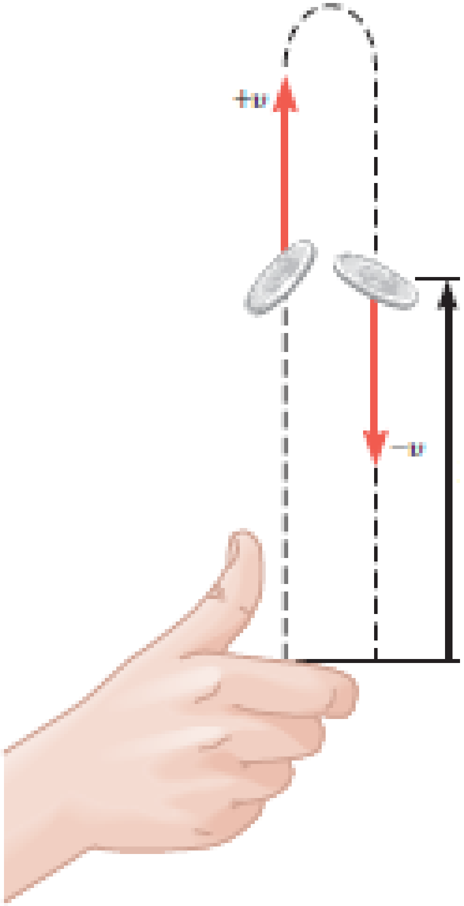
Chýbajúca veličina t

Počiatočné podmienky

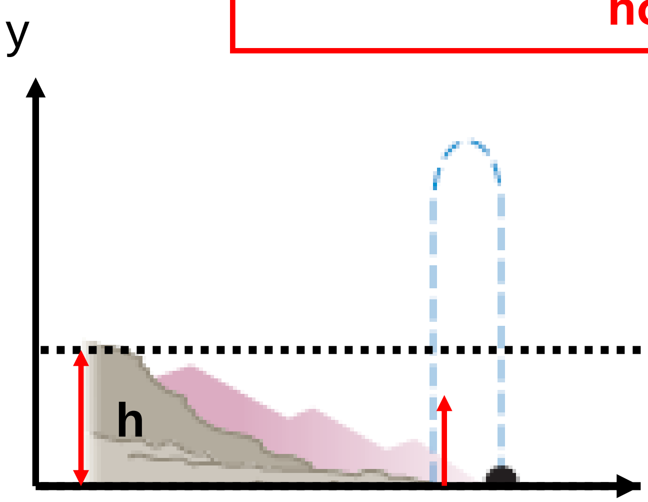
$y_0 = H$	$y_0 = H$
$v_{0y} = 30\frac{m}{s}$	$v_{0y} = -30\frac{m}{s}$
$y = 0$	$y = 0$
$v_y = ?$	$v_y = ?$
$a_y = -g$	$a_y = -g$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(y - y_0\right)$$

Minca bola vrhnutá smerom nahor a po dosiahnutí maximálnej výšky začala padať nazad. Porovnajte vektory rýchlosti a zrýchlenia v ľubovoľnej výške h nad zemou.



Veľkosť rýchlosti projektilu v rovnakých výškach je rovnaká, hoci vektory rýchlosti sú rôzne



$$y_0 = 0$$
$$y = h$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(y - y_0\right)$$

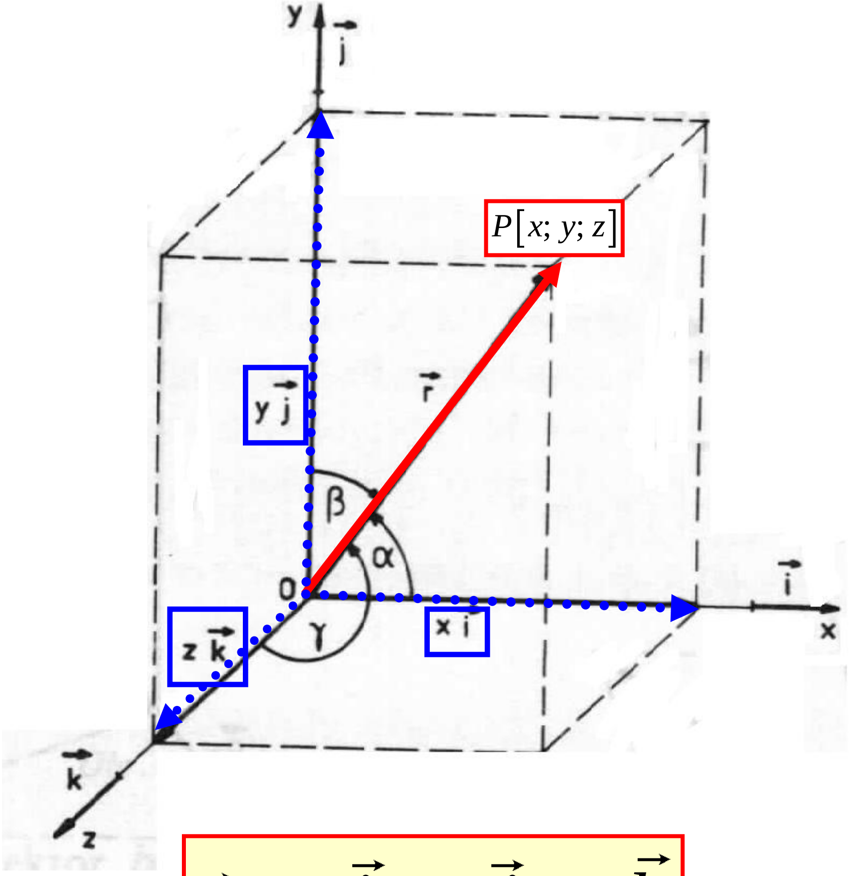
$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(h\right)$$

DVA KORENE

Pohyb vo viacerých rozmeroch

Polohový vektor

Polohový vektor



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left(x;\, y;\, z\right)$$

Súradnice vektora

Priemety (zložky) vektora

$$x\vec{i}\,,\quad y\vec{j}\,,\quad z\vec{k}$$

Vo všeobecnom prípade sa každý vektor dá rozložiť na tri nekomplanárne zložky (ktoré neležia v jednej rovine).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

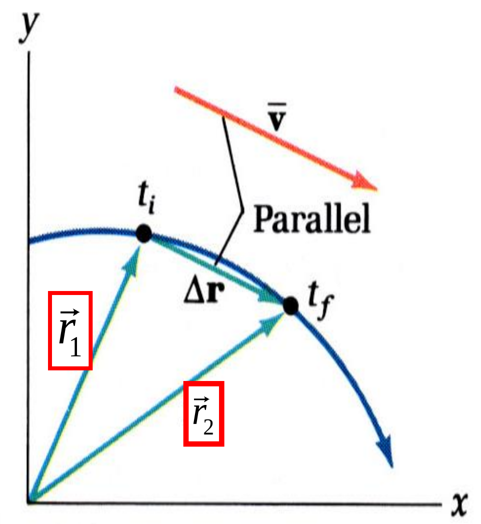
$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$

$$= [x_2 - x_1]\vec{i} + [y_2 - y_1]\vec{j} + [y_2 - y_1]\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$



Vektor posunutia

Rýchlosť

Okamžitá rýchlosť

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Priemerná rýchlosť

V zložkovom tvare

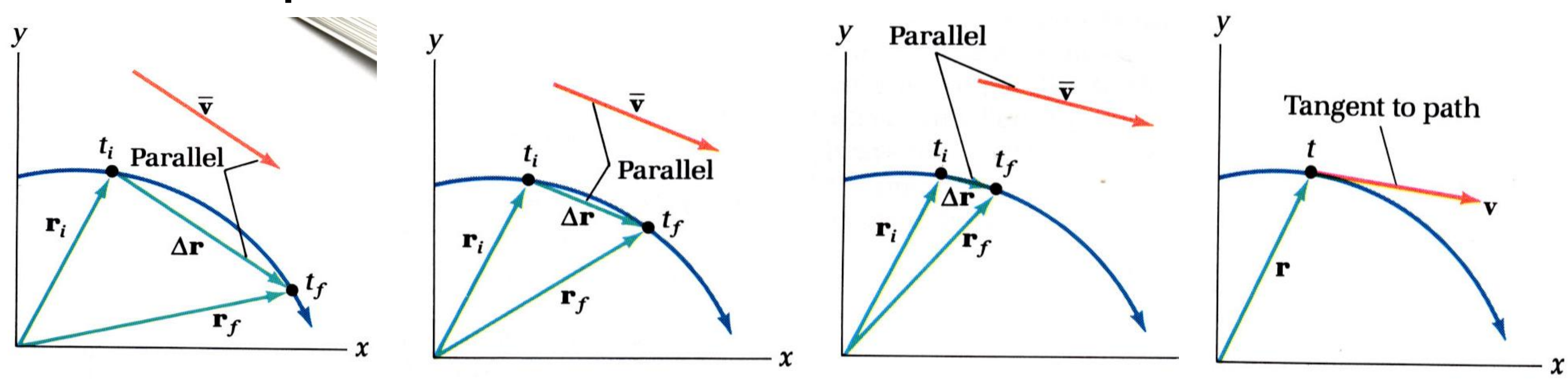
$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Postupné zmenšovanie časového intervalu Δt



Okamžitá rýchlosť má smer rovnobežný s trajektóriou, t.j. je dotyčnicou k trajektórie.

Zrýchlenie

Okamźité zrýchlenie

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Priemerné zrýchlenie

V zložkovom tvare

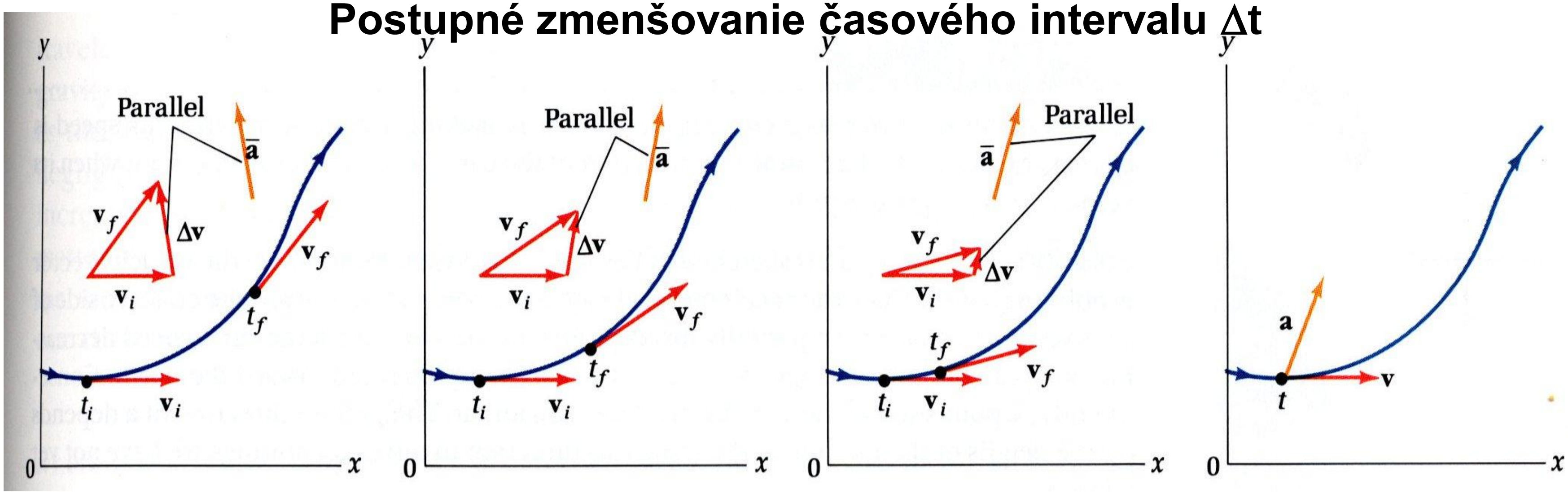
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Postupné zmenšovanie časového intervalu Δt



Zrýchlenie telesa nie je vo všeobecnosti dotyčnicou k trajektórii. Zrýchlenie je paralelné k dv.

Všeobecná schéma výpočtu kinematických veličín (jednorozmerný prípad)

$\boxed{x}$

$$\boxed{x = \int v\,dt} \qquad \boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

$\boxed{v}$

$$\boxed{v = \int a\,dt} \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$\boxed{a}$

$$\boxed{a_x = konst}$$

$$\Downarrow$$

Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(v_{0x} + v_x\right)t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Všeobecná schéma výpočtu kinematických veličín (všeobecný prípad)

$$\boxed{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}}$$

Príklad

$$\boxed{\vec{r}} \longrightarrow \boxed{\vec{v}} \longrightarrow \boxed{\vec{a}}$$

- Teleso sa pohybuje v rovine xy podľa rovnice: $x = \alpha t$

$$y = \alpha t - \alpha\beta t^2 \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

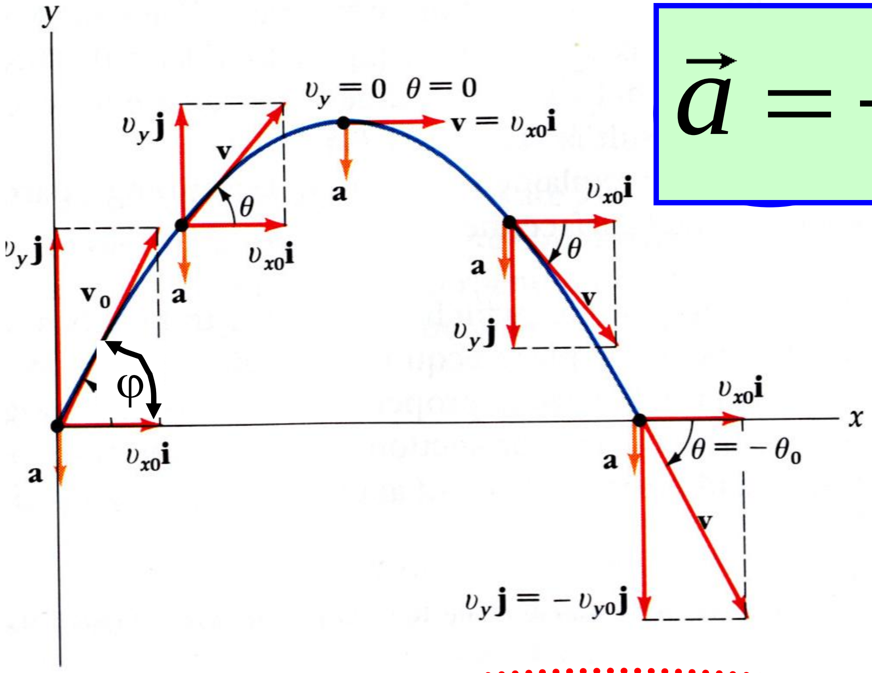
•Určte trajektóriu pohybu, t.j. y(x).

•Určte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v ľubovoľných časoch.

•Určte čas t_0, v ktorom uhol medzi rýchlosťou a zrýchlením bude kolmý.

Šikmý vrh

Teleso v gravitačnom poli vždy padá s rovnakým zrýchlením, bez ohľadu na počiatočnú rýchlosť



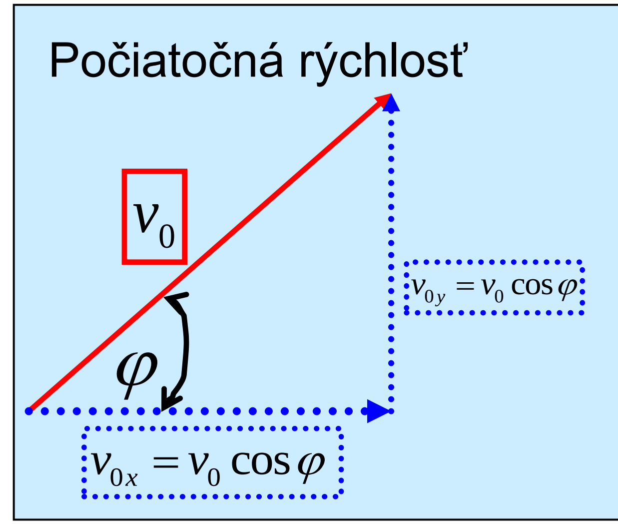
$$\vec{a} = -g\vec{j} = (0, -g)$$

$$\boxed{\vec{a}} \longrightarrow \boxed{\vec{v}} \longrightarrow \boxed{\vec{r}}$$

Šikmý vrh

$$\boxed{\vec{a}} \longrightarrow \boxed{\vec{v}} \longrightarrow \boxed{\vec{r}}$$

Teleso v gravitačnom poli vždy padá s rovnakým zrýchlením , bez ohľadu na počiatočnú rýchlosť



Počiatočné podmienky:

Zrýchlenie: $a_x = 0$ $\quad a_y = -g$

Rýchlosť: $v_{0x} = v_0 \cos\varphi$ $\quad v_{0y} = v_0 \sin\varphi$

Poloha: $x_0 = 0$ $\quad y_0 = 0$

V smere osi x – rovnomerný pohyb

$$v_x = v_0 \cos\varphi$$

$$x = v_0 \cos\varphi\, t$$

V smere osi y – rovnomerne zrýchlený pohyb

$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$$

$$y = v_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$\boxed{a_x = konst \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0$$

Rovnomerný pohyb

$$\boxed{v_x = konst \qquad (a_x = 0)}$$

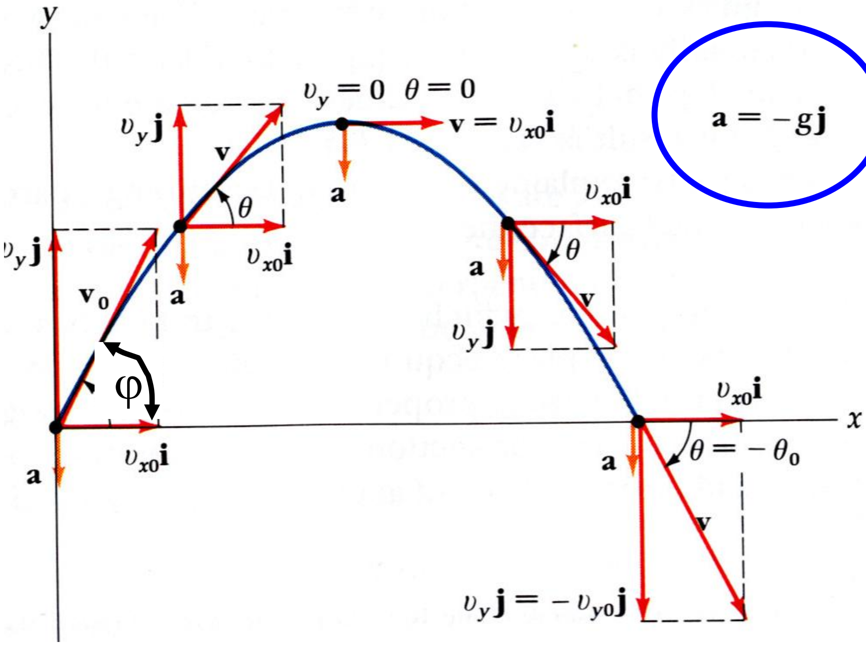
$$\Downarrow$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = v_{0x} t + x_0$$

Šikmý vrh

X-ová zožka rýchlosti sa počas pohybu nemení, na rozdiel od y-onovej.
Tvar trajektórie je parabola.



$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$

V smere osi x:

$$v_x = v_0 \cos\varphi$$

$$x = v_0 \cos\varphi\, t$$

V smere osi y

$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$$

$$y = v_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Rovnica trajektórie

$$y = x\,tg\varphi - \frac{g}{2(v_0\cos\varphi)^2} x^2$$

Dolet

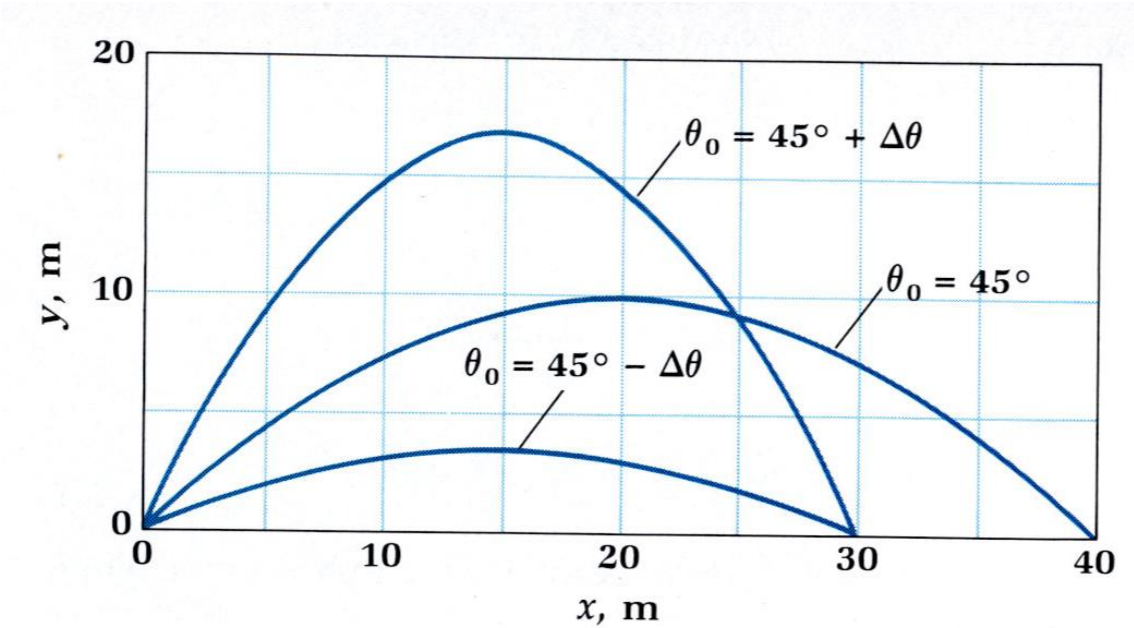
$$y = 0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\varphi)$$

Max. výška

$$v_y = 0$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\varphi)}{2g}$$



Dolet

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\varphi)$$

Ak je teleso vrhnuté pod dvoma elevačnými uhlami líšiacimi sa od uhla 45 stupňov o rovnakú hodnotu $\Delta\varphi$, doletia do rovnakej vzdialenosti $\varphi=\pi/4\pm\Delta\varphi$

Maximálny dolet

Dolet telesa dosiahne maximálnu hodnotu, ak je teleso vrhnuté pod uhlom $\varphi=\pi/4$

Otázky

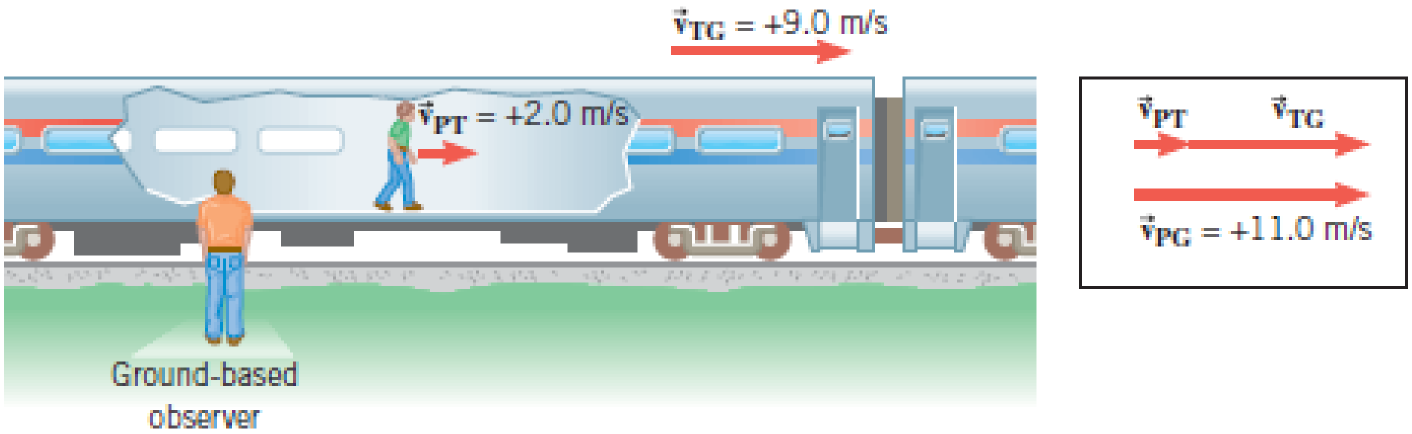
Vysvetlite pojem vektora a definujte základné operácie (sčítanie, odčítanie, násobenie)

Definujte základné kinematické veličiny (posunutie, rýchlosť, zrýchlenie) a objasnite v jednorozmernom prípade geometrický význam priemernej a okamžitej rýchlosti)

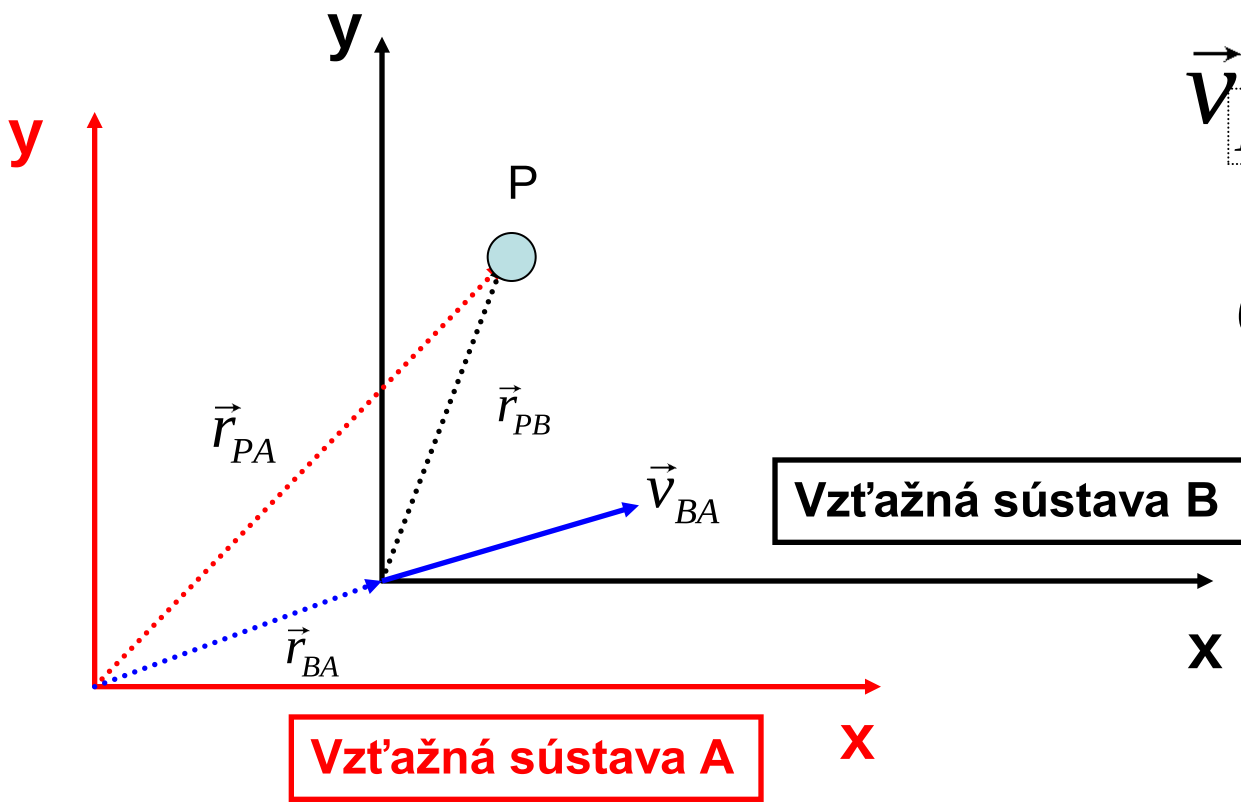
Objasnite pojem rovnomerne zrýchlený pohyb a odvoďte dôsledky

Zvislý a šikmý vrh

Vzájomný pohyb po priamke



Vzájomný pohyb

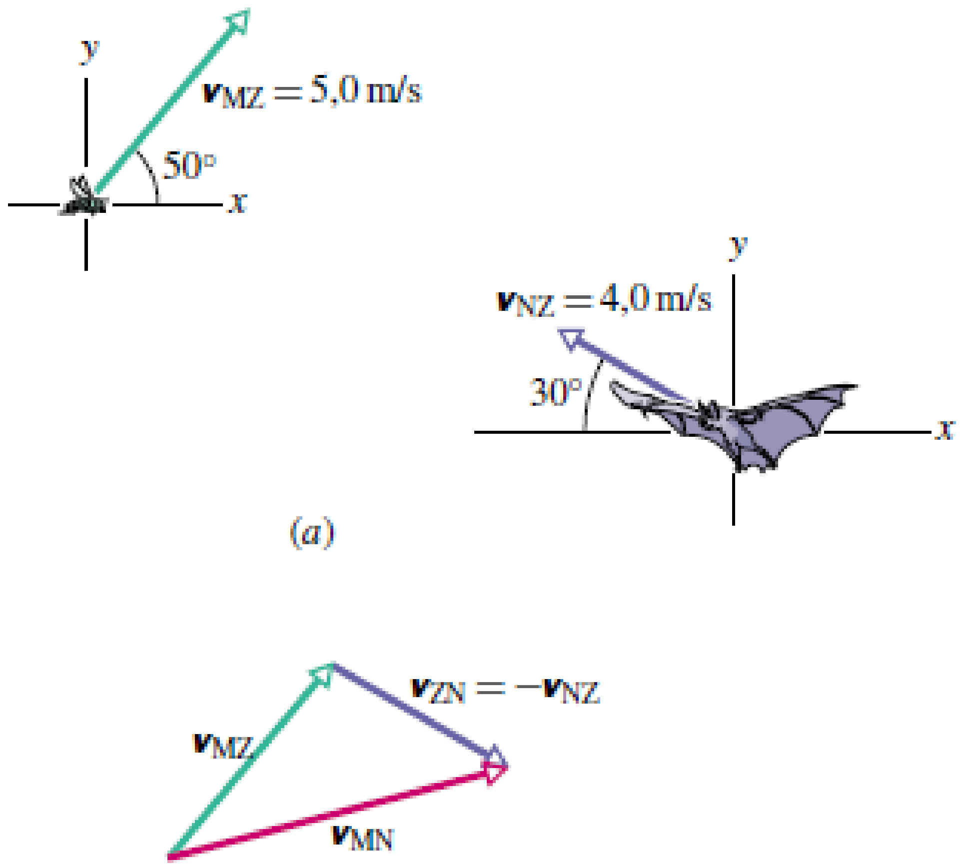


$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

Častica má rovnaké zrýchlenie vo všetkých sústavách pohybujúcich sa navzájom konštantnými rýchlosťami

Určte relatívnu rýchlosť muchy vzhľadom na netopiera podľa obrázka. Rýchlosti sú znázornené vzhľadom na zem.



Rovnomerne zrýchlený pohyb v viacerých rozmeroch rozmere

$$\boxed{\vec{a} = \vec{k}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{aligned}}$$