Technika sémantických tabiel v logike

Vladimír KVASNIČKA a Jiří POSPÍCHAL[1]

Abstrakt. Technika sémantických tabiel patrí tak v klasickej logike, ako aj v neklasických logikách k základným technikám modernej matematickej logiky; tvorí efektívny prostriedok k štúdiu sémantických vlastností rôznych logík (menovite k špecifikácii relácie sémantického vyplývania $\models$). Taktiež možno ukázať, že sémantické tablá interpretované v inverznom poradí možno chápať ako prirodzenú dedukciu.

1 Úvodné poznámky

V našej každodennej skúsenosti pojem „tablo" má silne technický akcent, v tomto texte budeme pod ním rozumieť obrázok alebo schému. V matematickej logike metóda sémantického tabla [5,12,15,16] je formálnou procedúrou dôkazu, ktorá, aj keď má v rôznych logikách mnoho spoločných čŕt, má v týchto logikách vždy aj špecifické neopakovateľné črty.

Prvá dôležitá vlastnosť sémantických tabiel je, že nám slúži ako efektívna metóda nepriameho dôkazu toho, či formula φ je tautológia. Ak sa nám podarí dokázať pomocou sémantických tabiel, že negácia $\neg\varphi$ je kontradikcia, potom pôvodná formula φ musí byť tautológia. Táto technika je založená na diagramatickej interpretácii transformácie logickej formuly do tvaru disjunktívnej normálnej formy (DNF). Táto transformácia je znázornená pomocou sémantických tabiel. Môžeme teda konštatovať, že sémantické tablá znázorňujú transformáciu formuly do tvaru DNF, ktorý je mimoriadne vhodný na verifikovanie skutočnosti, či daná formula je kontradikcia (platí jednoduchá veta, že DNF formula je kontradikcia práve vtedy, ak jej každá konjunktívna klauzula obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, napr. p a $\neg p$).

Druhá významná vlastnosť sémantických tabiel je, že pomocou nich môžeme pomerne ľahko zostrojiť model danej formuly, t. j. nájdeme tie pravdivostné interpretácie premenných, pre ktoré je formula pravdivá. Každá vetva tabla je priradená konkrétnej pravdivostnej interpretácii. Táto vlastnosť nám umožňuje formulovať mnoho viet o konštrukcii tautologického vyplývania [12] danej formuly z predpokladov, ktoré tvoria teoretický základ pre alternatívnu výpočtovú realizáciu

---

[1] Fakulta informatiky a informačných technológií, STU Bratislava, Ilkovičova 3, 842 16 Bratislava, E-mail: kvasnicka@fiit.stuba.sk, pospichal@fiit.stuba.sk

dôkazu tautologičnosti formúl alebo dáva návod ako modifikovať predpoklady, aby z nich vyplývala daná formula a poskytuje mnoho ďalších zaujímavých vlastností (napr. abdukciu). Za tvorcov metódy sémantických tabiel možno pokladať trojicu matematikov a logikov E. W. Betha, J. Hintikku a R. Smullyana, ktorý ju vytvorili na prelome 50.-60. rokov minulého storočia (pozri obr. 1).

(A) E. W. Beth (B) J. Hintikka (C) R. Smullyan

Obr. 1. Tvorcovia techniky sémantických tabiel. (A) Belgický matematik a logik Evert Willem Beth (1908 –1964), ktorého práce podstatne ovplyvnili základy matematiky. (B) Fínsky filozof a logik Jaakko Hintikka (1929) patrí medzi významné osobnosti, ktoré sa zaslúžili o rozvoj modálnej logiky. (C) Americký matematik, filozof, logik a koncertný umelec Raymond Smullyan vytvoril modernú verziu sémantických tabiel.

1.1 Bethove sémantické tablá

Belgický logik a matematik E. W. Beth v r. 1955 [2,3] zaviedol ***sémantické tablá*** pre určenie toho, či daná výroková formula φ je tautológia alebo nie. Tento dôkaz bol vykonaný nepriamo tak, že dokazoval kontradikčnosť negácie $\neg\varphi$. Jeho postup nasledovne ilustrujeme pomocou dôkazu tautologičnosti známeho zákona výrokovej logiky „*reductio ad absurdum*“ $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$, ktorý sa často využíva v matematike pri dôkazu sporom, pozri tab 1.

Tabuľka je rozdelená na pravdivú a nepravdivú časť. V prvom riadku nepravdivej časti je umiestnená formula (1), vzhľadom k centrálnej spojke (implikácia v obdĺžniku) táto formula môže byť rozdelená na pravdivú (2) a nepravdivú (3) časť. Nepravdivú podformulu (3) prenesieme do pravdivej časti (4). Pravdivá podformula (2) s centrálnou spojkou konjunkciou je rozdelená na dve pravdivé podformuly (5) a (6). Pravdivá podformula (5) je rozdelená vzhľadom k centrálnej implikácii na pravdivú (7) a nepravdivú (8) podformulu. Podformula (8) je v kontradikcii s podformulou (4), takže stĺpec pod (8) je „uzavretý“ (ďalej už nie je predlžovaný). Podformula (6) je rozdelená na dve podformuly (9) a (10), ktoré sú umiestnené do stĺpca pod (7). Ľavý stĺpec je uzavretý, pretože (7) a (9) sú v kontradikcii. Podobne, aj pravý stĺpec je uzavretý, pretože (4) a (10) sú v kontradikcii. Môžeme teda konštatovať, že sme dokázali kontradikčnosť formuly $\neg\varphi = \neg\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(p \Rightarrow \neg q\right) \Rightarrow \neg p\right) \equiv \left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(p \Rightarrow \neg q\right) \wedge p$, čiže formula φ je tautológia.

Tabuľka 1. Bethovo sémantické tablo pre formulu $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$

<table>
<tr><td colspan="4">nepravdivá</td></tr>
<tr><td colspan="4">(1) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \boxed{\Rightarrow} \neg p$</td></tr>
<tr><td colspan="3">pravdivá</td><td>nepravdivá</td></tr>
<tr><td colspan="3">(2) $(p \Rightarrow q) \boxed{\wedge} (p \Rightarrow \neg q)$</td><td>(3) $\neg p$</td></tr>
<tr><td colspan="3">(4) p</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">(5) $p \boxed{\Rightarrow} q$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">(6) $p \boxed{\Rightarrow} \neg q$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pravdivá</td><td>nepravdivá</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(7) q</td><td>(8) p</td><td></td></tr>
<tr><td>pravdivá</td><td>nepravdivá</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(9) $\neg q$</td><td>(10) p</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ako vyplýva z tohto jednoduchého ilustračného príkladu, použitie Bethovej techniky sémantických tabiel je pomerne ťažkopádne a neprehľadné. Avšak už Beth ukázal úzky vzťah medzi jeho sémantickými tablami a Gentzenovou prirodzenou dedukciou. Použil tzv. *princíp podformuly*, podľa ktorého, ak daná formula má dôkaz, potom aspoň jedna z jej hlavných podformúl (vzhľadom k centrálnej spojke formuly) musí byť dokázateľná, čo nie je nič iné ako Gentzenov rozšírený Hauptsatz [22]. Takže aplikujúc inverzný postup z Bethovho tabla, realizujeme prirodzenú dedukciu založenú na elementárnych transformáciách eliminácie a introdukcie konjunkcie alebo disjunkcie.

1.2 Hintikkov prístup modelových množín

Fínsky filozof a logik J. Hintikka [9,10] skoro súčasne s Bethom vypracoval alternatívnu sémantickú metódu, ktorá je založená na tzv. modelových množinách. Podobne ako Beth, aj jeho primárnym záujmom bolo dokázať tautologičnosť formuly φ tak, že negácia $\neg\varphi$ je kontradikcia. Hlavnou výhodou jeho prístupu bola skutočnosť, že požitá metóda je ľahko aplikovateľná nielen pre výrokovú logiku ale aj pre modálne logiky.

Hintikkov prístup je založený na ***modelových množinách***, ktoré sú špecifikované takto: Nech τ je daný model výrokovej formuly (pravdivostná interpretácia výrokových premenných), k tomuto modelu priradíme množinu formúl, ktoré sú pravdivé pre interpretáciu-model

$$\mu = \left\{ \varphi; val_\tau(\varphi) = 1 \right\}$$

t. j. modelová množina μ obsahuje formuly, ktoré sú pravdivé v rámci modelu *M*. Pomocou tohto formalizmu môžeme formulovať tieto tri tvrdenia

(a) $(\neg\varphi \in \mu) \equiv (\varphi \notin \mu)$ $\quad$ (φ je atomická premenná)

(b) $((\varphi \wedge \psi) \in \mu) \equiv ((\varphi \in \mu) \wedge (\psi \in \mu))$

(c) $((\varphi \vee \psi) \in \mu) \equiv ((\varphi \in \mu) \vee (\psi \in \mu))$

(d) $((\varphi \Rightarrow \psi) \in \mu) \equiv ((\neg\varphi \in \mu) \vee (\psi \in \mu))$

Pomocou jednoduchého ilustračného príkladu ukážeme ako Hintikkova metóda „pracuje“. Opäť budeme študovať formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$, jej negácia má tvar konjunkcie, $\neg\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge p$. Predpokladajme, že $\neg\varphi \in \mu$

$$((p \Rightarrow q) \boxed{\wedge} ((p \Rightarrow \neg q) \wedge p)) \in \mu \tag{12}$$

Použitím (b) na centrálnu spojku konjunkcie dostaneme

$$(p \boxed{\Rightarrow} q) \in \mu \tag{13}$$

$$((p \Rightarrow \neg q) \boxed{\wedge} p) \in \mu \tag{14}$$

Aplikáciou (d) na (13) dostaneme

$$(\neg p \in \mu) \vee (q \in \mu) \tag{15}$$

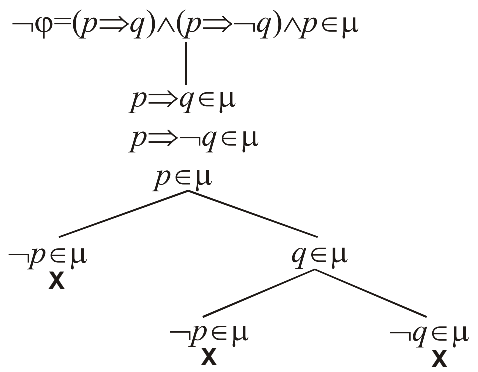
Podobne, aplikáciou (b) na (14) dostaneme

$$(p \Rightarrow \neg q) \in \mu \tag{16}$$

$$p \in \mu \tag{17}$$

Konečne, použitím (d) na (16) dostaneme

$$(\neg p \in \mu) \vee (\neg q \in \mu) \tag{18}$$



Obr. 2. Diagramatická reprezentácia postupu rozkladu formuly $\neg\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge p$ pomocou vzťahov (a-d).

Pre názornosť vyjadríme túto postupnosť rozkladu formuly $\neg\varphi$ pomocou diagramu znázorneného na obr. 2 (pre úplnosť poznamenajme, že Hintikka tento diagram nepoužíval). Pomocou tohto obrázku ľahko zistíme, že takáto modelová množina neexistuje, existujúce kontradikcie $p \in \mu$, $\neg p \in \mu$ a $q \in \mu$, $\neg q \in \mu$ jednoznačne implikujú, že táto množina nemôže existovať. To potom znamená, že formula $\neg\varphi$ je kontradikcia (t. j. nikdy nie je pravdivá), čiže jej negácia (t. j. formula φ) je tautológia, čo bolo potrebné dokázať.

Môžeme konštatovať, že obe metódy, tak Bethova metóda, ako aj Hintikkova metóda, nie sú veľmi prívetivé k užívateľovi. Bethova metóda je založená na dvojstĺpcových tabuľkách (sémantických tablách), kde sa jednotlivé stĺpce rozdeľujú na ďalšie dva podstĺpce, atď. Hintikkova metóda založená na modelovej množine je tiež pomerne ťažkopádna. Obe metódy vyžadujú formálne a notačné zjednodušenie, ktoré by ich urobilo viac prívetivými k užívateľovi.

1.3 Smullyanov diagramatický prístup

Americký filozof a logik R. J. Smullyan [19-21] podstatne zjednodušil metódu sémantických tabiel (ktoré nazýval analytické tablá, čím chcel zdôrazniť skutočnosť, že metóda je založená na rozklade formúl na dve podformuly špecifikované centrálnou logickou spojkou) do tvaru, ktorý sa používa aj v súčasnosti. Začneme so špecifikáciou Smullyanovho *označeného systému*, kde každá formula je označená buď *T* (pravdivá) alebo *F* (nepravdivá). Označené formuly pôsobia buď konjunktívne alebo disjunktívne, pričom konjunktívne formuly sú zoskupené do formúl *typu A* a disjunktívne formuly sú zoskupené do formúl *typu B*. Skupina typu *A* obsahuje formuly α_1 a α_2, zatiaľ čo skupina typu *B* obsahuje formuly β_1 a β_2. Podobným spôsobom, v ktorom sa nepoužívajú písmena *T* a *F* pre označenie formúl, sú špecifikované aj neoznačené formuly. Smullyan definoval tak pre označené ako aj neoznačené formuly dve tabuľky (pozri tab. 2, 3 a 4)

Tabuľka 2. Formuly typu A

α	α_1	α_2
$T(\varphi\wedge\psi)$	$T\varphi$	$T\psi$
$F(\varphi\vee\psi)$	$F\varphi$	$F\psi$
$F(\varphi\Rightarrow\psi)$	$T\varphi$	$F\psi$
$T(\neg\varphi)$	$F\varphi$	
$F(\neg\varphi)$	$T\varphi$	
$(\varphi\wedge\psi)$	φ	ψ
$\neg(\varphi\vee\psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi\Rightarrow\psi)$	φ	$\neg\psi$
$\neg\neg\varphi$	φ	

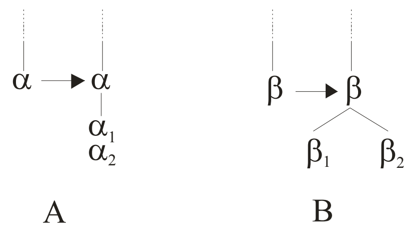
Tabuľka 3. Formuly typu B

β	β_1	β_2
$F(\varphi\wedge\psi)$	$F\varphi$	$F\psi$
$T(\varphi\vee\psi)$	$T\varphi$	$T\psi$
$T(\varphi\Rightarrow\psi)$	$F\varphi$	$T\psi$
$\neg(\varphi\wedge\psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$(\varphi\vee\psi)$	φ	ψ
$(\varphi\Rightarrow\psi)$	$\neg\varphi$	ψ

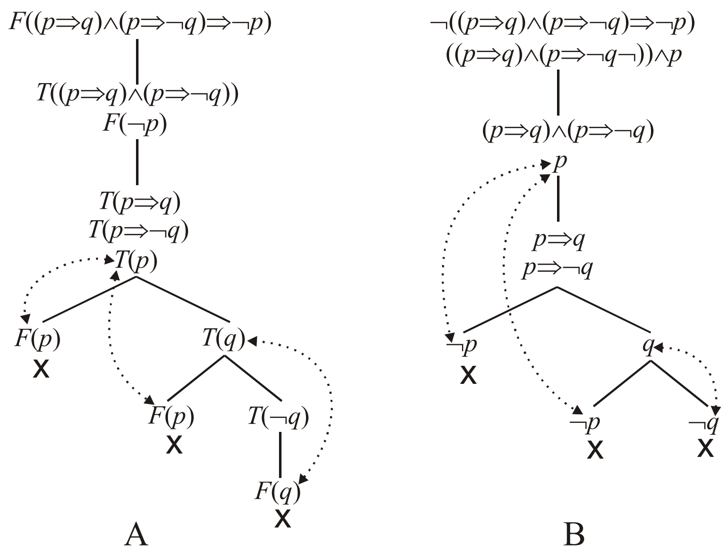
Tabuľka 4. Formuly typu B pre ekvivalenciu

β	β_1	β_2
$T(\varphi\equiv\psi)$	$T\varphi\wedge T\psi$	$F\varphi\wedge F\psi$
$F(\varphi\equiv\psi)$	$T\varphi\wedge F\psi$	$F\varphi\wedge T\psi$
$(\varphi\equiv\psi)$	$\varphi\wedge\psi$	$\neg\varphi\wedge\neg\psi$
$\neg(\varphi\equiv\psi)$	$\varphi\wedge\neg\psi$	$\neg\varphi\wedge\psi$

V Smullyanovej metóde sa postupne zostrojuje sémantické tablo vo forme koreňového stromu, kde úlohu koreňa hrá formula $\neg\varphi$, strom sa tvorí (predlžuje) tak, že pre A formuly sa strom nevetví (formuly sa píšu pod seba), zatiaľ čo pre B formuly dochádza k vetveniu stromu, každá vetva obsahuje jednu novú výslednú formulu (pozri obr. 3).



Obr. 3. Predlžovanie sémantického tabla podľa Smullyana. Diagram A znázorňuje predĺženie konjunktívnej A formy, diagram B znázorňuje predĺženie disjunktívnej B formy.



Obr. 4. Znázornenie sémantického tabla podľa Smullyana pre dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi=(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow\neg p$. Diagram A obsahuje označené formuly, diagram B obsahuje neoznačené formuly. Každá vetva sémantického tabla je označená symbolom X, t. j. formula φ je tautológia.

Ilustračný príklad použitia Smullyanovej metódy k dôkazu tautologičnosti formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ (ktorá sa nazýva v klasickej výrokovej logike „*reductio ad absurdum*“) je znázornený na obr. 4. Sémantické tablo v tomto prístupe je reprezentované koreňovým stromom, kde vrchným symbolom (koreňom) je ohodnotená formula $F(\varphi)$, použitím tab. 2-4 jednotlivé vrcholy predlžujeme, tento proces ukončíme vtedy, keď všetky koncové vrcholy stromu – tabla sú ohodnotené elementárne formuly neobsahujúce logické spojky. V prípade, že každá vetva tabla obsahuje dvojicu kontradiktórnych ohodnotených elementárnych formúl, danú vetvu označíme symbolom **x** (hovoríme, že daná vetva je uzavretá). V opačnom prípade, ak daná vetva neobsahuje dvojicu kontradiktórnych ohodnotených elementárnych formúl, potom túto vetvu označíme symbolom **o**, hovoríme, že daná vetva je otvorená. V prípade, že Smullyanovo sémantické tablo s vrcholom $F(\varphi)$ má všetky vetvy uzavreté, potom formula φ je tautológia.

2 Boolove funkcie

Formula výrokovej logiky $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, ktorá obsahuje *n* výrokových premenných (atomických formúl) $x_1, x_2, ..., x_n$, môže byť na sémantickej úrovni interpretovaná ako zobrazenie vektora binárnych argumentov na binárnu funkčnú hodnotu. Takéto zobrazenie sa nazýva ***Boolova funkcia*** [11]

$$\varphi : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \text{alebo} \quad y = \varphi(x_1, x_2, ...x_n) \tag{19}$$

ktorá priradí *n* binárnym premenným (argumentom $x_1, x_2, ...x_n$) binárnu funkčnú hodnotu *y*.

Pre lepšie pochopenie významu tohto prístupu pre výrokovú logiku uvažujme tento výrok, ktorý obsahuje štyri výrokové premenné

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(\big((x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \Rightarrow x_4)\big) \Rightarrow x_1\Big) \tag{20}$$

Táto „výroková funkcia“ má 16=2^4 rôznych špecifikácií premenných. Použitím tabuľkovej metódy môžeme vypočítať pravdivostné (funkčné) hodnoty tejto funkcie (pozri tab. 5).

Tabuľka 5. Boolova funkcia 4 premenných

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$
1	0	0	0	0	0
....					
16	1	1	1	1	1

K tomu, aby sme dostali teóriu Boolových funkcií do priamej súvislosti s výrokovou logikou, definujme elementárne Boolove funkcie 1- a 2-premenných, pomocou ktorých sa zostrojujú všeobecné Boolove funkcie (pozri tab. 6 a 7). Tretia unárna funkcia $u_3(x)$ reprezentuje výrokovú spojku negácie, ostatné tri unárne funkcie nemajú vo výrokovej logike analógiu.

Tabuľka 6. Unárne Boolove funkcie

#	x	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1
log. spojky			x	$\neg x$	

Tabuľka 7. Binárne Boolove funkcie

#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
log. spojky				$\wedge$		x_1		x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$		$\neg x_1$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	

Celkový počet binárnych Boolových funkcií je 16=2^4, avšak iba štyri z nich majú vo výrokovej logike svojich reprezentantov, v tab. 7 sú vyznačené tmavými stĺpcami.

Nech φ a ψ sú dve formuly výrokovej logiky s rovnakými výrokovými premennými, $\varphi=\varphi\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$ a $\psi=\psi\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$. Nech $\tau=\left(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n\right)\in\{0,1\}^n$ je interpretácia týchto výrokových premenných, t. j. pre každé $\tau\in\{0,1\}^n$ platí: $val_\tau\left(p_i\right)=\tau_i$. Tak napríklad, pre n = 3, premenné p_1,p_2,p_3 sú interpretované $\tau=(0,1,1)\in\{0,1\}^3$ takto: $val_\tau\left(p_1\right)=0$, $val_\tau\left(p_2\right)=1$, $val_\tau\left(p_3\right)=1$, t. j. premenná p_1 je nepravdivá a premenné p_2 , p_3 sú pravdivé.

Definícia 1.
Hovoríme, že formuly $\varphi=\varphi\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$ a $\psi=\psi\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$ sú (logicky) ***ekvivalentné***, čo zapisujeme $\varphi\sim\psi$, vtedy a len vtedy, ak ich pravdivostné hodnoty sú rovnaké pre každú interpretáciu $\tau\in\{0,1\}^n$,

$$\left(\varphi\sim\psi\right)=_{def}\left(\forall\tau\right)\left(val_\tau\left(\varphi\right)=val_\tau\left(\psi\right)\right) \tag{21}$$

Poznamenajme, že symbol ´~´ je binárna relácia a nie binárna logická spojka, aj keď svojou definíciou je veľmi blízka spojke ´≡´.

Pre naše ďalšie úvahy o význame teórie Boolových funkcií vo výrokovej logike zavedieme dva dôležité pojmy a ukážeme, že pomocou nich môže byť „analyticky“ vyjadrená každá Boolova funkcia, ktorá je špecifikovaná len tabuľkou svojich funkčných hodnôt (pozri tab. 5). Každá formula výrokovej logiky (a teda aj každá Boolova funkcia, ktorá používa len klasické binárne funkcie) môže byť prepísaná do ekvivalentného konjunktívneho alebo disjunktívneho tvaru. Práve tieto špeciálne tvary Boolových funkcií (alebo aj výrokových formúl) majú význam pre konštrukciu „analytických“ funkcií určených len tabuľkou. Zavedieme nasledujúcu terminológiu:

Definícia 2.

1. ***Literál*** je výroková premenná alebo jej negácia, t. j. $l = p$ alebo $l = \neg p$, dva literály l a l' sa nazývajú komplementárne, ak sú tvorené výrokovou premennou a jej negáciou, t. j. $l = p$ a $l' = \neg p$.
2. ***Konjunktívna klauzula*** je vytvorená pomocou konjunkcie literálov ($l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots$). Podobne, ***disjunktívna klauzula*** je vytvorená pomocou disjunkcie literálov ($l'_1 \vee l'_2 \vee \ldots$).
3. ***Konjunktívna normálna forma (KNF)*** je tvorená pomocou konjunkcie disjunktívnych klauzúl ($(l_1 \vee l_2 \vee \ldots) \wedge (l'_1 \vee l'_2 \vee \ldots) \wedge \ldots$). Podobne, ***disjunktívna normálna forma (DNF)*** je tvorená pomocou disjunkcie konjunktívnych klauzúl ($(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots) \vee (l'_1 \wedge l'_2 \wedge \ldots) \vee \ldots$).

Príklad 1. Príkladom disjunktívnej resp. konjunktívnej normálnej formy sú tieto dve formuly

$$\left(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4\right) \vee \left(\neg p_3 \wedge p_5 \wedge \neg p_6\right)$$

$$\left(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3\right) \wedge \left(\neg p_3 \vee p_5\right)$$

Ukážeme, že každá výroková formula φ (Boolova funkcia s klasickými spojkami) môže byť prepísaná do ekvivalentnej disjunktívnej resp. konjunktívnej normálnej formy, $\varphi \sim \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \sim \varphi_{KNF}$ tvaru. Tento postup je založený na použití disjunktívneho tvaru implikácie, De Morganových zákonov a distributívnych zákonov pre konjunkciu a disjunkciu. Uvažujme formulu $\varphi = \left(p \vee q\right) \Rightarrow \left(r \wedge \neg q\right)$, použitím disjunktívneho tvaru implikácie túto formulu prepíšeme do tvaru

$$\neg\left(p \vee q\right) \vee \left(r \wedge \neg q\right)$$

Aplikáciou De Morganovho zákona pre negáciu disjunkcie dostaneme požadovaný disjunktívny tvar

$$\varphi_{DNF} = \left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(r \wedge \neg q\right)$$

kde $\varphi \sim \varphi_{DNF}$. Podobne, ako v predošlom ilustračnom príklade, ukážeme, že každá výroková formula môže byť prepísaná taktiež aj do konjunktívneho tvaru. Budeme študovať rovnakú formulu ako v predošlom príklade, jej disjunktívny tvar $\left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(r \wedge \neg q\right)$ je ďalej upravovaný pomocou distributívnych zákonov pre konjunkciu a disjunkciu

$$\left(\left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(r \wedge \neg q\right)\right) \equiv \left(\neg p \vee \left(r \wedge \neg q\right)\right) \wedge \left(\neg q \vee \left(r \wedge \neg q\right)\right) \equiv$$
$$\left(\neg p \vee r\right) \wedge \left(\neg p \vee \neg q\right) \wedge \left(\neg q \vee r\right) \wedge \left(\neg q \vee \neg q\right) \equiv$$
$$\left(\neg p \vee r\right) \wedge \left(\neg p \vee \neg q\right) \wedge \left(\neg q \vee r\right) \wedge \neg q$$

Potom

$$\varphi_{KNF} = \left(\neg p \vee r\right) \wedge \left(\neg p \vee \neg q\right) \wedge \left(\neg q \vee r\right) \wedge \neg q$$

Veta 1.
(1) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***disjunktívnej normálnej formy*** $\varphi_{DNF} \sim \varphi$

$$\forall\varphi\,\exists\varphi_{DNF}\left(\varphi \sim \varphi_{DNF}\right) \tag{22}$$

(2) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***konjunktívnej normálnej formy*** $\varphi_{KNF} \sim \varphi$

$$\forall\varphi\,\exists\varphi_{KNF}\left(\varphi \sim \varphi_{KNF}\right) \tag{23}$$

Disjunktívna normálna forma pre kontradikciu (konštantná formula vždy nepravdivá) je tvorená disjunkciou konjunktívnych klauzúl, z ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{DNF} = \left(\underbrace{l \wedge \tilde{l}}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \left(\underbrace{l' \wedge \tilde{l}'}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \ldots \equiv 0$. Podobne, konjunktívna normálna forma pre tautológiu (konštantná formula vždy pravdivá) je tvorená konjunkciou disjunktívnych klauzúl, u ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{KNF} = \left(\underbrace{l \vee \tilde{l}}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \left(\underbrace{l' \vee \tilde{l}'}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \ldots \equiv 1$. Tieto zaujímavé vlastnosti môžeme zhrnúť do nasledujúcej vety.

Veta 2.
(1) Formula φ je kontradikcia práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.
(2) Formula φ je tautológia práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

Prvý alternatívny dôkaz vety 1: upriamime našu pozornosť najprv na konštrukciu ekvivalentnej formuly v disjunktívnom tvare. Budeme uvažovať len tie interpretácie premenných τ, ktoré vytvárajú jednotkovú pravdivostnú hodnotu formuly φ, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi)=1$. Podobne pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right)=1\right) \\ \neg x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right)=0\right) \end{cases} \tag{24}$$

Konjunkcia týchto premenných môže byť chápaná ako pomocná Boolova funkcia

$$\psi_\tau\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{25}$$

Táto konjunkcia má jednotkovú funkčnú hodnotu (je pravdivá) len pre také hodnoty premenných, ktoré sú totožné s binárnymi hodnotami interpretácie τ, pre všetky ostatné hodnoty premenných je funkčná pravdivostná hodnota nulová. Potom disjunktívna forma funkcie φ_{DNF}, ktorá je ekvivalentná formule φ, $\varphi_{DNF} \sim \varphi$, má tvar

$$\varphi_{DNF} = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{26}$$

kde disjunkcia beží cez všetky τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi) = 1$.

Analogickým spôsobom zostrojíme aj konjunktívnu formu φ_{KNF} formuly φ, kde $\varphi_{KNF} \sim \varphi$. V tomto prípade budeme uvažovať len také interpretácie τ, ktoré majú nulovú pravdivostnú funkčnú hodnotu, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi) = 0$. Definujme pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$\tilde{x}_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 0) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 1) \end{cases} \tag{27}$$

Disjunkcia týchto premenných tvorí pomocnú Boolovu funkciu

$$\tilde{\psi}_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{28}$$

Konjunktívna forma φ_{KNF} je

$$\varphi_{KNF} = \bigwedge_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=0)}} \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{29}$$

kde konjunkcia beží cez všetky špecifikácie τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi) = 0$.

To, akým spôsobom zostrojíme Boolovu funkciu, či v disjunktívnej alebo konjunktívnej forme, je určené počtom jednotkových resp. nulových funkčných hodnôt. Tak napr. ak v tabuľke sú dominantné nulové (jednotkové) funkčné hodnoty, potom je výhodné použiť konjunktívnu (disjunktívnu) normálnu formu, týmto výberom sa minimalizuje rozsah zostrojovanej formy. V prípade, keď tabuľka obsahuje približne rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt, konštrukcia Boolovej funkcie je približne rovnako obťažná v oboch formách.

Príklad 2. Vykonajte konštrukciu Boolových funkcií, ktoré sú určené funkčnými hodnotami uvedenými v tab. 8, v disjunktívnej a/alebo konjunktívnej forme pomocou formúl (26) a (29).

Tabuľka 8. Určenie dvoch formúl α a β pomocou funkčných hodnôt

#	x_1	x_2	x_3	α	β
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	0	1

V prvom kroku vykonáme konštrukciu formuly α, ktorej funkčné hodnoty sú určené v tab. 8. V tomto prípade počet výskytov jednotkových funkčných hodnôt je podstatne menší ako nulových hodnôt, preto konštrukciu vykonáme v disjunktívnej forme. Ku konštrukcii použijeme teda len riadky 3 a 6, interpretácie premenných sú $\tau_3 = (x_1/0, x_2/1, x_3/0)$ a $\tau_6 = (x_1/1, x_2/0, x_3/1)$. Príslušné konjunkcie $\psi_\tau(x_1, x_2, ..., x_n)$ (25) majú tvar

$$\psi_{\tau_3}(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$$

$$\psi_{\tau_6}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$$

Použitím (26) dostaneme konečný tvar zostrojovanej formy

$$\alpha = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$$

V druhom kroku vykonáme konštrukciu konjuktívnej formy formuly β, ktorej funkčné hodnoty sú špecifikované tabuľkou 8. Príslušné interpretácie τ, ktoré sú priradené nulovým funkčným hodnotám majú tvar: $\tau_3 = (x_1/0, x_2/1, x_3/0)$ a $\tau_7 = (x_1/1, x_2/1, x_3/0)$. Týmto interpretáciám sú podľa (28) priradené disjunkcie

$$\tilde{\psi}_{\tau_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$$

$$\tilde{\psi}_{\tau_7}(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$$

Použitím (29) dostaneme konečný tvar zostrojovanej konjuktívnej formy

$$\beta = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Druhý alternatívny dôkaz vety 1: použijeme metódu z príkladu 1. Táto metóda spočíva v tom, že formulu φ postupne prepisujeme do tvaru φ_{DNF} pomocou známych ekvivalencií výrokovej logiky, akými sú De Morganove zákony a distributívne zákony medzi disjunkciou a konjunkciou. Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom k syntaktickému stromu formuly φ. V tabuľke 9 sú uvedené základné formuly pre prepis do tvaru DNF.

Tabuľka 9. Elementárne transformácie prepisu formuly φ na φ_{DNF}.

#	Pôvodná formula		Transformovaná formula
1	$(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge (\beta)$
2	$(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \vee (\beta)$
3	$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee (\beta)$
4	$(\alpha \equiv \beta)$	$\rightarrow$	$(\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)) \vee ((\alpha) \wedge (\beta))$
5	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \vee \neg(\beta)$
6	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	$\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
7	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha) \wedge \neg(\beta)$

8	$\neg(\alpha \equiv \beta)$	$\rightarrow$	$(\neg(\alpha)\wedge(\beta))\vee((\alpha)\wedge\neg(\beta))$
9	$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$
10	$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$	$\rightarrow$	$(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$

Prvé štyri riadky tejto tabuľky obsahujú transformácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Ďalšie štyri transformácie 5-8 obsahujú transformácie negácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Posledné dve transformácie 9 a 10 reprezentujú použitie distributívnych zákonov medzi konjunkciou a disjunkciou, ktoré musia byť použité k zjednodušeniu upravovanej formuly.

Príklad 3. Vykonajte transformáciu formuly

$$\varphi=(p\equiv q)\wedge(r\vee\neg(r\vee\neg p))$$

do tvaru DNF pomocou elementárnych transformácií z tabuľky 9. Tento prepis bude vykonaný pre názornosť ako postupnosť elementárnych krokov:

Krok 1: Centrálna konjunkcia (tvoriaca koreň príslušného syntaktického stromu) v φ je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 1

$$\varphi=\left(\underbrace{(p\equiv q)}_{\alpha}\wedge\underbrace{(r\vee\neg(r\vee\neg p))}_{\beta}\right)$$

$$\downarrow$$

$$(p\equiv q)\wedge(r\vee\neg(r\vee\neg p))$$

Krok 2: Centrálna spojka ekvivalencie na ľavej strane je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 4 a centrálna spojka disjunkcie pravej strane je prepísaná pomocou 2 a 6

$$\left(\underbrace{(p)}_{\alpha}\equiv\underbrace{(q)}_{\beta}\right)\wedge\left(\underbrace{(r)}_{\gamma}\vee\underbrace{(\neg(r\vee\neg p))}_{\delta}\right)$$

$$\downarrow$$

$$((\neg(p)\wedge\neg(q))\vee((p)\wedge(q)))\wedge((r)\vee(\neg(r)\wedge\neg(\neg p)))$$

$$\downarrow$$

$$((\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q))\wedge((r)\vee(\neg r\wedge p))$$

Krok 3: Centrálna spojka konjunkcie je prepísaná (roznásobená) pomocou 9

$$\underbrace{\left((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\right)}_{\alpha} \wedge \left(\underbrace{(r)}_{\beta} \vee \underbrace{(\neg r \wedge p)}_{\gamma}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(\underbrace{(\neg p \wedge \neg q)}_{\beta} \vee \underbrace{(p \wedge q)}_{\gamma}\right) \wedge \underbrace{r}_{\alpha}\right) \vee \left(\left(\underbrace{(\neg p \wedge \neg q)}_{\beta'} \vee \underbrace{(p \wedge q)}_{\gamma'}\right) \wedge \underbrace{(\neg r \wedge p)}_{\alpha'}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)\right) \vee \left(\underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{0} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge \neg r \wedge p)}_{p \wedge q \wedge \neg r}\right)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

To znamená, že výsledná formula φ_{DNF} je určená poslednou formulou z predchádzajúcej schémy formúl

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

Pomocou tohto jednoduchého ilustratívneho príkladu sme ukázali, že každá formula výrokovej logiky môže byť prepísaná do ekvivalentného DNF tvaru pomocou postupnosti elementárnych transformácií z tabuľky 9. Spôsob dôkazu vety 1 môže byť charakterizovaný ako úplná indukcia vzhľadom k syntaktickému stromu danej formuly. Idúc zhora nadol, vždy pomocou vhodnej elementárnej transformácie z tabuľky 9 vykonáme vhodný prepis formuly tak, aby bol bližšie k tvaru DNF formuly. Poznamenajme, že analogický dôkaz môže byť vykonaný aj pre konštrukciu KNF formuly.

Podľa vety 1 ku každej výrokovej formule φ existuje jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi \sim \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \sim \varphi_{KNF}$. V mnohých prípadoch, tento tvar formuly je zbytočne zložitý, použitím jednoduchých vlastností konjunkcie a disjunkcie (napr. $p \wedge p \equiv p$ a $p \wedge 1 \equiv p$) môžeme formulu podstatne zjednodušiť do ekvivalentného tvaru DNF alebo KNF. Podľa vety 2 formula φ je kontradikcia (tautológia) práve vtedy, ak jej DNF (KNF) tvar obsahuje v každej klauzule dvojicu komplementárnych literálov. Potom taktiež formula φ je *splniteľná* práve vtedy, ak jej DNF tvar obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad 4. Pretransformujte formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ a $\psi = \neg\varphi$ do DNF resp. do KNF.

$$\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$

Použitím distribučných zákonov pre disjunkciu a konjunkciu získame tieto ekvivalentné formuly

$$\varphi_{DNF} = (\neg p) \vee (q) \vee (\neg q)$$

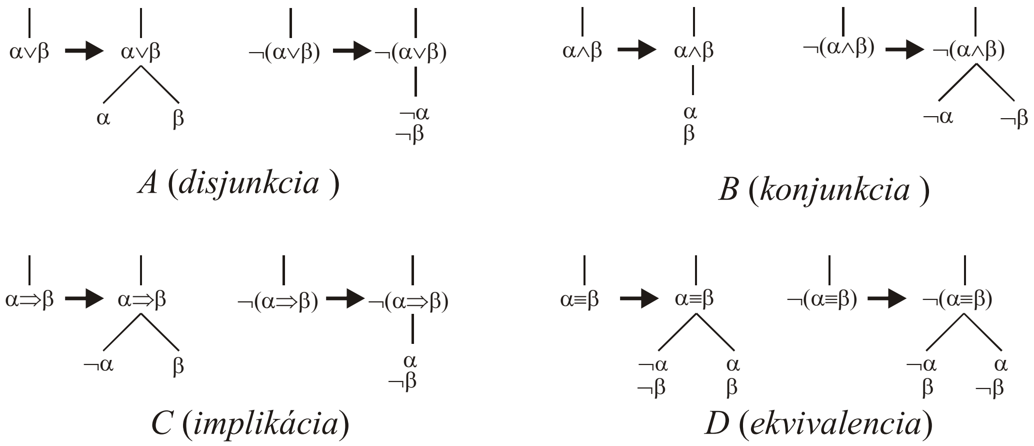
$$\varphi_{KNF}=\left(\underbrace{p\vee\neg p}_{1}\vee q\right)\wedge\left(\neg p\vee\underbrace{q\vee\neg q}_{1}\right)\equiv 1$$

podobným spôsobom zostrojíme aj ekvivalentné funkcie pre ψ

$$\psi_{DNF}=\left(\underbrace{p\wedge\neg p}_{0}\wedge\neg q\right)\vee\left(p\wedge\underbrace{q\wedge\neg q}_{0}\right)\equiv 0$$

$$\psi_{KNF}=(p)\wedge(q)\wedge(\neg q)$$

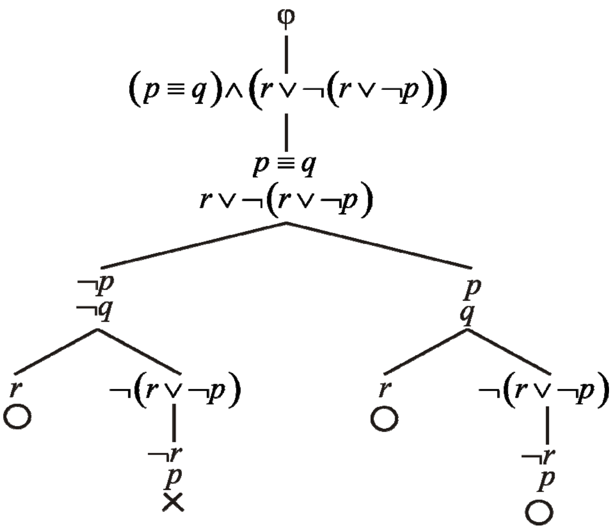
Pre funkciu φ jej ekvivalentná funkcia φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia φ je tautológia. Podobne, pre funkciu ψ jej ekvivalentná funkcia ψ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia ψ je kontradikcia.



Obr. 5. Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde sémantických tabiel. (A) Rozklad disjunkcie a jej negácie, (B) rozklad konjunkcie a jej negácie, (C) rozklad implikácie a jej negácie, a (D) rozklad ekvivalencie a jej negácie. Tieto schémy „predlžovania“ sémantického stromu majú svoj základ v Tab. 9, ktorá obsahuje pravidlá pre transformáciu formuly φ do DNF tvaru.

3 Metóda sémantických tabiel vo výrokovej logike

Proces transformácie formuly φ do DNF tvaru môže byť reprezentovaný koreňovým stromom (nazývaným ***sémantické tablo***), ktorý je vytváraný použitím vhodných predĺžení z obr. 5. Aplikáciou týchto pravidiel zostrojíme sémantické tablo (koreňový strom) pre transformáciu formuly φ do DNF, pozri obr. 6. Tie vetvy stromu, ktoré obsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ′×′ a nazývajú sa ***uzavreté vetvy***. Podobne, tie vetvy, ktoré neobsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ′○′ a nazývajú sa ***otvorené vetvy***. Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetvy, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***, v opačnom prípade, ak obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom sa nazýva ***otvorené sémantické tablo***. Sémantické tablo priradené formule φ je označené $\mathcal{T}(\varphi)$.



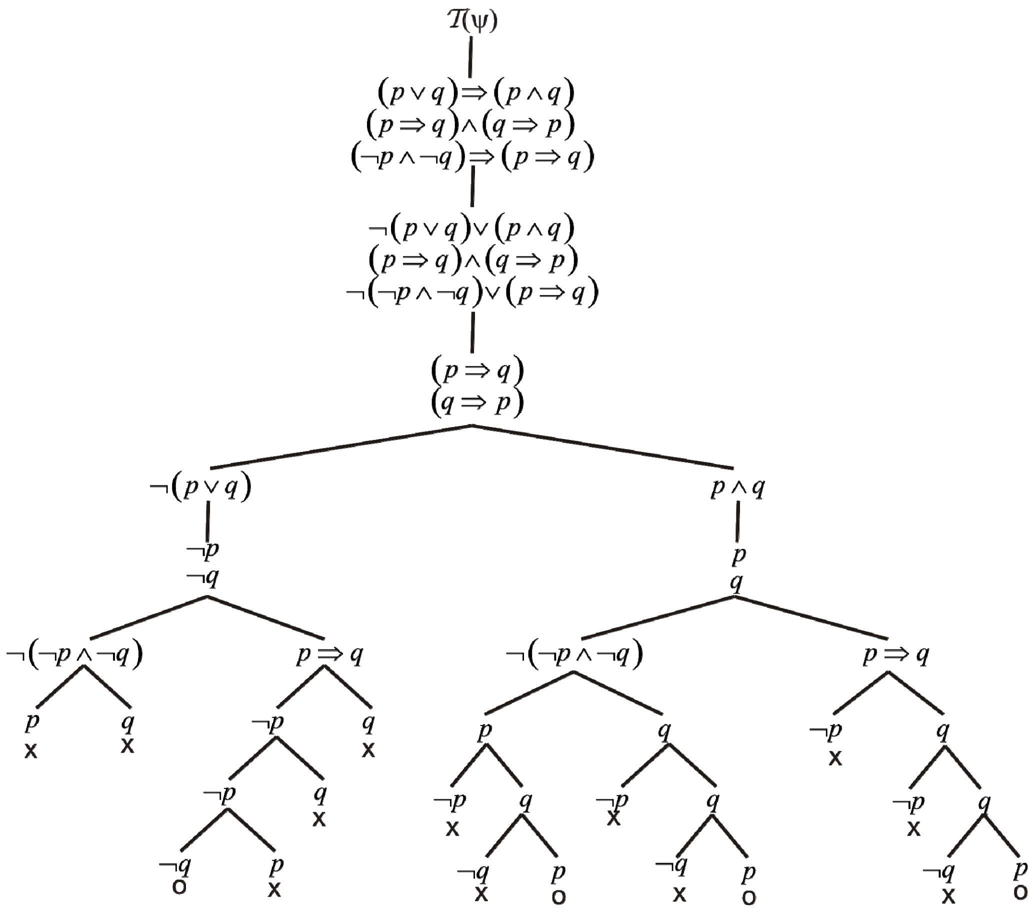
Obr. 6. Sémantické tablo pre formulu $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ z príkladu 5. Metóda presne kopíruje transformáciu formuly do DNF tvaru (jednotlivé kroky tejto transformácie sú uvedené v príklade 3). Koncový vrchol označený symbolom ´×´ znamená, že príslušná vetva stromu je uzavretá a nepravdivá (obsahuje komplementárne literály). Koncový vrchol označený symbolom ´○´ znamená, že príslušné vetvy sú otvorené a môžu byť jednoznačne priradené konjunktívnym klauzulám z $\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$. V tomto prípade existujú špecifikácie premenných $\tau_1 = (p/0, q/0, r/1)$, $\tau_2 = (p/1, q/1, r/1)$ a $\tau_3 = (p/1, q/1, r/0)$, pre ktoré je formula pravdivá.

Príklad 5. Zostrojte sémantické tablo pre formulu $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$. Zostrojené sémantické tablo (pozri obr. 6) je otvorené, z čoho priamo vyplýva, že formula φ je splniteľná.

Na základe platnosti vety 2 môžeme formulovať vetu platnú pre sémantické tablá

Veta 3.
(1) Ak $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté (otvorené) sémantické tablo, potom formula φ je kontradikcia (splniteľná).
(2) Ak $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté sémantické tablo, potom formula φ je tautológia; v prípade, že semantické tablo obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom formula φ nie je tautológia.

Druhá vlastnosť tejto vety úzko súvisí s prvou vlastnosťou. Keď chceme zistiť, či formula φ je tautológia, potom zostrojíme sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, ak je toto tablo uzavreté, potom formula $\neg\varphi$ podľa prvej vlastnosti je kontradikcia, alebo formula φ je tautológia. Môžeme teda konštatovať, že v rámci techniky sémantických tabiel tautologičnosť formuly φ sa zistí nepriamo tak, že tak, že ak pre formulu ¬φ zistíme je kontradikčnosť, potom pôvodná formula φ je tautológiou.



Obr. 7. Sémantické tablo $\mathcal{T}(\psi)$ z príkladu 6 pre konjunkciu $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$, kde formuly z konjunkcie sú z teórie $\boldsymbol{T} = \{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$. Pomocou otvorených vetví môžeme zostrojiť model $M(\boldsymbol{T}) = \{\boldsymbol{\tau}_1 = (p/1, q/1), \boldsymbol{\tau}_2 = (p/0, q/0)\}$.

Príklad 6. Pre teóriu $\boldsymbol{T} = \{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$ zostrojte pomocou sémantického tabla model $M(\boldsymbol{T})$. Ak jednotlivé formuly z tejto teórie označíme symbolmi φ_1, φ_2, resp. φ_3, potom ich konjunkcia $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ tvorí koreň sémantického tabla zobrazeného na obr. 7. Tablo obsahuje štyri otvorené cesty, pričom tri obsahujú rovnaké literály, týmto otvoreným cestám môžeme priradiť interpretácie $\boldsymbol{\tau}_1=(p/1,q/1)$ a $\boldsymbol{\tau}_2=(p/0,q/0)$, potom model tejto teórie obsahuje tieto dve interpretácie

$$M(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{\tau}_1=(p/1,q/1),\boldsymbol{\tau}_2=(p/0,q/0)\}$$

Veta 4.
(1) Teória $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je konzistentná práve vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$ je otvorené. Model $M(\boldsymbol{T})$ teórie $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je tvorený interpretáciami literálov z otvorených vetiev.
(2) Teória $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je nekonzistentná práve vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$ je uzavreté.

V čom spočíva výhoda sémantického tabla pred formálnymi manipuláciami s formulou φ, ktoré ju transformujú do DNF tvaru? Aplikácia distribučných zákonov pri úprave formuly do DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metóde konštrukcie sémantického tabla. Druhý, nemenej dôležitý aspekt konštrukcie je uzavretie tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetvy už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná. Prípadné ďalšie výskyty dvojíc komplementárnych literálov už nemení nič na skutočnosti, že daný konjunkt v DNF je nepravdivý. Preto táto možnosť „okamžitého" uzavretia vetvy pri konštrukcii sémantického tabla obvykle patrí medzi významné zjednodušenia jeho konštrukcie, celé veľké podstromy v sémantickom table môžu byť ignorované ako nevýznamné.

Vo výrokovej logike je dokázané, že formula φ je logickým dôsledkom množiny predpokladov (teórie) $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, $\boldsymbol{T}\vdash\varphi$, vtedy a len vtedy, ak $\vdash\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\Rightarrow\varphi$, t. j. keď táto formula logicky vyplýva z axiomatického systému výrokovej logiky. Pomocou sémantických tabiel je problém $\vdash\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\Rightarrow\varphi$ formulovateľný veľmi efektívne pomocou vety:

Veta 5.
Formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, $\boldsymbol{T}\vdash\varphi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\psi)$, kde $\neg\psi=\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\Rightarrow\varphi)\equiv$ $\equiv(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\wedge\neg\varphi)$, je uzavreté.

Táto veta je priamym dôsledkom skutočnosti, že metóda sémantického tabla je vlastne špecifický spôsob prepisu formuly do DNF pomocou operácií, ktoré sú ekvivalencie (napr. De Morganove relácie, distributívne vzťahy medzi disjunkciou a konjunkciou a pod.). Čiže môžeme konštatovať, že pre danú formulu φ je prepis na φ_{DNF} čisto syntaktický prístup, ktorý nepoužíva žiadne sémantické interpretácie.

Príklad 7. Koná sa oslava, Ján, Júlia, Klára a Štefan sú potenciálni účastníci tejto oslavy. K tomu, aby sme mohli zapísať študovaný problém pomocou formúl výrokovej logiky, zavedieme tejto štyri výroky:

p	*Ján pôjde na oslavu*
q	*Júlia pôjde na oslavu*
r	*Klára pôjde na oslavu*
s	*Štefan pôjde na oslavu*

Avšak, ako to často býva, ich účasť je ohraničenú troma podmienkami

$p \vee q$	Ján alebo Júlia pôjdu na oslavu.
$q \Rightarrow (r \wedge s)$	Ak Júlia pôjde na oslavu, potom na oslavu pôjde tak Klára ako aj Štefan.
$\neg p \Rightarrow s$	Ak nepôjde na oslavu Ján, potom pôjde na oslavu Štefan.

Našim cieľom je zistiť, za akých podmienok sa Štefan zúčastní oslavy, t.j. budeme riešiť problém, kedy z teórie

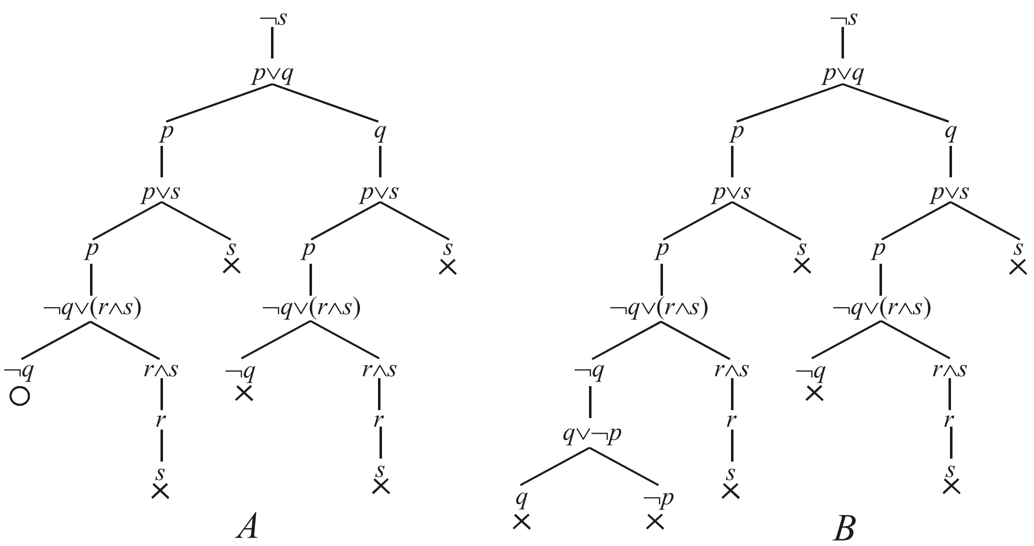
$$\boldsymbol{T} = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \neg s), \neg p \Rightarrow s\}$$

vyplýva, že Štefan sa zúčastní oslavy, $\boldsymbol{T} \vdash s$, alebo ekvivalentné vyjadrené takto pomocou formuly (pozri vetu 5)

$$((p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \wedge (\neg p \Rightarrow s)) \Rightarrow s$$

Túto formulu môžeme jednoducho prepísať pomocou jej negácie do tvaru

$$(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \wedge (\neg p \Rightarrow s) \wedge \neg s \tag{30}$$



Obr. 8. (A) Otvorené sémantické tablo zostrojené pre teóriu ***T*** špecifikovanú (30) z príkladu 7, (B) uzavreté sémantické tablo zostrojené pre rozšírenú teóriu (31) z rovnakého príkladu.

Aplikujeme metódu sémantických tabiel k analýze kontradikčnosti formuly (30), aby sme zjednodušili generované sémantické tablo, v prvom kroku odstránime z formule implikácie

$$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee (r \wedge \neg s)) \wedge (p \vee s) \wedge \neg s$$

Príslušný strom sémantického tabla $\mathcal{T}$ je znázornený na obr. 8, diagram A. Toto sémantické tablo nie je uzavreté, obsahuje jednu vetvu, ktorá je otvorená, čiže formula (30) nie je kontradikciou, je len splniteľná. To znamená, že neplatí $\boldsymbol{T} \vdash s$, t.j. výrok s nie je logickým dôsledkom teórie ***T***.

Môžeme si položiť zaujímavú otázku, ako rozšíriť teóriu ***T*** na novú teóriu ***T*′** (kde $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{T}'$), aby výrok s už bol dôsledkom tejto novej teórie. K tomuto účelu nám dobre poslúži sémantické tablo $\mathcal{T}$ z obr. 8, diagram A. Našim cieľom bude také rozšírenie teórie ***T***, aby otvorené vetvy tabla sa stali uzavretými. Teóriu rozšírime o tento výrok

$\neg q \Rightarrow \neg p$	Ak Júlia nepôjde na oslavu, potom aj Ján nepôjde na oslavu.

Rozšírená teória má tvar

$$\boldsymbol{T}' = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \neg s), \neg p \Rightarrow s, \neg q \Rightarrow \neg p\} \tag{31}$$

potom formula (30) je rozšírená o príslušnú konjunkciu, ktorá je priradená novej podmienke z rozšírenej teórie ***T*′**

$$(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \wedge (\neg p \Rightarrow s) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg s$$

Sémantické tablo pre túto formulu je znázornené na obr. 8, diagram B. Z obrázku vidíme, že sémantické tablo pre takto rozšírenú teóriu (31) sa už sa stalo uzavretým, $\boldsymbol{T}' \vdash s$.

Z tohto jednoduchého príkladu vyplýva, že metóda sémantického tabla je vhodným prístupom vtedy, keď sa snažíme rozšíriť danú teóriu tak, aby nové rezultujúce tablo bolo už uzavreté, zo stromovej štruktúry tabla sa dá jednoducho odvodiť, akým spôsobom sa má vykonať také rozšírenie teórie, aby sémantické tablo bolo uzavreté. Detaily tohto prístupu budú špecifikované v odseku 3.2 v rámci štúdia abdukcie vo výrokovej logike.

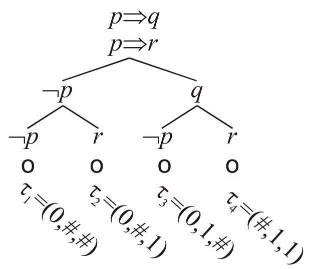
3.1 Konštrukcia tautologického vyplývania pomocou sémantických tabiel

Prvú úlohu, ktorú budeme riešiť v tomto aplikačnom odseku kapitoly, bude úloha zostrojiť pomocou sémantických tabiel model *M*(***T***), ktorý je množinou pravdivých interpretácií formúl z teórie $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

$$M(\boldsymbol{T}) = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\} \tag{32}$$

Danú úlohu rieši veta 4, podľa ktorej interpretácie z množiny $M(\boldsymbol{T}) = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$ sú určené pomocou otvorených vetví sémantického tabla

$\mathcal{T}\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\right)$, pričom každej otvorenej vetve môžeme priradiť interpretáciu $\tau \in M\left(\boldsymbol{T}\right)$, pre ktorú sú všetky literály na danej vetve pravdivé.



Obr. 9. Sémantické tablo $\mathcal{T}\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right)$ pre teóriu $\boldsymbol{T} = \left\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\right\}$, v tomto prípade každá vetva je otvorená, čiže môžeme k nej priradiť interpretáciu τ_i, pre i = 1, 2, 3, 4.

Príklad 8. Uvažujme teóriu $\boldsymbol{T} = \left\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\right\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu $M\left(\boldsymbol{T}\right)$. Podľa vety 4 zostrojíme sémantické tablo pre konjunkciu formúl z teórie $\boldsymbol{T}$, ktoré je znázornené na obr. 9. Teória $\boldsymbol{T}$ má štyri interpretácie, pre ktoré sú všetky formuly pravdivé

$$\tau_1 = \left(0, \#, \#\right)$$
$$\tau_2 = \left(0, \#, 1\right)$$
$$\tau_3 = \left(0, 1, \#\right)$$
$$\tau_4 = \left(\#, 1, 1\right)$$

kde symbol ´#´ znamená ľubovoľný znak 0/1. Ľahko sa presvedčíme, že pre takto špecifikované interpretácie, formuly z teórie $\boldsymbol{T}$ sú pravdivé.

Ak poznáme množinu $M\left(\boldsymbol{T}\right)$, potom môžeme upriamiť našu pozornosť na konštrukciu formuly φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in M\left(\boldsymbol{T}\right)$, t. j. je tautologickým dôsledkom teórie $\boldsymbol{T}$. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\tau = \left(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a\right) \in M\left(\boldsymbol{T}\right)$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & \left(ak\ \tau_i = 1\right) \\ \neg p_i & \left(ak\ \tau_i = 0\right) \\ 1 & \left(ak\ \tau_i = \#\right) \end{cases} \tag{33}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (24) a (25))

$$\psi_\tau\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{34}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \bigvee_{\tau \in M(\mathbf{T})} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{35}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in M(\boldsymbol{T})$

$$\left(\forall \tau \in M(\boldsymbol{T})\right)\left(val_\tau(\varphi)=1\right) \tag{36}$$

Týmto sme dokázali, že funkcia (35) je logický dôsledok teórie $\boldsymbol{T}$, t. j. $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$.

Veta 6.
Ak teória $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je konzistentná, t. j. $M(\boldsymbol{T}) \neq \emptyset$, potom môžeme zostrojiť pomocou (35) takú formulu φ, ktorá je logickým dôsledkom teórie $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$.

Pomocou tejto vety môžeme teda zostrojiť „minimálny tvar“ formuly φ, ktorá tautologicky vyplýva z teórie $\boldsymbol{T}$. Môžeme rôznym spôsobom rozšíriť túto formulu φ do tvaru φ_{ext}, ktorý taktiež tautologicky vyplýva z teórie $\boldsymbol{T}$

$$\varphi_{ext}=\varphi \vee \chi \tag{37}$$

kde χ je ľubovoľná formula. Ľahko sa presvedčíme o tom, že aj rozšírená formula φ_{ext} je platná pre ľubovoľné χ. Pre každé $\tau \in M(\boldsymbol{T})$ a pre každú formulu $\varphi_i \in \boldsymbol{T}$ platí $val_\tau(\varphi_i)=val_\tau(\varphi)=val_\tau(\varphi_{ext})$.

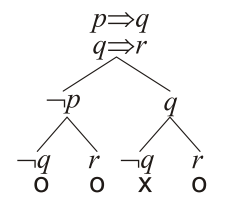
Príklad 9. Budeme pokračovať v ďalšom riešení príkladu 8. Pomocou formuly (35) a interpretácií τ_i, pre i = 1, 2, 3, 4, ktoré boli zostrojené v príklade 8 zostrojíme formulu

$$\begin{aligned}\varphi(p,q,r)&=(\neg p)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg p\wedge q)\vee(q\wedge r)\\&=\Big((\neg p)\wedge\underbrace{(1\vee r\vee q)}_{1}\Big)\vee(q\wedge r)\\&=(\neg p)\vee(q\wedge r)=(p\Rightarrow q\wedge r)\end{aligned}$$

Táto formula tautologicky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\boldsymbol{T}=\{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}$

$$\{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}\models(p\Rightarrow q\wedge r)$$

Príklad 10. Majme teóriu $\boldsymbol{T}=\{p\Rightarrow q, q\Rightarrow r\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá tautologicky vyplýva z tejto teórie, $\boldsymbol{T}\models\varphi$. Sémantické tablo pre teóriu $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1=p\Rightarrow q, \varphi_2=q\Rightarrow r\}$ je znázornené na obr. 10.



Obr. 10. Sémantické tablo pre teóriu $\boldsymbol{T}=\{p\Rightarrow q, q\Rightarrow r\}$, ktoré obsahuje tri otvorené vetvy.

Jednotlivým otvoreným vetvám tabla z obr. 10 podľa (35) môžeme priradiť tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg q$$

$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge r$$

$$\varphi_{\tau_3} = q \wedge r .$$

Použitím (35) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv \left(\neg p \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{\varphi_2} \right) \vee \left(\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\varphi_1} \wedge r \right) = (\neg p \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge r)$$

Pretože požadujeme pri definícii tautologického vyplývania, aby formuly φ_1, φ_2 boli pravdivé pre každé $\tau \in M(\boldsymbol{T})$, potom formulu φ môžeme zjednodušiť

$$\varphi = (\neg p \wedge 1) \vee (1 \wedge r) \equiv p \Rightarrow r$$

Týmto sme dokázali, že z teórie $\boldsymbol{T}$ tautologicky vyplýva $p \Rightarrow r$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$$

3.2 Sémantické tablá a problém abdukcie vo výrokovej logike

Paradigma abdukcie ako špeciálneho typu nededuktívneho usudzovania bola zavedená americkým filozofom a logikom Charlesom Peirceom (pozri ref. [18]). V jeho pôvodnej definícii usudzovania rozlišoval klasický typ usudzovania: dedukciu a dva neklasické typy usudzovania: indukciu a abdukciu. Abdukciu vyjadril nasledujúcou schémou usudzovania

$$\begin{array}{|l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline p \end{array}$$

ktorá v rámci klasického deduktívneho usudzovania je evidentne nekorektná (napr. formula $(q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$ nie je tautológia a tvorí základ „zlozvyku“ usudzovania nazývaného zdôraznenie dôsledku). Niekedy sa takto formulovaná abdukcia nazýva „*inverzný modus ponens*“. Peircov ilustračný príklad abdukcie má tvar

$$\begin{array}{|l} \text{tieto fazule sú biele} \\ \text{každá fazuľa z tejto nádoby je biela} \\ \hline \text{tieto fazule sú z tejto nádoby} \end{array}$$

Alternatívny pohľad na abdukciu je ten, že sa jedná o proces *tvorby hypotézy*, ktorý vysvetľuje pozorovanie q na základe známeho poznatku (teórie) reprezentovaného implikáciou $p \Rightarrow q$.

Moderný prístup k špecifikácii abdukcie [1,17] spočíva v jej formulovaní veľmi blízkemu deduktívnemu usudzovaniu. Nech $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistentná teória,

$M(\boldsymbol{T}) \neq \varnothing$, a nech φ je pozorovanie, ktoré chceme vysvetliť pomocou danej teórie $\boldsymbol{T}$, avšak $\boldsymbol{T} \nvDash \varphi$, t. j. $M(\boldsymbol{T}) \nsubseteq M(\varphi)$. Z týchto dôvodov v rámci *množiny hypotéz – formúl* $\boldsymbol{H} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$ hľadáme takú hypotézu $\alpha \in \boldsymbol{H}$, ktorá spolu s teóriou deduktívne vysvetľuje pozorovanie φ

$$\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\} \vDash \varphi \tag{38a}$$

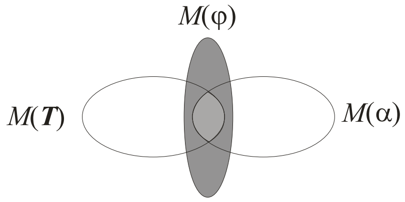
čo je ekvivalentné množinovo-teoretickej relácii (pozri obr. 11)

$$M(\boldsymbol{T}) \cap M(\alpha) \subseteq M(\varphi) \tag{38b}$$

kde predpokladáme, že aj rozšírená teória $\boldsymbol{T}$ o hypotézu α je konzistentná

$$M(\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}) = M(\boldsymbol{T}) \cap M(\alpha) \neq \varnothing \tag{38c}$$

Poznamenajme, že množinovo-teoretická relácia (38b) tvorí teoretický základ nášho prístupu k riešeniu takto formulovanej abdukcie, t. j. hľadaniu hypotézy α. Umožňuje nám „algebraizovať“ proces abdukcie, kde centrálnu úlohu hrá relácia (38b), pričom dominantnú úlohu v tomto procese bude hrať technika sémantických tabiel.



Obr. 11. Diagramatické znázornenie množinovej relácie $M(\boldsymbol{T}) \cap M(\alpha) \subseteq M(\varphi)$, ktorá tvorí podmienku pre existenciu tautologického vyplývania $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$.

Na záver tejto úvodnej časti o abdukcii uvedieme niekoľko poznámok o tom, prečo abdukcia patrí medzi *nededuktívne módy usudzovania*, aj keď relácia (38a) má striktne deduktívny charakter. Hlavný dôvod k tomuto odlíšeniu spočíva v skutočnosti, že v počiatočnej etape usudzovania stojíme pred problémom výberu hypotézy α z množiny možných hypotéz, ktoré zachovávajú konzistentnosť teórie $\alpha \in \boldsymbol{H}$ a tiež umožňujú tautologické vyplývanie (38a) pozorovania φ z rozšírenej teórie $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}$. Tento výber sa deje mimologickými prostriedkami, kde sa používajú rôzne heuristiky o jednoduchosti (a ekonomičnosti). V tejto súvislosti pripomeňme pravidlo ***Occamovej britvy***, podľa ktorého „***dôvody nesmú byť zložitejšie, než ako je potrebné***“, moderná alternatívna formulácia tohto pravidla je „***najjednoduchšie vysvetlenie pozorovaného javu, ktoré je konzistentné so súčasným stavom vedy, je s najväčšou pravdepodobnosťou korektné vysvetlenie***“. Ako ilustratívny príklad použitia tejto hypotézy uvedieme nasledujúci negatívny príklad:

> Vrátil som sa domov neskoro v noci, aj keď som sľúbil manželke, že prídem ešte pred TV správami. Nepríjemne zapáchajúci cigaretovým dymom a alkoholom, stojím pred problémom ako vysvetlím manželke túto skutočnosť, že som prišiel domov tak neskoro. Porušenie zásady Occamovej britvy je

vysvetlenie, že podvečerom na streche fakulty pristálo UFO a ja som bol vyzvaný dekanom fakulty, aby som s nimi komunikoval, čo sa nepríjemne dlho pretiahlo a bol som s nimi prinútený piť víno a fajčiť cigarety, aj keď už som dávno prestal fajčiť a piť.

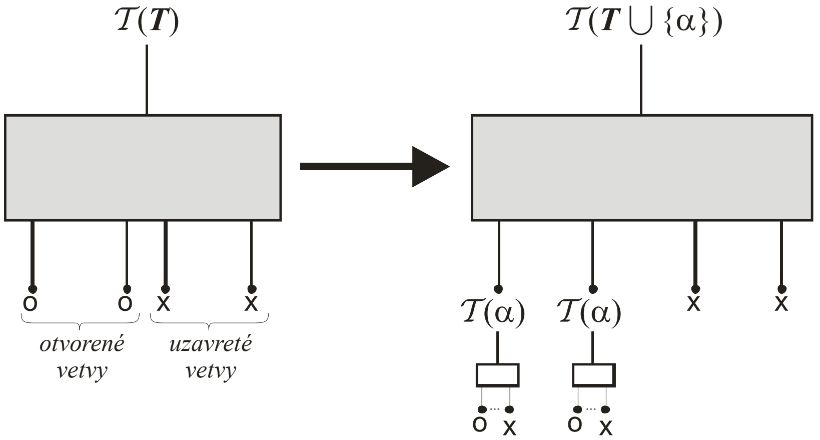
Môžeme teda konštatovať, že problém výberu hypotézy je minimalizačný problém,

$$\alpha_{opt} = \arg\min_{\alpha \in \mathbf{H}} f(\alpha) \tag{39}$$

kde $f(\alpha)$ je „účelová funkcia", ktorá vyhodnocuje „ekonomičnosť" danej hypotézy α, ktorá je založená na mimologických prostriedkoch. Práve riešenie tohto problému (39) je hlavným dôvodom toho, prečo je abdukcia pokladaná za nededuktívny mód usudzovania, aj keď riešenie relácie (38a) je už striktne deduktívne.

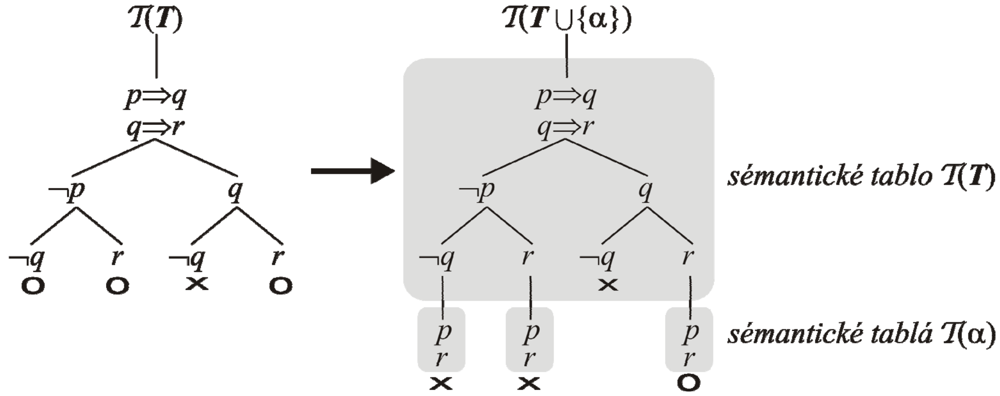
V našich ďalších úvahách o abdukcii budeme potrebovať vlastnosť sémantických tabiel, ktorá súvisí s ich predĺžením o nový poznatok α. Táto vlastnosť je formulovaná do nasledujúcej definície.

Definícia 3.
Nech $\mathcal{T}\left(\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}\right)$ je sémantické tablo s koreňovým vrcholom, ktorý je tvorený konjunkciou elementov z teórie $\boldsymbol{T}$ a formuly α, t. j. $\Theta = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \alpha$. Hovoríme, že toto sémantické tablo je vytvorené predĺžením otvorených vetiev tabla $\mathcal{T}(\boldsymbol{T})$ o formulu α (pozri obr. 12).

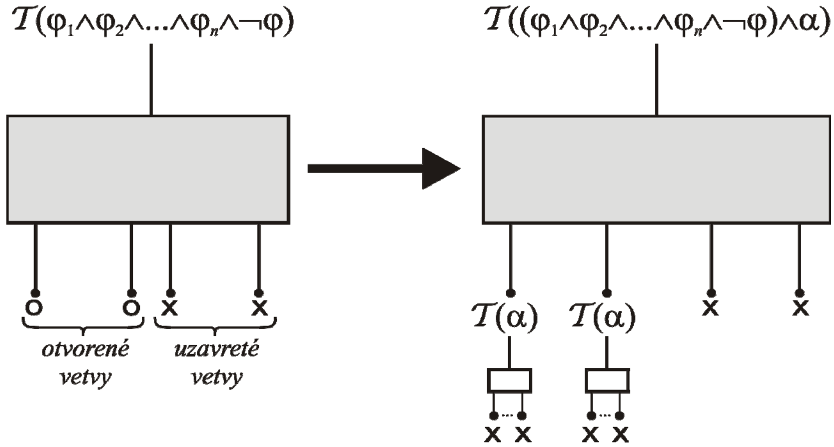


Obr. 12. Sémantické tablo $\mathcal{T}\left(\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}\right)$ vzniklo z tabla $\mathcal{T}(\boldsymbol{T})$ predĺžením otvorených vetiev o sémantické tablá $\mathcal{T}(\alpha)$, pričom vytvorené vetvy môžu byť tak otvorené ako aj uzavreté.

Príklad 11. Nech teória $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ a $\alpha = p \wedge r$. Podľa definície 3 sémantické tablo $\mathcal{T}\left(\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}\right)$ je vytvorené predĺžením tabla $\mathcal{T}(\boldsymbol{T})$ o tablo $\mathcal{T}(\alpha)$, pričom predlžujeme len otvorené vetvy tabla $\mathcal{T}(\boldsymbol{T})$, pozri obr. 12 a 13.



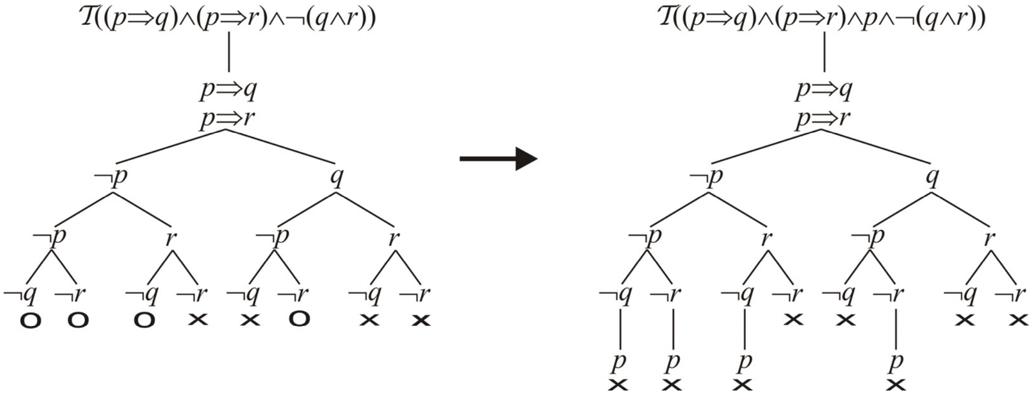
Obr. 13. Znázornenie predĺženia sémantického tabla z príkladu 11. Tento "modulárny" prístup ku konštrukcii sémantického tabla $\mathcal{T}(\boldsymbol{T}')$ pre teóriu špecifikovanú ako zjednotenie dvoch podteórií, $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}$, umožňuje efektívne analyzovať procesy usudzovania založené na rozširovaní pôvodnej teórie o nové poznatky.



Obr. 14. Použitie techniky predĺženia sémantického tabla k riešeniu problému abdukcie, t. j. hľadaniu takej formuly α, aby platilo $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}$. Hľadaná formula α musí mať taký tvar, aby rezultujúce rozšírené sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\Theta)$ bolo uzavreté.

Pomocou techniky predĺženia sémantického tabla budeme študovať abdukciu, aplikovaním predĺženia upravíme reláciu $\boldsymbol{T} \nvDash \varphi$ tak, aby poznatok φ tautologicky vyplýval z rozšírenej teórie $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}$, t. j. $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$. Nech $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je východisková teória, ktorá obsahuje n poznatkov reprezentovaných formulami $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom platí $\boldsymbol{T} \nvDash \varphi$, alebo formula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ nie je kontradikcia[2]. Našou snahou bude „modelovať" dodatočný poznatok α tak, aby „rozšírená" formula $\neg\Theta = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \alpha \wedge \neg\varphi$ už bola kontradikcia, t. j. aby príslušné sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\Theta)$ malo všetky vetvy uzavreté. K tejto konštrukcii použijeme techniku rozšírenia sémantického tabla špecifikovanú definíciou 3, ktorej konkretizácia pre abdukciu je znázornená na obr. 14.

Príklad 12. Nech $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$ je konzistentná teória a $\varphi = q \wedge r$ je požadovaný dôsledok z tejto teórie. Vytvorme formulu $\neg\Theta = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ $\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge \neg(q \wedge r)$, sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\Theta)$ má otvorené vetvy, z čoho plynie, že $\varphi = q \wedge r$ nie je tautologickým dôsledkom teórie $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, pozri obr. 15.



Obr. 15. Ilustračný príklad abdukcie, keď sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\Theta)$ je rozšírené o abdukčný predpoklad – hypotézu $\alpha = p$, ktorý uzatvára sémantické tablo.

Ak rozšírime pôvodnú teóriu o nový predpoklad *p*, potom z $\boldsymbol{T} \cup \{p\}$ už vyplýva požadovaný dôsledok $\varphi = q \wedge r$. Z tohto elementárneho príkladu vyplýva, že pomocou techniky sémantických tabiel môžeme ľahko rozšíriť pôvodné predpoklady z teórie $\boldsymbol{T}$ o nový poznatok α tak, aby z rozšírenej teórie $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\}$ vyplýval požadovaný predpoklad $\boldsymbol{T} \cup \{\alpha\} \models \varphi$, pričom $\boldsymbol{T} \not\models \varphi$.

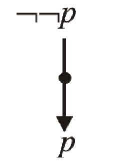
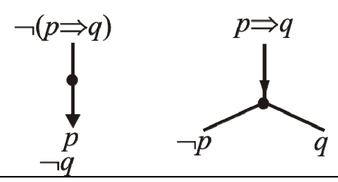
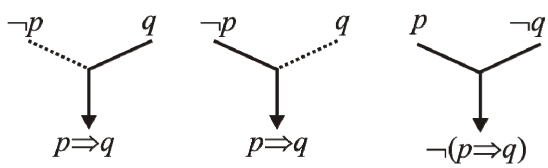
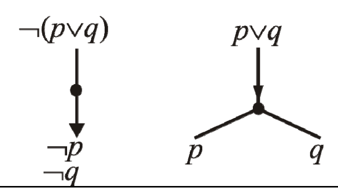
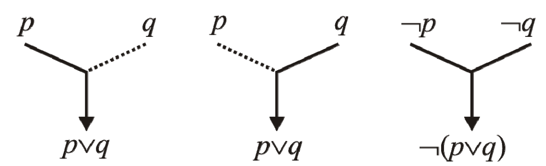
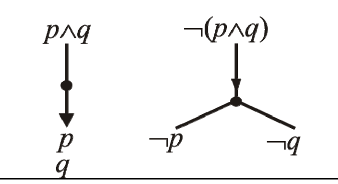
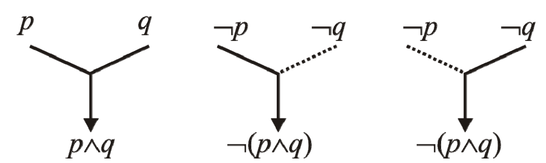
3.3 Vzťah medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami

Cieľom tejto podkapitoly je ukázať, že medzi prirodzenou dedukciou [5,12,21] a sémantickými tablami existuje úzka súvislosť. Podľa vety 3 platí, že ak sémantické

[2] Poznamenajme, že ak platí $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$, potom formula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ je tautológia a teda jej negácia $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ je kontradikcia.

tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia. Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ môže slúžiť v inverznom poradí ako návod pre dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, pričom potrebné vstupné výrokové premenné a ich negácie sú tvorené pomocou triviálnych kontradikcií typu $\neg p \wedge p \equiv \neg(p \Rightarrow p)$. Prirodzenú dedukciu budeme realizovať pomocou diagramov (pozri obr. 16), takže pri konštrukcii tejto diagramatickej reprezentácie prirodzenej dedukcie budeme používať spôsob, ktorý je v podstate inverziou sémantického tabla. Použité schémy usudzovania pre tvorbu diagramatickej reprezentácie prirodzenej dedukcie sú uvedené v tab. 10. V tomto prípade sa používajú len tie najjednoduchšie schémy usudzovania, ktoré pomocou konjunkcie, disjunkcie a implikácie vytvárajú z dvoch aktuálnych podformúl φ a ψ dôkazu novú formulu $\varphi \clubsuit \psi$.

Tabuľka 10. Elementárne schémy usudzovania pre sémantické tablá a dôkaz pomocou prirodzenej dedukcie založenej na sémantickom table

Logická spojka	sémantické tablá	prirodzená dedukcia
Negácia		
Implikácia		
Disjunkcia		
Konjunkcia		

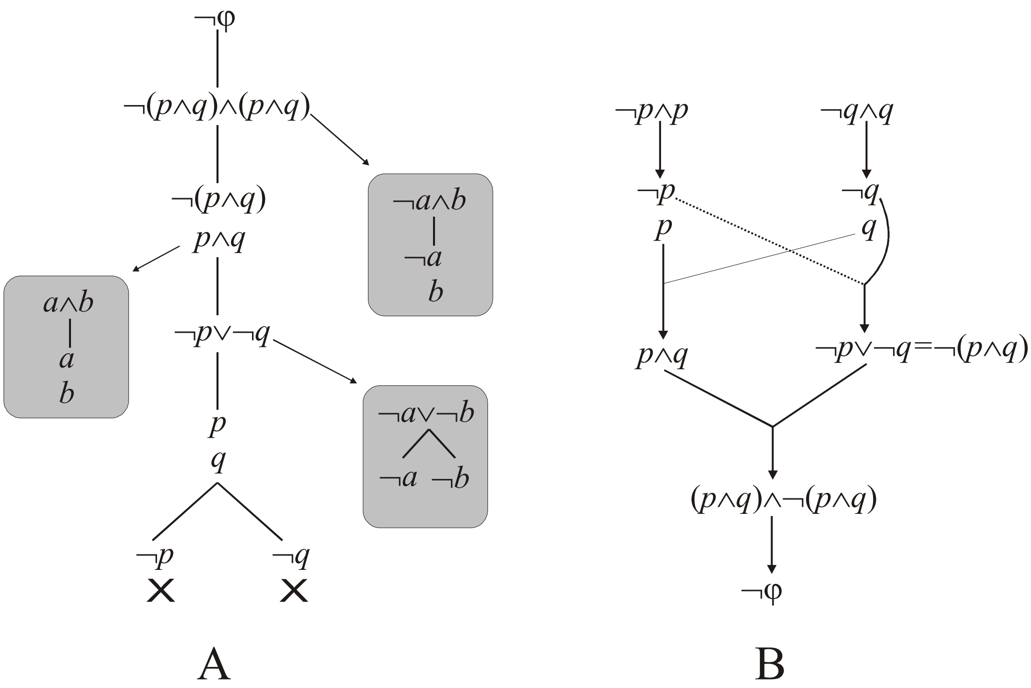
Poznámka: Prerušované čiary znamenajú, že týmto čiaram priradené formuly sú ľubovoľné – brané *ad-hoc*, nemusia byť odvodené v predchádzajúcej časti dôkazu.

Ako ilustračný príklad uvažujme pravidlo z tab. 6 pre prirodzenú dedukciu a implikáciu, predpoklady sú φ a ¬ψ, dôsledok je $\neg(\varphi \Rightarrow \psi)$, čo môžeme vyjadriť takto

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \neg\psi \\ \hline \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \end{array}$$

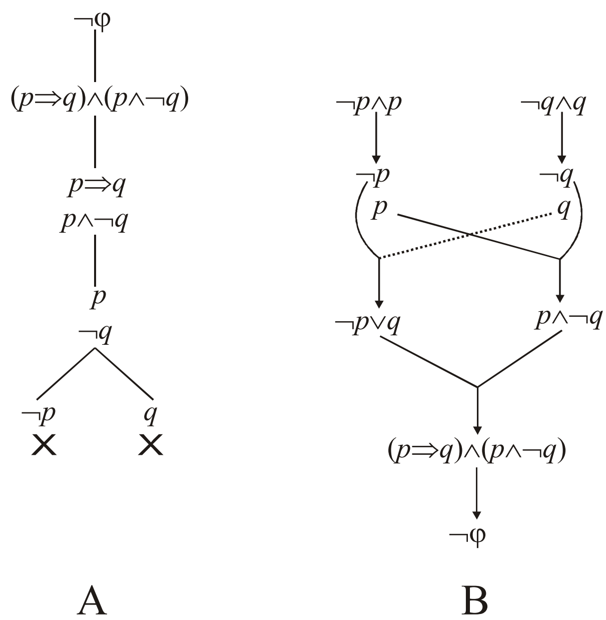
Ľahko sa presvedčíme, že formula $\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ je tautológia, čiže schéma usudzovania je korektná. Takýmto jednoduchým spôsobom môžeme preveriť všetky pravidlá z tab. 10 pre prirodzenú dedukciu.

Príklad 13. Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ pomocou sémantického tabla a potom vykonajte dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenej na sémantickom table. Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je znázornené na obr. 16. Pretože tablo je uzavreté, formula φ je tautológia. Inverziou (čítaním zdola nahor) môžeme zostrojiť dôkaz formuly $\neg\varphi$ len pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 10 (pozri diagram B obr. 16).



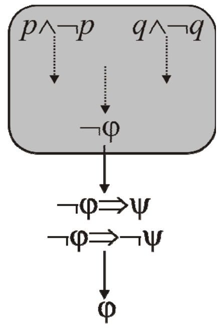
Obr. 16. (A) Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ pre formulu $\varphi = \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ kde $\neg\varphi = (p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$ má všetky vetvy uzavreté, t. j. formula φ je tautológia. Použité schémy rozširovania sémantického tabla sú uvedené v tmavých blokoch stojacích vedľa stromu sémantického tabla (pozri obr. 5). (B) Prirodzená dedukcia pre danú formulu na základe duálneho sémantického tabla pre dôkaz, že daná formula je tautológia (pozri diagram A). Prirodzená dedukcia je zahájená tvorbou literálov z elementárnych kontradikcií $p \wedge \neg p$ a $q \wedge \neg q$. Prirodzená dedukcia je založená na inverznom postupe tvorby sémantického tabla $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, pomocou elementárnych schém uvedených v Tab. 10.

Príklad 14. Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ pomocou sémantického tabla a potom pomocou neho zostrojte dôkaz formuly pomocou prirodzenej dedukcie. Sémantické tablo je znázornené na obr. 17, diagram A. Pomocou tohto sémantického tabla zostrojíme dôkaz formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ metódou prirodzenej dedukcie (pozri obr. 17, diagram B).



Obr. 17. (A) Duálne sémantické tablo pre formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$, tablo je uzavreté, preto formula je tautológia. (B) Dôkaz formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá bola navrhnutá pomocou duálneho sémantického tabla z diagramu A.

Na základe týchto dvoch ilustračných príkladov môžeme konštatovať, že metóda sémantických tabiel je silne previazaná s prirodzenou dedukciou. Obrazne môžeme povedať, že tieto dve metódy sú navzájom v „inverznom“ vzťahu. V prvom kroku pre formulu φ pomocou sémantického tabla $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ zistíme, či táto formula je tautológia. Ako áno (sémantické tablo je uzavreté), potom inverzným „čítaním“ tabla zdola nahor môžeme postupne zostrojiť graf prirodzenej dedukcie pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 10, ktorého výsledkom je formula $\neg\varphi$. Skutočnosť, že na základe sémantického tabla $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ sme schopní zostrojiť dôkaz formuly $\neg\varphi$ (pritom o $\neg\varphi$ vieme, že je kontradikcia) pomocou prirodzenej dedukcie, nie je chybou nášho postupu. Formálne môžeme pokračovať v našom dôkaze tak, že dokázanú formulu $\neg\varphi$ rozšírime pomocou implikácie o formulu ψ a taktiež aj $\neg\psi$, pozri obr. 18.



Obr. 18. Formálne dokončenie dôkazu pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá je založená na inverznom slede „príkazov" zo sémantického tabla $\mathcal{T}(\neg\varphi)$. Postup je založený na zákone výrokovej logiky „*reductio ad absurdum*" $(\neg\varphi\Rightarrow\psi)\wedge(\neg\varphi\Rightarrow\neg\psi)\Rightarrow\varphi$. Horný blok znázorňuje počiatočný stav dôkazu v ktorom rezultuje formula $\neg\varphi$, ktorá je v nasledujúcej etape dôkazu pomocou „reductio ad absurdum" pretransformovaná na očakávanú formulu φ.

Tento prístup k prirodzenej dedukcii môžeme taktiež chápať ako konštruktívny dôkaz úplnosti, t. j. ak formula φ je tautológia, potom aj logicky vyplýva (existuje jej dôkaz) z daného systému axióm výrokovej logiky.

Veta 7.
Ak formula φ má uzavreté sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, t. j. je tautológia, potom pomocou „inverzie" tohto tabla môžeme zostrojiť dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie.

4 Sémantické tablá v predikátovej logike

Technika sémantických tabiel pre predikátovú logiku je jednoduchou modifikáciou sémantických tabiel z výrokovej logiky (pozri obr. 2) o rozšírenia, ktoré zahŕňajú univerzálne a existenčné kvantifikátory. Tieto rozšírenia sú založené na nasledujúcich zákonoch predikátovej logiky

$$(\forall x)\varphi(x)\Rightarrow\varphi(t) \tag{40a}$$

$$(\exists x)\varphi(x)\Rightarrow\varphi(a) \tag{40b}$$

$$(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(t,t') \tag{40c}$$

$$(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(a,a') \tag{40d}$$

$$(\exists y)(\forall x)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(t,a) \tag{40e}$$

$$(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(a,t) \tag{40f}$$

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(t,f(t)) \tag{40g}$$

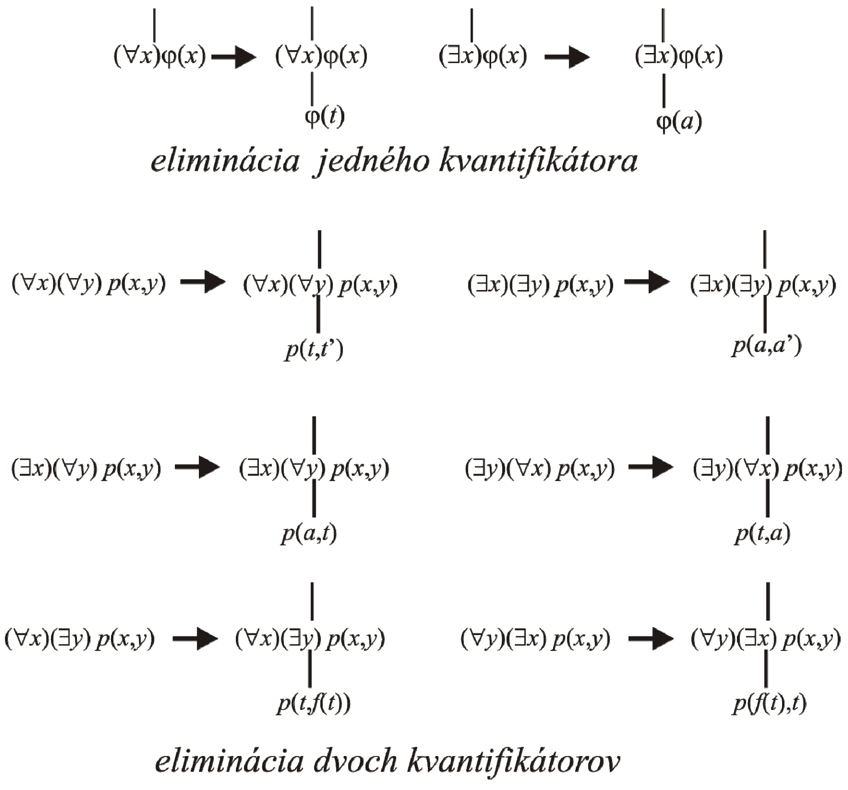
$$(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(f(t),t) \tag{40h}$$

kde t je ľubovoľný objekt (indivíduum) z univerza U, a je daný konštantný objekt (indivíduum) z univerza U. Poznamenajme, že dvojice formúl (40e-f) a (40g-h) sú ekvivalentné, použitím zámeny objektov $x \leftrightarrow y$ môžeme jednu formulu prepísať na druhú formulu. Určité interpretačné problémy spôsobuje posledná formula (40f), ktorá môže byť chápaná ako „jemná“ modifikácia formuly (40e) s inverzným poradím kvantifikátorov. Ako ukážeme neskoršie, táto skutočnosť má dramatický dopad na korektnú interpretáciu ľavej strany formuly (40f). Posledné dve formuly sú upravené procesom ***skolemizácie*** takto:

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) \equiv (\forall x)\varphi(x,f(x)) \Rightarrow \varphi(t,f(t)),$$

$$(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y) \equiv (\forall y)\varphi(f(y),y) \Rightarrow \varphi(f(t),t),$$

kde f sa nazýva ***Skolemova funkcia***. Predĺženia predikátových formúl v teórii sémantických tabiel sú znázornené na obrázok 19.



Obr. 19. Doplnenie základných rozšírení (pozri obr. 5) metódy sémantického tabla pre predikátovú logiku.

Upriamime našu pozornosť na formuly (40a-h). Prvé dve formuly (40a-b) sú priamym dôsledkom zákonov konkretizácie z predikátovej logiky. Žiaľ, tieto jednoduché rozšírenia sémantických tabiel pre formuly s jedným predikátom sú platné len pre tie formuly s dvoma predikátmi, ktoré neobsahujú „zmiešaný“ súčin existenčného a univerzálneho kvantifikátora.

Nech $\varphi = (\exists x)(\forall y)\, p(x,y)$ má alternatívny tvar

$$\varphi = (\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \equiv \bigvee_{x\in U}\bigwedge_{y\in U} p(x,y) \equiv \left(\bigwedge_{y\in U} p(a_1,y)\right) \vee \ldots \vee \left(\bigwedge_{y\in U} p(a_n,y)\right) \qquad (41a)$$

kde $U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Pretože sa jedná o disjunkciu konjunktívnych klauzúl, stačí vybrať len jednu pravdivú klauzulu a tá vyhovuje formule

$$(\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow \left(\bigwedge_{y\in U} p(a,y)\right) \qquad (41b)$$

kde $a \in U$ je vybraný objekt z univerza. Konjunktívna klauzula na pravej strane musí byť pravdivá pre každé $y \in U$, potom

$$(\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow p(a,t) \qquad (42)$$

kde $t \in U$ je ľubovoľný objekt z univerza U. Môžeme povedať, že tento výsledok by sme získali aj postupným použitím pravidiel (40a-b).

Pre formulu (40g) je situácia o niečo zložitejšia, táto formula má tento alternatívny tvar

$$\psi = (\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \equiv \bigwedge_{x\in U}\bigvee_{y\in U} p(x,y) \equiv \left(\bigvee_{y\in U} p(x_1,y)\right) \wedge \ldots \wedge \left(\bigvee_{y\in U} p(x_n,y)\right) \qquad (43)$$

kde $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Pre dané x_i stanovenie takého $y \in U$, aby disjunkcia $\bigvee_{y\in U} p(x_i,y)$ bola pravdivá, musí prebiehať vzhľadom k x_i, t. j. $a = y = f(x_i)$, kde $f(x)$ je Skolemova funkcia, ktorá určuje jednoznačne y vzhľadom k danému $x = t$. Potom platí implikácia

$$(\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow p(t, f(t)) \qquad (44)$$

kde $t \in U$ je ľubovoľný objekt z univerza U. Poznamenajme, že Skolemova funkcia $f(t)$ priradí ľubovoľnému $t \in U$ nejaké vybrané $a = f(t)$ tak, aby formula (44) bola pravdivá. Podobným spôsobom môžeme študovať aj formuly (40c-d), ktoré obsahujú dva univerzálne alebo existenčné kvantifikátory. Podobnými úvahami, ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch dostaneme formuly

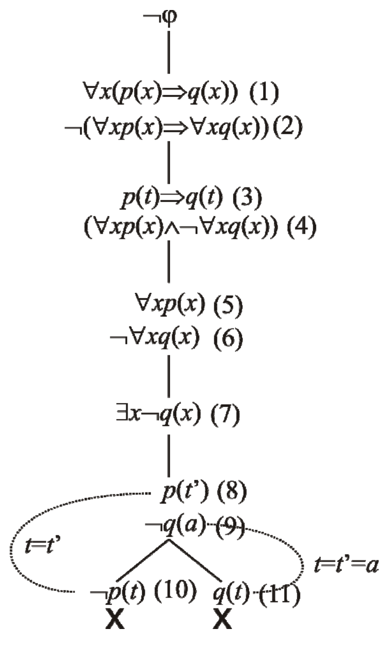
$$(\forall x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow p(t,t') \qquad (45a)$$

$$(\exists x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow p(a,a') \qquad (45b)$$

kde $t, t' \in U$ sú ľubovoľné objekty a $a, a' \in U$ sú vybrané objekty.

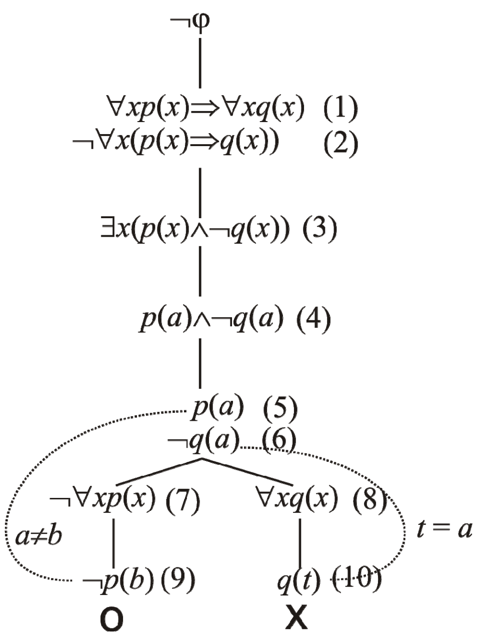
Príklad 15. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = \forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\big)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 20. Jednotlivé formuly v sémantickom table sú indexované (čísla v zátvorkách) a majú tento význam:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 5, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Na formulu (1) bola použitá schéma predĺženia z obr. 19, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a všeobecná indivíduová premenná x bola nahradená ľubovoľnou indivíduovou konštantou t, vznikla formula (3).
- Formula (4) vznikla aplikáciou ekvivalencie $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ na formulu (2).
- Formuly (5) a (6) vznikli predĺžením (4) podľa schémy z obr. 5, diagram B.
- Formula (7) vznikla z (6) ekvivalentným prepisom $\neg\forall x R(x) \equiv \exists x \neg R(x)$.
- Formula (8) vznikla z (5) použitím predĺženia z obr. 19, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduovú premennú x sme nahradili ľubovoľnou indivíduovou konštantou t'.
- Formula (9) vznikla z (7) aplikáciou predĺženia z obr. 19, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduovú premennú x sme nahradili vybranou indivíduovou konštantou a.
- Vzniknuté sémantické tablo má dve vetvy. Ľavá vetva je uzavretá, pretože môžeme vytvoriť kontradikciu tak, že položíme $t = t'$ (poznamenajme, že tieto konštanty sú ľubovoľné). Pravá vetva je taktiež uzavretá, kontradikciu vytvoríme tak, že položíme $t = a$. Tieto dve podmienky sú realizovateľné súčasne, čo môžeme napísať ako $t = t' = a$.



Obr. 20. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\,p(x) \Rightarrow (\forall x)\,q(x)\big)$. Pretože tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, formula φ je tautológia, čo bolo potrebné dokázať.

Príklad 16. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = \left(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\right) \Rightarrow \forall x\left(p(x) \Rightarrow q(x)\right)$ nie je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 21.



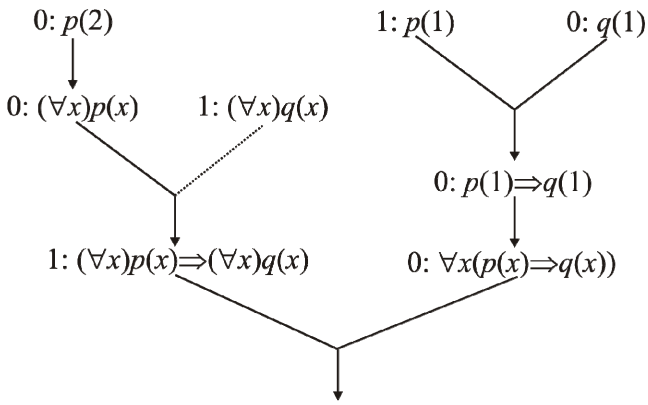
Obr. 21. Sémantické tablo pre negáciu formuly $\varphi = \left((\forall x) p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x)\left(p(x) \Rightarrow q(x)\right)$. Tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ nie je uzavreté, formula φ nie je tautológia, je len splniteľná s interpretáciou zostrojiteľnou pomocou otvorenej vetvy.

Podobne, ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz pristúpime k podrobnej špecifikácii každého riadku sémantického tabla z obr. 21:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 5, diagram C, vznikli formuly (1) a (2).
- Formula (3) vznikla z (2) aplikáciou ekvivalencií $\neg(\forall x)R(x) \equiv (\exists x)\neg R(x)$ a $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$.
- Formula (4) vznikla z (3) použitím predĺženia z obr. 19, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduová premenná x bola nahradená danou indivíduovou konštantou a.
- Formuly (5) a (6) vznikli z (4) použitím predĺženia z obr. 5, diagram B.
- Formuly (7) a (8) vznikli z (1) použitím predĺženia z obr. 5, diagram C.

- Formula (9) vznikla z (7) použitím predĺženia z obr. 19, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduová premenná x bola nahradená danou indivíduovou konštantou b.
- Ľavá vetva sémantického tabla neprodukuje vo všeobecnosti kontradikciu (nie je uzavretá), potenciálna možnosť jej tvorby pomocou (5) a (9) nemôže existovať, pretože vo všeobecnosti platí $a \neq b$.
- Pravá vetva je uzavretá, tu vytvoríme kontradikciu podmienkou $t = a$.
- Sémantické tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia.

Poznamenajme, že otvorená ľavá vetva sémantického tabla môže byť použitá na konštrukciu takej interpretácie, pre ktorú je formula φ je nepravdivá, t. j. požiadavka tautologičnosti formuly φ je falzifikovaná. Z ľavej vetvy pre hodnoty predikátov p a q dostaneme tieto hodnoty: $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$. Z prvých dvoch podmienok odvodíme ich konjunkciu $p(a) \wedge \neg q(a)=1$, čo môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora $\exists x\big(p(x) \wedge \neg q(x)\big) = \exists x \neg\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) = = \neg \forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) = 1$, Z tretej podmienky $\neg p(b)=1$ môžeme vyvodiť: $\exists x \neg p(x) = \neg \forall x p(x) = 1$. Tento výsledok môžeme pomocou disjunkcie rozšíriť, $\neg \forall x p(x) \vee \forall x q(x) = \forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x) = 1$. Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu pravdivostnej hodnoty formuly φ, $\big((\forall x) p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \equiv \equiv (1 \Rightarrow 0) \equiv 0$. Tento dôležitý moment využitia sémantického tabla pre konštrukciu falzifikácie tautologičnosti danej formuly môžeme aj znázorniť diagramaticky, pozri obr. 22.

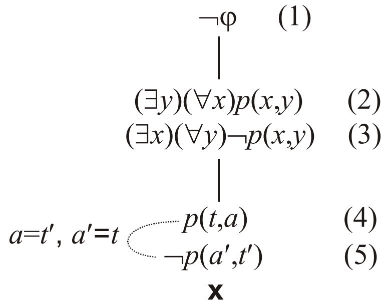


Obr. 22. Diagramatická falzifikácia tautologičnosti formuly $\big((\forall x) p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)\big) \Rightarrow \Rightarrow (\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$ na základe počiatočných predpokladov $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$, ktoré boli získané z ľavej vetvy sémantického tabla z obr. 21. Posledný riadok

diagramatickej interpretácie znamená, že pre dané podmienky pravdivostná hodnota formuly je nepravda, t. j. formula nemôže byť tautológiou.

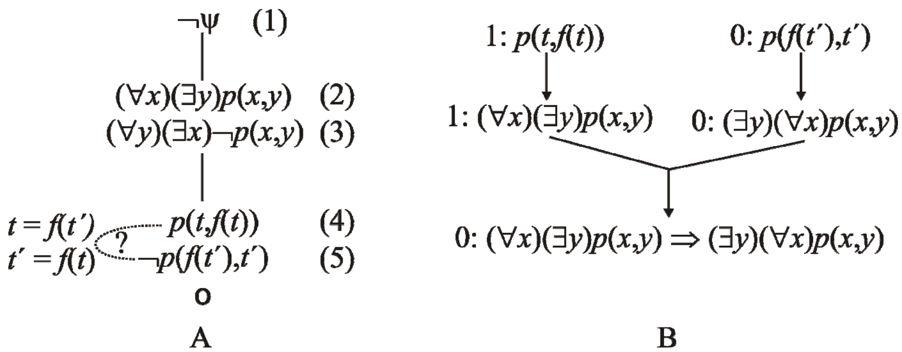
Tieto dva ilustračné príklady ukazujú na potenciálnu vhodnosť sémantických tabiel pre konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl predikátovej logiky, kde majú nezastupiteľnú úlohu pre konštrukciu pravdivostných hodnôt, pretože v predikátovej logike je tabuľková metóda nepoužiteľná.

Príklad 17. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = (\exists y)(\forall x)\, p(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 23.



Obr. 23. Sémantické tablo pre negáciu formuly $\varphi = (\exists y)(\forall x)\, p(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$, jediná vetva tohto tabla je uzavretá, čiže formula φ je tautológia. Pri prechode od formúl-vrcholov (2-3) k formulám-vrcholom (4-5) sme použili pravú schému predĺženia z druhého riadku obrázku 19.

Príklad 18. Použitím techniky sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formuly $\psi = (\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$, pozri obr. 24.



Obr. 24. (A) Sémantické tablo negácie formuly $\psi = (\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$, jediná vetva tabla je otvorená, čiže formula ψ nie je tautológia. (B) Pomocou tohto sémantického tabla môžeme zostrojiť taký model formuly ψ, v ktorom je formula nepravdivá, čiže sme falzifikovali jej tautologičnosť.

5 Sémantické tablá v modálnej logike [4,6,7,12,15]

Použijeme jednoduchý prístup ako zaviesť modálnu logiku pomocou výrokovej logiky. Množina logických spojok výrokovej logiky, $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\neg\}$, je rozšírená o ďalšie dve unárne spojky $\Box$ a $\Diamond$. Formula modálnej logiky $\Box\varphi$ znamená ´nutne platí φ´, analogická formula $\Diamond\varphi$ znamená ´možno platí φ´. Tieto dve spojky nie sú nezávislé, navzájom sú zviazané reláciou $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$, alebo $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$. Pôvodne boli tieto dve logické spojky $\Box$ a $\Diamond$ chápané ako validita resp. splniteľnosť. Analogické spojky boli neskoršie použité pri formulácii kauzálnej, deontickej, epistemickej a veľmi populárnej temporálnej logiky.

Ako jednoduché rozšírenie klasickej výrokovej logiky pomocou modálnych spojok boli študované rôzne typy modálnych logík americkým logikom C. I. Lewisom, ktorý je pokladaný za zakladateľa modernej modálnej logiky [13]. Žiaľ, jeho spôsob prezentácie modálnych logík bol veľmi ťažkopádny, aj keď zo súčasného pohľadu väčšina jeho výsledkov sa ukázala korektnými. Zásluhou Kurta Gödela [8] tento systém bol prevedený do súčasného prehľadného hierarchického axiomatického systému, kde zapájaním rôznych axióm dostávame rôzne typy modálnych logík. V tomto prístupe veľmi dôležitú úlohu hrá nové pravidlo odvodzovania (okrem štandardného pravidla modus ponens) nazývané pravidlo nutnosti[3] $\varphi/\Box\varphi$, ktoré umožňuje inferenciu $\Box\varphi$ z východiskového predpokladu φ. Najdôležitejšie axiómy tohto systému sú

(Ax$_0$) $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

(Ax$_1$) $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$

(Ax$_2$) $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$

(Ax$_3$) $\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$

Najdôležitejšie systémy vždy obsahujú formulu (Ax$_0$); systém, ktorý obsahuje len túto axiómu a pravidlo nutnosti sa nazýva **K** na počesť Saula Kripkeho, pretože mal mimoriadne postavenie pri vzniku jeho teórie modelu modálnej logiky. Ostatné najdôležitejšie systémy modálnej logiky vznikli zahrnutím týchto axióm

K: (Ax$_0$)

T: (Ax$_0$) + (Ax$_1$)

S4 (Ax$_0$) + (Ax$_1$) + (Ax$_2$)

B: (Ax$_0$) + (Ax$_1$) + (Ax$_3$)

S5: (Ax$_0$)+ (Ax$_1$) + (Ax$_2$) + (Ax$_3$)

Všeobecnou snahou boli pokusy navrhnúť spoločný model pre modálne logiky rôzneho typu, ktorý by prechádzal na iný typ modelu len jednoduchou zmenou základných „variabilných parametrov“ modelu. Tieto pokusy boli neúspešné až do zavedenia Kripkeho modelu.

Kripkeho model modálnej logiky je podstatne zložitejší ako ten, ktorý bol použitý v závere predchádzajúcej kapitoly. Pravdivostné ohodnotenie danej formuly modálnej logiky bude založené na rekurzii podľa zložitosti formuly, pričom môžeme prechádzať

[3] Toto pravidlo v rámci sémantickej interpretácie môžeme jednoducho interpretovať tak, že ak formula φ je tautológia, potom aj $\Box\varphi$ musí byť tautológia.

z daného „sveta“, kde vyhodnotenie realizujeme, do iného „alternatívneho sveta“, kde využívame pravdivostné ohodnotenie jej podformúl. Snáď na tejto úvodnej úrovni môžeme použiť vysvetľujúcu analógiu so situáciou, keď chceme riešiť pravdivosť výroku □φ, kde φ = ´vlak do Žiliny odchádza o 14.37 hod´. Ak nám všetci kolegovia v práci (reprezentujúci Kripkeho alternatívne svety) vyhodnotia výrok φ ako pravdivý, potom môžeme povedať, že formula □φ je pravdivá, alebo výrok ´vlak do Žiliny odchádza o 14.37 hod´ je nutne pravdivý výrok. Alternatívne, ak nám výrok φ vyhodnotí aspoň jeden kolega ako pravdivý, potom hovoríme, že výrok ´vlak do Žiliny odchádza o 14.37 hod´ je možne pravdivý, čo označíme ako ◊φ.

Kripkeho model $M=(W,R,w_0,val)$ je usporiadaná štvorica [4,7,12,15]. Symbol $W=\{w,w',...\}$ je neprázdna množina svetov, symbol $R\subseteq W\times W$ je binárna relácia, $w_0\in W$ je odlíšený svet pre daný model, a val je zobrazenie, ktoré pravdivostne ohodnocuje výrokové premenné z $P=\{p,q,...,p',q',..\}$ pre daný svet $w\in W$, $val:W\times P\to\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$. Symbol $val(w,p)=\mathbf{1}\,(\mathbf{0})$ znamená, že premenná $p\in P$ je vo svete $w\in W$ pravdivá (nepravdivá). Binárna relácia *R* špecifikuje tzv. dostupné svety, ak $(w,w')\in R$, potom hovoríme, že svet *w´* je dostupný zo sveta *w*. Binárna relácia *R* môže byť formálne nahradená podmnožinami $\Gamma(w)\subseteq W$, kde $\Gamma(w)=\{w'\in W;(w,w')\in R\}$ obsahuje svety, ktoré sú dostupné zo sveta *w*. Odlíšený svet w_0 špecifikuje použitý model *M* pre daný svet w_0. Ako alternatívu k tomuto označeniu zavedieme reláciu ´*sémantického vyplývania*´ ⊨

$$(w\vDash p)=_{def}(val(w,p)=1)$$
$$(w\nvDash p)=_{def}(val(w,p)=0)$$

kde $w\vDash p$ ($w\nvDash p$) čítame ako ´vo svete *w* je výrok *p* pravdivý´ (´vo svete *w* je výrok *p* nepravdivý´). Zovšeobecnie zobrazenia val (alebo relácia sémantického vyplývania) pre neatomické výrokové formuly φ a ψ má tvar:

negácia	$(w\vDash\neg\varphi)=_{def}(w\nvDash\varphi)$	(46)
konjunkcia	$(w\vDash\varphi\wedge\psi)=_{def}(w\vDash\varphi)\wedge(w\vDash\psi)$	(47)
disjunkcia	$(w\vDash\varphi\vee\psi)=_{def}(w\vDash\varphi)\vee(w\vDash\psi)$	(48)
implikácia	$(w\vDash\varphi\Rightarrow\psi)=_{def}(w\nvDash\varphi)\vee(w\vDash\psi)$	(49)
spojka ´nutne´	$(w\vDash\Box\varphi)=_{def}(\forall w'\in\Gamma(w))(w'\vDash\varphi)$	(50)
spojka ´možne´	$(w\vDash\Diamond\varphi)=_{def}(\exists w'\in\Gamma(w))(w'\vDash\varphi)$	(51)

V tejto tabuľke formula (51) je redundantná, danú podmienku môžeme odvodiť z ekvivalencie ◊φ ≡ ¬□¬φ. Takto naformulovaný Kripkeho model často nazývame aj ako ***Kripkeho sémantika*** pre výrokovú modálnu logiku. Kripke pri konštrukcii tohto modelu bol stimulovaný Leibnizom, ktorý spomína možné svety, ktoré sú obsiahnuté v mysli Boha, ktorý však stvoril z týchto alternatívne možných svetov ten najlepší svet. Musíme však poznamenať, že táto „pitoreskná“ terminológia Kripkeho sémantického modelu spôsobila mnohé nedorozumenia a hádky pri diskutovaní filozofických základov modálnej logiky.

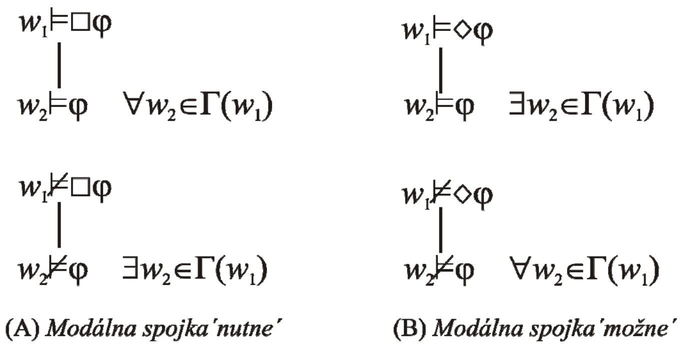
Na záver tejto kapitoly zavedieme štandardnú notáciu modálnej logiky, ktorá bude vyjadrovať skutočnosť, že formuly $\Box\varphi$ a $\Diamond\varphi$ sú pravdivé vo svete w v modelu M, $w \vDash \Box\varphi$ resp. $w \vDash \Diamond\varphi$; nepravdivosť týchto formúl sa vyjadruje $w \nvDash \Box\varphi$ resp. $w \nvDash \Diamond\varphi$. Potom podmienky (50) a (51) z tabuľky uvedenej vyššie môžeme prezentovať takto

$$\left(w \vDash \Box\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma(w) \neq \emptyset\right) \\ \mathbf{1} & \left(pre\,\Gamma(w) = \emptyset\right) \end{cases} \tag{52}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma(w) \neq \emptyset\right) \\ \mathbf{0} & \left(pre\,\Gamma(w) = \emptyset\right) \end{cases} \tag{53}$$

kde bolo vykonané aj zovšeobecnenie formúl pre prípad, že podmnožina $\Gamma(w)$ obsahujúca dostupné svety zo sveta w je prázdna.

Metóda sémantických tabiel pre modálnu logiku je jednoduchým rozšírením tohto prístupu platného pre výrokovú logiku tak, že zavedieme nové rozšírenia sémantického tabla pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$, pozri obr. 25.



Obr. 25. Rozšírenie metódy sémantických tabiel pre modálnu logiku. V dolnej časti diagramu vpravo sú uvedené objekty z množiny W (možné svety), pre ktoré formula platí.

Príklad 19. Metódou sémantického tabla ukážte, že formula $\varphi = \left(\Diamond p \equiv \neg\Box\left(\neg p\right)\right)$ je tautológia. Vzniknuté sémantické tablo je znázornené na obr. 26, kde pre jednoduchosť sú jednotlivé uzly tabla označené číslami 1,…,6 s nasledujúcim komentárom:

1. Koreň tabla obsahuje negovanú formulu $\neg\varphi$, ktorá je ekvivalentnými manipuláciami prepísaná do konjunkcie $\neg\left(\Diamond p \Rightarrow \neg\Box\left(\neg p\right)\right) \wedge \left(\neg\Box\left(\neg p\right) \Rightarrow \Diamond p\right)$,

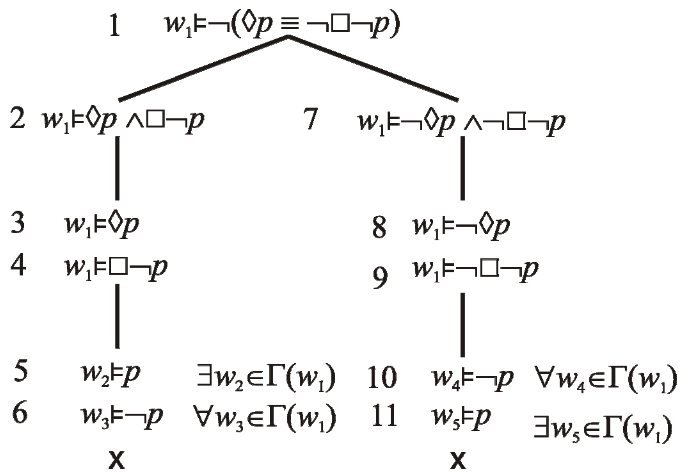
pričom predpokladáme, že ekvivalentný prepis formuly $\neg\varphi = (\Diamond p \wedge \Box\neg p) \vee (\neg\Diamond p \wedge \neg\Box\neg p)$ je uvažovaný vo svete $w_1 \in W$.

2. Tento uzol sémantického tabla obsahuje podformulu $\Diamond p \wedge \Box\neg p$ vo svete w_1, ktorá pochádza z pôvodnej formuly $\neg\varphi = (\Diamond p \wedge \Box\neg p) \vee (\neg\Diamond p \wedge \neg\Box\neg p)$.

3.-4. Tieto dva uzly sú priradené podformulám $\Diamond p$ a $\Box\neg p$, obe uvažované vo svete $w_1 \in W$, ktoré vznikli z predchádzajúceho uzla 2 jeho rozkladom podľa konjunkcie.

5. Uzol vznikol z uzla 3 odstránením modálneho operátora $\Diamond$, vzniknutá podformula p je uvažovaná vo svete $\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$.

6. Uzol vznikol z uzla 4 odstránením modálneho operátora $\Box$, vzniknutá podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svetoch $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$. Táto vetva sémantického tabla je ***uzavretá***, pretože dvojica komplementárnych literálov p a $\neg p$ môže existovať v rovnakom svete $w_2 = w_3$. Podobným spôsobom môže byť komentovaná aj druhá vetva sémantického table obsahujúca uzly 7.-11., ktorá je taktiež uzavretá. Týmto sme dokázali, že formula φ je **tautológia**, jej pravdivostná hodnota nezávisí na zobrazení *v*, ktoré špecifikuje pravdivostnú hodnotu atomických premenných v jednotlivých svetoch z W a taktiež nie je závislá od tvaru podmnožín $\Gamma(w)$ zavedených pri definícii Kripkeho modelu.



Obr. 26. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p))$

Príklad 20. Metódou sémantického tabla ukážte, že formula $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 27. Popis jednotlivých uzlov sémantického tabla z obr. 27:

1. Uzol sémantického tabla je inicializovaný formulou $\neg\varphi = \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$, ktorá je uvedená aj v upravenom ekvivalentnom tvare $\neg\varphi = \Box p \wedge \neg\Diamond p$, pričom formula $\neg\varphi$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
2. Uzol obsahuje podformulu $\Box p$ vo svete $w_1 \in W$.
3. Uzol obsahuje podformulu $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$ vo svete $w_1 \in W$.
4. Uzol obsahuje literál p, ktorý vznikol z uzlu 2 odstránením spojky $\Box$, podformula je uvažovaná vo svetoch $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$.
5. Uzol vznikol z uzlu 3 jeho prepisom pomocou formuly $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$, pričom podformula $\Box\neg p$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
6. Uzol vznikol z 5 odstránením modálnej spojky $\Box$, podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svetoch $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$, komplementárne literály z uzla 4 a 6 musia existovať v rovnakom svete $w_2 = w_3$, t. j. vetva je uzavretá a formula φ je tautológia.

1 $w_1 \vDash \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$

2 $w_1 \vDash \Box p$
3 $w_1 \vDash \neg\Diamond p$

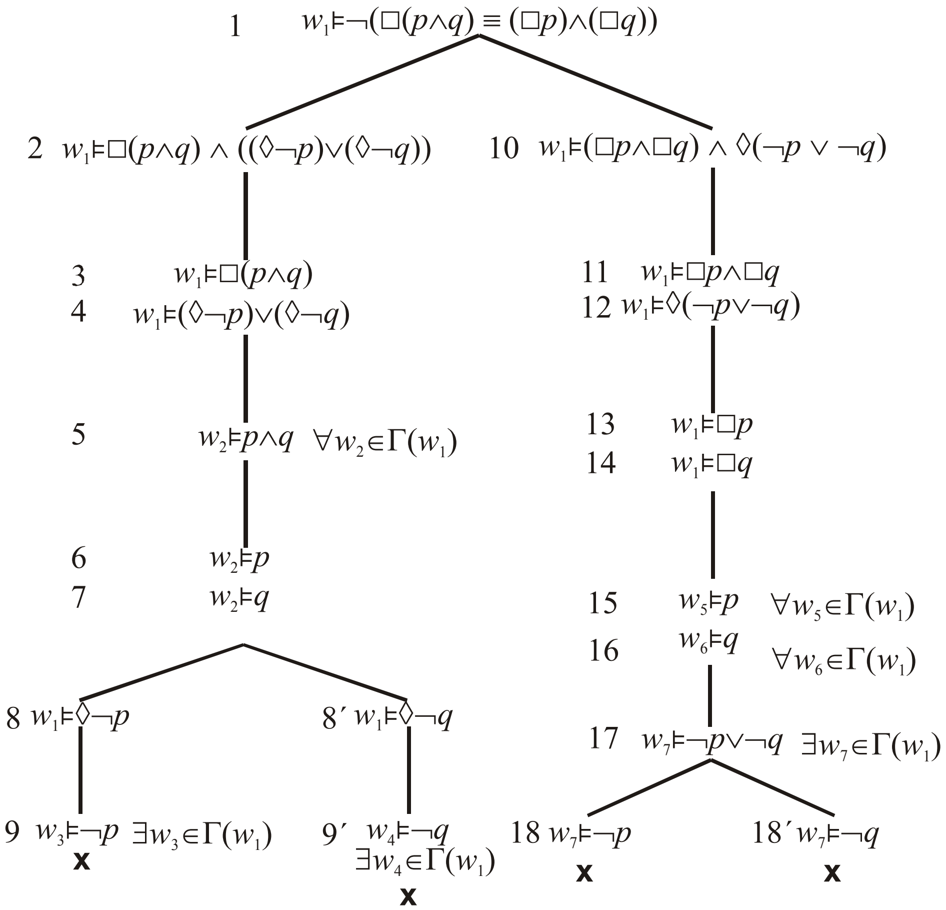
4 $w_2 \vDash p \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$
5 $w_1 \vDash \Box\neg p$

6 $w_3 \vDash \neg p \quad \forall w_3 \in \Gamma(w_1)$
x

Obr. 27. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$.

Príklad 21. Metódou sémantického tabla zistíme, že formula $\varphi = \big((\Box(p \wedge q)) \equiv ((\Box p) \wedge (\Box q))\big)$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 28. Nebudeme už popisovať každý uzol sémantického tabla, ktoré má 4 uzavreté vetvy, ktoré idúc zľava doprava sú tieto:

1. vetva, obsahuje uzly 1-9, dvojica komplementárnych literálov je p (vo svetoch $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svete $\exists w_3 \in \Gamma(w_1)$), potom pre $a = w_3 = w_2$ táto komplementárna dvojica súčasne existuje vo svete $a \in \Gamma(w_1)$.



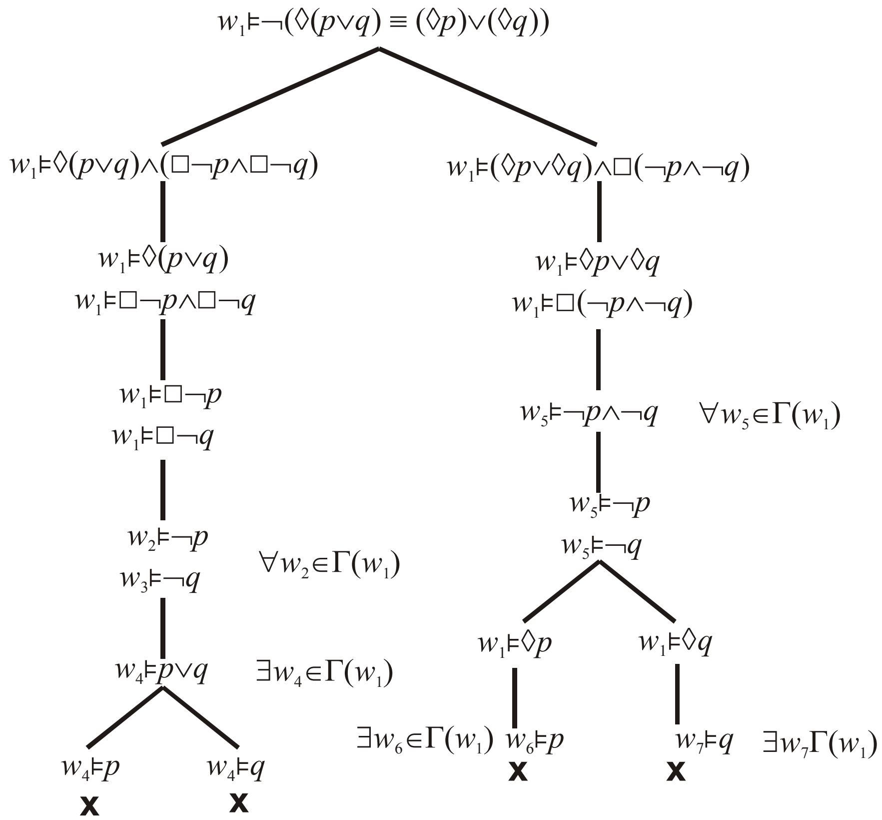
Obr. 28. Sémantické tablo formuly $\varphi = \left(\left(\Box\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\Box p\right) \wedge \left(\Box q\right)\right)\right)$

2. vetva, obsahuje uzly 1-7, 8′, 9′, dvojica komplementárnych literálov pre túto vetvu obsahuje q (vo svetoch $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svete $\exists w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre $a = w_4 = w_2$ daná komplementárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.
3. vetva, obsahuje uzly 1, 10-18, dvojica komplementárnych literálov je p (vo svetoch $\forall w_5 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svetoch $\forall w_7 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet $a = w_5 = w_7 \in \Gamma(w_1)$ daná komplementárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.
4. vetva, obsahuje uzly 1,10-17, 18′, dvojica komplementárnych literálov je q (vo svete $\exists w_6 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svetoch $\forall w_7 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet

$a = w_6 = w_7 \in \Gamma(w_1)$ daná komplementárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.

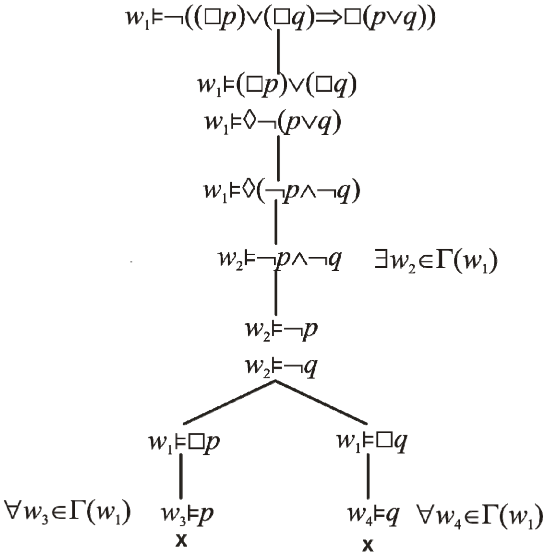
Týmto sme ukázali, že všetky vetvy sú uzavreté, t. j. formula $\varphi = \left(\left(\Box(p \wedge q)\right) \equiv \left((\Box p) \wedge (\Box q)\right)\right)$ je tautológia.

Príklad 22. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = \left(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\right)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 29. Nebudeme špecifikovať jednotlivé elementárne kroky konštrukcie sémantického tabla, zdôrazníme len, že všetky vetvy tabla sú uzavreté, t. j. formula φ je tautológia (ktorá je pravdivá pre každé zobrazenie *v* a v každom svete *w*).



Obr. 29. Sémantické tablo formuly $\varphi = \left(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\right)$

Príklad 23. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 30, ktorý obsahuje dve uzavreté vetvy, t. j. formula je tautológia.



Obr. 30. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$

Príklad 24. Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla je znázornená na obr. 31. Tablo obsahuje dve vetvy, jedna vetva (ľavá) je uzavretá, zatiaľ čo pravá vetva je otvorená, pretože svet w_4 je fixovaný už z ľavej vetvy. Tabuľka 11 obsahuje druhý alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia (alebo presnejšie, falzifikáciu predpokladu tautologičnosti formuly). Pomocou sémantického tabla z obr. 31 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných p a q, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných p a q v rôznych svetoch z množiny $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, kde podmnožiny dosiahnuteľných svetov sú špecifikované takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}$, $\Gamma(w_3) = \{w_3\}$, je formula vždy nepravdivá vo svete w_1, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť.

Tabuľka 11. Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1

1 $w_1 \nvDash \neg(\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q))$

2 $w_1 \vDash \Box(p \vee q)$

3 $w_1 \vDash \Diamond \neg p$

4 $w_1 \vDash \Diamond \neg q$

5 $w_2 \vDash \neg p$ $\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$

6 $w_3 \vDash \neg q$ $\exists w_3 \in \Gamma(w_1)$ $w_2 \neq w_3$

7 $w_4 \vDash p \vee q$ $\forall w_4 \in \Gamma(w_1)$

8 $w_4 \vDash p$ 9 $w_4 \vDash q$

X O

Obr. 31. Sémantické tablo pre falzifikáciu tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$.

5.1 Formulácia modálnej predikátovej logiky

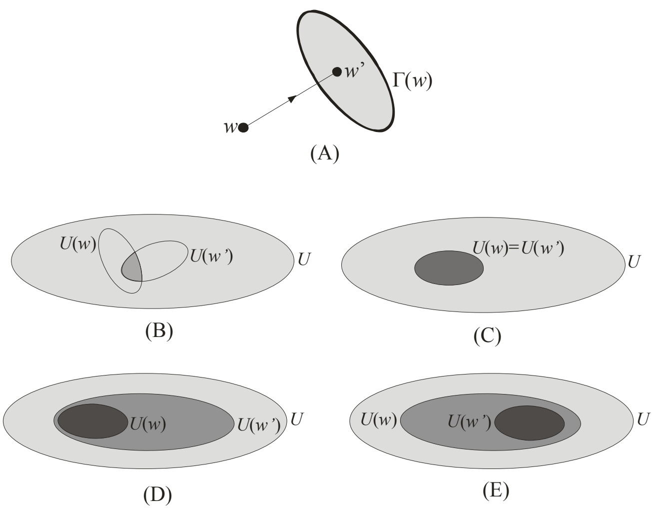
V tejto kapitole vykonáme kombináciu predikátovej (pozri kapitoly 4) a modálnej logiky, jej výsledkom bude modálna predikátová logika, ktorá súčasne obsahuje tak unárne modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$, ako aj kvantifikátory $\forall$ a $\exists$. Syntax modálnej predikátovej logiky jednoducho získame, ak napríklad formuláciu syntaxe predikátovej logiky rozšírime o obe modálne spojky. Sémantika takto vzniknutej modálnej predikátovej logiky žiaľ už nie je taká jednoduchá, aká je sémantika tak modálnej logiky (založenej na Kripkeho modeli dostupných svetov), ako aj predikátovej logiky. Nové zovšeobecnenie spočíva v tom, že univerzum U závisí od sveta $w \in W$ v ktorom je uvažovaná formula φ modálnej predikátovej logiky študovaná. Pre každý svet $w \in W$ vyberieme podmnožinu $U(w) \subseteq U$, ktorá špecifikuje kvantifikátory vzhľadom k danému svetu. Budeme uvažovať tieto tri alternatívy (pozri obrázok 32)

$$(w,w') \in R \Rightarrow \begin{cases} U(w) = U(w') & (\textit{konštantné univerzum, diagram } C) \\ U(w) \subseteq U(w') & (\textit{rastúce univerzum, diagram } D) \\ U(w) \supseteq U(w') & (\textit{zmenšujúce sa univerzum, diagram } E) \end{cases} \tag{54}$$

Pre modálnu predikátovú logiku budeme špecifikovať Kripkeho sémantický model v zjednodušenom tvare

$$\mathcal{M} = \left(W, R, \mathcal{V}, w_0, \{U(w)\}_{w \in W}\right) \tag{55}$$

kde $W=\{w,w',w'',...\}$ je ***množina svetov*** a $R\subseteq W\times W$ je binárna relácia ***dostupnosti*** nad množinou *W*. Diagram A na obr. 32 ilustruje túto reláciu alternatívnym spôsobom pomocou podmnožín $\Gamma(w)\subseteq W$, kde $\Gamma(w)=\{w';(w,w')\in R\}$ obsahuje susedov – nasledovníkov sveta *w*. Výraz $\mathcal{V}$ špecifikuje ***pravdivostnú interpretáciu*** formúl modálnej predikátovej logiky, obsahuje tak pravdivostnú interpretáciu predikátovej logiky, ako aj modálnej logiky. Pretože prezentujeme zjednodušený sémantický model modálnej predikátovej logiky, nebudeme bližšie špecifikovať sémantický interpretačný postup obsiahnutý v operátore $\mathcal{V}$. Výraz w_0 špecifikuje ***vybraný svet*** z *W*, vzhľadom ku ktorému je zostrojený model $\mathcal{M}$. Konečne, $\{U(w)\}_{w\in W}$ je ***množina univerzí*** špecifikovaných pre všetky možné svety z *W*. Predpokladáme, že tieto množiny vyhovujú jednej z relácii z (54), t. j. sú konštantné, rastúce, alebo zmenšujúce sa.



Obr. 32. (A) Schematické znázornenie dostupných svetov $w'\in\Gamma(w)$ z aktuálneho sveta *w*. (B) Vo všeobecnosti podmnožiny $U(w)\subseteq U$ sú rôzne a nemusia vyhovovať žiadnej relácii medzi podmnožinami. (C) Znázornenie ***konštantného univerzá***, kde *w* a *w´* sú ľubovoľné svety z *W*. (D) ***Rastúce univerzá***, pre dvojicu $w'\in\Gamma(w)$ (alebo $(w,w')\in R$) platí $U(w)\subseteq U(w')$. (E) ***Zmenšujúce sa univerzá***, pre dvojicu $w'\in\Gamma(w)$ platí $U(w)\supseteq U(w')$.

Tabuľka 12. Elementárne formuly modálnej predikátovej logiky

1	$w_0\models\Diamond(\exists x)P(x)$	1´	$w_0\models(\exists x)\Diamond P(x)$
2	$w_0\models\Diamond(\forall x)P(x)$	2´	$w_0\models(\forall x)\Diamond P(x)$
3	$w_0\models\Box(\exists x)P(x)$	3´	$w_0\models(\exists x)\Box P(x)$
4	$w_0\models\Box(\forall x)P(x)$	4´	$w_0\models(\forall x)\Box P(x)$

Nech φ je formula modálnej logiky, skutočnosť, že táto formula je pravdivá vo zvolenom svete $w_0 \in W$ budeme znázorňovať výrazom $w_0 \vDash \varphi$. V tab. 12 je uvedených 8 elementárnych formúl modálnej predikátovej logiky s predikátmi $P(x)$, budeme študovať ich pravdivosť vo vybranom svete w_0, pričom budeme predpokladať, že univerzá sú konštantné, rastúce, alebo zmenšujúce sa.

Pre ilustráciu zvoleného postupu budeme podrobne študovať metódou prirodzenej dedukcie formulu 1 z tab. 12, $w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$, budeme vyšetrovať, či táto formula implikuje formulu $w \vDash P(a)$, kde $\exists w \in \Gamma(w_0)$ a $\exists a \in U(w)$

1.	$w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$	
2.	$w \vDash (\exists x)P(x)$	$\exists w \in \Gamma(w_0)$
3.	$w \vDash P(a)$	$\exists a \in U(w)$
4.	$(w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)) \Rightarrow (w \vDash P(a))$	

Riadok 2 vznikol z riadku 1 tak, že sme odstránili vo svete w_0 modálny operátor ◊, v nasledujúcom kroku (riadok 3) sme konkretizovali existenčný kvantifikátor z formuly na riadku 2. Na záver (riadok 4) sme pomocou vety o dedukcii previedli predpoklad na ľavú stranu dôsledku pomocou implikácie. Týmto sme ukázali, že pôvodná formula $w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$ implikuje záver $w \vDash P(a)$. Tento postup môžeme zopakovať aj v inverznom poriadku

1.	$w \vDash P(a)$	$\exists a \in U(w)$
2.	$w \vDash (\exists x)P(x)$	$\exists w \in \Gamma(w_0)$
3.	$w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$	
4.	$(w \vDash P(a)) \Rightarrow (w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x))$	

Týmto sme dokázali, že platí ekvivalencia $(w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)) \equiv (w \vDash P(a))$, t. j. relácia $w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, keď je pravdivá $w \vDash P(a)$ v niektorom svete susednom so svetom w_0, $\exists w \in \Gamma(w_0)$, a pre niektorý objekt $\exists a \in U(w)$. Týmto spôsobom dostaneme tieto formuly

$$w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x) \Rightarrow w \vDash \mathrm{P}(a) \quad (\text{pre } \exists w \in \Gamma(w_0), \exists a \in U(w)) \tag{56a}$$

$$w_0 \vDash (\exists x)\Diamond P(x) \Rightarrow w \vDash \mathrm{P}(a) \quad (\text{pre } \exists w \in \Gamma(w_0), \exists a \in U(w_0)) \tag{56a´}$$

$$w_0 \vDash \Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow w \vDash P(t) \quad (\text{pre } \exists w \in \Gamma(w_0), \forall t \in U(w)) \tag{56b}$$

$$w_0 \vDash (\forall x)\Diamond P(x) \Rightarrow w \vDash P(t) \quad (\text{pre } \exists w \in \Gamma(w_0), \forall t \in U(w_0)) \tag{56b´}$$

$$w_0 \vDash \Box(\exists x)P(x) \Rightarrow w \vDash P(a) \quad (\text{pre } \forall w \in \Gamma(w_0), \exists a \in U(w)) \tag{56c}$$

$$w_0 \vDash (\exists x)\Box P(x) \Rightarrow w \vDash P(a) \qquad \left(\text{pre } \forall w \in \Gamma(w_0), \exists a \in U(w_0)\right) \tag{56c′}$$

$$w_0 \vDash \Box(\forall x) P(x) \Rightarrow w \vDash P(t) \qquad \left(\text{pre } \forall w \in \Gamma(w_0), \forall t \in U(w)\right) \tag{56d}$$

$$w_0 \vDash (\forall x)\Box P(x) \Rightarrow w \vDash P(t) \qquad \left(\text{pre } \forall w \in \Gamma(w_0), \forall t \in U(w_0)\right) \tag{56d′}$$

Tieto elementárne formuly modálnej predikátovej logiky môžeme zhrnúť ako elementárne predĺženia v metóde sémantických tabiel pre súčasné odstránenie modálnej spojky a kvantifikátora (pozri tab. 13).

Tabuľka 13. Výsledky metódy sémantických tabiel pre elementárne formuly modálnej predikátovej logiky z tab. 12

1	$w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(a)$	$\exists w \in \Gamma(w_0)$ $\exists a \in U(w)$	1′	$w_0 \vDash (\exists x)\Diamond P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(a)$	$\exists a \in U(w_0)$ $\exists w \in \Gamma(w_0)$
2	$w_0 \vDash \Diamond(\forall x)P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(t)$	$\exists w \in \Gamma(w_0)$ $\forall t \in U(w)$	2′	$w_0 \vDash (\forall x)\Diamond P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(t)$	$\forall t \in U(w_0)$ $\exists w \in \Gamma(w_0)$
3	$w_0 \vDash \Box(\exists x)P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(a)$	$\forall w \in \Gamma(w_0)$ $\exists a \in U(w)$	3′	$w_0 \vDash (\exists x)\Box P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(a)$	$\exists a \in U(w_0)$ $\forall w \in \Gamma(w_0)$
4	$w_0 \vDash \Box(\forall x)P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(t)$	$\forall w \in \Gamma(w_0)$ $\forall t \in U(w)$	4′	$w_0 \vDash (\forall x)\Box P(x)$ $\vert$ $w \vDash P(t)$	$\forall t \in U(w_0)$ $\forall w \in \Gamma(w_0)$

$$\begin{array}{cl}
w_0 \nvDash \Diamond(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Diamond P(x) & \\
\vert & \\
w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\Box\neg P(x) & \\
\vert & \\
w_0 \vDash \Diamond(\exists x)P(x) & \\
w_0 \vDash (\forall x)\Box\neg P(x) & \\
\vert & \\
w \vDash (\exists x)P(x) & \exists w \in \Gamma(w_0) \\
w_0 \vDash \Box\neg P(t) & \forall t \in U(w_0) \\
\vert & \\
w \vDash P(a) & \exists a \in U(w) \\
w' \vDash \neg P(t) & \forall w' \in \Gamma(w)
\end{array}$$

Obr. 33. Sémantické tablo formuly $\Diamond(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Diamond P(x)$. Ak položíme $w = w'$ a $a = t$, posledné dva riadky produkujú kontradikciu, potom formula (57a) je tautológia pre konštantné univerzá a taktiež aj pre zmenšujúce sa univerzá (pozri obr. 34).

Teraz obrátime našu pozornosť na zložitejšie formuly modálnej predikátovej logiky, menovite budeme študovať ***Barcanovej formuly*** [14]

$$\Diamond(\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)\Diamond P(x) \tag{57a}$$

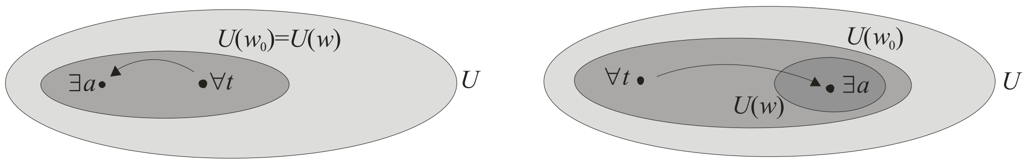
$$(\forall x)\Box P(x)\Rightarrow\Box(\forall x)P(x) \tag{57b}$$

a ***konverzné Barcanovej formuly***

$$\Box(\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)\Box P(x) \tag{58a}$$

$$(\exists x)\Diamond P(x)\Rightarrow\Diamond(\exists x)P(x) \tag{58b}$$

Tieto formuly zohrali dôležitú úlohu v rozvoji teórie modálnej predikátovej logiky, kde boli použité ako základný testovací príklad pre rozvoj rôznych sémantických teórií tohto typu logiky. V prvom kroku použijeme metódu sémantických tabiel (pozri obr. 33) pre zistenie pravdivosti Barcanovej formuly (57a)



(A) (B)

Obr. 34. (A) diagram znázorňuje prípad, keď univerzá sú konštantné, v tomto prípade môžeme stotožniť ľubovoľný objekt t s vybraným objektom a. (B) diagram znázorňuje situáciu, keď univerzá sú zmenšujúce sa, t. j. $(w_0,w)\in R\Rightarrow U(w_0)\supseteq U(w)$, v tomto prípade ľubovoľný objekt t môže byť stotožnený s daným objektom a.

Podobným spôsobom môžeme študovať aj ostatné Barcanovej formuly (57b) a (58a-b), výsledky sú zhrnuté v tab. 14.

Tabuľka 14. Tautologičnosť Barcanovej formúl pre rôzne typy univerzálnych množín

#	Formula	konštantné univerzum	rastúce univerzum	zmenšujúce sa univerzum
1	$\Diamond(\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)\Diamond P(x)$	áno	nie	áno
2	$(\forall x)\Box P(x)\Rightarrow\Box(\forall x)P(x)$	áno	nie	áno
1□	$\Box(\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)\Box P(x)$	áno	áno	nie
2□	$(\exists x)\Diamond P(x)\Rightarrow\Diamond(\exists x)P(x)$	áno	áno	nie

Z tab. 14 vyplýva zaujímavý poznatok, že pre konštantné univerzá modálne operátory „komutujú“. To znamená, že ak sa použije klasický Kripkeho sémantický model pre modálnu predikátovú logiku s konštantnými univerzami (napr. pre každé $w\in W$ nech platí $U(w)=U_0\subseteq U$), potom všetky Barcanovej formuly sú tautológie.

Na záver tejto kapitoly budeme študovať metódou sémantického tabla formulu modálnej predikátovej logiky, ktorá nie je tautológiou

$$\Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Box P(x) \tag{59}$$

Na obr. 35 je znázornené sémantické tablo pre túto formulu, pretože vo všeobecnosti $w \neq w'$, študovaná formula (59) nie je tautológia.

$$w_0 \not\models \Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Box P(x)$$
$$|$$
$$w_0 \models \Diamond(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)\Diamond\neg P(x)$$
$$|$$
$$\begin{array}{l} w_0 \models \Diamond(\forall x)P(x) \\ w_0 \models (\forall x)\Diamond\neg P(x) \end{array}$$
$$|$$
$$\begin{array}{ll} w \models (\forall x)P(x) & \exists w \in \Gamma(w_0) \\ w_0 \models \Diamond\neg P(t) & \forall t \in U(w_0) \end{array}$$
$$|$$
$$\begin{array}{ll} w \models P(t') & \forall t' \in U(w) \\ w' \models \neg P(t) & \exists w' \in \Gamma(w) \end{array}$$

Obr. 35. Sémantické tablo dôkazu tautologičnosti formuly $\Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Box P(x)$.

Vlastnosť netautologičnosti formuly (59) môžeme verifikovať tak, že pomocou sémantického tabla z obr. 35 navrhneme taký model v ktorom táto formula je nepravdivá, t. j. nie je tautológia (môžeme povedať, že sme falzifikovali predpoklad tautologičnosti). Nech model $\mathcal{M}$ je špecifikovaný dvojzložkovým univerzom $U = \{a, b\}$ a $\Gamma(w_0) = \{w, w'\}, \Gamma(w) = \Gamma(w') = \emptyset$. Postulujme, že vo svete w je predikát P pravdivý pre všetky objekty z univerza U a vo svete w' je tento predikát P nepravdivý pre všetky objekty z univerza U, pozri tab. 15.

Tabuľka 15. Konštrukcia jednoduchého modelu pre falzifikáciu tautologičnosti formuly (59).

	w_0	w	w'
$P(a)$	*	1	0
$P(b)$	*	1	0
$w_0 \models \Diamond\neg P(a)$	1	*	*
$w_0 \models \Diamond\neg P(b)$	1	*	*
$w \models (\forall x)P(x)$	*	1	*
$w_0 \models (\forall x)\Diamond\neg P(x)$	1	*	*
$w_0 \models \Diamond(\forall x)P(x)$	1	*	*
$w_0 \not\models (\exists x)\Box P(x)$	0	*	*
$w_0 \models \Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Box P(x)$	0	*	*

To znamená, že pre formulu $\Diamond(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)\Box P(x)$ existuje model v ktorej je nepravdivá, čiže formula nie je tautológia.

6 Záver

Cieľom tejto kapitoly bolo ukázať použitie techniky sémantických tabiel v klasických aj neklasických logikách. Idea sémantických tabiel má svoje prvopočiatky už v Gentzenovej prirodzenej dedukcii, ktorá bola vytvorená 30. rokoch minulého storočia, jej základy boli vytvorené v polovici 50. rokov minulého storočia logikmi Bethom a Hintikkom a do konečnej formy rozpracované v polovici 60. rokov minulého storočia logikom Smullyanom. Mimoriadne postavenie majú sémantické tablá v modálnej logike, kde tvoria vlastne jedinú univerzálnu metódu na stanovenie pravdivosti formúl modálnej logike. Taktiež, ako bolo ukázané mladým logikom Saulom Kripkem počiatkom 60. rokov minulého storočia, pomocou nich môžu byť jednotlivé modálne logiky klasifikované vlastnosťami binárnej relácie dostupnosti medzi možnými svetmi, čo podstatne zjednodušuje pôvodný ťažkopádny syntaktický prístup k špecifikácii rôznych modálnych logík. Môžeme teda konštatovať, že technika sémantických tabiel má v súčasnosti prominentné postavenie v matematickej logike, ako jednoduchý a názorný prostriedok na stanovenie tautologičnosti formúl, určenie modelov teórií, v inverznom poradí sú semantické tablá identické Gentzenovej prirodzenej dedukcii, a čo je najdôležitejšie, pre logiky používajúce Kripkeho sémantiku dostupných svetov (modálne logiky a ich zovšeobecnenie do predikátovej formy) technika sémantických tabiel je vlastne jedinou technikou na vyšetrovanie formúl na sémantickej úrovni.

Literatúra

[1] Aliseda, A.: *Abductive Reasoning. Logical Investigations into Discovery and Explanation*. Springer, Berlin 2006.

[2] Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam 1959.

[3] Beth, E. W: Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. **18** (1955) 309-342.

[4] Blackburn, P., van Benthen, J., Wolter, F. (eds.): *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, Amsterdam 2007.

[5] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hahnle, R., Posegga, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods*. Springer, Berlin 1999.

[6] Fitting, M., Mendelsohn, R. L.: *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht 1998.

[7] Garson, J. W.: *Modal Logic for Philosophers.* Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[8] Gödel, K.: Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4** (1932) 39-40.

[9] Hintikka, j.: A new approach to sentential logics. *Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys.-Math.* **17** (1953) 2.

[10] Hintikka, J.: Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica* **8** (1955) 8–55.

[11] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2008.

[12] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2006.

[13] Lewis, C. I.: *A Survey of Symbolic Logic.* University of California Press, Berkeley 1918.

[14] Marcus, R. B.: A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication.. *Journal of Symbolic Logic* **11** (1946) 1-16.

[15] Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[16] Peregrin, J., Svoboda, V.: *Od jazyka k logice*. Academia, Praha 2009.

[17] Priest, G.: *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[18] Šefránek, J.: *Inteligencia ako výpočet*. IRIS, Bratislava, 2000.

[19] Smullyan, R. M.: A unifying principle in quantification theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **49** (1963) 828–832.

[20] Smullyan, R. M.: Analytic natural deduction. *Journal of Symbolic Logic* **30** (1965) 123–139.

[21] Smullyan, R. M.: *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin 1968 (slovenský preklad *Logika prvého rádu*. ALFA, Bratislava 1979).

[22] Szabo, M. E. (ed.): *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam 1969.