Polynómy, algebraické rovnice, korene a rozklad racionálnej funkcie

Polynómy

Definícia: ***Polynóm*** n-tého stupňa premennej x (komplexnej) je definovaný vzťahom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sú koeficienty (komplexné) polynómu.

Stupeň polynómu $P(x)$ označíme $deg(P) = n$.

Algebraické operácie nad polynómami

Nech $\mathcal{P}(x)$ je množina všetkých polynómov premennej x,

$$\mathcal{P}(x) = \{P(x)\}$$

Nad takto definovanou množinou obsahujúcou všetky možné polynómy premennej x môžeme definovať operácie:

(1) súčinu skalára s polynómom,
(2) súčet a rozdiel dvoch polynómov,
(3) súčin dvoch polynómov.

Pripomeňme, že tieto operácie zachovávajú množinu $\mathcal{P}(x)$.

Dva polynómy $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ sú si ***rovné*** (ekvivalentné, $P(x) = Q(x)$) vtedy a len vtedy ak platí

$$\left(P(x) = Q(x)\right) =_{def} \left(\deg(P) = \deg(Q)\right) \wedge \left(\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\right)\left(a_k = b_k\right)$$

Súčin skalára α s polynómom $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$$\alpha * P(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha * a_k) x^k$$

Súčet (rozdiel) polynómov $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ (predpokladáme, že $deg(P) \geq deg(Q)$)

$$P(x) \pm Q(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \pm b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k$$

Súčin polynómov $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$

$$P(x) * Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k'=0}^{m} a_k b_{k'} x^{k+k'}$$

Operácia delenia dvoch polynómov

Podiel polynómov $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ má tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

čo môžeme prepísať do alternatívneho tvaru

$$P(x) = R(x) * Q(x) + S(x)$$

(1) V prípade, že platí $\deg(P) < deq(Q)$, potom platí $S(x) = P(x)$ a $R(x) = 0$.

(2) Podiel dvoch polynómov je dobre definovaná operácia len ak je splnená táto podmienka

$$\deg(P) \geq deq(Q)$$

Potom pre stupne $R(x)$ a $S(x)$ platí

$$deg(R) = deg(P) - deg(Q) \geq 0$$
$$deg(S) < deg(Q)$$

Príklad

Nech $P(x) = 1 + 2x + x^2 - x^3$ a $Q(x) = 2 + x + x^2$, podľa požadovanej vlastnosti (A5a) spočítame podiel

$$\frac{1 + 2x + x^2 - x^3}{2 + x + x^2} = R(x) + \frac{S(x)}{2 + x + x^2}$$

alebo

$$1 + 2x + x^2 - x^3 = R(x)\left(2 + x + x^2\right) + S(x) \tag{$*$}$$

Predpokladajme, že polynómy $R(x)$ a $S(x)$ majú tvar

$$R(x) = a_0 + a_1 x, \;\; S(x) = b_0 + b_1 x$$

kde a_i a b_j sú neznáme koeficienty, ktoré určíme tak, aby platila podmienka ($*$).

Dosadením týchto dvoch polynómov do (*) dostaneme

$$1+2x+x^2-x^3=\left(a_0+a_1x\right)\left(2+x+x^2\right)+\left(b_0+b_1x\right)$$

Porovnaním pravej a ľavej strany dostaneme rovnice, ktoré špecifikujú neznáme koeficienty a_i a b_j

$$1+2x+x^2-x^3=\underbrace{\left(2a_0+b_0\right)}_{1}+\underbrace{\left(a_0+2a_1+b_1\right)}_{2}x+\underbrace{\left(a_0+a_1\right)}_{1}x^2+\underbrace{\left(a_1\right)}_{-1}x^3$$

Riešením týchto rovníc dostaneme

$$a_1=-1, a_0=2, b_1=-2, b_0=-3$$

Potom riešenie delenia dvoch polynómov má tvar

$$\frac{1+2x+x^2-x^3}{2+x+x^2}=\left(2-x\right)+\frac{-3-2x}{2+x+x^2}$$

Príklad

Konštrukcia rozkladu racionálnej funkcie na tvar $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \dfrac{S(x)}{Q(x)}$ môže byť jednoducho realizovaná pomocou „stredoškolskej“ operácia delenie dvoch polynómov,

$$\left(-x^3 + x^2 + 2x + 1\right) : \left(x^2 + x + 2\right) = ?$$

1. krok:

$$\left(\boxed{-x^3} + x^2 + 2x + 1\right) : \left(\boxed{x^2} + x + 2\right) = -x$$

$$\frac{-x^3}{x^2} = -x$$

$$\begin{array}{r} +x^3 + x^2 + 2x \\ \hline 2x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

2. krok:

$$\left(-x^3+x^2+2x+1\right):\left(\boxed{x^2}+x+2\right)=\underbrace{-x+2}_{podiel}$$

$$\boxed{2x^2}+4x+1$$

$$\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\underline{-2x^2-2x-4}$$

$$\underbrace{2x-3}_{zbytok}$$

3. krok:

$$\left(-x^3+x^2+2x+1\right):\left(\boxed{x^2}+x+2\right)=\underbrace{-x+2+\frac{2x-3}{x^2+x+2}}_{podiel\ a\ zbytok}$$

$$\boxed{2x}-3$$

Algebraická rovnica, korene

C. F. Gauss (1777–1855)

Nech $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ je polynóm n-tého stupňa, ***algebraická rovnica*** priradená tomuto polynómu má tvar

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

Číslo α sa nazýva ***koreň*** algebraickej rovnice práve vtedy ak platí

$$P(\alpha)=0$$

Fundamentálna veta algebry (Gauss). Každá algebraická rovnica má v oblasti komplexných čísel aspoň jeden koreň.

Dôkaz tejto vety je netriviálna záležitosť, pri jej dôkazu sa obvykle využíva sofistikovaný aparát matematickej analýzy komplexnej premennej.

Veta.

Ak α_1 je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$, potom platí formula

$$P(x) = (x - \alpha_1) S(x)$$

kde $S(x)$ je polynóm so stupňom o jednotku menším, ako stupeň pôvodného polynómu $P(x)$, $deg(S) = deg(P) - 1$. Lineárny polynóm $(x - \alpha_1)$ sa nazýva ***koreňový člen***.

Dôkaz dôležitej formuly: Nech α_1 je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$ n-tého stupňa, potom platí $P(\alpha_1) = 0$. Pre každé x potom platí

$$P(x) - P(\alpha_1) = (x - \alpha_1) a_1 + (x^2 - \alpha_1^2) a_2 + \ldots + (x^n - \alpha_1^n) a_n \qquad (*)$$

Pre každé $k > 1$ platí $(x^k - \alpha_1^k) = (x - \alpha_1)(\alpha_1^{k-1} + \alpha_1^{k-2} x + \ldots + x^{k-1})$, Potom $(*)$ môžeme upraviť do tvaru $P(x) - P(\alpha_1) = (x - \alpha_1)(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1})$, kde $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sú koeficienty nového polynómu $S(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1}$, QED.

Dôsledok.
Postupným použitím formuly z vety môžeme každý polynóm $P(x)$ prepísať do tvaru, ktorý obsahuje len koreňové členy

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sú korene algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

Korene algebraickej rovnice s reálnymi koeficientmi

Veta.
Nech algebraická rovnica $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$ obsahuje len reálne koeficienty $a_0, a_1, ..., a_n$, potom jej korene sú buď reálne alebo komplexné vyskytujúce sa po komplexne združených dvojiciach, $\alpha_{1,2} = a \pm ib$, t. j. $\alpha_2 = \alpha_1^*$.

Dôkaz tejto vety je jednoduchý. Nech platí $P(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_1^n = 0$, komplexným združením tejto formuly dostaneme $P(\alpha_1^*) = a_0 + a_1\alpha_1^* + ... + a_n(\alpha_1^*)^n = 0$, t. j. aj α_1^* je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

Súčin dvoch koreňových členov, ktoré sú priradené navzájom komplexne združeným koreňom má tvar $(x-\alpha_1)(x-\alpha_1^*) = x^2 + px + q$, kde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$, t. j. $x^2 + px + q = 0$ je kvadratická rovnica s reálnymi koeficientmi, ktorá obsahuje dvojicu navzájom komplexne združených koreňov.

Veta.
Polynóm $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ s reálnymi koeficietmi sa rovná súčinu elementárnych členov, ktoré sú priradené reálnym a komplexným koreňom pridruženej algebraickej rovnice $P(x) = 0$

$$P(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_u)}_{\text{reálne korene}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_vx+q_v)}_{\text{komplexné korene}}$$

Rozklad polynómu z predchádzajúcej vety môže byť jednoducho zovšeobecnený pomocou koncepcie ***multiplicity*** (***násobnosti***) koreňov do kompaktného tvaru

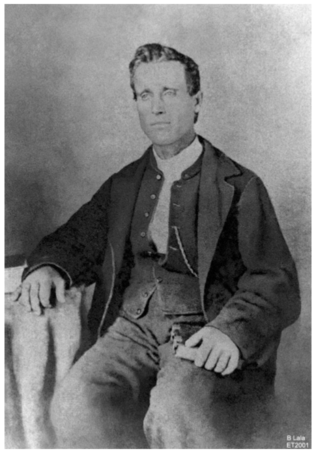
$$P(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\dots}_{\text{reálne korene}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\dots}_{\text{komplexné korene}}$$

kde r_i je násobnosť (multiplicita) i-teho reálneho koreňa a s_j je násobnosť j-tej dvojice komplexne združených koreňov.

Hornerova schéma výpočtu funkčnej hodnoty polynómu

K tomu, aby sme efektívne vypočítali funkčnú hodnotu polynómu $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ pre dané číslo x, upravíme polynóm do tvaru

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \underbrace{a_0 + \underbrace{\left(a_1 + \underbrace{\left(a_2 + \underbrace{\left(a_3 + \ldots \left(\underbrace{a_n}_{b_n} x \right) \right)}_{b_3} x \right)}_{b_2} x \right)}_{b_1} x}_{b_0 = P(x)}$$

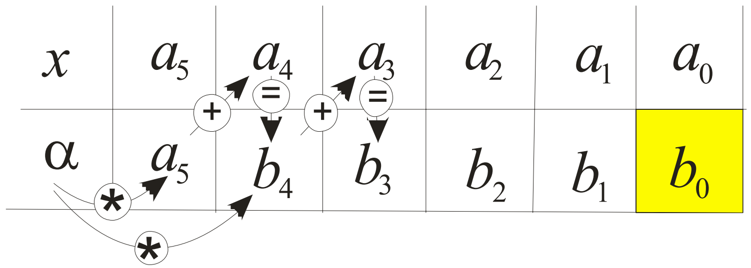


W. G. Horner (1786 – 1837)

Pomocou rekurentne špecifikovaných koeficientov b_i postupne počítame funkčnú hodnotu polynómu $P(x)$

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n x \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 &= a_1 + b_2 x \\ P(\alpha) = b_0 &= a_0 + b_1 x \end{aligned}$$

Hodnota koeficientu b_0 sa rovná funkčnej hodnote polynómu $P(x)$ v čísle α. Postupný výpočet týchto koeficientov, od b_n až poi b_0, nazývame ***Hornerova schéma***, ktorá je vizualizovaná pomocou tabuľky



Príklad

Majme polynóm $P(x) = 6 + x + 2x^2 + 2x^3 - 4x^4 + x^5$, našou úlohou je vzpočítať funkčnú hodnotu tohto polynómu pre číslo $x = 2$. Priamočiary prístup (brute force) k tomuto výpočtu má nasledovný tvar

$$P(x) = 6 + 2 + 2(2)^2 + 2(2)^3 - 4(2)^4 + (2)^5 = 6 + 2 + 2\times 4 + 2\times 8 - 4\times 16 + 32 = 0$$

Podstatne jednoduchší je výpočet založený na predchádzajúcej rekurentnej schéme

$$b_5 = 1$$

$$b_4 = -4 + (1)\times 2 = -2$$

$$b_3 = 2 + (-2)\times 2 = -2$$

$$b_2 = 2 + (-2)\times 2 = -2$$

$$b_1 = 1 + (-2)\times 2 = -3$$

$$b_0 = 6 + (-3)\times 2 = 0 \Rightarrow P(2) = 0$$

Týmto sme aj priamo z definície dokázali, že číslo $x = 2$ je koreňom danej algebraickej rovnice $6 + x + 2x^2 + 2x^3 - 4x^4 + x^5 = 0$.

Tento rekurentný postup výpočtu funkčnej hodnoty polynómu je jednoducho reprezentovaný pomocou tabuľky, ktorá sa nazýva ***Hornerova schéma*** (alebo algoritmus),

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	1	-4	2	2	1	6
2	1	-2	-2	-2	-3	0
1	1	-3	-1	1	2	8
-1	1	-5	7	-5	6	0

Konštrukcia delenia polynómov koreňovými členmi pomocou Hornerovej schémy

Hornerova schéma môže byť efektívne použitá pre delenie polynómov ich koreňovými členmi.

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \qquad (*)$$

kde α je reálny koreň algebraickej rovnice $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, polynóm $Q(x)$ je výsledok delenia polynómu $P(x)$ koreňovým členom

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)} = Q(x)$$

kde $deg\ Q(x) = deg\ P(x) - 1$.

Predpokladajme, že polynóm $Q(x)$ má tvar

$$Q\left(x\right)=b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_2 x+b_1$$

Z podmienky $(*)$ dostaneme roznásobením pravej strany tejto rovnice

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=\left(x-\alpha\right)\left(b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_2 x+b_1\right)=$$
$$b_n x^n+\left(b_{n-1}-\alpha b_n\right)x^{n-1}+\left(b_{n-2}-\alpha b_{n-1}\right)x^{n-2}+\ldots+\left(b_1-\alpha b_2\right)x-\alpha b_1$$

porovnaním pravej a ľavej strany dostaneme Hornerove podmienky pre koeficienty b_i

Dôsledok: Týmto sme dokázali, že pomocou Hornerovej schémy môžeme aj deliť polynómy elementárnym koreňovým členom $\left(x-\alpha\right)$.

(1) Ak α je koreňom rovnice $P\left(x\right)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0$, potom koeficient b_0 = 0, hovoríme, že polynóm $P(x)$ je ***deliteľný*** členom $\left(x-\alpha\right)$ ***bez zbytku***;

(2) v opačnom prípade, ak $b_0 \neq 0$, potom polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $\left(x-\alpha\right)$ so ***zbytkom*** b_0.

Príklad

Polynóm $P(x)=6+x+2x^2+2x^3-4x^4+x^5$ budeme deliť členom $x-\alpha$ pre $\alpha=1,2$, Hornerova schéma má tvar

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	1	-4	2	2	1	6
1	1	-3	-1	1	2	8
2	1	-2	-2	-2	-3	0

(1) Pomocou druhého riadku sme dokázali že $\alpha=1$ nie je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$ (t. j. polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $x-1$ so zbytkom 8, t. j. platí $P(x)/(x-1)=\left(x^4-3x^3-x^2+x+2\right)+8/(x-1)$.

(2) V treťom riadku je dokázané, že $\alpha=2$ je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$; alebo, že polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $x-2$ bez zbytku, t. j. $P(x)/(x-2)=\left(x^4-2x^3-2x^2-2x-3\right)$.

Dôsledok: Znázornený prístup pre výpočet funkčných hodnôt polynómu $P(x)$ pre číslo $x = \alpha$ môže byť efektívne použitý na hľadanie koreňov algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

(1) Ak pre dané číslo $x = \alpha$ dostaneme v poslednom stĺpci nulovú hodnotu, potom $P(\alpha) = 0$, t. j. číslo α je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

(2) Prvých $(n - 1)$ čísel v danom riadku Hornerovej schémy sú koeficienty nového polynómu $Q(x)$

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0	
x	1	-4	2	2	1	6	$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$
2	1	-2	-2	-2	-3	0	$(x-2)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3)$
-1	1	-3	1	-3	0		$(x-2)(x+1)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$
3	1	0	1	0			$(x-2)(x+1)(x-3)(x^2+1)$

Určité problémy spôsobuje stanovanie členov $\left(x^2 + px + q\right)$ so záporným diskriminantom $D = p^2 - 4q$, ktoré sú priradené komplexným koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

Veta.
Polynóm $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ s reálnymi koeficientmi a_i môžeme vyjadriť ako súčin koreňových členov algebraickej rovnice $P(x)=0$

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_a)^{k_a}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_bx+q_b\right)^{l_b}$$

kde α_i je k_i-násobný reálny koreň a kvadratická rovnica $x^2+p_jx+q_j$ špecifikuje dvojicu komplexne združených l_j-násobných koreňov $-(p/2)\pm\sqrt{(p/2)^2-q}$.

Príklad

Nájdite korene algebraickej rovnice

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 12x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 13x + 6 = 0$$

ak poznáme komplexný koreň tejto rovnice $x = 1 + \sqrt{2}i$.

(1) K riešeniu tohto príkladu využijeme vlastnosť, že zo skutočnosti, že rovnica má reálne koeficienty, potom komplexné korene sa vyskytujú po dvojica navzájom komplexne združené, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$. Zostrojíme kvadratickú rovnicu, ktorá má tieto komplexné korene

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 1 - \sqrt{2}i\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}i\right) = x^2 - 2x + 3$$

Týmto kvadratickým polynómom podelíme pôvodnú algebraickú rovnicu

$$\left(x^6 - 5x^5 + 12x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 13x + 6\right) : \left(x^2 - 2x + 3\right) = x^4 \text{-} 3x^3 \text{+} 3x^2 \text{-} 3x \text{+} 2$$

(2) V ďalšom kroku budeme hladať ďalšie štyri korene riešením kvartickej algebraickej rovnice x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0. Pomocou Hornerovej schémy dostaneme

	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0	
x	1	-3	3	-3	2	$x^4-3x^3+3x^2-3x+2$
1	1	-2	1	-2	0	$(x-1)(x^3-2x^2+x-2)$
2	1	0	1	0		$(x-1)(x-2)(x^2+1)$

To znamená, že kompletný rozklad polynómu má tvar

$$P(x)=x^6-5x^5+12x^4-16x^3+17x^2-13x+6=(x-1)(x-2)(x^2-2x+3)(x^2+1)$$

Racionálne korene algebraických rovníc

Ukážeme jednoduchú aplikáciu Hornerovej schémy, ako určiť korene algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami za predpokladu, že existujú racionálne korene.

Veta A2.
Ak algebraická rovnica s celočíselnými koeficietami $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ má racionálne korene $\alpha = p/q$, kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom koeficient a_0 je deliteľný číslom p a koeficient a_n je deliteľný číslom q.

Dôkaz: Nech algebraická rovnica $P(x)=0$ má racionálny koreň $\alpha = p/q$, potom dosadením tohto koreňa do algebraickej rovnice dostaneme

$$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \ldots + a_n p^n = 0 \qquad (*)$$

Túto rovnicu prepíšeme do tvaru

$$\frac{a_0}{p} q^n = -\left(a_1 q^{n-1} + a_2 p q_{n-2} + \ldots + a_n p^{n-1}\right)$$

Pretože pravá strana tejto rovnice je celé číslo, potom a_0/p musí byť súdeliteľné (pretože p a q sú nesúdeliteľné). Podobným spôsobom prepíšeme $(*)$ do tvaru

$$\frac{a_n}{q} p^n = -\left(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}\right)$$

Pretože pravá strana je celé číslo, potom a_n/q musí byť súdeliteľné, QED.

Príklad

Hľadajme korene algebraickej rovnice $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0$. Predpokladajme, že táto rovnica má racionálne korene typu p/q. Na základe predchádzajúcej vety vieme, že ak existuje takýto racionálny koreň, potom $27/p$ a $8/q$ sú súdeliteľné, potom kandidáti pre p a q majú hodnoty

$$27/p \text{ } \textit{je deliteľné} \Rightarrow p = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$$
$$8/q \text{ } \textit{je deliteľné} \Rightarrow q = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

Potom 16 kandidátov na racionálne korene danej algebraickej rovnice sú tieto

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm 9, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{9}{8}, \pm 27, \pm\frac{27}{2}, \pm\frac{27}{4}, \pm\frac{27}{8} \right\}$$

	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	8	-36	54	-27
3/2	8	-24	18	0
3/2	8	-12	0	
3/2	8	0		

To znamená, že pomocou Hornerovej schémy sme ukázali, že číslo $x = 3/2$ je koreňom algebraickej rovnice $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 8(x - 3/2)^3 = 0$

Príklad

Majme algebraickú rovnicu $-6+11x-12x^2+12x^3-6x^4+x^5=0$. Nech táto rovnica má racionálne korene, potom

$$\frac{-6}{p} = \textit{deliteľné bez zbytku} \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$\frac{1}{q} = \textit{deliteľné bez zbytku} \Rightarrow q = \pm 1$$

Potom racionálni kandidáti na korene sú z množiny

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Pomocou Hornerovej schémy vykonáme verifikáciu, ktorý z 8 kandidátov je koreň

x	a_5/b_5: 1	a_4/b_4: -6	a_3/b_3: 12	a_2/b_2: -12	a_1/b_1: 11	a_0/b_0: -6
1	1	-5	7	-5	6	0
2	1	-3	1	-3	0	
3	1	0	1	0		

Verifikovali sme, že čísla $\alpha = 1, 2, 3$ sú korene danej algebraickej rovnice. V poslednom štvrtom riadku schémy sú koeficienty zbytku $\left(x^2+1\right)$. To znamená, že polynóm $P(x) = -6 + 11x - 12x^2 + 12x^3 - 6x^4 + x^5$ môžeme prepísať do tvaru súčinu koreňových členov

$$P(x) = -6 + 11x - 12x^2 + 12x^3 - 6x^4 + x^5 = (x-1)(x-2)(x-3)\left(x^2+1\right)$$

Algebraická rovnica má tri reálne korene $\alpha = 1, 2, 3$ a dva komplexné korene $\alpha = \pm i$.

Rozklad racionálnej funkcie na sumu elementárnych parciálnych zlomkov

Racionálna funkcia $R(x)$ premennej x je definovaná ako podiel dvoch polynómov

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

pričom predpokladáme, že $deg\, Q(x) > 0$ (t. j. menovateľ nie je konštanta, potom by sa polynómy $R(x)$ a $P(x)$ líšili len konštantou). Rozklad racionálnej funkcie rozdelíme do 3 krokov.

1. krok: Racionálnu funkciu delením upravíme tak, aby stupeň čitateľa bol menší ako stupeň menovateľa

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=U(x)+\frac{S(x)}{Q(x)}$$

V prípade, že $deg\,P(x)>deg\,Q(x)$, potom pomocou delenia $P(x):Q(x)$ znížime stupeň $P(x)$ tak, aby bol menší ako stupeň $Q(x)$, pričom zbytok delenia je $S(x)$. Tento krok budeme ilustrovať jednoduchým príkladom

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^5+x^4-x^3+x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}=\underbrace{x+4}_{U(x)}+\frac{\overbrace{8x^3-8x^2+9x-7}^{S(x)}}{\underbrace{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}_{Q(x)}}$$

2. krok: Polynóm $Q(x)$ vyjadríme ako súčin elementárnych členov. Najprv odhadneme kandidátov na racionálne korene $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2\}$, použitím Hornerovej schémy vykonáme verifikáciu jednotlivých kandidátov na racionálne korene, dostaneme dva korene $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, pričom zbytok je $x^2 + 1$, potom

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

3. krok. Rozklad $S(x)/Q(x)$ má tvar

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{8x^3 - 8x^2 + 9x - 7}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+d}{x^2+1}$$

Ak vynásobíme finálny rozklad Q(x) dostaneme

$$8x^3-8x^2+9x-7=A(x-2)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+C(x-1)(x-2)(Cx+D)$$

Porovnanímľavej strany s pravou stranou dostaneme systém 4 lineárnych rovníc pre 4 neznáme A, B, C a D

$$A+B+C=8$$

$$-2A-B-2C+D=-8$$

$$A-B+2C-3D=9$$

$$-2A-B+2D=-7$$

Riešením tohto systému dostaneme

$$A=-17, B=19, C=6, D=-11$$

To znamená, že rozklad racionálnej funkcie $S(x)/Q(x)$ má finálny tvar

$$\frac{S(x)}{Q(x)}=\frac{8x^3-8x^2+9x-7}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}=\frac{-17}{x-1}+\frac{19}{x-2}+\frac{6x-11}{x^2+1}$$

Veta.
Nech polynóm $Q(x)$ má tvar (A17), potom racionálnu funkciu $S(x)/Q(x)$ môžeme vyjadriť ako sumu jednotlivých elementárnych racionálnych funkcii, ktoré sú pridané buď

(1) reálnemu členu $\left(x-\alpha_i\right)^{k_i}$ $\left(\text{pre } 1 \le i \le \text{a}\right)$

$$\frac{A_1^{(i)}}{\left(x-\alpha_i\right)}+\frac{A_2^{(i)}}{\left(x-\alpha_i\right)^2}+\ldots+\frac{A_1^{(k_i)}}{\left(x-\alpha_i\right)^{k_i}}$$

(2) alebo komplexnému členu $\left(x^2+p_j x+q_j\right)^{lj_1}$

$$\frac{B_j^{(1)}+C_j^{(1)}x}{\left(x^2+p_j x+q_j\right)}+\frac{B_j^{(2)}+C_j^{(2)}x}{\left(x^2+p_j x+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{B_j^{(l_j)}+C_j^{(l_j)}x}{\left(x^2+p_j x+q_j\right)^{l_j}}$$

Príklad

Študujme racionálnu funkciu

$$\frac{x^2+2x-3}{(x-1)^3(x-3)^2(x^2+x+1)^2}$$

Rozklad tejto ravionálnej funkcie na elementárne zlomky má tvar

$$\frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2(x-3)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2} +$$

$$+\frac{C_1+D_1x}{x^2+x+1}$$

Kde konštanty A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, D_1 sú určené tak, aby sa pravá strana rovnala ľavej strane.

$$\frac{x^2+2x-3}{(x-1)^3(x-3)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{34}{169(x-3)} + \frac{3}{13(x-3)^2} + \frac{-47-67x}{505(x^2+x+1)}$$

Pieter Bruegel the Elder (1525 – 1569): The Fight Between Carnival and Lent
A modern analogy of the multiagent system (MAS), where singles, pairs and triples of agents (people) mutually interact

The End