Cvičenia

Cvičenie 6.1. Pre každý uvedený prípad, rozhodnite, či symbol $x*y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Binárna operácia „súčin“ je definovaná podmienkou

$$\forall(x\in A)\forall(y\in A)\exists!(z\in A)(z=x*y)$$

(a) $x*y=x-y$, $A=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Nie je binárna operácia, pretože pre $x,y\in A$ výsledok binárnej operácie $x*y\notin A$ (napr. pre *x* < y dostaneme záporné *z* = *x* – *y*), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

(b) $x*y=x+y$, pre $A=\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do *A*.

(c) $x*y=x^y$, $A=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Je binárna operácia, $x*y=x^y\in A$

(d) $x*y=$ maximálny spoločný deliteľ x a y, $A=\{1,2,3,4,6,8,24\}$. Je binárna operácia, jej výsledok vždy patrí do *A*.

(e) $x*y=x+y$, $A=\{\text{matice rovnakého typu}\}$. Je binárna operácia, pre každé dve matice $x,y\in A$ je splnená podmienka, aby ich súčet $(x+y)\in A$.

Cvičenie 6.2. Nech binárna operácia na množine $\mathbb{R}$ obsahujúcej reálne čísla, je definovaná ako rozdiel, $x*y=x-y$. Rozhodnite, či táto operácia je

(a) asociatívna, nie je asociatívna, $x-(y-z)\neq(x-y)-z$.

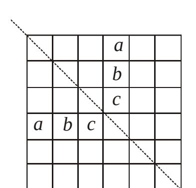
(a) komutatívna, nie komutatívna, $(x-y)\neq(y-x)$.

(b) existuje jednotkový element, neexistuje jednotkový element 1, pre ktorý by platilo $1*x=x*1=x$, potom by v tomto konkrétnom príklade muselo platiť $1-x=x-1=x$, čo nemôže byť splnené.

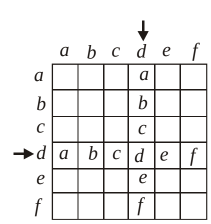
Cvičenie 6.3. Nech *A* je konečná množina a nech pre túto množinu *A* je binárna operácia definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky. Na základe čoho je možné rozhodnúť pomocou tejto tabuľky, či

(a) binárna operácia je komutatívna, potom multiplikačná tabuľka musí byť symetrická vzhľadom k diagonále tabuľky.

(b) existuje jednotkový element, potom existuje taký riadok a aj stĺpec s rovnakým indexom, že poradie ich elementov je totožné s indexovaním riadkov a stĺpcov.



symetrická matica



jednotkový element

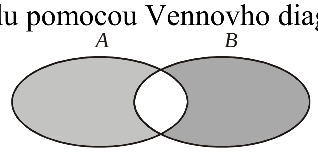
Cvičenie 6.4. Nech $X = \mathcal{P}(A)$, kde $\mathcal{P}(A)$ je potenčná množina, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako prienik množín, $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = x \cap y)$, rozhodnite, či

(a) binárna operácia je komutatívna, operácia prieniku je komutatívna, $x \cap y = y \cap x$
(b) čo je jednotkový element, jednotkový element vzhľadom k prieniku je univerzálna množina *U*,
(c) ktoré elementy majú inverzné elementy (ak existujú)? Inverzný element neexistuje. Ak by sme postulovali komplement $\overline{x}$ ako inverzný element vzhľadom k *x*, potom platí $x \cap \overline{x} = \overline{x} \cap x = \emptyset$, čo je však v kontradikcii s požiadavkou, aby platilo $x \cap \overline{x} = \overline{x} \cap x = U$ (pre inverzný prvok platí, že $x*x^{-1} = 1$, kde $1 \equiv U$).

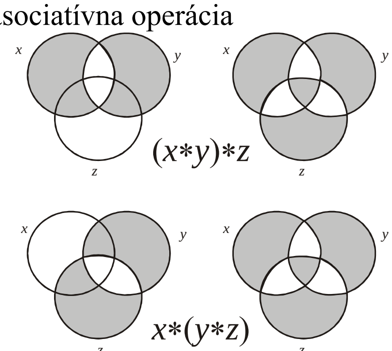
Cvičenie 6.6. Nech $X = \mathcal{P}(A)$, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako symetrický rozdiel $(\forall x, y \in \mathcal{P}(A))(x * y = (x - y) \cup (y - x))$.

(a) Dokážte, že operácia $*$ je binárna operácia,
(b) Je táto operácia komutatívna?
(c) Je táto operácia asociatívna?
(d) Existuje jednotkový element v množine *X* ?
(e) Ak existuje jednotkový element, existuje potom ku každému prvku $x \in \mathcal{P}(A)$ inverzný element $x^{-1} \in \mathcal{P}(A)$?

Riešenie:
Interpretácia symetrického rozdielu pomocou Vennovho diagramu má tvar



(a) Symetrický rozdiel môže byť použitý ako binárna operácia nad $X = \mathcal{P}(A)$. Pre každé $x, y \in \mathcal{P}(A)$ platí, že $x * y \in \mathcal{P}(A)$.
(b) Symetrický rozdiel je komutatívna operácia, alternatívna definícia je $x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$.
(c) Symetrický rozdiel je asociatívna operácia



Cvičenie 6.7. Nech množina $X=\{a,b,c,d\}$, binárna operácia pre túto množinu je definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	a
c	c	a	b	d
d	d	a	b	c

(a) Je táto operácia asociatívna?
(b) Je táto operácia komutatívna?

Riešenie:
(a) Nie je asociatívna operácia, kontrapríklad:

$(c*b)*d=a*d=d$

$c*(b*d)=c*a=c$

(b) Nie je komutatívna operácia, $c*d\neq d*c$

Cvičenie 6.8. Nech množina X obsahuje štvorcové matice majúce dva stĺpce a dva riadky a elementy sú reálne čísla.

(a) Pre túto množinu definujme binárnu operáciu ako súčet dvoch matíc, $(\forall x,y\in X)(x*y=x+y)$. Prečo takto špecifikovaná algebraická štruktúra $(X,+)$ je grupa?
(b) Ak zameníme binárnu operáciu súčtu za súčin, ukážte takto špecifikovaná algebraická štruktúra nie je grupa.

Riešenie:
(a) Množina elementov X je definovaná ako množina štvorcových matíc typu (2,2), operácia ´$*$´ zachováva túto množinu a je asociatívna (súčet troch matíc je vždy asociatívna binárna operácia). Ako jednotkový element slúži matica, ktorá má nulové elementy

$$e=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

potom pre každú maticu $x\in X$ je splnená podmienka $x*e=e*x=x$. Pre každý element $x\in X$, ktorý je reprezentovaný maticou

$$x=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

existuje inverzný element $x^{-1}\in X$ reprezentovaný maticou

$$x^{-1}=\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$$

pričom platí

$$x*x^{-1}=x^{-1}*x=e=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

To znamená, že binárna operácia je asociatívna, existuje jednotkový prvok a ku každému elementu existuje k nemu jediný inverzný element, čiže algebraická štruktúra $(X,+)$ je grupa.

(b) Binárna operácia $'*'$ sa definuje ako súčin matíc, je aj potom algebraická štruktúra $(X,+)$ grupa? Táto operácia je asociatívna, existuje jednotkový prvok

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Avšak nie pre každý prvok $x \in X$ existuje inverzný prvok. Existencia tohto inverzného prvku je viazaná s podmienkou regulárnosti matice

$$x=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

musí platiť

$$ad-bc \neq 0$$

Ak elementy matice x nespĺňajú túto podmienku, potom inverzný element (inverzná matica) $x^{-1} \in X$ neexistuje. Napríklad k elementu $x' \in X$, ktorý je reprezentovaný maticou

$$x'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

neexistuje inverzný element. Algebraická štruktúra $(X,+)$ nie je grupa.

Cvičenie 6.9. Nech X je neprázdna množina a binárna operácia definovaná vzťahom $x*y=x$, pre každé $x,y \in X$.

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X,*)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či táto algebraická štruktúra je monoid.

Riešenie:

(a) K tomu, aby algebraická štruktúra $(X,*)$ bola pologrupou, binárna operácia $'*'$ musí byť asociatívna.

$$x*(y*z)=x*y=x$$
$$(x*y)*z=x*z=x$$

týmto sme dokázali asociatívnosť binárnej operácie, čiže algebraická štruktúra $(X,*)$ je pologrupa.

(b) Ak pologrupa $(X,*)$ má jednotkový element, potom je monoid. Nech $e \in X$ je hypotetický jednotkový element, potom z definície binárnej operácie vyplýva $x*e=x$ a $e*x=e$, to znamená, že nemôže existovať jednotkový element, ktorý by vyhovoval podmienke $x*e=e*x=x$. Algebraická štruktúra $(X,*)$ nie je monoid.

Cvičenie 6.10. Nech dve algebraické štruktúry $(X,*)$ a $(Y,\circ)$ sú grupy. Definujte na karteziánskym súčinom $X \times Y$ binárnu operáciu takto

$$(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=(x_1*x_2,y_1\circ y_2)$$

pre každé $x_1,x_2 \in X$ a $y_1,y_2 \in Y$.

(a) Ukážte, že $\bullet$ je binárna operácia na $X \times Y$.
(b) Ako je definovaný jednotkový element na $X \times Y$?
(c) Ako je definovaný inverzný element $(x,y)^{-1}$?

(d) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X\times Y,\bullet)$ je grupa.

Riešenie:
(a) Musíme dokázať, že ak $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$, potom aj ich súčin $(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)\in X\times Y$. Táto vlastnosť priamo vyplýva z predpokladu, že algebraické štruktúry $(X,*)$ a $(Y,\circ)$ sú grupy. Súčin ′·′ vyhovuje podmienke

$$(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=\left(\underbrace{x_1*x_2}_{\in X},\underbrace{y_1\circ y_2}_{\in Y}\right)\in X\times Y$$

Týmto sme dokázali, že súčin ′·′ definovaný nad karteziánskym súčinom $X\times Y$ zachováva túto množinu, čiže je binárna operácia.
(b) Pretože algebraické štruktúry $(X,*)$ a $(Y,\circ)$ sú grupy, potom množiny X a Y musia obsahovať jednotkové elementy $e_X\in X$ resp. $e_Y\in Y$, potom nad $X\times Y$ môžeme definovať jednotkový element $e=(e_X,e_Y)\in X\times Y$, ktorý vyhovuje dvom podmienkam

$$e\bullet(x,y)=(e_X,e_Y)\bullet(x,y)=\left(\underbrace{e_X*x}_{x},\underbrace{e_Y\circ y}_{y}\right)=(x,y)$$

$$(x,y)\bullet e=(x,y)\bullet(e_X,e_Y)=\left(\underbrace{x*e_X}_{x},\underbrace{y\circ e_Y}_{y}\right)=(x,y)$$

Dokázali sme, že v rámci karteziánskeho súčinu $X\times Y$ existuje jednotkový element.
(c) Inverzný element vzhľadom k $(x,y)\in X\times Y$ je definovaný vzťahom $(x,y)^{-1}=(x^{-1},y^{-1})$, potom musí platiť

$$(x,y)\bullet(x,y)^{-1}=(x,y)\bullet(x^{-1},y^{-1})=\left(\underbrace{x*x^{-1}}_{e_X},\underbrace{y\circ y^{-1}}_{e_y}\right)=(e_X,e_Y)=e$$

$$(x,y)^{-1}\bullet(x,y)=(x^{-1},y^{-1})\bullet(x,y)=\left(\underbrace{x^{-1}*x}_{e_X},\underbrace{y^{-1}\circ y}_{e_y}\right)=(e_X,e_Y)=e$$

Dokázali sme, že pre každý $(x,y)\in X\times Y$ existuje inverzný element $(x,y)^{-1}=(x^{-1},y^{-1})\in X\times Y$.
(d) Dôkazom vlastností (a), (b) a (c) sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X\times Y,\bullet)$ je grupa.

Cvičenie 6.11. Nech $(\mathbb{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x*y=max\{x,y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N},*)$ je monoid.

Riešenie:
(a) K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $'*'$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)
(a1) $x < y < z$

$$(x*y)*z = y*z = z$$
$$x*(y*z) = x*z = z$$

(a2) $x < z < y$

$$(x*y)*z = y*z = y$$
$$x*(y*z) = x*y = y$$

(a3) $y < x < z$

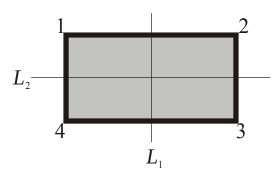
$$(x*y)*z = x*z = z$$
$$x*(y*z) = x*z = z$$

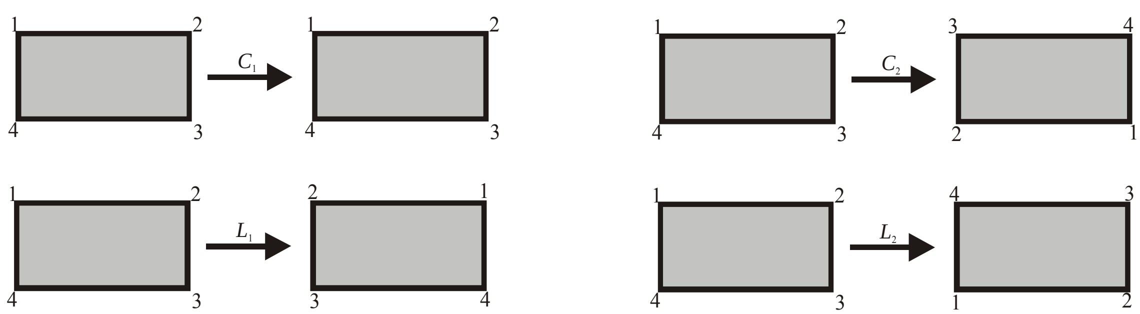
....
Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z = x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa .

(b) K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element e = 0, ktorý patrí do množiny $\mathbb{N}$

$$x*e = max\{x,0\} = x$$
$$e*x = max\{0,x\} = x$$

Cvičenie 6.12. Uvažujme neštvorcový obdĺžnik, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2, 3 a 4.





Tento obdĺžnik má štyri operácie symetrie
C_1 : rotácia o 0° stupňov okolo stredu obdĺžnika,
C_2 : rotácia o 180° stupňov okolo stredu obdĺžnika,
L_1 : reflexia priamkou L_1 a
L_2 : reflexia priamkou L_2.

Pre lepšie pochopenie týchto elementov symetrie budem špecifikovať ich aplikácie na postupnosť (1,2,3,4)

$$C_1(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$$
$$C_2(1,2,3,4) = (3,4,1,2)$$
$$L_1(1,2,3,4) = (2,1,4,3)$$
$$L_2(1,2,3,4) = (4,3,2,1)$$

Pre takto definované elementy môžeme zostrojiť ich kompozíciu (binárnu operáciu), napríklad

$$C_2 * L_1(1,2,3,4) = C_2(L_1(1,2,3,4)) = C_2(2,1,4,3) = (4,3,2,1) = L_2$$

(a) Zostavte multiplikačnú tabuľku pre kompozíciu dvoch operácií symetrie.
(b) Dokážte, že algebraická štruktúra $(A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}, *)$ je grupa.

Riešenie:
(a) Multiplikačná tabuľka má tvar

$*$	C_1	C_2	L_1	L_2
C_1	C_1	C_2	L_1	L_2
C_2	C_2	C_1	L_2	L_1
L_1	L_1	L_2	C_1	C_2
L_2	L_2	L_1	C_2	C_1

(b1) Binárna operácia $*$ je asociatívna. K dôkazu tejto vlastnosti by sme mali preskúmať 4^3 trojíc elementov z množiny $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$, či je splnená vlastnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$. Iný postup k dôkazu tejto vlastnosti je, že elementy z množiny $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$ môžeme formálne interpretovať ako permutácie nad 4 objektmi. Ako bolo ukázané v kapitole 6.2, súčin permutácií môže byť interpretovaný ako kompozícia 1-1-značných funkcií, ktorý je asociatívny.
(b2) V množine $A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}$ prvok $e = C_1$ môže byť interpretovaný ako jednotkový element, ktorý vyhovuje podmienke $\forall(x \in A)(e * x = x * e = x)$, splnenie tejto podmienky je jednoducho verifikované multiplikačnou tabuľkou, kde prvý riadok a prvý stĺpec je totožný s „indexovaním" tabuľky.
(b3) Z tabuľky taktiež vyplýva, že ku každému $x \in A$ existuje práve jeden prvok $x^{-1} \in A$, ktorý vyhovuje podmienke $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Z multiplikačnej tabuľky vyplýva, že $\forall(x \in A)(x^{-1} = x)$.
Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(A = \{C_1, C_2, L_1, L_2\}, *)$ je grupa.

Cvičenie 6.13. Nech $(X, *)$ je komutatívny monoid. Ukážte, že množina idempotentných elementov $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$ tvorí algebraickú štruktúru $(X', *)$, ktorá je submonoid.

Riešenie: Je potrebné dodefinovať pojem „submonoid“ v duchu teórie grúp. Nech algebraická štruktúra $(X,*)$ je monoid, potom ak pre neprázdnu podmnožinu $X' \subseteq X$ algebraická štruktúra $(X',*)$ je taktiež monoid, hovoríme, že $(X',*)$ je submonoid, $(X',*) \subseteq (X,*)$.

(A1) Musíme dokázať, že podmnožina $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $x, y \in X'$, potom

$$x * y = (x * x) * (y * y) = (x * y) * (x * y)$$

potom aj $x * y \in X'$. Pri dôkaze tejto vlastnosti bola použitá komutatívnosť binárnej operácie.

(A2) Existencia jednotkového elementu v podmnožine $X' = \{x; (x \in X) \wedge (x * x = x)\}$, ktorá obsahuje idempotentné elementy je zabezpečená tým, že jednotkový element $e \in X$ musí z definície byť idempotentný, $e * e = e$, čiže $e \in X'$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X',*)$ je submonoid.

Cvičenie 6.14. Nech algebraická štruktúra $(X,*)$ je grupa. Stred tejto štruktúry je definovaný ako podmnožina *X*, ktorá obsahuje elementy komutujúce so všetkými elementami *X*, $X_{center} = \{x; (x \in X) \wedge (\forall y (x * y = y * x))\}$. Dokážte, že algebraická štruktúra $(X_{center},*)$ je podgrupa grupy $(X,*)$, $(X_{center},*) \subseteq (X,*)$.

Riešenie:

(A1) Musíme dokázať, že množina $X_{center} = \{x; (x \in X) \wedge (\forall y (x * y = y * x))\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $u, v \in X_{center}$, potom pre každé $y \in X$ by malo platiť

$$(u * v) * y = y * (u * v)$$

Táto vlastnosť je priamym dôsledkom, že $u, v \in X_{center}$

$$(u * v) * y = u * (v * y) = u * (y * v) = (u * y) * v = (y * u) * v = y * (u * v)$$

Týmto sme dokázali, že $(u * v) \in X_{center}$, t. j. podmnožina X_{center} je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$.

(A2) Množina X_{center} obsahuje jednotkový element, pretože $\forall (x \in X)(e * x = x * e = x)$, čiže $e \in X_{center}$.

(A3) Pre každé $x \in X_{center}$ existuje $x^{-1} \in X_{center}$, že $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Dôkaz budeme robiť sporom. Predpokladajme, že $x^{-1} \notin X_{center}$ a teda existuje také $y \in X$, pre ktoré platí $x^{-1} * y \neq y * x^{-1}$. Aplikujme na túto nerovnicu *x*.

$x * (x^{-1} * y) \neq x * (y * x^{-1})$. Keďže ide o grupu, platí asociatívnosť, teda

$(x * x^{-1}) * y \neq x * (y * x^{-1})$

$e * y \neq x * (y * x^{-1})$

$y \neq x * (y * x^{-1})$

Keďže platí aj to, že *x* komutuje so všetkými prvky, môžeme ho presunúť

$y \neq \left(y * x^{-1}\right) * x$

$y \neq y * \left(x^{-1} * x\right)$

$y \neq y * e$

$y \neq y$

Týmto sme ukázali, že predpoklad viedol ku kontradikcii, a teda že $x^{-1} \in X_{center}$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $\left(X_{centre}, *\right)$ je podgrupa.

Cvičenie 6.15. Nech X je množina, ktorá obsahuje matice $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde n je celé číslo.

(a) Ukážte, že algebraická štruktúra $\left(X, *\right)$, kde binárna operácia $*$ je priradená maticovému súčinu, je grupa.

(b) Dokážte, že zobrazenie $f : X \to \mathbb{Z}$, kde $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel, ktoré je definované

$$f\left[\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = n$$

je izomorfizmus medzi $\left(X, *\right)$ a $\left(\mathbb{Z}, +\right)$.

Riešenie:

(a1) Množina X je uzavretá vzhľadom k maticovému súčinu

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$$

(a2) Jednotkový element je matica

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a3) Pre každú maticu $x = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$ existuje inverzná matica $x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$, ktorá vyhovuje podmienke $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $\left(X, *\right)$ je grupa.

(b1) Nech $x = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $x * y = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom

$$f\left(x * y\right) = m + n = f\left(x\right) + f\left(y\right) = m + n$$

Týmto sme dokázali základnú vlastnosť pre izomorfizmus, existenciu zobrazenia f, ktoré zachováva súčin elementov, $f\left(x * y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right)$. Týmto sme aj dokázali, že grupy $\left(X, *\right)$ a $\left(\mathbb{Z}, +\right)$ sú izomorfné.