Záverečná písomka A (25. 1. 2006)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Ako je definovaná formula?
(b) Aký je rozdiel medzi tautológiou a splniteľnou formulou?
(c) Kedy je teória konzistentná?
(d) Aký je rozdiel medzi výrazmi $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models \varphi$?
(e) Čo je dôkaz formuly φ ?

Príklad 2. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{\begin{array}{l}p \Rightarrow q\\ p\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}p \Rightarrow q\\ q\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}p \Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}p \Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}\neg p \Rightarrow q\\ p\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}\neg p \Rightarrow q\\ q\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}\neg p \Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{?},\ \frac{\begin{array}{l}\neg p \Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{?}.$$

Príklad 3. Zostrojte pomocou logických neurónov neurónovú sieť (snažte sa ju minimalizovať), ktorá simuluje úlohu

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \alpha_3 = \beta_1 \beta_2$$

Príklad 4. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či formula α je logickým dôsledkom T, $T \vdash \alpha$,

$T = \{q \Rightarrow (r \vee \neg p), p \Rightarrow q, \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg r), t \Rightarrow p\}$, $\alpha = r$

Príklad 5. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte spätne formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Existujú ryby, ktoré sa nemnožia ikrami.
(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé párne číslo nie je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Každý dym je s ohňom.

Príklad 6. Odôvodnite prečo formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$,
(b) $\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$,
(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,
(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Niektorí nematuranti sú analfabeti

?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

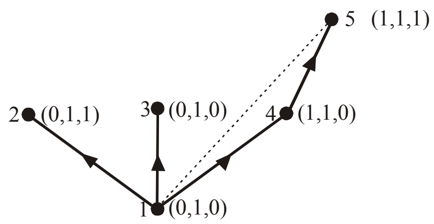
(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Cvičenie 10. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly a všetkých jej podformúl

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg q \vee \neg r))$$

pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou *R*, pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných *p*, *q* a *r*.



Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných *p* a *q* je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$.

Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. ***Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník***. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

Príklad 1

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny $\{p,q,r,\ldots\}$ a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

premenná::=p | q | r ...

formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) | (formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b) Pre tautológiu každá interpretácia (špecifikácia) premenných poskytuje pravdivostnú hodnotu formule ´pravda´, pre splniteľnú formulu existuje aspoň jedna interpretácia premenných, ktoré poskytujú hodnotu ´pravdu´. Môžeme povedať, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnej formuly.

(c) Teória $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ sa nazýva konzistentná vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia τ výrokových premenných, pre ktorú všetky formule z teórie $\boldsymbol{T}$ sú pravdivé, $val_\tau(\varphi_i)=1$, pre i = 1, 2,..., n.

(d) Formula φ sa nazýva ***logický dôsledok*** množiny formúl $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T}\vdash\varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi\in\boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ rozšírenej o niektoré jej dôsledky. Formula φ sa nazýva ***tautologický dôsledok*** teórie $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T}\vDash\varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie $\boldsymbol{T}$ je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

(e) Dôkaz formuly φ v rámci teórie $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ je postupnosť formúl (ψ_1, ψ_2, …, ψ_k), kde $\varphi=\psi_k$, pričom každá formula ψ_i tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z $\boldsymbol{T}$ alebo formúl $\boldsymbol{T}\cup\{\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{i-1}\}$.

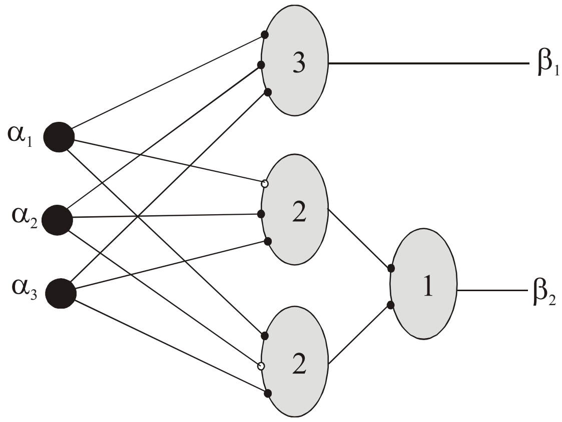
Príklad 2.

$$\frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ p\end{array}}{q},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ q\end{array}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{\neg p},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ p\end{array}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ q\end{array}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{q},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{p}.$$

Príklad 3.

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$\beta_2 = \bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3$$



Príklad 4.

Ak $T = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, potom vlastnosť $T \vDash \alpha$ je ekvivaletná platnosti implikácie

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \Rightarrow \alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \neg\alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T \vDash \alpha$.

$$(q \Rightarrow (r \vee \neg p)) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (\neg t \Rightarrow (t \wedge \neg r)) \wedge (t \Rightarrow p) \wedge \neg r$$

Prepíšeme ju do tvaru NKF

$$(\neg q \vee (r \vee \neg p)) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \underbrace{(t \vee (t \wedge \neg r))}_{t \wedge (t \vee \neg r)} \wedge (\neg t \vee p) \wedge \neg r$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idenpotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$(\neg q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge t \wedge (t \vee \neg r) \wedge (\neg t \vee p) \wedge \neg r$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee r \vee \neg p$	$t \vee \neg r$	t	$\neg r$	$\neg t \vee p$	7	8				
r		1	0		0		$\neg q \vee t \vee \neg p$	$\neg q \vee \neg p$	9	10		
q	1						0	0	$\neg p \vee t$	$\neg p$	11	
p						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	$\square$

Záver: Platí tautologické vyplývanie

$$\{q \Rightarrow (r \vee \neg p), p \Rightarrow q, \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg r), t \Rightarrow p\} \vDash r$$

Príklad 5.

(a) Nie všetky ryby sa množia ikrami.

$\exists x\left(ryba(x)\wedge\neg mnoz\_ikr(x)\right)$

$\forall x\left(\neg ryba(x)\vee mnoz\_ikr(x)\right)$

$\forall x\left(ryba(x)\Rightarrow mnoz\_ikr(x)\right)$

Každá ryba sa množí ikrami.

(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.

$\exists x\left(sport(x)\wedge fyz\_kond(x)\right)$

$\forall x\left(\neg sport(x)\vee\neg fyz\_kond(x)\right)\equiv\forall x\left(sport(x)\Rightarrow\neg fyz\_kond(x)\right)$

Každý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé párne číslo väčšie ako 2 nie je prvočíslo.

$\forall x\left(parne(x)\Rightarrow\neg prime(x)\right)\equiv\forall x\left(\neg parne(x)\vee\neg prime(x)\right)$

$\exists x\left(parne(x)\wedge prime(x)\right)$

Existuje párne číslo väčšie ako 2, ktoré je prvočíslo.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.

$\forall x\left(navst\_UK(x)\Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$

$\exists x\left(navst\_UK(x)\wedge\neg hovori\_angl(x)\right)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Každý dym je s ohňom.

$\forall x\left(dym(x)\Rightarrow ohen(x)\right)\equiv\forall x\left(\neg dym(x)\vee ohen(x)\right)$

$\exists x\left(dym(x)\wedge\neg ohen(x)\right)$

Existuje dym bez ohňa.

Príklad 6.

(a) $\left(\exists x\, P(x)\right)\vee\left(\exists x\,\neg P(x)\right)$,

Pomocou formule z príkladu 7.2 $\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\equiv\left(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\right)$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

$$\exists x\underbrace{\left(P(x)\vee\neg P(x)\right)}_{1}\equiv 1$$

(b) $\forall x\left(P(x)\wedge\neg P(x)\right)$, táto formula je automaticky kontradikcia, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\left(P(x)\wedge\neg P(x)\right)\equiv 0$ je nepravdivá pre každé indivíduum *x*.

(c) $\left(\exists x\, P(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, P(x)\right)$, navrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\, P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\, P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia $(1 \Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo“).

(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$, túto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora $(\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x))$ prepísať do ekvivalentného tvaru $(\forall x\, P(x)) \wedge \neg(\forall x\, P(x))$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p/\forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 7.

(a)

Každý študent je maturant
Niektorí nematuranti sú analfabeti

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

$\varphi_1 : \forall x\,(st(x) \Rightarrow mat(x)) \Rightarrow (st(t) \Rightarrow mat(t))$
$\varphi_2 : \exists x\,(\neg mat(x) \wedge analf(x)) \Rightarrow (\neg mat(t) \wedge analf(t))$
$(st(t) \Rightarrow mat(t))$
$(\neg mat(t) \wedge analf(t))$
$\neg mat(t)$
$analf(t)$
$\neg st(t)$
$\neg st(t) \wedge analf(t)$
$\exists x(\neg st(x) \wedge analf(x))$

$\exists x(\neg st(x) \wedge analf(x))$

Záver zo sylogizmu je: „existuje analfabet, ktorý nie je študent“

(b)

niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

$$\varphi_1: \exists x\left(st(x) \wedge kom(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge kom(a)\right)$$
$$\varphi_2: \exists x\left(kom(x) \wedge mat(x)\right) \Rightarrow \left(kom(b) \wedge mat(b)\right)$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a)\right)$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *fyz*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme ¬*chem*(*a*). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg chem(x)$$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú chemici“.

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$$
$$\varphi_2: \exists x\left(analf(x) \wedge vce(x)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a)\right)$$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(*a*) a *vce*(*a*) . Použitím *analf*(*a*) s prvou premisou dostaneme ¬*st*(a) , spojením s *vce*(*a*) dostaneme

$$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, vce(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je: „niektorý včelár nie je študent“

Príklad 8.

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

1.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\neg q$	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	$\neg p$	(modus tollens na 1. a 2.)
4.	$\neg q \Rightarrow \neg p$	(deaktivácia 2.)
5.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(deaktivácia 1.)

(b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

1.	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	p	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	$p \Rightarrow q$	(eliminácia konjunkcie aplikovaná na 1.)
4.	$p \Rightarrow r$	(eliminácia konjunkcie aplikovaná na 1.)
5.	q	(E$\Rightarrow$ (modus ponens) na 2. a 3.)
6.	r	(E$\Rightarrow$ (modus ponens) na 2. a 4.)
7.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na 5. a 6.)
8.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia 2. pomoc. predpokladu na 7.)
9.	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$	(deaktivácia 1. pomoc. predpokladu na 8.)

Príklad 9.

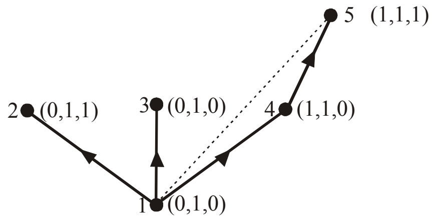
(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

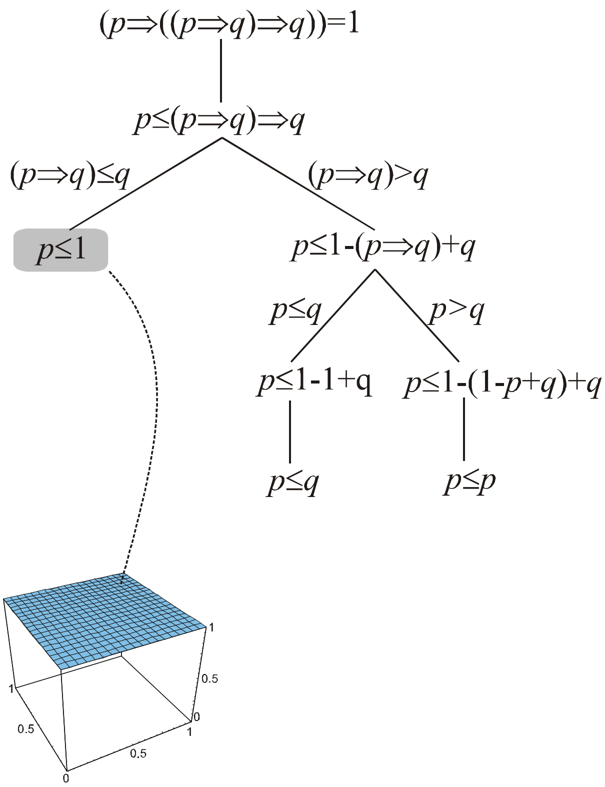
φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1
½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Príklad 10.



	1	2	3	4	5
p	0	0	0	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0	1	0	0	1
$p\wedge q$	0	0	0	1	1
$\neg r$	0	0	1	0	0
$\neg q$	0	0	0	0	0
$\neg q\vee\neg r$	0	0	1	0	0
$\neg\,(p\wedge q)$	0	1	1	0	0
$(\neg\,(p\wedge q)) \vee (\,\neg r\vee\neg q)$	0	1	1	0	0
$p\Rightarrow(\neg\,(p\wedge q)) \vee (\,\neg r\vee\neg q)$	0	1	1	0	0

Príklad 11a.



Študovaná formula je pravdivá pre všetky hodnoty p a q.

Príklad 11b.

1. $v\left(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)\right) = 0$
2. $v\left(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi)\right) = 1$ (prepis riadku 1)
3. $v\left(w_1, \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi\right) = 0$ (prepis riadku 1)
4. $v\left(w_2, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 1 \quad \left(\forall w_2 \in \Gamma(w_1)\right)$ (prepis riadku 2)
5. $v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 1$ (prepis riadku 3)
6. $v\left(w_1, \Box\psi\right) = 0$ (prepis riadku 3)
7. $v\left(w_3, \varphi\right) = 1 \quad \left(\forall w_3 \in \Gamma(w_1)\right)$ (prepis riadku 5)
8. $v\left(w_4, \psi\right) = 0 \quad \left(\exists w_4 \in \Gamma(w_1)\right)$ (prepis riadku 6)
9. $\left(v(w_2, \varphi) = 0\right) \vee \left(v(w_2, \psi) = 1\right) \quad \left(\forall w_2 \in \Gamma(w_1)\right)$ (prepis riadku 4)

Riadky 7, 8 a 9 produkujú kontradikciu, z tejto skutočnosti vyplýva, že formula je tautológia (pre každú interpretáciu je pravdivá).