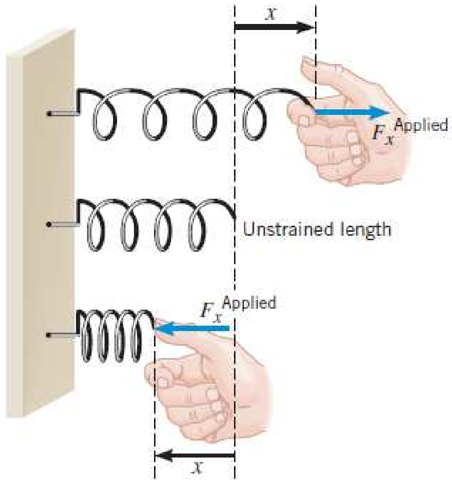
Harmonický pohyb

Kmitanie – opakujúci sa pohyb

Hmotný bod je viazaný na rovnovážnu polohu tak, že neprekročí konečnú vzdialenosť od nej.



Harmonický pohyb

Uhlová frekvencia

$$x = \boxed{x_m} \cos\left(\boxed{\omega t + \varphi}\right)$$

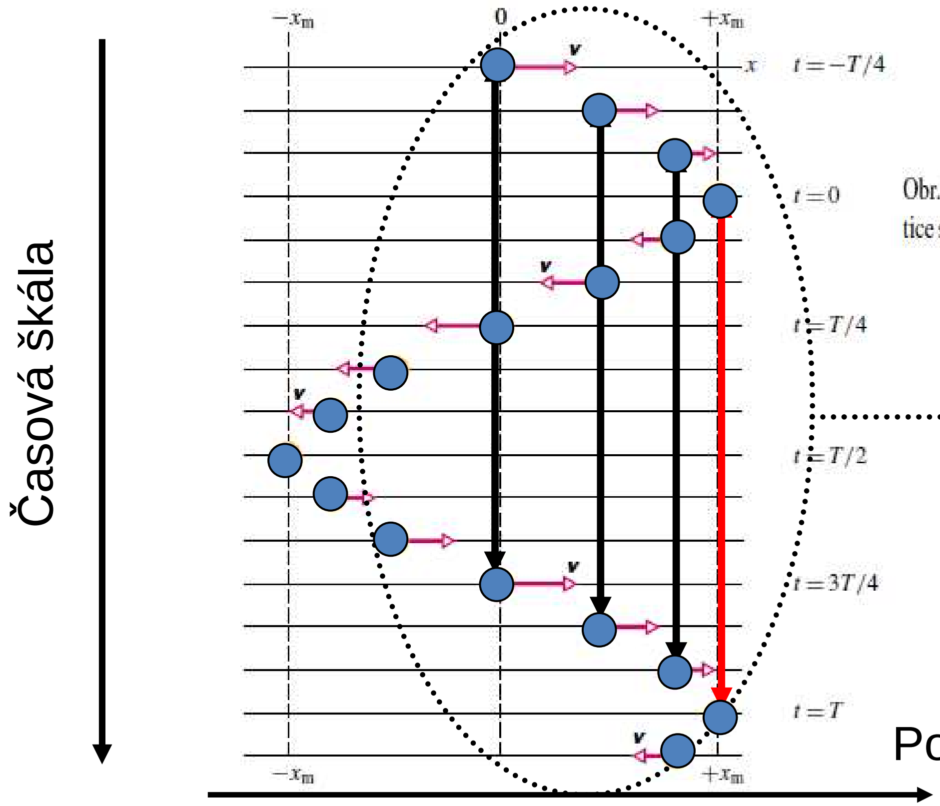
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

X_m – amplitúda výchylky (veľkosť najväčšej možnej výchylky častice od rovnovážnej polohy)

(ω+φt) – fáza pohybu

φ - počiatočná fáza

T – perióda pohybu,
- čas, za ktorý sa častica dostane do počiatočného stavu
- čas, za ktorý sa uskutoční jeden úplný kmit resp. **cyklus**



Obr. 16.2 předvádí sérii „snímků" kmitajícího systému: částice se opakovaně pohybuje tam a zpět kolem počátku osy x.

$$\boxed{T}$$

$$\omega(t+T)+\varphi = (\omega t+\varphi)+\boxed{2\pi}$$

Poloha telesa

Perióda kosínusu

Pohybová rovnica pre kmitavý pohyb

Kinematika

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Dynamika

$$F = ma = -\omega^2 m\, x$$

Častica s hmotnosťou *m* vykonáva harmonický pohyb, ak na časticu pôsobí sila úmerná výchylke a orientovaná proti výchylke

Ak HB vykonáva harmonický pohyb, potom je jeho zrýchlenie úmerné výchylke a smeruje do rovnovážnej polohy

Kinematika harmonického pohybu

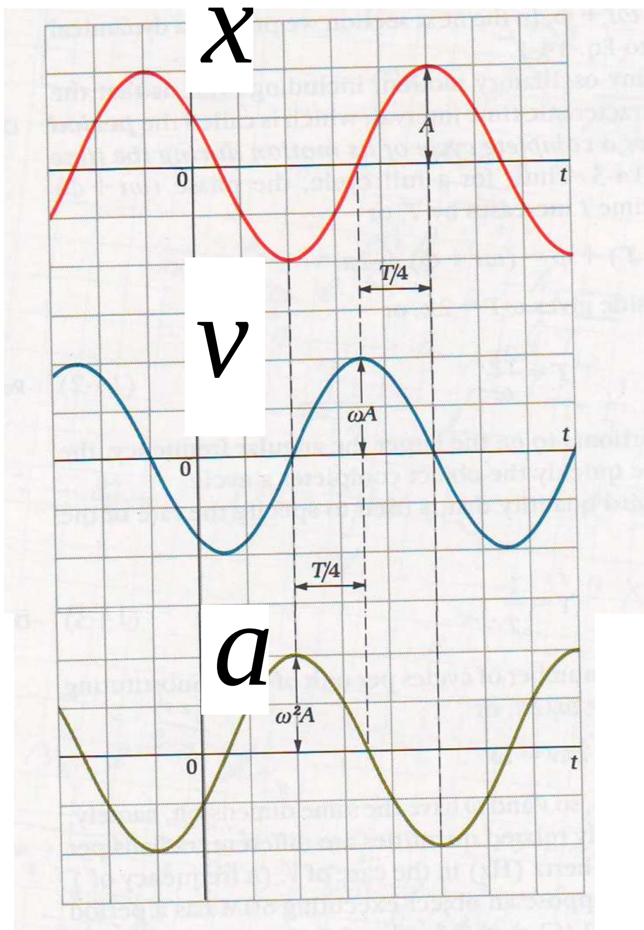
Kinematika

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Amplitúdy, maximálne hodnoty kinematických veličín



Krivka zodpovedajúca závislosti *v(t)* je posunutá o *T*/4 periódy doľava vzhľadom na krivku *x(t)*

Krivka zodpovedajúca závislosti *a(t)* je posunutá o *T*/4 periódy doľava vzhľadom na krivku *v(t)*

Kinematika harmonického pohybu

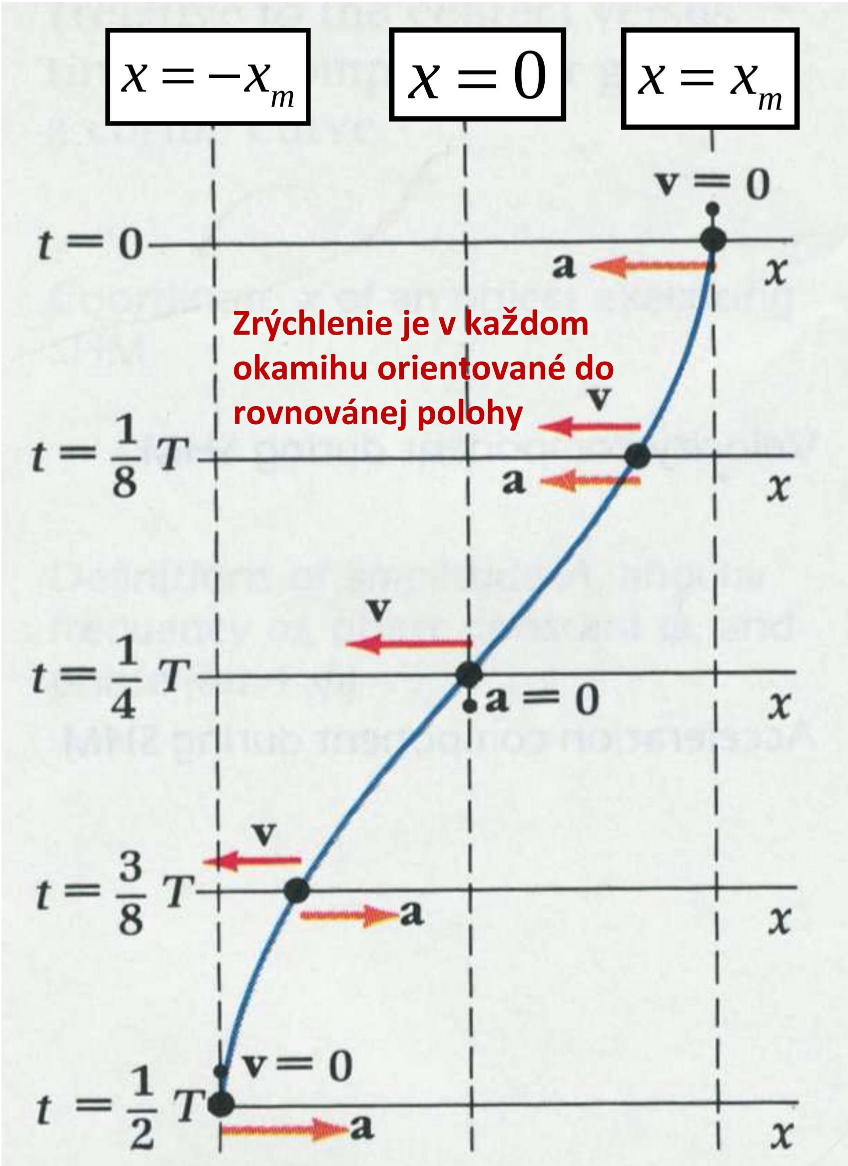
Kinematika

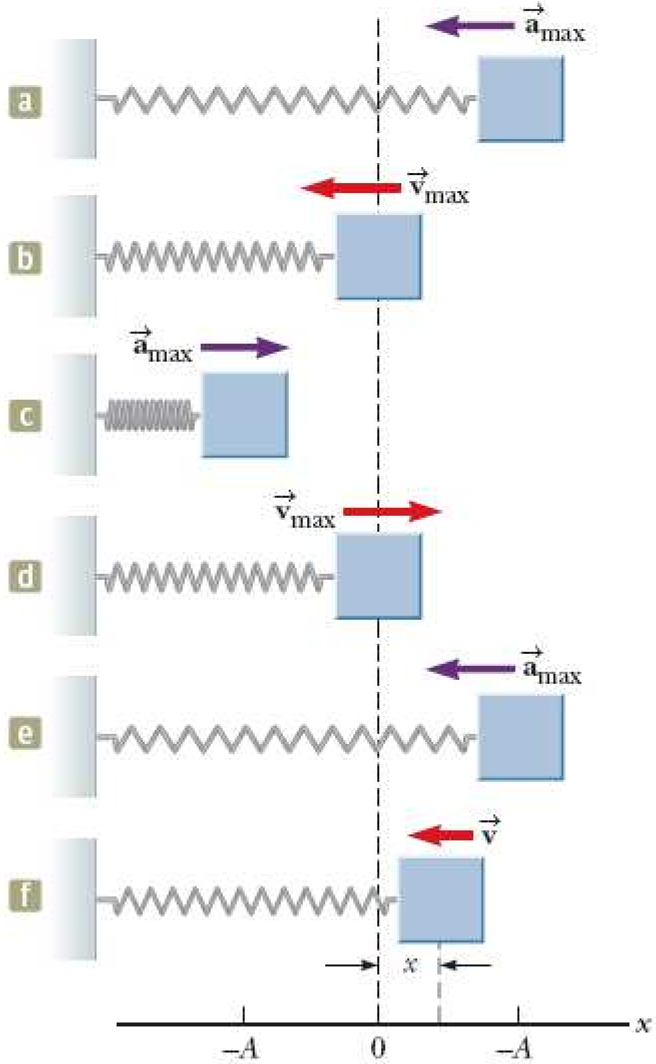
$$x = \boxed{x_m} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\boxed{\omega x_m} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\boxed{\omega^2 x_m} \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Amplitúdy, maximálne hodnoty kinematických veličín





a
$\vec{a}_{max}$
b
$\vec{v}_{max}$
c
$\vec{a}_{max}$
d
$\vec{v}_{max}$
e
$\vec{a}_{max}$
f
$\vec{v}$
x
$-A$
0
$-A$
x

Zhrnutie

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi\right)}$$

Ak HB vykonáva harmonický pohyb, potom je jeho zrýchlenie úmerné výchylke a smeruje do rovnovážnej polohy

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

Ak pohyb hmotného bodu je opísaný pohybovou rovnicou $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ potom HB vykonáva harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou ω

Malé kmity

Predpoklad: Výchylky x také malé, že možno zanedbať ich vyššie ako druhé mocniny x.

Rady

Mocninné rady

Mocninné rady

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$= f(x_o) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=x_0}}$$

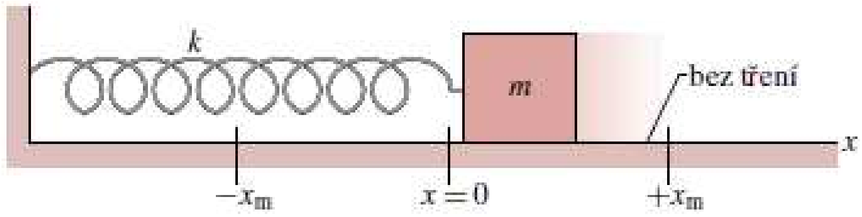
Ak pohyb hmotného bodu je opísaný pohybovou rovnicou $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ potom HB vykonáva harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou ω

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)}$$

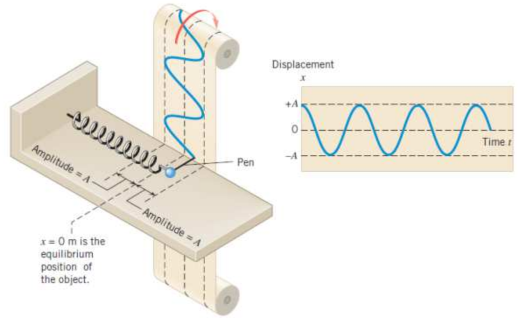
Harmonický oscilátor



Newtonova rovnica $m\ddot{x} = -kx$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$$

Ak pohyb hmotného bodu je opísaný pohybovou rovnicou $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ potom HB vykonáva harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou ω



$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

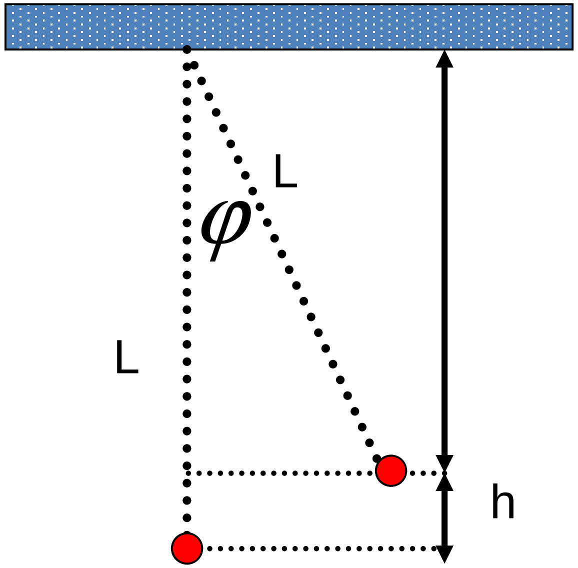
$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m} x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)}$$

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)}$$

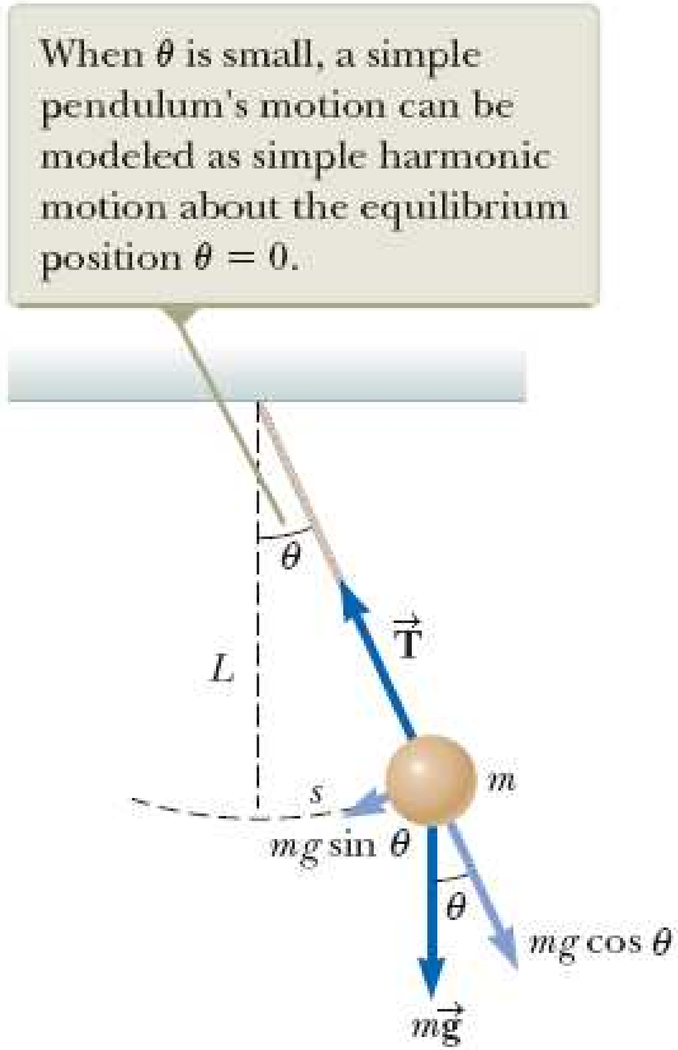
Matematické kyvadlo



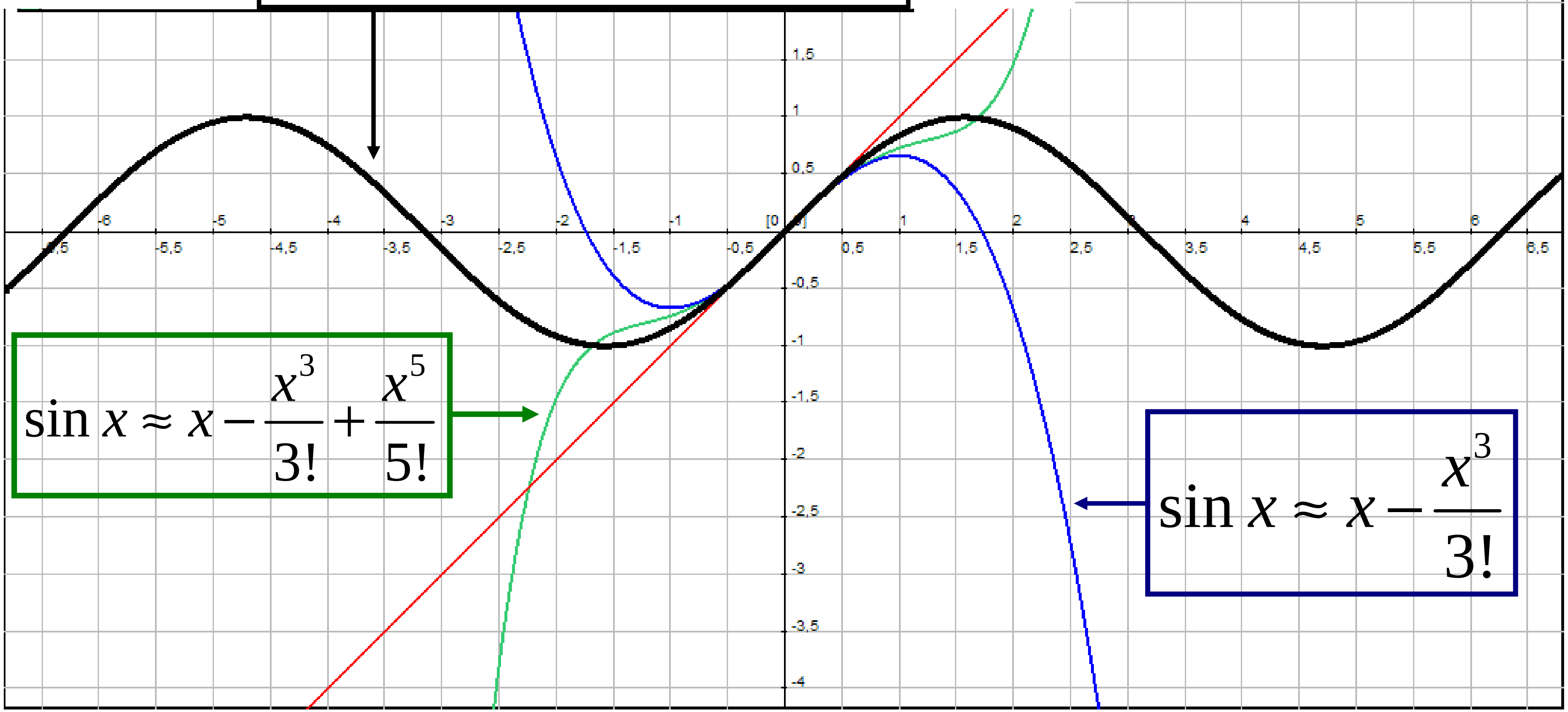
Krivočiara súradnica

$$L\cos\varphi$$

$$v = L\dot{\varphi}$$



$$\sin x = \boxed{\boxed{x} - \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

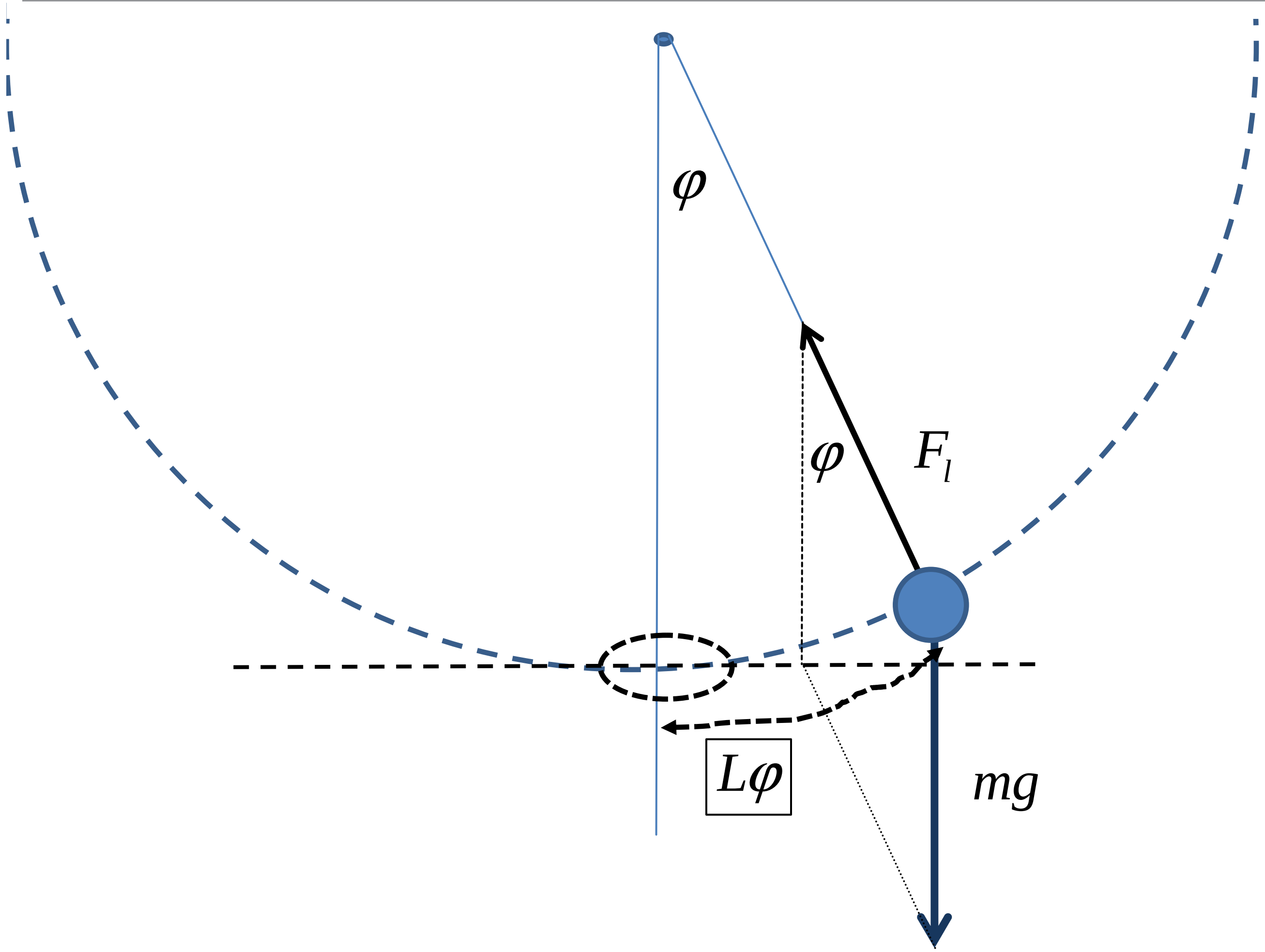


$$\sin x \approx x$$

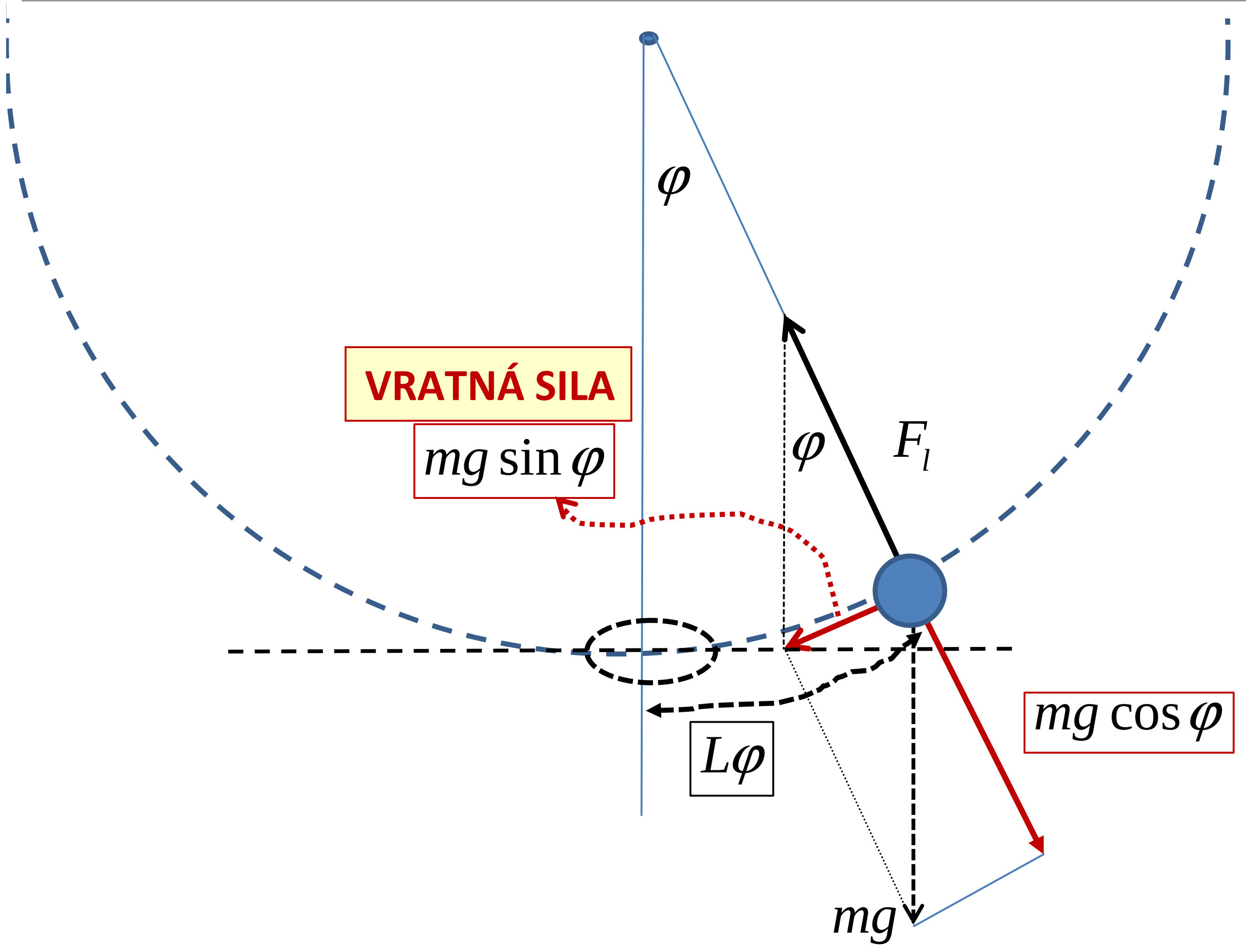
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

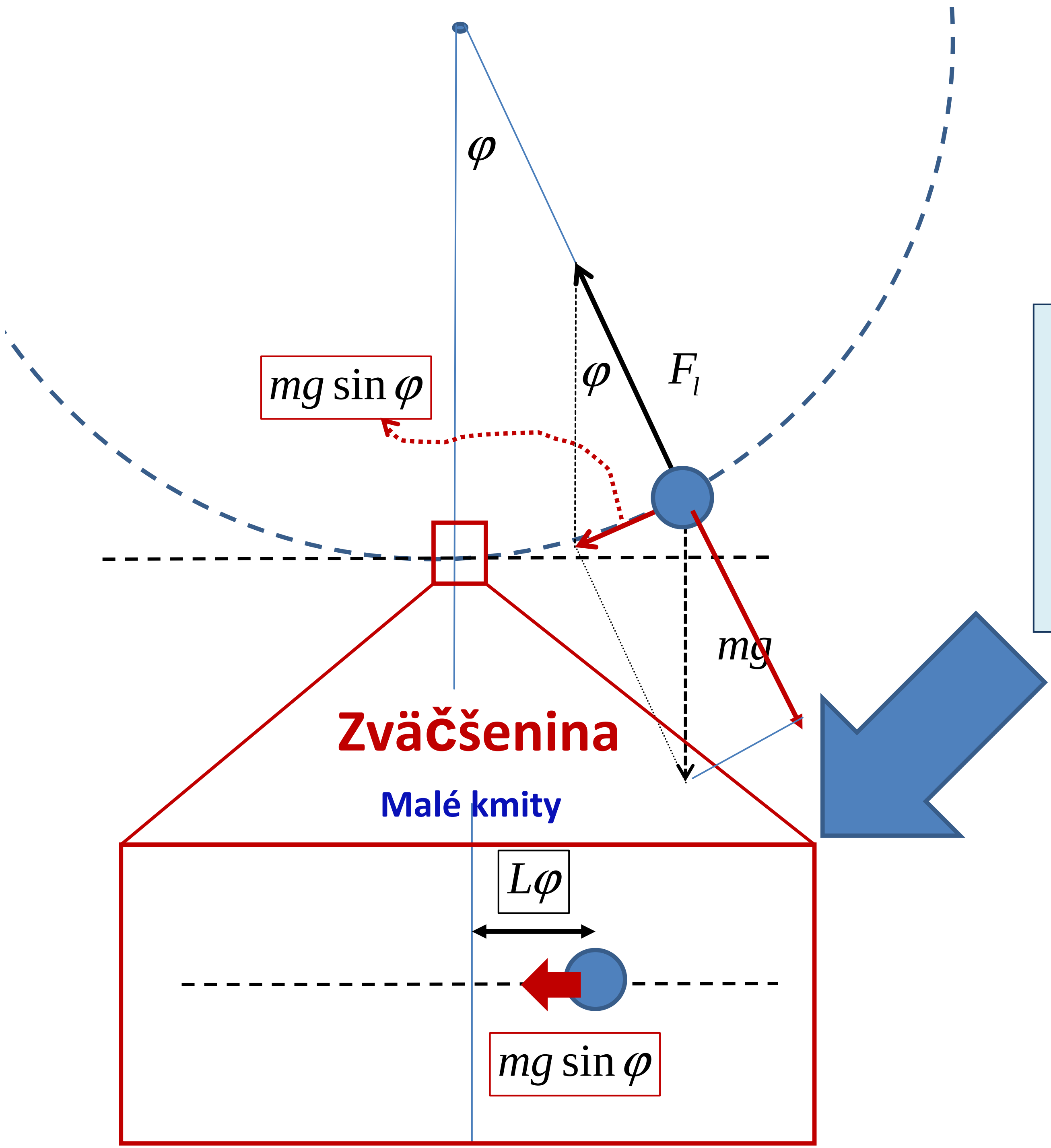
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Angle in Degrees	$\sin\varphi \approx \varphi$	Sine of Angle	Percent Difference
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%



Angle in Degrees	$\sin\varphi \approx \varphi$	Sine of Angle	Percent Difference
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%





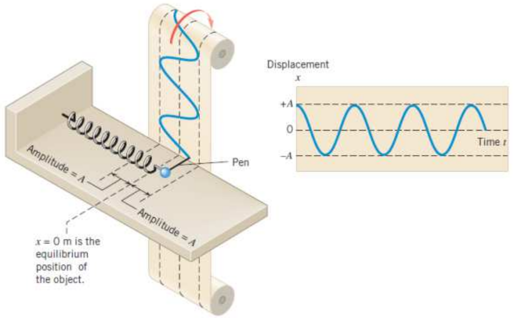
Pri malých uhloch to vyzerá ako na priamke, zakrivenie kružnice sa nestihlo prejaviť

$$ma = -mg\varphi$$

$$mL\ddot{\varphi} = -mg\varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\varphi}$$

Ak pohyb hmotného bodu je opísaný pohybovou rovnicou $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ potom HB vykonáva harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou ω



$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\varphi}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi) = \varphi_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi_0\right)}$$

Energia

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Mechanická energia harmonického pohybu

Potenciálna energia harmonického pohybu – všeobecná charakteristika

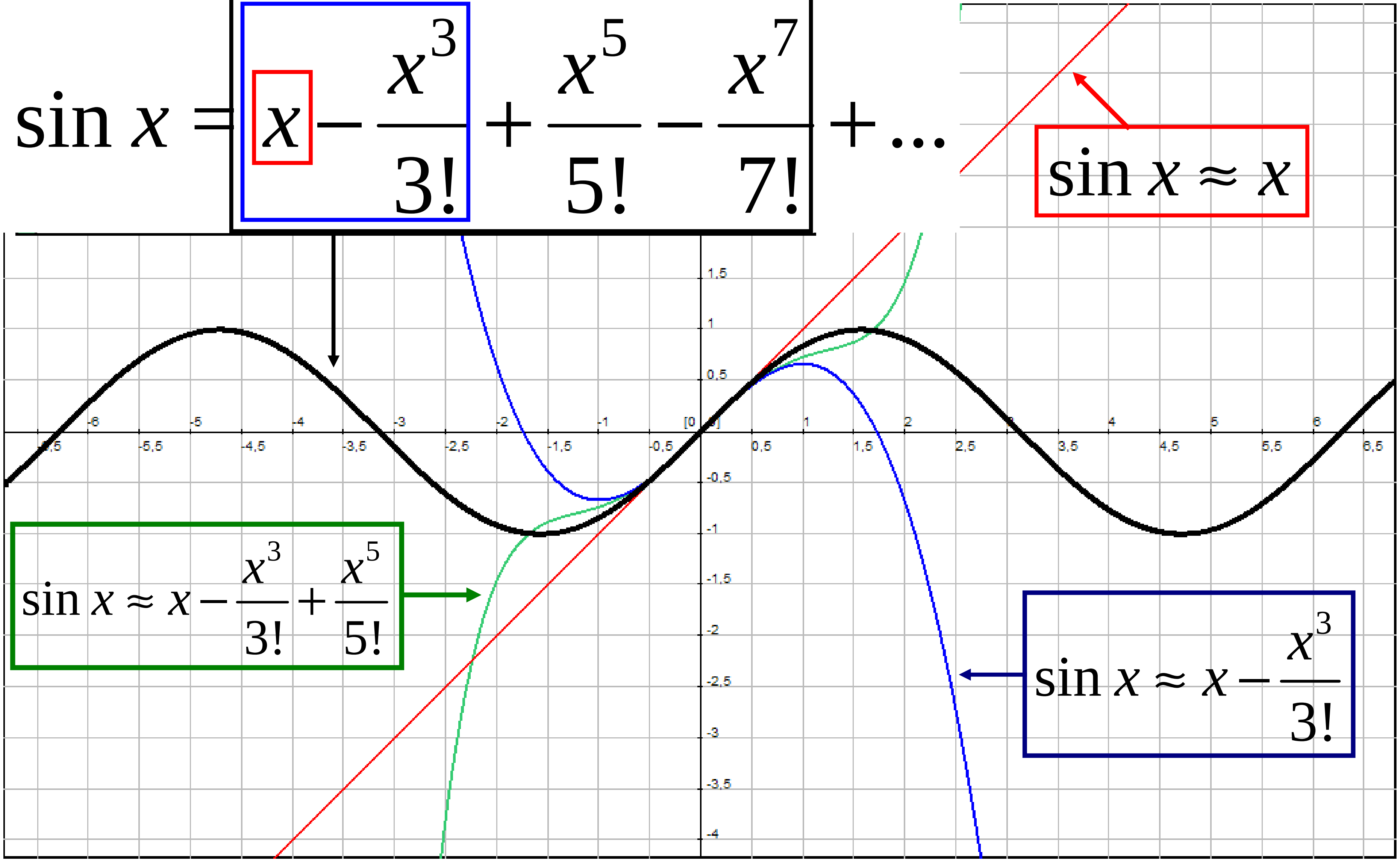
$$\boxed{F = ma = -\omega^2 m\, x}$$

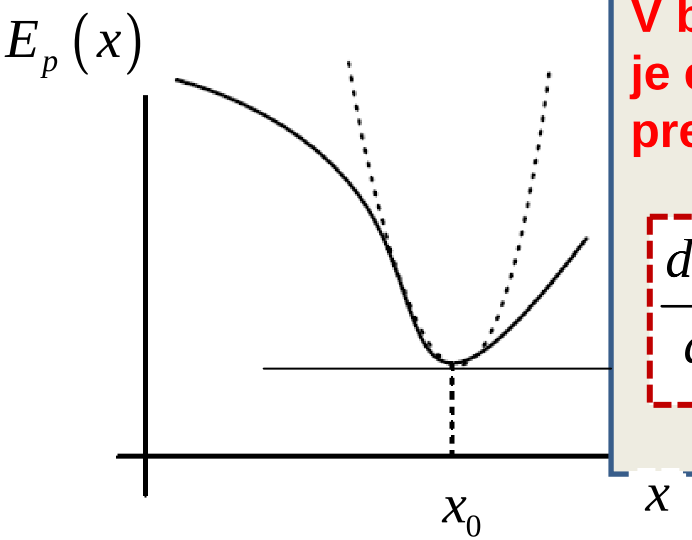
$$E_p = -\int_0^x \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\int_0^x -m\,\omega^2 x dx = \frac{1}{2}\alpha\, x^2$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\alpha\, x^2}$$

Každý systém v blízkom okolí svojej rovnovážnej polohy vykonáva harmonické kmity.

$$\sin x = \boxed{\boxed{\boxed{x} - \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}} + \ldots$$





V bode x_0 /rovnovážna poloha /
je extrém – minimum a referenčný bod
pre potenciálnu energiu:

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \alpha \qquad E_p(x_0) = 0 \qquad x - x_0 = \Delta x$$

$$f(x) = f(x_o) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \dots$$

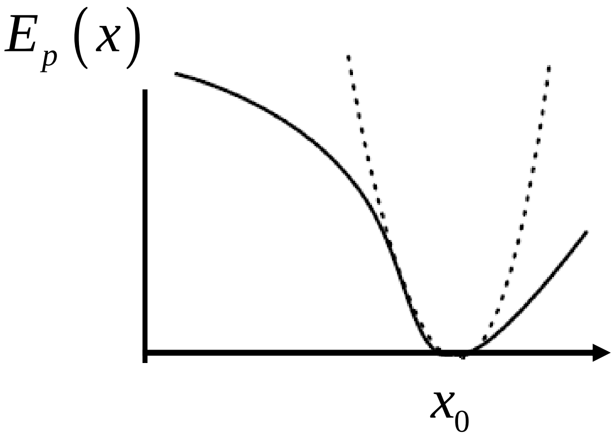
$$E_p(x) = \boxed{E_p(x_0)} + \boxed{\left.\frac{dE_p}{dq}\right|_{x=x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}\left(\boxed{x-x_0}\right)^2 + \dots$$

Hodnota potenciálnej energie v referenčnom bode je nulová

Derivácia funkcie v extréme je nulová

Vzdialenosť bodu od rovnovážnej polohy

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\alpha(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}\alpha(\tilde{x})^2$$



V bode x_0 /rovnovážna poloha / je extrém – minimum a referenčný bod pre potenciálnu energiu:

$$\boxed{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0} \qquad \boxed{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \alpha} \qquad \boxed{E_p(x_0) = 0} \qquad \boxed{x - x_0 = \Delta x}$$

x

$$f(x) = f(x_o) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \ldots$$

$$E_p(x) = \boxed{E_p(x_0)} + \boxed{\left.\frac{dE_p}{dq}\right|_{x=x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}\left(\boxed{x-x_0}\right)^2 + \ldots$$

Hodnota potenciálnej energie v referenčnom bode je nulová

Derivácia funkcie v extréme je nulová

Vzdialenosť bodu od rovnovážnej polohy

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\alpha(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}\alpha(\tilde{x})^2$$

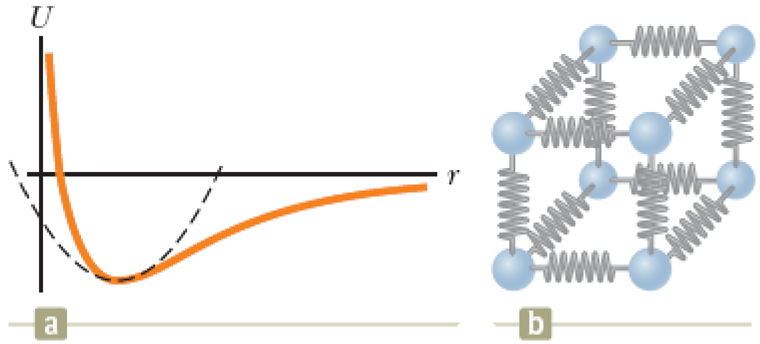
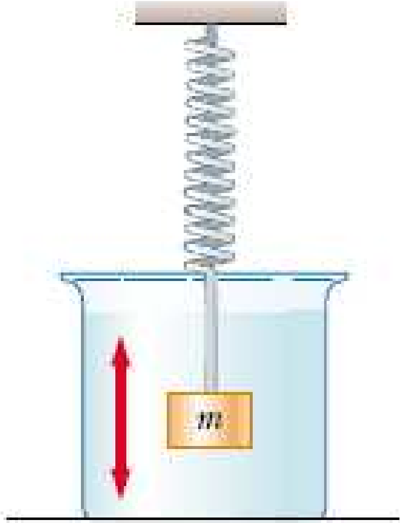


Figure 15.11 (a) If the atoms in a molecule do not move too far from their equilibrium positions, a graph of potential energy versus separation distance between atoms is similar to the graph of potential energy versus position for a simple harmonic oscillator (dashed black curve). (b) The forces between atoms in a solid can be modeled by imagining springs between neighboring atoms.

Tlmené kmity



Pohybová rovnica:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Koeficient odporu prostredia

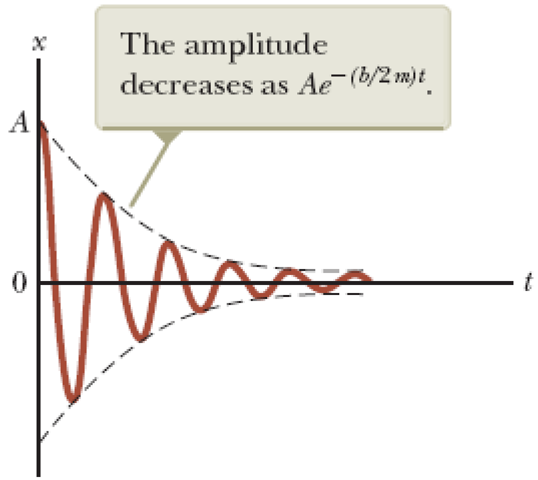
$$x = x_0 e^{-\beta t} \cos\left[\omega t + \varphi\right]$$

$$\left[\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\beta\gamma}{m}\right] x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + \left[2\omega\beta - \frac{\omega\gamma}{m}\right] x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t = 0$$

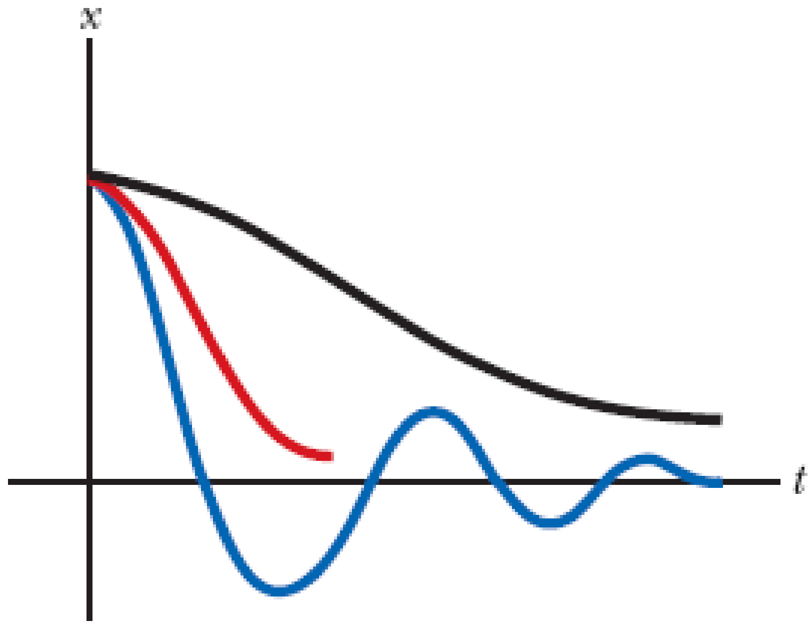
$$2\omega\beta - \frac{\omega\gamma}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\gamma}{2m}$$

$$\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\beta\gamma}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\; t + \varphi\right]$$



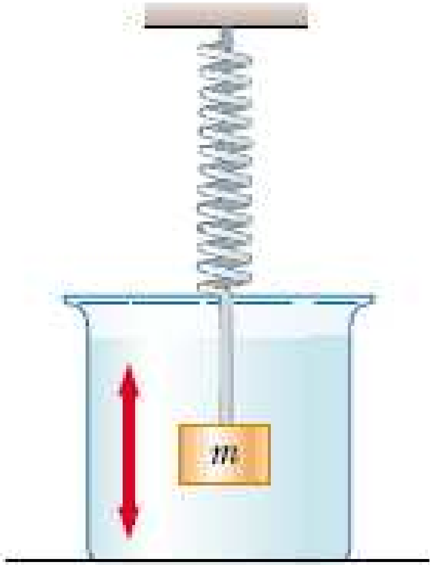
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$



$$\boxed{\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\beta\gamma}{m} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

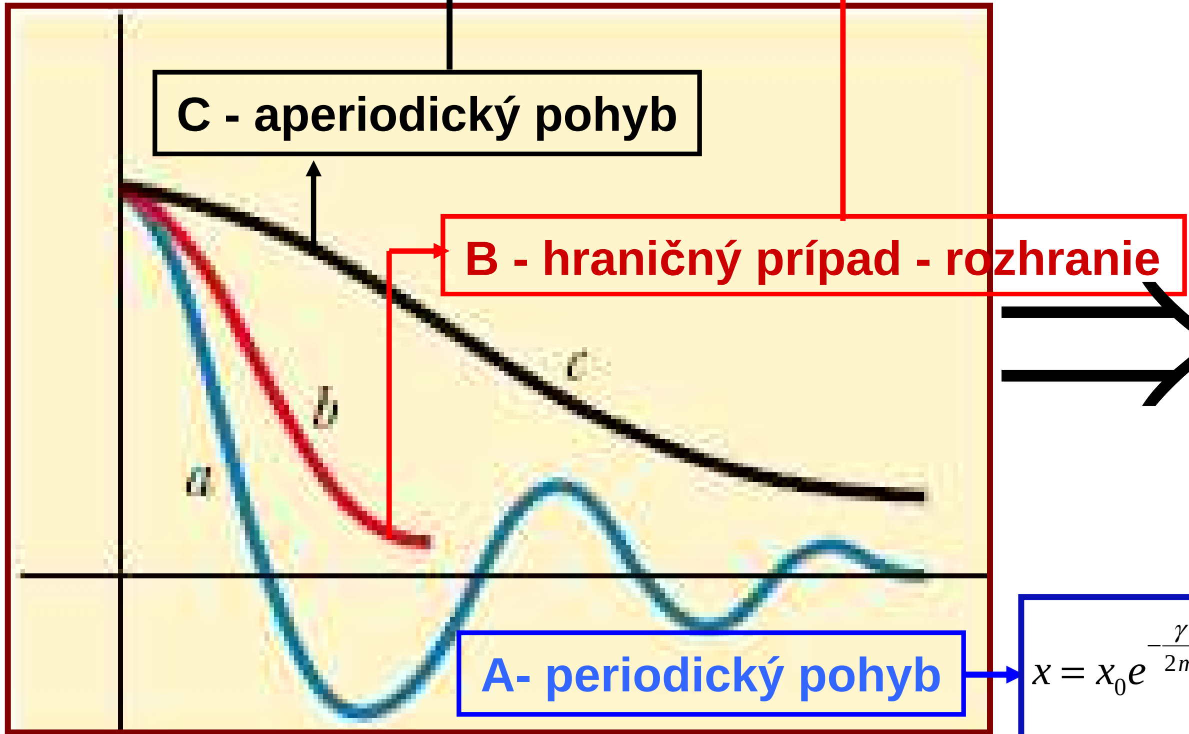
Tlmený oscilátor

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$x = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\left(C_1 + C_2 t\right) e^{-bt}$$



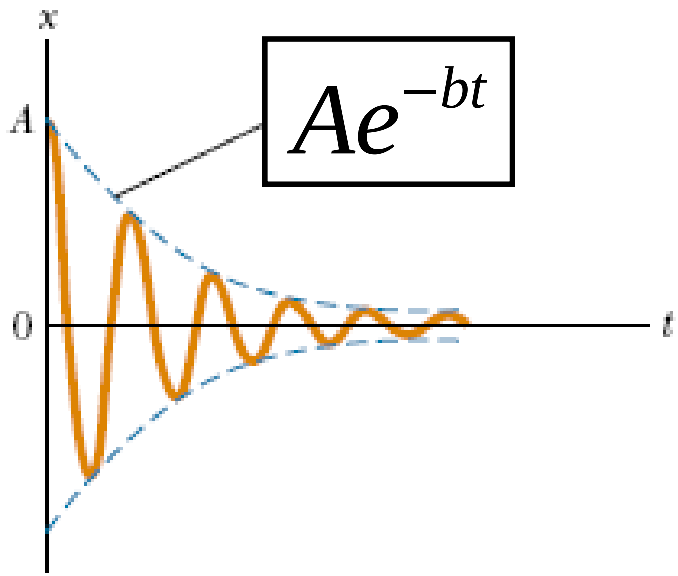
$\Longrightarrow$

Kmitavý pohyb postupne zaniká a jeho mechanická energia sa postupne celá premení na vnútornú energiu prostredia

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m}}\; t + \varphi\right]$$

Periodický pohyb tlmeného oscilátora

Amplitúda exponenciálne klesá



Perióda je väčšia ako perióda netlmeného harmonického pohybu , ktorý by sa zrealizoval inak za rovnakých podmienok

$$x = Ae^{-bt}\cos\left(\boxed{\omega}\, t + \varphi\right)$$

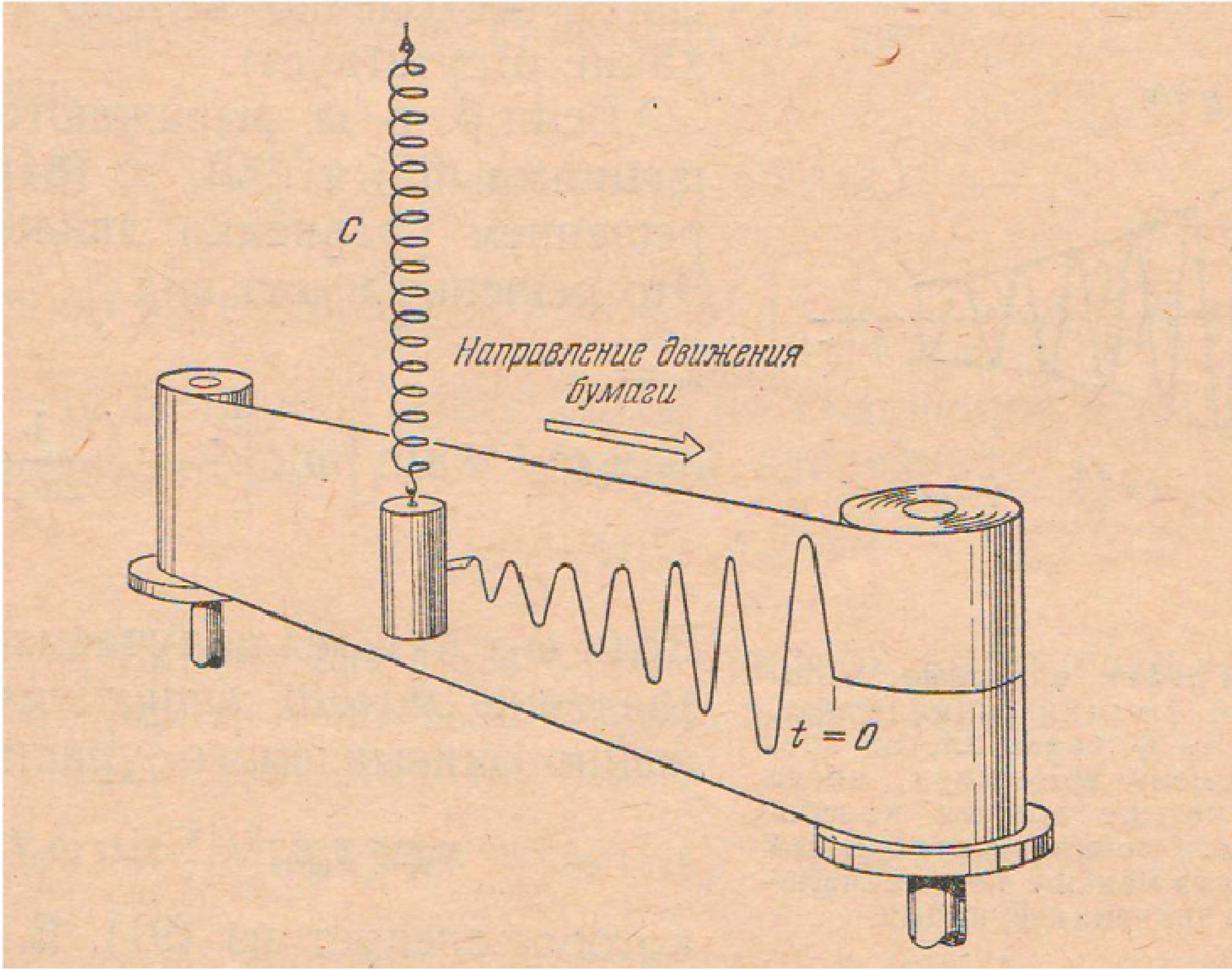
Lokálne maximá a minimá sa periodicky opakujú s frekvenciou ω a periódou T:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

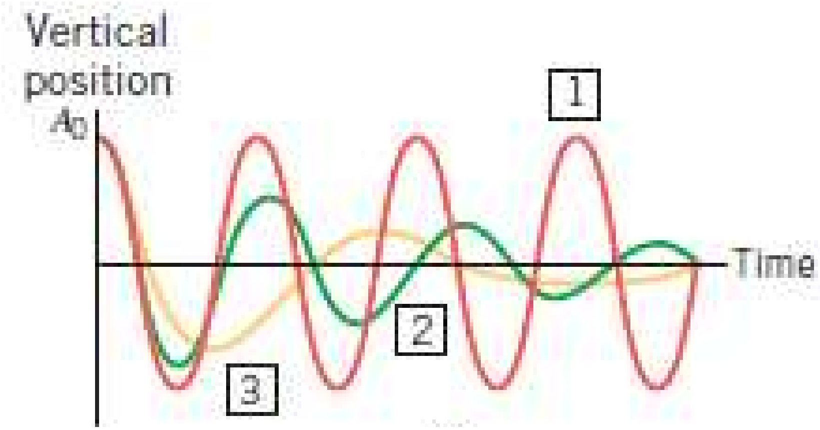
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

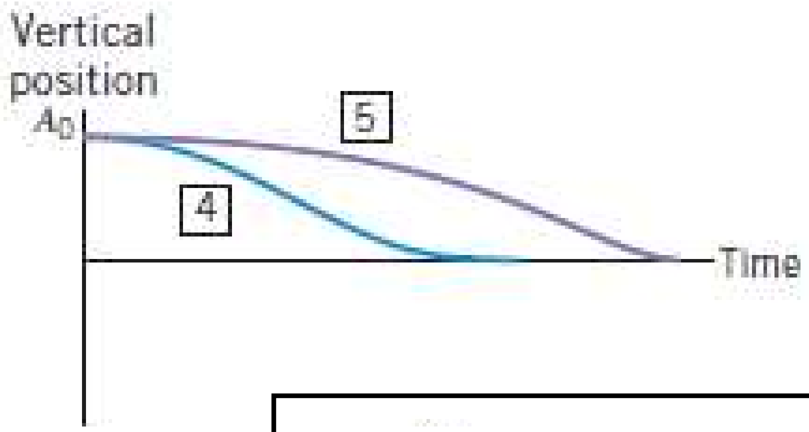
Logaritmický dekrement útlmu

$$\delta = \log\frac{A^{\bullet}(t)}{A^{\bullet}(t+T)} = \frac{Ae^{-bt}}{Ae^{-b(t+T)}} = bT$$


C
Направление движения
бумаги
t = 0

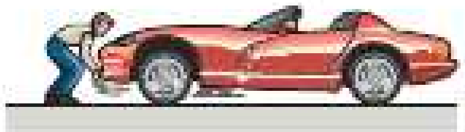
Porovnanie kmitov od stupňa tlmenia





1 – netlmené kmity
2,3 – tlmené kmity, periodické
4 – kritické kmity, aperiodické
5 – nadkritické kmity, aperiodické

Princíp tlmičov – tlmenie vibrácii



Meracie zariadenia – snaha dosiahnut rovnovážnu polohu čo najskôr