Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 14. 1. 2011

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$1+3+5+...+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $A=\{x\,;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-4=0)\}$, vytvorte komplement tejto množiny $\overline{A}$ vzhľadom k $\mathbb{R}$?

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\emptyset,a\}$.

4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ a $Q=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ sú relácie nad $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte kompozície $P\circ Q$, $Q\circ P$.

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$, (b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$, (c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$, (d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$, (e) $x\cdot\mathbf{1}=x$.

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, kedy máte na začiatku hry 5 zápaliek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň.
Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu k matici

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi (alebo 60 bodmi, v prípade korektného riešenie prémiového príkladu), čas na písomku je 90 minút.

Riešenie

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$P(n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Riešenie: Ľahko sa presvedčíme, ze $P(1)=1$, potom pre $P(n+1)$ platí

$$P(n+1) = P(n) + (2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\{x\,;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-4=0)\}$

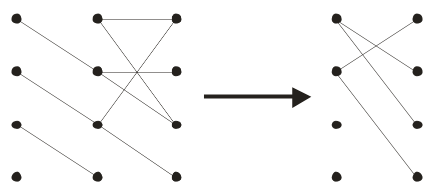
Riešenie: $A=\{-2,2\}$, $\overline{A}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$.

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\varnothing,a\}$.

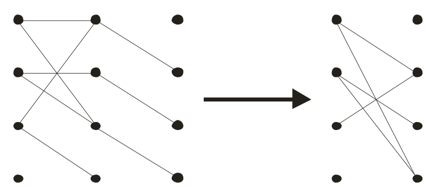
Riešenie: $A=\left\{\underbrace{\varnothing}_{a},\underbrace{a}_{b}\right\}\Rightarrow\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\varnothing\,a\}\}$

4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ a $Q=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ sú binárne relácie nad $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte kompozície $P\circ Q$, $Q\circ P$.

Riešenie:



P Q P°Q



Q P Q°P

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

Riešenie:

6!=720

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Riešenie:

Nie je binárna operácia, pretože pre $x,y\in A$ výsledok binárnej operácie $x*y\notin A$ (napr. pre $x<y$ dostaneme záporné $z=x-y$), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej x platia nasledujúce podmienky

(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$

(b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$

(c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$,

(d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$,

(e) $x\cdot\mathbf{1}=x$.

Riešenie:

(a) neplatí pre žiadne x

(b) neplatí pre žiadne x

(c) $x=\mathbf{0}$,

(d) $x=\mathbf{0}$,

(e) platí pre každé x

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

Riešenie:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & -5 \\ \boxed{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{-3} & \cancel{-17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array}\right)$$

$$z=t,\ -4y-3z=-17 \Rightarrow y=\frac{17}{4}-\frac{3}{4}t,\ x+y+z=6 \Rightarrow x=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}t,\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

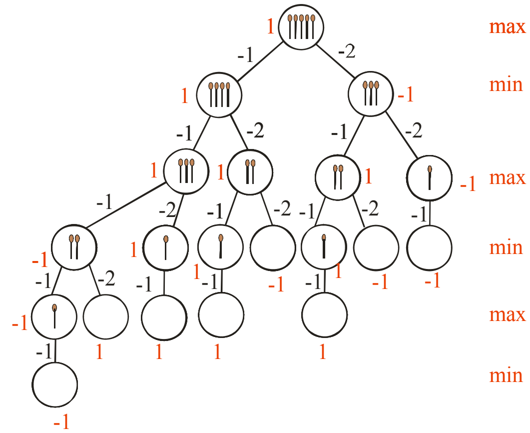
9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, kedy máte na začiatku hry 5 zápaliek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

Riešenie:

Vyhrávajúca stratégia pre 1. hráča je v prvom ťahu zobrať 1 zápalku



Na obrázku sú vrcholy s počtom zápaliek na hromádke, červená jednotka znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), červene označená –1 znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Čierne ohodnotenia hrán –1 a –2 znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápaliek hráčom. Z ohodnotenia koreňa vyplýva, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia.

11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

$$2|E| = |V|\deg(v)$$

Riešenie: $2\times 30 = |V|\times 5$

$$12 = |V|$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$