

Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 23. 5. 2005

Skupina B

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:

$\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$, kde a, b, c sú reálne čísla.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

3. príklad.

Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je väčší ako y ,

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

(c) x navštevuje rovnakú školu ako y ,

4. príklad.

Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré

(a) obsahujú podreťazec BCD, (b) obsahujú podreťazec CFGA, (c) dva podreťazce BA a GF,

5. príklad

V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

6. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$,

7. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & -1 & 3 & -3 \\ q & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

8. príklad.

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

9. príklad.

Dokážte priamo z definície, že matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi, má hodnotu $h(A) = 3$

10. príklad. Odôvodnite, prečo môže či prečo nemôže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

11. príklad. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n ?

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:

$\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$, kde a, b, c sú reálne čísla.

$$(1) \ a \leq b \leq c, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_a, c\right\}$$

$$(2) \ a \leq c \leq b, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_a, c\right\}$$

$$(3) \ b \leq a \leq c, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_b, c\right\}$$

$$(4) \ b \leq c \leq a, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_b\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_b, c\right\}$$

$$(5) \ c \leq a \leq b, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_a, c\right\}$$

$$(6) \ c \leq b \leq a, \ \min\left\{a, \underbrace{\min\{b, c\}}_c\right\} = \min\left\{\underbrace{\min\{a, b\}}_b, c\right\}$$

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

(a) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny A a B

(b) $A - B = B - A$, platí ak $A = B$.

(c) $A - B = A$, platí ak $A \cap B = \emptyset$

3. príklad.

Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je väčší ako y ,

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

(c) x navštevuje rovnakú školu ako y .

(a) x je väčší ako y ,

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x > y) \wedge (y > z) \Rightarrow (x > z))$

antisymetrická: $\forall (x, y \in X) ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,

reflexívna: $\forall x ((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

(c) x navštevuje rovnakú školu ako y .

reflexívna: $\forall x ((x, x) \in R)$

symetrická: $\forall x \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

4. príklad.

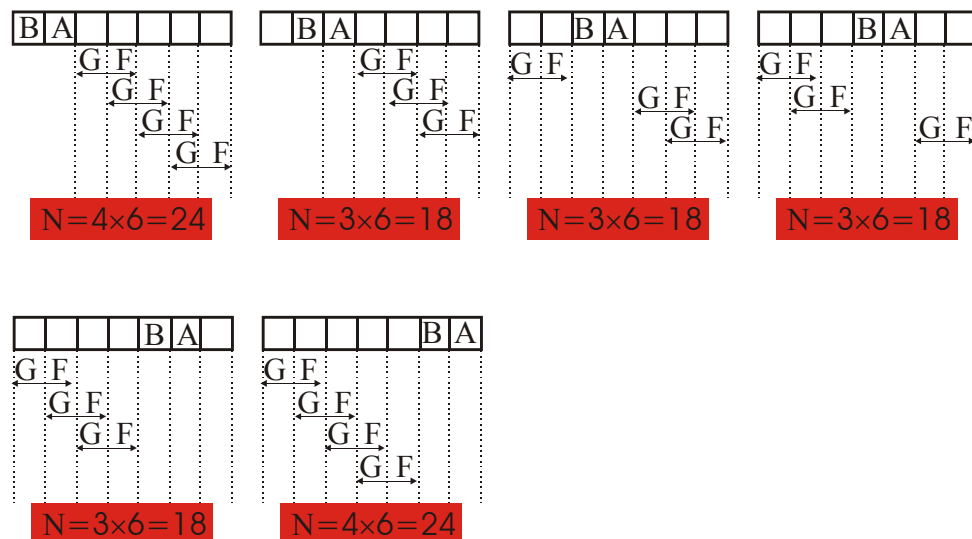
Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré

(a) obsahujú podreťazec BCD, (b) obsahujú podreťazec CFGA, (c) dva podreťazce BA a GF.

(a) obsahujú podreťazec BCD, $5! = 120$

(b) obsahujú podreťazec CFGA, $4! = 24$

(c) dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je $2 \times 24 + 4 \times 18 = 120$.

5. príklad

V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

$$A_1 = \{\text{červivé jablčka}\}, A_2 = \{\text{nahnité jablčka}\} \mid |A_1| = 20, |A_2| = 15, |A_1 \cap A_2| = 10,$$

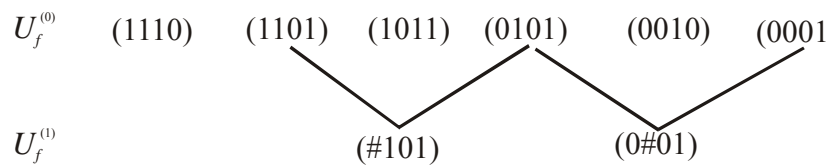
$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| &= |\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = |U| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) \\ &= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 100 - 20 - 15 + 10 = \boxed{55} \end{aligned}$$

6. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z,$$

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				



$$\tilde{V} = \{(\#101), (0\#01), (1110), (1011), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{w}\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$$

7. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & -1 & 3 & -3 \\ q & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & -1 & 3 & -3 \\ q & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 3-2p & -3+p \\ 0 & 1 & 1-2q & 1+q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3+2p & 3-p \\ 0 & 1 & 1-2q & 1+q \end{pmatrix}$$

Pretože požadujeme, aby 2., 3. a 4. riadok boli ekvivaletné, potom z podmienok

$$(-3 + 2p = -5) \wedge (3 - p = 4) \Rightarrow \boxed{p = -1}$$

$$(1 - 2q = -5) \wedge (1 + q = 4) \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

Potom ekvivalentná matica na prvej strane má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & -1 & 3 & -3 \\ q & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 + 2p & 3 - p \\ 0 & 1 & 1 - 2q & 1 + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \hline 0 & 1 & -5 & 4 \\ \hline 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

To znamená, že pre $p=-1$ a $q=3$ má matica hodnotu 2.

8. príklad.

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}, \quad x_3 = \frac{10}{-12} = -\frac{5}{6}$$

9. príklad.

Dokážte priamo z definície, že matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi, má hodnotu $h(A) = 3$

Budeme dokazovať stĺpcovú hodnotu, zavedieme stĺpce matice

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty

$$\alpha_1 a_{11} = 0$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = 0$$

$$\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = 0$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1, s_2, s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Odôvodnite, prečo môže či nemôže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

Riešenie:

Nemôže existovať, taký graf by mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, čo odporuje teorému 10.1.

11. príklad. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n ?

Riešenie: V príklade v textu sme videli, že chromatické číslo C_n je 2 pre párne n a 3 pre nepárne n . Pretože koleso W_n je iba n -uholník C_n s centrálnym vrcholom navyše, prepojeným so všetkými vrcholmi C_n na obode, W_n potrebuje iba o jednu farbu viac ako C_n , práve pre centrálny vrchol. Preto je chromatické číslo W_n je 3 pre párne n a 4 pre nepárne n .