Záverečná písomka (9. 6. 2009)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Ako je definovaná formula?

(b) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a zostrojte množinu jej všetkých možných podformúl.

(c) Čo je tautológia, aký je jej význam vo výrokovej logike? Čo je splniteľná formula?

(d) Čo je teória a čo je model?

(e) Čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \models \varphi$?

Príklad 2. Pomocou logických neurónov zostrojte neurónovú sieť „full adder", ktorá realizuje súčet troch jednobitových čísel

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1\beta_2$$

kde „+" je aritmetická operácia sčítania.

Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\begin{array}{llllllll} r \Rightarrow \neg s & r \Rightarrow \neg s & r \vee \neg s & r \Rightarrow \neg s & \neg r \Rightarrow \neg s & r \Rightarrow s & \neg r \Rightarrow \neg s & p \Rightarrow q \\ \underline{r \qquad}\,, & \underline{t \Rightarrow s \quad}\,, & \underline{\neg r \quad}\,, & \underline{\neg s \quad}\,, & \underline{r \qquad}\,, & \underline{r \Rightarrow \neg s}\,, & \underline{\neg r \qquad}\,, & \underline{q \Rightarrow r} \end{array}$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.

(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2), ktoré sú prvočísla.

(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.

(e) Každé dieťa má matku.

Príklad 5. Rozhodnite (<u>a zdôvodnite</u>) pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \Rightarrow (\exists y\, \forall x\, P(x,y))$

(b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$,

(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,

(d) $(\exists x \forall y\, P(x,y)) \Rightarrow (\exists x\, P(x,a))$.

Príklad 6. Nájdite riešenie týchto sylogizmov (ak existuje) pomocou prirodzenej dedukcie:

(a)
Každý vodič má viac ako 15 rokov
<u>Každý kto má viac ako 15 rokov má OP</u>
?

(b)
Niektorí študenti sú hasiči
<u>Niektorí hasiči sú slobodní</u>
?

(c)
Niektorí chemici sú astronómovia
<u>Každý fyzik nie je chemik</u>
?

(c)
Každý študent nie je včelár
<u>niektorí včelári sú analfabeti</u>
?

Príklad 7. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(b) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

(c) $\forall x\,(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall y R(y))$

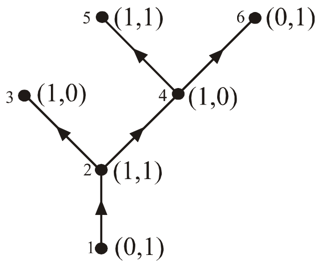
Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formuly sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi \vee \neg\varphi$

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Príklad 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je vo fuzzy logike výroková formula $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ pravdivá.

Príklad 10. Nech atomické formuly p a q v modálnej logike majú ohodnotenie v rôznych svetoch zadané podľa obrázku.



Symbol (α,β) nech vyjadruje dvojicu binárnych čísel, kde $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ špecifikujú pravdivostné hodnoty výrokových premenných p resp. q v danom svete (špecifikovanom číslom pri vrchole stromu). Tak napríklad pre premennú p platí: $v(w_1,p)=0$, $v(w_2,p)=1$, $v(w_3,p)=1$, $v(w_4,p)=1$, $v(w_5,p)=1$ a $v(w_6,p)=0$. Nájdite v rôznych svetoch pravdivostné hodnoty formuly a jej podformúl:

$$p \Rightarrow \Diamond q$$

Príklad 11. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Ako je definovaná formula?

(b) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a zostrojte množinu jej všetkých možných podformúl.

(c) Čo je tautológia, aký je jej význam vo výrokovej logike? Čo je splniteľná formula?

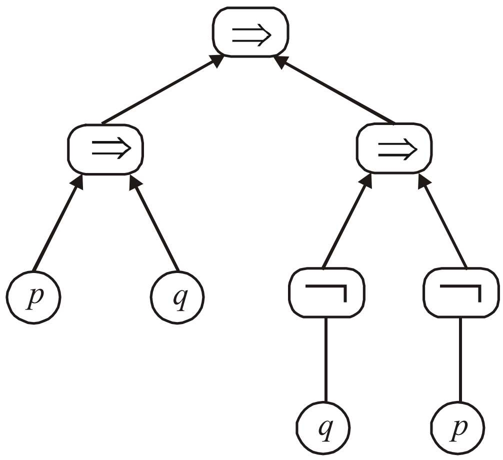
(d) Čo je teória a čo je model?

(e) Čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \models \varphi$?

(a) Formula je definovaná rekurentne takto

formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b)



$$\{p, q, \neg p, \neg q, p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\}$$

(c) Formula sa nazýva tautológia vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; tautológia je alternatívny názov pre zákon v logike. Formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(d) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(e) *F*ormula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \models \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2. Pomocou logických neurónov zostrojte neurónovú sieť „full adder“, ktorá realizuje súčet troch jednobitových čísel

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1\beta_2$, kde „+“ je aritmetická operácia sčítania.

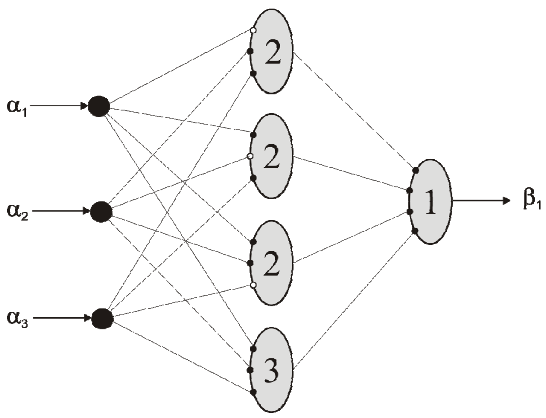
Riešenie: Tabuľka pre túto úlohu má tvar

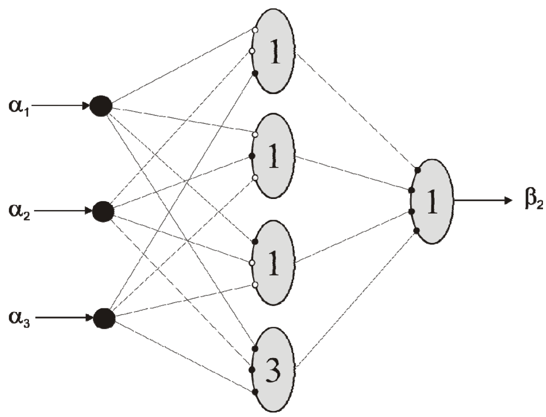
#	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0
8	1	1	1	1	1

Pomocou tejto tabuľky zostrojíme Boolove funkcie pre β_1 a β_2

$$\beta_1 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)$$

$$\beta_2 = (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)$$





Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{\neg s}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ t \Rightarrow s \end{array}}{t \Rightarrow \neg r}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \vee \neg s \\ \neg r \end{array}}{\neg s}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \end{array}}{?}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{?}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow s \\ r \Rightarrow \neg s \end{array}}{\neg r}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \end{array}}{\neg s}, \quad \frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.

$\forall x\left(Angl(x) \Rightarrow Rad\_caj(x)\right)$

$\exists x\left(Angl(x) \wedge \neg Rad\_caj(x)\right)$

Existuje taký Angličan, ktorý nemá rád čaj.

(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

$\exists x\left(sport(x) \wedge \neg fyz\_kond(x)\right)$

$\forall x(\neg sport(x) \vee fyz\_kond(x)) \equiv \forall x(sport(x) \Rightarrow fyz\_kond(x))$
Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2) , ktoré sú prvočísla.
$\exists x(neparne(x) \wedge prime(x))$
$\forall x(\neg neparne(x) \vee \neg prime(x)) \equiv \forall x(neparne(x) \Rightarrow \neg prime(x))$
Každé nepárne číslo nie je prvočíslo.

(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.
$\exists x(navst\_plavaren(x) \wedge \neg vie\_plavat(x))$
$\forall x(\neg navst\_plavaren(x) \vee vie\_plavat(x)) \equiv \forall x(navst\_plavaren(x) \Rightarrow vie\_plavat(x))$
Každý, kto navštevuje plaváreň, vie plávať.

(e) Každé dieťa má matku.
$\forall x(dieta(x) \Rightarrow matka(x))$
$\exists x(dieta(x) \wedge \neg matka(x))$
Existuje dieťa, ktoré nemá matku.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \Rightarrow (\exists y\, \forall x\, P(x,y))$
Táto formula nie je tautológia, zostrojíme tento kontrapríklad: Nech $P(x,y) =_{def} (x < y)$, potom ľavý výrok $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ je pravdivý, zatiaľ čo, pravý výrok $\exists y \forall x\; P(x,y)$ je nepravdivý (napr. pre univerzum prirodzených čísel $U = N = \{1, 2, ...\}$), potom implikácia $1 \Rightarrow 0$ je nepravdivá.

(b) $\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$, táto formula je automaticky pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $(P(x) \vee \neg P(x)) \equiv 1$ pre každé indivíduum x.

(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$, navrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\, P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\, P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia $(1 \Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo“).

(d) $\left(\exists x \forall y\, P(x,y)\right) \Rightarrow \left(\exists x\, P(x,a)\right)$, formulu $\left(\exists x \forall y\, P(x,y)\right)$ môžeme pomocou zákona pre elimináciu univerzálneho kvantifikátora (konkretizáciou) $\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(a)$ previesť do ekvivalentného tvaru $\left(\exists x\, P(x,a)\right)$, formula je tautológia.

Príklad 6. Nájdite riešenie týchto sylogizmov (ak existuje) pomocou prirodzenej dedukcie:

(a)

Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP. ?

Vykonáme prepis sylogizmu do predikátovej logiky

$$\varphi_1: \forall x \left(vodic(x) \Rightarrow nad15(x) \right) \Rightarrow \left(vodic(t) \Rightarrow nad15(t) \right)$$
$$\varphi_2: \forall x \left(nad15(x) \Rightarrow maOP(x) \right) \Rightarrow \left(nad15(t) \Rightarrow maOP(t) \right)$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$
dostaneme

$\left(vodic(t) \Rightarrow maOP(t)\right)$ pre ľubovolné indivíduum *t*, čiže platí aj

$$\forall x \left(vodic(x) \Rightarrow maOP(x) \right)$$

Záver zo sylogizmu je: „každý vodič má OP."

(b)

Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

?

$$\varphi_1: \exists x \left(st(x) \wedge hasic(x) \right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge hasic(a) \right)$$
$$\varphi_2: \exists x \left(hasic(x) \wedge slob(x) \right) \Rightarrow \left(hasic(b) \wedge slob(b) \right)$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí chemici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

?

$$\varphi_1: \exists x \left(chem(x) \wedge astr(x) \right) \Rightarrow \left(chem(a) \wedge astr(a) \right)$$
$$\varphi_2: \forall x \left(fyz(x) \Rightarrow \neg chem(x) \right) \Rightarrow \left(fyz(a) \Rightarrow \neg chem(a) \right)$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *chem*(a) a *astr*(a). Použitím *chem*(a) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg fyz(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg fyz(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg fyz(x)$$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú fyzici".

(d)
Každý študent nie je včelár
Niektorí včelári sú analfabeti

?

$$\varphi_1 : \forall x \left(st(x) \Rightarrow \neg vce(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg vce(a)\right) \Rightarrow \left(vce(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$$
$$\varphi_2 : \exists x \left(vce(x) \wedge anal(x)\right) \Rightarrow \left(vce(a) \wedge anal(a)\right)$$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *vce*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg st$(a) , spojením s *anal*(a) dostaneme

$$anal(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, anal(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje včelár): „niektorý analfabet nie je študent"

Príklad 7. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

1.	$\neg q \Rightarrow \neg p$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	p	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	q	(aplikácia I$\neg$ (modus tollens) na 1. a 2.)
4.	$p \Rightarrow q$	(deaktivácia 2. pomocného predpokladu)
5.	$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(deaktivácia 1. pomocného predpokladu)

(b) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

1.	$\forall x\, \varphi(x)$	(akt. 1. pomoc. predpokladu)
2.	$\varphi(t)$	(konkretizácia univ. kvant.)
3.	$\exists x\, \varphi(x)$	(zavedenie exist. kvant.)
4.	$\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$	(deak. 1. pomoc. predpokladu)

(c) $\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)\Rightarrow\left(\forall xP(x)\right)\wedge\left(\forall yR(y)\right)$.

1.	$\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)$
2.	$P(t)\wedge R(t)$
3.	$P(t)$
4.	$R(t)$
5.	$\forall xP(x)$
6.	$\forall yR(y)$
7.	$\forall xP(x)\wedge\forall yR(y)$
8.	$\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)\Rightarrow\forall xP(x)\wedge\forall yR(y)$

Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

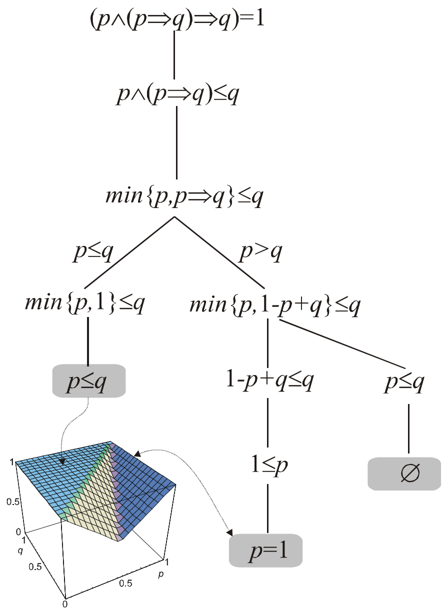
(a) $\neg(\neg\varphi\wedge\varphi)\equiv\varphi\vee\neg\varphi$,

1	2	3	4	5	6	7	8
φ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi\wedge\varphi$	$\neg(\neg\varphi\wedge\varphi)$	$\varphi\vee\neg\varphi$	$4\Rightarrow5$	$5\Rightarrow4$	$6\wedge7$
0	1	0	1	1	1	1	1
½	½	½	½	½	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1

(b) $\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\varphi)$,

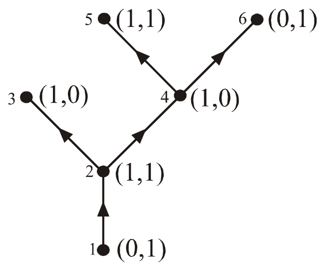
φ	ψ	$\psi\Rightarrow\varphi$	$\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1
½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Cvičenie 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $\left(p \wedge (p \Rightarrow q)\right) \Rightarrow q$.



To znamená, že formula je pravdivá len pre $p \le q$ alebo $p = 1$.

Príklad 10. Nech atomické formuly p a q majú ohodnotenie v rôznych svetoch zadané podľa obrázku.



Symbol (α,β) nech vyjadruje dvojicu binárnych čísel, kde $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ špecifikujú pravdivostné hodnoty výrokových premenných p resp. q v danom svete (špecifikovanom číslom pri vrchole stromu). Tak napríklad pre premennú p platí: $v(w_1,p)=0$, $v(w_2,p)=1$, $v(w_3,p)=1$, $v(w_4,p)=1$, $v(w_5,p)=1$ a $v(w_6,p)=0$. Nájdite v rôznych svetoch pravdivostné hodnoty formuly a jej podformúl:

$$p \Rightarrow \Diamond q$$

podformula	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
p	0	1	1	1	1	0
q	1	1	0	0	1	1
$\Diamond q$	1	1	0	1	1	1
$p \Rightarrow \Diamond q$	1	1	0	1	1	1

Príklad 11. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

1. $v\left(w_1, \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)\right) = 0$
2. $v\left(w_1, \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi)\right) = 1$
3. $v\left(w_1, \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi\right) = 0$
4. $v\left(w_2, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 1 \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma(w_1)\right)$
5. $v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 1$
6. $v\left(w_1, \Diamond\psi\right) = 0$
7. $v\left(w_3, \varphi\right) = 1 \quad \left(\forall w_3 \in \Gamma(w_1)\right)$
8. $v\left(w_4, \psi\right) = 0 \quad \left(\forall w_4 \in \Gamma(w_1)\right)$
9. $\left(v(w_2, \varphi) = 0\right) \vee \left(v(w_2, \psi) = 1\right) \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma(w_1)\right)$

Riadky 7, 8 a 9 produkujú kontradikciu, z tejto skutočnosti vyplýva, že formula je tautológia (pre každú interpretáciu je pravdivá).
Pomocou sémantického stromu problém tautologičnosti môžeme riešiť takto

$$\varphi = \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$

$$\neg\varphi = \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \neg(\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$

$$\neg\varphi = \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\Box\varphi \wedge \Box\neg\psi)$$