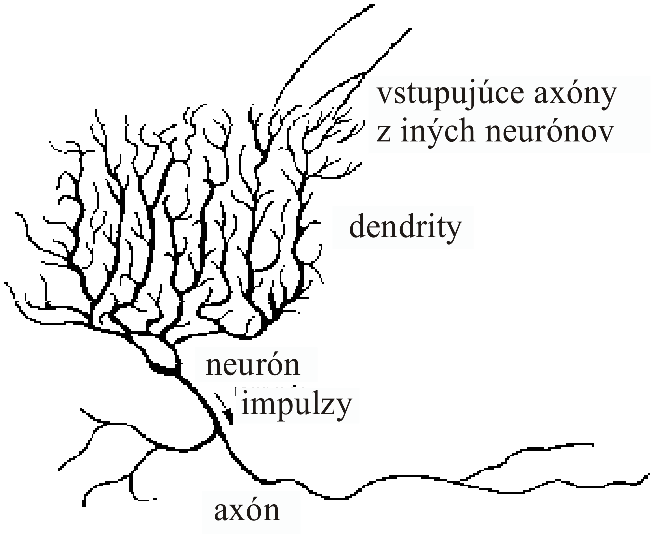
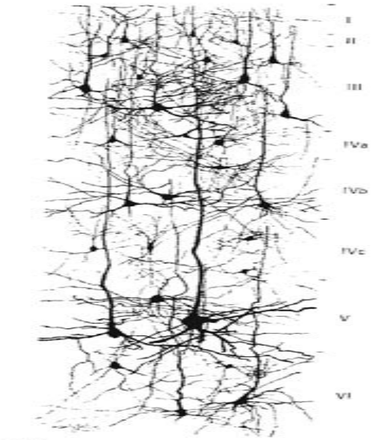
Logické neuróny a neurónové siete

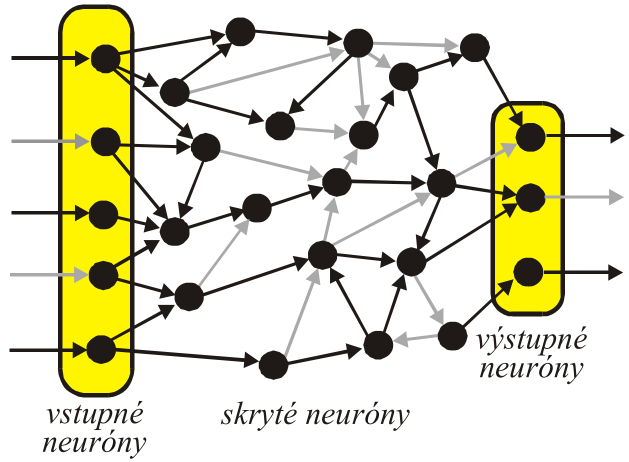
Základné skutočnosti z neurovedy



A

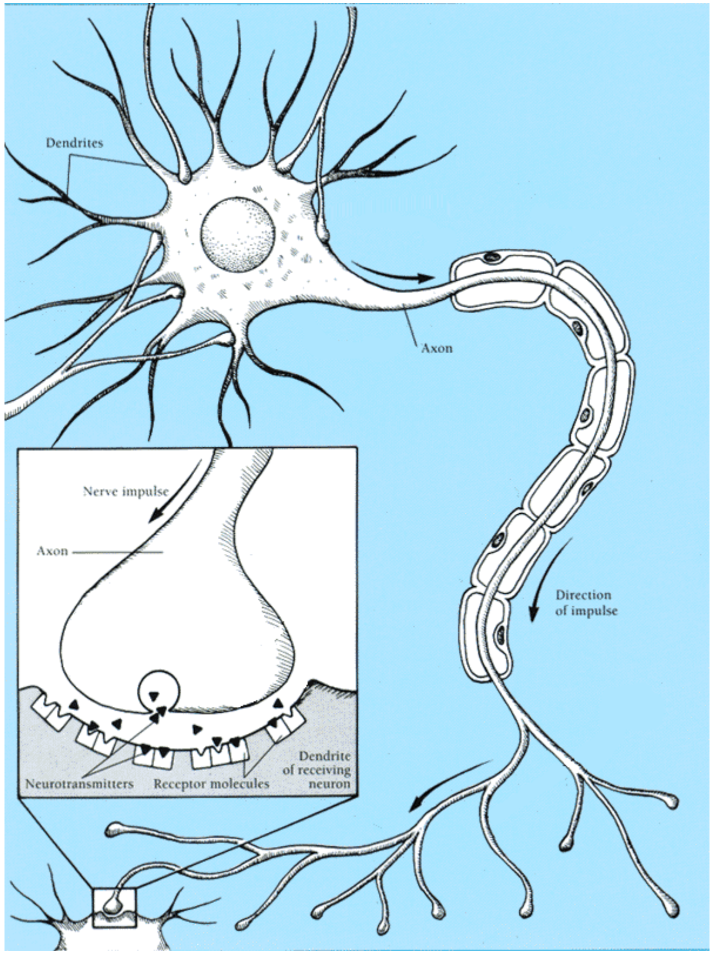


B



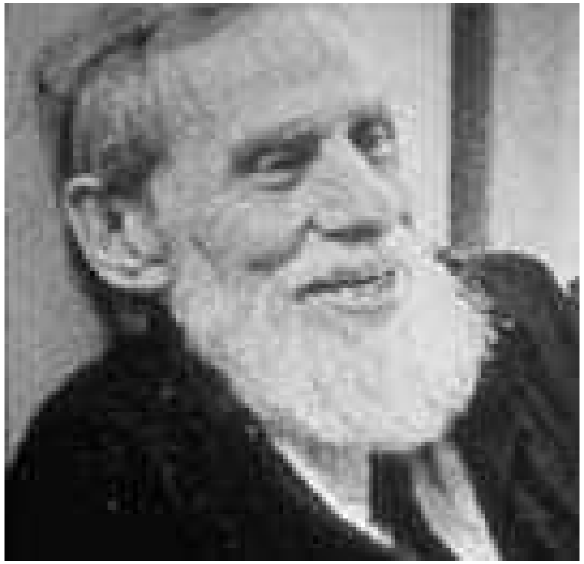
C

Podrobná schéma neurónu



obrázok je prevzatý z
http://www.pfizer.com/brain/image

Budeme študovať jeden z najjednoduchších modelov neurónov, ktorý v r. 1943 navrhli McCulloch a Pitts. Ich jednoduchý model logického neurónu je v súčasnosti pokladaný za významný medzník v rozvoji umelej inteligencie (menovite teórie umelých neurónových sietí).



Waren McCulloch (1898-1972)

Walter Pitts (1923-196?)

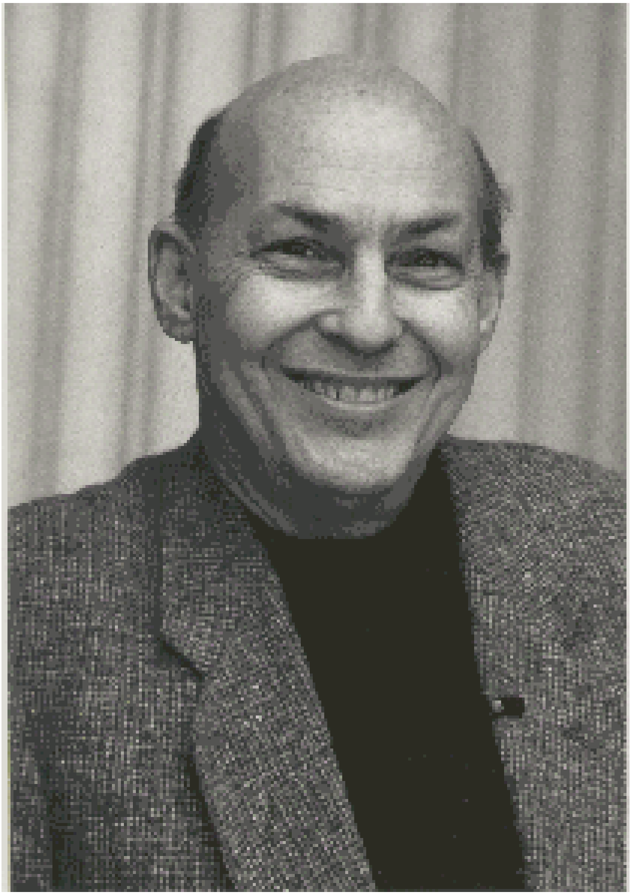
A LOGICAL CALCULUS OF THE IDEAS IMMANENT IN NERVOUS ACTIVITY

WARREN S. McCULLOCH and WALTER H. PITTS

Because of the "all-or-none" character of nervous activity, neural events and the relations among them can be treated by means of propositional logic. It is found that the behavior of every net can be described in these terms, with the addition of more complicated logical means for nets containing circles; and that for any logical expression satisfying certain conditions, one can find a net behaving in the fashion it describes. It is shown that many particular choices among possible neurophysiological assumptions are equivalent, in the sense that for every net behaving under one assumption, there exists another net which behaves under the other and gives the same results, although perhaps not in the same time. Various applications of the calculus are discussed.

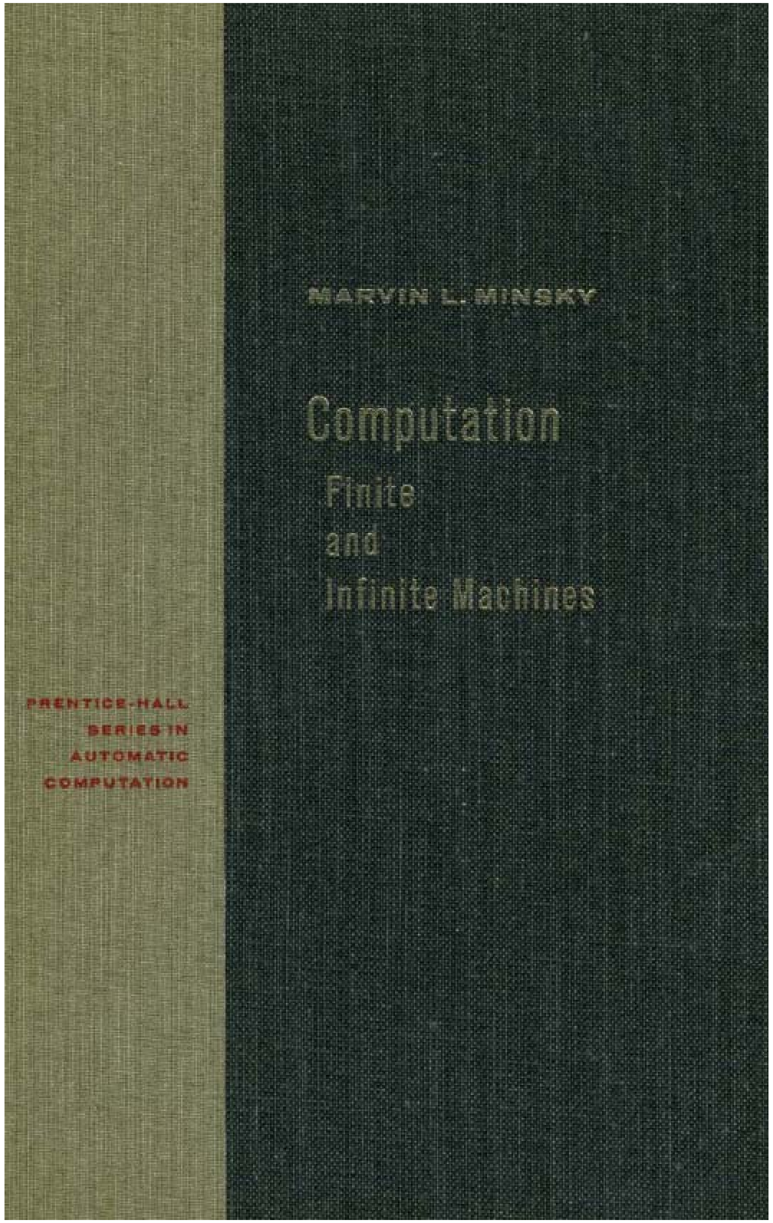
INTRODUCTION

THEORETICAL neurophysiology rests on certain cardinal assumptions. The nervous system is a net of neurons, each having a soma and an axon. Their adjunctions, or synapses, are always between the axon of one neuron and the soma of another. At any instant a neuron has some threshold, which excitation must exceed to initiate an impulse. This, except for the fact and the time of its occurrence, is determined by the neuron, not by the excitation. From the point of excitation the impulse is propagated to all parts of the neuron. The velocity along the axon varies directly with its diameter, from less than one meter per second in thin axons, which are usually short, to more than 150 meters per second in thick axons, which are usually long. The time for axonal conduction is consequently of little importance in determining the time



(1) M. Minsky: *Computation. Finite State Machines.* Prentice-Hall, 1967.
(2) M. Minsky and S. Papert: Perceptrons. An Introduction to to Computational geometry. MIT Press, 1969.

Marvin Minsky (*1927), AI Lab MIT, zaslúžil sa o pochopenie práce McCullocha a Pittsa, preformuloval ju do zrozumiteľnej formy a široko aplikoval.



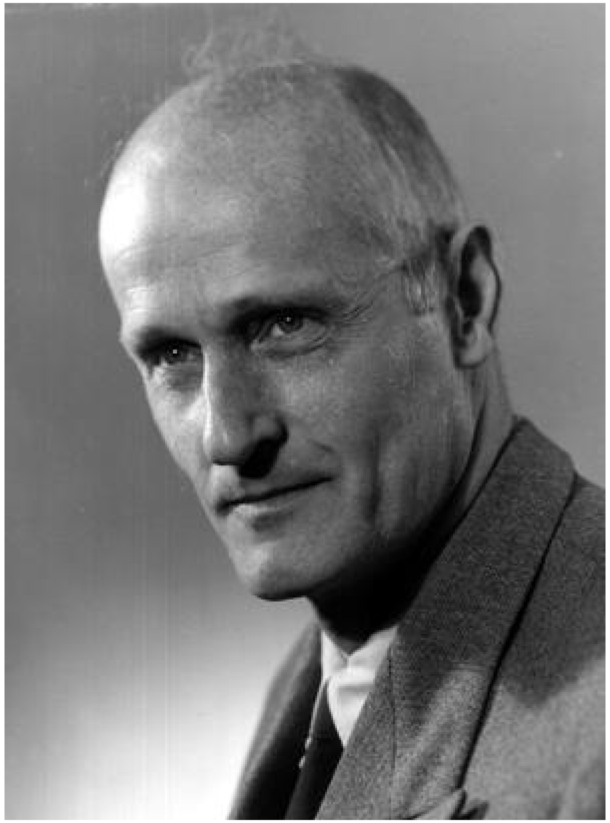
COMPUTATION:

FINITE AND INFINITE MACHINES

MARVIN L. MINSKY

Professor of Electrical Engineering
Massachusetts Institute of Technology

PRENTICE-HALL, INC.
ENGLEWOOD CLIFFS, N. J.



S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In C. E. Shannon and J. McCarthy, editors, *Automata Studies*, pages 3--41. Princeton University Press, 1956. Annals of Mathematics Studies 34.

S. C. Kleene (*1904 - †1994), americký matematik a informatik, založil teoretickú informatiku, zaslúžil sa o pochopenie práce McCullocha a Pittsa, preformuloval ju do zrozumiteľnej formy a široko aplikoval.

REPRESENTATION OF EVENTS IN NERVE NETS AND FINITE AUTOMATA*

S. C. Kleene

INTRODUCTION

1 Stimuli and Response

An organism or an automaton receives stimuli via its sensory receptor organs, and performs actions via its effector organs. To say that certain actions are a response to certain stimuli means, in the simplest case, that the actions are perfomed when and only when those stimuli occur.

In the general case both the stimuli and the actions may be very complicated.

In order to simplify the analysis, we may begin by leaving out of account the complexities of the response. We reason that any sort of stimulation, or briefly any event, which affects action in the sense that different actions ensue according as the event occurs or not, under some set of other circumstances held fixed, must have a representation in the state of the organism or automaton, after the event has occurred and prior to the ensuing action.

So we ask what kind of events are capable of being represented in the state of an automaton.

For explaining actions as responses to stimuli it would remain to study the manner in which the representations of events (a kind of internal response) lead to the overt responses.

Our principal result will be to show (in Sections 7 and 9) that all and only the events of a certain class called "regular events" are representable.

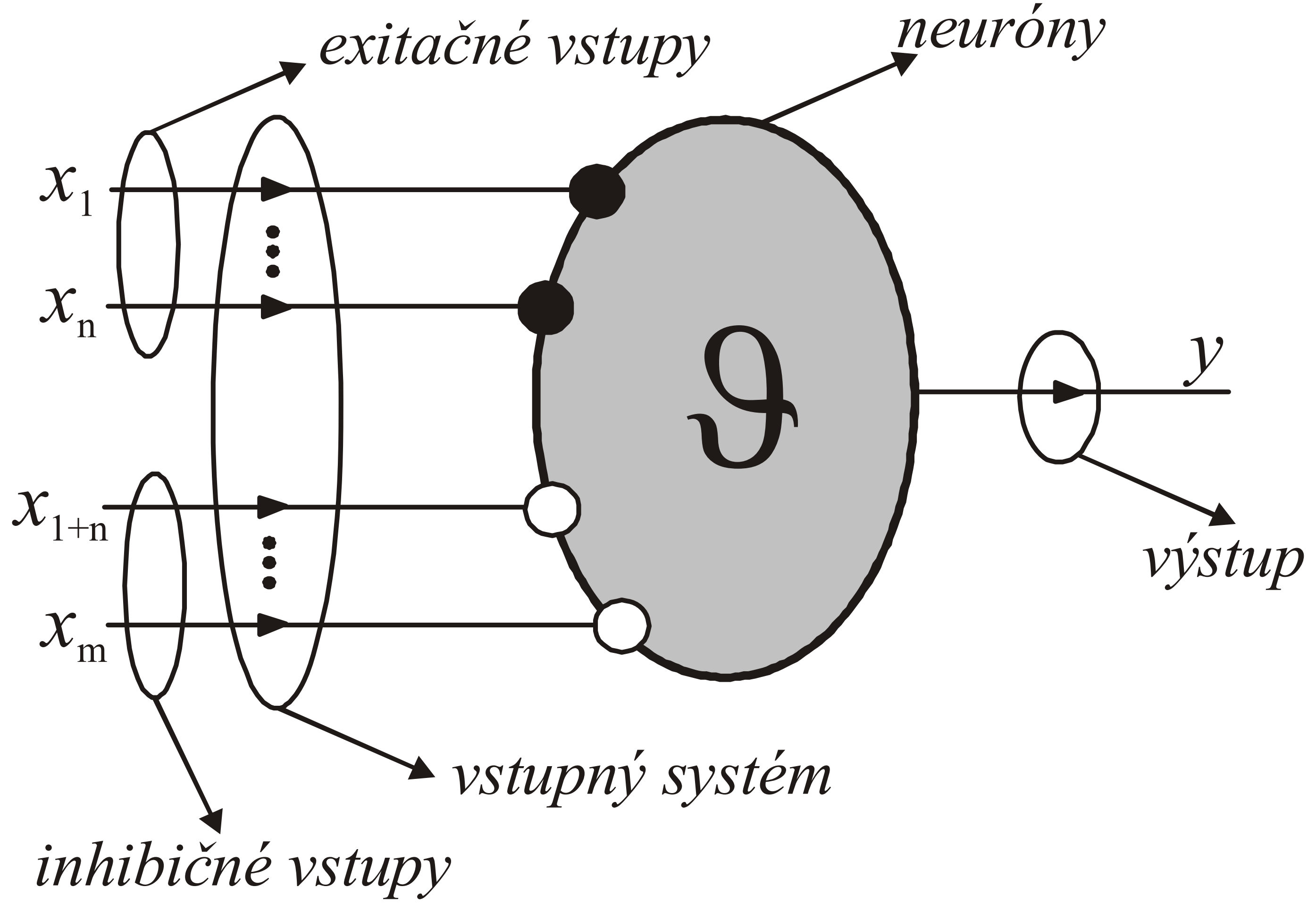
2 Nerve Nets and Behavior

McCulloch and Pitts [McC 43] in their fundamental paper on the logical analysis of nervous activity formulated certain assumptions which we shall

*The material in this article is drawn from Project RAND Research Memorandum RM-704 (15 December 1951, 101 pages) under the same title and by the author. It is used now by permission of the RAND Corporation. The author's original work on the problem was supported by the RAND Corporation during the summer of 1951.

Neurónové siete sú založené na postuláte neurovedy hovoriacom, že základným stavebným kameňom ľudského mozgu je ***neurón***, ktorý má tieto tri najdôležitejšie vlastnosti:

- neurón má orgán, pomocou ktorého *prijíma signály* z okolia od ostatných neurónov (dendrity),
- neurón *spracováva* (*integruje*) prijaté signály,
- neurón má orgán (axón) pomocou ktorého *posiela spracované vstupné signály iným neurónom zo svojho okolia*.


exitačné vstupy
neuróny
x_1
x_n
ϑ
y
x_{1+n}
x_m
výstup
vstupný systém
inhibičné vstupy

Logický neurón je založený na pravidle:

aktivita je jednotková, ak *vnútorný potenciál* neurónu definovaný ako rozdiel medzi sumou excitačných vstupných aktivít a inhibičných vstupných aktivít je väčší alebo rovný prahu ϑ, v opačnom prípade je nulová

$$y=\begin{cases}1 & \left(\xi = x_1 + \ldots + x_n - x_{1+n} - \ldots - x_m \geq \vartheta\right)\\ 0 & \left(\xi<\vartheta\right)\end{cases}$$

Použitím jednoduchej „schodovej“ funkcie

$$s(\xi)=\begin{cases}1 & (\text{ak } \xi \geq 0) \\ 0 & (\text{ak } \xi < 0)\end{cases}$$

$$y=s\left(\underbrace{x_1+\ldots+x_n-x_{1+n}-\ldots-x_m}_{\xi}-\vartheta\right)$$

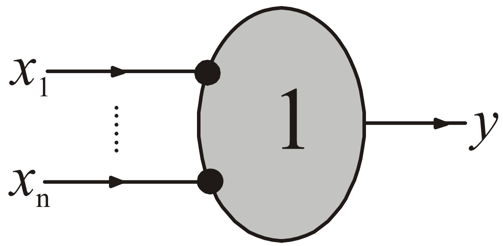
Aktivita logického neurónu môže byť alternatívne vyjadrená pomocou binárnych váhových koeficientov

$$\boxed{y=s\left(\underbrace{w_1x_1+\ldots+w_mx_m}_{\xi}-\vartheta\right)=s\left(\sum_{i=1}^{m}w_ix_i-\vartheta\right)}$$

Implementácia Boolovej binárnej funkcie OR

$$y_{OR}\left(x_1, x_2\right) = s\left(x_1 + x_2 - 1\right)$$

#	x_1	x_2	$y_{OR}(x_1,x_2)$	$x_1 \vee x_2$
1	0	0	$s(-1)$	0
2	0	1	$s(0)$	1
3	1	0	$s(0)$	1
4	1	1	$s(1)$	1



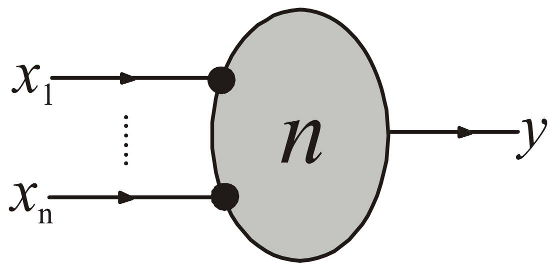
Boolova funkcia disjunkcie

$$y = x_1 \vee \ldots \vee x_n$$

Implementácia Boolovej binárnej funkcie AND

$$y_{AND}\left(x_1, x_2\right) = s\left(x_1 + x_2 - 2\right)$$

#	x_1	x_2	$y_{AND}(x_1,x_2)$	$x_1 \wedge x_2$
1	0	0	s(-2)	0
2	0	1	s(-1)	0
3	1	0	s(-1)	0
4	1	1	s(0)	1



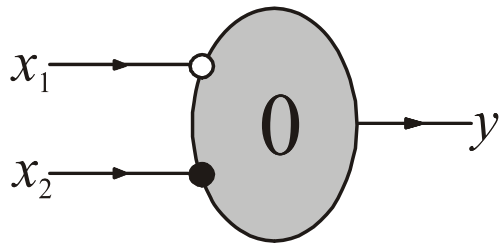
Boolova funkcia konjunkcie

$$y = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

Implementácia Boolovej binárnej funkcie IF-THEN

$$y_{AND}\left(x_1, x_2\right) = s\left(-x_1 + x_2\right)$$

#	x_1	x_2	$y_{IF\text{-}THEN}(x_1,x_2)$	$x_1 \Rightarrow x_2$
1	0	0	$s(0)$	1
2	0	1	$s(1)$	1
3	1	0	$s(-1)$	0
4	1	1	$s(0)$	1



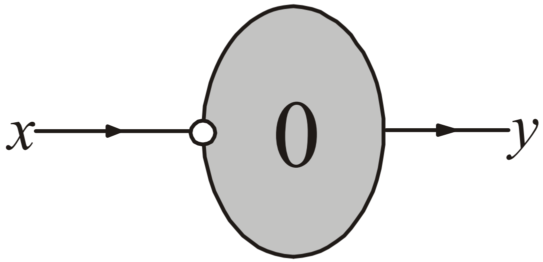
Boolova funkcia implikácie

$y = x_1 \Rightarrow x_2$

Implementácia Boolovej inárnej funkcie NOT

$$y_{NOT}\left(x\right)=s\left(-x+0\right)$$

#	x	$y_{NOT}(x)$	$\neg x$
1	0	$s(0)$	1
2	1	$s(-1)$	0



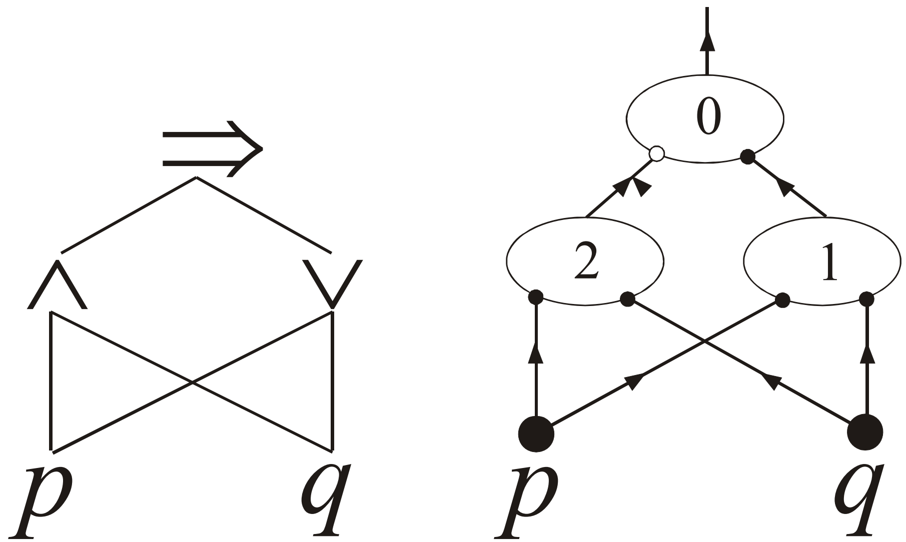
Boolova funkcia negácie

$y = \neg x$

Veta.

Každá Boolova funkcia môže byť vyjadrená pomocou „neurónovej siete“ zloženej z logických neurónov vyjadrujúcich logické spojky.

$$\varphi(p,q)=(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$$



Reprezentácia ľubovolnej Boolovej funkcie pomocou 3-vrstvovej neurónovej sieti

Podľa dokázanej vety (predchádzajúca prednáška), každá výroková formula môže byť prepísaná do ekvivalentného disjunktívneho tvaru (DNF)

$$\varphi = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)}$$

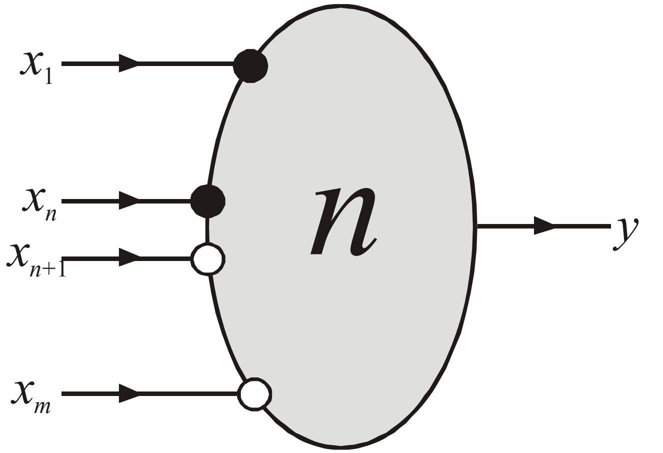
kde

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right) = 1\right) \\ \neg x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right) = 0\right) \end{cases}$$

Konjunktívne klauzuly $x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)}$ môžeme vyjadriť jedným logickým neurónom

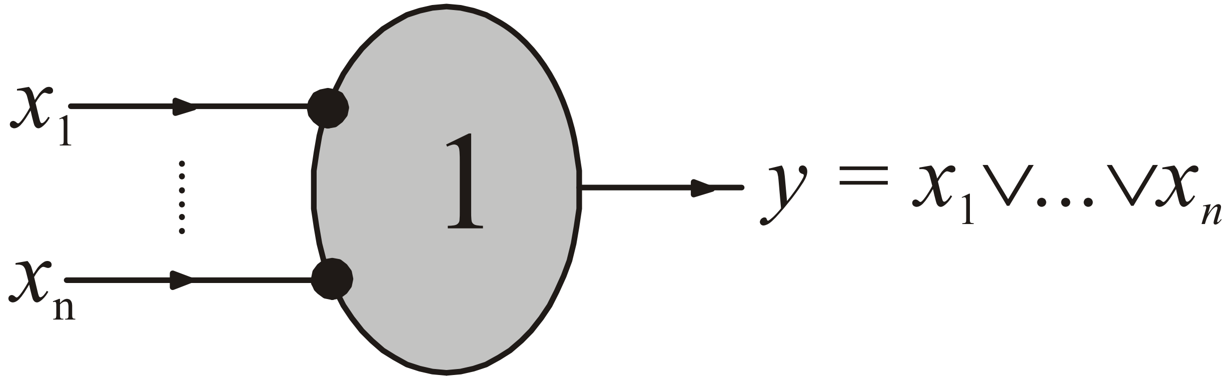
$$\underbrace{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n}_{\substack{\textit{excitačné}\\ \textit{neuróny}}} \wedge \underbrace{\neg x_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg x_m}_{\substack{\textit{inhibičné}\\ \textit{neuróny}}}$$

$$val_\tau\left(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg x_m\right) = \begin{cases} 1 & \left(x_1 = \ldots = x_n = 1 \; a \; x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\right) \\ 0 & \left(\textit{ináč}\right) \end{cases}$$

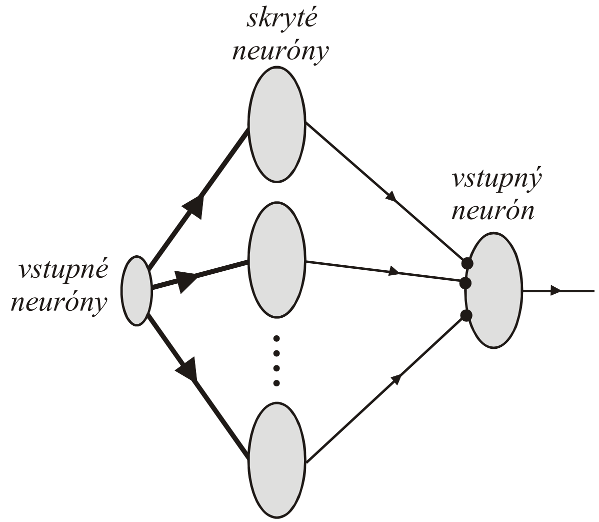


$$y = s\left(x_1 + \ldots + x_n - x_{n+1} - \ldots - x_m - n\right)$$

Výstupy z týchto neurónov spojíme do disjunkcie pomocou neurónu



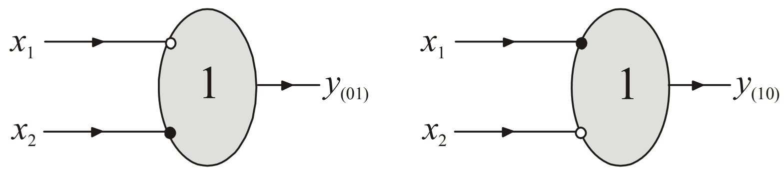
Trojvrstvová neurónová sieť



Ilustračný príklad – konštrukcia XOR funkcie

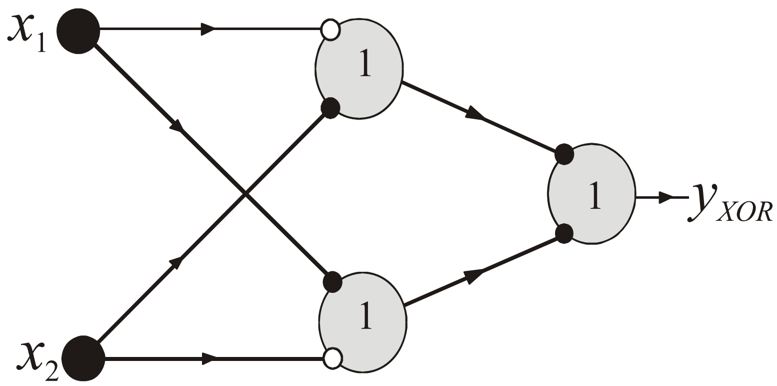
#	x	y	$\varphi_{XOR}(x,y)$	konjunkt. klauzula
1	0	0	0	
2	0	1	1	$\neg x_1 \wedge x_2$
3	1	0	1	$x_1 \wedge \neg x_2$
4	1	1	0	

$$\varphi_{XOR}(x_1, x_2) = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$



A $\neg x_1 \wedge x_2$

B $x_1 \wedge \neg x_2$



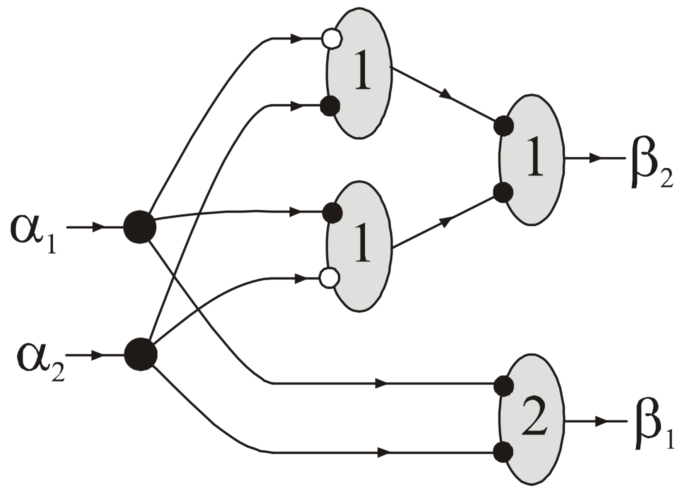
Veta.
Ľubovoľná Boolova funkcia f je simulovaná pomocou 3-vrstvovej neurónovej siete.

Komentár.
3-vrstvové neurónové siete obsahujúce logické neuróny sú *univerzálne výpočtové zariadenia* pre doménu Boolových funkcií.

Príklad

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}{\beta_1\beta_2}$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$$
$$\beta_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$$

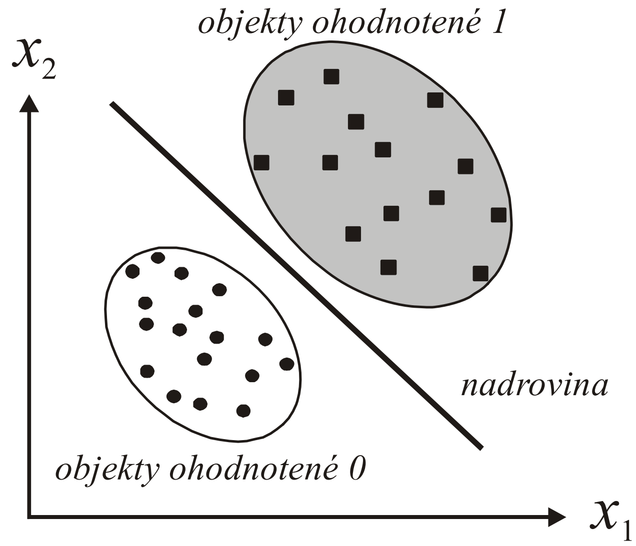


Lineárna separovateľnosť

Geometrická interpretácia výpočtu prebiehajúceho v logickom neuróne:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n - \vartheta = 0$$

Táto rovina rozdeľuje stavový priestor na dva polopriestory.



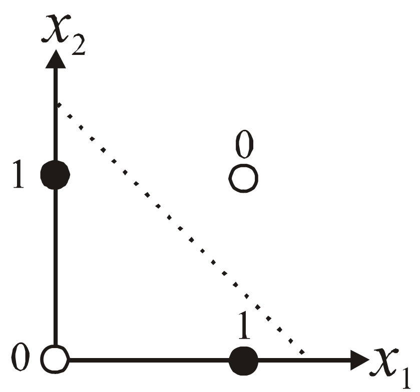
Definícia.
Boolova funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je *lineárne separovateľná*, ak existuje taká rovina $w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n - \vartheta = 0$, ktorá separuje priestor vstupných aktivít tak, že v jednej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 0, zatiaľ čo v druhej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 1.

Veta.
Logický neurón je schopný simulovať len tie Boolove funkcie, ktoré sú lineárne separovateľné.

Boolovej funkcie XOR nie je lineárne separovateľná

$$\varphi_{XOR}\left(x,y\right)=x\oplus y$$

#	x	y	$\varphi_{XOR}(x,y)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0



Logické neuróny vyšších rádov

Ak vnútorný potenciál neurónu ξ je určený ako lineárna kombinácia vstupných aktivít (t.j. len prvou sumou), potom logický neurón je štandardný a nazýva sa "***logický neurón prvého rádu***". Ak tento potenciál neurónu ξ obsahuje aj kvadratické a prípadne aj ďalšie členy, potom sa nazýva "***logický neurón vyššieho rádu***".

$$y = s\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} w_{ij} x_i x_j + \ldots - \vartheta}_{\xi} \right)$$

Podľa Minského a Paperta (v knihe *Perceptron*) perceptróny vyššieho rádu sú schopné simulovať aj množiny objektov, ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Veta.
Ľubovolná Boolova funkcia f je Boolova funkcia je simulovaná logickým neurónom vyššieho rádu.

Príklad

Boolovu binárnu funkciu *XOR* vyjadríme pomocou logického neurónu druhého rádu

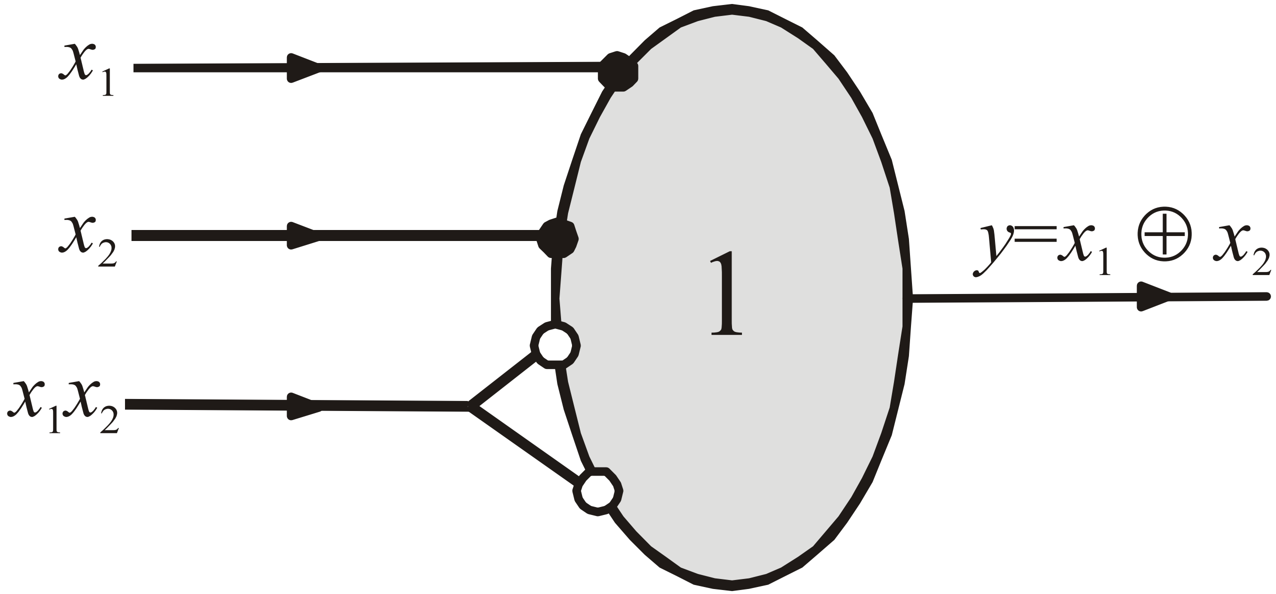
$$y = s\left(\underbrace{w_1x_1 + w_2x_2 + w_{12}x_1x_2}_{\xi} - \vartheta\right)$$

Koeficienty sú určené podmienkami

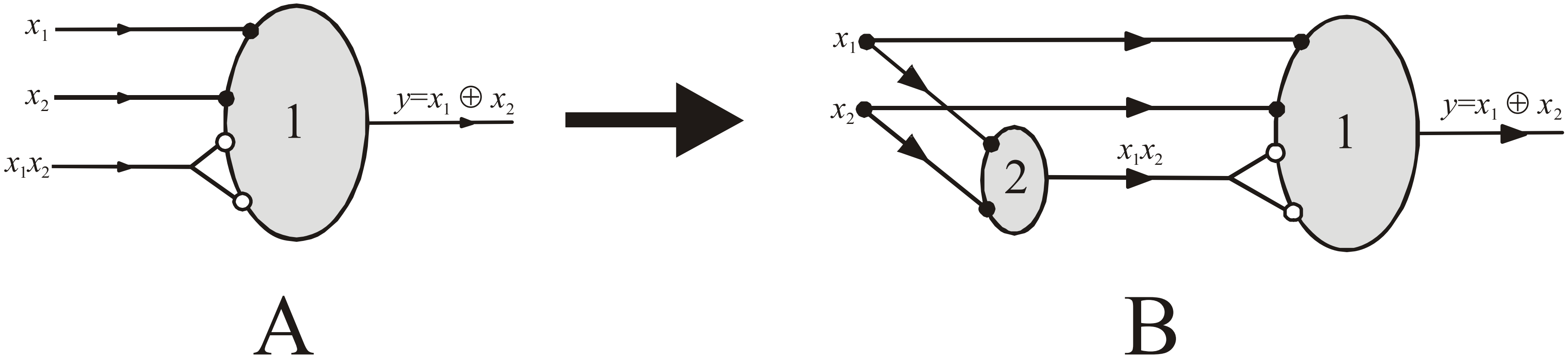
$$\begin{aligned}
-\vartheta &< 0 \quad \left(pre\,(0,0)/0\right)\\
w_2 \qquad -\vartheta &\geq 0 \quad \left(pre\,(0,1)/1\right)\\
w_1 \qquad\qquad -\vartheta &\geq 0 \quad \left(pre\,(1,0)/1\right)\\
w_1 + w_2 + w_{12} - \vartheta &< 0 \quad \left(pre\,(1,1)/0\right)
\end{aligned}$$

Postupným riešením týchto nerovníc dostaneme, že váhové koeficienty a prah majú napr. takéto riešenie

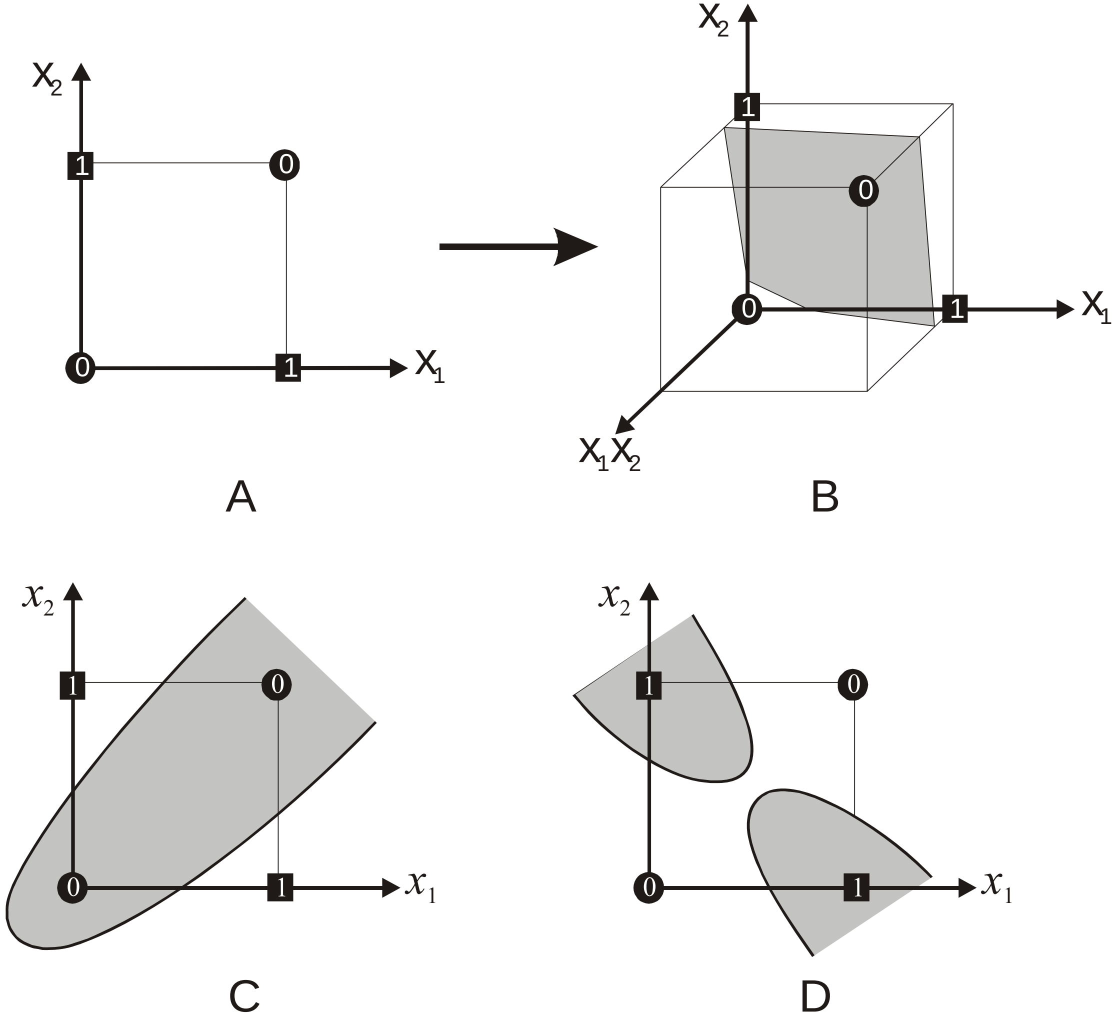
$$\vartheta = 1, w_1 = w_2 = 1, w_{12} = -2$$



Transformácia logického neurónu 2. rádu na neurónovú sieť obsahujúcu dva logické neuróny prvého rádu



Grafická interpretácia logického neurónu 2. rádu



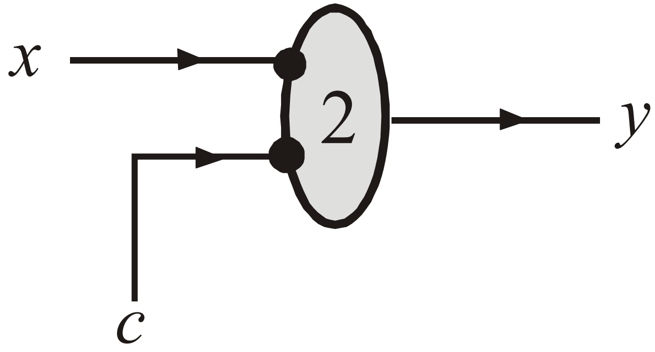
Definícia.
Boolova funkcia f sa nazýva *kvadraticky separovateľná*, ak existujú také váhové koeficienty w_{i}, w_{ij} a prahový faktor ϑ, že pre každú špecifikáciu premenných $x_1, x_2, ..., x_n$ platí

$$y_{req}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} w_{ij} x_i x_j \geq \vartheta$$

$$y_{req}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} w_{ij} x_i x_j < \vartheta$$

Výpočtové zariadenia obsahujúce logické neuróny

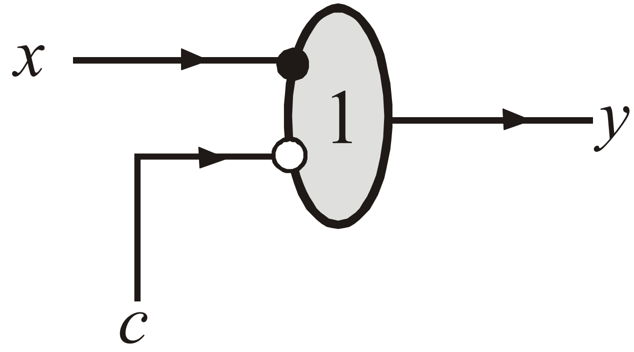
Riadený excitačný prepínač



riadiaci signál

$$y = \begin{cases} x & (c=1) \\ 0 & (c=0) \end{cases}$$

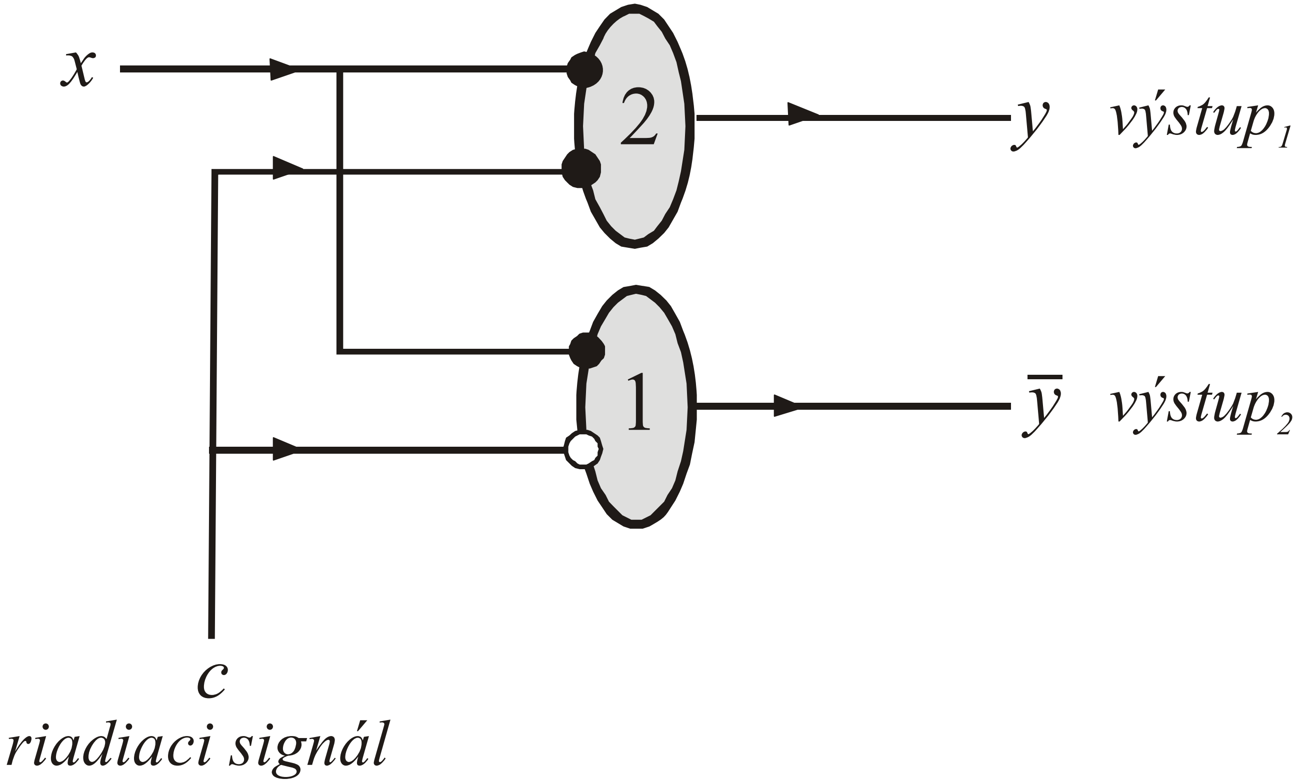
Riadený inhibičný prepínač



riadiaci signál

$$y = \begin{cases} 0 & (c=1) \\ x & (c=0) \end{cases}$$

Kombinácia riadených (excitačného a inhibičného) prepínača



$$c = 1 \Rightarrow (y = x) \wedge (\overline{y} = 0)$$

$$c = 0 \Rightarrow (y = 0) \wedge (\overline{y} = x)$$

Sumátor binárnych čísel

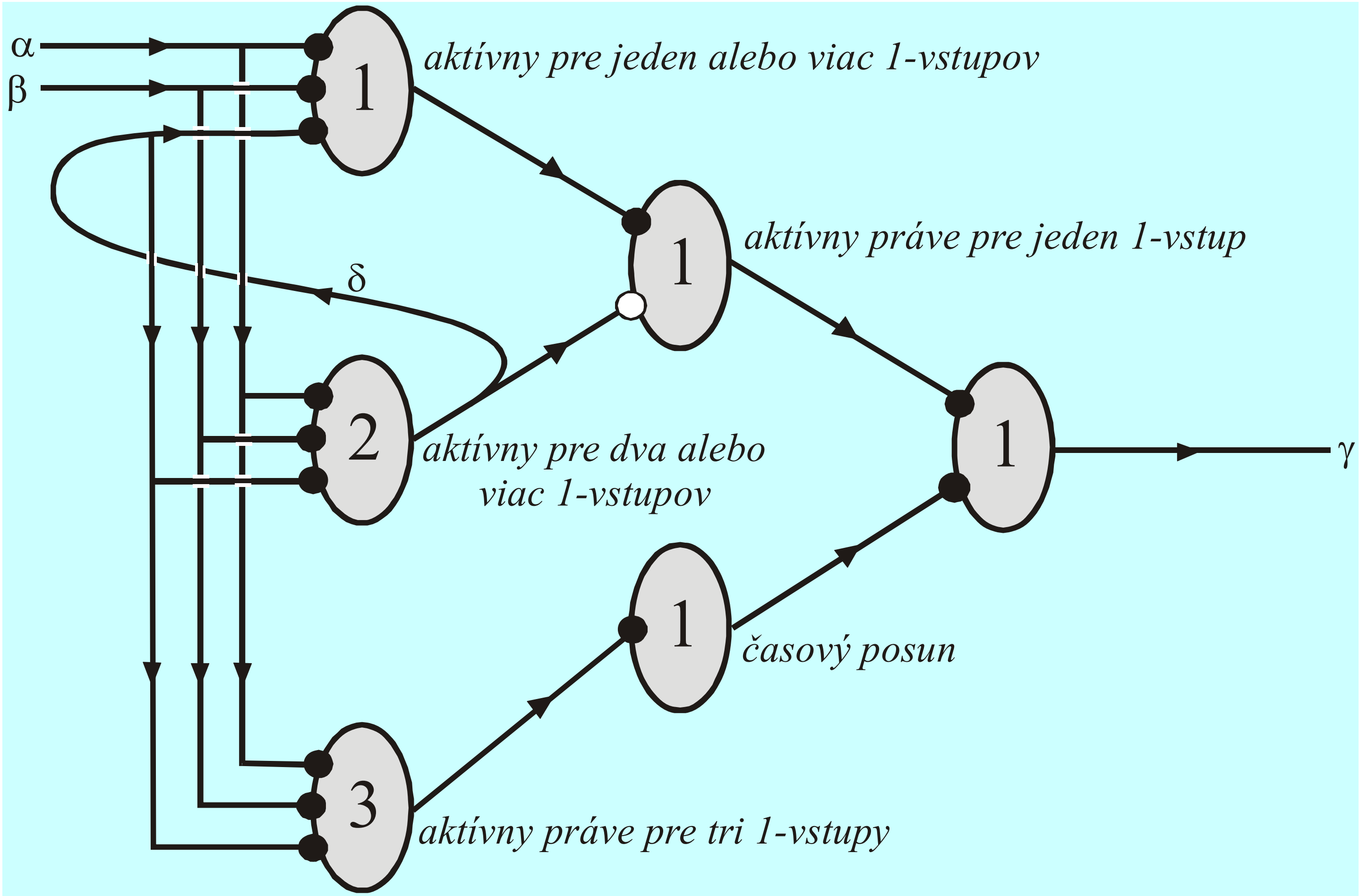
$$\begin{array}{r} 110011 \\ 101010 \\ \hline 1011101 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \alpha_n \ldots \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n \ldots \beta_2 \beta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \ldots \gamma_2 \gamma_1 \end{array}$$

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_1 + \beta_1 = 2) \\ 0 & (ináč) \end{cases}, \quad \delta_{i+1} = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i \geq 2) \\ 0 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i \leq 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \alpha_n \ldots \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n \ldots \beta_2 \beta_1 \\ \delta_{n+1} \delta_n \ldots \delta_2 \delta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \ldots \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \qquad \gamma_i = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 1 \vee 3) \\ 0 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 0 \vee 2) \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
\hline
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1
\end{array}
$$

1. krok. $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \delta_1 = 0, \boxed{\gamma_1 = 1}, \delta_2 = 1$
2. krok. $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \delta_2 = 0, \boxed{\gamma_2 = 0}, \delta_3 = 1$
3. krok. $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \delta_3 = 1, \boxed{\gamma_3 = 1}, \delta_4 = 0$
4. krok. $\alpha_4 = 0, \beta_4 = 1, \delta_4 = 0, \boxed{\gamma_4 = 1}, \delta_5 = 0$
5. krok. $\alpha_5 = 1, \beta_5 = 0, \delta_5 = 0, \boxed{\gamma_5 = 1}, \delta_6 = 0$
6. krok. $\alpha_6 = 1, \beta_6 = 1, \delta_6 = 0, \boxed{\gamma_6 = 0}, \delta_7 = 1$
7. krok. $\alpha_7 = 0, \beta_7 = 0, \delta_7 = 1, \boxed{\gamma_7 = 1}$


α
β
1
aktívny pre jeden alebo viac 1-vstupov
1
aktívny práve pre jeden 1-vstup
δ
2
aktívny pre dva alebo viac 1-vstupov
1
γ
1
časový posun
3
aktívny práve pre tri 1-vstupy

Záver

(1) Každá Boolova funkcia je reprezentovaná ***neurónovou sieťou***, ktorej architektúra je určená syntantickým stromom funkcie. Táto vlastnosť môže byť zosilonená do tvrdenia

(2) Každá Boolova funkcia je reprezentovaná ***3-vrstvovou neurónovou sieťou***.

(3) Logický neurón klasifikuje len Boolove funkcie, ktoré sú ***lineárne separovateľné***.

(4) Boolove funkcie, ktoré nie sú lineárne separovateľné, ale sú kvadraticky, kubicky, ... separovateľné, sú reprezentované ***logickým neurónom 2., 3., ... rádu***.

(5) Každá Boolova funkcia je reprezentovaná logickým neurónom vyššieho rádu.

The End

I like my net