Sémantické tablá
a
Rezolventa

Augusta Ada King, countess of Lovelace (1815-1852)

Babbageho spolupracovníčka, dcéra anglického básnika Byrona.

1. Odhalila ***základy programovania*** a význam podmieneného vetvenia programu podľa výsledku predchádzajúceho kroku a význam cyklov v programovaní,
2. napísala ***program na riešenie sústavy lineárnych rovníc*** a na generovanie Bernoulliho čísel,
3. uvažovala tiež o možnosti použiť stroj na ***generovanie hudobných diel*** pomocou zakódovania zákonov harmónie a kompozície na dierne štítky. Taktiež uvažovala o možnosti použiť analytický stroj v ***úlohe manipulátora s algebraickými výrazmi***.

Lady Ada v dopise svojmu známemu v r. 1835 napísala:

Analytický stroj nemá ambície vymyslieť niečo originálne. Dokáže urobiť iba čokoľvek, o čom vieme, ako mu prikázať, aby to vykonal. Môže postupovať podľa výsledkov analýzy riešenia; nemá ale žiadnu schopnosť vymyslieť akékoľvek analytické vzťahy alebo tvrdenia.

Sémantické tablá (semantic tableaux)

Terminológia

(1) ***Literál*** je buď výroková premenná alebo jej negácia. Literály sú ***pozitívne*** (výroková premenná) alebo ***negatívne*** (negácia výrokovej premennej). Dva literály sú ***komplementárne*** ak majú tvar p a $\neg p$.

(2) ***Konjunktívna*** (***disjunktívna***) ***klauzula*** je konjunkcia (disjunkcia) literálov. ***DNF*** (***KNF***) je disjunkcia (konjunkcia) konjuktívnych klauzulí (disjunktívnych klauzulí).

Príklad

- $\mathcal{A}=\{x,y,u,z\}$ je množina výrokových premenných,
- formule x,y,u,z sú pozitívne literály,
- formule $\neg x,\neg y,\neg u,\neg z$ sú negatívne literály,
- literály z a $\neg z$ sú komplementárne,
- formula $x\wedge y\wedge\neg y$ je konjuktívna klauzula,
- formula $x\vee u\vee\neg y\vee z$ je disjunktívna klauzula.

Lemma.
Disjunktívna klauzula je ***tautológia*** vtedy a len vtedy ak obsahuje komplmentárne literály.
Konjuktívna klauzula je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály.

Disjunktívna klauzula $x \vee u \vee \neg x \vee z$ je tautológia.

$$(x \vee u \vee \neg x \vee z) \equiv \left(\underbrace{x \vee \neg x}_{1} \vee u \vee z \right) \equiv (1 \vee u \vee z) \equiv 1$$

Konjunktívna klauzula $x \wedge y \wedge \neg y$ je kontradikcia

$$(x \wedge y \wedge \neg y) \equiv \left(\underbrace{y \wedge \neg y}_{0} \wedge x \right) \equiv (0 \wedge x) \equiv 0$$

Veta

(1) Formula $\varphi(p,q,r,...)$ je ***tautológia*** ak jej ekvivalentná KNF forma $\varphi_{NKF}(p,q,r,...)$ má všetky disjunktívne klauzule také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

(2) Formula $\varphi(p,q,r,...)$ je ***kontradikcia*** ak jej ekvivalentná DNF forma $\varphi_{NDF}(p,q,r,...)$ má všetky konjunktívne klauzule také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

Príklady

- DNF formula $\varphi_1 = (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_2 \wedge \neg p_4)$ nie je kontradikcia, prvý konjunktívny člen neobsahuje komplementárne literály.
- DNF formula $\varphi_2 = (\neg p_3 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_1)$ je kontradikcia, každý konjuktívny člen obsahuje dvojicu $p_i \wedge \neg p_i$, čiže sú kontradikcie, disjunkcia dvoch kontradikcií je taktiež kontradikcia.
- KNF formula $\varphi_3 = (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_2 \vee \neg p_4)$ nie je tautológia, prvá disjunktívna klauzula neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.
- KNF formula $\varphi_4 = (\neg p_3 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee p_1)$ je tautológia, každá disjunktívna klauzula obsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad transformácie formuly do DNF

Transformácia formule $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do DNF tvaru:

- Odstránime ekvivalenciu, $\varphi_1 = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$.
- Odstránime implikácie, $\varphi_2 = ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$.
- Odstránime negáciu disjunkcie, $\varphi_3 = ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (r \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))$.
- Použijeme distribučný zákon pre odstránenie konjunkcie v podformule špecifikovanej ľavou zátvorkou,
  $\varphi_4 = ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \wedge (r \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))$.
- Podobne odstránime konjunkciu medzi prvou a druhou zátvorkou, dvojité negácie a prebytočné zátvorky

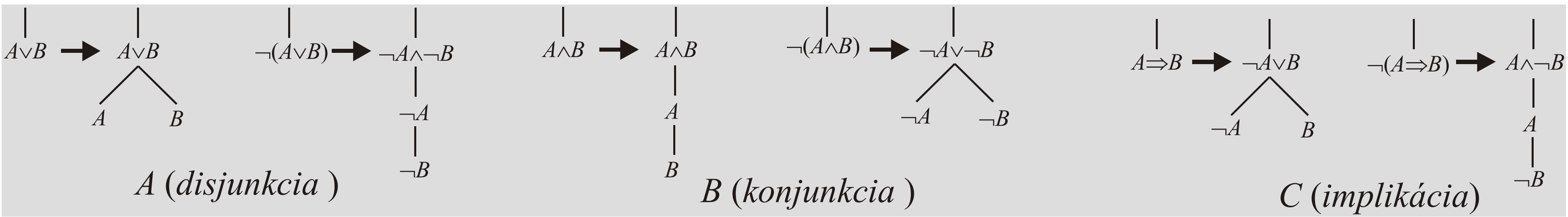
$$\varphi_5 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p \wedge r) \vee$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p) \vee$$
$$(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)$$

Záver: Formula φ nie je kontradikcia.

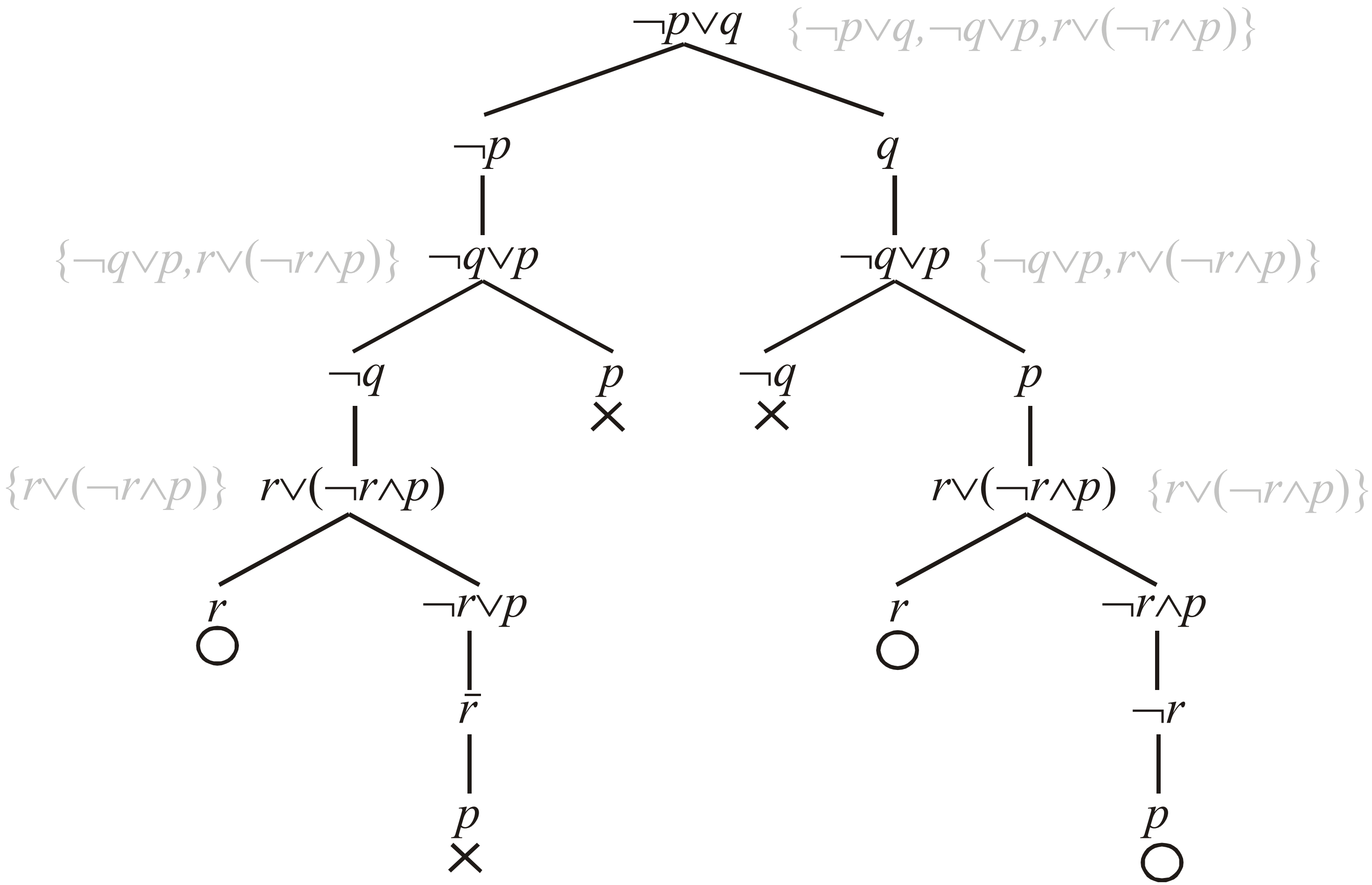
Sémantické tablá

Sémantické tablo je diagramatická reprezentácia procesu transformácie formule φ do DNF.

Sémantické tablo je reprezentované binárnym stromom, ktorého jednotlivé vrcholy reprezentujú elementárne kroky transformácie



$$\varphi = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$$



V čom spočíva výhoda sémantického tabla?

- Aplikácia ***distribučných zákonov*** pri úprave formuly DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metódy konštrukcie sémantického tabla.

- ***Predčasné uzavretie*** tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetve už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná.

Terminológia

- Vetvy stromu, ktoré ***obsahujú*** (***neobsahujú***) komplementárne literály sú označené symbolom ´**x**´ a nazývajú sa ***uzavreté vetvy*** (symbolom ´**o**´ a nazývajú sa ***otvorené vetvy***)
- Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetvy, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***.
- Sémantické tablo priradené formule A je označené $\mathcal{T}(A)$.

Veta.
Ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ formuly φ je uzavreté, potom formula φ je ***kontradikcia***.

Táto veta, ktorá je základom metódy sémantických tabiel, je priamym dôsledkom skutočnosti, že každá formula φ pretransformovaná do ekvivalentného DNF, je kontradikciou vtedy a len vtedy, ak všetky jej konjunktívne klauzule obsahujú dvojice komplementárnych literálov.

$$\varphi_{DNF} = \left(\neg p_3 \wedge p_3 \wedge p_4\right) \vee \left(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_1\right)$$

Ilustračný príklad 1

Koná sa oslava, Ján, Júlia, Klára a Štefan sú potenciálni účastníci tejto oslavy. K tomu, aby sme mohli zapísať študovaný problém pomocou formúl výrokovej logiky, zavedieme tieto štyri výroky:

p	*Ján pôjde na oslavu*
q	*Júlia pôjde na oslavu*
r	*Klára pôjde na oslavu*
s	*Štefan pôjde na oslavu*

Účasť jednotlivých členov skupiny je ohraničenú troma podmienkami

$p \vee q$	Ján alebo Júlia pôjdu na oslavu.
$q \Rightarrow (r \wedge s)$	Ak Júlia pôjde na oslavu, potom na oslavu pôjde tak Klára ako aj Štefan.
$\neg p \Rightarrow s$	Ak nepôjde na oslavu Ján, potom pôjde na oslavu Štefan.

Cieľ: Určenie podmienok za ktorých sa Štefan zúčastní oslavy zistíme pomocou riešenia problému, kedy z teórie $T=\{p\vee q, q\Rightarrow(r\wedge s), \neg p\Rightarrow s\}$ vyplýva, že Štefan sa zúčastní oslavy

$$\{p\vee q, q\Rightarrow(r\wedge s), \neg p\Rightarrow s\}\vdash s$$

Použitím vety 2.3 dostaneme

$$\Big((p\vee q)\wedge\big(q\Rightarrow(r\wedge s)\big)\wedge(\neg p\Rightarrow s)\Big)\Rightarrow s$$

Túto formulu môžeme jednoducho prepísať pomocou jej negácie do tvaru

$$(p\vee q)\wedge\big(q\Rightarrow(r\wedge s)\big)\wedge(\neg p\Rightarrow s)\wedge(\neg s)$$

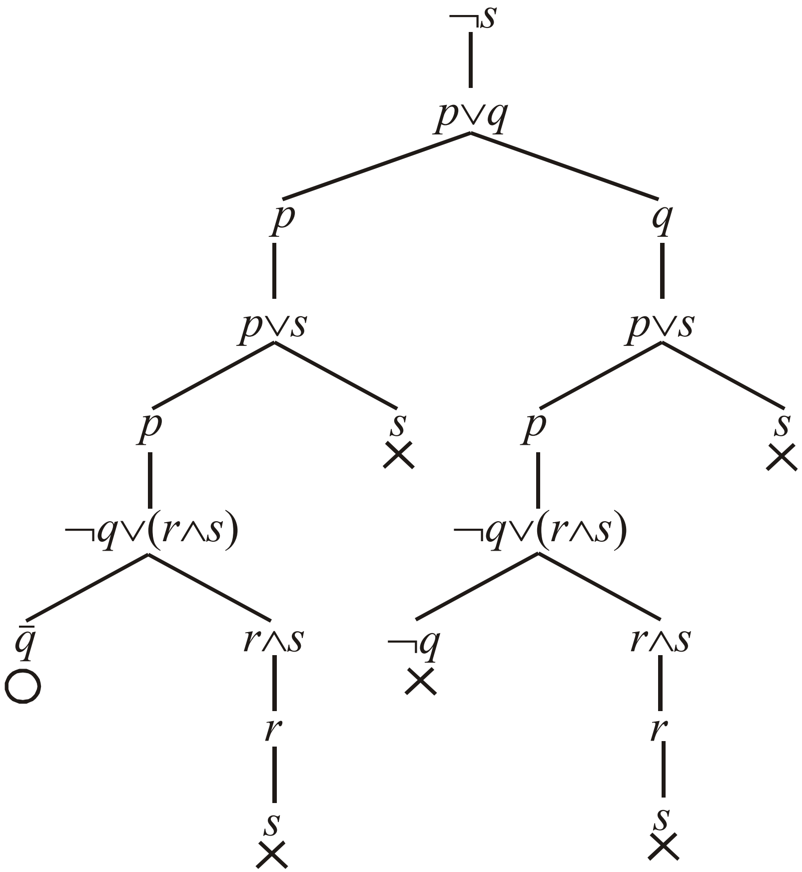
Aplikujeme metódu sémantických tabiel k analýze kontradikčnosti formule

$$(p \vee q) \wedge \left(q \Rightarrow (r \wedge s)\right) \wedge (\neg p \Rightarrow s) \wedge \neg s$$

ktorú zjednodušíme tak, že odstránime implikácie

$$(p \vee q) \wedge \left(\neg q \vee (r \wedge s)\right) \wedge (p \vee s) \wedge \neg s$$

Sémantické tablá pre $\left(p\vee q\right)\wedge\left(\neg q\vee\left(r\wedge s\right)\right)\wedge\left(p\vee s\right)\wedge\neg s$



Toto sémantické tablo nie je uzavreté, preto študovaná formula nie je kontradikcia.

Dôsledok: neplatí $T \vdash s$, t.j. výrok s nie je dôsledkom teórie T.

Modikácia riešenej úlohy: ako rozšíriť teóriu T na novú teóriu T' (kde $T \subset T'$), aby výrok s už bol dôsledkom tejto novej teórie. K tomuto účelu nám dobre poslúži zostrojené sémantické tablo $\mathcal{T}$ z predošlého obrázku, našim cieľom bude také rozšírenie teórie T, aby otvorené vetve tabla sa stali uzavretými. Teóriu rozšírime o tento výrok

$\neg q \Rightarrow \neg p$	Ak Júlia nepôjde na oslavu, potom aj Ján nepôjde na oslavu.

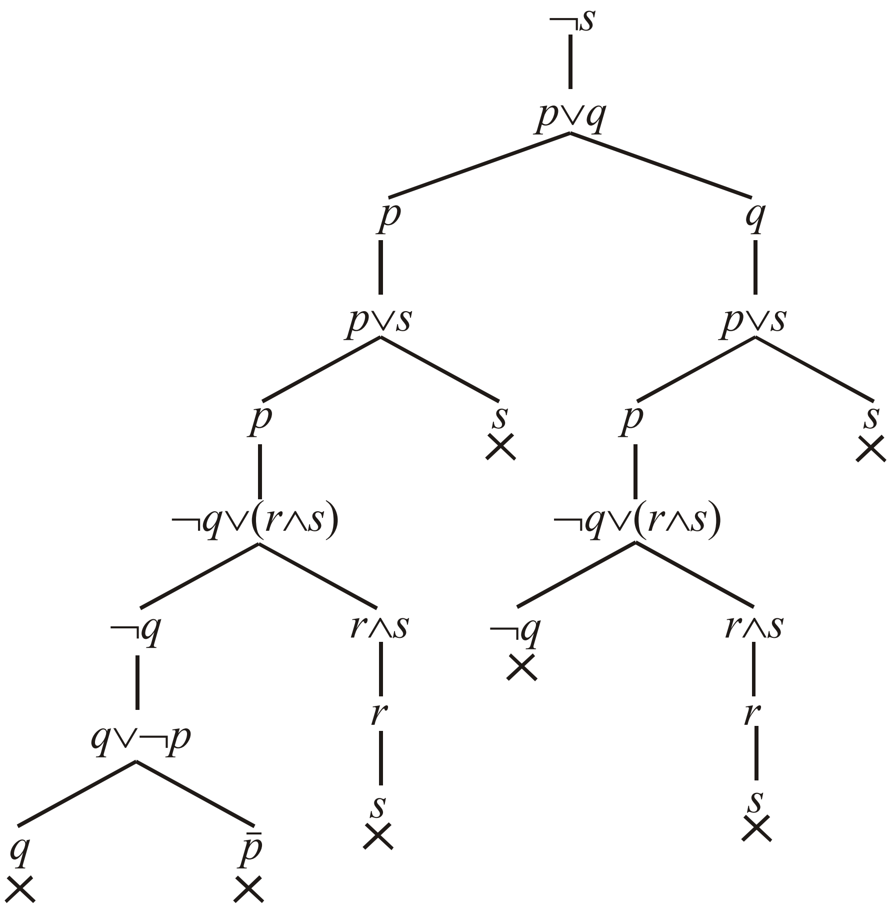
Rozšírená teória má tvar

$$T' = \left\{ p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge s), \neg p \Rightarrow s, \neg q \Rightarrow \neg p \right\}$$

potom pomocou sémantických tabiel budeme študovať formulu

$$(p \vee q) \wedge \left(q \Rightarrow (r \wedge s)\right) \wedge (\neg p \Rightarrow s) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg s$$

Sémantické tablo pre takto modifikovanú formulu je už uzavretým, $T' \vdash s$.



Ilustračný príklad 2

ak je X otcom Márie a má krvnú skupinu A a matka Márie
nemá krvnú skupinu A, potom Mária má krvnú skupina 0 alebo A
X a matka Márie majú krvnú skupinu A
Mária nemá krvnú skupinu A
Mária nemá krvnú skupinu 0

X nie je otcom Márie

Elementárne výroky:
p = X je otcom Márie,
q = X má krvnú skupinu A,
r = matka Márie má krvnú skupinu A,
s = Mária má krvnú skupinu 0,
t = Mária má krvnú skupinu A

1. predpoklad: $\varphi_1 = (p \wedge q \wedge \neg r) \Rightarrow (s \vee t)$

2. predpoklad: $\varphi_2 = (q \wedge r)$

3. predpoklad: $\varphi_3 = \neg s$

4. predpoklad: $\varphi_4 = \neg t$

---

záver: $\varphi = \neg p$

Cieľ: Dokaz tautologičnosti formule $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \Rightarrow \varphi$ **pomocou sémantického table prostredníctvom dôkazu, že negácia formule je kontradikcia.**

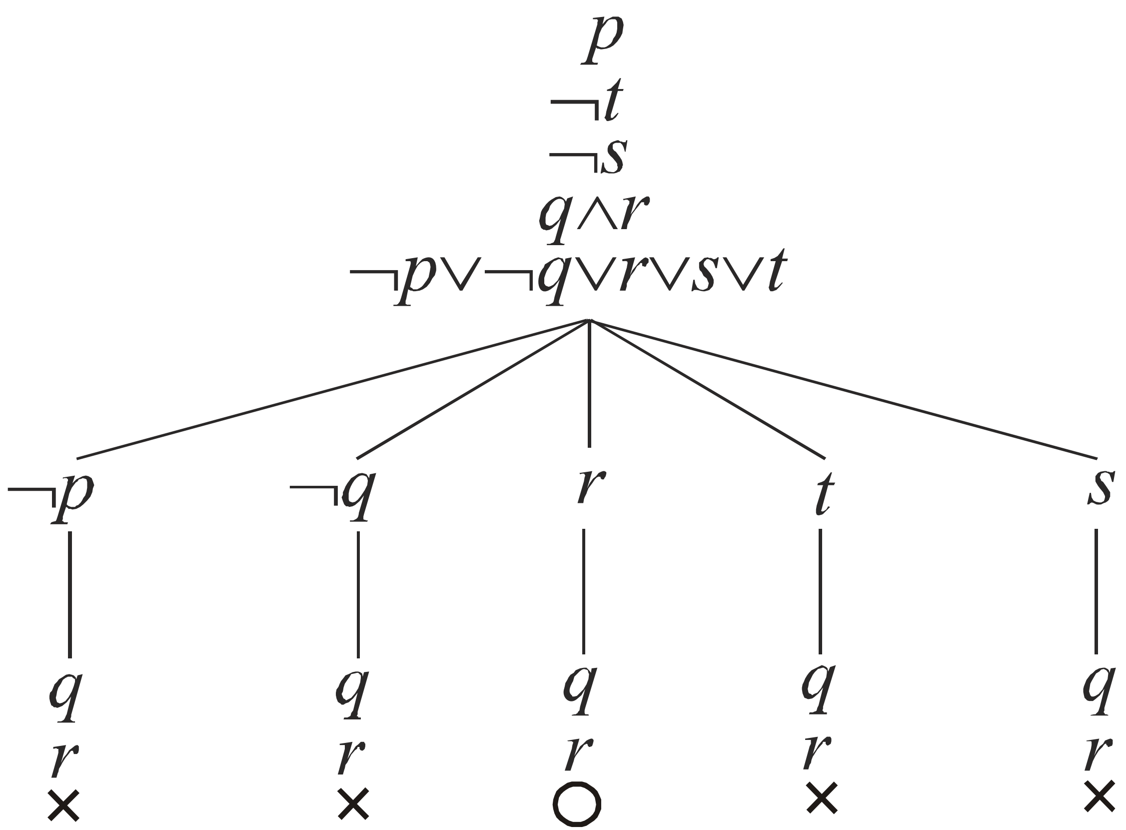
$$((p \wedge q \wedge \neg r) \Rightarrow (s \vee t)) \wedge (q \wedge r) \wedge (\neg s) \wedge (\neg t) \Rightarrow \neg p$$

Ak dokážeme, že táto formula je kontradikcia, potom daný záver vyplýva z predpokladov.

$$((p \wedge q \wedge \neg r) \Rightarrow (s \vee t)) \wedge (q \wedge r) \wedge (\neg s) \wedge (\neg t) \wedge p$$

Pre urýchlenie konštrukcie sémantického table, odstránime z formuly implikáciu

$$\left(\neg p\vee\neg q\vee r\vee s\vee t\right)\wedge\left(q\wedge r\right)\wedge\left(\neg s\right)\wedge\left(\neg t\right)\wedge p$$



Sémantické tablo nie je uzavreté, to znamená, že záver

„*X nie je otcom Márie*“

nie je platný.

Stačí však zmeniť 1. predpoklad na

$$\varphi_1' = (p \wedge q \wedge r) \Rightarrow (s \vee t), \text{ potom}$$

φ'_1 = ak je X otcom Márie a má krvnú skupinu A a matka Márie <u>má</u> krvnú skupinu A, potom Mária má krvnú skupina 0 alebo A

záver „*X nie je otcom Márie*“ sa stáva platným.

Konštrukcia modelu teórie pomocou sémantického tabla

Konštrukciu vysvetlíme pomocou jednoduchého príkladu

Príklad

$$T = \left\{ \underbrace{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)}_{\varphi_1}, \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}_{\varphi_2}, \underbrace{(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)}_{\varphi_3} \right\},$$

$$\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

1	2	3	4	5
p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$3 \Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

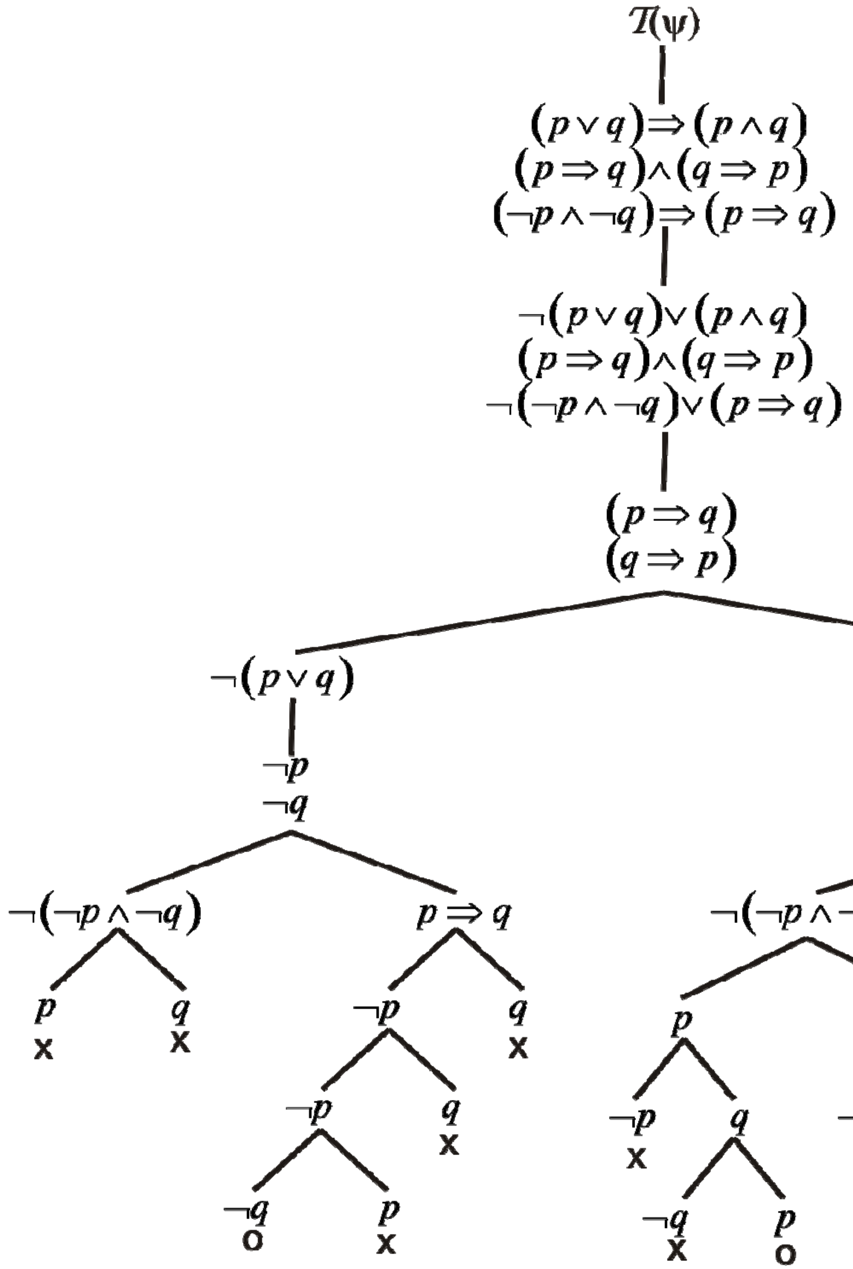
$$\varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

1	2	3	4	5
p	q	$p \Rightarrow q$	$3 \wedge q$	$4 \Rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\varphi_3 = (\overline{p} \wedge \overline{q}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3 \wedge 4$	$p \Rightarrow q$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

$$\tau_1 = (p/0, q/0) \text{a } \tau_2 = (p/1, q/1)$$



$$\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

Sémantické tablo obsahuje 4 otvorené vetvy, z ktorých zostrojíme dva rôzne modely

$M(\boldsymbol{T})=\{(1,1), (0.0)\}$

Veta.

(1) Teória $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je ***konzistentná*** práve vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\psi)$, kde formula $\psi = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ je konjunkciou elementov teórie, je otvorené. Model $M(\boldsymbol{T})$ teórie $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je tvorený interpretáciami literálov z otvorených vetiev.

(2) Teória $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je **nekonzistentná** práve vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\psi)$, je uzavreté.

Záver

- Metóda sémantických tabiel je vhodným diagramatickým prístupom vtedy, keď sa snažíme zistiť, či daná formula je kontradikciou alebo nie.
- Zo štruktúry sémantického tabla sa dá jednoducho odvodiť, akým spôsobom sa má vykonať také rozšírenie teórie, aby sémantické tablo bolo uzavreté.
- Pomocou metódy sémantických tabiel môžeme zostrojiť model teórie.

Metóda rezolventy

- Táto metóda pracuje s KNF formulami, jej cieľom je rozhodnúť či daná formula je tautológia alebo je splniteľná.

- Nech $\varphi(p,q,r,...)$ je výroková formula s premennými p, q, r,... . Jej KNF je ekvivalentná formula, ktorá obsahuje konjunkciu disjunktívnych klauzúl $\varphi_{KNF}(p,q,...) \equiv (\neg p \vee \neg p \vee ...) \wedge (p \vee \neg q \vee ...)...$, kde každá zátvorka reprezentuje klauzulu. Jednotlivé klauzule označme $B,C,U,...$, potom
$$\varphi_{KNF}(p,q,r,...) \equiv B \wedge C \wedge U \wedge ...$$

- Pretože konjunkcia je komutatívna a asociatívna logická spojka, nezáleží na poradí a zátvorkovaní jednotlivých klauzúl v formule $\varphi_{KNF}(p,q,r,...)$, preto táto formula je jednoznačne zadaná množinou svojich klauzúl
$$T_\varphi = \{B,C,U,...\}$$

Lemma.
Ak je daná formula φ splniteľná, potom aj množina T_φ zložená z jej klauzúl je *konzistetná*.

Ak pre formulu φ existuje taká interpretácia τ jej premenných, že $val_\tau(\varphi)=1$, potom aj pre množinu T_φ platí $val_\tau(B)=val_\tau(C)=\ldots=1$, čo skratkovito zapisujeme $val_\tau(T_\varphi)=1$.

Definícia.
Formula $C=C_1'\vee C_2'$ sa nazýva ***rezolventa*** formúl $C_1=C_1'\vee l$ a $C_2=C_2'\vee\neg l$ vzhľadom k literálu l, $C=res_l(C_1,C_2)$.

Lemma.
(a) Rezolventy vzhľadom k literálom l a $\neg l$ sú rovnaké, $res_l\left(C_1,C_2\right)=res_{\neg l}\left(C_1,C_2\right)$ a
(b) ak C_1 a C_2 sú klauzule, potom aj ich rezolventa je taktiež klauzula.

Veta
(Rezolučné pravidlo odvodzovania alebo rezolventa). Nech B a C sú dve výrokové formule tvaru $B=B'\vee l$ a $C=C'\vee\neg l$, kde l je literál, potom platí

$$\left(B'\vee l\right)\wedge\left(C'\vee\neg l\right)\Rightarrow\left(B'\vee C'\right)$$

Dôkaz vety

1.	$(B' \vee l)$	
2.	$(C' \vee \neg l)$	
3.	$\neg B' \Rightarrow l$	(prepis 1. do tvaru implikácie)
4.	$l \Rightarrow C'$	(prepis 2. do tvaru implikácie)
5.	$\neg B' \Rightarrow C'$	(použitie hypotetického sylogizmu na 3. a 4.)
6.	$B' \vee C'$	(prepis implikácie 5. do disjunktívneho tvaru)

Dokázali sme

$$\{B' \vee l, C' \vee \neg l\} \vdash B' \vee C'$$

alebo

$$\vdash (B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l) \Rightarrow (B' \vee C')$$

Veta.
Nech $\varphi = A \wedge (B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l)$ je výroková formula, kde A, B', C' sú jej podformule a l je literál, potom konjunktívne rozšírenie φ o rezolventu $(B' \vee C')$ je ekvivalentné s pôvodnou formulou X

$$\varphi \equiv (\varphi \wedge (B' \vee C'))$$

Dôsledok predošlej vety podľa formuly $(p \Rightarrow q) \equiv (p \Rightarrow p \wedge q)$

$$(\neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee (p \wedge q))$$

$$(\neg p \vee q) \equiv (\cancel{(\neg p \vee p)} \wedge (\neg p \vee q))$$

Táto veta má jednoduchú množinovo-teoretickú interpretáciu:

1. každú formulu φ v KNF tvare môžeme chápať ako množinu jej disjunktívnych klauzúl. Ak je formula φ splniteľná, potom aj príslušná množina T_{φ} je splniteľná.

2. podľa vety platí, že množiny T_{φ} a $T_{\varphi} \cup \{B' \vee C'\}$ sú tautologický ekvivalentné množiny, $val_{\tau}\left(T_{\varphi}\right) = val_{\tau}\left(T_{\varphi} \cup \{B' \vee C'\}\right)$.

Nech T je množina disjunktívnych klauzúl $T=\{A,B,C,U,...\}$, symbolom $R(T)$ označíme množinu T rozšírenú o všetky možné klauzule, ktoré vzniknú rezolventou vhodných dvojíc disjunktívnych klauzúl z T, zavedieme označenie:

$$R(T)=T\cup res(T,T)$$

$$R^0(T)=T$$

$$R^i(T)=R\left(R^{i-1}(T)\right)\quad (i=1,2,3,...)$$

kde $res(T,T)$ je množina všetkých možných rezolvent, ktoré sa dajú vytvoriť z klauzúl patriacich do množiny T.

Príklad

$T=\{a\vee b,\neg a\vee b,\neg b\vee\neg c,c\}$, potom $res(T,T)=\{b,a\vee\neg c,\neg a\vee\neg c,\neg b\}$.

Je prirodzené očakávať, že existuje taký index n, že pre každé $i \geq n$ platí

$$R^*(T) = R^n(T) = R^{n+1}(T) = R^{n+2}(T) = \ldots$$

Existencia „stabilnej“ množiny $R^*(T)$ vyplýva zo skutočnosti, že operácia rezoloventy v podstate zjednodušuje formuly v množine $\boldsymbol{T}$, toto zjednodušovanie nemôže prebiehať bez ohraničenia, po určitom momente zväčšovanie množiny sa musí zastaviť, ďalšie aplikácie aplikácie „operátora“ R už nevedú k tvorbe nových klauzúl.

Prázdny symbol □

$$(\varphi_{KNF} = A \wedge B \wedge C \wedge \ldots) \equiv (T_\varphi = \{A, B, C, \ldots\})$$

$$A = \varnothing \vee l \;\text{ a }\; B = \varnothing \vee \neg l \text{, potom } res_l(A,B) = \square$$

$$\left(\varphi_{KNF} = \underbrace{(l \wedge \neg l)}_{0} \wedge C \wedge \ldots = 0\right) \equiv (T_\varphi = \{A, B, C, \square \ldots\})$$

Veta (Robinsonov rezolučný princíp).
Formula $\varphi_{KNF}(p,q,r,...) \equiv B \wedge C \wedge ... \wedge U$ je kontradikciou vtt, ak $R^*(\boldsymbol{T})$ obsahuje prázdnu formulu $\Box$.

Robinsonov rezolučný princíp je teoretickým základom rezolventových metód dôkazu konzistentnosti alebo nekonzistentnosti (kontradikčnosti) množiny klauzúl.

Príklad

Je potrebné zistiť, či množina $\boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$ je konzistentná.

Množina formúl $\boldsymbol{T}$ je konzistentná vtedy, ak jej formule spojené pomocou konjunkcií, $\varphi_{NKF} = (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a) \wedge (a \vee c)$, tvoria splniteľnú formulu. Aplikovaním Robinsonovho rezolučného princípu dostaneme túto postupnosť množín:

$$R^0(T) = T = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\},$$
$$R^1(T) = R^0(T) \cup \{a \vee \neg c, \neg b, b \vee a, c\},$$
$$R^2(T) = R^1(T) \cup \{a, b, \neg c\},$$
$$R^*(T) = R^3(T) = R^2(T) \cup \{\square\}$$

Pretože množina $R^*(T)$ obsahuje prázdnu formulu $\square$, množina formúl T je nekonzistentná.

#	klauzula	rezolúcia	#	klauzula	rezolúcia
1	$a \vee \neg b$		15	a	(5,8)
2	$b \vee \neg c$		16	a	(6,7)
3	$\neg a$		17	a	(1,11)
4	$a \vee c$		18	a	(1,13)
5	$a \vee \neg c$	(1,2)	19	$\square$	(3,9)
6	$\neg b$	(1,3)	20	$\square$	(3,14)
7	$a \vee b$	(2,4)	21	$\square$	(3,15)
8	c	(3,4)	22	$\square$	(3,16)
9	a	(1,7)	23	a	(4,10)
10	$\neg c$	(2,6)	24	a	(4,12)
11	b	(2,8)	25	$\square$	(6,11)
12	$\neg c$	(3,5)	26	$\square$	(6,13)
13	b	(3,7)	27	$\square$	(8,10)
14	a	(4,5)	28	$\square$	(8,12)

Zjednodušená metóda rezolventy

Nech $\boldsymbol{T}$ je konečná množina klauzúl. Zvolíme si jednu výrokovú premennú (označíme ju p), ktorá je obsiahnutá v niektorých klauzulách. Potom množinu $\boldsymbol{T}$ vzhľadom k premennej p rozdelíme na tri disjunktné podmnožiny:

$$T = T_0(p) \cup T_1(p) \cup T_2(p)$$

(1) Podmnožina $\boldsymbol{T}_0(p)$ je zložená z klauzúl, ktoré neobsahujú premennú p,

(2) podmnožina $\boldsymbol{T}_1(p)$ je zložená z klauzúl obsahujúcich pozitívnu premennú p,

(3) podmnožina $\boldsymbol{T}_2(p)$ je zložená z klauzúl obsahujúcich negatívnu premennú $\neg p$.

Nech množina $\boldsymbol{T}_{12}(p) = res_p(\boldsymbol{T}_1(p), \boldsymbol{T}_2(p))$, potom množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p) = \boldsymbol{T}_0(p) \cup \boldsymbol{T}_{12}(p)$ je zložená z pôvodných klauzúl $\boldsymbol{T}$ neobsahujúcich premennú p a zo všetkých možných rezolvent vzhľadom k premennej p.

Veta.
Množina klauzúl T je konzistentná vtedy a len vtedy, ak je konzistentná aj množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$, pričom majú spoločný model.

Príklad

Dokážme konzistentnosť množiny $\boldsymbol{T}=\{p\vee q, r\vee q, \neg r, \neg p\}$.

1. krok, premenná p: $\boldsymbol{T}_0(p)=\{r\vee q, \neg r\}$, $\boldsymbol{T}_1(p)=\{p\vee q\}$, $\boldsymbol{T}_2(p)=\{\neg p\}$, $T_{12}(p)=\{q\}$,

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(p)=\boldsymbol{T}_0(p)\cup\boldsymbol{T}_{12}(p)=\{r\vee q, \neg r, q\}$$

2. krok, premenná r: $\boldsymbol{T}_0(r)=\{q\}$, $\boldsymbol{T}_1(r)=\{r\vee q\}$, $\boldsymbol{T}_2(r)=\{\neg r\}$, $T_{12}(r)=\{q\}$

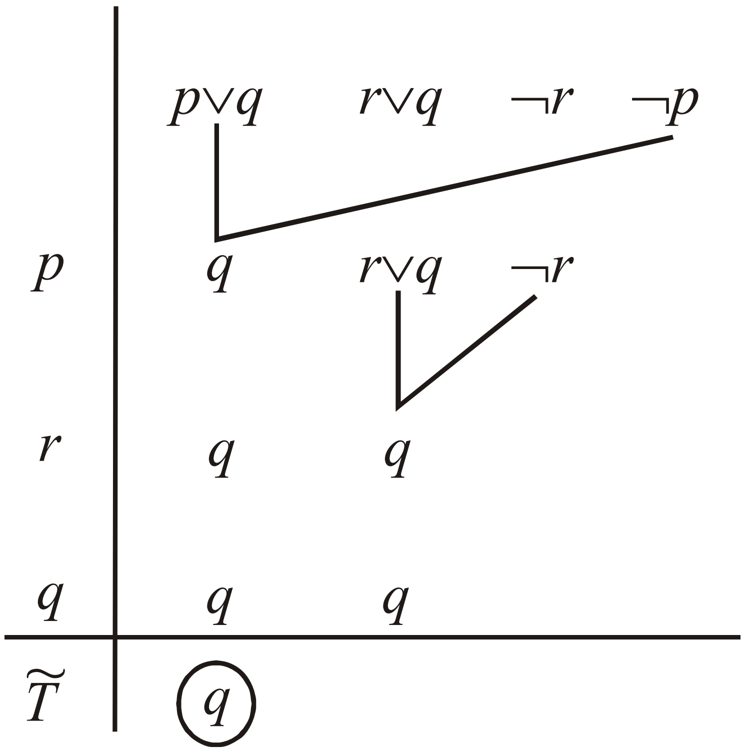
$$\tilde{\boldsymbol{T}}(r)=\boldsymbol{T}_0(r)\cup\boldsymbol{T}_{12}(r)=\{q\}$$

Potom množina $\boldsymbol{T}$ je konzistentná pre interpretáciu $\tau=(p/?, q/1, r/?)$, kde premenné p a r môžu mať ľubovolné pravdivostné hodnoty.

Postupný proces konštrukcie množín $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ a $\boldsymbol{T}_{12}$ pre rôzne výbery premenných p a r je znázornený v tabuľke. Prvý riadok tabuľky obsahuje formule z množiny $\boldsymbol{T}$. V druhom riadku (označený premennou p) prebieha konštrukcia množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p) = \boldsymbol{T}_0(p) \cup \boldsymbol{T}_{12}(p) = \{r \vee q, \neg r, q\}$, jednotlivé formule tejto množiny sú v tomto riadku neoznačené binárnou číslicou. V treťom riadku (označenom premennou r) prebieha konštrukcia množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(r) = \boldsymbol{T}_0(r) \cup \boldsymbol{T}_{12}(r) = \{q\}$, ktorou končí proces štúdia konzistentnosti množiny $\boldsymbol{T}$.

Znázornenie pomocou tabuľky

	$p \vee q$	$r \vee q$	$\neg r$	$\neg p$		
p	1			0	q	
r		1	0			q
q					1	1


$p \vee q$ $r \vee q$ $\neg r$ $\neg p$
p q $r \vee q$ $\neg r$
r q q
q q q
$\widetilde{T}$ q

Príklad

Dokážte nekonzistentnosť množiny $\boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$

1. krok, premenná a: $\boldsymbol{T}_0(a) = \{b \vee \neg c\}$, $\boldsymbol{T}_1(a) = \{a \vee \neg b, a \vee c\}$, $\boldsymbol{T}_2(a) = \{\neg a\}$,

$T_{12}(a) = \{\neg b, c\}$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(a) = \boldsymbol{T}_0(a) \cup \boldsymbol{T}_{12}(a) = \{b \vee \neg c, \neg b, c\}$$

2. krok, premenná b: $\boldsymbol{T}_0(b) = \{c\}$, $\boldsymbol{T}_1(b) = \{b \vee \neg c\}$, $\boldsymbol{T}_2(b) = \{\neg b\}$, $T_{12}(b) = \{\neg c\}$

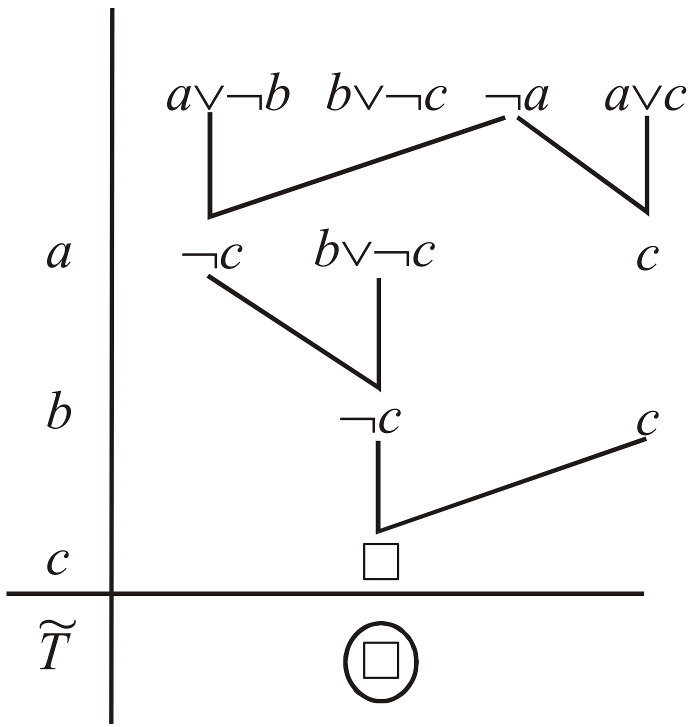
$$\tilde{\boldsymbol{T}}(b) = \boldsymbol{T}_0(b) \cup \boldsymbol{T}_{12}(b) = \{c, \neg c\}$$

3. krok, premenná c: $\boldsymbol{T}_0(c) = \emptyset$, $\boldsymbol{T}_1(c) = \{c\}$, $\boldsymbol{T}_2(c) = \{\neg c\}$, $T_{12}(c) = \{\square\}$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(c) = \boldsymbol{T}_0(c) \cup \boldsymbol{T}_{12}(c) = \{\square\}$$

Znázornenie pomocou tabuľky

	$a \vee \neg b$	$b \vee \neg c$	$\neg a$	$a \vee c$				
a	1		0	1	$\neg b$	c		
b		1			0		$\neg c$	
c						1	0	$\square$


$a \vee \neg b$
$b \vee \neg c$
$\neg a$
$a \vee c$
a
$\neg c$
$b \vee \neg c$
c
b
$\neg c$
c
c
$\square$
$\widetilde{T}$
$\square$

Záver

Teória rezolventy tvorí teoretický základ metód automatického dôkazu formúl vo výpočtovej logike a patrí medzi základné procedúry logicko-programovacieho jazyka PROLOG.

THE END