Náhradná 2. kontrolná písomka z ADM
konaná dňa 18. 12. 2008)

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, (1 bod)

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, (1 bod)

(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 15$, $A_1 \subseteq A_2$, (1 bod)

3. príklad. Nech $(\mathbb{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa. (2 body)
(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N},*)$ je monoid, odôvodnite. (1 bod)

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z \qquad \text{(3 body)}$$

5. príklad. Stanovte hodnosť matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(3 body)}$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(2body)}$$

Riešenie príkladov

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}=1+21+35+7=64$$

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1|=12$, $|A_2|=18$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 30$

(b) $|A_1|=2$, $|A_2|=10$, $|A_1 \cap A_2|=1$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 11$

(c) $|A_1|=8$, $|A_2|=15$, $A_1 \subseteq A_2$, $|A_1 \cup A_2| = |A_2| = 15$

3. príklad. Nech $(\mathbb{N},*)$ je algebraická štruktúra, kde $\mathbb{N}$ je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = min\{x,y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia ´$*$´ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x<y<z$

$$(x*y)*z = y*z = z$$
$$x*(y*z) = x*z = z$$

(a2) $x<z<y$

$$(x*y)*z = y*z = y$$
$$x*(y*z) = x*y = y$$

(a3) $y<x<z$

$$(x*y)*z = x*z = z$$
$$x*(y*z) = x*z = z$$

....

Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z = x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je pologrupa .

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N},*)$ je monoid. (1 bod)

K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N},*)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element $e=\infty$, ktorý patrí do množiny $\mathbb{N}$

$$x*e = min\{x,\infty\} = x$$

$$e*x = min\{\infty,x\} = x$$

Avšak $\infty \notin \mathbb{N}$, t. j. štruktúra $(\mathbb{N},*)$ nie je monoid.

Poznámka: príklad uznať, aj keď tam táto negatívna poznámka nie je uvedená.

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$$

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

$U_f^{(0)}$ (1110) (1101) (1011) (0101) (0010) (0001

$U_f^{(1)}$ (#101) (0#01)

$$\tilde{V} = \{(\#101),(0\#01),(1110),(1011),(0010)\}$$

$$\tilde{f}(w,x,y,z) = x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{y}z + wxy\overline{z} + w\overline{x}yz + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

5. príklad. Stanovte hodnosť matíc

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 2$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$