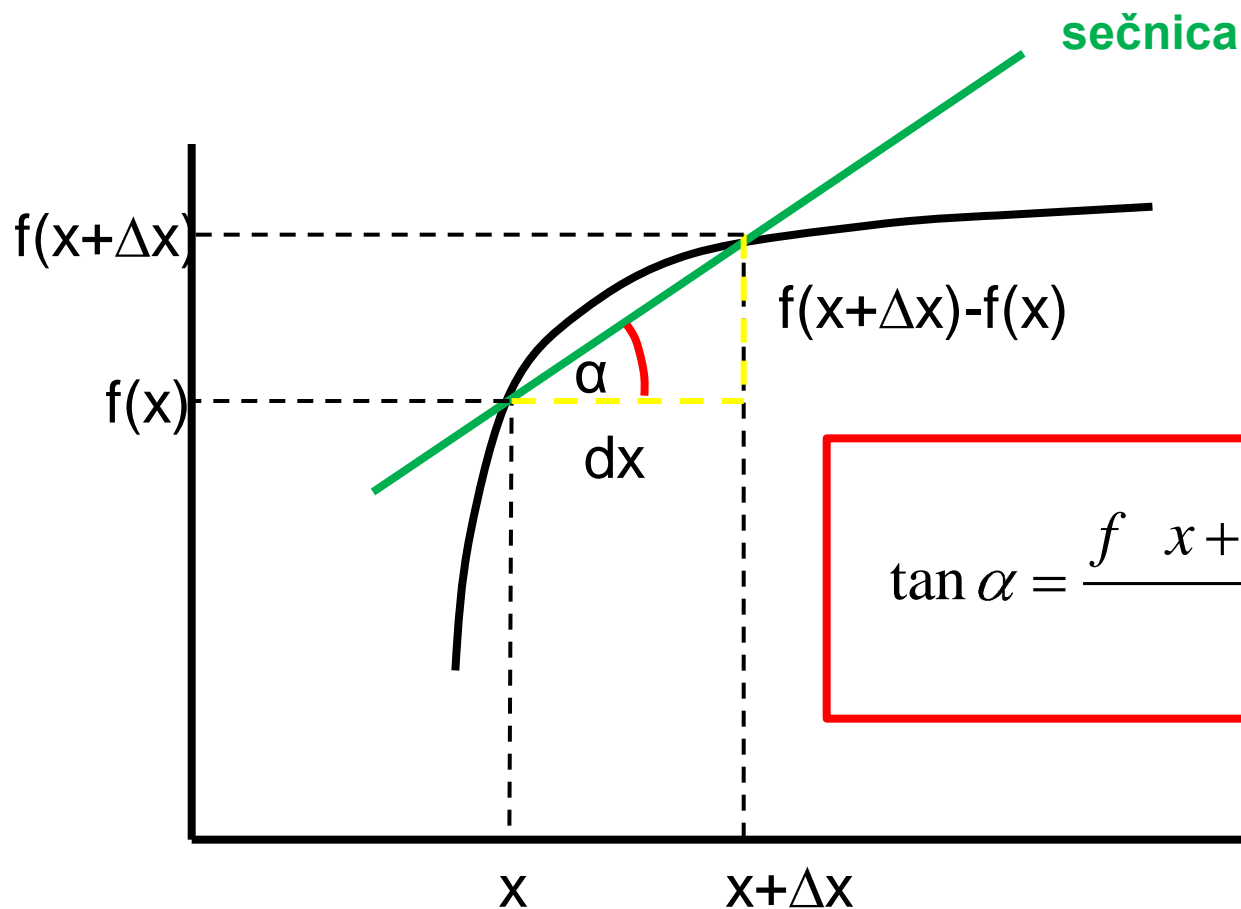


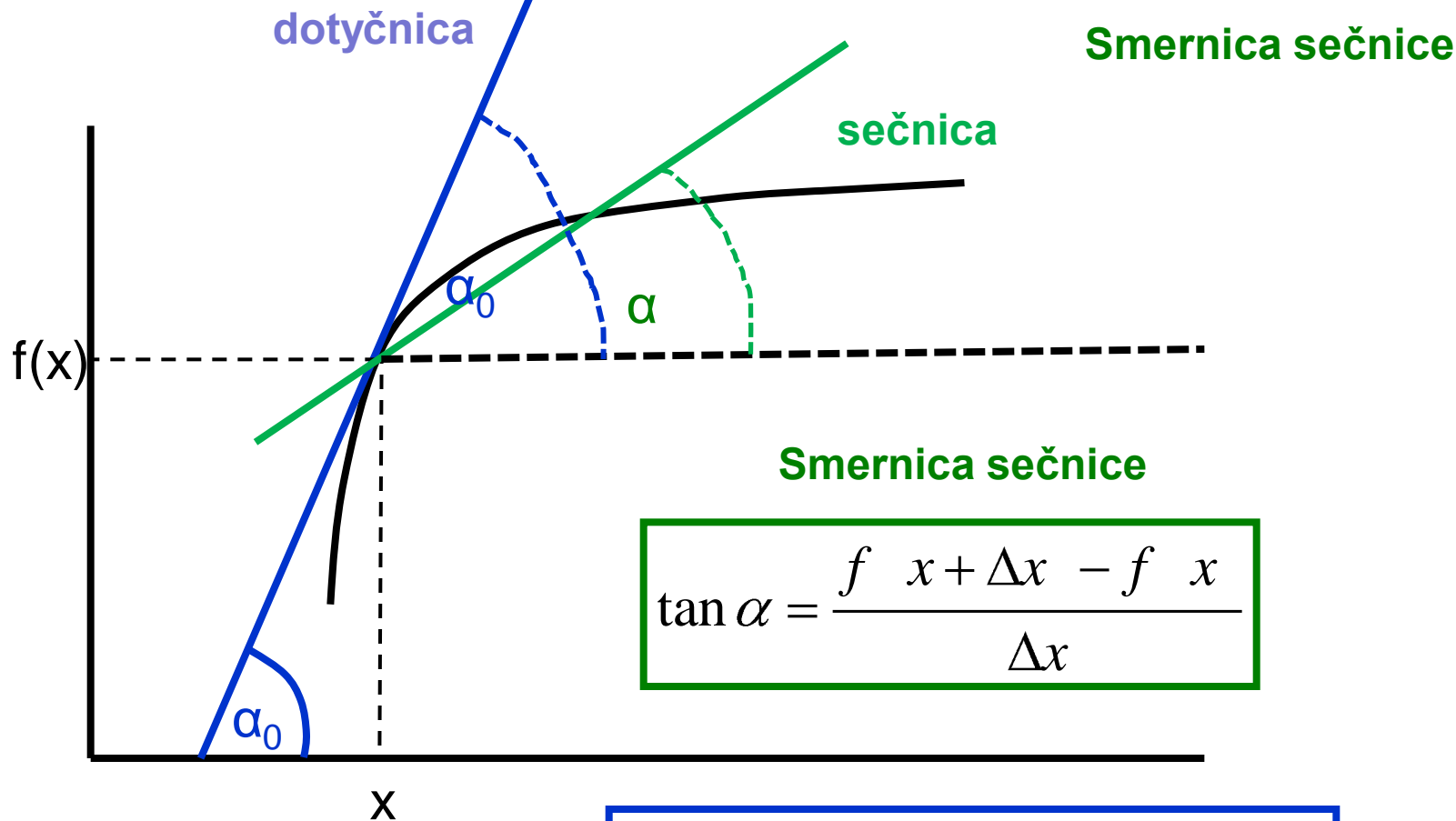
Matematická vsuvka

Derivácia: smernica (strmost') dotyčnice

$$y' = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \boxed{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$



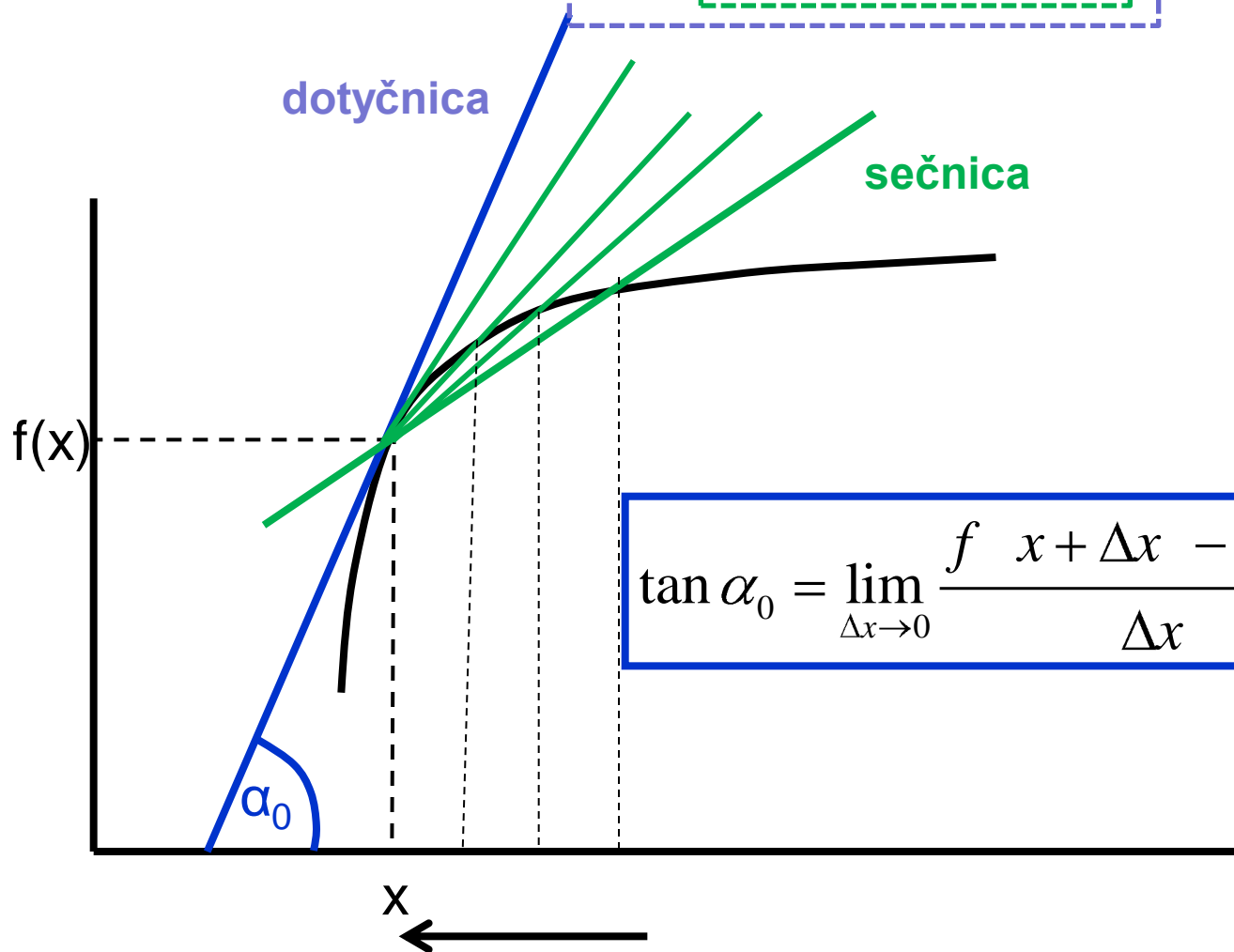
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



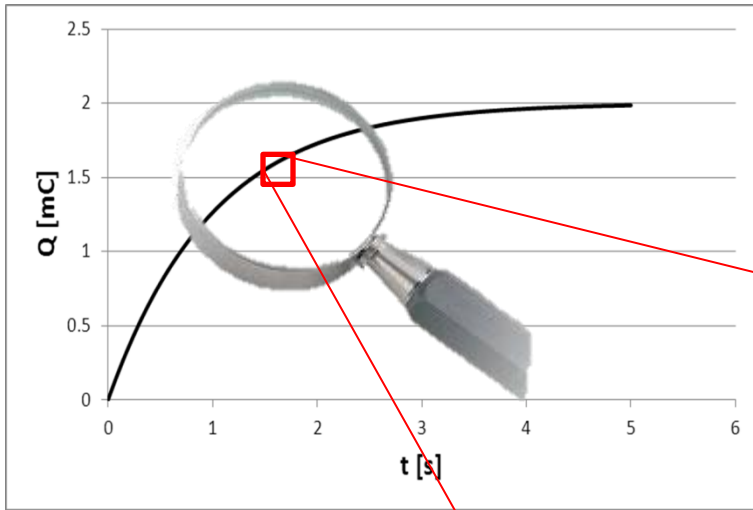
$$\tan \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

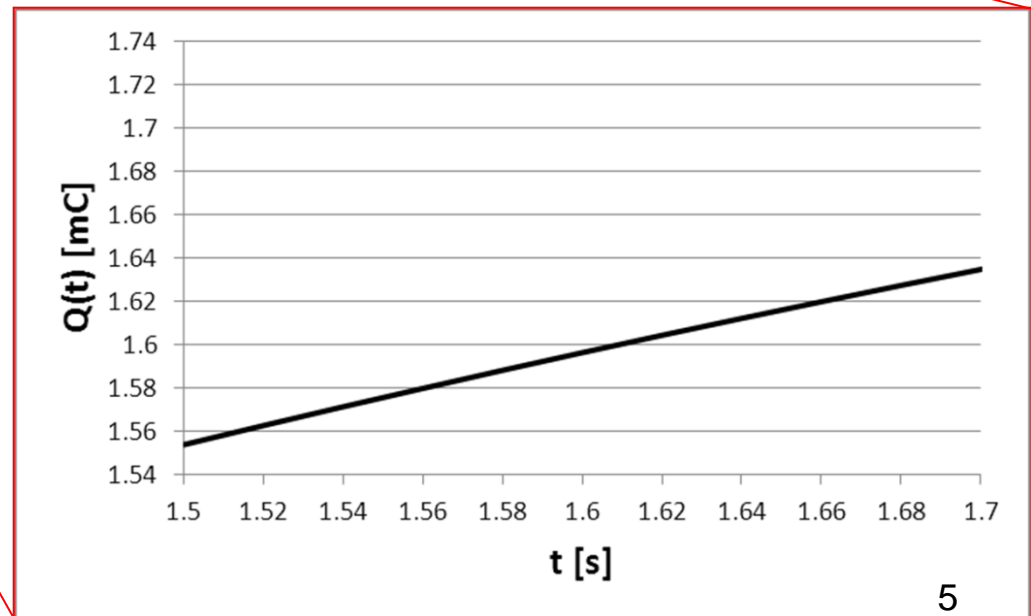
$$y' = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$



**Geometrický význam derivácie –
derivácia funkcie v danom bode určuje smernicu dotyčnice**



Ak sa pozrieme na dostatočne malý úsek grafu pri vhodnom zväčšení, vyzerá ako priamka



Základy mechaniky

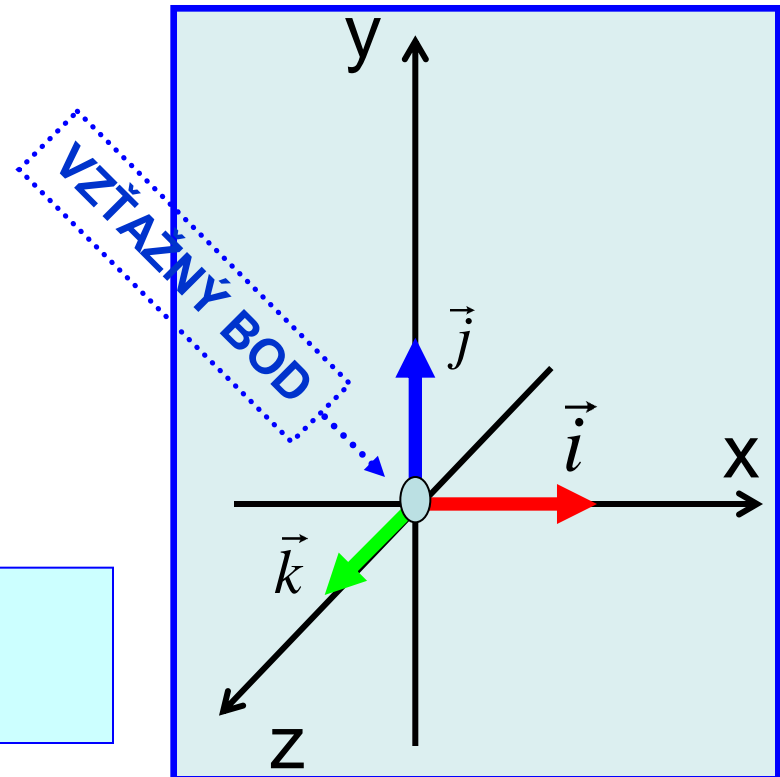
Kinematika

Kinematika - popisuje pohyb telesa pomocou rôznych charakteristík (poloha, posunutie, rýchlosť, zrýchlenie).

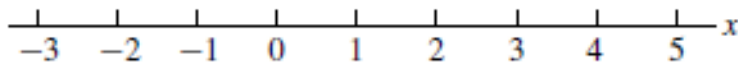
Hmotný bod – najjednoduchší objekt, ktorý zastupuje pohybujúce sa teleso

Poloha – určuje sa vždy vzhľadom k nejakému **vzťažnému bodu**
(najčastejšie k počiatku SS)

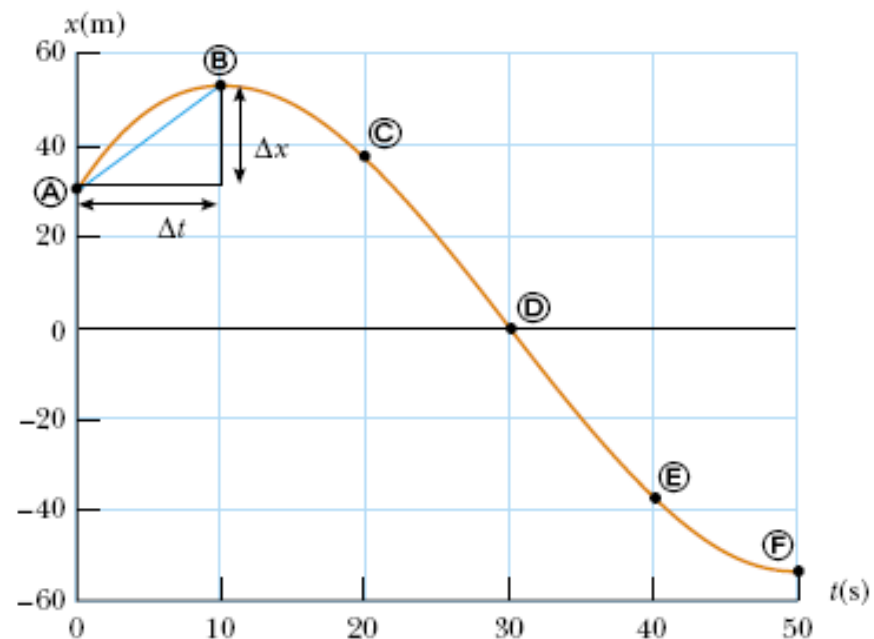
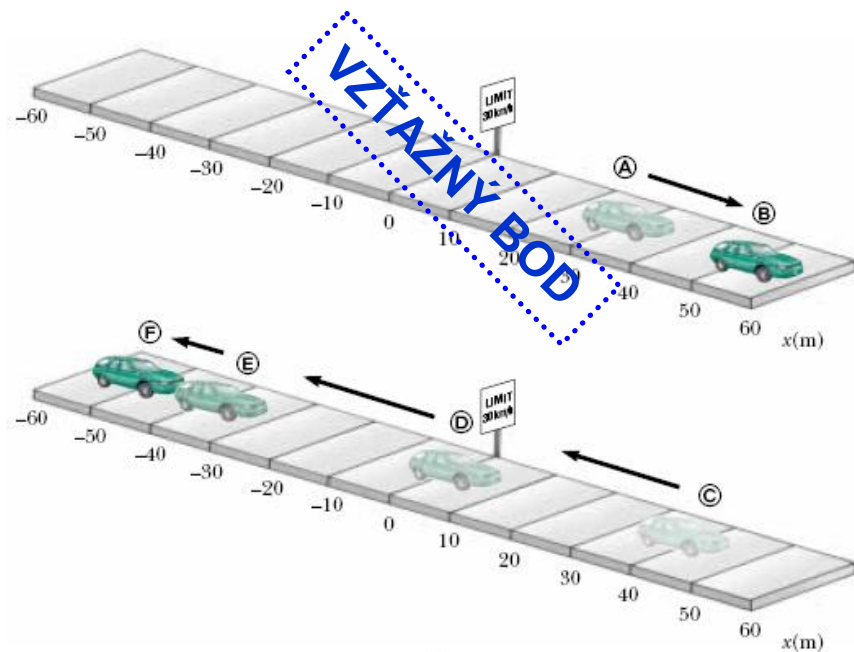
Kartézska súradnicová sústava je tvorená pravotočivou sústavou súradníc, určenou navzájom kolmými jednotkovými vektormi.



Záporný smer ← Kladný smer →



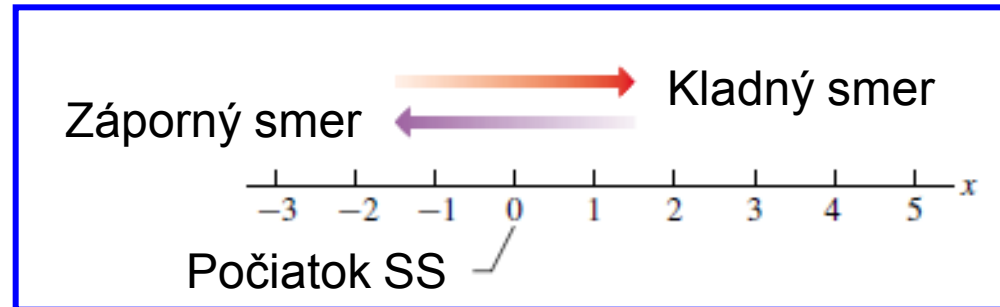
Počiatok SS



V polohe v závislosti od času je skrytá informácia o pohybe.

Jednorozmerný prípad

Zmena polohy

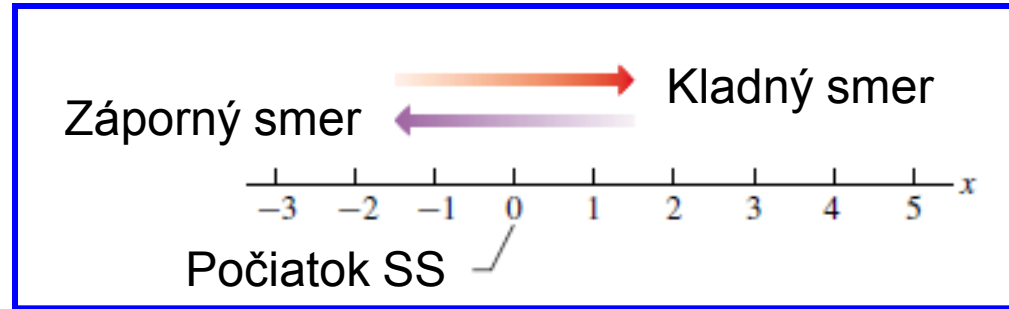


Posunutie $\Delta x = x_2 - x_1$

Jednorozmerná vektorová veličina

Vektorová veličina, závisí len od počiatočnej a konečnej polohy

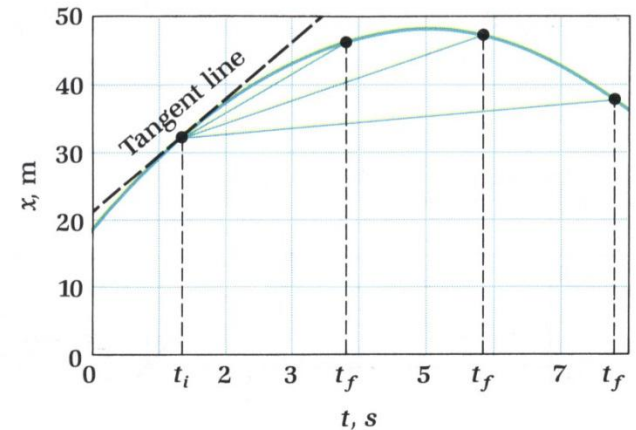
Jednorozmerný prípad



Priemerná rýchlosť

Geometria: Smernica sečnice

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

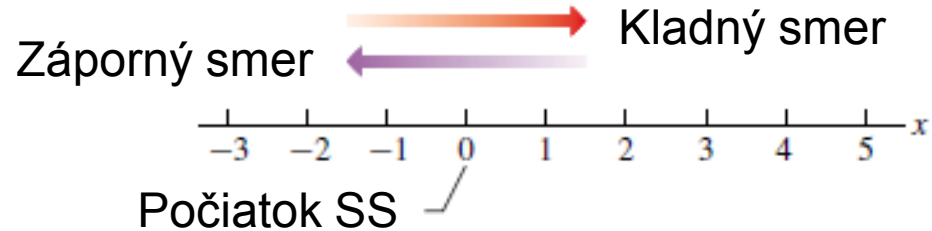


Okamžitá rýchlosť

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Čím $\Delta t \rightarrow 0$, tým presnejšie vystihuje príslušná priemerná rýchlosť na danom úseku okamžitú rýchlosť.

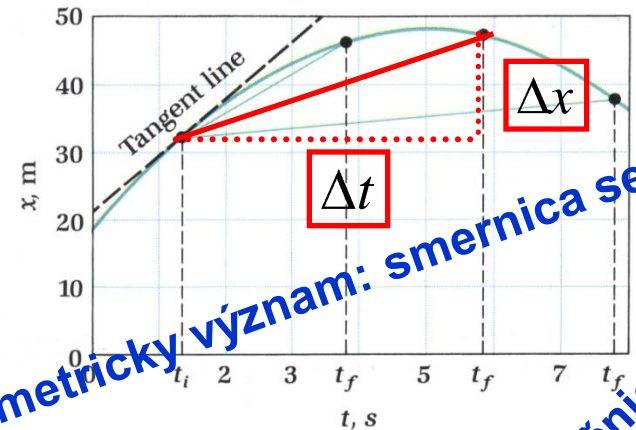
Jednorozmerný prípad



Priemerná rýchlosť

Geometria: Smernica sečnice

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

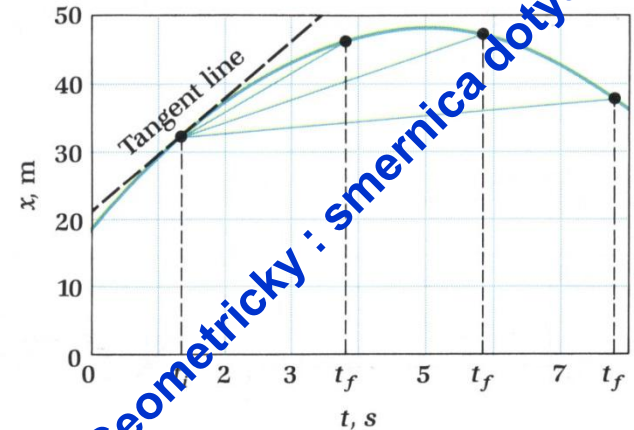


Geometricky význam: smernica sečnice

Okamžitá rýchlosť

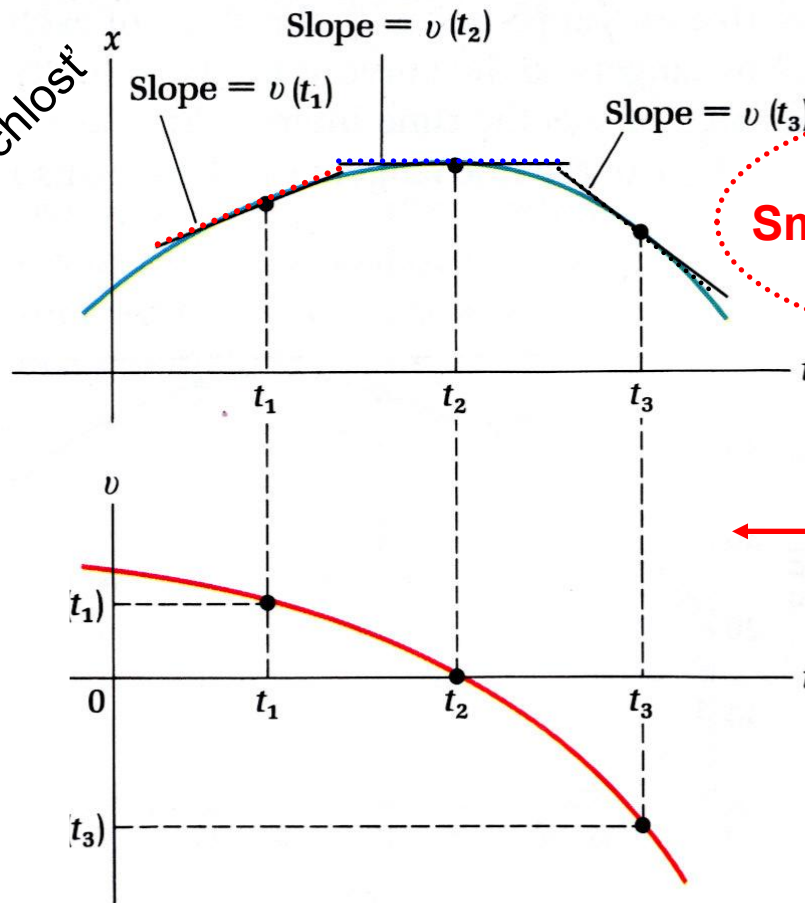
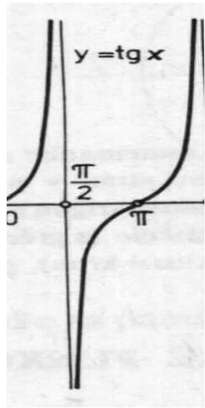
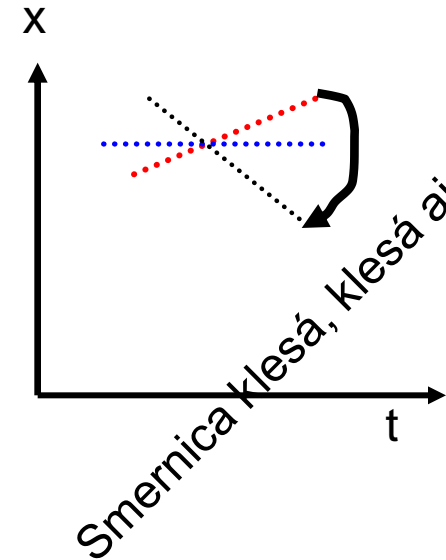
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Zmenšováním intervalu Δt nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotýčnici



Geometricky : smernica dotýčnice

Využitie geometrického významu



Smernica dotyčnice klesá

Smernica dotyčnice v grafe $x(t)$ v každom čase určuje veľkosť rýchlosti.

Zhrnutie

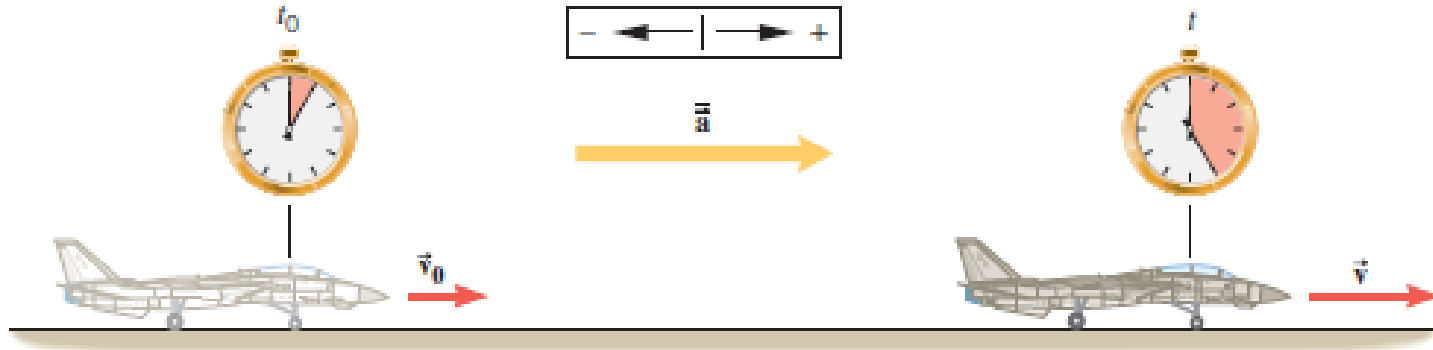
Okamžitá rýchlosť je limita, ku ktorej sa blíži **priemerná rýchlosť** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

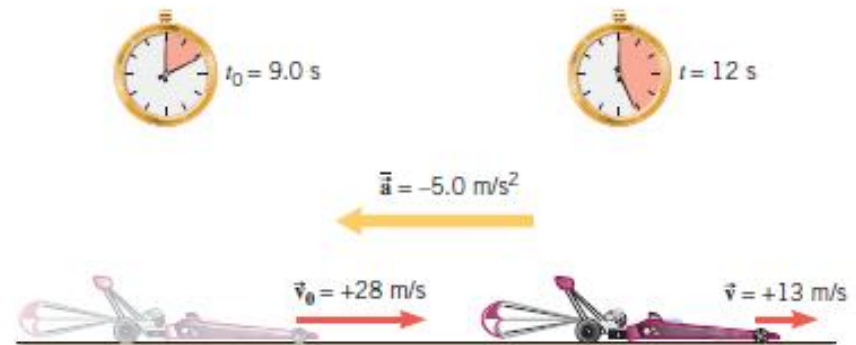
Priemerná rýchlosť

Okamžitá rýchlosť

Zmena rýchlosti častice sa charakterizuje zrýchlením



Veľkosť rýchlosti sa zväčšuje



Veľkosť rýchlosti sa zmenšuje

Jednorozmerný prípad

Priemerné zrýchlenie

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Okamžité zrýchlenie

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Zrýchlenie

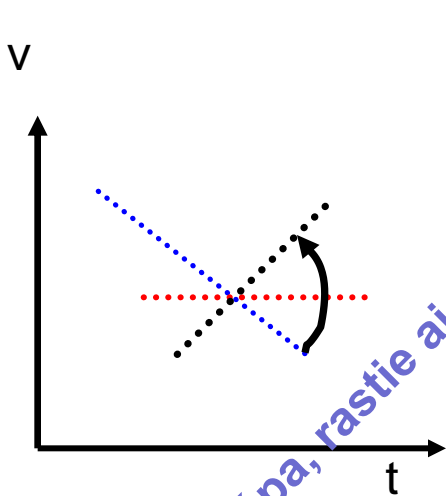
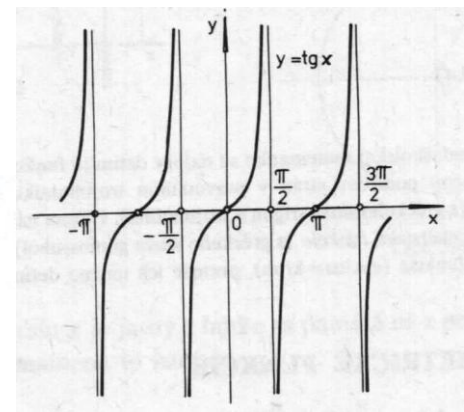
Okamžité zrýchlenie je limita, ku ktorej sa blíži **priemerné zrýchlenie** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \rightarrow 0$.

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

priemerné zrýchlenie

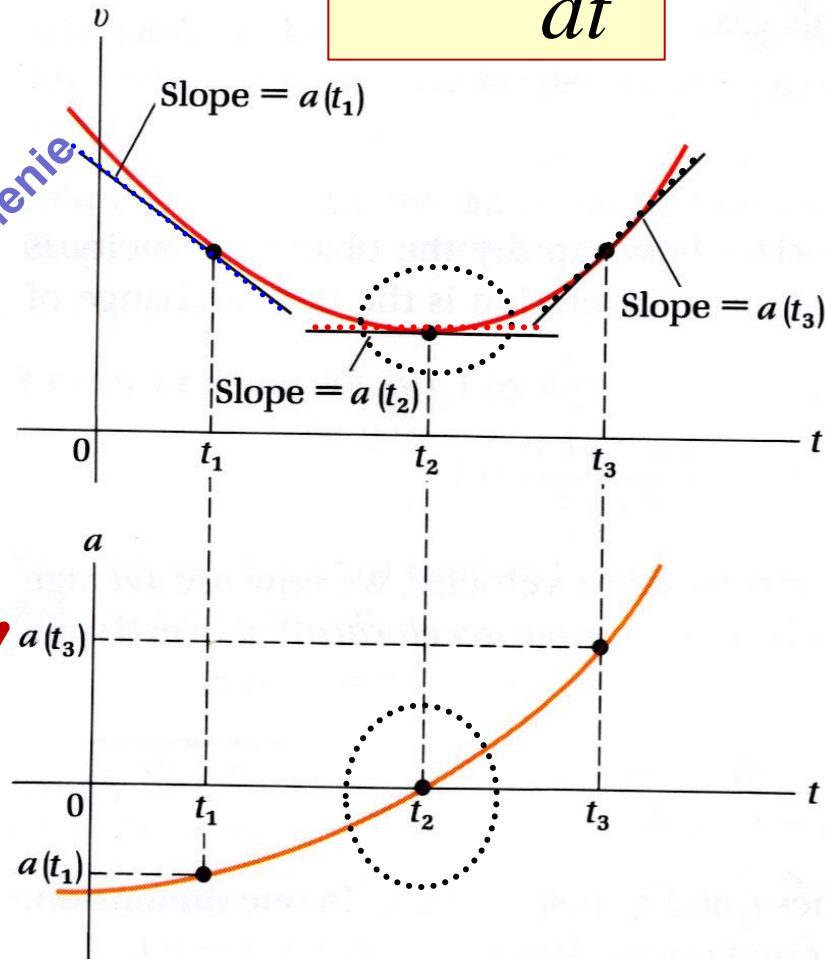
Okamžité zrýchlenie

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

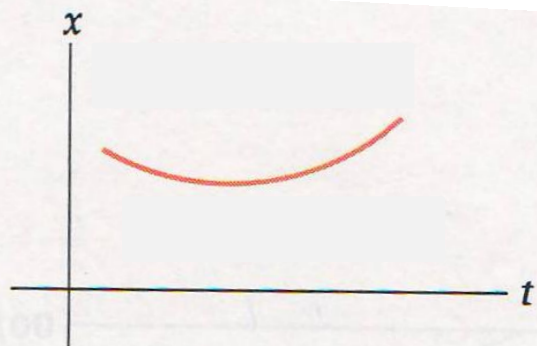


Smernica stúpa, rastie aj zrýchlenie.

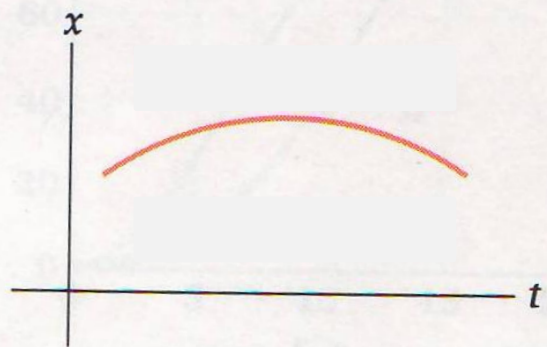
Rýchlosť rastie



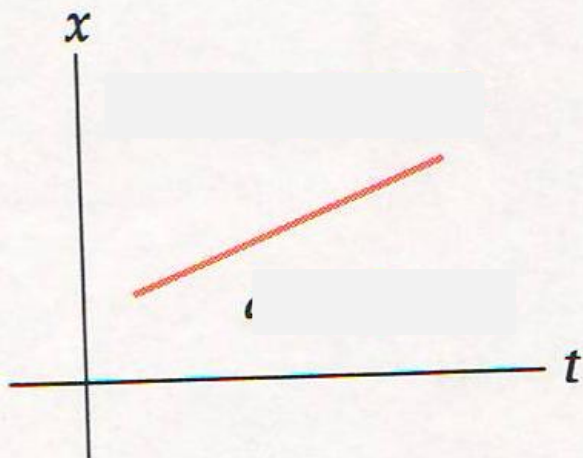
Smernica dotyčnice v grafe $v(t)$ v každom čase určuje veľkosť zrýchlenia a .

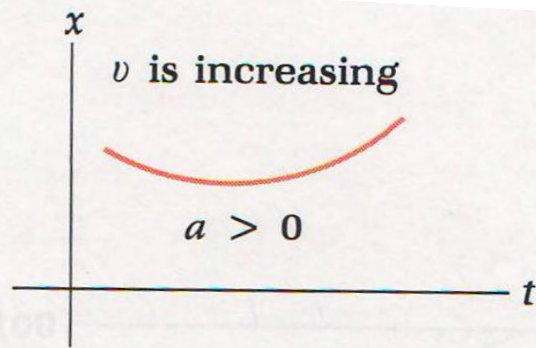


(a)

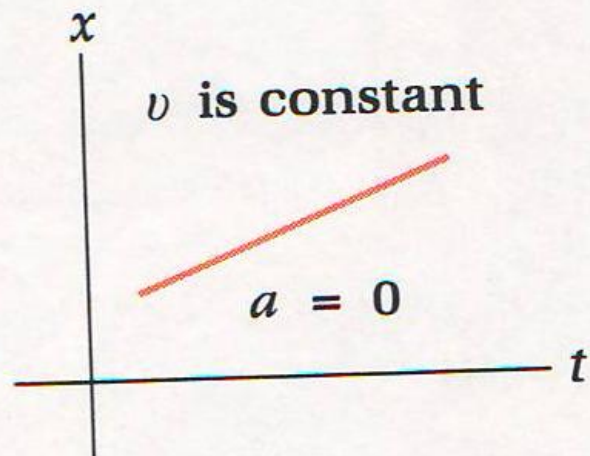
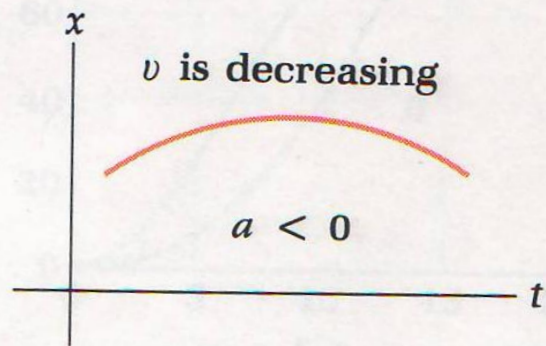


Rozhodnite, v ktorej situácii rýchlosť (zrýchlenie) stúpa, klesá.





(a)



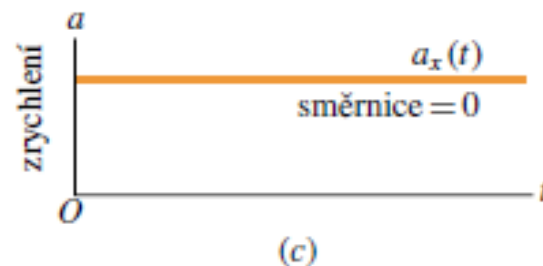
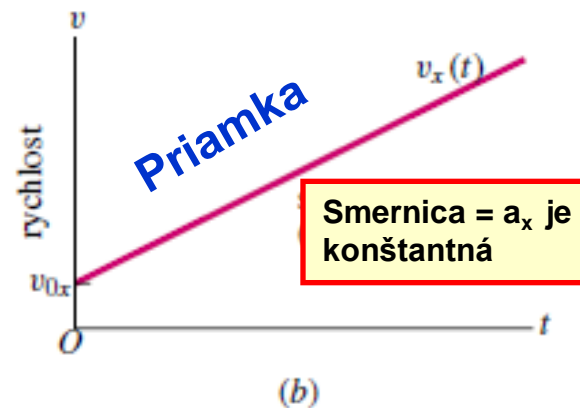
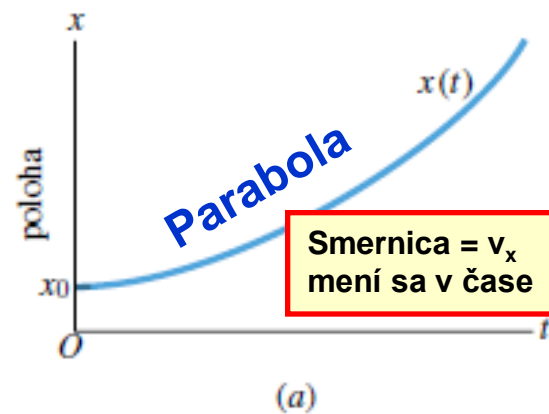
Rovnomerne zrýchlený pohyb

$a_x = \text{konštanta}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

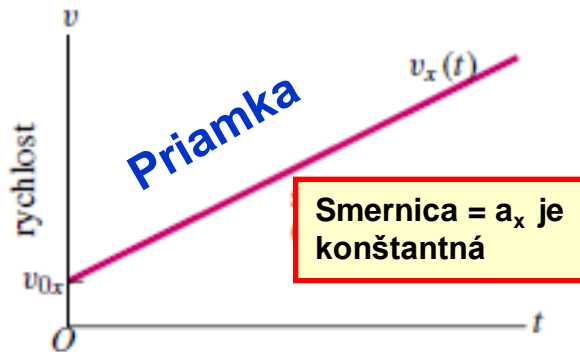
$$v = v_{0x} + a_x t$$



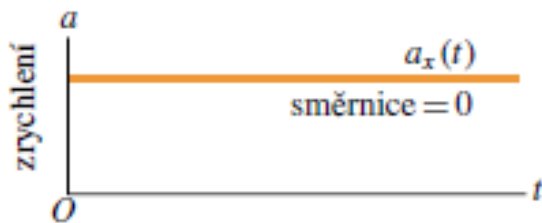
Rovnomerne zrýchlený pohyb v jednom rozmere



(a)



(b)



(c)

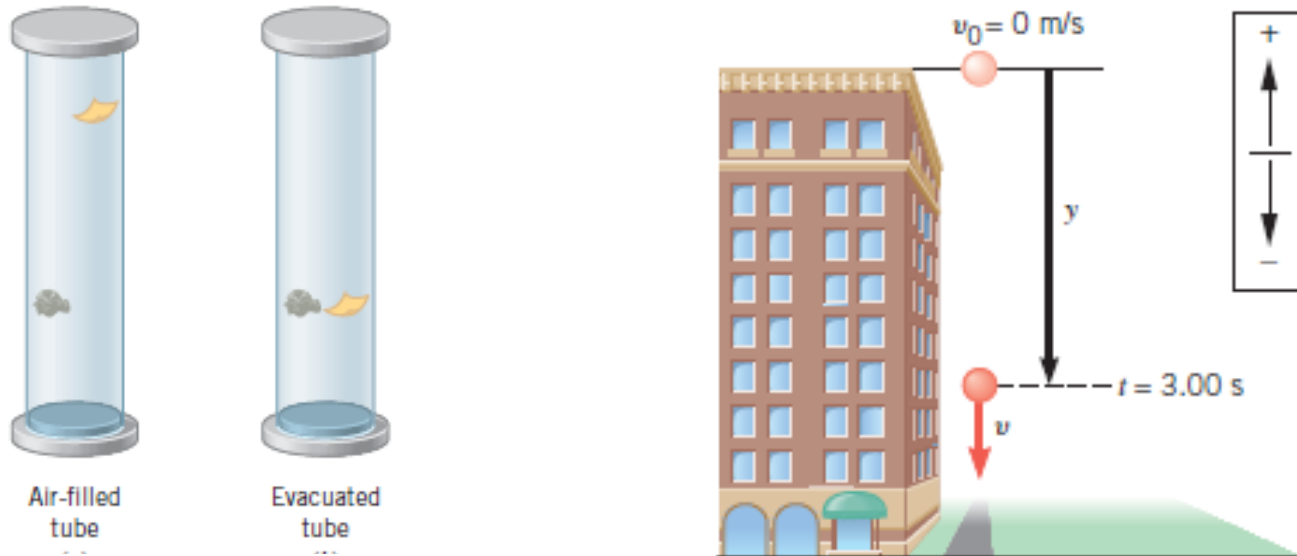
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = konst$$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

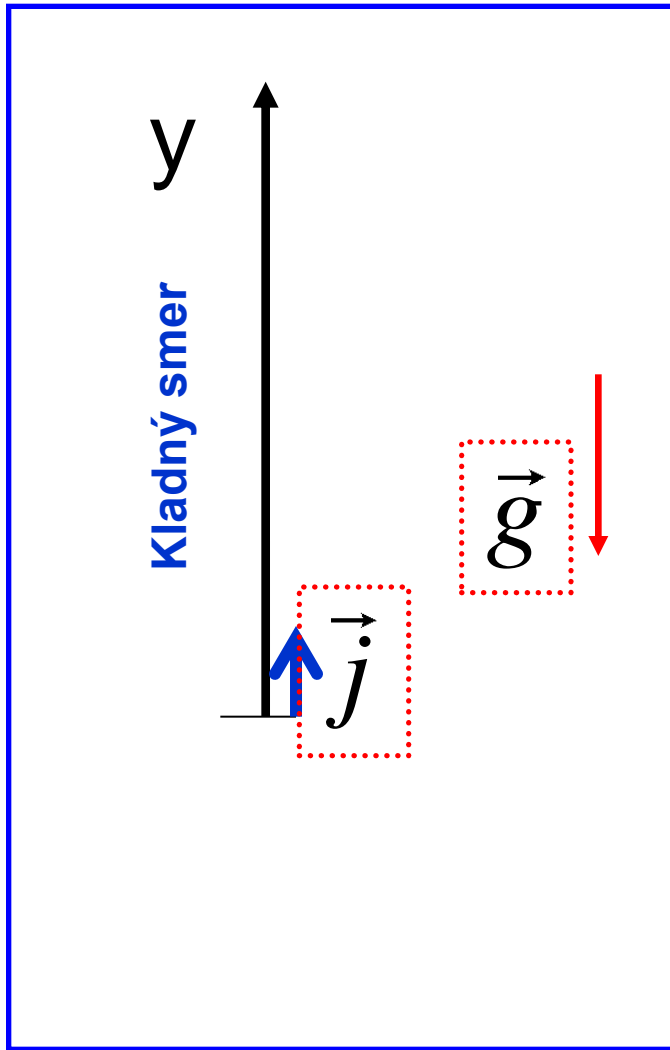
Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{0x} + v_x) t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Ukážka pohybů v jednom směru



$$g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$$

Zvislý vrh



$$a_y = -g$$

AKTUALIZÁCIA OZNAČENIA

Zámena $x \rightarrow y$

$a_x = \text{konštanta}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$a_y = \text{konštanta}$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v = v_{0x} + a_x t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

Zvislý vrh

Teleso bolo vrhnuté smerom nahor rýchlosťou v_{0y} .
Určte čas, za ktorý teleso dosiahne maximálnu výšku. Určte maximálnu výšku výstupu.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$y_0 = 0$$

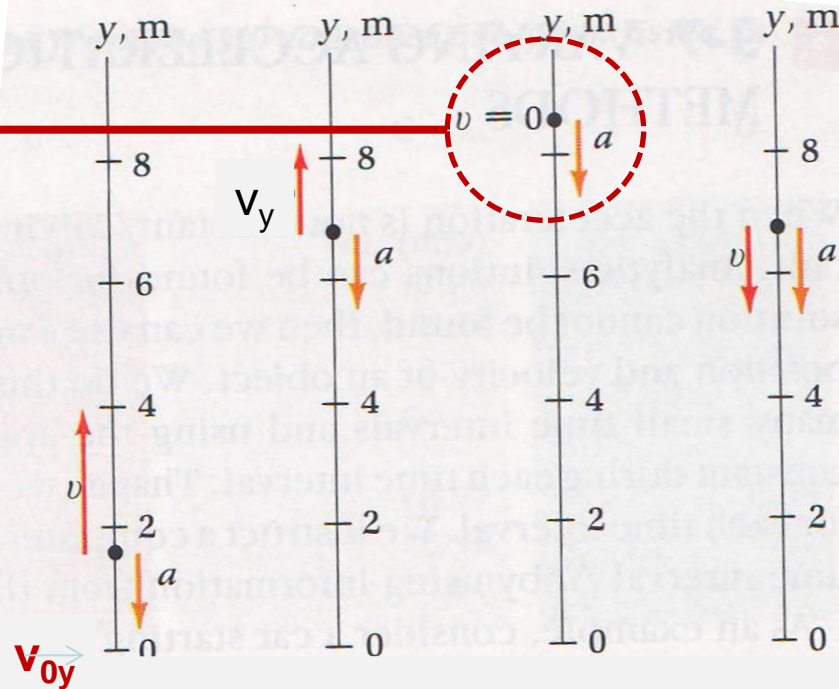
$$a_y = -g$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_y = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g}$$

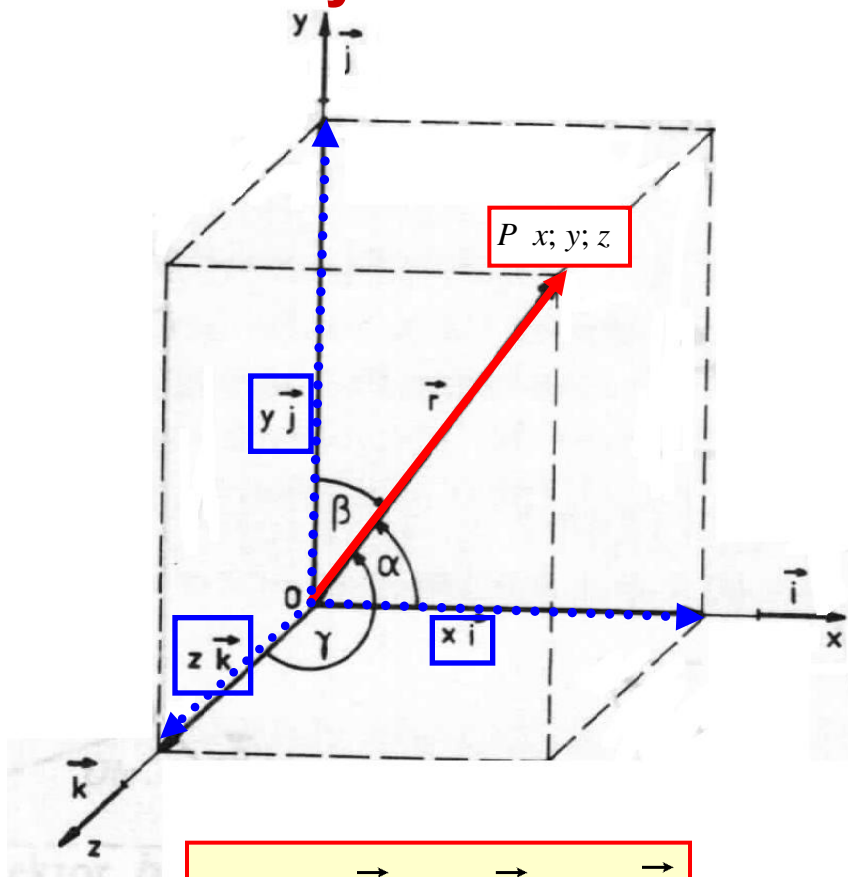
$$H_{\max} = y|_{v=0} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$



Pohyb vo viacerých rozmeroch

Polohový vektor

Polohový vektor



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$x; y; z$

Súradnice vektora

Priemety (zložky) vektora

$x\vec{i}, \quad y\vec{j}, \quad z\vec{k}$

Vo všeobecnom prípade sa každý vektor dá rozložiť na tri nekomplanárne zložky (ktoré neležia v jednej rovine).

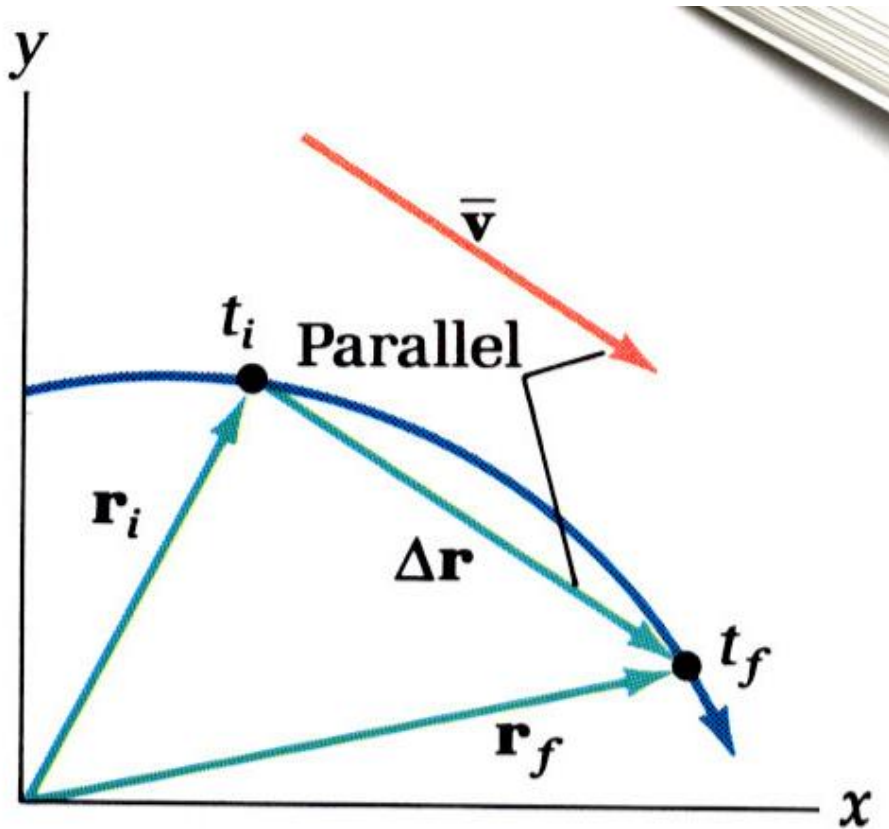
Matematická vsuvka

Vzájomná orientácia vektorov

- Násobenie vektora číslom

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot s \quad \begin{cases} s > 0 & \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ s < 0 & \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases}$$

Pohyb vo viacerých rozmeroch



$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j}$$

$$\vec{r}_f = x_f \vec{i} + y_f \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= [x_f - x_i] \vec{i} + [y_f - y_i] \vec{j} = \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} \end{aligned}$$

Priemerná rýchlosť

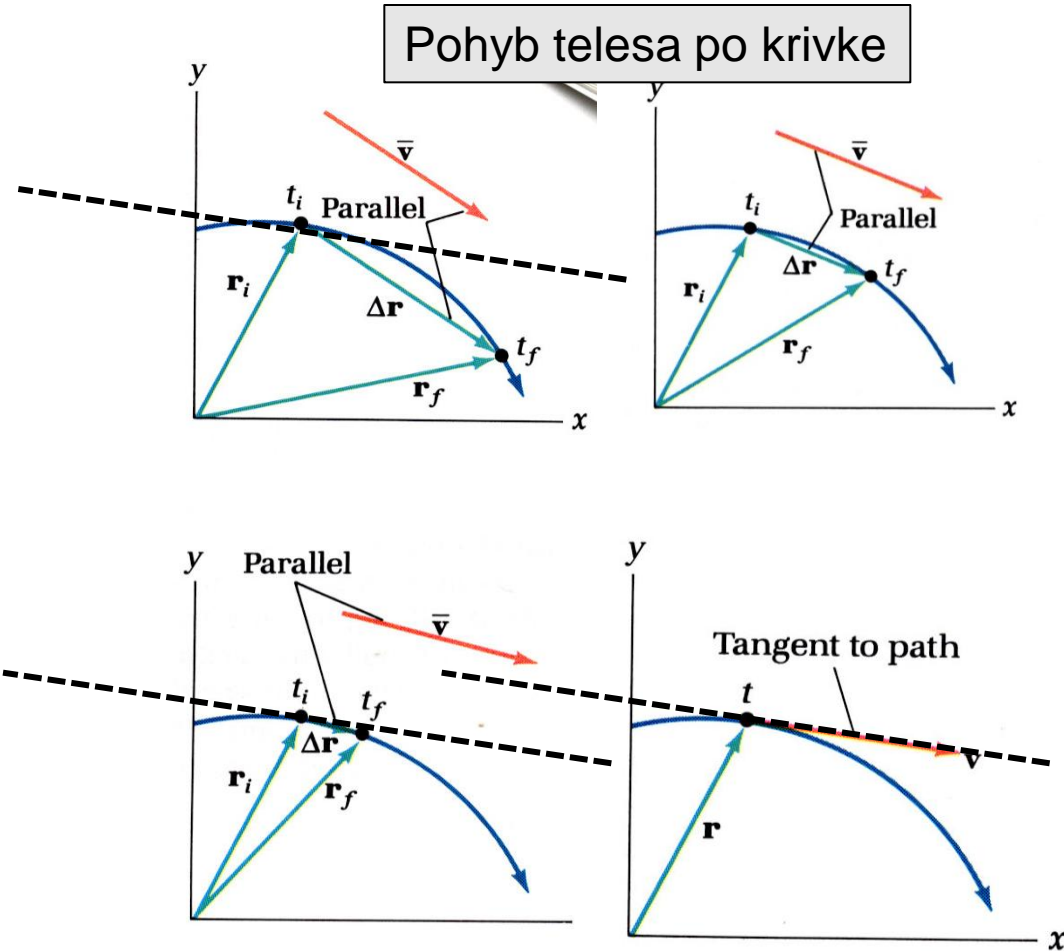
$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}{\Delta t}$$

Okamžitá rychlost'

SMER VEKTORA

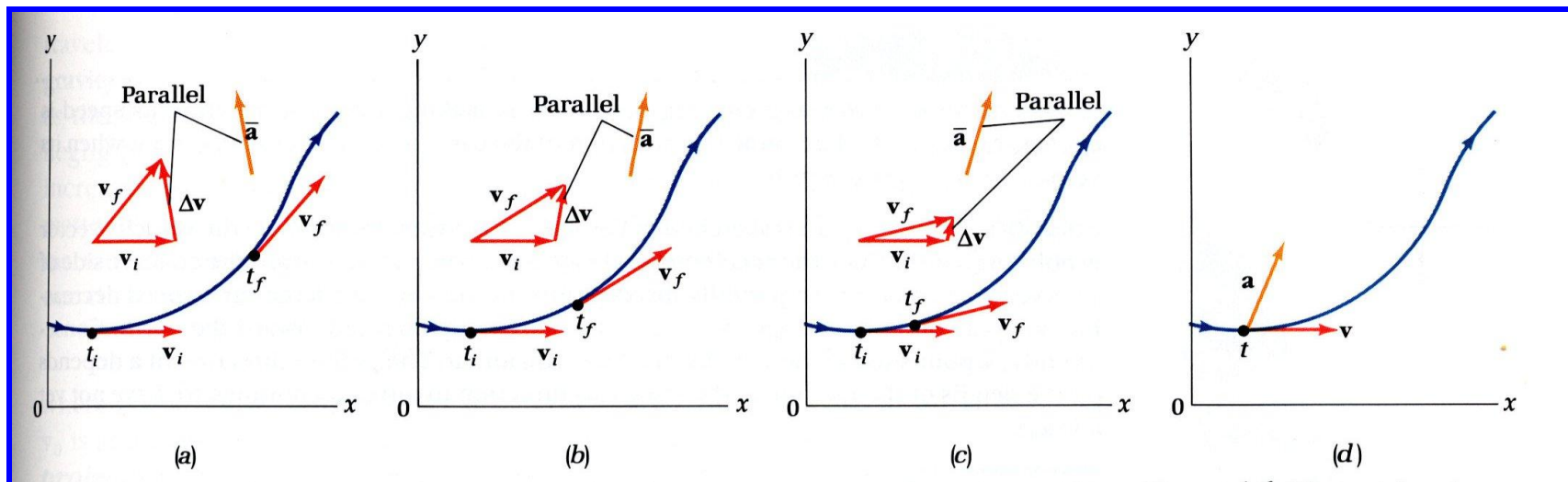
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\Delta \mathbf{r}$ sa **postupne skláňa** ku smeru dotyčnice k trajektórii v bode \mathbf{r}_i t.j. priemerná rýchlosť sa blíži k rýchlosti okamžitej.



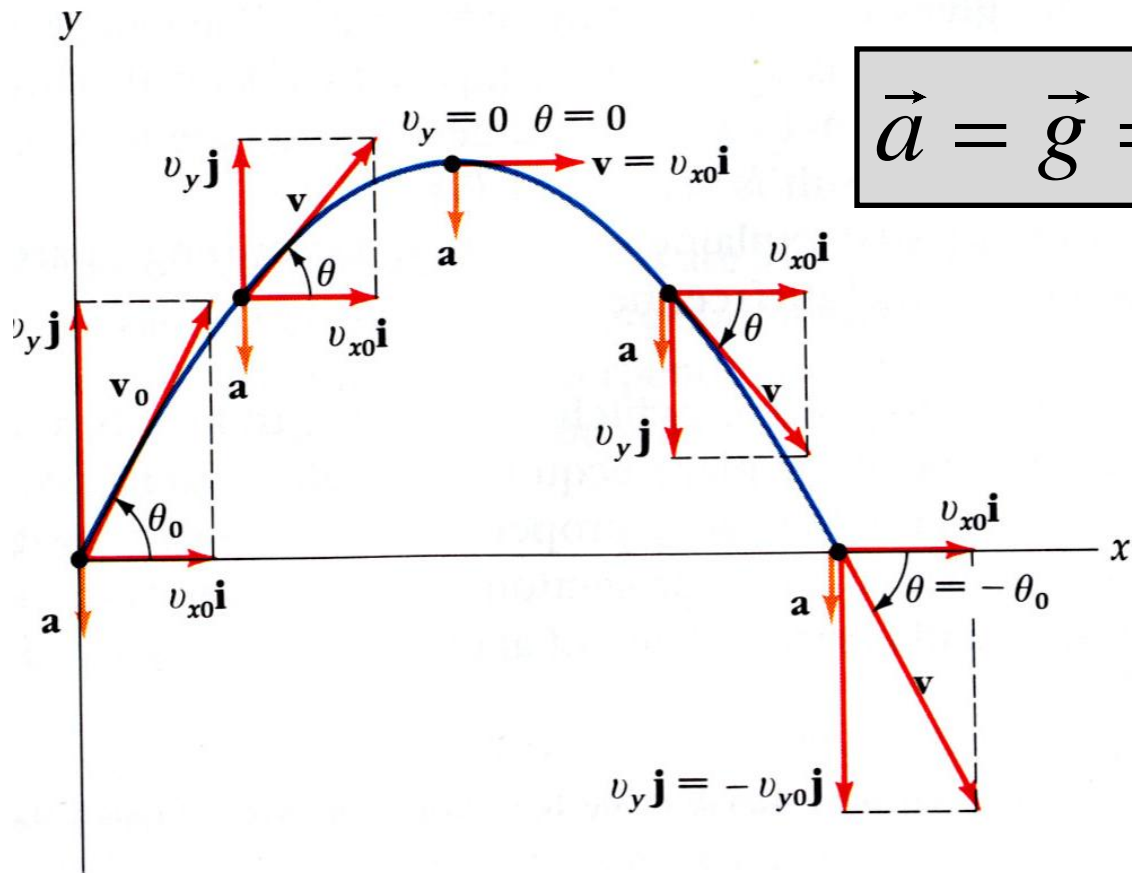
Okamžitá rýchlosť má smer rovnobežný s trajektóriou, t.j. je dotyčnicou k trajektórii.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



**Zrýchlenie telesa nie je vo všeobecnosti
dotyčnicou k trajektórii. Zrýchlenie je
paralelné k $\Delta \vec{v}$.**

Šikmý vrh



$$\vec{a} = \vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j}$$

Vektorová rovnice

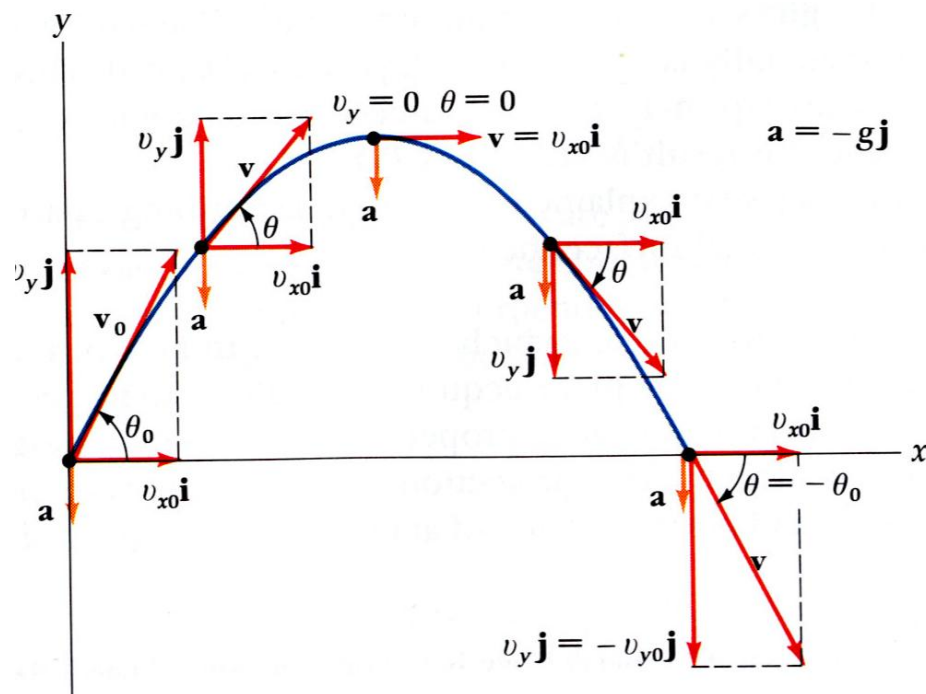
$$\vec{a} = \vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j}$$

Algebraické rovnice

$$a_x = \text{konstanta} = 0$$

Algebraické rovnice

$$a_y = \text{konstanta} = -g$$



Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$a_x = \text{konštanta}$$



$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$a_y = \text{konštanta}$$



$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$a_x = \text{konštanta} = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$x = v_{0x}t$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$a_y = \text{konštanta} = -g$$

$$y_0 = 0$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_{0x} t$$

$$v = v_{0x}$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g t$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \varphi$$

$$x = v_0 \cos \varphi t$$

$$v_x = v_0 \cos \varphi$$

$$y = v_0 \sin \varphi t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi - g t$$



x-ová zložka rýchlosti sa počas pohybu nemení, na rozdiel od y-ovej.

Tvar trajektórie je parabola.

Rovnica trajektórie

$$y = x t g \varphi - \frac{g}{2 v_0 \cos \varphi^2} x^2$$

Dolet

$$y = 0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$$

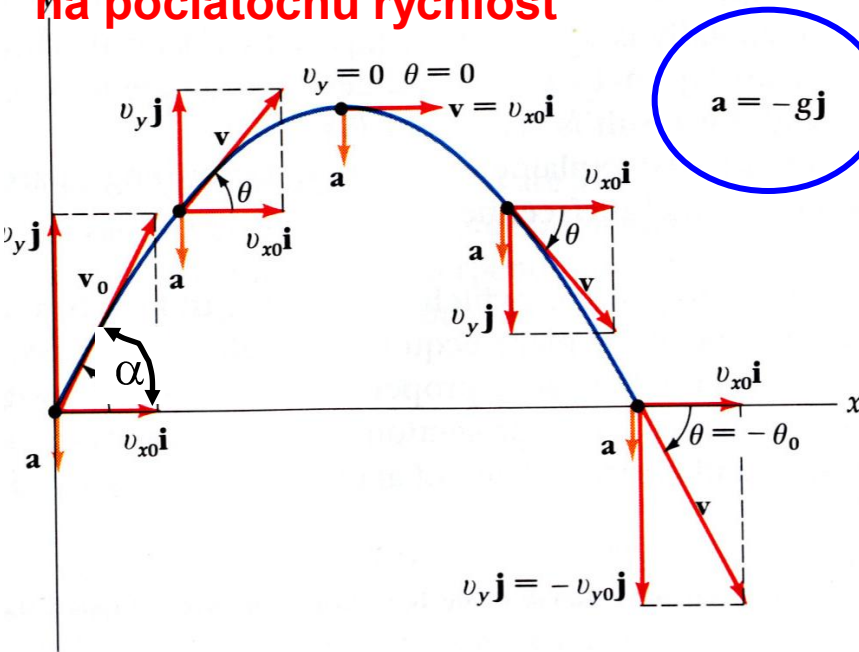
Max. výška

$$v_y = 0$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$$

Teleso v gravitačnom poli vždy padá s rovnakým zrýchlením, bez ohľadu na počiatočnú rýchlosť

Šikmý vrh



$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \varphi$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$

Vodorovné a zvislé zložky veličín popisujúce vrh sú na sebe nezávislé.

x-ová zložka rýchlosti sa počas pohybu nemení, na rozdiel od y-ovej.
Tvar trajektórie je parabola.

Rovnica trajektórie

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

Dolet

$$y = 0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$$

Max. výška

$$v_y = 0$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$$

Pohyb vo viacerých rozmeroch

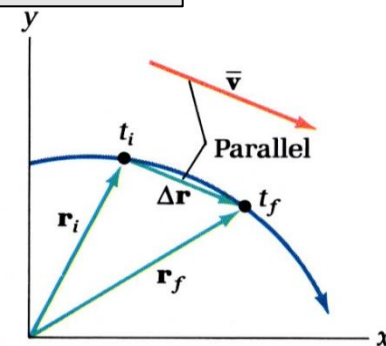
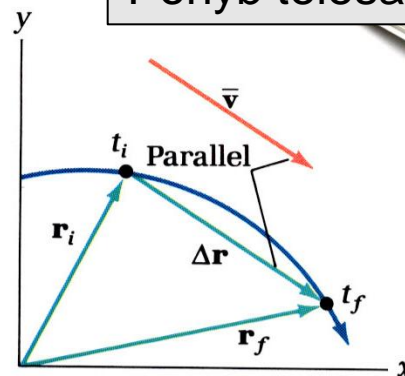
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x, y, z$$

$$\vec{r}_i = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = x_1, y_1, z_1$$

$$\vec{r}_f = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = x_2, y_2, z_2$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

Pohyb telesa po krivke



Priemerná rýchlosť

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Okamžitá rýchlosť

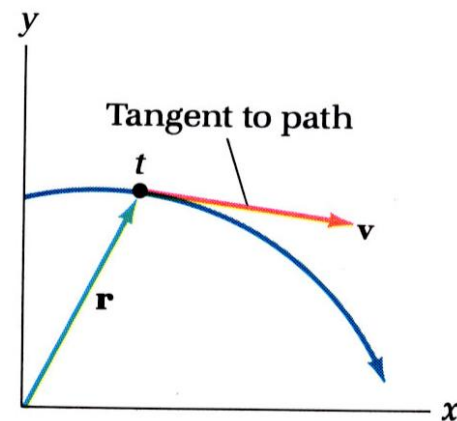
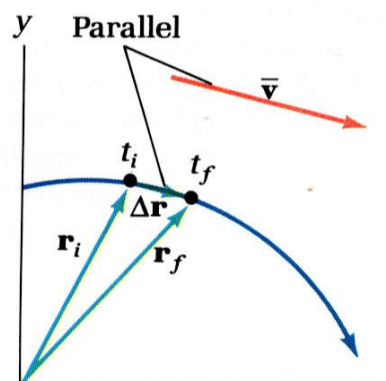
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Priemerné zrýchlenie

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Okamžité zrýchlenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Okamžitá rýchlosť má smer rovnobežný s trajektóriou, t.j. je dotyčnicou k trajektórie.