Záverečná písomka B (25. 1. 2006)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je syntaktický strom priradený formule výrokovej logiky?
(b) ako je definovaná podformula?
(c) čo je tautológia, kontradikcia a splniteľná formula?
(d) čo je teória a čo je model?
(e) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \models \varphi$?

Príklad 2. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{p \Rightarrow \neg q \quad p}{?}, \quad \frac{p \Rightarrow \neg q \quad q}{?}, \quad \frac{p \Rightarrow \neg q \quad \neg p}{?}, \quad \frac{p \Rightarrow \neg q \quad \neg q}{?}, \quad \frac{\neg p \Rightarrow \neg q \quad p}{?}, \quad \frac{\neg p \Rightarrow \neg q \quad q}{?}, \quad \frac{\neg p \Rightarrow \neg q \quad \neg p}{?}, \quad \frac{\neg p \Rightarrow \neg q \quad \neg q}{?}$$

Príklad 3. Zostrojte pomocou logických neurónov neurónovú sieť (snažte sa ju minimalizovať), ktorá simuluje úlohu

$$\alpha_1 \times \alpha_2\alpha_3 = \beta_1\beta_2$$

Príklad 4. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je logickým dôsledkom T, $T \vdash \alpha$,
$T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

Príklad 5. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.
(a) Vtáky sa množia vajciami.
(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Existuje dym bez ohňa.

Príklad 6. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:
(a) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, \neg P(x))$,
(b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$,
(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,
(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet
___
?

(b)
každý študent je kominár
niektorí kominári sú maturanti
___
?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik
___
?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti nie sú včelári
___
?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(b) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

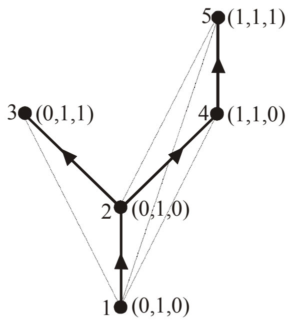
(a) $\neg\psi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg\varphi)$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \varphi)$.

Cvičenie 10. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly a všetkých jej podformúl

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg q \vee \neg r))$$

pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou *R*, pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných *p*, *q* a *r*.



Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných *p* a *q* je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. ***Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník***. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

Príklad 1.

(a) Syntaktický strom formuly φ je binárny strom, ktorého neterminálne vrcholy sú priradené logickým spojkám a terminálne vrcholy sú priradené výrokovým premenným. Vyhodnocovanie stromu prebieha zdola nahor.

(b) Podformula môže byť definovaná pomocou syntaktického stromu priradeného formule φ tak, že podformula ψ je zostrojená pomocou ľubovolného podstromu syntaktického stromu.

(c) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá (nepravdivá); formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(d) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(e) *F*ormula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \models \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2.

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ p \end{array}}{\neg q}, \quad \frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ q \end{array}}{\neg p}, \quad \frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \end{array}}{\text{nemá}}, \quad \frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \end{array}}{\text{nemá}}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ p \end{array}}{\text{nemá}}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ q \end{array}}{p}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \end{array}}{\neg q}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \end{array}}{\text{nemá}}$$

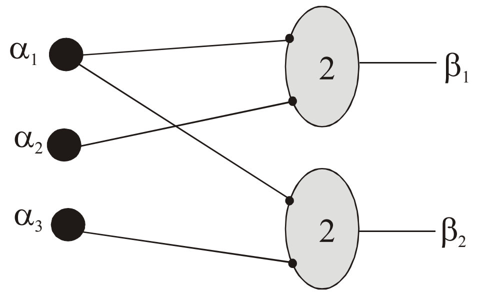
Príklad 3.

Riešenie.

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2\left(\bar{\alpha}_3 + \alpha_3\right) = \alpha_1\alpha_2$$

$$\beta_2 = \alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\left(\bar{\alpha}_2 + \alpha_2\right)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3$$



Príklad 4.
Riešenie. Ak $T=\{C_1,C_2,\ldots,C_n\}$, potom vlastnosť $T\vDash\alpha$ je ekvivaletná platnosti implikácie

$$C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n\Rightarrow\alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n\wedge\neg\alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T\vDash\alpha$.

$$(x\Rightarrow y)\wedge(y\Rightarrow(z\vee\neg x))\wedge(\neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z))\wedge(t\Rightarrow x)\wedge\neg z$$

Prepíšeme ju do tvaru NKF

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge\underbrace{(t\vee(t\wedge\neg z))}_{t\wedge(t\vee\neg z)}\wedge(\neg t\vee x)\wedge\neg z$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idenpotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge(t\vee\neg z)\wedge t\wedge(\neg t\vee x)\wedge\neg z$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg x\vee y$	$\neg y\vee z\vee\neg x$	$t\vee\neg z$	t	$\neg z$	$\neg t\vee x$	7	8				
z		1	0		0		$\neg y\vee t\vee\neg x$	$\neg y\vee\neg x$	9	10		
y	1						0	0	$\neg x\vee t$	$\neg x$	11	
x						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	$\square$

Záver: Platí tautologické vyplývanie

$$\{x\Rightarrow y, y\Rightarrow(z\vee\neg x),\neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z), t\Rightarrow x\}\vDash z$$

Príklad 5.
(a) Vtáky sa množia vajciami.
$\forall x(Vtak(x)\Rightarrow Mnoz\_vaj(x))$
$\exists x(Vtak(x)\wedge\neg Mnoz\_vaj(x))$
Existuje taký vták, ktorý sa nemnoží vajciami.

(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
$\forall x(sport(x)\Rightarrow fyz\_kond(x))$
$\exists x(sport(x)\wedge\neg fyz\_kond(x))$
Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
$\forall x\left(neparne(x) \Rightarrow prime(x)\right)$
$\exists x\left(neparne(x) \wedge \neg prime(x)\right)$
Niektoré nepárne čísla nie sú prvočísla.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
$\forall x\left(navst\_UK(x) \Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$
$\exists x\left(navst\_UK(x) \wedge \neg hovori\_angl(x)\right)$
Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Existuje dym bez ohňa.
$\exists x\left(dym(x) \wedge \neg ohen(x)\right)$
$\forall x\left(dym(x) \Rightarrow ohen(x)\right)$
Každý dym je s ohňom.

Príklad 6.

(a) $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \left(\forall x\, \neg P(x)\right)$,
Pomocou formule z príkladu 7.2 $\left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right) \equiv \forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

$$\forall x\,\underbrace{\left(P(x) \wedge \neg P(x)\right)}_{0} \equiv 0$$

(b) $\forall x\left(P(x) \vee \neg P(x)\right)$, táto formula je automaticky pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\left(P(x) \vee \neg P(x)\right) \equiv 1$ pre každé indivíduum *x*.

(c) $\left(\exists x\, P(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x)\right)$, navrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „*x* je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\, P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo *x*, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\, P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia $(1 \Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „*x* je nezáporné číslo“).

(d) $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \left(\exists x\, \neg P(x)\right)$, túto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora $\left(\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)\right)$ previesť do ekvivalentného tvaru $\left(\forall x\, P(x)\right) \wedge \neg\left(\forall x\, P(x)\right)$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p/\forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 7.
Riešenie.
(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru
$\varphi_1 : \forall x\left(st(x) \Rightarrow mat(x)\right) \Rightarrow \left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$
$\varphi_2 : \forall x\left(mat(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(mat(t) \Rightarrow \neg analf(t)\right)$
použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
dostaneme
$\left(st(t) \Rightarrow \neg analf(t)\right)$ pre ľubovolné indivíduum *t*, čiže platí aj
$\forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right)$
Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“

(b)
každý študent je kominár
niektorí komnári sú maturanti

?

$\varphi_1 : \forall x\left(st(x) \Rightarrow kom(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow kom(a)\right)$
$\varphi_2 : \exists x\left(kom(x) \wedge mat(x)\right) \Rightarrow \left(kom(b) \wedge mat(b)\right)$
Z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

?
$\varphi_1 : \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$
$\varphi_2 : \forall x\left(fyz(x) \Rightarrow \neg chem(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \Rightarrow \neg chem(a)\right)$
Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *fyz*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg chem(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar
$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg chem(x)$
alebo, „niektorí astronómovia nie sú chemici“.

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti nie sú včelári

?
$\varphi_1 : \forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a)\right) \equiv \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$
$\varphi_2 : \exists x\left(analf(x) \wedge \neg vce(x)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge \neg vce(a)\right)$

Z druhej premisy vyplýva, že $analf(a)$ a $\neg vce(a)$. Použitím $analf(a)$ s prvou premisou dostaneme $\neg st(a)$, spojením s $\neg vce(a)$ dostaneme

$$\neg vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x \left(\neg vce(x) \wedge \neg st(x) \right)$$

Záver zo sylogizmu je: „existuje taká osoba, ktorá nie je včelárom a ani študentom“. Poznamenajme, že tento výsledok nemá v klasickej teórie sylogizmov analog, t.j. uvádza sa bez riešenia. Za platné budeme považovať obidve riešenia.

Príklad 8.

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

1.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$q \Rightarrow r$	(aktivácie 2. pomocného predpokladu)
3.	p	(aktivácia 3. pomocného predpokladu)
4.	q	(modus ponens na 1. a 3.)
5.	r	(modus ponens na 2. a 4.)
6.	$p \Rightarrow r$	(deaktivácia 3.)
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(deaktivácia 2.)
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(deaktivácia 1.)

(b) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$

1.	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$		(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$p \vee q$		(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	p	q	(vymenovanie možných prípadov disjunkcie)
4.	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	(eliminácia konjunkcie aplikovaná na 1.)
5.	r	r	(E⇒ (modus ponens) na 3. a 4.)
6.	$p \vee q \Rightarrow r$	$p \vee q \Rightarrow r$	(deaktivácia 2. pomoc. predpokladu na 5.)
7.	$((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$		(deaktivácia 1. pomoc. predpokladu na 6.)

Príklad 9.

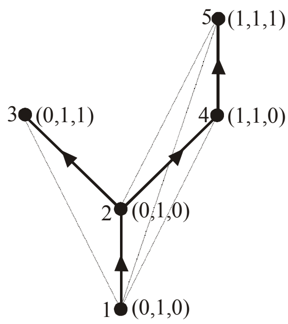
(a) $\neg\psi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg\varphi)$

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg\varphi$	$\neg\psi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	½	1	½	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
½	0	½	1	½	1	1
½	½	½	½	1	½	1
½	1	½	0	1	½	1
1	0	0	1	0	1	1
1	½	0	½	½	½	1
1	1	0	0	1	0	1

(b) $\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \varphi)$,

φ	ψ	$\neg\psi$	$\neg\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	0	1
0	½	½	½	1
0	1	0	1	1
½	0	1	½	1
½	½	½	1	1
½	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	½	½	1	1
1	1	0	1	1

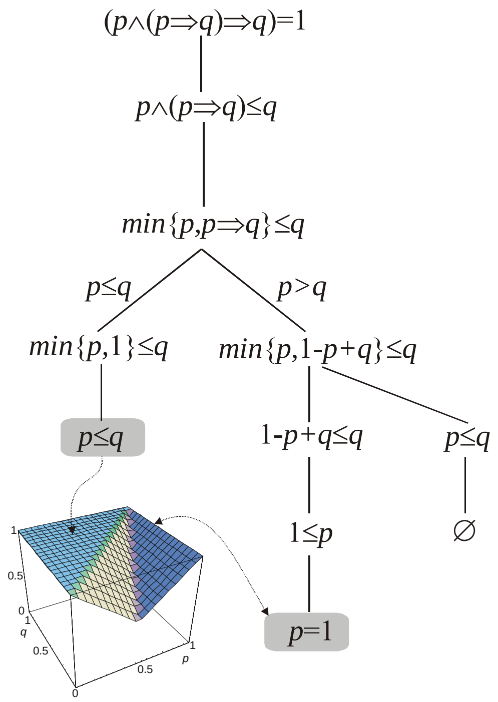
Príklad 10.



	1	2	3	4	5
p	0	0	0	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0	0	1	0	1
$p\wedge q$	0	0	0	1	1
$\neg r$	0	0	0	0	0
$\neg q$	0	0	0	0	0
$\neg q\vee\neg r$	0	0	0	0	0
$\neg (p\wedge q)$	0	0	1	0	0
$(\neg (p\wedge q)) \vee (\neg r\vee\neg q)$	0	0	1	0	0
$p\Rightarrow(\neg (p\wedge q)) \vee (\neg r\vee\neg q)$	0	0	1	0	0

Príklad 11.
Riešenie

11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q$.



Študovaná formula je pravdivá pre $p \le q$ a pre p=1.

11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \Rightarrow \left(\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi\right)$.

1. $v\left(w_1, \Diamond\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \Rightarrow \left(\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi\right)\right) = 0$
2. $v\left(w_1, \Diamond\left(\varphi \Rightarrow \psi\right)\right) = 1$
3. $v\left(w_1, \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi\right) = 0$
4. $v\left(w_2, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 1 \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)$
5. $v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 1$
6. $v\left(w_1, \Diamond\psi\right) = 0$
7. $v\left(w_3, \varphi\right) = 1 \quad \left(\forall w_3 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)$
8. $v\left(w_4, \psi\right) = 0 \quad \left(\forall w_4 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)$
9. $\left(v\left(w_2, \varphi\right) = 0\right) \vee \left(v\left(w_2, \psi\right) = 1\right) \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)$

Riadky 7, 8 a 9 produkujú kontradikciu, z tejto skutočnosti vyplýva, že formula je tautológia (pre každú interpretáciu je pravdivá).