B
3. kontrolná písomka (14. 12. 2004)

Príklad 1.
(a) Dokážte, že formula je tautológia.
$\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$
Pomôcka: používajte formulu $\exists x R(x)\Rightarrow R(a)$.

1. $\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\Rightarrow P(a)\wedge Q(a)$
2. $P(a)\Rightarrow\exists x P(x)$
3. $Q(a)\Rightarrow\exists x Q(x)$
4. $P(a)\wedge Q(a)\Rightarrow\left(\exists x P(x)\right)\wedge\left(\exists x Q(x)\right)$
5. $\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)\wedge\left(\exists x\, Q(x)\right)$

(b) Rozhodnite, či formule sú tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná
$\forall x\left(P(x)\wedge\neg P(x)\right)$
pre každé x formula $P(x)\wedge\neg P(x)$ je nepravda, čiže aj $\forall x\left(P(x)\wedge\neg P(x)\right)$ je kontradikcia.

$\left(\forall x\, P(x)\right)\Rightarrow P(a)\Rightarrow\left(\exists x\, P(x)\right)$
ak niečo platí pre každé x, potom to musí platiť pre niektoré x.

Príklad 2.
Dokážte pomocou rezolventy, že formula je tautológia
$\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\exists x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$

Negáciu formuly prepíšeme do prenexnej Skolemovej formy
$\neg\left(\neg\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\vee\exists x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\right)$
$\left(\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\neg\exists x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\right)$
$\left(\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\forall x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right)\right)$
$\left(\forall x\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\forall y\left(P(y)\wedge\neg Q(y)\right)\right)$
$\forall x\forall y\left(\left(\neg P(x)\vee Q(x)\right)\wedge\left(P(y)\wedge\neg Q(y)\right)\right)$
$\left\{\left\{\neg P(x),Q(x)\right\},\left\{P(y)\right\},\left\{\neg Q(y)\right\}\right\}$
Ľahko sa dokáže, že po dvoch rezolventách dostaneme $\{\square\}$, t. j. formula je tautológia.

Príklad 3.
Nájdite riešenie sylogizmov (ak existuje, uveďte aj nutné podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý študent je včelár
niektorí včelári sú analfabeti
?

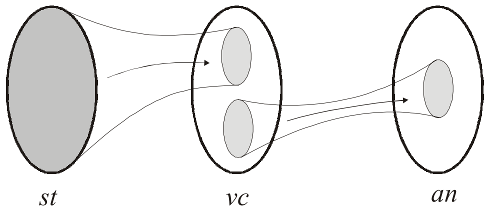
$\forall x\left(st(x) \Rightarrow vc(x)\right)$

$\exists x\left(vc(x) \wedge an(x)\right)$

$st(a) \Rightarrow vc(a)$

$vc(a) \wedge an(a)$

nie je čo dokazovať
riešenie: neexistuje



(b) každý včelár nie je analfabet
niektorí študenti sú včelári
?

$\forall x\left(vc(x) \Rightarrow \neg an(x)\right)$

$\exists x\left(st(x) \wedge vc(x)\right)$

$st(a) \wedge vc(a)$

$st(a)$

$vc(a)$

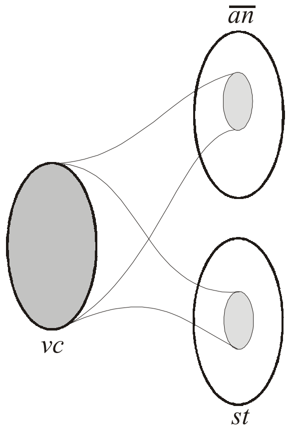
$vc(a) \Rightarrow \neg an(a)$

$\neg an(a)$

$st(a) \wedge \neg an(a)$

$\exists x\left(st(x) \wedge \neg an(x)\right)$

riešenie: niektorí študenti nie sú analfabeti.



(c) niektorí študenti nie sú chemici
každý kominár je chemik
?

$\exists x\left(st(x) \wedge \neg ch(x)\right)$

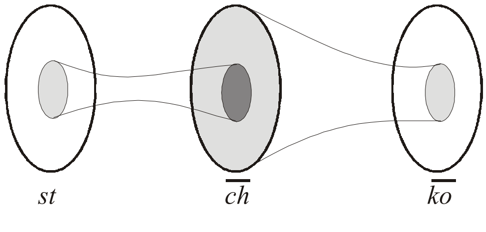
$\forall x\left(ko(x) \Rightarrow ch(x)\right)$

$st(a) \wedge \neg ch(a)$

$st(a)$

$\neg ch(a)$

$ko(a) \Rightarrow ch(a)$



$\neg ko(a)$

$st(a) \wedge \neg ko(a)$

$\exists x\left(st(x) \wedge \neg ko(x)\right)$

riešenie: niektorí študenti nie sú kominári

Príklad 4.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
$\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vdash \left((p \vee q) \Rightarrow r\right)$

1.	$p \vee q$	(aktivácia dodatočného predpokladu)
2.	$p \Rightarrow r$	(1. predpoklad)
3.	$q \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
4.	p (alebo q)	(z 1)
5.	r	(m.p. na 2 a 4)
6.	$p \vee q \Rightarrow r$	(deaktivácia pomocného predpokladu)

Príklad 5.
Zostrojte tabuľku pravdivostných hodnôt 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky. Pomocou tabuľky zistite, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná.
$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	½	1	½	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
½	0	½	1	½	½	1
½	½	1	½	½	1	1
½	1	1	0	½	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	½	½	½	0	½	1
1	1	1	0	0	1	1

Formula je tautológia.

Príklad 6.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula intuicionistickej logiky je tautológia.
$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

1. $v\left(w_1, \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)\right) = 0$
2. $v\left(w_2, \neg(p \wedge q)\right) = 1$
3. $v\left(w_1, \neg p \vee \neg q\right) = 0$

4. $v\left(w_2, p \wedge q\right) = 0$

5. $v\left(w_1, \neg p\right) = 0$

6. $v\left(w_1, \neg q\right) = 0$

7. $v\left(w_2, p\right) = 1$

8. $v\left(w_2, q\right) = 1$

7. $\left(v\left(w_2, p\right) = 0\right) \vee \left(v\left(w_2, q\right) = 0\right)$

$$\left(v\left(w_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(w_2, q\right)=1\right) \wedge \left(\left(v\left(w_2, p\right)=0\right) \vee \left(v\left(w_2, q\right)=0\right)\right) =$$

$$\left(\left(v\left(w_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(w_2, q\right)=1\right) \wedge \left(v\left(w_2, p\right)=0\right)\right) \vee$$

$$\left(\left(v\left(w_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(w_2, q\right)=1\right) \wedge \left(v\left(w_2, q\right)=0\right)\right)$$