33
Elektromagnetické kmity a střídavé proudy

Vyžadují-li vysokonapěťová výkonová vedení opravu, nemohou je rozvodné společnosti jednoduše odpojit, protože by se propadla do tmy třeba celá města. Opravy se proto musejí provádět na vedeních pod napětím. Muž na obrázku právě vyměnil distanční rozpěrku na 500 kV vedení, což vyžaduje značnou zkušenost. Proč je vlastně napětí výkonových přenosových vedení tak vysoké? Proud tekoucí vedením je přitom vzhledem k přenášenému výkonu relativně malý. Nemohl by být větší?

33.1 NOVÁ FYZIKA — STARÁ MATEMATIKA

V této kapitole uvidíme, jak se s časem mění elektrický náboj Q v obvodu sestaveném z cívky L, kondenzátoru C a rezistoru R. Z jiného pohledu vzato budeme probírat, jak se energie přenáší tam a zpět mezi magnetickým polem cívky a elektrickým polem kondenzátoru, přičemž jí v průběhu těchto oscilací ubývá (a rezistor se zahřívá).

Kmity mechanické jsme již probírali dříve. V kap. 16 jsme viděli, jak se s časem mění výchylka x v mechanické kmitající soustavě skládající se z tělesa s hmotností m, pružiny s tuhostí k a prvku s výraznou viskozitou (např. olej) nebo s třením. Taková soustava je znázorněna na obr. 16.17. Z obrázku také vidíme, jak mechanická energie prochází periodickou změnou kinetické energie kmitajícího tělesa na potenciální energii deformované pružiny, přičemž je během kmitání postupně disipována.

Mezi těmito dvěma (idealizovanými) soustavami je analogie a také diferenciální rovnice popisující tyto procesy jsou stejné. Nemusíme tedy studovat novou matematiku a budeme věnovat plnou pozornost fyzikálnímu ději.

33.2 KVALITATIVNÍ ROZBOR KMITŮ *LC*

Ze tří obvodových prvků, rezistoru R, kondenzátoru C a cívky L, jsme dosud probrali sériové zapojení RC v čl. 28.8 a RL v čl. 31.9. Poznali jsme, že v těchto dvou typech obvodů náboj, proud a napětí narůstá a klesá s časem exponenciálně. Časový průběh růstu nebo poklesu lze charakterizovat příslušnou časovou konstantou τ_C nebo τ_L.

Nyní zkoumejme třetí možnost — sériové zapojení LC. Uvidíme, že v tomto případě náboj, proud a napětí neklesají exponenciálně s časem, ale mění se harmonicky (s dobou kmitu T a úhlovou frekvencí ω). Říkáme, že obvod *kmitá* neboli *osciluje* a příslušné změny elektrického pole kondenzátoru a magnetického pole cívky se nazývají **elektromagnetické kmity**. Části (a) až (h) na obr. 33.1 ukazují po sobě jdoucí fáze průběhu kmitů v jednoduchém kmitavém obvodu LC.

Metoda opravování vysokonapěťových vedení, zobrazená na úvodní fotografii, je patentována Scottem H. Yenzerem a vlastníkem licence je výhradně Haverfield Corporation z Miami na Floridě. Jakmile se opravář přiblíží k vedení pod napětím, elektrické pole okolo vedení způsobí, že jeho tělo získá potenciál blízký potenciálu vedení. Aby se oba potenciály vyrovnaly, připojí se opravář vodivou tyčí k vedení. Aby nebyl usmrcen elektrickým proudem, musí být izolován od všeho, co je elektricky spojeno se zemí. A aby jeho tělo bylo na konstantním potenciálu — potenciálu vedení, má oblečen vodivý oblek s kapucí a rukavicemi, které jsou spojeny pomocí vodiče s vedením.

Podle rov. (26.21) je energie uložená v elektrickém poli kondenzátoru v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\mathrm{el}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C}, \tag{33.1}$$

kde $Q(t)$ je náboj na kondenzátoru v čase t. Podle rovnice (31.53) je energie uložená v magnetickém poli cívky v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\mathrm{mg}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2}, \tag{33.2}$$

kde $I(t)$ je proud protékající cívkou v čase t.

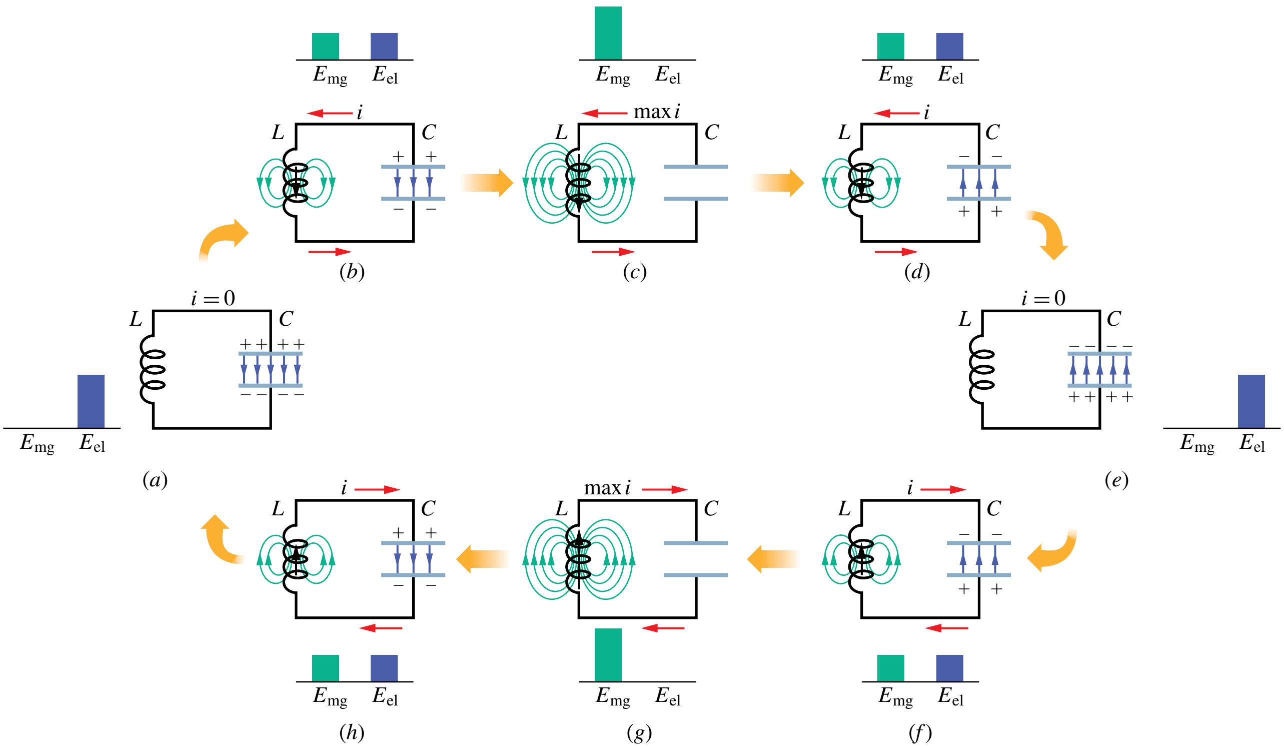
Přijmeme dále dohodu, že k vyjádření *okamžitých hodnot* elektrických veličin, které kmitají *harmonicky*, použijeme malá písmena (q, i, u, e) a pro jejich *amplitudy* velká písmena (Q, I, U, $\mathscr{E}$).

Předpokládejme, že počáteční náboj q na kondenzátoru je roven jeho amplitudě Q a počáteční proud i cívkou je nulový. Tento výchozí stav obvodu je na obr. 33.1a. Sloupcové grafy pro energii ukazují, že v tomto okamžiku při nulovém proudu v cívce a maximálním napětí na kondenzátoru je energie E_{mg} magnetického pole nulová a energie E_{el} elektrického pole je maximální.

Kondenzátor se nyní začne vybíjet přes cívku. Kladný náboj se pohybuje proti směru otáčení hodinových ručiček (obr. 33.1b), což znamená, že vznikne proud $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, který na obrázku směřuje v cívce dolů. Spolu s nábojem na kondenzátoru klesá i jeho energie. Tato energie se přeměňuje na energii magnetického pole cívky tak, jak narůstá proud i. Energie elektrického pole tedy klesá a mění se v energii pole magnetického.

Kondenzátor nakonec ztratí všechen náboj (obr. 33.1c), a tím také své elektrické pole a energii v tomto poli akumulovanou. Energie je zcela převedena do magnetického pole cívky. Protože magnetické pole má v tomto okamžiku největší hodnotu, má svou maximální hodnotu I také proud tekoucí cívkou.

Ačkoli náboj na kondenzátoru je nyní nulový, proud dále teče proti směru otáčení hodinových ručiček, neboť v důsledku elektromagnetické indukce cívka nedovolí, aby náhle zanikl. To znamená, že proud pokračuje v přenosu kladného náboje z horní elektrody kondenzátoru na jeho dolní elektrodu obvodem (obr. 33.1d). Energie nyní přechází z cívky zpět do kondenzátoru tak, jak postupně znovu narůstá elektrické pole kondenzátoru. Proud postupně během přenosu energie klesá. Když je nakonec všechna energie přenesena zpět do kondenzátoru (obr. 33.1e), proud klesne na okamžik na nulu. Situace na obr. 33.1e je stejná



Obr. 33.1 Osm stavů jedné periody kmitů v ideálním obvodu LC (bez odporu). Sloupcové grafy u každého obrázku ukazují velikost energie uložené v magnetickém a v elektrickém poli. Jsou též naznačeny indukční čáry magnetického pole cívky a elektrické siločáry v kondenzátoru. (a) Kondenzátor má maximální náboj a proud je nulový. (b) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá. (c) Kondenzátor je zcela vybit a proud je maximální. (d) Kondenzátor je nabíjen, ale s opačnou polaritou než v (a). (e) Kondenzátor má maximální náboj opačné polarity než v (a), proud je nulový. (f) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá v opačném směru než v (b). (g) Kondenzátor je zcela vybit, proud je maximální. (h) Kondenzátor je nabíjen, proud klesá.

jako původní (obr. 33.1a), s tím rozdílem, že kondenzátor je nyní nabit opačně.

Kondenzátor se potom začíná znovu vybíjet, avšak nyní proudem ve směru otáčení hodinových ručiček. Z důvodů právě uvedených vidíme, že proud vzrůstá k maximu (obr. 33.1g) a pak klesá (obr. 33.1h), až se obvod nakonec dostane do původního stavu (obr. 33.1a). Celý proces se opakuje s kmitočtem f a tedy úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$. V ideálním obvodu bez odporu neprobíhá jiná přeměna energie než mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Podle zákona zachování energie by kmity pokračovaly nekonečně dlouho. Kmity nemusejí začínat s veškerou energií v elektrickém poli — počátečním stavem může být kterýkoli jiný stav během kmitu.

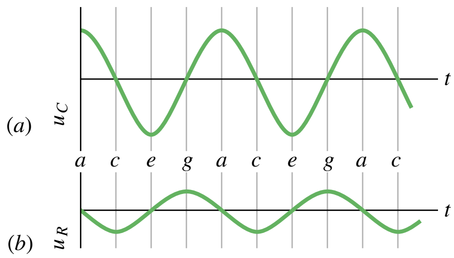
Abychom nalezli časový průběh náboje q na kondenzátoru, budeme na něm měřit voltmetrem napětí u_C. Z rov. (26.1) plyne

$$u_C = \left(\frac{1}{C}\right) q,$$

odkud můžeme vyjádřit q. Abychom změřili proud, zapojíme do série s kondenzátorem a cívkou malý rezistor R a změříme časově proměnné napětí u_R na rezistoru; to je úměrné i podle vztahu

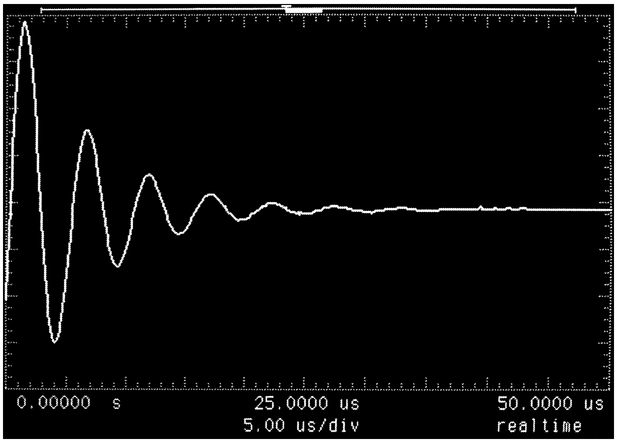
$$u_R = iR.$$

Přitom předpokládáme, že odpor R je tak malý, že jeho vliv na chování obvodu je zanedbatelný. Časový průběh u_C a u_R, a tedy také q a i je naznačen v obr. 33.2. Všechny čtyři veličiny se mění s časem harmonicky.



Obr. 33.2 (a) Napětí u_C na kondenzátoru v obvodu z obr. 33.1 jako funkce času t. Napětí u_C je úměrné náboji q na kondenzátoru. (b) Napětí u_R na malém rezistoru je úměrné proudu i v obvodu z obr. 33.1. Písmena se vztahují ke stejně označeným stavům kmitajícího obvodu z obr. 33.1.

Ve skutečném obvodu LC nebudou kmity trvat nekonečně dlouho, protože obvod má vždy jistý odpor, který odčerpá energii z elektrického a magnetického pole a rozptýlí ji (obvod se zahřeje). Vybuzené kmity postupně zaniknou, jak je vidět z obr. 33.3. Porovnejte tento obrázek s obr. 16.18, který ukazuje útlum mechanických kmitů, způsobený třením v soustavě pružina + těleso.



Obr. 33.3 Stopa na stínítku osciloskopu ukazuje útlum oscilací v obvodu RLC v důsledku disipace energie v rezistoru.

KONTROLA 1: Nabitý kondenzátor a cívka jsou spojeny do série v čase $t = 0$. Určete v násobcích periody T kmitů obvodu LC, kdy poprvé pro $t > 0$ dosáhne maximální hodnotu (a) náboj na kondenzátoru, (b) napětí na kondenzátoru s původní polaritou, (c) energie akumulovaná v elektrickém poli, (d) proud.

PŘÍKLAD 33.1

Kondenzátor o kapacitě 1,5 μF je nabit na napětí 57 V. Potom je odpojen od zdroje a připojen k cívce s indukčností 12 mH. Takto vzniklý obvod LC bude kmitat. Jaký bude největší proud v cívce? Předpokládejte, že odpor obvodu je zanedbatelný.

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování energie plyne, že maximální energie v kondenzátoru je rovna maximální energii v cívce. To podle rov. (33.1) a (33.2) znamená, že

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{LI^2}{2},$$

kde I je maximální proud a Q je maximální náboj. (Maximální proud a maximální náboj se nevyskytnou ve stejném okamžiku, ale jsou posunuty v čase o čtvrtinu periody, jak je zřejmé i z obr. 33.1 a 33.2.) Z uvedeného vztahu vypočteme I (za Q dosadíme CU) a tím dostaneme

$$I = U\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\,\mathrm{V})\sqrt{\frac{(1{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F})}{(12\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H})}} =$$
$$= 0{,}637\,\mathrm{A} \doteq 640\,\mathrm{mA}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

33.3 ELEKTRO-MECHANICKÁ ANALOGIE

Podívejme se poněkud blíže na analogii mezi kmitajícím obvodem LC z obr. 33.1 a kmitající soustavou tvořenou tělesem a pružinou. V mechanické soustavě těleso+pružina se vyskytují dva druhy energie: jednak potenciální energie stlačené nebo napnuté pružiny, jednak kinetická energie pohybujícího se tělesa. Oba druhy energie jsou popsány známými vztahy v tab. 33.1 vlevo.

Tabulka také ukazuje dva druhy energie v kmitajícím obvodu LC. Můžeme vidět analogii mezi dvojicemi: potenciální + kinetická energie mechanické soustavy a magnetická + elektrická energie obvodu LC. Rovnice pro v a i na konci tabulky pomáhají lépe pochopit tuto analogii. Říkají nám, že náboji q odpovídá výchylka x a proudu i odpovídá rychlost v (v obou rovnicích se druhá veličina získá derivací veličiny první). Tato obdoba nás vede k tomu, abychom seskupili energie do dvojic v řádcích tak, jak jsou v tabulce. Z tabulky vyplývá, že veličině $1/C$ odpovídá tuhost k a indukčnosti L odpovídá hmotnost m:

$$q \text{ odpovídá } x, \qquad 1/C \text{ odpovídá } k,$$
$$i \text{ odpovídá } v, \qquad L \text{ odpovídá } m.$$

Podle matematického popisu je tedy obvod LC analogický soustavě těleso + pružina, kondenzátor odpovídá pružině a cívka tělesu.

Tabulka 33.1 **Energie prvků kmitajících soustav**

TĚLESO + PRUŽINA		CÍVKA + KONDENZÁTOR	
PRVEK	ENERGIE	PRVEK	ENERGIE
pružina	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	kondenzátor	$E_{el} = \frac{1}{2}(1/C)q^2$
těleso	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	cívka	$E_{mg} = \frac{1}{2}Li^2$
$v = dx/dt$		$i = dq/dt$	

Z čl. 16.3 víme, že úhlová frekvence kmitů soustavy těleso + pružina při zanedbání tření je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(soustava těleso + pružina).} \qquad (33.3)$$

Uvedená analogie nás vede k tomu, abychom pro stanovení úhlové frekvence kmitů v obvodu LC (bez odporu) nahradili k veličinou $1/C$ a m veličinou L. Tím dostaneme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(obvod } LC\text{)}. \tag{33.4}$$

Tento výsledek odvodíme v následujícím článku.

33.4 KMITY LC KVANTITATIVNĚ

Nyní potvrdíme platnost rov. (33.4) pro úhlovou frekvenci kmitů LC. Současně budeme podrobněji zkoumat analogii mezi kmity obvodu LC a kmity soustavy těleso + pružina. Začneme tak, že rozšíříme naše dřívější studium kmitající soustavy těleso + pružina.

Oscilátor těleso + pružina

Kmity soustavy těleso + pružina jsme studovali v kap. 16 z hlediska přenosu energie. Tehdy jsme si však neodvodili základní rovnici, která mechanické kmity popisuje. To provedeme nyní.

Pro celkovou energii E oscilátoru těleso + pružina v libovolném okamžiku můžeme psát

$$E = E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2, \tag{33.5}$$

kde E_k je kinetická energie pohybujícího se tělesa a E_p je potenciální energie napnuté nebo stlačené pružiny. Přitom zanedbáváme tření, takže se celková energie E s časem nemění, i když se v a x mění. Platí tedy $dE/dt = 0$. Derivace rov. (33.5) podle času dává

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \\ = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0. \tag{33.6}$$

Avšak $v = dx/dt$, a tedy $dv/dt = d^2x/dt^2$. Dosazením do rov. (33.6) pak dostaneme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{(kmity tělesa na pružině)}. \tag{33.7}$$

Diferenciální rovnice (33.7) je základní diferenciální rovnicí popisující kmity v soustavě těleso + pružina při zanedbání tření. Vystupuje v ní výchylka z rovnovážné polohy x a její druhá derivace podle času.

Obecné řešení rov. (33.7), tj. funkce $x(t)$, která popisuje kmity soustavy těleso + pružina, je, jak víme z rov. (16.3),

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(výchylka)}, \tag{33.8}$$

kde X je amplituda výchylky mechanických kmitů (v kapitole 16 značená x_m), ω je úhlová frekvence kmitů a φ je počáteční fáze.

Oscilátor LC

Studujme nyní kmity v obvodu LC beze ztrát. Postupujme přitom stejně jako v případě soustavy těleso + pružina. Celková energie E, kterou má v každém okamžiku kmitající obvod LC, je

$$E = E_{mg} + E_{el} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \tag{33.9}$$

kde E_{mg} je energie magnetického pole cívky a E_{el} je energie elektrického pole kondenzátoru. Protože jsme předpokládali, že odpor obvodu je nulový, energie není disipována, takže E zůstává v čase konstantní. Jinak řečeno, změna dE/dt je rovna nule. To vede ke vztahu:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = \\ = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{33.10}$$

Avšak $i = dq/dt$ a $di/dt = d^2q/dt^2$. Dosazením do rov. (33.10) dostaneme

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(kmity obvodu } LC\text{)}, \tag{33.11}$$

což je *diferenciální rovnice*, která popisuje kmity v obvodu LC beze ztrát. Při porovnání rov. (33.11) a (33.7) vidíme, že mají stejný matematický tvar a liší se pouze jiným pojmenováním proměnných a konstant.

Protože tyto diferenciální rovnice jsou matematicky stejné, jejich řešení musí být také stejná. Protože q odpovídá x, můžeme napsat obecné řešení rov. (33.11) pro q analogicky s rov. (33.8):

$$q = Q\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh náboje)}, \tag{33.12}$$

kde Q je amplituda proměnného náboje, ω je úhlová frekvence elektromagnetických kmitů a φ je počáteční fáze.

První derivace rov. (33.12) podle času dává proud tekoucí v obvodu LC:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh proudu)}. \tag{33.13}$$

Amplituda I tohoto harmonicky proměnného proudu je

$$I = \omega Q, \tag{33.14}$$

takže rov. (33.13) můžeme přepsat do tvaru

$$i = -I\sin(\omega t + \varphi). \tag{33.15}$$

Vztah (33.12) je řešením rov. (33.11). Ověříme to tak, že ho dosadíme spolu s jeho druhou derivací podle času do rov. (33.11). První derivací rov. (33.12) je rov. (33.13). Druhou derivací je

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 Q\cos(\omega t + \varphi).$$

Dosazením za q a za d^2q/dt^2 do rov. (33.11) dostaneme

$$-L\omega^2 Q\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} Q\cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Má-li toto platit v libovolném okamžiku t, musí být $-L\omega^2 Q + Q/C = 0$, odkud

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za této podmínky je tedy rov. (33.12) opravdu řešením rov. (33.11). Všimněme si, že tento výraz pro ω je stejný jako vztah (33.4), získaný na základě elektromechanické analogie.

Amplitudu Q i počáteční fázi φ určíme z počátečních podmínek. Jestliže v čase $t = 0$ neteče obvodem proud, tj. $i(0) = 0$, musí být $\varphi = 0$ a okamžitý náboj $q(0)$ musí nabývat své maximální hodnoty Q. Těmto počátečním podmínkám odpovídá obr. 33.1a.

Energii uloženou v elektrickém poli obvodu LC v libovolném čase t dostaneme z rov. (33.1) a (33.12):

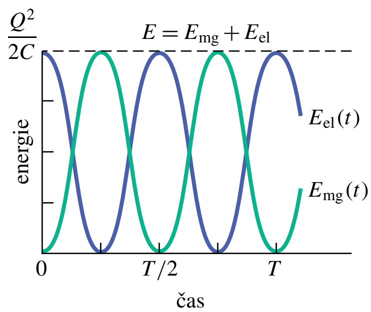
$$E_{el} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \varphi), \qquad (33.16)$$

energii uloženou v magnetickém poli dostaneme z rovnic (33.2) a (33.13):

$$E_{mg} = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2 Q^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Když za ω dosadíme z rov. (33.4), dostaneme

$$E_{mg} = \frac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega t + \varphi). \qquad (33.17)$$



Obr. 33.4 Energie elektrického a magnetického pole v kmitavém obvodu LC (obr. 33.1) vyjádřená jako funkce času. Povšimněme si, že úhrnná energie zůstává konstantní. T je perioda kmitů.

Obr. 33.4 znázorňuje časové průběhy $E_{el}(t)$ a $E_{mg}(t)$ pro případ $\varphi = 0$. Poznamenejme, že:

1. Maximální hodnota jak E_{el}, tak i E_{mg} je rovna $Q^2/(2C)$.
2. Součet E_{el} a E_{mg} je roven v každém okamžiku $Q^2/(2C)$.
3. V okamžiku, kdy je energie E_{el} maximální, je E_{mg} minimální (nulová) a naopak.

KONTROLA 2: Kondenzátor v obvodu LC má maximální napětí 17 V a maximální energii 160 µJ. Stanovte (a) emn na cívce a (b) energii akumulovanou v magnetickém poli v okamžiku, kdy je na kondenzátoru napětí 5 V a energie 10 µJ.

PŘÍKLAD 33.2

(a) Vyjádřeme pomocí maximálního náboje Q náboj q na kondenzátoru kmitavého obvodu LC v okamžiku, kdy je energie rozdělena stejným dílem mezi elektrické a magnetické pole. Předpokládejme, že $L = 12$ mH a $C = 1{,}7$ µF.

ŘEŠENÍ: Podle zadání je $E_{el} = \frac{1}{2}E_{el,max}$. Okamžitá a maximální energie akumulovaná v kondenzátoru jsou

$$E_{el} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{el,max} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Zadání vyžaduje, aby

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C},$$

a odtud

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}Q \doteq 0{,}707Q. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Kdy je tato podmínka splněna, má-li kondenzátor největší náboj v čase $t = 0$?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.12) vyjadřuje, jak se q mění s časem. Protože v čase $t = 0$ je $q = Q$, je počáteční fáze φ rovna nule. Dosazením $\varphi = 0$ a $q = 0{,}707Q$ do rov. (33.12) dostaneme

$$0{,}707Q = Q\cos\omega t,$$

odkud

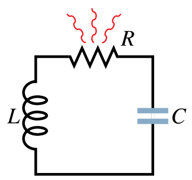
$$\omega t = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}.$$

To odpovídá jedné osmině kmitu. Dosadíme-li za ω z rovnice (33.4), dostaneme hledaný čas

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12\cdot10^{-3}\ \mathrm{H})(1{,}7\cdot10^{-6}\ \mathrm{F})}}{4} = 1{,}12\cdot10^{-4}\ \mathrm{s} \doteq 110\ \mu\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

33.5 TLUMENÉ KMITY V OBVODU *RLC*

Obvod skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru se nazývá **obvod** RLC. Probereme zde pouze **sériový obvod** RLC, který je na obr. 33.5. Je-li přítomen rezistor R, potom celková *elektromagnetická energie* E obvodu (součet energie elektrického a magnetického pole) již nezůstává konstantní, ale klesá s časem tak, jak je energie postupně disipována v rezistoru. Proto také postupně klesá amplituda kmitů náboje, proudu a napětí; říkáme, že kmity jsou **tlumené**. Jak uvidíme, jsou kmity v obvodu RLC tlumeny stejně jako je tomu v tlumené soustavě těleso + pružina (čl. 16.8).



Obr. 33.5 Sériový obvod RLC. Protože proud v obvodu prochází (střídavě) rezistorem, dochází k disipaci elektromagnetické energie a kmity se tlumí (zmenšuje se jejich amplituda).

Abychom tyto kmity analyzovali, napíšeme rovnici pro celkovou energii E elektromagnetického pole tohoto obvodu, a to pro libovolný okamžik. Tato energie se ukládá jen v cívce a kondenzátoru podle rov. (33.9):

$$E = E_{\mathrm{mg}} + E_{\mathrm{el}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (33.18)$$

Nyní však již celková energie není konstantní, ale klesá tak, jak je postupně disipována. Rychlost této disipace (tj. ztrátový výkon) je podle rov. (27.22)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -Ri^2, \qquad (33.19)$$

kde znaménko minus říká, že E s časem klesá. Derivací rov. (33.18) podle času a dosazením výsledku do rovnice (33.19) dostaneme

$$Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -i^2R.$$

Dosadíme-li $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ za i a $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$ za $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, dostaneme po vykrácení i

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{obvod } RLC), \qquad (33.20)$$

což je diferenciální rovnice popisující tlumené kmity v sériovém obvodu RLC.

Tato rovnice má řešení

$$q = Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \qquad (33.22)$$

a $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je stejné jako v případě netlumených kmitů. Rov. (33.21) vyjadřuje, jak se v čase mění náboj Q na kondenzátoru v tlumeném obvodu RLC. Tato rovnice je elektromagnetickým protějškem rov. (16.40), která určuje časový průběh výchylky tlumeného mechanického oscilátoru těleso + pružina.

Rov. (33.21) popisuje kmity (kosinový člen) s *exponenciálně klesající amplitudou* $Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}$. Úhlová frekvence ω' tlumených kmitů je tedy vždy menší než úhlová frekvence ω netlumených kmitů; pokud je odpor R dostatečně malý, lze ω' nahradit hodnotou ω.

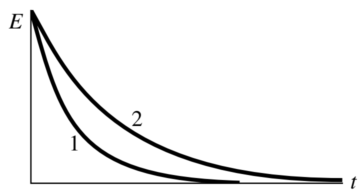
Vyjádřeme dále celkovou elektromagnetickou energii E obvodu jako funkci času. Jeden způsob, jak toho dosáhnout, je sledovat energii elektrického pole v kondenzátoru; ta je dána rov. (33.1) $E_{\mathrm{el}} = q^2/(2C)$. Dosadíme-li do ní rov. (33.21), dostaneme

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi)\right)^2}{2C} = \\ = \frac{Q^2}{2C}\mathrm{e}^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t + \varphi). \qquad (33.23)$$

Rov. (33.23) ukazuje, že energie elektrického pole se periodicky mění v čase se čtvercem kosinu fáze a že amplituda těchto kmitů klesá exponenciálně s časem. Energie magnetického pole cívky se s časem mění poněkud složitěji. Lze odvodit, že střední hodnota celkové energie v obvodu RLC klesá s časem exponenciálně podle vztahu

$$E = \frac{Q^2}{2C}\mathrm{e}^{-Rt/L}. \qquad (33.24)$$

KONTROLA 3: (a) Obrázek ukazuje časovou závislost střední hodnoty celkové elektromagnetické energie E ve dvou obvodech RLC se stejnými kondenzátory a cívkami. Která křivka odpovídá obvodu s větším R? (b) Pokud by měly oba obvody stejnou hodnotu R i C, která křivka by odpovídala obvodu s větší hodnotou L?



PŘÍKLAD 33.3

Sériový obvod RLC má indukčnost $L = 12\,\mathrm{mH}$, kapacitu $C = 1{,}6\,\mu\mathrm{F}$ a odpor $R = 1{,}5\,\Omega$.

(a) Za jakou dobu t poklesne amplituda kmitů náboje v obvodu na 50 % své původní hodnoty?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.21) vyjadřuje exponenciální útlum při kmitání náboje. Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % původní hodnoty, jestliže

$$Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)} = 0{,}50Q.$$

Zkrátíme Q a logaritmujeme obě strany; tím dostaneme

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}50.$$

Řešením této rovnice vzhledem k t a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}50 = -\frac{2(12\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H})\ln 0{,}50}{(1{,}5\,\Omega)} = \\ = 0{,}011\,1\,\mathrm{s} \doteq 11\,\mathrm{ms}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Kolik kmitů proběhne během této doby?

ŘEŠENÍ: Protože doba kmitu je $T = 2\pi/\omega$ a úhlová frekvence je $\omega = 1/\sqrt{LC}$, dostaneme $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Každý kmit trvá jednu periodu, takže v časovém intervalu $\Delta t = 0{,}011\,1\,\mathrm{s}$ je počet kmitů roven

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \\ = \frac{(0{,}011\,1\,\mathrm{s})}{2\pi\sqrt{(12\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H})(1{,}6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F})}} \doteq 13. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % přibližně během 13 kmitů. Toto tlumení je výrazně menší než tlumení z obr. 33.3, kde klesala amplituda o něco více než 50 % během jednoho kmitu.

33.6 STŘÍDAVÉ PROUDY

Kmity v obvodu RLC nebudou tlumeny, jestliže vhodný vnější zdroj elektromotorického napětí dodá dostatek energie k pokrytí tepelných ztrát na rezistoru R. Elektrické obvody v domácnostech, úřadech a továrnách obsahující bezpočet obvodů RLC, které odebírají tuto energii od místních rozvodných podniků. Ve většině zemí se energie dodává formou střídavého emn, resp. **střídavého proudu***. Tyto kmitající emn a proudy se mění v čase harmonicky s kmitočtem 50 Hz, což znamená, že změní 100krát za sekundu svůj směr. (V některých zemích, např. v USA, se používá kmitočet 60 Hz; směr se za sekundu změní 120krát.)

Všimněme si jedné pozoruhodnosti střídavého proudu. Viděli jsme, že driftová rychlost elektronů (čl. 27.3) ve vodičích obvykle nepřesahuje $4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jestliže nyní změníme směr proudu každou setinu sekundy, posune se elektron asi o $4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ za půl periody. Tato vzdálenost představuje posun elektronu asi o 10 atomů, načež je elektron přinucen obrátit směr. Můžeme se tedy ptát, jak se může elektron při střídavém proudu vůbec dostat ke spotřebiči.

Odpověď spočívá v tom, že vodivé elektrony se nemusí „někam dostat“. Řekneme-li, že proud ve vodiči je jeden ampér, míníme tím, že nosiče náboje, které projdou průřezem vodiče, jím přenesou náboj jednoho coulombu za sekundu. Velikost rychlosti, kterou náboje procházejí rovinou průřezu, není přitom podstatná. Tentýž proud může odpovídat mnoha nábojům pohybujícím se pomalu, nebo několika nábojům pohybujícím se velmi rychle. Dále si uvědomme, že fyzikální popud, který mění směr pohybu elektronů a který má původ ve střídavém emn dodávaném z generátoru v elektrárně, se šíří jako elektromagnetická vlna podél tohoto vodiče s rychlostí blízkou rychlosti světla. Všechny elektrony, bez ohledu na jejich polohu, dostávají „pokyny pro změnu směru“ prakticky ve stejném okamžiku. Je také na místě poznamenat, že v mnoha zařízeních (jako jsou žárovky a tepelné spotřebiče) není směr pohybu elektronů důležitý. Elektrony totiž takovým zařízením předávají energii srážkami s jeho atomy, tedy dějem, kde směr pohybu náboje není podstatný.

Základní výhoda střídavých proudů je tato: *s časovou změnou proudů se mění i magnetické pole obklopující vodiče*. To dává možnost využít Faradayův zákon elektromagnetické indukce, což mezi mnoha jinými důsledky znamená, že můžeme libovolně zvýšit nebo snížit velikost střídavého napětí použitím transformátoru, jak uvidíme v této kapitole později. Navíc je střídavý proud vhodnější k použití v rotačních strojích, jako jsou generátory a motory, než (v čase stálý) stejnosměrný proud.

Obr. 33.6 ukazuje jednoduchý model alternátoru — generátoru střídavého napětí. Přinutíme-li vodivou smyčku točit se ve vnějším magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, indukuje se v ní emn s harmonickým průběhem (kap. 31, úloha 25):

$$e = \mathscr{E}\sin\omega_{\mathrm{b}}t. \qquad (33.25)$$

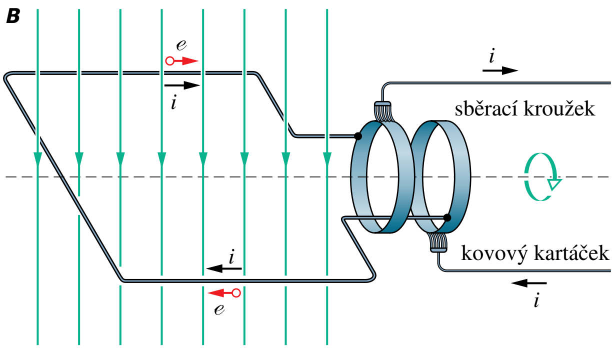
Úhlová frekvence emn, označená ω_{b}, je rovna úhlové rychlosti, se kterou se smyčka otáčí v magnetickém poli. *Fáze* emn je $\omega_{\mathrm{b}}t$ a *amplituda* emn je $\mathscr{E}$. Je-li otáčející se smyčka

* Proud v čase neproměnný, např. z baterií a akumulátorů, se nazývá **stejnosměrný**.

částí uzavřeného obvodu, budí v něm toto emn **harmonický*** proud se stejnou úhlovou frekvencí ω_b, která se nazývá **budicí úhlová frekvence**. Proud můžeme vyjádřit vztahem

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \tag{33.26}$$

kde I je amplituda buzeného proudu. Zvolíme-li znaménko před φ záporné, pak $\varphi > 0$ přímo udává fázové zpoždění proudu i vůči e; proud i totiž nemusí být obecně ve fázi s e. Jak uvidíme, závisí fázový posun φ na vlastnostech obvodu, který je ke generátoru připojen. (Je-li $\varphi < 0$, jde ovšem o předbíhání, nikoli zpoždění.)



Obr. 33.6 Princip generátoru střídavého proudu: vodivá smyčka se otáčí ve vnějším magnetickém poli. Střídavé emn indukované ve smyčce se z ní vyvede pomocí sběracích kroužků připojených ke smyčce. Po nich kloužou vodivé kartáčky spojené s vnějším obvodem. (V praxi se místo smyčky používá cívky s mnoha závity, aby indukované emn bylo větší.)

33.7 NUCENÉ KMITY

Viděli jsme, že náboj, napětí a proud, jakmile vzniknou, kmitají jak v netlumeném obvodu LC, tak v slabě tlumeném obvodu RLC (s dostatečně malým R) s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Takovým kmitům se říká **vlastní kmity** (bez vnějšího emn) a úhlová frekvence ω se nazývá **vlastní úhlová frekvence** obvodu.

Je-li k obvodu RLC připojeno vnější střídavé emn s frekvencí ω_b, potom mluvíme o **nucených** nebo též **buzených kmitech**. Dá se dokázat, že tyto kmity mají po odeznění přechodových jevů rovněž frekvenci ω_b, a to bez ohledu na hodnotu ω.

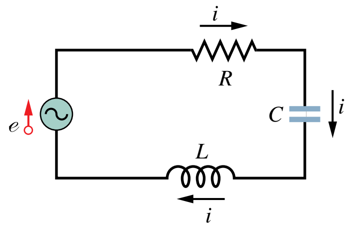
> Nucené kmity (náboje, proudu, napětí) vždy převezmou po celkem krátké době budicí úhlovou frekvenci ω_b, ať už byla vlastní úhlová frekvence ω jakákoli.

* Je to běžný název pro sinusový a kosinusový průběh s libovolnou počáteční fází.

Jak uvidíme v čl. 33.9, závisejí amplitudy kmitů značně na tom, jak jsou navzájem blízké velikosti ω_b a ω. Jsou-li obě úhlové frekvence stejné, nastane **rezonance**, kdy amplituda proudu I v obvodu je největší.

33.8 TŘI JEDNODUCHÉ OBVODY

V dalších článcích připojíme vnější zdroj střídavého emn k sériovému obvodu RLC tak jako na obr. 33.7. Potom vyjádříme amplitudu I a počáteční fázi φ harmonicky kmitajícího proudu pomocí amplitudy emn $\mathscr{E}$ a úhlové frekvence ω_b vnějšího zdroje emn. Nejprve však prostudujeme tři jednodušší obvody, z nichž každý má kromě vnějšího zdroje emn pouze jeden obvodový prvek: R, L, nebo C. Začneme s rezistorem (čistě **odporová zátěž**).



Obr. 33.7 Sériový obvod skládající se z generátoru, rezistoru, kondenzátoru a cívky; generátor je znázorněn kroužkem se sinusoidou. Je zdrojem střídavého emn, které v obvodu vyvolá střídavý proud. Na obrázku je naznačen směr emn a proudu v jednom okamžiku.

Odporová zátěž

Obr. 33.8a ukazuje obvod s rezistorem o odporu R připojeným ke generátoru harmonického emn. Pro smyčku (jak víme z čl. 28.3) platí

$$e - u_R = 0.$$

Po dosazení z rov. (33.25) dostaneme

$$u_R = \mathscr{E} \sin \omega_b t.$$

Napětí na rezistoru se tedy mění harmonicky s úhlovou frekvencí rovnou ω_b a amplitudou, která se rovná amplitudě přiloženého emn. Můžeme proto psát

$$u_R = U_R \sin \omega_b t. \tag{33.27}$$

Z definice odporu ($R = u/i$) můžeme vyjádřit proud rezistorem vztahem

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin \omega_b t. \tag{33.28}$$

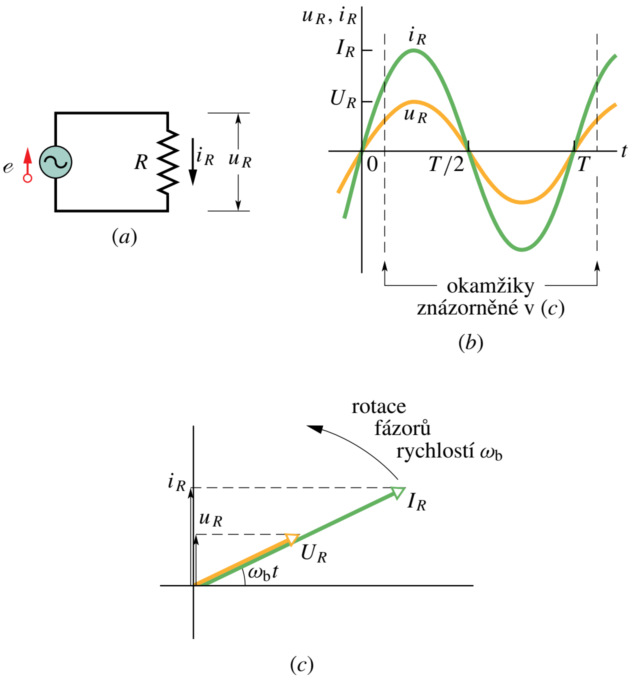
Podle rov. (33.26) můžeme tento proud zapsat ve tvaru

$$i_R = I_R \sin(\omega_b t - \varphi), \tag{33.29}$$

kde I_R je amplituda proudu i_R v rezistoru. Porovnáním rov. (33.28) a (33.29) vidíme, že pro čistě odporovou zátěž je $\varphi = 0°$ a že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

$$U_R = I_R R \quad \text{(rezistor)}. \tag{33.30}$$

V obvodech střídavého proudu odporovou zátěž R zpravidla nazýváme **rezistance**. Ačkoli jsme nalezli tento vztah pro konkrétní obvod odpovídající obr. 33.8a, lze ho použít na libovolný rezistor v obvodu střídavého proudu.



Obr. 33.8 (a) Rezistor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a uskuteční jeden kmit za jednu periodu T. (c) Fázorový diagram ukazuje tutéž situaci jako obr. (b).

Porovnáním rov. (33.27) a (33.28) vidíme, že obě časové závislosti $u_R(t)$ a $i_R(t)$ jsou dány týmž výrazem $\sin \omega_b t$, a tedy rozdíl jejich fází je $\varphi = 0°$. Říkáme, že obě veličiny jsou **ve fázi**, což znamená, že jejich maxima (a minima) nastanou ve stejných okamžicích. Obr. 33.8b se závislostmi $u_R(t)$ a $i_R(t)$ tuto skutečnost dokresluje. Poznamenejme, že $u_R(t)$ a $i_R(t)$ nejsou tlumené proto, že generátor dodává do obvodu energii a nahrazuje energii disipovanou v rezistoru.

Časově proměnné veličiny $u_R(t)$ a $i_R(t)$ můžeme znázornit též geometricky pomocí **fázorů**. Připomeňme si z čl. 17.10, že fázory jsou vektory, které rotují kolem počátku souřadnic. Fázory představující napětí na rezistoru a proud, který jím prochází, jsou nakresleny v jistém okamžiku t na obr. 33.8c. Fázory mají následující vlastnosti:

Úhlová rychlost: Fázory rotují (při popisu střídavých proudů) proti směru otáčení hodinových ručiček okolo počátku s úhlovou rychlostí, která je rovna úhlové frekvenci ω_b napětí u_R i proudu i_R.

Délka: Délka fázoru představuje amplitudu střídavé veličiny, tedy U_R pro napětí a I_R pro proud.

Projekce: Projekce fázoru do svislé osy udává okamžitou hodnotu střídavé veličiny, tedy napětí u_R a proud i_R v čase t. Když je $\omega_b t = 90°$, směřuje fázor svisle vzhůru a jeho projekce je právě rovna jeho délce.

Úhel pootočení: S časem proměnný úhel pootočení fázoru měříme od vodorovné osy (obr. 33.8c). Je roven fázi střídavé veličiny v čase t. Na obr. 33.8c jsou napětí a proud ve fázi. Proto mají i jejich fázory tutéž fázi $\omega_b t$, tj. stejný úhel pootočení v obrázku a rotují tedy společně. Na obr. 33.9c jsou fázory navzájem posunuty o 90°.

Kapacitní zátěž

Obr. 33.9a ukazuje obvod sestavený z kondenzátoru a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, kterým jsme dospěli k rov. (33.27), zjistíme, že napětí na kondenzátoru je

$$u_C = U_C \sin \omega_b t, \tag{33.31}$$

kde U_C je amplituda napětí na kondenzátoru. Z definice kapacity plyne

$$q_C = C u_C = C U_C \sin \omega_b t. \tag{33.32}$$

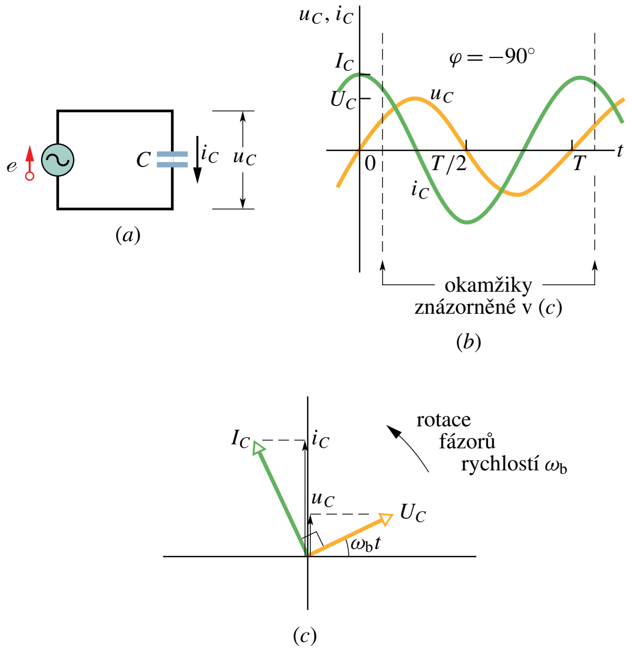
Více než náboj nás však zajímá proud. Derivováním rov. (33.32) dostaneme

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_b C U_C \cos \omega_b t. \tag{33.33}$$

Provedeme dále dvě úpravy rov. (33.33). Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **kapacitní reaktanci** X_C kondenzátoru, definovanou vztahem

$$X_C = \frac{1}{\omega_b C} \quad \text{(kapacitní reaktance)}. \tag{33.34}$$

Její hodnota závisí nejen na kapacitě C, ale i na úhlové frekvenci ω_b. Vidíme, že jednotkou pro X_C je ohm, stejně



Obr. 33.9 (a) Kondenzátor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud předbíhá před napětím o 90°. (c) Fázorový diagram ukazuje tutéž situaci.

jako pro odpor R. Za druhé: v rov. (33.33) nahradíme funkci $\cos\omega_b t$ funkcí sinus fázově posunutou:

$$\cos\omega_b t = \sin(\omega_b t + 90°).$$

Po těchto dvou úpravách zapíšeme rov. (33.33) ve tvaru

$$i_C = \left(\frac{U_C}{X_C}\right)\sin(\omega_b t + 90°). \qquad (33.35)$$

Proud i_C však můžeme vyjádřit také podle rov. (32.26):

$$i_C = I_C \sin(\omega_b t - \varphi), \qquad (33.36)$$

kde I_C je amplituda veličiny i_C. Porovnáním rov. (33.35) a (33.36) vidíme, že při čistě kapacitní zátěži je $\varphi = -90°$. Vidíme též, že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

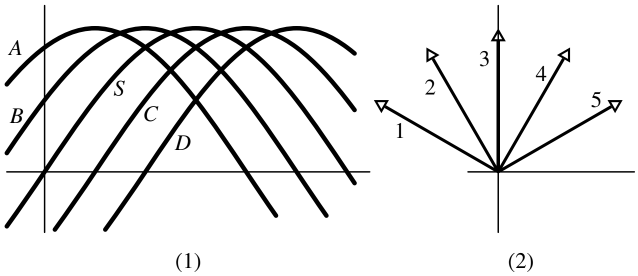
$$U_C = I_C X_C \quad \text{(kondenzátor).} \qquad (33.37)$$

Ačkoli jsme nalezli tento vztah pro konkrétní obvod na obr. 33.9a, lze ho použít na libovolný kondenzátor v jakémkoli obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.31) a (33.35) nebo pohledem na obr. 33.9b zjistíme, že veličiny u_C a i_C jsou posunuty o úhel 90°, tedy o čtvrtinu periody. Navíc vidíme, že i_C *předbíhá* u_C, což znamená, že na obr. 33.9a dosahuje i_C maxima o čtvrtinu periody *před* u_C.

Tento vztah mezi i_C a u_C je znázorněn na fázorovém diagramu v obr. 33.9c: fázor I_C předbíhá před fázorem U_C o úhel 90°.

KONTROLA 4: Obrázek (1) ukazuje sinusovou funkci $S(t) = \sin\omega_b t$ a čtyři další sinusoidy $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, každou tvaru $\sin(\omega_b t - \varphi)$. (a) Seřaďte sestupně uvedené čtyři křivky podle hodnoty φ. (b) Která z křivek odpovídá jednotlivým fázorům z obrázku (2)? (c) Která křivka časově předbíhá před ostatními?



Induktivní zátěž

Obr. 33.10a ukazuje obvod sestavený z cívky a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, který nás přivedl k rov. (33.27) a (33.31), dostaneme, že napětí na cívce je

$$u_L = U_L \sin\omega_b t, \qquad (33.38)$$

kde U_L je amplituda napětí u_L. Z rov. (31.40) můžeme vyjádřit napětí na cívce L, ve které se mění proud s rychlostí $\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$:

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}. \qquad (33.39)$$

Z rov. (33.38) a (33.39) dostaneme

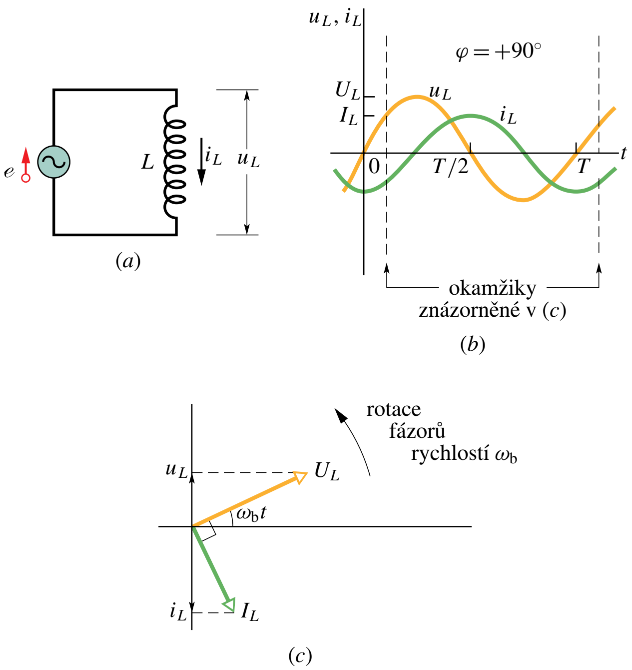
$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{U_L}{L}\sin\omega_b t. \qquad (33.40)$$

Více než časová derivace proudu nás však zajímá samotný proud. Ten dostaneme integrací rov. (33.40):

$$i_L = \int \mathrm{d}i_L = \frac{U_L}{L}\int \sin\omega_b t\,\mathrm{d}t = $$
$$= -\left(\frac{U_L}{\omega_b L}\right)\cos\omega_b t. \qquad (33.41)$$

Provedeme dále dvě úpravy této rovnice. Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **induktivní reaktanci** X_L cívky vztahem

$$X_L = \omega_b L \quad \text{(induktivní reaktance).} \qquad (33.42)$$



Obr. 33.10 (a) Cívka je připojena ke zdroji harmonického emn. (b) Proud je zpožděn za napětím o 90°. (c) Fázorový diagram ukazuje totéž.

Její hodnota závisí nejen na indukčnosti, ale i na úhlové frekvenci ω_b. Opět vidíme, že jednotkou X_L je ohm, stejně jako pro X_C a R.

Za druhé: zaměníme funkci $-\cos \omega_b t$ v rov. (33.41) funkcí sinus fázově posunutou:

$$-\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t - 90°).$$

Po těchto úpravách zapíšeme rov. (33.41) ve tvaru

$$i_L = \frac{U_L}{X_L} \sin(\omega_b t - 90°). \tag{33.43}$$

Proud i_L však můžeme vyjádřit také podle rov. (33.26):

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi), \tag{33.44}$$

kde I_L je amplituda proudu i_L cívkou. Porovnáním rovnice (33.43) a (33.44) vidíme, že pro čistě induktivní zátěž je $\varphi = +90°$. Také vidíme, že mezi amplitudou napětí a amplitudou proudu platí vztah

$$U_L = I_L X_L \quad \text{(cívka)}. \tag{33.45}$$

Ačkoli jsme tento vztah nalezli pro konkrétní obvod z obr. 33.10a, lze ho použít pro jakoukoli cívku v obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.38) a (33.43) nebo pohledem na obr. 33.10b shledáme, že fáze veličin i_L a u_L jsou navzájem posunuty o 90°. V tomto případě je však i_L *zpožděn* za u_L. To znamená, že sledujeme-li průběh proudu i_L a napětí u_L v obvodu z obr. 33.10a, zjistíme, že i_L dosáhne svého maxima o čtvrtinu periody *později než* u_L.

Z fázorového diagramu v obr. 33.10c je to také zřejmé. Fázor I_L má fázové zpoždění oproti fázoru U_L o úhel 90°. Přesvědčte se, že obr. 33.10c znázorňuje situaci popsanou rov. (33.38) a (33.43).

RADY A NÁMĚTY

Bod 33.1: *Předbíhání a zpožďování v obvodech se střídavými proudy*

Tab. 33.2 uvádí přehled vztahů mezi proudem i a napětím u pro každý ze tří typů uvažovaných obvodových prvků. Přiloží-li se na ně napětí, je proud ve fázi s napětím na rezistoru, proud předbíhá před napětím na kondenzátoru a je zpožděn za napětím na cívce.

Fázi φ i fázový posun $\Delta\varphi$ vyjadřujeme obvykle v obloukové míře v radiánech nebo ve stupních. Někdy je však názornější vyjádření pomocí času $t = \varphi/\omega$, resp. $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$. Říkáme: „Proud i napětí nabývají maxima současně“, „Proud předbíhá před napětím“ apod.

PŘÍKLAD 33.4

(a) V obr. 33.9a je $C = 15{,}0\,\mu\text{F}$, $\mathscr{E} = U_C = 36{,}0\,\text{V}$ a kmitočet budicího napětí je $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_C?

ŘEŠENÍ: Hledanou amplitudu dostaneme z rov. (33.37) (tj. $U_C = I_C X_C$), vypočteme-li nejprve kapacitní reaktanci X_C. Z rov. (33.34), kde $\omega_b = 2\pi f_b$, plyne

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_b C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,\text{Hz})(15{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{F})} = \\ = 177\,\Omega.$$

Potom z rov. (33.37)

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{(36{,}0\,\text{V})}{(177\,\Omega)} = 0{,}203\,\text{A}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Nechť v obr. 33.10a je $L = 230\,\text{mH}$, $\mathscr{E} = U_L = 36{,}0\,\text{V}$ a $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_L?

ŘEŠENÍ: Amplitudu můžeme získat z rov. (33.45) ($I_L = U_L/X_L$) tak, že nejprve vypočteme induktivní reaktanci X_L. Z rov. (33.42), kde položíme $\omega_b = 2\pi f_b$, dostaneme

$$X_L = 2\pi f_b L = 2\pi(60{,}0\,\text{Hz})(230\cdot 10^{-3}\,\text{H}) = 86{,}7\,\Omega.$$

Tabulka 33.2 **Vztahy mezi amplitudou a fází pro střídavé proudy a napětí**

Obvodový prvek	Symbol	Rezistance nebo reaktance*	Fáze proudu	Fázový posun φ	Vztah mezi amplitudami
Rezistor	R	R	ve fázi s u_R	0°	$U_R = I_R R$
Kondenzátor	C	$X_C = 1/(\omega_b C)$	předbíhá u_C o 90°	−90°	$U_C = I_C X_C$
Cívka	L	$X_L = \omega_b L$	zpožděna za u_L o 90°	+90°	$U_L = I_L X_L$

* Někdy se pro kapacitní reaktanci užívá název **kapacitance** a pro induktivní reaktanci název **induktance**.

Potom z rov. (33.45)

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = \frac{(36{,}0\,\mathrm{V})}{(86{,}7\,\Omega)} = 0{,}415\,\mathrm{A}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Napište výraz pro časově proměnný proud i_L v obvodu podle (b).

ŘEŠENÍ: Rov. (33.44) je obecným řešením pro i_L. Pro vypočtený proud $I_L = 0{,}415$ A a pro

$$\omega_b = 2\pi f_b = 120\pi\,\mathrm{s}^{-1}$$

dostaneme při $\varphi = 90° = \pi/2$ rad pro tento čistě induktivní obvod

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi) = = (0{,}415\,\mathrm{A}) \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: Jestliže zvýšíme budicí kmitočet f_b v obvodu (a) podle obr. 33.9a, (b) podle obr. 33.10a, amplituda proudu I v obvodu vzroste, klesne, nebo zůstane stejná?

33.9 SÉRIOVÝ OBVOD RLC

Nyní jsme připraveni vyšetřit situaci, kdy připojíme zdroj harmonického emn

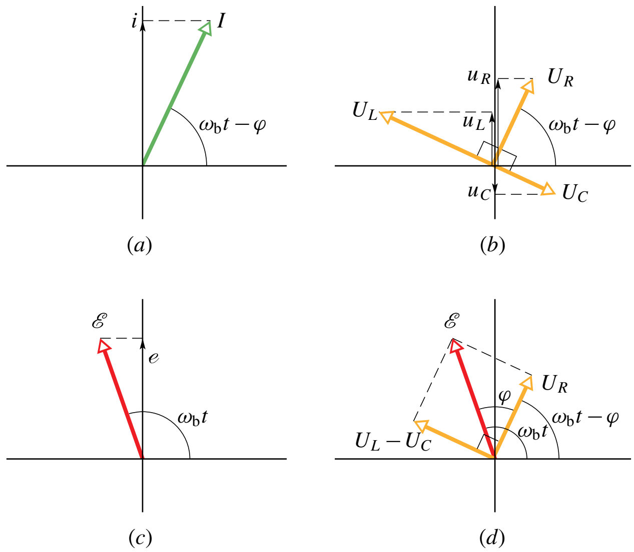
$$e = \mathscr{E} \sin \omega_b t \quad \text{(přiložené emn)} \tag{33.46}$$

k *sériovému* obvodu RLC podle obr. 33.7. Protože R, L a C jsou zapojeny v sérii, protéká tentýž proud

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi) \tag{33.47}$$

všemi třemi prvky. Chceme nalézt amplitudu I proudu a fázový posun φ proudu i vůči e.

Řešení se zjednoduší použitím fázorových diagramů. Začneme s obr. 33.11a, který ukazuje fázor představující proud z rov. (33.47) v libovolném čase t. Délka fázoru je amplituda I, projekce fázoru na svislou osu je okamžitý proud i v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $(\omega_b t - \varphi)$ proudu v čase t.



Obr. 33.11 (a) Fázor harmonického proudu v buzeném obvodu RLC na obr. 33.7 v čase t. V obrázku je vyznačena amplituda I, okamžitá hodnota i a fáze $(\omega_b t - \varphi)$. (b) Fázory napětí na cívce, rezistoru a kondenzátoru, vztažené k fázoru proudu v (a). (c) Fázor harmonického emn, které budí proud podle (a). (d) Fázor emn je roven vektorovému součtu tří fázorů napětí podle (b). Fázory U_L a U_C jsou sečteny do výsledného fázoru $(U_L - U_C)$.

Obr. 33.11b ukazuje fázory napětí na R, L a C ve stejném okamžiku t. Každý fázor je vztažen k fázoru proudu I z obr. 33.11a podle pravidel uvedených v tab. 33.2:

Rezistor: Napětí a proud jsou ve fázi, takže fázor napětí U_R má stejný směr jako fázor I.
Kondenzátor: Proud předbíhá napětí o 90°, takže fázor napětí U_C je zpožděn o 90° za fázorem I.
Cívka: Proud je zpožděn za napětím o 90°, takže naopak fázor napětí U_L předbíhá o 90° před fázorem I.

Obr. 33.11b také ukazuje okamžité hodnoty napětí u_R, u_C a u_L na prvcích R, C a L v čase t. Tato napětí jsou projekce odpovídajících fázorů na svislou osu.

Obr. 33.11c ukazuje fázor představující přiložené emn z rov. (33.46). Délka fázoru je amplituda $\mathscr{E}$, projekce fázoru na svislou osu je okamžitá hodnota emn v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $\omega_b t$ emn v čase t.

Smyčkové pravidlo říká, že v libovolném okamžiku je součet napětí u_R, u_C a u_L roven přiloženému emn e:

$$e = u_R + u_C + u_L. \tag{33.48}$$

V libovolném okamžiku t je projekce emn v obr. 33.11c tedy rovna součtu projekcí u_R, u_C a u_L v obr. 33.11b. Protože fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí, platí tato rovnice v každém okamžiku. To znamená, že fázor $\mathscr{E}$ v obr. 33.11c musí být roven vektorovému součtu tří fázorů napětí U_R, U_C a U_L v obr. 33.11b.

Uvedené vektorové skládání fázorů můžeme zjednodušit nejprve využitím té skutečnosti, že fázory U_C a U_L mají opačné směry. Lze je proto nahradit jediným fázorem $U_L - U_C$, jak je ukázáno v obr. 33.11d. Vektorový součet všech tří napěťových fázorů z obr. 33.11b nalezneme jako výslednici dvou fázorů U_R a $(U_L - U_C)$ v obr. 33.11d. Tento výsledek je roven fázoru $\mathscr{E}$, jak je naznačeno.

Oba trojúhelníky v obr. 33.11d jsou pravoúhlé. Použitím Pythagorovy věty dostaneme vztah

$$\mathscr{E}^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2. \tag{33.49}$$

Z tab. 33.2 dosadíme za amplitudy napětí na jednotlivých prvcích, takže

$$\mathscr{E}^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \tag{33.50}$$

a z toho po úpravě dostaneme

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \tag{33.51}$$

Jmenovatel v rov. (33.51) má význam celkového odporu sériového obvodu RLC a nazývá se **impedance** obvodu pro budicí úhlovou frekvenci ω_b:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(definice impedance).} \tag{33.52}$$

Rov. (33.51) potom můžeme psát ve tvaru

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z}. \tag{33.53}$$

Dosadíme-li za X_C a X_L z rov. (33.34) a (33.42), můžeme rov. (33.51) zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad \text{(amplituda proudu).} \tag{33.54}$$

Tím jsme dosáhli poloviny našeho záměru: odvodili jsme výraz pro amplitudu I proudu. Hodnota I závisí na rozdílu $(\omega_b L - 1/\omega_b C)$ v rov. (33.54) neboli na rozdílu $X_L - X_C$ v rov. (33.51). Nezáleží však na tom, která z obou veličin je větší, neboť počítáme druhou mocninu jejich rozdílu.

V tomto článku jsme se zabývali **ustáleným harmonickým proudem**. Ten se vyskytuje v obvodu až po určité době od připojení zdroje emn. Ihned po připojení obvodu k emn jím protéká po krátkou dobu **přechodný proud**. Doba jeho trvání (dříve, než nastane ustálený stav) je určena časovými konstantami $\tau_L = L/R$ a $\tau_C = RC$; ty jsou úměrné době, potřebné pro „plné zapojení" induktivních a kapacitních prvků. Přechodný proud může být velký a může například zničit elektromotor při rozběhu, nemá-li vinutí přiměřeně navržené.

Fázový posun

Ještě potřebujeme stanovit hodnotu fázového posunu φ. Z pravoúhlého trojúhelníku fázorů v obr. 33.11d a podle údajů tab. 33.2 můžeme psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}, \tag{33.55}$$

což dává

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(fázový posun).} \tag{33.56}$$

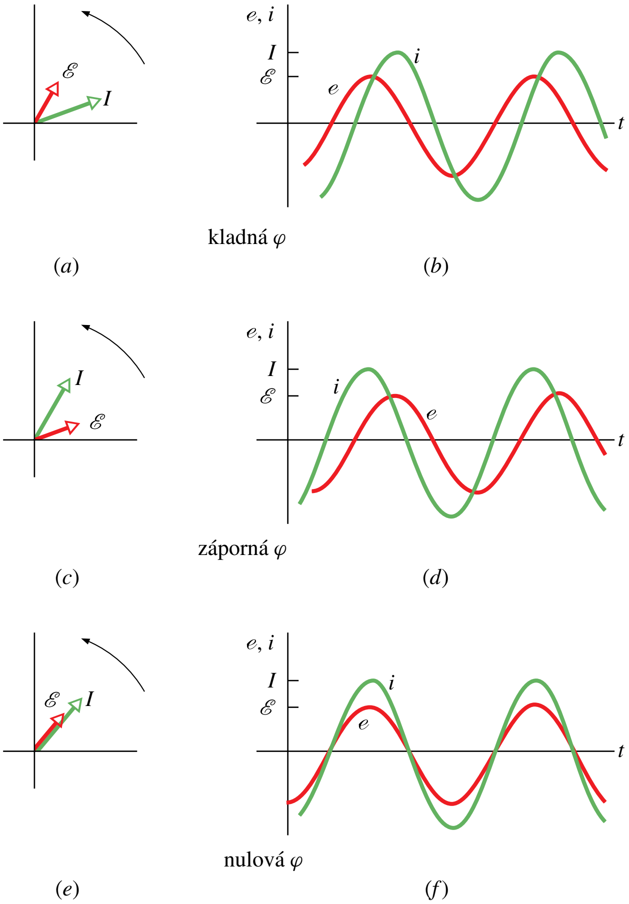
Znaménko rozdílu $(X_L - X_C)$ nemělo vliv na *amplitudu* proudu i. Z rov. (33.56) však vidíme, že toto znaménko určuje *fázový posun* proudu vůči napětí. Jsou tři možnosti:

Je-li $X_L > X_C$, obvod má **induktivní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun φ pro takový obvod kladný, což znamená, že fázor $\mathscr{E}$ rotuje *před* fázorem I (obr. 33.12a). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12b.

Je-li $X_C > X_L$, obvod má **kapacitní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun pro takový obvod záporný, což znamená, že fázor $\mathscr{E}$ rotuje *za* fázorem I (obr. 33.12c). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12d.

Je-li $X_C = X_L$, obvod je **v rezonanci**; tento termín vysvětlíme dále. Rov. (33.56) říká, že v takovém obvodu je $\varphi = 0°$, což znamená, že fázory $\mathscr{E}$ a I rotují společně (na téže vektorové přímce) (obr. 33.12e). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12f.

Jako ilustraci uvažujme dva krajní případy obvodů: V *čistě induktivním obvodu* podle obr. 33.10a, kde je reaktance X_L nenulová a $X_C = R = 0$, rov. (33.56) dává



Obr. 33.12 Fázorové diagramy a časový průběh harmonických emn a proudů pro buzený obvod RLC na obr. 33.7. Pro (a, b) je fázový posun φ kladný, pro (c, d) je záporný a pro (e, f) je nulový.

$\varphi = +90^\circ$ (nejvyšší hodnota φ) v souladu s obr. 33.10c. V *čistě kapacitním obvodu* podle obr. 33.9a, kde je reaktance X_C nenulová a $X_L = R = 0$, rov. (33.56) dává $\varphi = -90^\circ$ (nejnižší hodnota φ) v souladu s obr. 33.9c.

Rezonance

Rov. (33.54) udává amplitudu proudu I v obvodu RLC jako funkci budicí úhlové frekvence ω_b vnějšího harmonického zdroje emn. Pro zadaný odpor R je tato amplituda největší, jestliže je veličina $(\omega_b L - 1/(\omega_b C))$ ve jmenovateli nulová, tedy jestliže

$$\omega_b L = \frac{1}{\omega_b C},$$

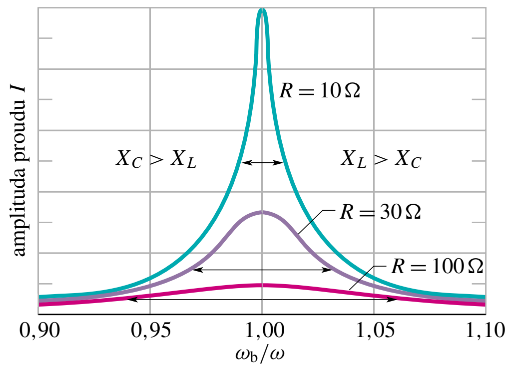
odkud

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(maximum } I\text{)}. \qquad (33.57)$$

Tato frekvence, kterou nazýváme **rezonanční frekvence** kmitavého sériového obvodu RLC, je tedy rovna vlastní úhlové frekvenci (netlumených) kmitů v obvodu LC. To znamená, že v obvodu RLC nastane **rezonance** a amplituda I proudu dosáhne maxima, je-li

$$\omega_b = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(rezonanční frekvence).} \qquad (33.58)$$

Rezonanční frekvence je určena hodnotami L a C. Co se stane, když měníme R? Obr. 33.13 ukazuje tři **rezonanční křivky** proudu pro harmonicky buzené kmity ve třech sériových obvodech RLC, které se liší pouze hodnotou R. Každá křivka dosahuje maxima amplitudy proudu při rezonanční frekvenci $\omega_b = \omega$, avšak toto maximum klesá s rostoucím R. (Maximum I je vždy rovno $\mathscr{E}/R$; k důkazu postačí kombinovat rov. (33.52) a (33.53)). Také šířka křivek narůstá s rostoucím R (šířka je definována jako rozdíl kmitočtů při proudu rovném polovině maximální hodnoty I, obr. 33.13).



Obr. 33.13 *Rezonanční křivky* buzeného obvodu RLC na obr. 33.7 pro $L = 100\,\mu\text{H}$, $C = 100\,\text{pF}$ a tři hodnoty R. Amplituda I harmonického proudu závisí na tom, jak blízko je budicí úhlová frekvence ω_b k vlastní úhlové frekvenci ω. Vodorovná šipka u každé křivky udává její šířku na poloviční hodnotě maxima proudu, což je měřítkem strmosti rezonanční křivky. Nalevo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_C > X_L$ a obvod má kapacitní charakter. Napravo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_L > X_C$ a obvod má induktivní charakter.

Rezonančním křivkám z obr. 33.13 můžeme dát fyzikální význam tím, že budeme uvažovat, jak se reaktance X_L a X_C změní, zvyšujeme-li postupně budicí úhlovou frekvenci ω_b, přičemž začneme z hodnot mnohem menších, než je vlastní frekvence ω. Pro malé hodnoty ω_b je reaktance $X_L = \omega_b L$ malá a reaktance $X_C = 1/(\omega_b C)$ je velká. Obvod má tedy kapacitní charakter a převládá velká reaktance X_C, která udržuje v obvodu malý proud.

Zvyšujeme-li ω_b, reaktance X_C stále převažuje, ale klesá, zatímco X_L se zvyšuje. S poklesem X_C klesá i impedance, takže proud narůstá, jak vidíme na levé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Když rostoucí X_L a klesající X_C dosáhnou stejných hodnot, proud je největší a obvod je v rezonanci při $\omega_b = \omega$.

Zvyšujeme-li dále ω_b, převládne narůstající reaktance X_L nad klesající reaktancí X_C. Impedance tedy narůstá v důsledku zvýšení X_L a proud klesá, jak je zřejmé v pravé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Stručně shrnuto: pro úhlové frekvence menší než ω převažuje kapacitní reaktance, pro úhlové frekvence větší než ω převažuje induktivní reaktance a rezonance nastává právě pro frekvenci ω, kdy celková reaktance je nulová.

PŘÍKLAD 33.5

V obr. 33.7 je $R = 160\,\Omega$, $C = 15{,}0\,\mu\text{F}$, $L = 230\,\text{mH}$, $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$ a $\mathscr{E} = 36{,}0\,\text{V}$. (Až na R jsou hodnoty stejné jako v př. 33.4.)

(a) Jak velká je amplituda proudu I?

ŘEŠENÍ: Amplitudu proudu můžeme vypočítat z rovnice (33.53) ($I = \mathscr{E}/Z$), stanovíme-li nejprve impedanci Z obvodu z rov. (33.52). Z př. 33.4a víme, že kapacitní reaktance X_C pro kondenzátor (a tedy pro obvod) je $177\,\Omega$, a z př. 33.4b víme, že induktivní reaktance X_L cívky je $86{,}7\,\Omega$. Z rov. (33.52) dostaneme

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ &= \sqrt{(160\,\Omega)^2 + (86{,}7\,\Omega - 177\,\Omega)^2} = \\ &= 184\,\Omega. \end{aligned}$$

Potom vypočteme

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{(36{,}0\,\text{V})}{(184\,\Omega)} = 0{,}196\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký je fázový posun φ?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.56) je

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(86{,}7\,\Omega) - (177\,\Omega)}{(160\,\Omega)} = -0{,}564,$$

odtud

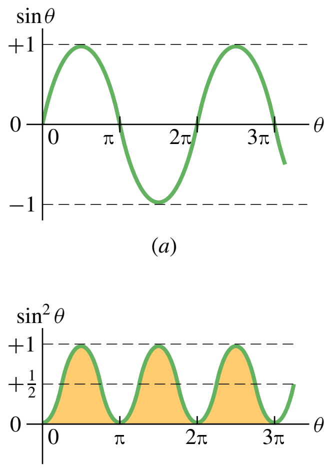
$$\varphi = -29{,}4^\circ = -0{,}513\,\text{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Fázový posun je záporný, protože výsledná zátěž má kapacitní charakter, tj. $X_C > X_L$.

KONTROLA 6: Mějme tři dvojice kapacitní a induktivní reaktance pro tři harmonicky buzené obvody RLC: (1) $50\,\Omega, 100\,\Omega$; (2) $100\,\Omega, 50\,\Omega$; (3) $50\,\Omega, 50\,\Omega$. (a) Pro každý z obvodů rozhodněte, jestli proud předbíhá, nebo je zpožděn vzhledem k připojenému emn, nebo jestli jsou obě veličiny ve fázi. (b) Je některý z obvodů v rezonanci?

33.10 VÝKON V OBVODECH SE STŘÍDAVÝM PROUDEM

Do obvodu RLC (obr. 33.7) dodává energii generátor střídavého napětí. Část energie, kterou dodává, je uložena v elektrickém poli kondenzátoru, část v magnetickém poli cívky a část se disipuje v rezistoru. V ustáleném stavu, který předpokládáme, zůstává časová střední hodnota energie uložené v kondenzátoru a v cívce konstantní. Elektromagnetická energie se přenáší jen od generátoru k rezistoru a v něm se disipuje.



Obr. 33.14 (a) Závislost $\sin\theta$ na θ. Střední hodnota za dobu jedné periody je nulová. (b) Závislost $\sin^2\theta$ na θ. Střední hodnota za dobu jedné periody je $\frac{1}{2}$.

Rychlost, se kterou je energie disipována v rezistoru, tj. *okamžitý výkon*, lze vyjádřit pomocí rov. (27.22) a (33.26) vztahem

$$P = i^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_b t - \varphi). \qquad (33.59)$$

Střední výkon disipovaný v rezistoru je časovou střední hodnotou výrazu (33.59). Ačkoli střední hodnota za dobu jedné periody je pro funkci $\sin\theta$ nulová, je střední hodnota $\sin^2\theta$ rovna $\frac{1}{2}$ (obr. 33.14). (Povšimněte si v obr. 33.14b, jak vystínované části křivky, které leží nad vodorovnou přímkou označenou $+\frac{1}{2}$, přesně vyplňují prázdná místa pod touto čárou.) Z rov. (33.59) plyne výraz pro střední výkon

$$\overline{P} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R. \qquad (33.60)$$

Veličina $I/\sqrt{2}$ se nazývá **efektivní hodnota** proudu i, a pokud nebude uvedeno jinak, použijeme pro její označení index „ef“. Tedy

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{(efektivní proud).} \qquad (33.61)$$

Rov. (33.60) můžeme přepsat do tvaru

$$\overline{P} = I_{\mathrm{ef}}^2 R \quad \text{(střední výkon).} \qquad (33.62)$$

(Připomeňme, že $U_{\mathrm{stř}} = 0$ a $I_{\mathrm{stř}} = 0$!) Rov. (33.62) se formálně podobá rov. (27.22) $P = i^2 R$. Zavedení efektivních hodnot proto umožňuje, abychom střední hodnoty ztrát ve střídavých obvodech (tj. střední výkony) v ustáleném stavu vyjádřili formálně stejným vztahem jako pro stejnosměrné proudy.

Pro střídavé proudy můžeme také definovat efektivní hodnoty napětí i emn:

$$U_{\mathrm{ef}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathscr{E}_{\mathrm{ef}} = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}} \qquad (33.63)$$
(efektivní napětí a emn).

Přístroje na měření střídavých veličin, jako např. ampérmetry a voltmetry, jsou obvykle cejchovány v efektivních hodnotách. Pokud tedy voltmetr na měření střídavých napětí ukazuje v elektrické zásuvce 230 V, je to efektivní napětí. Maximální hodnota napětí v zásuvce je pak $\sqrt{2}(230\,\mathrm{V})$, tj. 325 voltů.

Protože součinitel úměrnosti $1/\sqrt{2}$ v rov. (33.61) a (33.63) je stejný pro všechny tři proměnné, můžeme rov. (33.53) a (33.51) psát ve tvaru

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{ef}}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{ef}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (33.64)$$

Zápisu pomocí efektivních hodnot budeme dávat přednost.

Vztah $I_{\mathrm{ef}} = \mathscr{E}_{\mathrm{ef}}/Z$ můžeme použít k přepisu rovnice (33.62) do jiného užitečného ekvivalentního vyjádření. Píšeme

$$\overline{P} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{ef}}}{Z} I_{\mathrm{ef}} R = \mathscr{E}_{\mathrm{ef}} I_{\mathrm{ef}} \frac{R}{Z}. \qquad (33.65)$$

Z obr. 33.11d, tab. 33.2 a z rov. (33.53) však plyne, že podíl R/Z je roven kosinu fázového posunu φ:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{\mathscr{E}} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \qquad (33.66)$$

Rov. (33.65) pak zní

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{\mathrm{ef}} I_{\mathrm{ef}} \cos\varphi \quad \text{(střední výkon)} \qquad (33.67)$$

a činitel $\cos\varphi$ v ní se nazývá **účiník**. Protože $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, nezávisí rov. (33.67) na znaménku fázového posunu φ.

Aby se do odporové zátěže libovolného obvodu RLC přenášel maximální výkon, musí se účiník co nejvíce blížit jedné: $\cos\varphi \to 1$. To je ekvivalentní požadavku, aby

V září 1988, po 72 letech hry za denního světla, instaloval klub Chicago Cubs reflektory pro hru při umělém osvětlení. Celkem 540 halogenových svítidel po 1 500 W osvětlilo hrací plochu. Avšak první hra za umělého osvětlení byla pro bouřku přerušena. Fanoušci si to vysvětlili po svém — považovali to za znamení, aby Cubs zůstali při hře za denního světla.

11. listopadu 1965 v 17:17 h způsobilo vadné relé v energetické soustavě poblíž Niagarských vodopádů odpojení spínače na přenosovém vedení. Proud se samočinně přepojil do ostatních vedení, ta se tím však přetížila a automaticky odpojila ze soustavy. V několika minutách se zhroutila energetická soustava a do tmy se ponořila většina New Yorku, Nové Anglie a Ontaria.

fázový posun φ byl co nejblíže nule. Pokud má například obvod induktivní charakter, lze induktivní reaktanci snížit přidáním kapacity do obvodu a tak zmenšit fázový posun a zvýšit účiník v rov. (33.67). Protože spotřebiče mají mnohem častěji induktivní charakter než kapacitní, umísťují elektrárenské společnosti na místě spotřeby kondenzátory a v rozvodnách, kterými je přenášen velký výkon, různé kompenzátory účiníku.

KONTROLA 7: (a) Proud v harmonicky buzeném sériovém obvodu RLC předbíhá emn. Je nutno zvětšit, nebo zmenšit kapacitu, aby se zvýšil výkon dodávaný do rezistoru? (b) Posune tato změna rezonanční úhlovou frekvenci obvodu blíže k úhlové frekvenci emn, nebo ji naopak oddálí?

PŘÍKLAD 33.6

Sériový obvod RLC, buzený zdrojem s $\mathscr{E}_{ef} = 120\,V$ při kmitočtu $f_b = 60{,}0\,Hz$, sestává z rezistoru s $R = 200\,\Omega$, cívky s $X_L = 80{,}0\,\Omega$ a kondenzátoru s $X_C = 150\,\Omega$.

(a) Jaký je účiník $\cos\varphi$ a fázový posun φ v tomto obvodu?

ŘEŠENÍ: Účiník můžeme vypočítat z rov. (33.66) ($\cos\varphi = R/Z$) tak, že nejprve stanovíme impedanci Z. Dosazením do rov. (33.52) dostaneme

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(200\,\Omega)^2 + (80{,}0\,\Omega - 150\,\Omega)^2} = 211{,}9\,\Omega.$$

Z rov. (33.66) potom vypočteme

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{(200\,\Omega)}{(211{,}90\,\Omega)} = 0{,}944. \quad \text{(Odpověď)}$$

Odtud plyne, že

$$\varphi = 19{,}3^\circ \quad \text{nebo } \varphi = -19{,}3^\circ.$$

První řešení nevyhovuje úloze, neboť při $X_C > X_L$ má obvod kapacitní charakter a fázový posun φ proto musí být záporný. Druhé řešení úloze vyhovuje, tedy

$$\varphi = -19{,}3^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Namísto uvedeného postupu jsme mohli dosadit známé údaje do rov. (33.56) a dostali bychom správný výsledek jako jediné řešení.)

(b) S jakým středním výkonem $\overline{P}$ se elektromagnetická energie disipuje v rezistoru?

ŘEŠENÍ: $\overline{P}$ vypočteme pomocí rov. (33.67), jestliže nejprve určíme I_{ef}. Z rov. (33.64) máme

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120\,V)}{(211{,}9\,\Omega)} = 0{,}5663\,A.$$

Dosazením této a dalších hodnot do rov. (33.67) vypočteme

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\varphi = (120\,V)(0{,}5663\,A)(0{,}944) = 64{,}2\,W. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká změna ΔC kapacity je potřeba, aby $\overline{P}$ byl maximální za předpokladu, že se ostatní parametry obvodu nezmění?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.34) ($X_C = 1/(\omega_b C)$) vypočteme původní kapacitu

$$C = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,Hz)(150\,\Omega)} = 17{,}7\,\mu F.$$

Výkon $\overline{P}$ je nejvyšší, je-li obvod v rezonanci, tj. když jsou si reaktance rovny: $X_C = X_L$. Rov. (33.34) pro $X_C = X_L = 80\,\Omega$ dává kapacitu potřebnou pro rezonanci

$$C' = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,Hz)(80\,\Omega)} = 33{,}2\,\mu F.$$

Požadovaná změna kapacity tedy bude

$$\Delta C = C' - C = 33{,}2\,\mu F - 17{,}7\,\mu F = 15{,}5\,\mu F. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaký bude střední výkon $\overline{P}$ při takto změněné kapacitě?

ŘEŠENÍ: Po změně je $X_C = X_L$. Potom z rov. (33.52) a (33.66) platí $Z = R$ a $\cos\varphi = 1$. Efektivní proud dostaneme z rov. (33.64)

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120\,V)}{(200\,\Omega)} = 0{,}600\,A$$

a střední výkon je

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\varphi = (120\,V)(0{,}600\,A)(1{,}0) = 72{,}0\,W. \quad \text{(Odpověď)}$$

33.11 TRANSFORMÁTORY

Požadavky na přenos energie

Je-li střídavý zdroj zatížen pouze rezistorem, je fázový posun φ nulový, a proto účiník v rov. (33.67) je roven jedné (cos 0° = 1). Přiložené efektivní emn $\mathscr{E}$ je rovno efektivnímu napětí U na zátěži. To znamená, že při efektivním proudu I je dodaný výkon, který je ztracený v zátěži, roven

$$\overline{P} = \mathscr{E} I = IU. \tag{33.68}$$

(V tomto článku použijeme v praxi běžný zápis efektivních hodnot, kdy se index $_{\text{ef}}$ vynechává. V elektrotechnice se všechny v čase harmonicky proměnné proudy a napětí běžně popisují svými efektivními hodnotami. Udávají je i měřicí přístroje.) Z rov. (33.68) je vidět, že k dodání předepsaného výkonu máme širokou možnost volby od velkého proudu I a relativně malého napětí U k malému proudu a vysokému napětí, ale vždy tak, aby měl součin proudu a napětí požadovanou velikost.

V soustavách, které rozvádějí elektrickou energii, je žádoucí z důvodů bezpečnosti a účinného návrhu zařízení pracovat s relativně nízkými napětími na straně výrobce (v elektrárnách) a u spotřebitelů (v domácnostech a v továrnách). Nechceme samozřejmě, aby televizor nebo dětský vláček byl napájen z rozvodné sítě napětím 22 kV. Na druhé straně uvidíme, že při přenosu elektrické energie z elektrárny ke spotřebitelům jsou výhodné co nejnižší proudy (a proto co nejvyšší napětí), aby se minimalizovaly ztráty I^2R Joulovým teplem v přenosových vedeních.

Jako příklad uvažujme 735 kV vedení používané k přenosu elektrické energie z vodní elektrárny La Grande 2 v Quebeku do 1 000 km vzdáleného Montrealu. Předpokládejme, že proud je 500 A a účiník je blízký jedné. Potom podle rov. (33.67) elektrárna dodává energii se středním výkonem

$$\mathscr{E} I = (7{,}35\cdot 10^5\ \text{V})(500\ \text{A}) = 368\ \text{MW}.$$

Odpor na kilometr vedení je asi 0,220 Ω, a tedy celkový odpor při délce 1 000 km je 220 Ω. Ztrátový výkon v odporu vedení je

$$I^2R = (500\ \text{A})^2(220\ \Omega) = 55{,}0\ \text{MW},$$

což je téměř 15 % přenášeného výkonu.

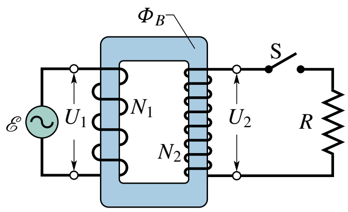
Představme si, co by se stalo, kdyby se zdvojnásobil proud a na polovinu snížilo napětí. Výkon dodávaný elektrárnou by zůstal 368 MW jako v předchozím příkladě, avšak ztrátový výkon by nyní byl

$$I^2R = (1\,000\ \text{A})^2(220\ \Omega) = 220\ \text{MW},$$

což je *téměř 60 % dodávaného výkonu*. Odtud můžeme vyvodit obecné pravidlo pro přenos energie: k přenosu je třeba použít co nejmenší proud, a tedy co nejvyšší napětí.

Transformátor

Požadavek vysoké účinnosti při přenosu energie vede k použití vysokého napětí; to je ale v základním rozporu s bezpečností práce při výrobě i spotřebě elektřiny. Potřebujeme proto zařízení, kterým bychom mohli napětí v obvodech zvýšit (pro přenos) a snížit (pro spotřebu), přičemž by součin proudu a napětí zůstal konstantní. Tímto zařízením je **transformátor**. Transformátor nemá žádné pohyblivé části, využívá jevu elektromagnetické indukce. Žádné jednoduché analogické zařízení, které by totéž umožňovalo se stejnosměrným proudem, neexistuje.



Obr. 33.15 Transformátor sestává ze dvou cívek navinutých na společném železném jádru. Generátor střídavého proudu dodává proud do levé cívky (primární vinutí). Je-li spínač S sepnut, je cívka napravo (sekundární vinutí) připojena k odporové zátěži R.

Transformátor (obr. 33.15) se skládá ze dvou cívek navinutých na železném jádru; nejsou s ním vodivě spojeny. Za provozu je primární vinutí s N_1 závity připojeno ke generátoru střídavého napětí, jehož emn je dáno rov. (33.25). Sekundární vinutí s N_2 závity je připojeno k zatěžovacímu rezistoru R pomocí spínače S. Předpokládejme nejprve, že rezistor je odpojen. Potom sekundární cívkou neprotéká žádný proud. Dále budeme předpokládat, že odpor primárního i sekundárního vinutí je zanedbatelný, stejně jako ztráty v důsledku magnetické hystereze v železném jádru. Vhodně navržené transformátory velkého výkonu mají ztráty pod 1 %, takže tyto předpoklady jsou oprávněné.

Za těchto předpokladů má primární vinutí pouze indukčnost (obr. 33.10a) a chová se jako cívka. Proto je malý primární proud (tzv. magnetizační proud I_{mag}) zpožděn za primárním napětím o 90°; účiník primárního vinutí ($\cos\varphi$ v rov. (33.67)) je nulový, a tedy generátor do transformátoru nedodává žádný výkon.

Malý střídavý primární proud vytváří v železném jádru střídavý magnetický indukční tok Φ_B, a protože je na jádru navinuto i sekundární vinutí, zasahuje tento tok i jeho závity. Z Faradayova indukčního zákona (rov. (31.6)) plyne, že emn indukované v jednom závitu $e_{\text{záv}}$ je stejné jak pro primární, tak pro sekundární vinutí. Dále napětí u_1 je rovno emn indukovanému v primárním vinutí a napětí u_2 je rovno emn na sekundárním vinutí. Můžeme proto psát

$$e_{\text{záv}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2}, \qquad (33.69)$$

odkud pro efektivní hodnoty napětí plyne

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(transformace napětí).} \qquad (33.70)$$

Transformátor, u kterého je $N_2 > N_1$, nazýváme *zvyšovací*, protože zvyšuje primární napětí U_1 na vyšší napětí U_2. Transformátor s $N_2 < N_1$ nazýváme *snižovací*.

Až dosud jsme uvažovali spínač S rozepnutý; generátor nedodával do obvodu žádnou energii. Nyní sepneme spínač S a připojíme tím k sekundárnímu vinutí odporovou zátěž R. (Obecně může zátěž obsahovat také induktivní a kapacitní prvky, ale zde budeme uvažovat pouze rezistor R.) Shledáme, že se nyní energie *přenáší* z generátoru do zátěže. Podívejme se, proč.

Po sepnutí spínače S dojde k několika jevům.

(1) Sekundárním obvodem začne protékat střídavý proud I_2, který způsobí v odporové zátěži ztráty $I_2^2R = U_2^2/R$.

(2) Sekundární proud vytvoří střídavý magnetický tok v železném jádru a ten indukuje (podle Faradayova indukčního zákona a Lenzova zákona) v primárním vinutí emn opačně orientované.

(3) Napětí U_1 na primárním vinutí se však v důsledku napětí indukovaného proudem I_2 nemůže změnit, neboť musí být stále rovno emn generátoru. Sepnutí spínače to nemůže ovlivnit.

(4) Aby generátor udržel napětí U_1, musí (navíc k magnetizačnímu proudu) primárním vinutím procházet takový střídavý proud I_1, jehož velikost a počáteční fáze jsou právě tak velké, aby emn indukované tímto proudem v primárním vinutí přesně zrušilo emn indukované v něm sekundárním proudem I_2. Protože primární proud I_1 už není posunut vůči primárnímu napětí U_1 přesně o 90° (jako tomu bylo u magnetizačního proudu), přivádí proud I_1 do primárního vinutí energii.

Nalezněme nyní vzájemný vztah mezi I_2 a I_1. Namísto analýzy detailů složitého procesu použijme pouze zákon zachování energie. Přitom stále předpokládáme, že zátěž je čistě odporová. Výkon přiváděný z generátoru na primární vinutí je I_1U_1. Výkon přenášený z primárního vinutí do sekundárního vinutí (obě cívky jsou spřaženy magnetickým polem) je I_2U_2. Protože předpokládáme, že se žádná energie během přenosu neztratí, plyne ze zákona zachování energie

$$I_1U_1 = I_2U_2.$$

Dosadíme-li za U_2 z rov. (33.70), dostaneme

$$I_2 = I_1\frac{N_1}{N_2} \quad \text{(transformace proudu).} \qquad (33.71)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že proud I_2 v sekundárním vinutí může být větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem I_1 v primárním vinutí, a to v závislosti na poměru počtu závitů N_1/N_2.

Impedanční přizpůsobení

Proud I_1 se v primární cívce objevil proto, že jsme do sekundárního obvodu zapojili zátěž R. Abychom vypočetli I_1, dosadíme $I_2 = U_2/R$ do rov. (33.71) a pak ještě za U_2 z rov. (33.70). Dostaneme tak

$$I_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 U_1. \qquad (33.72)$$

Tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru $I_1 = U_1/R'$, kde jsme zavedli „transformovaný odpor“ R' vztahem

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \qquad (33.73)$$

Na primární straně totiž protéká proud I_1 při napětí U_1, jako by byl generátor připojen k rezistoru s odporem R'. Ze strany generátoru se tedy zapojení transformátor + zátěž R jeví tak, jako by byla v primárním obvodu zapojena zátěž R'.

Rov. (33.73) ukazuje, že transformátor může plnit ještě jinou funkci. Jak již víme (úloha 24 v kap. 28), maximální přenos výkonu ze zdroje emn do odporové zátěže nastává, jsou-li odpory zdroje a zátěže stejně velké. Totéž platí pro střídavé obvody s tím rozdílem, že *impedance* generátoru (namísto pouhého odporu) musí být přizpůsobena zátěži. Často se stává — např. když chceme připojit reproduktor k zesilovači — že tato podmínka není ani zdaleka splněna, protože zesilovač má vysokou impedanci a reproduktor naopak velmi nízkou. Obě impedance můžeme přizpůsobit vzájemným propojením pomocí transformátoru s vhodným převodním poměrem závitů N_1/N_2.

PŘÍKLAD 33.7

Rozvodný transformátor je napájen primárním napětím $U_1 = 22\,\text{kV}$ a dodává energii do okolních domů při napětí $U_2 = 230\,\text{V}$ (obě veličiny jsou efektivní hodnoty). Předpokládejme ideální snižovací transformátor, čistě odporovou zátěž a účiník roven jedné.

(a) Jaký je poměr závitů transformátoru N_1/N_2?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.70) máme

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(22 \cdot 10^3\ \text{V})}{(230\ \text{V})} = 95{,}65 \doteq 96. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Střední výkon spotřebičů v domech napájených z transformátoru je 78 kW. Jaká je efektivní hodnota proudu na primárním a sekundárním vinutí transformátoru?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.67) dostaneme (při $\cos\varphi = 1$ a $U_1 = \mathscr{E}$ pro transformátor připojený ke zdroji emn)

$$I_1 = \frac{\overline{P}}{U_1} = \frac{(78 \cdot 10^3\ \text{W})}{(22 \cdot 10^3\ \text{V})} = 3{,}545\ \text{A} \doteq 3{,}5\ \text{A} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$I_2 = \frac{\overline{P}}{U_2} = \frac{(78 \cdot 10^3\ \text{W})}{(230\ \text{V})} = 339\ \text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je odporová zátěž v sekundárním obvodu?

ŘEŠENÍ: V sekundárním obvodu je

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{(230\ \text{V})}{(339\ \text{A})} = \\ = 0{,}678\ \Omega \doteq 0{,}68\ \Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaký je „transformovaný odpor“ v primárním obvodu? (Tj. jak je primární obvod zatížen?)

ŘEŠENÍ: Pro primární obvod vypočteme

$$R' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{(22 \cdot 10^3\ \text{V})}{(3{,}545\ \text{A})} = 6\,206\ \Omega \doteq 6{,}2\ \text{k}\Omega, \quad \text{(Odpověď)}$$

nebo s použitím rov. (33.73)

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R = (95{,}65)^2 (0{,}184\,6\ \Omega) = \\ = 6\,203\ \Omega = 6{,}2\ \text{k}\Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 8: Zdroj harmonického emn má menší vnitřní odpor, než je odpor připojené zátěže. Abychom zvětšili přenos výkonu z generátoru do zátěže, vložíme mezi obě zařízení transformátor k přizpůsobení impedance. Použijeme zvyšovací, nebo snižovací transformátor?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Přenos energie v obvodu LC

V kmitavém obvodu LC se energie periodicky přelévá mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Okamžitá hodnota obou forem energie je

$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\text{mg}} = \frac{Li^2}{2}, \qquad (33.1, 33.2)$$

kde $q = Q(t)$ je náboj na kondenzátoru a $i = I(t)$ je proud procházející cívkou v čase t. Celková energie $E = E_{\text{el}} + E_{\text{mg}}$ zůstává konstantní.

Kmity v obvodu LC

Zákon zachování energie vede ke vztahu

$$L\frac{\text{d}^2 q}{\text{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(kmity obvodu } LC\text{)}, \qquad (33.11)$$

což je diferenciální rovnice netlumených kmitů LC (bez odporu). Řešením rov. (33.11) je

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh náboje)}, \qquad (33.12)$$

kde Q je *amplituda náboje* (největší náboj na kondenzátoru) a úhlová frekvence ω netlumených kmitů je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(obvod } LC\text{)}. \qquad (33.4)$$

Fázový posun φ v rov. (33.12) je určen počátečními podmínkami obvodu (v čase $t = 0$).

Proud i v soustavě je

$$i(t) = \frac{\text{d}q}{\text{d}t} = -\omega Q\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh proudu)}, \qquad (33.13)$$

kde ωQ je *amplituda proudu* I.

Tlumené kmity v obvodu RLC

V reálném obvodu LC dochází vždy k disipaci energie a kmity jsou proto tlumené. K disipaci energie dochází na prvku s odporem R. Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar

$$L\frac{\text{d}^2 q}{\text{d}t^2} + R\frac{\text{d}q}{\text{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(obvod } RLC\text{)}. \qquad (33.20)$$

Její řešení je

$$q = Q\text{e}^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \qquad (33.22)$$

Střídavé proudy, vynucené kmity

V sériovém obvodu RLC můžeme vybudit *vynucené kmity* s *budicí úhlovou frekvencí* ω_{b} prostřednictvím vnějšího zdroje harmonického emn

$$e = \mathscr{E}\sin\omega_{\text{b}}t. \qquad (33.25)$$

Proud buzený v obvodu přiloženým emn je

$$i = I\sin(\omega_b t - \varphi), \qquad (33.26)$$

kde φ je fázový posun proudu i vůči e.

Rezonance

Amplituda proudu I v sériovém obvodu RLC buzeného harmonickým emn je největší ($I = \mathscr{E}/R$), jestliže je budicí úhlová frekvence ω_b rovna vlastní úhlové frekvenci ω (netlumeného) obvodu LC. Pak $X_C = X_L$, $\varphi = 0$ a proud je ve fázi s emn.

Jednotlivé prvky obvodu

Harmonické napětí na *rezistoru* má amplitudu $U_R = IR$; proud je ve fázi s napětím. Pro *kondenzátor* platí $U_C = IX_C$, kde $X_C = 1/(\omega_b C)$ je *kapacitní reaktance*; proud předbíhá před napětím o 90°. Pro *cívku* platí $U_L = IX_L$, kde $X_L = \omega_b L$ je *induktivní reaktance*; proud je zpožděn za napětím o 90°.

Sériový obvod RLC

Pro sériový obvod RLC s vnějším emn podle rov. (33.25) a s proudem podle rov. (33.26) platí

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}}$$
(amplituda proudu) (33.51, 33.54)

a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \text{(fázový posun).} \qquad (33.56)$$

Impedance Z obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \text{(impedance).} \qquad (33.52)$$

Potom rov. (33.51) můžeme zapsat vztahem $I = \mathscr{E}/Z$.

Výkon v obvodech se střídavým proudem

V sériovém obvodu RLC je *střední výkon* generátoru $\overline{P}$ roven výkonu disipovanému v rezistoru:

$$\overline{P} = I_{\text{ef}}^2 R = \mathscr{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos\varphi \qquad \text{(střední výkon).} \qquad (33.62, 33.67)$$

Index ef znamená *efektivní hodnotu*. Mezi efektivními a maximálními hodnotami platí vztahy $I_{\text{ef}} = I/\sqrt{2}$, $U_{\text{ef}} = U/\sqrt{2}$, $\mathscr{E}_{\text{ef}} = \mathscr{E}/\sqrt{2}$. Činitel $\cos\varphi$ se nazývá *účiník*.

Transformátory

Transformátor se skládá ze železného jádra, na kterém je navinuto primární vinutí s N_1 závity a sekundární vinutí s N_2 závity. Jestliže primární cívku připojujeme ke zdroji střídavého proudu, pro napětí na primárním a sekundárním vinutí platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \text{(transformace napětí),} \qquad (33.70)$$

a mezi proudy platí vztah

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{(transformace proudů).} \qquad (33.71)$$

Je-li sekundární vinutí zatíženo odporem R, je situace v obvodu stejná, jako kdyby byl generátor zatížen „transformovaným odporem" R' o velikosti

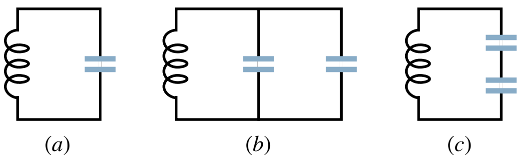
$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \qquad (33.73)$$

OTÁZKY

1. Nabitý kondenzátor a cívku vodivě spojíme v čase $t = 0$. Vyjádřete v násobcích periody T vzniklých kmitů nejkratší dobu, za jakou dosáhne maximum (a) energie v magnetickém poli E_{mg}, (b) magnetický tok v cívce, (c) $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, (d) emn v cívce.

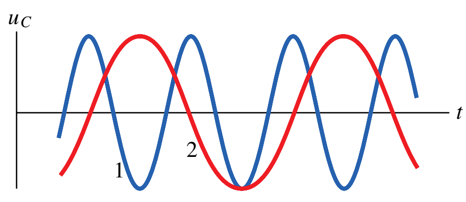
2. Jaká musí být hodnota počáteční fáze φ v rov. (33.12), aby v $t = 0$ nastal stav podle obr. 33.1 (a), (c), (e) a (g)?

3. Obr. 33.16 ukazuje tři kmitavé obvody LC se stejnými cívkami a kondenzátory. Uspořádejte obvody v sestupném pořadí podle doby, potřebné k úplnému vybití kondenzátoru během oscilací.



Obr. 33.16 Otázka 3

4. Obr. 33.17 ukazuje závislost napětí u_C na kondenzátoru pro LC obvody 1 a 2, které mají stejně velké kapacity a stejný maximální náboj Q. Stanovte, jsou-li hodnoty (a) indukčnosti L a (b) maximálního proud I v obvodu 1 větší, menší, nebo rovny hodnotám těchto veličin v obvodu 2.



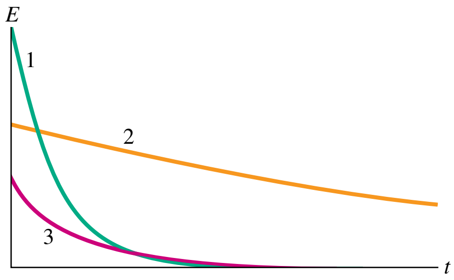
Obr. 33.17 Otázka 4

5. Náboje na kondenzátorech tří kmitavých obvodů LC se mění podle vztahů: (1) $q = 2\cos 4t$; (2) $q = 4\cos t$; (3) $q = 3\cos 4t$ (kde q je v coulombech a t v sekundách). Seřaďte obvody v sestupném pořadí (a) podle amplitudy proudu a (b) podle periody kmitů.

6. Obvod LC kmitá s maximálním nábojem Q. Co se stane (a) s amplitudou proudu I, (b) s největší hodnotou E_{mg} energie magnetického pole — zvětší se, zmenší, nebo zůstane stejná?

7. Klesá náboj na kondenzátoru v tlumeném obvodu RLC rychleji, pomaleji, nebo stejně rychle jako energie?

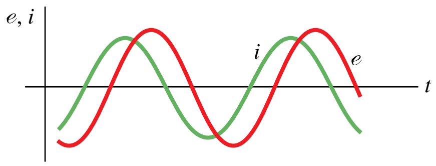
8. Obr. 33.18 ukazuje závislost střední hodnoty energie na čase pro tři tlumené kmitavé sériové obvody RLC se stejným počátečním nábojem Q_0. Seřaďte obvody sestupně podle jejich (a) kapacity C, (b) hodnoty L/R.



Obr. 33.18 Otázka 8

9. Hodnoty počátečních fází φ pro čtyři harmonicky buzené sériové obvody RLC jsou (1) $-15°$, (2) $+35°$, (3) $\pi/3$ rad, (4) $-\pi/6$ rad. (a) Ve kterém obvodu je zátěž kapacitního charakteru? (b) Ve kterém obvodu střídavé emn předbíhá proud?

10. Obr. 33.19 ukazuje proud i a budicí emn pro sériový obvod RLC. (a) Předbíhá proud emn, nebo je za ním zpožděn? (b) Má zátěž obvodu kapacitní, nebo induktivní charakter? (c) Je úhlová frekvence emn větší, nebo menší než vlastní úhlová frekvence obvodu?



Obr. 33.19 Otázky 10 a 15

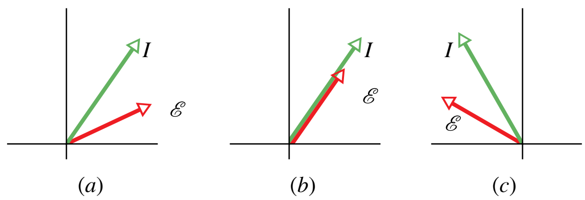
11. Následující tabulka udává pro tři sériové obvody RLC amplitudu $\mathscr{E}$ budicího emn a hodnoty R, L a C. Bez písemných výpočtů stanovte sestupně pořadí obvodů podle (a) amplitudy proudu I při rezonanci a (b) úhlové frekvence při rezonanci.

Obvod	$\mathscr{E}$/V	R/Ω	L/mH	C/μF
1	25	5,0	200	10
2	60	12	100	5,0
3	80	10	300	10

12. Předpokládejme, že pro konkrétní budicí úhlovou frekvenci předbíhá v sériovém RLC obvodu emn před proudem. Nyní poněkud snížíte budicí úhlovou frekvenci. Jak se změní (a) počáteční fáze a (b) amplituda proudu: vzroste, sníží se, nebo zůstane stejná?

13. Budicí úhlová frekvence v jistém sériovém obvodu RLC je menší než vlastní úhlová frekvence obvodu. (a) Je počáteční fáze φ kladná, záporná, nebo nulová? Předbíhá proud, nebo je zpožděn vzhledem k emn?

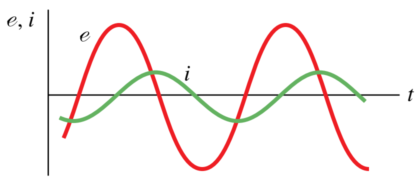
14. Obr. 33.20 ukazuje tři situace podobné stavům z obr. 33.12. Pro který stav je budicí úhlová frekvence větší, menší, nebo rovna rezonanční úhlové frekvenci?



Obr. 33.20 Otázka 14

15. Obr. 33.19 znázorňuje proud i a budicí emn e v sériovém obvodu RLC. Pokud poněkud zvýšíme (a) L, (b) C, (c) budicí úhlovou frekvenci emn, určete, (1) zda se vzhledem ke křivce emn křivka proudu posune vlevo, nebo vpravo a (2) zda se amplituda křivky proudu zvýší, nebo sníží.

16. Obr. 33.21 ukazuje časový průběh proudu i a budicího emn e pro sériový obvod RLC. (a) Je počáteční fáze kladná, nebo záporná? (b) Abychom zvýšili výkon přenášený do odporové zátěže, je třeba L zvětšit, nebo zmenšit? (c) Má se při stejném L zvětšit, nebo zmenšit hodnota C?



Obr. 33.21 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 33.2 Kvalitativní rozbor kmitů LC

1C. Jaká je kapacita kmitavého obvodu LC, má-li kondenzátor maximální náboj 1,60 μC a energii 140 μJ?

2C. Cívka s indukčností 1,50 mH, zapojená v kmitavém obvodu LC, akumuluje maximální energii 10,0 μJ. Jaký je maximální proud?

3C. V kmitavém obvodu LC je $L = 1{,}10$ mH a $C = 4{,}00$ μF. Maximální náboj na kondenzátoru je 3,00 μC. Vypočtěte maximální proud v obvodu.

4C. Kmitavý obvod LC se skládá z cívky 75,0 mH a kondenzátoru 3,60 μF. Je-li maximální náboj na kondenzátoru 2,90 μC, (a) jaká je celková energie v obvodu, (b) jaký je maximální proud?

5C. V kmitavém obvodu LC se celková energie elektrického pole v kondenzátoru změní během 1,50 μs na energii magnetického pole. (a) Jaká je perioda kmitů T? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Jak dlouho po dosažení maxima energie magnetického pole dosáhne obvod opět tohoto maxima?

6Ú. Frekvence kmitů obvodu LC je 200 kHz. V čase $t = 0$ je na elektrodě A kondenzátoru maximální kladný náboj. V jakých okamžicích $t > 0$ bude (a) elektroda A mít opět maximální kladný náboj, (b) druhá elektroda mít maximální kladný náboj, (c) cívka mít maximální energii?

ODST. 33.3 Elektro-mechanická analogie

7C. Těleso hmotnosti 0,50 kg kmitá na pružině, jejíž síla pružnosti při výchylce 2,0 mm z rovnovážné polohy má velikost 8,0 N. (a) Jaká je úhlová frekvence kmitů? (b) Jaká je perioda kmitů? (c) Jaká je kapacita odpovídajícího obvodu LC pro $L = 5{,}0$ H?

8Ú. Energie v kmitavém obvodu LC s $L = 1{,}25$ H je 5,7 μJ. Maximální náboj na kondenzátoru je 175 μC. Stanovte u odpovídajícího mechanického oscilátoru (a) hmotnost, (b) tuhost pružiny, (c) největší výchylku, (d) největší rychlost.

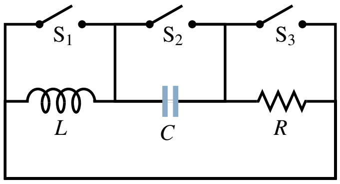
ODST. 33.4 Kmity LC kvantitativně

9C. V některých generátorech elektronické hudby se používají oscilátory LC. Jak velká indukčnost musí být použita spolu s kondenzátorem 6,7 μF k získání frekvence komorního *a* (440 Hz)?

10C. Jakou kapacitu musíte připojit k cívce 1,30 mH, abyste vytvořili oscilátor rezonující na 3,50 kHz?

11C. V obvodu LC s $L = 50$ mH a $C = 4{,}0$ μF je počáteční proud maximální. Jak dlouho potrvá, než se kondenzátor nabije poprvé na maximální napětí?

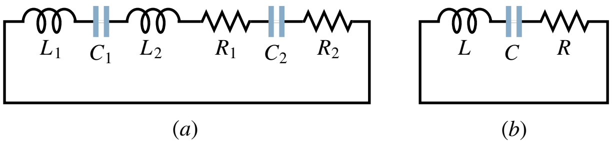
12C. Uvažujte obvod podle obr. 33.22. Se spínačem S_1 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu τ_C (viz čl. 28.8). Se spínačem S_2 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu τ_L (viz čl. 31.9). Se spínačem S_3 sepnutým a zbývajícími rozpojenými kmitá obvod s periodou T. Dokažte, že $T = 2\pi\sqrt{\tau_C \tau_L}$.



Obr. 33.22 Cvičení 12

13C. S použitím smyčkového pravidla odvoďte diferenciální rovnici (33.11) pro obvod LC.

14C. Jednoduchá smyčka se skládá z několika cívek (L_1, L_2, …), několika kondenzátorů (C_1, C_2, …) a několika rezistorů (R_1, R_2, …) zapojených v sérii (obr. 33.23a). Dokažte, že bez ohledu na pořadí těchto obvodových prvků ve smyčce je chování obvodu stejné jako chování jednoduchého obvodu LC v obr. 33.23b. (*Tip*: Použijte smyčkové pravidlo a cvič. 56 v kap. 31.)



Obr. 33.23 Cvičení 14

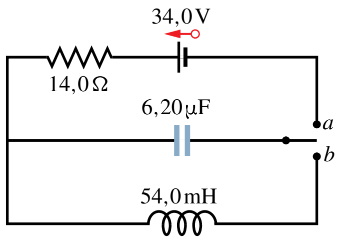
15Ú. V kmitavém obvodu LC složeném z kondenzátoru 1,0 nF a cívky 3,0 mH je maximální napětí 3,0 V. (a) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (b) Jaký je maximální proud v obvodu? (c) Jaká je maximální energie magnetického pole cívky?

16Ú. Kmitavý obvod LC má indukčnost 3,00 mH a kapacitu 10,0 μF. Vypočtěte jeho (a) úhlovou frekvenci, (b) periodu kmitů. (c) V čase $t = 0$ je kondenzátor nabit nábojem 200 μC a proud je nulový. Nakreslete (přibližně) průběh náboje na kondenzátoru jako funkci času.

17Ú. V kmitavém obvodu LC s kapacitou $C = 4{,}00$ μF je maximální napětí na kondenzátoru během oscilací 1,50 V a maximální proud je 50,0 mA. (a) Jaká je indukčnost L? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Za jakou dobu dosáhne náboj na kondenzátoru maximální hodnotu (z nenabitého stavu)?

18Ú. V obvodu na obr. 33.24 byl přepínač po dlouhou dobu v poloze a. Náhle je přepojen do polohy b. (a) Vypočtěte frekvenci kmitů proudu. (b) Jaká je jejich amplituda?

19Ú. Mějme cívku 10 mH a dva kondenzátory o kapacitách 5,0 μF a 2,0 μF. Vypište všechny rezonanční kmitočty, které můžeme generovat spojením těchto prvků v různých kombinacích.



Obr. 33.24 Úloha 18

20Ú. Obvod LC rezonuje na frekvenci 10,4 kHz. (a) Jaká je indukčnost v obvodu, je-li kapacita 340 μF? (b) Jaká je celková energie v obvodu, je-li maximální proud 7,20 mA? (c) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru?

21Ú. (a) V kmitavém obvodu LC vyjádřete pomocí maximálního náboje na kondenzátoru velikost náboje v okamžiku, kdy energie elektrického pole je rovna 50,0 % energie magnetického pole. (b) Jaký zlomek periody musí uplynout od okamžiku, kdy je kondenzátor plně nabit, do splnění podmínky (a)?

22Ú. V kmitavém obvodu LC je v jistém okamžiku 75,0 % celkové energie akumulováno v magnetickém poli cívky. (a) Pomocí maximálního náboje Q vyjádřete náboj na kondenzátoru v tomto okamžiku. (b) Vyjádřete pomocí maximálního proudu v cívce velikost proudu v tomto okamžiku.

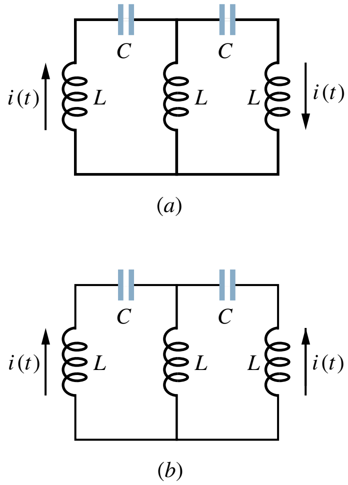
23Ú. Cívka je připojena ke kondenzátoru, jehož kapacitu lze plynule měnit otočným knoflíkem. Chceme, aby se frekvence kmitů LC měnila lineárně s úhlem natočení knoflíku v rozmezí $2\cdot10^5$ Hz až $4\cdot10^5$ Hz při otočení o 180°. Sestrojte graf závislosti požadované kapacity C na úhlu natočení knoflíku, je-li $L = 1{,}0$ mH.

24Ú. Proměnný kondenzátor s rozsahem kapacity 10 pF až 365 pF tvoří s cívkou kmitavý obvod LC s proměnnou frekvencí k ladění radiopřijímače. (a) Jaký je poměr nejvyššího a nejnižšího kmitočtu, které můžeme získat tímto obvodem? (b) Mají-li být takovým obvodem získány kmitočty od 0,54 MHz do 1,60 MHz, je poměr vypočtený v (a) příliš vysoký. Požadovaného poměru kmitočtů lze dosáhnout připojením paralelního kondenzátoru. Jak velkou kapacitu musíme přidat a jakou indukčnost použít, abychom získali požadovaný rozsah kmitočtů?

25Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 25{,}0$ mH a $C = 7{,}80$ μF. V čase $t = 0$ je proud 9,20 mA, náboj na kondenzátoru je 3,80 μC a kondenzátor se nabíjí. (a) Jaká je celková energie v obvodu? (b) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (c) Jaký je maximální proud? (d) Jaká je hodnota φ, je-li náboj na kondenzátoru dán vztahem $q = Q\cos(\omega t + \varphi)$? (e) Při stejném zadání předpokládejte, že se kondenzátor vybíjí. Jaká je v takovém případě hodnota φ?

26Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 3{,}00$ mH a $C = 2{,}70$ μF. V čase $t = 0$ je náboj na kondenzátoru nulový a proud je 2,00 A. (a) Jaký největší náboj se objeví na kondenzátoru? (b) Ve kterém okamžiku (vyjádřeno pomocí periody T) narůstá elektrická energie na kondenzátoru největší rychlostí?

27Ú. Tři stejné cívky L a dva stejné kondenzátory C tvoří dvě smyčky podle obr. 33.25. (a) Předpokládejte, že proudy tečou podle obr. 33.25a. Jaký je proud v prostřední cívce? Napište odpovídající rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny tehdy, když proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (b) Předpokládejte, že proudy jsou orientovány podle obr. 33.25b. Jaký proud nyní teče prostřední cívkou? Napište rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny, jestliže proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. (Protože obvody mohou kmitat na dvou různých frekvencích, nemůžeme je nahradit jediným obvodem LC.)

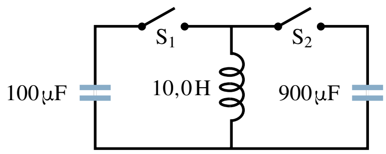


Obr. 33.25 Úloha 27

28Ú. Sériový obvod s indukčností L_1 a kapacitou C_1 kmitá s úhlovou frekvencí ω. Druhý sériový obvod s indukčností L_2 a kapacitou C_2 kmitá se stejnou úhlovou frekvencí. Vyjádřete úhlovou frekvenci kmitů obvodu obsahujícího všechny čtyři prvky v sérii. (Odpor obvodu zanedbejte.)

29Ú. V kmitavém obvodu LC s $C = 64{,}0$ μF je proud jako funkce času dán vztahem $i(t) = 1{,}60\sin(2\,500t + 0{,}680)$, kde t je v sekundách, i v ampérech a fáze v radiánech. (a) Kdy poprvé (pro $t > 0$) dosáhne proud svého maxima? Jaká je (b) indukčnost, (c) celková energie obvodu?

30Ú★. V obr. 33.26 je ve výchozím stavu kondenzátor 900 μF nabit na 100 V a kondenzátor 100 μF je vybit. Popište detailně, jak lze nabít kondenzátor 100 μF na napětí 300 V manipulací s přepínači S_1 a S_2.



Obr. 33.26 Úloha 30

ODST. 33.5 Tlumené kmity v obvodu *RLC*

31C. Jaký odpor R musíme zapojit do série s indukčností $L = 220$ mH a kapacitou $C = 12{,}0$ μF, aby maximální náboj na kondenzátoru klesl na 99,0 % původní hodnoty během 50,0 period? (Předpokládejte $\omega' \doteq \omega$.)

32C. Uvažujte tlumený obvod RLC. (a) Ukažte, že člen vyjadřující tlumení $e^{-Rt/(2L)}$, který obsahuje L, ale ne C, lze přepsat do více symetrického tvaru, který zahrnuje L i C, ve tvaru $e^{-\pi R\sqrt{C/L}(t/T)}$, kde T je perioda kmitů (při zanedbání odporu). (b) S použitím (a) ukažte, že jednotka pro $\sqrt{L/C}$ v SI je ohm. (c) S použitím (a) ukažte, že podmínka pro to, aby ztráty energie za periodu byly malé, je $R \ll \sqrt{L/C}$.

33Ú. V kmitavém sériovém obvodu RLC určete dobu potřebnou k tomu, aby maximální energie kondenzátoru během oscilací poklesla na polovinu počáteční hodnoty. Předpokládejte $q = Q$ v čase $t = 0$.

34Ú. Obvod s jednou smyčkou se skládá z rezistoru 7,20 Ω, cívky 12,0 H a kondenzátoru 3,20 μF. Na počátku měl kondenzátor náboj 6,20 μC a proud byl nulový. Vypočítejte náboj na kondenzátoru po N úplných periodách později pro $N = 5$, 10 a 100.

35Ú. V čase $t = 0$ není na kondenzátoru obvodu RLC žádný náboj, avšak cívkou protéká proud I. (a) Vyjádřete počáteční fázi φ v rov. (33.21) pro tento obvod. (b) Napište výraz pro náboj q na kondenzátoru jako funkci času t pomocí amplitudy proudu a úhlové frekvence ω'.

36Ú. (a) Přímým dosazením rov. (33.21) do rov. (33.20) dokažte, že $\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$. (b) O kolik se změní frekvence kmitů, jestliže se odpor zvýší z 0 na 100 Ω v obvodu, v němž je $L = 4{,}40$ H a $C = 7{,}30$ μF?

37Ú★. Dokažte, že v kmitavém obvodu RLC je relativní úbytek energie $\Delta E/E$ za jednu periodu přibližně roven $2\pi R/(\omega L)$. Veličina $\omega L/R$ se nazývá *činitel jakosti* Q obvodu (nezaměňovat s nábojem). Obvody s velkou hodnotou Q mají malý odpor a nízké poměrné ztráty energie za periodu $2\pi/Q$.

ODST. 33.8 Tři jednoduché obvody

38C. Kondenzátor 1,50 μF je připojen podle obr. 33.9a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

39C. Cívka 50,0 mH je připojena podle obr. 33.10a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda výsledného střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

40C. Rezistor 50,0 Ω je připojen podle obr. 33.8a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

41C. Cívka s indukčností $L = 45{,}0$ mH má induktivní reaktanci $X_L = 1{,}30$ kΩ. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká je kapacita kondenzátoru se stejnou reaktancí při stejné frekvenci? (c) Jak velké budou reaktance cívky a kondenzátoru, jestliže se frekvence zdvojnásobí?

42C. Kondenzátor 1,50 μF má reaktanci 12,0 Ω. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká bude jeho reaktance, jestliže frekvenci zdvojnásobíme?

43C. (a) Při jaké frekvenci by měly cívka 6,0 mH a kondenzátor 10 μF stejnou reaktanci a (b) jak velká by byla? (c) Dokažte, že tato frekvence by byla frekvencí vlastních kmitů obvodu se zadanými hodnotami L a C.

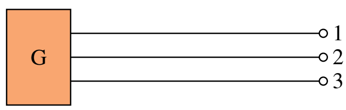
44Ú. Generátor emn $e = \mathscr{E} \sin \omega_b t$, kde $\mathscr{E} = 25{,}0$ V a $\omega_b = 377\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, je připojen k cívce o indukčnosti 12,7 H. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru v okamžiku, když je proud právě maximální? (c) Jaký je proud v okamžiku, když je emn generátoru rovno −12,5 V a dále klesá?

45Ú. Generátor z úlohy 44 je připojen ke kondenzátoru 4,15 μF. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru, je-li proud právě maximální? (c) Je-li emn generátoru −12,5 V a roste, jaký je proud?

46Ú. Generátor má emn $e = \mathscr{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathscr{E} = 30{,}0$ V a $\omega_b = 350\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Proud v připojeném obvodu je $i(t) = I \sin(\omega_b t - 3\pi/4)$, kde $I = 620$ mA. (a) Kdy dosáhne emn generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (b) Kdy dosáhne proud generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru další prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota kapacity, indukčnosti, nebo odporu z otázky (c)?

47Ú. Generátor má emn $e = \mathscr{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathscr{E} = 30{,}0$ V a $\omega_b = 350\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Proud je dán vztahem $i(t) = I \sin(\omega_b t + \pi/4)$, kde $I = 620$ mA. (a) V jakém čase po $t = 0$ nabude emn generátoru poprvé maxima? (b) Kdy pro $t > 0$ nabude proud poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru ještě jeden prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota příslušné kapacity, indukčnosti, nebo odporu?

48Ú. Třífázový generátor G je zdrojem energie, která je přenášena pomocí tří vodičů podle obr. 33.27. Jejich napětí vůči zemi jsou $u_1 = U \sin \omega_b t$, $u_2 = U \sin(\omega_b t - 120°)$ a $u_3 = U \sin(\omega_b t - 240°)$. Některá zařízení většího výkonu (např. motory) mají tři svorky a jsou navrženy tak, že se připojí přímo ke všem třem vodičům. Ukažte, že napětí mezi *dvěma libovolnými* vodiči (a) kmitá harmonicky s časem s úhlovou frekvencí ω_b, (b) má amplitudu $U\sqrt{3}$.



třívodičové přenosové vedení

Obr. 33.27 Úloha 48

ODST. 33.9 Sériový obvod *RLC*

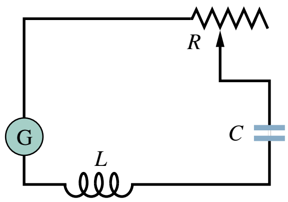
49C. (a) Nalezněte Z, φ a I pro zadání z př. 33.5, jestliže odstraníme kondenzátor z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete ve vhodném měřítku pro tento nový stav fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

50C. (a) Stanovte Z, φ a I pro zadání z př. 33.5, odstraníme-li cívku z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

51C. (a) Nalezněte Z, φ a I pro zadání př. 33.5 s $C = 70{,}0\,\mu$F, jestliže se ostatní parametry nezměnily. (b) Nakreslete pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram, podobný obr. 33.11d, a oba diagramy porovnejte.

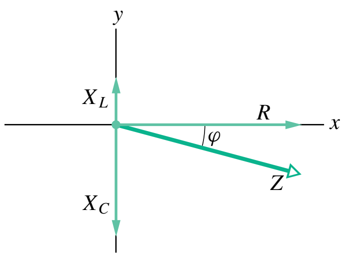
52C. Zdroj s proměnným kmitočtem je spojen v sérii s cívkou $L = 2{,}50$ mH a s kondenzátorem $C = 3{,}00\,\mu$F. Při jakém kmitočtu zdroje bude v obvodu největší amplituda proudu?

53Ú. V obr. 33.28 je generátor s proměnným kmitočtem zapojen v sérii s proměnným odporem R, kondenzátorem $C = 5{,}50\,\mu$F a cívkou s indukčností L. Při $R = 100\,\Omega$ je amplituda proudu při kmitočtech 1,30 kHz a 1,50 kHz poloviční ve srovnání s maximálním proudem v obvodu. (a) Jaká je hodnota L? (b) Při jakých kmitočtech je proud roven polovině maximální hodnoty, zvětší-li se R?



Obr. 33.28 Úloha 53

54Ú. Proveďte konstrukci diagramu podle obr. 33.29. Nakreslete (1) vektor v kladném směru osy y o velikosti X_L, (2) vektor v záporném směru osy y o velikosti X_C, (3) vektor v kladném směru osy x o velikosti R a najděte jejich výslednici. Přesvědčte se výpočtem, že impedance Z obvodu RLC je rovna velikosti této výslednice a fázové posunutí φ je rovno úhlu, který svírá tato výslednice s kladným směrem osy x. Jaký charakter (induktivní, nebo kapacitní) má obvod, kterému odpovídá obr. 33.29?



Obr. 33.29 Úloha 54

55Ú. Může být amplituda napětí na cívce větší než amplituda emn generátoru v obvodu RLC? Uvažujte obvod RLC s $\mathscr{E} = 10$ V, $R = 10\,\Omega$, $L = 1{,}0$ H a $C = 1{,}0\,\mu$F. Vypočtěte amplitudu napětí na cívce při rezonanci.

56Ú. Cívka s indukčností 88 mH o neznámé rezistanci a kondenzátor 0,94 µF jsou spojeny v sérii se střídavým emn o kmitočtu 930 Hz. Jaká je rezistance cívky, je-li fázový posun mezi přiloženým napětím a proudem 75°?

57Ú. Jaké je napětí na (a) generátoru, (b) rezistoru, (c) kondenzátoru a (d) cívce, je-li okamžitá hodnota emn v př. 33.5 maximální? (e) Součtem těchto okamžitých hodnot vzatých s příslušným znaménkem ověřte, že splňují smyčkové pravidlo.

58Ú. Generátor střídavého proudu s $\mathscr{E} = 220$ V, pracující s kmitočtem 400 Hz, vyvolá kmity v sériovém obvodu RLC, který má $R = 220\,\Omega$, $L = 150$ mH a $C = 24{,}0\,\mu$F. Stanovte (a) kapacitní reaktanci X_C, (b) impedanci Z, (c) amplitudu proudu I. Druhý kondenzátor o stejné kapacitě je pak připojen v sérii s ostatními prvky. Určete, jestli hodnoty (d) X_C, (e) Z a (f) I vzrostou, poklesnou, nebo zůstanou stejné.

59Ú. Obvod RLC podle obr. 33.7 má $R = 5{,}00\,\Omega$, $C = 20{,}0\,\mu$F, $L = 1{,}00$ H a $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. (a) Při jaké úhlové frekvenci ω_b bude mít amplituda proudu maximální hodnotu? (b) Jaká hodnota to bude? (c) Při jakých dvou úhlových frekvencích ω_{b1} a ω_{b2} bude amplituda proudu rovna polovině této maximální hodnoty? (d) Jaká je poměrná pološířka $(\omega_{b1} - \omega_{b2})/\omega$ rezonanční křivky tohoto obvodu?

60Ú. V jistém sériovém obvodu RLC je maximální emn generátoru 125 V a maximální proud je 3,20 A. Pokud proud předbíhá emn o 0,982 rad, jaká je (a) impedance a (b) odpor obvodu? (c) Je obvod kapacitního, nebo induktivního charakteru?

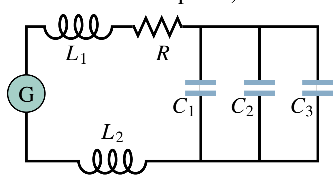
61Ú. Sériový obvod RLC má rezonanční frekvenci 6,00 kHz. Je-li napájen při 8,00 kHz, má impedanci 1,00 kΩ a počáteční fázi 45°. Jaké jsou hodnoty (a) R, (b) L, (c) C pro tento obvod?

62Ú. V sériovém obvodu RLC je při kmitočtu 50,0 Hz maximální napětí na cívce rovno dvojnásobku maximálního napětí na rezistoru a také dvojnásobku maximálního napětí na kondenzátoru. (a) Jaký je fázový posun mezi proudem a emn generátoru? (b) Jaký by musel být odpor obvodu, aby byl maximální proud 300 mA, má-li emn generátoru amplitudu 30,0 V?

63Ú. Obvod z př. 33.5 není v rezonanci. (a) Podle čeho to poznáte? (b) Jaký kondenzátor je třeba přidat ke stávajícímu, aby se obvod dostal do rezonance? (c) Jaká bude potom amplituda proudu?

64Ú. Generátor je zapojen v sérii s cívkou o indukčnosti $L = 2{,}00$ mH a kondenzátorem o kapacitě C. Kapacitu C máte vytvořit pomocí kondenzátorů s kapacitami $C_1 = 4{,}00\,\mu$F a $C_2 = 6{,}00\,\mu$F použitých buď jednotlivě, nebo v kombinaci. Jaké rezonanční kmitočty může mít obvod v závislosti na hodnotě C?

65Ú. Na obr. 33.30 je generátor s proměnnou frekvencí kmitů připojen k rezistoru s $R = 100\,\Omega$, k cívkám s $L_1 = 1{,}70$ mH a $L_2 = 2{,}30$ mH a ke kondenzátorům s $C_1 = 4{,}00\,\mu$F, $C_2 = 2{,}50\,\mu$F a $C_3 = 3{,}50\,\mu$F. (a) Jaká je rezonanční frekvence obvodu? (*Tip*: Viz úlohu 56 v kap. 31.) Jak se změní rezonanční



Obr. 33.30 Úloha 65

kmitočet, jestliže se (b) zvětší hodnota R, (c) zvětší hodnota L_1, (d) odstraní kondenzátor C_3 z obvodu?

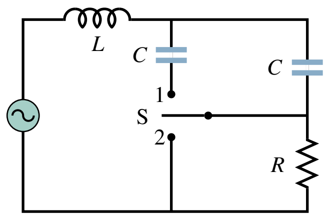
66Ú. Sériový obvod RLC s prvky R_1, L_1, C_1 má stejnou rezonanční frekvenci jako druhý obvod s prvky R_2, L_2, C_2. Nyní spojte oba obvody do série. Dokažte, že nově vzniklý obvod má opět stejnou rezonanční frekvenci jako každý z obou obvodů samostatně.

67Ú. Dokažte, že poměrná pološířka rezonanční křivky (viz úlohu 59d) je dána vztahem

$$\frac{\Delta\omega_\mathrm{b}}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}}R,$$

kde ω je úhlová frekvence při rezonanci a $\Delta\omega_\mathrm{b}$ šířka rezonanční křivky při poloviční amplitudě. Povšimněte si, že $\Delta\omega_\mathrm{b}/\omega$ narůstá s R, jak ukazuje obr. 33.13. Použijte tento vzorec ke kontrole odpovědi k úloze 59d.

68Ú★. Generátor na obr. 33.31 dodává střídavé napětí 230 V při 50,0 Hz. Při rozpojeném přepínači (jako na obrázku) předbíhá proud emn generátoru o 20,0°. S přepínačem v poloze 1 je proud zpožděn za emn generátoru o 10,0°. Když je přepínač v poloze 2, je proud 2,00 A. Určete hodnoty R, L a C.



Obr. 33.31 Úloha 68

ODST. 33.10 Výkon v obvodech se střídavým proudem

69C. Jaká je maximální hodnota střídavého napětí, jehož efektivní hodnota je 100 V?

70C. Voltmetr s velkou impedancí je postupně připojen k cívce, kondenzátoru a rezistoru sériového obvodu RLC, který je zapojen k emn 100 V (efektivních). Ve všech případech na voltmetru odečteme stejné napětí. Jaká je tato odečtená hodnota?

71C. (a) Rozeberte zadání z úlohy 44c. Dodává, nebo odebírá generátor energii z obvodu? (b) Opakujte výpočet pro podmínky z úlohy 45c.

72C. Jak velký stejnosměrný proud musí procházet daným rezistorem, aby měl stejný tepelný výkon jako střídavý proud s maximální hodnotou 2,60 A?

73C. Pro obvody ve cvič. 39, 40, 49 a 50 vypočítejte střední ztrátový výkon.

74C. Dokažte, že střední výkon dodávaný do obvodu v obr. 33.7 lze vyjádřit také vztahem $\overline{P} = (\mathscr{E}_\mathrm{ef})^2 R/Z^2$. Ukažte, že tento výraz pro střední výkon dává správné výsledky pro čistě odporový obvod, pro obvod RLC při rezonanci a pro čistě kapacitní a čistě induktivní obvod.

75C. Elektrický motor připojený ke 230 V a 50,0 Hz koná (mechanickou) práci s výstupním výkonem 74,6 W. Jaký je jeho odpor, protéká-li motorem efektivní proud 0,650 A?

76C. Klimatizační zařízení, připojené k síti o napětí $U_\mathrm{ef} = 120\,\mathrm{V}$, je ekvivalentní sériovému zapojení odporu 12,0 Ω a induktivní reaktance 1,30 Ω. (a) Vypočtěte impedanci klimatizačního zařízení. (b) Vypočtěte střední výkon do něj dodávaný.

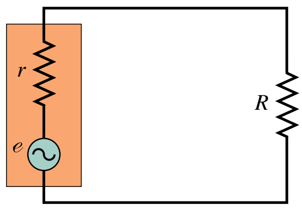
77C. Elektrický motor při zatížení má rezistanci 32,0 Ω a induktivní reaktanci 45,0 Ω. Efektivní napětí střídavého zdroje je 420 V. Vypočtěte efektivní proud tekoucí motorem.

78Ú. Namísto grafického zdůvodnění v obr. 33.14b dokažte výpočtem, že časová střední hodnota výrazu $\sin^2(\omega t - \varphi)$ přes celistvý počet půlperiod je rovna $1/2$.

79Ú. Pro harmonicky buzený sériový obvod RLC dokažte, že po jedné celé periodě T se energie uložená (a) v kondenzátoru, (b) v cívce nezměnila. Dokažte, že v průběhu periody (c) zdroj emn dodá energii $(\frac{1}{2}T)\mathscr{E}I\cos\varphi$, (d) v rezistoru se disipuje energie $(\frac{1}{2}T)RI^2$. (e) Ukažte, že energie nalezené v (c) a (d) jsou stejně velké.

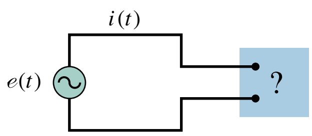
80Ú. V sériovém kmitavém obvodu RLC je $R = 16{,}0\,\Omega$, $C = 31{,}2\,\mu\mathrm{F}$, $L = 9{,}20\,\mathrm{mH}$ a $e = \mathscr{E}\sin\omega_\mathrm{b}t$ s $\mathscr{E} = 45{,}0\,\mathrm{V}$ a $\omega_\mathrm{b} = 3\,000\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. V čase $t = 0{,}442\,\mathrm{ms}$ určete okamžitý výkon (a) dodávaný generátorem, (b) dodávaný do kondenzátoru, (c) dodávaný do cívky, (d) disipovaný v rezistoru. (e) Jaký je význam záporné hodnoty pro kterýkoli z výsledků (a), (b) a (c)? (f) Ukažte, že součet výsledků (b), (c) a (d) je roven výsledku (a).

81Ú. Pro obvod z obr. 33.32 ukažte, že střední výkon, s nímž je energie disipována v rezistoru R, je největší, je-li R roven vnitřnímu odporu r generátoru střídavého proudu. (Až doposud jsme mlčky předpokládali ideální generátory, tj. $r = 0$.)



Obr. 33.32 Úlohy 81 a 90

82Ú. Obr. 33.33 ukazuje střídavý generátor připojený dvojicí svorek k „černé skříňce". Ve skříňce je obvod RLC skládající se třeba i z více smyček, jejichž propojení však neznáme. Měření z vnějšku skříňky ukáže, že $e(t) = (75{,}0\,\mathrm{V})\sin\omega_\mathrm{b}t$ a $i(t) = (1{,}20\,\mathrm{A})\sin(\omega_\mathrm{b}t + 42{,}0°)$. (a) Jaký je účiník? (b) Předbíhá proud v obvodu, nebo je zpožděn vzhledem k emn? (c) Má obvod ve skříňce induktivní, nebo kapacitní charakter? (d) Je obvod

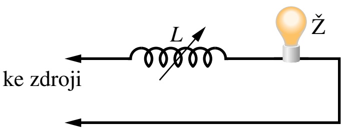


Obr. 33.33 Úloha 82

ve skříňce v rezonanci? (e) Musí být ve skříňce kondenzátor? Cívka? Rezistor? (f) Jaký je střední výkon, dodávaný do skříňky z generátoru? (g) Proč nepotřebujeme znát úhlovou frekvenci obvodu ω_b k odpovědi na některé uvedené otázky?

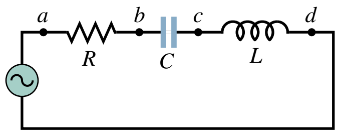
83Ú. V obvodu RLC na obr. 33.7 zvolme $R = 5{,}00\,\Omega$, $L = 60{,}0\,\mathrm{mH}$, $f_b = 50{,}0\,\mathrm{Hz}$ a $\mathscr{E} = 30{,}0\,\mathrm{V}$. Pro jakou velikost kapacity bude střední ztrátový výkon v rezistoru (a) největší, (b) nejmenší? (c) Jaké je maximum a minimum ztrátového výkonu? Jaké jsou odpovídající (d) fázové posuny a (e) účiníky?

84Ú. Před zavedením tyristorů se jako typický „stmívač“ pro jevištní reflektory používala cívka s proměnnou indukčností od 0 do L_{max} zapojená v sérii se žárovkami reflektorů podle obr. 33.34. Napájecí napětí je 230 V, 50 Hz; žárovka nese údaj 230 V, 1000 W. (a) Jakou hodnotu L_{max} musí mít cívka, aby mohla zeslabit reflektor až na jednu pětinu plného výkonu? (Odpor vlákna sice s rostoucí teplotou a tedy i s dodávaným výkonem roste, ale tuto závislost neuvažujte a berte odpor jako konstantní.) (b) Mohli bychom místo cívky použít reostat (proměnný odpor) nastavitelný od 0 do R_{max}? Jestliže ano, jakou hodnotu R_{max} bychom potřebovali? Proč se reostat nepoužívá?



Obr. 33.34 Úloha 84

85Ú. V obr. 33.35 je $R = 15{,}0\,\Omega$, $C = 4{,}70\,\mu\mathrm{F}$ a $L = 25{,}0\,\mathrm{mH}$. Generátor dodává napětí 75,0 V při kmitočtu 550 Hz. (a) Vypočtěte efektivní proud. (b) Stanovte efektivní napětí U_{ab}, U_{bc}, U_{cd}, U_{bd}, U_{ad}. (c) Jaká je střední hodnota ztrátového výkonu v každém ze tří prvků?



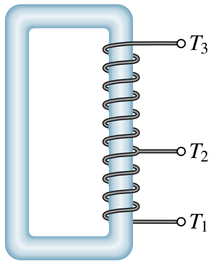
Obr. 33.35 Úloha 85

ODST. 33.11 Transformátory

86C. Generátor s výstupním napětím 100 V je připojen k primárnímu vinutí transformátoru s 50 závity. Jaké je napětí na sekundárním vinutí, které má 500 závitů?

87C. Primární vinutí transformátoru má 500 závitů a sekundární vinutí 10 závitů. (a) Jaké je napětí U_2, je-li sekundární obvod rozpojený a je-li primární napětí $U_1 = 120\,\mathrm{V}$? (b) Jaký poteče proud v primárním a v sekundárním vinutí, je-li sekundární vinutí připojeno k odporové zátěži 15 Ω?

88C. Obr. 33.36 ukazuje tzv. *autotransformátor*. Ten je tvořen jedinou cívkou (navinutou na železném jádře) se třemi vývody T_i. Mezi vývody T_1 a T_2 je 200 závitů a mezi vývody T_2 a T_3 je 800 závitů. Libovolné dva vývody můžeme považovat za „primární svorky“ a jiné dva vývody za „sekundární svorky“. Vypište všechny poměry, se kterými můžeme primární napětí transformovat na sekundární.



Obr. 33.36 Cvičení 88

89Ú. Generátor střídavého proudu o výkonu 250 kW dodává energii do odporové zátěže ve vzdálené továrně prostřednictvím dvou vodičů přenosového vedení. Každý z nich má odpor 0,30 Ω. V továrně je použit snižovací transformátor poskytující napětí mnohem nižší, bezpečné a pro použití v továrně vhodnější. Vypočtěte pokles napětí na vedení a ztrátový výkon ve vedení, je-li efektivní hodnota emn generátoru (a) $U = 80\,\mathrm{kV}$, (b) $U = 8{,}0\,\mathrm{kV}$ a (c) $U = 0{,}80\,\mathrm{kV}$. Vyhodnoťte vhodnost každé volby.

90Ú. Nechť zvýrazněný obdélník vlevo v obr. 33.32 představuje výstup zesilovače s vysokou impedancí 1 000 Ω a místo rezistoru je cívka reproduktoru s nízkou impedancí 10 Ω. Pro přenos maximálního výkonu do zátěže R musí být, jak víme z kap. 28, úlohy 24, $R = r$, což zde není splněno. Jak však víme, můžeme použít transformátor i k „transformaci“ odporů. Načrtněte mezi zesilovač a reproduktor v obr. 33.32 primární a sekundární vinutí transformátoru tak, abychom přizpůsobili impedance. Jaký musí být poměr počtu jeho závitů?

PRO POČÍTAČ

91Ú. Kondenzátor 45,0 μF a rezistor 200 Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100\,\mathrm{V}$. Frekvenci f zdroje lze měnit od 0 do 100 Hz. (a) Napište rovnici pro reaktanci kondenzátoru X_C. (b) Znázorněte v grafu současně rezistanci R, reaktanci kondenzátoru X_C a impedanci Z v závislosti na kmitočtu f v rozsahu $0 < f < 100\,\mathrm{Hz}$. (c) Z grafu určete hodnotu f, při které $X_C = R$.

92Ú. Pro zadání z úlohy 91 znázorněte současně napětí U_C na kondenzátoru, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 100\,\mathrm{Hz}$. (b) Z grafu určete hodnotu f, při které $U_C = U_R$. (c) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci? (d) Určete hodnotu f, při které $U_R = 0{,}50U_z$. (e) Jaké je U_C při této frekvenci? (f) Určete hodnotu f, při které $U_C = 0{,}50U_z$. (g) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci?

93Ú. Cívka 40,0 mH a rezistor 200 Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100\,\mathrm{V}$. Frekvenci zdroje lze měnit od 0 do 2 500 Hz. (a) Napište vztah pro induktivní reaktanci X_L. (b) Znázorněte současně odpor R, induktivní reaktanci X_L a impedanci Z v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 2\,500\,\mathrm{Hz}$. (c) Z grafů určete hodnotu f, při které $X_L = R$.

94Ú. Pro zadání z úlohy 93 znázorněte současně napětí U_L na cívce, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 2\,500\,\mathrm{Hz}$. (b) Z grafu určete frekvenci f, při které je $U_L = U_R$. (c) Jaké je napětí U_R při této frekvenci? (d) Určete frekvenci f, při které $U_R = U_z/3$. (e) Jaké je napětí U_L při této frekvenci? (f) Určete frekvenci f, při které $U_L = U_z/3$. (g) Jaké je napětí U_R při této frekvenci?

95Ú. Cívka 150,0 mH, kondenzátor 45,0 μF a rezistor 90,0 Ω jsou zapojeny v sérii ke zdroji střídavého napětí $U_z = 100\,\mathrm{V}$. Frekvenci zdroje f lze měnit od 0 do 1 000 Hz. (a) Vyneste do grafu současně kapacitní reaktanci X_C a induktivní reaktanci X_L v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 200\,\mathrm{Hz}$. (b) Z grafu určete hodnotu f, při které $X_C = X_L$. (c) Vyneste impedanci Z obvodu v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 188\,\mathrm{Hz}$ a z grafu stanovte frekvenci f, při které je impedance Z minimální.