Náhodné udalosti a operácie s nimi.

1. Nech A, B, C sú náhodné udalosti. Pomocou A, B, C vyjadrite náhodnú udalosť spočívajúcu v tom, že
   a) nastane len udalosť A (teda spomedzi A, B, C nastane len A)
   b) nastane A a B, a pritom C nenastane
   c) nastanú všetky tri udalosti (teda A, B, C nastanú súčasne)
   d) nastane práve jedna z nich
   e) nastane aspoň jedna z nich
   f) nastanú práve dve z nich
   g) nenastane žiadna z nich

2. Náhodný pokus spočíva v hode tromi kockami: modrou, červenou a žltou. Zvoľme náhodné udalosti takto:
   M_i na modrej padne i bodov ($i = 1, 2, \dots , 6$)
   C_j na červenej padne j bodov ($j = 1, 2, \dots , 6$)
   Z_k na žltej padne k bodov ($k = 1, 2, \dots , 6$).

Pomocou M_i, C_j, Z_k vyjadrite udalosti:
   a) na modrej a aj na červenej padne aspoň 5 bodov
   b) na každej kocke padne párne číslo
   c) na všetkých padne to isté číslo
   d) aspoň na jednej padne 6
   e) aspoň na dvoch padne 6

3. Náhodný pokus spočíva v hode tromi kockami: modrou, červenou a žltou. Za výsledok pokusu považujme usporiadanú trojicu (i, j, k) bodov, ktoré padli na modrej, červenej, resp. žltej. Zrejme množina Ω všetkých možných výsledkov má 216 prvkov. Označme náhodné udalosti ako v predchádzajúcej úlohe, t.j.
   M_i na modrej padne i bodov
   C_j na červenej padne j bodov
   Z_k na žltej padne k bodov.

Vyjadrite udalosti M_i, C_j, Z_k ako podmnožiny množiny Ω. Zistite, koľko prvkov majú udalosti
   a) $(M_5 \cup M_6) \cap (C_5 \cup C_6)$
   b) $(M_2 \cup M_4 \cup M_6) \cap (C_2 \cup C_4 \cup C_6) \cap (Z_2 \cup Z_4 \cup Z_6)$
   c) $(M_1 \cap C_1 \cap Z_1) \cup (M_2 \cap C_2 \cap Z_2) \cup (M_3 \cap C_3 \cap Z_3) \cup \dots \cup (M_6 \cap C_6 \cap Z_6)$
   d) $M_6 \cup C_6 \cup Z_6$
   e) $(M_6 \cap C_6) \cup (M_6 \cap Z_6) \cup (C_6 \cap Z_6)$

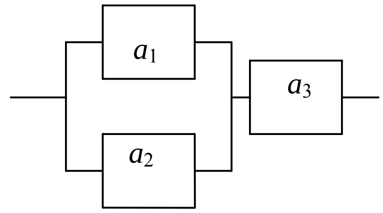
4. Náhodný pokus spočíva v hode tromi označenými mincami. Označme
   A_i ... na i-tej minci padol znak, $i = 1, 2, 3$

   Pomocou udalostí A_1, A_2, A_3 vyjadrite náhodné udalosti
   B ... znak padne len na prvej a tretej minci
   C ... padnú práve dva znaky
   D ... padnú najviac dva znaky
   E_i ... znak padne len na i-tej minci

5. Náhodný pokus spočíva v hode tromi označenými mincami. Za výsledok pokusu považujme usporiadanú trojicu symbolov Z, C. Množina Ω všetkých možných výsledkov má 8 bodov. Vyjadrite udalosti z predchádzajúcej úlohy ako podmnožiny množiny Ω.

6. Obvod je vytvorený súčiastkami a_1, a_2, a_3 podľa schémy na obrázku. Nech A_i je náhodná udalosť spočívajúca v tom, že počas doby T súčiastka a_i nezlyhá. Pomocou A_i vyjadrite náhodné udalosti spočívajúce v tom, že počas doby T

a) zlyhá práve jedna súčiastka
b) zlyhajú práve dve súčiastky
c) nezlyhá žiadna súčiastka
d) obvodom bude počas doby T pretekať prúd.



7. Systém pozostáva z dvoch blokov typu I a troch blokov typu II. Náhoda ovplyvňuje fungovanie, resp. nefungovanie jednotlivých blokov. Označme udalosti takto:

A_i i-tý blok typu I funguje
B_j j-tý blok typu II funguje.

Nasledujúce udalosti zapíšte pomocou A_i, B_j

a) udalosť C spočívajúcu v tom, že funguje len druhý blok typu I a len tretí blok typu II
b) udalosť D (núdzového režimu), ktorý nastáva, ak funguje práve jeden blok typu I a súčasne práve jeden blok typu II
c) udalosť E spoľahlivého režimu, ktorý vyžaduje fungovanie aspoň jedného bloku typu I a súčasne fungovanie aspoň dvoch blokov typu II.

8. Systém pozostáva z dvoch blokov typu I a troch blokov typu II. Náhoda ovplyvňuje fungovanie, resp. nefungovanie jednotlivých blokov. Možné stavy systému považujeme za možné výsledky "experimentu s náhodou" a jednotlivé stavy (teda výsledky) môžeme zachytiť usporiadanými 5-ticami núl a jednotiek. Napr. stav systému, keď funguje druhý blok typu I a prvé dva bloky typu II označíme 5-ticou (0, 1, 1, 1, 0). Nech A_i, B_j sú náhodné udalosti z predchádzajúcej úlohy, t.j.

A_i i-tý blok typu I funguje
B_j j-tý blok typu II funguje.

Zistite z koľkých stavov pozostávajú udalosti

a) $C = A_1' \cap A_2 \cap B_1' \cap B_2' \cap B_3$
b) $D =$
$(A_1 \cap A_2' \cap B_1 \cap B_2' \cap B_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap B_1' \cap B_2 \cap B_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap B_1' \cap B_2' \cap B_3) \cup$
$(A_1' \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2' \cap B_3') \cup (A_1' \cap A_2 \cap B_1' \cap B_2 \cap B_3') \cup (A_1' \cap A_2 \cap B_1' \cap B_2' \cap B_3)$
c) $E = (A_1 \cup A_2) \cap [\,(B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3)\,]$

9. Náhodný pokus spočíva v hádzaní pripináčikom dovtedy, kým nedopadne hrotom nahor. Navrhnite priestor možných výsledkov tak, aby bolo možné modelovať nasledujúce udalosti

a) v pokuse sa bude hádzať aspoň štyri razy
b) počet hodov v pokuse bude párne číslo

10. Náhodný pokus spočíva v hádzaní hracou kockou dovtedy, kým nepadne šestka. Navrhnite priestor možných výsledkov tak, aby bolo možné modelovať nasledujúce udalosti

a) pokus končí tretím hodom, pričom v každom hode padnú aspoň štyri body
b) pokus končí štvrtým hodom, a pritom v každom hode padne párne číslo
c) v pokuse sa bude hádzať aspoň štyri razy
d) počet hodov v pokuse bude nepárny

Všimnime si, že pre modelovanie udalostí z c), d) môžeme priestor možných výsledkov voliť jednoduchšie ako v prípade modelovania udalostí v a), b).

Poznámka. Množinové operácie $\cap$ a $\cup$ sú nám dobre známe (a vieme, že sú to komutatívne a asociatívne operácie). Pripomíname, že platia oba distributívne zákony, t.j. platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Operáciu komplementu budeme označovať ako A', t.j. $A' = \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \,\}$. Často využijeme známe DeMorganove zákony

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

Operácia množinového rozdielu je definovaná takto:

$$A \setminus B = A \cap B', \text{ t.j. } \quad A \setminus B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$$

11. Ukážte, že platia rovnosti (pomôžte si Vennovými diagramami).

a) $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$

b) $A' \cup (A \cap B) = A' \cup B$

c) $A \cap (A \cap B)' = A \cap B'$

d) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

12. Rozhodnite o platnosti vzťahov

a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

c) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

d) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

13. Spolužiačky Danka a Janka prichádzajú ráno do triedy náhodne v čase od 7:45 do 8:00, čo môžeme interpretovať tak, že príchod (každej z nich) je náhodný bod intervalu [0, 15]. Modelujme náhodný pokus, ktorého výsledkom ω je dvojica časov (t_D, t_J), kde t_D je čas príchodu Danky do triedy, t.j. $t_D \in [0, 15]$ a t_J je čas príchodu Janky ($t_J \in [0, 15]$).
Priestor všetkých možných výsledkov je štvorec [0, 15] x [0, 15]. Modelujte podmnožinami štvorca nasledujúce náhodné javy spočívajúce v tom, že

a) Danka prišla po 7:50 a Janka pred 7:50
b) Danka prišla pred 7:55 a Janka medzi 7:50 a 7:55
c) Danka prišla skôr ako Janka
d) Danka čakala na Janku, ale nie viac ako 5 minút
e) Jedna čakala na druhú, ale nie viac ako 5 minút.

Výsledky:

Úloha 1.

a) $A \cap B' \cap C'$ b) $A \cap B \cap C'$ c) $A \cap B \cap C$ d) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$
e) $A \cup B \cup C$ f) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$ g) $A' \cap B' \cap C'$

Úloha 2.
Výsledky úlohy 2 sa dajú nájsť v zadaní úlohy 3.

Úloha 3.
Ukážme (pre ilustráciu) vyjadrenie napr. M_3, C_6 a Z_2.
$M_3 = \{ (3, j, k) : j, k \in \{1, 2, \dots, 6\} \}$, M_3 má 36 prvkov,
$C_6 = \{ (i, 6, k) : i, k \in \{1, 2, \dots, 6\} \}$, C_6 má tiež 36 prvkov,
$Z_2 = \{ (i, j, 2) : i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, aj Z_2 má 36 prvkov.

a) 24 b) 27 c) 6 d) 91 (= 216 – 125) e) 16

Úloha 4.
Napr. $B = A_1 \cap A_2' \cap A_3$, $C = (A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3)$

Úloha 5.
Napr. B = { (Z, C, Z) }, udalosť B je elementárna, tvorí ju práve jeden výsledok pokusu.
C = { (Z, Z, C), (Z, C, Z), (C, Z, Z) }, udalosť C tvoria tri výsledky pokusu.

Úloha 6.
a) $(A_1' \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3')$
b) $(A_1' \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3')$
c) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
d) $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$

Úloha 7.
Odpovede nájdete vo formulácii úlohy 8.

Úloha 8.
a) C = { (0, 1, 0, 0, 1) }, teda C pozostáva len z jedného stavu.
b) D pozostáva zo šiestich stavov.
c) E pozostáva z dvanástich stavov.

Úloha 9.
$\Omega = \{ (1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1) \dots \} =$
$= \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \dots \}$.
a) $\{ \omega_4, \omega_5, \omega_6, \dots \}$
b) $\{ \omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \dots \}$

Úloha 10.
$\Omega = \{ (6), (1,6), (2,6), (3,6), \dots ,(5,6), (1,1,6), (1,2,6), (1,3,6), \dots, (5,5,6), (1,1,1,6), \dots\}$
a) $A = \{ (i, j, 6) : i, j \in \{4, 5\} \}$, A má 4 prvky.
b) $B = \{ (i, j, k, 6) : i, j, k \in \{2, 4\} \}$, B má 8 prvkov.
c) $C = (\{ (6), (1,6), (2,6), \dots ,(5,6), (1,1,6), (1,2,6), (1,3,6), \dots, (5,5,6) \})'$. C je nekonečná.
d) $D = \{ (6), (1, 1, 6), (1, 2, 6), .. , (5, 5, 6), (1, 1, 1, 1, 6), (1, 1, 1, 2, 6), \dots, (5, 5, 5, 5, 6), ... \}$