2
Přímočarý pohyb

V roce 1977 vytvořila Kitty O'Neilová rekord v závodech dragsterů. Dosáhla tehdy rychlosti 628,85 km/h za pouhých 3,72 s. Jiný rekord tohoto typu zaznamenal v roce 1958 Eli Beeding ml. při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po klidovém startu dosáhly saně rychlosti 116 km/h za dobu 0,04 s, která představuje v pravém slova smyslu „okamžik". Je totiž kratší než mrknutí oka. Můžeme nějak porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo dokonce strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1 POHYB

Celý svět a všechno v něm se pohybuje. Dokonce i věci, které se zdají být v klidu, jako například silnice, se pohybují spolu s otáčením Země, jejím obíháním kolem Slunce, s pohybem Slunce kolem středu naší Galaxie i pohybem celé Galaxie vzhledem ke galaxiím ostatním. Část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a porovnáváním pohybů, se nazývá **kinematika**. Které charakteristiky pohybu vlastně máme měřit a jak je budeme srovnávat?

Než se pokusíme na tyto otázky odpovědět, všimněme si některých obecných vlastností pohybů. Naše úvahy budou prozatím omezeny třemi požadavky:

1. Pohyb se děje vůči Zemi (kterou pokládáme za nehybnou) výhradně po přímce. Ta může být svislá (pád kamene), vodorovná (jízda automobilu po dálnici), nebo libovolně skloněná. Vždy to ale musí být přímka. Takový pohyb nazýváme **přímočarý**. (Zatímco svět kolem nás je trojrozměrný, představuje pohyb po přímce pouze jednorozměrnou úlohu.)

2. Až do kap. 5 se nebudeme zabývat příčinami pohybu, pouze se budeme snažit pohyb *popsat*. Budeme zjišťovat, zda těleso zvyšuje či snižuje svou rychlost, zda se zcela zastavilo, nebo se začalo pohybovat opačným směrem. Půjde prostě o sledování změn pohybu v průběhu času.

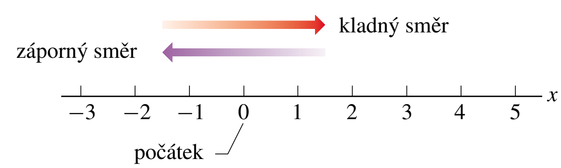
3. Pohybující se těleso nahradíme hmotným bodem. **Hmotný bod** je nejjednodušší myslitelný objekt, který zastupuje skutečné pohybující se těleso v případech, kdy pro popis jeho pohybu nejsou rozhodující jeho vlastní rozměry. Tento případ nastává zejména tehdy, pohybují-li se všechny části tělesa stejně rychle a ve stejném směru. Jako hmotný bod si můžeme představit i dítě, které sjíždí po přímé skluzavce na dětském hřišti. Představa hmotného bodu však již není vhodná pro otáčející se kolotoč, neboť jeho různé části se v daném okamžiku pohybují různě rychle a v různých směrech.

Hmotný bod je často užívaným a velmi funkčním fyzikálním modelem nejen při pouhém popisu pohybu těles, ale i v úvahách o příčinách jeho změn (kap. 5 a 6). Z tohoto obecnějšího pohledu nahrazuje hmotný bod skutečné těleso v případech, kdy je podstatná jeho celková hmotnost a nikoli jeho vlastní rozměry, tvar apod. Výstižnými výrazy zastupujícími pojem *hmotný bod* jsou **částice** nebo **bodový objekt**. Zadání příkladů a úloh v jednotlivých kapitolách jsou většinou formulována nikoli pro abstraktní hmotné body, částice, bodové objekty, ale pro konkrétní tělesa, s nimiž se setkáváme při fyzikálních experimentech i při každodenním dění (kostky, krabice, bedny, zvířata, lidé). V kapitolách 1 až 8, v nichž se jedná výhradně o posuvné pohyby těles, je všechna považujeme za hmotné body. S vědomím, že jsme právě přistoupili na tuto dohodu, se nebudeme úzkostlivě držet terminologické přesnosti a budeme používat jak názvy konkrétních objektů, tak termíny těleso či objekt.

2.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu objektu určujeme vždy vzhledem k nějakému vztažnému bodu, nejčastěji **počátku** souřadnicové osy (například osa x na obr. 2.1). Za **kladný směr** osy považujeme směr rostoucí souřadnice. Na obr. 2.1 je kladný směr orientován vpravo. Opačný směr nazýváme **záporný**.

Má-li například hmotný bod souřadnici $x = 5\,\mathrm{m}$, znamená to, že je ve vzdálenosti 5 m od počátku, měřené v kladném směru. Pokud by měl souřadnici $x = -5\,\mathrm{m}$, byl by od počátku stejně daleko, ale na opačné straně. Souřadnice $-5\,\mathrm{m}$ je menší než souřadnice $-1\,\mathrm{m}$ a ta je menší než souřadnice $+5\,\mathrm{m}$.



Obr. 2.1 Polohu bodu na ose zadáváme ve vyznačených délkových jednotkách. Stupnici lze libovolně rozšířit v obou směrech.

Změnu polohy objektu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 nazýváme posunutím a značíme Δx. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

(Podobně jako v př. 1.3 z kap. 1 označujeme symbolem Δ změnu veličiny, definovanou jako rozdíl její koncové a počáteční hodnoty.) Dosadíme-li za x_1 a x_2 konkrétní čísla, pak posunutí v kladném směru (na obr. 2.1 doprava) bude vždy kladné a posunutí v opačném směru (na obr. 2.1 doleva) vždy záporné. Přemístí-li se částice třeba z polohy $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ do polohy $x_2 = 12\,\mathrm{m}$, je $\Delta x = (12\,\mathrm{m}) - (5\,\mathrm{m}) = (+7\,\mathrm{m})$. Kladná hodnota posunutí nám říká, že se těleso pohnulo v kladném směru. Vrátí-li se těleso zpět do polohy $x = 5\,\mathrm{m}$, bude celkové posunutí nulové. Při výpočtu posunutí není důležité, kolik metrů těleso skutečně urazilo. Podstatná je pouze výchozí a koncová poloha.

Není-li v dané úloze důležité znaménko (tj. směr) posunutí, hovoříme o **velikosti** posunutí $|\Delta x|$. Ta je vždy nezáporná (tj. kladná anebo nula).

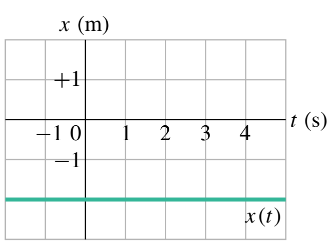
Posunutí je příkladem **vektorové veličiny**, i když zatím jen jednorozměrné. Jako každý vektor je charakterizováno jak velikostí, tak směrem. Vektorům je věnována celá kap. 3. V tuto chvíli postačí, uvědomíme-li si, že posunutí po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem (například počet metrů) a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus či minus.

Následuje první z kontrol, jichž v této knize najdete celou řadu. Každá obsahuje jednu nebo více otázek, vyžadujících jednoduchou úvahu či výpočet (často jen „z hlavy“). Můžete si pomocí nich jednoduše ověřit, zda jste probranou látku pochopili. Správné odpovědi jsou uvedeny na konci knihy.

KONTROLA 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x. (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m. Která z nich jsou záporná?

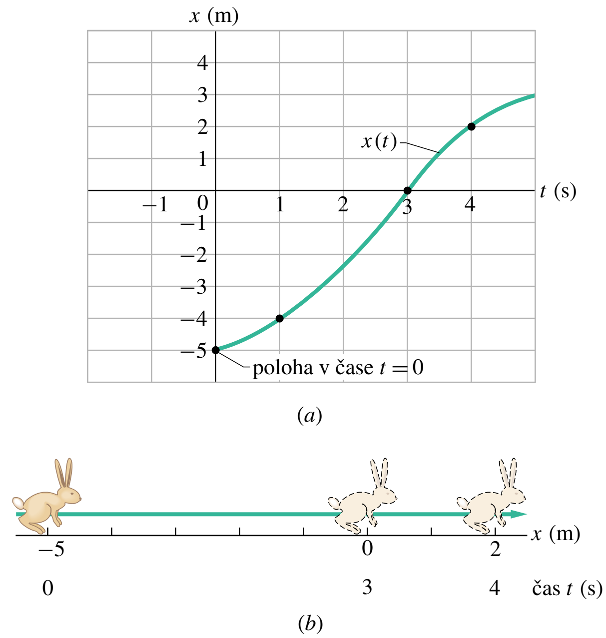
2.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Přehlednou informaci o poloze tělesa získáme, zakreslíme-li do grafu závislost jeho polohy $x(t)$ na čase t. Zvláště jednoduchým příkladem je graf na obr. 2.2, představující závislost $x(t)$ pro králíka,* který sedí v poloze $x = -2$ m. Mnohem zajímavější situaci znázorňuje graf na obr. 2.3a. V tomto případě se totiž králík pohyboval. Poprvé jsme si jej všimli v poloze $x = -5$ m v čase $t = 0$. Pohyboval se směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v okamžiku $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.



Obr. 2.2 Graf časové závislosti $x(t)$ polohy králíka sedícího v bodě o souřadnici $x = -2$ m. Jeho poloha se s časem nemění.

* Králíka považujeme za hmotný bod.



Obr. 2.3 (a) Graf časové závislosti polohy $x(t)$ běžícího králíka. (b) Obrázek skutečné dráhy králíka. Na stupnici pod osou x je vždy uveden okamžik, kdy králík dorazil do vyznačené polohy x.

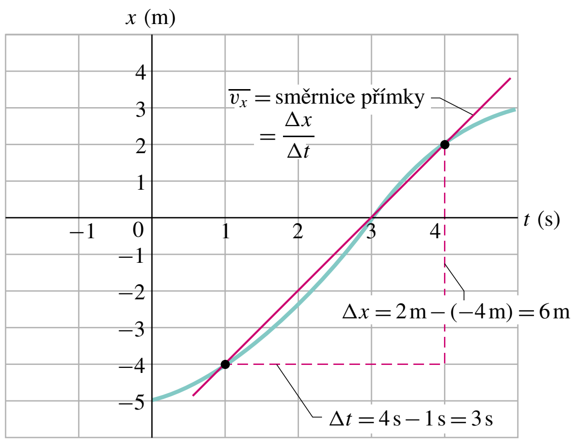
Na obr. 2.3b je zakreslen přímočarý pohyb králíka, jak bychom ho mohli vidět ve skutečnosti. Graf na obr. 2.3a je samozřejmě abstraktní: nic takového nemůžeme přímo pozorovat. Obsahuje však bohatší informaci o pohybu králíka. Umožňuje například zjistit, jak rychle se pohyboval. Ve skutečnosti je s otázkou „jak rychle“ spojeno několik různých fyzikálních veličin. Jednou z nich je tzv. **průměrná** neboli **střední rychlost** $\overline{v_x}$, kterou definujeme jako podíl posunutí Δx v určitém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Označujeme* ji $\overline{v_x}$. V grafu $x(t)$ je průměrná rychlost $\overline{v_x}$ dána směrnicí přímky, která spojuje dva vybrané body křivky: polohu x_1 v čase t_1 (v grafu bod $[t_1, x_1]$) a polohu x_2 v čase t_2 (bod $[t_2, x_2]$). Podobně jako posunutí má i průměrná rychlost velikost i směr. (Je tedy dalším příkladem vektorové veličiny.) Je-li hodnota $\overline{v_x}$ kladná, pak křivka zleva doprava stoupá (funkce $x(t)$ je rostoucí). Je-li záporná, pak křivka zleva doprava klesá (funkce $x(t)$ je klesající). Průměrná rychlost $\overline{v_x}$ má vždy stejné znaménko jako posunutí, neboť hodnota Δt ve vztahu (2.2) je vždy kladná.

* Pruh nad *libovolnou* veličinou bude všude v této knize znamenat její střední hodnotu.

Obr. 2.4 dává návod, jak určit průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ běžícího králíka z obr. 2.3 v časovém intervalu od $t = 1$ s do $t = 4$ s. Její hodnotu $\overline{v_x} = 6\,\text{m}/3\,\text{s} = +2\,\text{m·s}^{-1}$ jsme vypočetli jako směrnici spojnice dvou bodů na křivce grafu: první odpovídá začátku a druhý konci časového intervalu, během kterého jsme králíka sledovali.*



Obr. 2.4 Výpočet průměrné rychlosti v časovém intervalu od $t = 1$ s do $t = 4$ s. Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu.

PŘÍKLAD 2.1

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (0,450 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

ŘEŠENÍ: Pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ musíme znát celkové posunutí Δx a dobu Δt. Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy $x_1 = 0$) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = +12{,}8\,\text{km}$, a tedy $\Delta x = x_2 - x_1 = +12{,}8\,\text{km}$. Dobu jízdy $\Delta t'$ určíme z rovnice (2.2), po jejíž úpravě a dosazení dostaneme:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\overline{v_{x'}}} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} = 0{,}121\,\text{h},$$

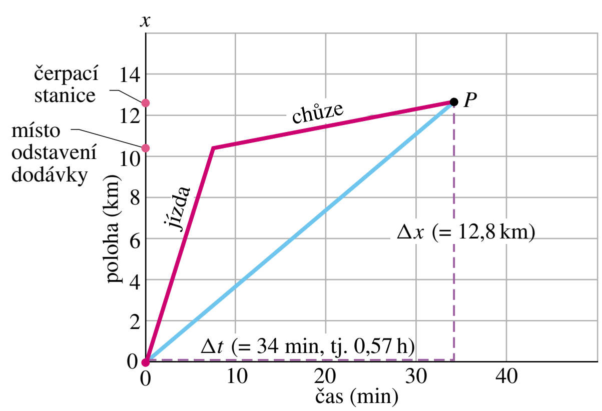
tj. asi 7,3 min. Jako $\Delta x' = 10{,}4$ km jsme označili vzdálenost, kterou dodávka ujela do okamžiku, kdy došlo palivo. Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je tedy

$$\Delta t = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} = 0{,}571\,\text{h}.$$

Nakonec dosadíme za Δx a Δt do rovnice (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(12{,}8\,\text{km})}{(0{,}571\,\text{h})} = \\ = 22{,}4\,\text{km/h} \doteq 22\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ zjistíme ještě graficky. Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (obr. 2.5). Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen písmenem P. Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující tyto dva body. Z délek přerušovaných čar je zřejmé, že směrnice má hodnotu $\overline{v_x} = 12{,}8\,\text{km}/0{,}57\,\text{h} = +22\,\text{km/h}$.



Obr. 2.5 Příklad 2.1. Přímkové úseky s označením „jízda" a „chůze" představují grafické znázornění časové závislosti polohy řidiče dodávky během jízdy, resp. během chůze k čerpací stanici. Směrnice přímky spojující počátek soustavy souřadnic s bodem P určuje jeho průměrnou rychlost.

PŘÍKLAD 2.2

Předpokládejme, že návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě musíme určit celkové posunutí Δx a vydělit je celkovou dobou Δt. Řidičova cesta nyní končí návratem k automobilu. Její počáteční bod má opět souřadnici $x_1 = 0$, koncový bod je dán polohou odstaveného automobilu $x_2 = 10{,}4$ km. Dostáváme

---

* V geometrii je směrnice přímky definována jako tangenta úhlu, který tato přímka svírá s nějakou vztažnou přímkou. Představuje-li však přímka například graf závislosti $x(t)$ polohy tělesa x na čase t, rozumíme směrnicí podíl přírůstku souřadnice Δx a odpovídajícího přírůstku času Δt, včetně uvážení příslušných jednotek. Je-li poloha měřena v metrech a čas v sekundách, vyjde směrnice v jednotkách m·s^{-1}. Tangentě úhlu α mezi přímkou grafu a časovou osou (která v tomto případě hraje roli vztažné přímky) bude rovna tehdy, zvolíme-li na osách t a x stejně dlouhé jednotky. Pokud by jedna sekunda na časové ose byla reprezentována třeba úsečkou o délce 1 cm, museli bychom na ose poloh zvolit jako 1 m rovněž úsečku o délce 1 cm.

$\Delta x = 10{,}4\,\mathrm{km} - 0 = 10{,}4\,\mathrm{km}$. Celková doba jízdy a chůze k čerpací stanici a zpět je

$$\Delta t = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(86\,\mathrm{km/h})} + (27\,\mathrm{min}) + (35\,\mathrm{min}) = \\ = 0{,}121\,\mathrm{h} + 0{,}450\,\mathrm{h} + 0{,}583\,\mathrm{h} = 1{,}15\,\mathrm{h}.$$

Je tedy

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(1{,}15\,\mathrm{h})} = \\ = 9{,}04\,\mathrm{km/h} \doteq 9{,}0\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná rychlost je v tomto případě menší než v příkladu 2.1. Je to pochopitelné, celkové posunutí je totiž menší a celková doba delší.

KONTROLA 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu x_1 rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

Jinou představu o tom, „jak rychle“ se hmotný bod pohybuje, lze získat pomocí tzv. **průměrné velikosti rychlosti** $\overline{v}$. Zatímco pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, která je vektorovou veličinou, je rozhodující vektor posunutí Δx, je průměrná velikost rychlosti veličinou skalární a je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu.* Je tedy

$$\overline{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}. \qquad (2.3)$$

Průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$ neobsahuje, na rozdíl od průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, informaci o směru pohybu. Je vždy nezáporná. V některých případech může být $\overline{v} = |\overline{v_x}|$, obecně to však neplatí. Výsledek následujícího příkladu to jasně dokumentuje.

PŘÍKLAD 2.3

Určete průměrnou velikost rychlosti pohybu v příkladu 2.2.

ŘEŠENÍ: Od počátku jízdy až po návrat zpět k vozu od čerpací stanice urazil řidič celkovou vzdálenost

$$10{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} = 15{,}2\,\mathrm{km}$$

za dobu 1,15 h. Průměrná velikost jeho rychlosti má tedy hodnotu

$$\overline{v} = \frac{(15{,}2\,\mathrm{km})}{(1{,}15\,\mathrm{h})} = 13{,}2\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.1: *Rozumíme dobře zadanému problému?*

Společným problémem všech, kteří se teprve začínají zabývat řešením fyzikálních úloh, je správně pochopit zadání. Zda jsme zadání skutečně pochopili, si nejlépe ověříme tak, že se je pokusíme vyložit někomu jinému. Vyzkoušejte si to.

Když čteme zadání, zapíšeme si hodnoty známých veličin i s jednotkami a označíme je obvyklými symboly. Rozmyslíme si, kterou veličinu máme spočítat a rovněž ji označíme obvyklým symbolem. V příkladech 2.1 a 2.2 je neznámou veličinou průměrná rychlost, kterou značíme $\overline{v_x}$. Pokusíme se najít fyzikální vztahy mezi neznámou veličinou a veličinami zadanými. V příkladech 2.1 a 2.2 je to definice průměrné rychlosti, zapsaná vztahem (2.2).

Bod 2.2: *Používáme správně jednotky?*

Věnujme vždy pozornost tomu, abychom do vzorců dosadili všechny veličiny v odpovídajících jednotkách. V příkladech 2.1 a 2.2 je přirozené počítat vzdálenost v kilometrech, čas v hodinách a rychlost v kilometrech za hodinu. Někdy musíme před dosazením jednotky převést.

Bod 2.3: *Je získaný výsledek rozumný?*

Nad výsledkem se nakonec zamysleme a zvažujme, dává-li smysl. Není získaná hodnota příliš velká nebo naopak příliš malá? Má správné znaménko a jednotky? Správná odpověď v př. 2.1 je 22 km/h. Kdyby nám vyšlo třeba 0,000 22 km/h, −22 km/h, 22 km/s nebo 22 000 km/h, měli bychom hned poznat, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Bod 2.4: *Umíme dobře číst z grafů?*

Měli bychom být schopni dobře rozumět takovým grafům, jaké jsou například na obr. 2.2, 2.3a, 2.4 a 2.5. U všech vynášíme na vodorovnou osu čas (jeho hodnoty rostou směrem vpravo). Na svislé ose je poloha hmotného bodu x vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Poloha x roste směrem vzhůru.

Pozorně si všímejme jednotek, v nichž jsou veličiny na osách vyjádřeny (sekundy či minuty, metry nebo kilometry), nezapomínejme na znaménka proměnných.

2.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST

Poznali jsme již dvě různé veličiny, které popisují, jak rychle se určité těleso nebo částice pohybuje: průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ a průměrnou velikost rychlosti $\overline{v}$. Obě určíme z měření prováděných v časovém intervalu Δt. Otázkou

* Je třeba rozlišovat *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\overline{v_x}|$ a *průměrnou velikost rychlosti* $\overline{v}$. První veličinu určíme prostě jako velikost vektoru definovaného vztahem (2.2) (viz také kap. 3), druhá je výsledkem středování velikosti rychlosti nezávisle na jejím směru, například z údaje rychloměru automobilu.

„jak rychle?“ však máme obvykle na mysli rychlost částice v daném okamžiku. Je popsána veličinou v_x, zvanou **okamžitá rychlost**, nebo jednoduše rychlost.

Okamžitou rychlost získáme z průměrné rychlosti tak, že budeme časový interval (neboli dobu) Δt, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule. S poklesem hodnoty Δt se průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

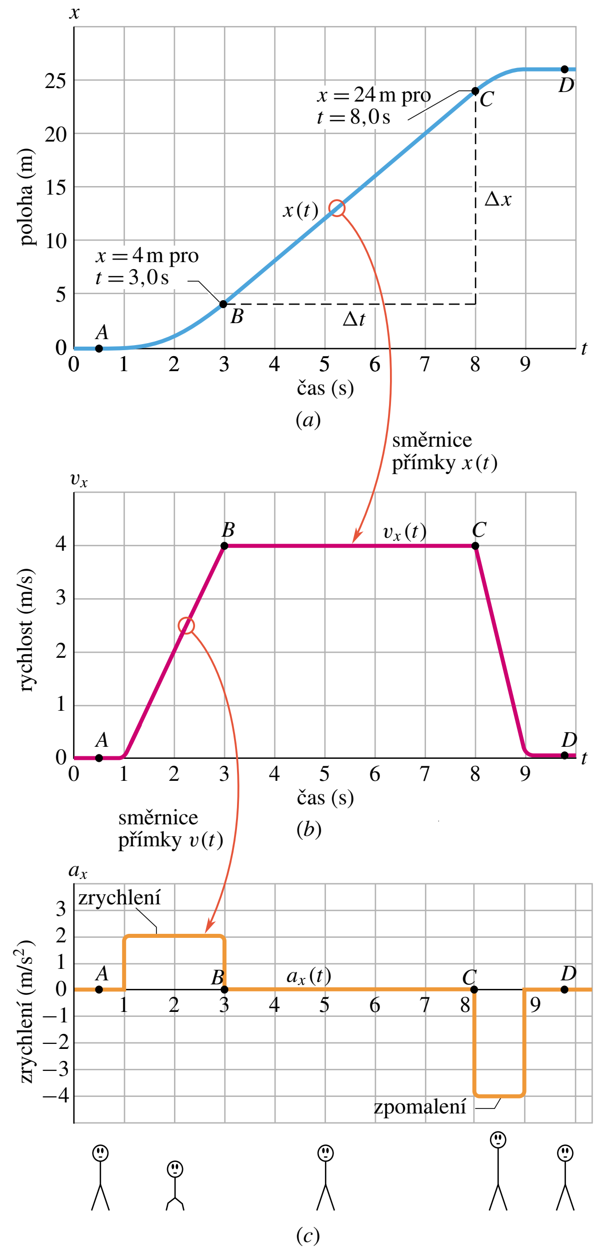
Okamžitá rychlost je další vektorovou veličinou, se kterou se setkáváme. Obsahuje totiž informaci i o směru pohybu částice. Určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem. Názornou geometrickou představu o limitním přechodu od průměrné k okamžité rychlosti můžeme získat z obr. 2.4. Budeme-li bez omezení přibližovat bod určený koncovým okamžikem uvažovaného časového intervalu Δt k bodu počátečnímu, přejde červená přímka v tečnu ke křivce grafu, vedenou počátečním bodem. Matematicky je okamžitá rychlost rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

Velikost okamžité rychlosti neboli **velikost rychlosti** již postrádá informaci o směru pohybu a má vždy nezápornou hodnotu. Rychlosti $+5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $-5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ mají stejnou velikost $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychloměr v automobilu měří jen velikost rychlosti, protože není schopen určit směr pohybu.

Angličtí studenti jsou na tom lépe. Obecná čeština užívá slova *rychlost* ve třech různých smyslech, pro které má angličtina tři různá slova, totiž *velocity* (vektor rychlosti), *speed* (velikost vektoru rychlosti) a *rate* (obecná změna v čase, např. rychlost hoření). Všechna tato slova jsou v angličtině zcela běžná. Ve fyzice užíváme slova *rychlost* pro *vektorovou veličinu*. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, raději užijeme sousloví, jako je „rychlost o velikosti… “. Slova „rychlost“ namísto „velikost rychlosti“ lze užít pouze tam, kde je *opravdu* zaručeno, že na směru nezáleží (výroky typu „Rychlost světla ve vzduchu je větší než ve vodě.“) anebo kde je směr jasně dán a nemůže se měnit (rychlost vlaku).

PŘÍKLAD 2.4

Na obr. 2.6a je zakreslena časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (kladný směr souřadnicové osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti kabiny na čase.



Obr. 2.6 Příklad 2.4. (a) Časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu pohybující se svisle vzhůru po ose x. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$. Všimněte si, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj. $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. (c) Časová závislost zrychlení kabiny $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj. $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$. Schematické nákresy postaviček v dolní části obrázku naznačují pocity pasažéra při urychlování kabiny.

ŘEŠENÍ: Úseky grafu obsahující body A a D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová. V úseku mezi body B a C se sklon křivky nemění a souřadnice kabiny stále roste. Kabina se pohybuje konstantní rychlostí. Směrnici tečny (tedy rychlost) určíme jako podíl

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x = \frac{(24\,\mathrm{m} - 4{,}0\,\mathrm{m})}{(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s})} = +4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kladné znaménko ukazuje, že se výtah pohybuje v kladném směru. Hodnoty rychlosti $v_x = 0$ a $v_x = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsou pro příslušné časové intervaly vyznačeny v grafu na obr. 2.6b. Při rozjezdu a opětovném zastavení, tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění, například podle obr. 2.6b. (K diskusi o obr. 2.6c přistoupíme až v čl. 2.5.)

Můžeme řešit i „obrácenou úlohu", kdy potřebujeme ze znalosti funkce $v_x(t)$ (graf na obr. 2.6b) určit $x(t)$ (obr. 2.6a). Její řešení však není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o *změnách* polohy, nikoli o poloze samotné. Abychom určili změnu polohy v libovolném časovém intervalu, vypočteme „obsah plochy pod křivkou" grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu.* Mezi třetí a osmou sekundou se kabina pohybuje dejme tomu konstantní rychlostí $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Změnu její polohy určíme jako „obsah plochy pod křivkou $v_x(t)$" odpovídající tomuto časovému intervalu:

$$\text{„Obsah plochy pod křivkou"} = (4{,}0)(8{,}0 - 3{,}0) = +20.$$

(Tato hodnota je kladná, protože příslušná část křivky $v_x(t)$ leží nad časovou osou.) Získaný *číselný údaj* opatříme správnou jednotkou**, v tomto případě $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$. Obr. 2.6a potvrzuje, že hodnota souřadnice určující polohu kabiny se v uvažovaném časovém intervalu skutečně zvětšila o 20 m. Z obr. 2.6b však nemůžeme poznat, jaká byla její poloha na začátku a konci tohoto intervalu. K tomu bychom potřebovali další údaj.

PŘÍKLAD 2.5

Hmotný bod se pohybuje po ose x a jeho poloha je v závislosti na čase určena vztahem

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3. \tag{2.5}$$

Jaká je jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5$ s? Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

ŘEŠENÍ: Zadání pro jednoduchost neobsahuje jednotky. Můžeme si je však k číselným koeficientům doplnit takto: 7,8 m, $9{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$. Rychlost určíme pomocí rovnice (2.4), kde za x na pravé straně dosadíme závislost (2.5):

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

Dostaneme tak

$$v_x = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 = 9{,}2 - 6{,}3t^2. \tag{2.6}$$

Pro $t = 3{,}5$ je

$$v_x = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68,$$
$$v_x = -68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V okamžiku $t = 3{,}5$ s se hmotný bod pohybuje v záporném směru osy x a má tedy rychlost $-68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (o směru pohybu vypovídá záporné znaménko). Na pravé straně vztahu (2.6) vystupuje čas a rychlost v_x se tedy s časem mění.

KONTROLA 3: Následující čtyři vztahy představují možné případy závislosti polohy částice na čase. V každém z nich je poloha x zadávána v metrech, čas t v sekundách a vždy platí $t > 0$. (1) $x = 3t - 2$, (2) $x = -4t^2 - 2$, (3) $x = 2/t^2$, (4) $x = -2$. (a) Ve kterých z uvedených případů je rychlost v_x částice konstantní? (b) Kdy je záporná? (c) Kdy se pohyb částice zpomaluje?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.5: *Derivace a sklon křivky*

Derivace funkce je určena sklonem křivky (grafu funkce) v daném bodě. Přesněji vyjádřeno je derivace rovna směrnici tečny ke křivce v tomto bodě. Ukázkou může být příklad 2.4: Okamžitá rychlost výtahu v libovolném okamžiku (vypočtená jako derivace funkce $x(t)$ podle (2.4)) je rovna směrnici tečny ke křivce na obr. 2.6a sestrojené v odpovídajícím bodě. Ukážeme si, jak je možné určit derivaci funkce graficky.

Na obr. 2.7 je graf funkce $x(t)$ pro pohybující se hmotný bod. Při grafickém určení jeho rychlosti v okamžiku $t = 1$ s budeme postupovat takto: Nejprve na křivce označíme bod, který tomuto času odpovídá. V tomto bodě narýsujeme tečnu ke křivce grafu. Pracujeme co nejpečlivěji. Dále sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Jeho konkrétní volba je libovolná, neboť přepony všech takových trojúhelníků mají stejný sklon. Zvolíme tedy trojúhelník co největší, abychom směrnici změřili co nejpřesněji. Pomocí měřítek na souřadnicových osách určíme Δx a Δt. Směrnice tečny ke křivce je dána podílem $\Delta x/\Delta t$. Z obr. 2.7 dostaneme

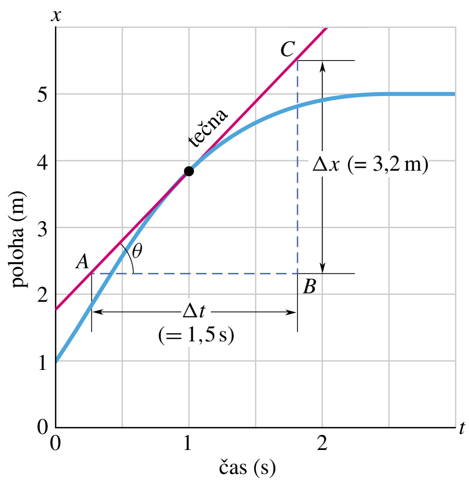
$$\text{směrnice tečny} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5{,}5\,\mathrm{m} - 2{,}3\,\mathrm{m})}{(1{,}8\,\mathrm{s} - 0{,}3\,\mathrm{s})} = \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} = +2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rovnice (2.4) je tato směrnice rovna rychlosti částice v okamžiku $t = 1$ s. Kdybychom změnili měřítko na některé souřadnicové ose, změnil by se sice jak tvar křivky, tak velikost úhlu θ, ale rychlost určená popsaným způsobem

* Tento postup zdůvodníme v článku 2.7.

** Její rozměr je určen součinem veličin na osách grafu.

by byla stejná. Známe-li matematické vyjádření funkce $x(t)$ (příklad 2.5), je vhodnější stanovit rychlost částice přímo, výpočtem její derivace. Grafická metoda je pouze přibližná.



Obr. 2.7 Derivace křivky v libovolném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Směrnice tečny (a tedy i okamžitá rychlost $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$) v čase $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ je $\Delta x/\Delta t = +2{,}1$ m/s.

2.5 ZRYCHLENÍ

Jestliže se vektor rychlosti částice mění, říkáme, že se částice pohybuje se zrychlením. **Průměrné zrychlení** $\overline{a_x}$ v časovém intervalu Δt je definováno podílem

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Okamžité zrychlení (nebo prostě jen **zrychlení**) je určeno derivací rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Podle vztahu (2.8) je zrychlení v daném okamžiku rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Spojením rovnic (2.8) a (2.4) dostaneme

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.9}$$

Zrychlení hmotného bodu je tedy v každém okamžiku dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Nejužívanější jednotkou zrychlení je $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V příkladech a cvičeních se můžeme setkat i s jinými jednotkami, všechny však budou mít tvar délka·čas^{-2}. Zrychlení má velikost i směr, je tedy další vektorovou veličinou. Při pohybu podél osy x stačí k určení směru zrychlení zadat pouze příslušné znaménko, podobně jako u posunutí a rychlosti.

Na obr. 2.6c je graf časové závislosti zrychlení výtahové kabiny z příkladu 2.4. Porovnejme grafy $a_x(t)$ a $v_x(t)$: každý bod grafu $a_x(t)$ je určen derivací (tj. směrnicí tečny) grafu $v_x(t)$ v odpovídajícím bodě. Je-li rychlost v_x konstantní (buď $0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ nebo $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$), je její derivace nulová. Zrychlení kabiny je rovněž nulové. Při rozjezdu kabiny je derivace rychlosti kladná, kladné je tedy i zrychlení $a_x(t)$. Při zpomalování má rychlost zápornou derivaci a zrychlení je záporné. Porovnejme nyní sklon dvou přímých úseků grafu $v_x(t)$, které odpovídají rozjezdu a brzdění výtahu. Sklon křivky odpovídající brzdění je strmější než sklon při rozjezdu. Brzdění totiž trvalo jen polovinu doby potřebné k rozjezdu. Velikost zrychlení výtahu při brzdění byla větší než při rozjezdu, což je zřejmé i z obr. 2.6c.

Jízda výtahem je doprovázena nepříjemnými pocity, jak výmluvně napovídají schematické kresby postaviček v dolní části obr. 2.6. Při rozjezdu kabiny jsme jakoby tlačeni směrem dolů, při zastavování naopak nadlehčováni. V mezidobí nic zvláštního nepociťujeme. Svými smysly můžeme vnímat zrychlení, nikoli rychlost. Jedeme-li autem rychlostí 90 km/h nebo letíme letadlem rychlostí 900 km/h, naše tělo si pohyb vůbec neuvědomuje. Pokud by však náhle auto či letadlo začalo měnit svou rychlost, pociťujeme tuto změnu velmi intenzivně až nepříjemně. Silné vzrušení, které zažíváme při jízdě na horské dráze v lunaparku, je částečně způsobeno právě prudkými změnami rychlosti pohybu našeho těla. Ukázka reakce lidského těla na velké zrychlení je na fotografiích obr. 2.8, které byly pořízeny při prudkém urychlení a následném brzdění raketových saní.

Velká zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g“, kde

$$1g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq \doteq 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ (\text{jednotka } g). \tag{2.10}$$

Tato hodnota byla přijata jako **normální tíhové zrychlení** na 2. generální konferenci pro váhy a míry v r. 1901. Odpovídá severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny. (V čl. 2.8 se dovíme, že g je velikost zrychlení tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu.) Při jízdě na horské dráze dosahuje velikost zrychlení krátkodobě hodnoty až $3g$, tj. $3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Obr. 2.8 Plukovník J. P. Stapp v raketových saních při urychlování na vysokou rychlost (zrychlení směřuje ke čtenáři) a při brzdění (zrychlení směřuje od čtenáře).

PŘÍKLAD 2.6

(a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla největší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího automobilu?

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení je dáno vztahem (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(628{,}85\,\mathrm{km/h} - 0)}{(3{,}72\,\mathrm{s} - 0)} = \frac{174{,}68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}72\,\mathrm{s}} = 47\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 4{,}8g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Předpokládali jsme, že zrychlení má směr kladné osy x.)

(b) Jaké bylo průměrné zrychlení saní při jízdě Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

ŘEŠENÍ: Opět použijeme vztahu (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(116\,\mathrm{km/h} - 0)}{(0{,}04\,\mathrm{s} - 0)} = \frac{32{,}22\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{0{,}04\,\mathrm{s}} = 806\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 80g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní se můžeme vrátit k otázce, kterou jsme si položili v úvodu kapitoly, kde jsme se o obou rekordních výkonech poprvé zmínili: „Jak rozhodneme, která jízda mohla přinést jezdci větší vzrušení? Máme porovnávat výslednou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?“ Odpověď již známe: protože lidské tělo vnímá zrychlení a ne rychlost, měli bychom porovnávat právě zrychlení. V tomto srovnání „vítězí“ sáňkař Beeding, i když jeho výsledná rychlost byla mnohem menší než rychlost automobilistky O'Neilové. Zrychlení, kterému byl Beeding vystaven, by bylo smrtelné, kdyby trvalo delší dobu.

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.6: *Znaménko zrychlení*

Vraťme se k příkladu 2.6 a všimněme si znaménka vypočteného zrychlení. Ve většině běžných situací mívá znaménko zrychlení následující význam: těleso má kladné zrychlení, jestliže se jeho rychlost zvyšuje, záporné zrychlení odpovídá klesající rychlosti (těleso brzdí). Tento výklad však nemůžeme přijmout bezmyšlenkovitě v každé situaci. Má-li například automobil rychlost $v_x = -27\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ($= -97\,\mathrm{km/h}$) a zcela zastaví za 5 s, je jeho průměrné zrychlení při brzdění $\overline{a_x} = +5{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Toto zrychlení je kladné, i když se pohyb vozu zpomaloval. Rozhodující je, že zrychlení má opačné znaménko než počáteční rychlost.

Správná interpretace znaménka zrychlení je následující:

Má-li zrychlení částice stejné znaménko jako okamžitá rychlost, roste velikost její rychlosti a její pohyb se zrychluje. Má-li zrychlení opačné znaménko než okamžitá rychlost, klesá velikost rychlosti částice a její pohyb se zpomaluje.

Tato interpretace získá náležitý význam v kap. 4, kde se budeme podrobněji věnovat vektorové povaze rychlosti a zrychlení.

KONTROLA 4: Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes (a) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti roste, (b) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti klesá, (c) v záporném směru osy x s rostoucí velikostí rychlosti a (d) v záporném směru osy x s klesající velikostí rychlosti?

PŘÍKLAD 2.7

Poloha částice pohybující se podél osy x (obr. 2.1) závisí na čase takto:

$$x = 4 - 27t + t^3.$$

Číselné koeficienty jsou vyjádřeny v metrech, metrech za sekundu a v metrech za sekundu na třetí.

(a) Určete $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

ŘEŠENÍ: Rychlost $v_x(t)$ určíme jako derivaci polohy $x(t)$ podle času:

$$v_x = -27 + 3t^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zrychlení $a_x(t)$ je časovou derivací rychlosti $v_x(t)$:

$$a_x = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Je v některém okamžiku rychlost částice nulová?

ŘEŠENÍ: Položíme-li $v_x(t) = 0$, dostaneme rovnici

$$0 = -27 + 3t^2,$$

jejíž řešení je $t = \pm 3\,\mathrm{s}$. (Odpověď)

(c) Popište pohyb částice pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Provedeme rozbor závislostí $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

V čase $t = 0$ je částice v bodě o souřadnici $x = +4\,\mathrm{m}$ a pohybuje se doleva rychlostí $-27\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Její zrychlení je nulové.

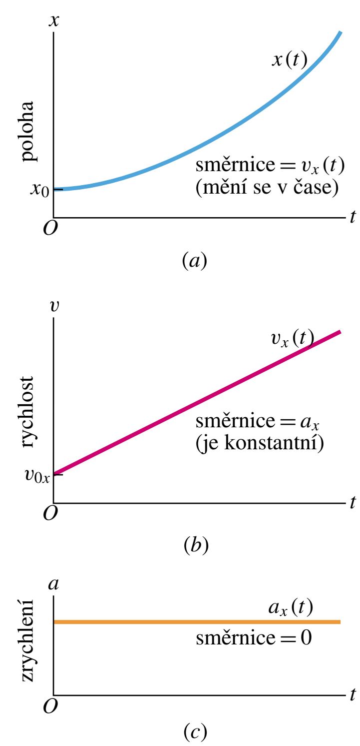
V časovém intervalu $0\,\mathrm{s} < t < 3\,\mathrm{s}$ se částice stále pohybuje doleva, její pohyb se však zpomaluje. Její zrychlení je totiž kladné a směřuje tedy doprava. Toto tvrzení ověříme tak, že do vztahů pro $v_x(t)$ a $a_x(t)$ zkusmo dosadíme některý okamžik ležící v uvedeném časovém intervalu (proveďte např. pro $t = 2\,\mathrm{s}$). Zrychlení částice s časem roste, její pohyb směrem vlevo je čím dál pomalejší.

V okamžiku $t = 3\,\mathrm{s}$ má částice nulovou rychlost ($v_x = 0$). Právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu ležícího vlevo od počátku ($x = -50\,\mathrm{m}$). Zrychlení zůstává kladné a jeho velikost neustále roste.

Pro $t > 3\,\mathrm{s}$ narůstá kladné zrychlení. Rychlost, která nyní směřuje doprava, velmi prudce roste. (Všimněme si, že nyní má zrychlení stejné znaménko jako rychlost.) Částice neustále pokračuje v pohybu směrem doprava.

2.6 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: SPECIÁLNÍ PŘÍPAD

Velmi často se setkáváme s pohyby, jejichž rychlost se (alespoň přibližně) mění tak, že zrychlení je konstantní. Nazýváme je rovnoměrně zrychlené. Příkladem může být automobil, který se na křižovatce rozjíždí na zelenou. (Grafy časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení, odpovídající takové situaci, jsou schematicky zakresleny na obr. 2.9.) Stejně tak může být zrychlení automobilu konstantní i při brzdění.



Obr. 2.9 (a) Časová závislost polohy $x(t)$ částice pohybující se rovnoměrně zrychleně. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$ je v každém bodě určena směrnicí křivky $x(t)$ na obrázku (a). (c) Zrychlení částice $a_x(t)$ je stálé a je dáno (konstantní) směrnicí grafu $v_x(t)$.

Podobné případy jsou tak časté, že je vhodné mít pro jejich popis zvláštní rovnice. Se dvěma možnými způsoby jejich odvození se postupně seznámíme v tomto a následujícím článku.

Při studiu obou článků i při řešení úloh a cvičení je třeba mít neustále na paměti, že *tyto rovnice platí jen pro případ konstantního zrychlení* (nebo zrychlení, které lze v dobrém přiblížení za konstantní považovat).

Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení shodné se zrychlením průměrným. S malou změnou označení tak můžeme rovnici (2.7) přepsat do tvaru

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}.$$

Symbolem v_{0x} je označena rychlost v okamžiku $t = 0$ (počáteční rychlost), a v_x je rychlost v libovolném pozdějším čase t. Rovnici můžeme ještě upravit takto:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{2.11}$$

Všimněme si, že pro $t = 0$ vede tento vztah k očekávané rovnosti $v_x = v_{0x}$. Derivováním rovnice (2.11) podle času dostaneme $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x$, v souhlasu s definičním vztahem pro zrychlení a_x. Těmito jednoduchými kontrolními výpočty jsme ověřili správnost odvozené rovnice. Na obr. 2.9b je graf funkce $v_x(t)$ dané rovnicí (2.11).

Obdobně lze přepsat rovnici (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

a odtud

$$x = x_0 + \overline{v_x} t. \tag{2.12}$$

x_0 je poloha částice v okamžiku $t = 0$ (počáteční poloha), $\overline{v_x}$ je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 0$ až do obecného okamžiku t.

Snadno zjistíme, že grafem funkce $v_x(t)$ dané vztahem (2.11) je přímka. Průměrná rychlost v libovolném časovém intervalu (a tedy i v intervalu od $t = 0$ po obecný okamžik t) je v tomto případě určena aritmetickým průměrem počáteční a koncové rychlosti (v_{0x} a v_x). Můžeme ji tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{v_x} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x). \tag{2.13}$$

Dosadíme-li za v_x pravou stranu rovnice (2.11), získáme po malých úpravách vztah

$$\overline{v_x} = v_{0x} + \tfrac{1}{2}a_x t. \tag{2.14}$$

Po dosazení z (2.14) do (2.12) nakonec dostaneme

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2}a_x t^2. \tag{2.15}$$

Pro kontrolu můžeme dosadit $t = 0$ a dostáváme očekávaný výsledek $x = x_0$. Derivací vztahu (2.15) podle času získáme, opět podle očekávání, vztah (2.11). Graf funkce $x(t)$ dané vztahem (2.15) je na obr. 2.9a. Uvědomme si, že funkční předpis (2.15) pro $x(t)$ obsahuje veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu. Je-li zadáno zrychlení a_x (stálé v průběhu celého děje) a hodnoty x_0 a v_{0x}, určující počáteční stav částice, je možné určit v libovolném okamžiku t

(1) její polohu x z rovnice (2.15),

(2) její rychlost v_x z rovnice (2.11).

Vztah (2.15) lze z (2.11) jednoduše získat integrací, a obráceně vztah (2.11) vznikne z (2.15) derivováním.

Při řešení některých úloh sloužících k procvičení problematiky rovnoměrně zrychleného pohybu je však výhodnější jiný pohled na vztahy (2.11) a (2.15). Často se objevují zadání, která nesměřují k jejich využití jako předpisů pro *funkce*, ale týkají se jednotlivého okamžiku. V takových případech pak bývá vhodné hledět na tyto vztahy jako na soustavu dvou rovnic, obsahujících šest veličin t, x, x_0, v_x, v_{0x} a a_x. Čtyři z nich musí být zadány, abychom dvě zbývající mohli určit řešením soustavy. Tab. 2.1 shrnuje kromě rovnic (2.11) a (2.15) další tři rovnice, které lze získat jejich úpravou. Společným rysem všech pěti rovnic je nepřítomnost některé z veličin t, $x - x_0$, v_x, v_{0x} a a_x. Soupis může být snad užitečný těm, kteří neradi provádějí algebraické úpravy a dají přednost přímému dosazení zadaných číselných hodnot do rovnice, kterou vhodně vyberou podle typu zadání.

Tabulka 2.1 **Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb**

Číslo rovnice	Rovnice	Chybějící veličina
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2}a_x t^2$	v_x
(2.16)	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	t
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x
(2.18)	$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2}a_x t^2$	v_{0x}

Před použitím tabulky se ujistíme, že se úloha opravdu týká rovnoměrně zrychleného pohybu. Vzpomeňme si, že funkce (2.11) je derivací funkce (2.15). Zbývající tři rovnice vznikly algebraickou úpravou spočívající ve vyloučení některé z vyjmenovaných veličin z rovnic (2.11) a (2.15).

KONTROLA 5: Následující čtyři funkce popisují časovou závislost polohy hmotného bodu $x(t)$: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Ve kterém z těchto případů můžeme použít rovnice z tab. 2.1?

PŘÍKLAD 2.8

Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti 75 km/h na 45 km/h.

(a) Určete zrychlení automobilu za předpokladu, že bylo během brzdění konstantní.

ŘEŠENÍ: Veličiny v_{0x}, v_x a $x - x_0$ jsou zadány, potřebujeme určit a_x. Čas se v zadání úlohy neobjevuje. Z tab. 2.1 proto vybereme rovnici (2.16) a vypočteme z ní neznámé zrychlení a_x.

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\,\mathrm{km/h})^2 - (75\,\mathrm{km/h})^2}{2(0{,}088\,\mathrm{km})} =$$
$$= -2{,}05 \cdot 10^4\,\mathrm{km/h^2} \doteq -1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(V posledním kroku výpočtu je třeba věnovat pozornost převodu jednotky $\mathrm{h^{-2}}$ na $\mathrm{s^{-2}}$.) Všimněme si, že rychlosti jsou kladné a zrychlení záporné. Pohyb automobilu se opravdu zpomaluje.

(b) Jak dlouho řidič v této fázi pohybu brzdil?

ŘEŠENÍ: Nyní je neznámou veličinou čas a zrychlení se naopak v zadání nevyskytuje. Z tab. 2.1 volíme rovnici (2.17) a řešíme ji vzhledem k neznámé t:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{0x} + v_x} = \frac{2(0{,}088\,\mathrm{km})}{(75 + 45)\,\mathrm{km/h}} =$$
$$= 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h} = 5{,}4\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Řidič dále brzdí se zrychlením určeným v části (a). Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví?

ŘEŠENÍ: Při řešení této části úlohy nepotřebujeme uvažovat o posunutí $x - x_0$. Použijeme tedy rovnici (2.11) a vyjádříme t:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - (75\,\mathrm{km/h})}{(-2{,}05 \cdot 10^4\,\mathrm{km/h^2})} =$$
$$= 3{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h} = 13\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jakou dráhu urazí vůz od počátku brzdění do úplného zastavení?

ŘEŠENÍ: Hledaná dráha je přímo rovna posunutí. Užijeme rovnici (2.15):

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 =$$
$$= (75\,\mathrm{km/h})(3{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h}) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(-2{,}05 \cdot 10^4\,\mathrm{km{\cdot}h^{-2}})(3{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h})^2 =$$
$$= 0{,}137\,\mathrm{km} \doteq 140\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Je třeba dbát na to, abychom zrychlení a_x dosazovali se správným znaménkem!)

(e) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje se stejným zrychlením jako v části (a), počáteční rychlost je však nyní taková, že automobil zcela zastaví na dráze 200 m. Jak dlouho trvá brzdění?

ŘEŠENÍ: V úloze nevystupuje počáteční rychlost. Použijeme proto rovnici (2.18). Dosadíme $v_x = 0$ (v okamžiku t automobil zastavil) a rovnici řešíme vzhledem k neznámé t:

$$t = \left(-\frac{2(x - x_0)}{a_x}\right)^{1/2} = \left(-\frac{2(200\,\mathrm{m})}{-1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right)^{1/2} =$$
$$= 16\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.7: *Rozměrová zkouška*

Jednotkou rychlosti je $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jednotkou zrychlení $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ apod. Sčítat či odčítat můžeme jen ty členy, které mají stejnou jednotku (stejný fyzikální rozměr). Pokud se chceme ujistit, že jsme při odvozování rovnice neudělali chybu, provedeme tzv. rozměrovou zkoušku, tj. zkontrolujeme fyzikální rozměry všech členů v rovnici.

Například na pravé straně rovnice (2.15) ($x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) musí mít každý člen rozměr délky, ve shodě s rozměrem posunutí na levé straně. Člen $v_{0x}t$ má jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\mathrm{s}) = \mathrm{m}$ a člen $\frac{1}{2}a_x t^2$ jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\,(\mathrm{s^2}) = \mathrm{m}$. Oba členy tedy mají správný rozměr a rovnice je podle rozměrové zkoušky v pořádku. Číselné konstanty, jako například $\frac{1}{2}$ nebo π, jsou bezrozměrové (mají rozměr 1).

2.7 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: JINÝ PŘÍSTUP

Článek je určen čtenářům obeznámeným se základy integrálního počtu.

V předchozím článku jsme odvodili vztahy (2.11) a (2.15) na základě skutečnosti, že při rovnoměrně zrychleném pohybu splývá průměrné zrychlení částice v libovolném časovém intervalu s jejím okamžitým zrychlením v libovolném okamžiku. Přesvědčili jsme se, že vztah (2.15) obsahuje úplnou informaci o průběhu rovnoměrně zrychleného pohybu, jsou-li zadány hodnoty x_0, v_{0x} a a_x. Vztah (2.11) je jeho derivací. Závislosti (2.11) a (2.15) lze odvodit i jiným způsobem, jehož předností je možnost zobecnění i na případy pohybu s libovolným zrychlením, závislým na čase. Postup spočívá v integraci zrychlení a_x, které je při rovnoměrně zrychleném pohybu konstantní. Podle definičního vztahu (2.8) platí

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},$$

tj.

$$\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t.$$

Integrací obou stran rovnice dostáváme

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x \,\mathrm{d}t.$$

Zrychlení je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál a píšeme

$$\int \mathrm{d}v_x = a_x \int \mathrm{d}t,$$

tj.

$$v_x = a_x t + C. \tag{2.19}$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky pro rychlost částice: v okamžiku $t = 0$ je rychlost $v_x = v_{0x}$. Dosadíme tyto hodnoty do vztahu (2.19), který platí pro libovolný okamžik, a tedy i pro $t = 0$. Dostaneme

$$v_{0x} = a_x \cdot 0 + C = C.$$

Zjištěnou hodnotu konstanty C dosadíme do (2.19) a získáváme časovou závislost rychlosti (2.11). Stejným postupem odvodíme závislost (2.15). Z definice rychlosti (2.4) přímo plyne

$$\mathrm{d}x = v_x \,\mathrm{d}t.$$

Integrací levé i pravé strany dostaneme

$$\int \mathrm{d}x = \int v_x \,\mathrm{d}t.$$

Z předchozích výsledků víme, že rychlost v_x závisí na čase podle (2.11). Nemůžeme ji tedy vytknout před integrál a přesně zopakovat postup použitý při integraci zrychlení. Místo v_x však dosadíme do integrálu funkci (2.11):

$$\int \mathrm{d}x = \int (v_{0x} + a_x t) \,\mathrm{d}t.$$

Počáteční rychlost v_{0x} je konstantní, takže integrál na pravé straně můžeme rozepsat do tvaru

$$\int \mathrm{d}x = v_{0x} \int \mathrm{d}t + a_x \int t \,\mathrm{d}t.$$

Integrace obou stran rovnice vede k výsledku

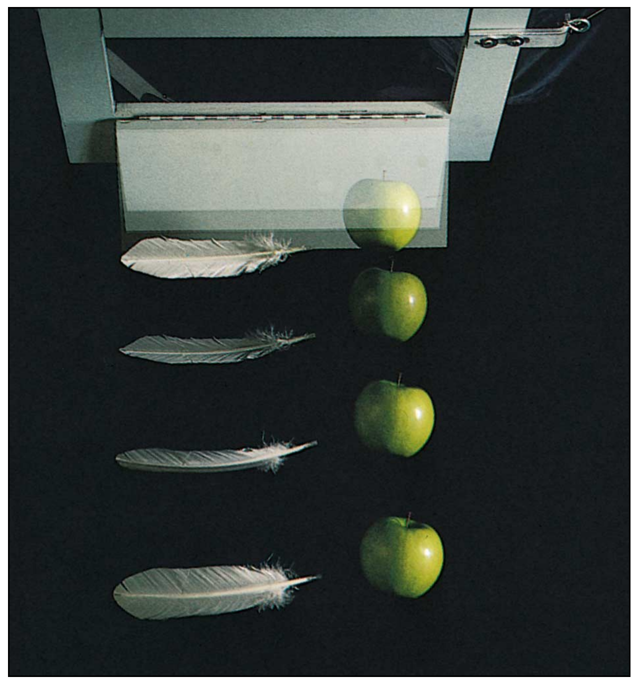
$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 + C', \tag{2.20}$$

kde C' je další integrační konstanta. Určíme ji opět z počáteční podmínky, tentokrát pro polohu částice: v čase $t = 0$ je $x = x_0$. Dosazením do (2.20) zjistíme, že hodnota konstanty C' je $C' = x_0$. Vztah (2.20) tak přejde na tvar (2.15).

2.8 SVISLÝ VRH

Představme si následující pokus: V blízkosti povrchu Země vrháme nějaké těleso svisle vzhůru nebo dolů (svislý směr udává např. volně visící olovnice) a nějak při tom zajistíme, aby se neuplatnil vliv odporu prostředí. Zjistíme, že se těleso s velkou přesností pohybuje se stálým zrychlením, směřujícím svisle dolů. Nazýváme je **tíhové zrychlení** a značíme písmenem g. Z experimentu víme, že tíhové zrychlení nezávisí na vlastnostech tělesa (hmotnosti, hustotě, tvaru, …) a je pro všechna tělesa stejné.

Zvláštním případem svislého vrhu je **volný pád**, při kterém těleso prostě upustíme. Vypouštíme ho tedy s nulovou počáteční rychlostí. Na obr. 2.10 vidíme fotografický záznam souběžného volného pádu dvou různých těles, pírka a jablka, ve vakuu. (Fotografie byly pořízeny v různých okamžicích s využitím stroboskopického efektu.) Při pádu obou těles se jejich rychlost zvyšuje se stejným zrychlením g.



Obr. 2.10 Pírko a jablko se při volném pádu ve vakuu pohybují se stejným zrychlením g. Nasvědčuje tomu rostoucí vzdálenost po sobě následujících fotografických obrazů objektů, které byly zaznamenány v rovnoměrně rozložených okamžicích.

Tíhové zrychlení se mírně mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Při hladině moře ve středních zeměpisných šířkách má hodnotu zhruba 9,8 m·s^{-2}, viz vztah (2.10) a text za ním. Budeme jej používat v příkladech a cvičeních.

Rovnice popisující rovnoměrně zrychlený pohyb uvedené v tab. 2.1 platí i pro svislý vrh v blízkosti* zemského povrchu. Můžeme je tedy při řešení úloh o svislém vrhu těles používat, pokud je odpor vzduchu zanedbatelný. Tab. 2.1 přizpůsobíme nové situaci provedením dvou drobných změn: (1) Se svislým směrem, v němž se nyní odehrává pohyb tělesa, spojíme souřadnicovou osu y tak, aby směřovala vzhůru. (Osa x bývá častěji vyhrazena pro popis pohybu ve vodorovném směru.) Pro rychlost budeme používat označení v_y a pro zrychlení a_y. Tato změna usnadní i pozdější popis složitějších pohybů v rovině nebo v prostoru. (2) Tíhové zrychlení je při zvolené orientaci osy y záporné, a tak můžeme ve všech rovnicích zaměnit a_y za $-g$.

Po provedení popsaných úprav získáme obměnu tabulky 2.1 pro svislý vrh. Mějme na paměti:

Při zvolené orientaci osy y je tíhové zrychlení svislého vrhu $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jeho *velikost* je však $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Do rovnic (2.21) až (2.25) dosazujeme kladnou hodnotu g.

Dejme tomu, že vyhodíme jablko svisle vzhůru počáteční rychlostí v_{0y} a před dopadem je opět chytíme. Volný let jablka (od vyhození po zachycení) se řídí rovnicemi v tab. 2.2. Zrychlení je konstantní a směřuje dolů, tj. $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Rychlost se během letu mění podle vztahů (2.21) a (2.23). Při stoupání jablka velikost (kladné) rychlosti klesá až k nule. V okamžiku zastavení je jablko ve své nejvyšší poloze. Při pádu velikost (záporné) rychlosti roste.

Tabulka 2.2 Rovnice pro svislý vrh

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.21)	$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
(2.22)	$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	v_y
(2.23)	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	t
(2.24)	$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t$	g
(2.25)	$y - y_0 = v_yt + \frac{1}{2}gt^2$	v_{0y}

* Pro ty nejpečlivější čtenáře: do výšek h zanedbatelně malých proti zemskému poloměru, tedy $h \ll 6{\cdot}10^3$ km.

PŘÍKLAD 2.9

Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu.

(a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Ze zadání je známa doba t, velikost zrychlení g a počáteční rychlost v_{0y}, o které můžeme předpokládat, že byla nulová. Chceme určit posunutí, chybějící veličinou je tedy rychlost v_y, která není zadána a její zjištění se v zadání nepožaduje. Této situaci odpovídá rovnice (2.22) z tab. 2.2. Počátek souřadnicové osy y zvolme v místě, kde opravář klíč upustil. Do rovnice (2.22) přímo dosadíme $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$ a $t = 1{,}5$ s. Dostaneme

$$\begin{aligned} y &= 0(1{,}5\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s})^2 \doteq \\ &\doteq -11\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

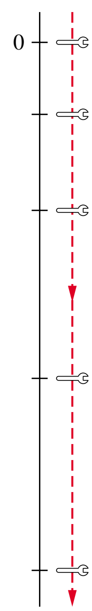
Záporné znaménko výsledku odpovídá očekávané skutečnosti, že se klíč po 1,5 s pádu nachází pod úrovní místa, kde opraváři vypadl.

(b) Jaká je rychlost klíče v okamžiku 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Rychlost je dána rovnicí (2.21)

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt = 0 - (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s}) \doteq \\ &\doteq -15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Záporné znaménko ukazuje, že rychlost klíče směřuje dolů. Tento výsledek opět není překvapivý. V obr. 2.11 jsou shrnuty základní údaje o letu klíče až do okamžiku $t = 4$ s.



t (s)	y (m)	v_y (m/s)	a_y (m/s^2)
0	0	0	−9,8
1	−4,9	−9,8	−9,8
2	−19,6	−19,6	−9,8
3	−44,1	−29,4	−9,8
4	−78,4	−39,2	−9,8

Obr. 2.11 Příklad 2.9. Poloha, rychlost a zrychlení volně padajícího tělesa.

PŘÍKLAD 2.10

V roce 1939 se Joe Sprinz z baseballového klubu v San Francisku pokusil překonat rekord v chytání baseballového míče padajícího z co největší výšky. Rok předtím dosáhli hráči klubu Cleveland Indians rekordního výkonu, když chytili baseballový míč po jeho pádu z výšky 210 m. Sprinz se pokusil zachytit míček padající z letadélka letícího přibližně ve výšce 240 m. Budeme předpokládat, že míček padal přesně z výšky 240 m a zanedbáme vliv odporu prostředí.

(a) Určete dobu letu míčku.

ŘEŠENÍ: Zvolme počátek svislé osy y v místě, kde byl míček vypuštěn a orientujme ji směrem vzhůru. Počáteční poloha je $y_0 = 0$, počáteční rychlost $v_{0y} = 0$. V zadání úlohy nevystupuje veličina v_y, použijeme proto rovnici (2.22):

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ -240\,\mathrm{m} &= 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2, \\ 4{,}9t^2 &= 240, \\ t &= 7\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Při výpočtu druhé odmocniny musíme výsledku přiřadit kladné nebo záporné znaménko. Vybrali jsme kladné znaménko, protože míč dopadl *poté*, co byl vypuštěn.

(b) Jaká byla rychlost míče těsně nad zemí?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet rychlosti přímo ze zadaných údajů (nikoliv z výsledku příkladu (a)) použijeme rovnici (2.23):

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) = \\ &= 0 - 2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(-240\,\mathrm{m}) = \\ &= 4{,}7{\cdot}10^3\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}, \\ v_y &= -69\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\ (\doteq -250\,\mathrm{km/h}). \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

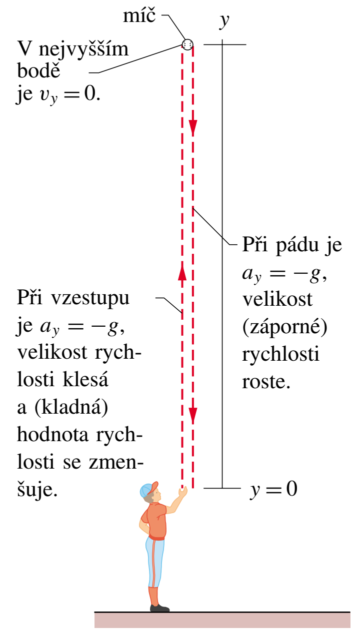
Znaménko výsledku je nyní záporné, neboť míček letí směrem dolů, v záporném směru osy y.

V popisovaném skutečném případě nebyl samozřejmě vliv odporu prostředí zanedbatelný. Kdybychom jej započítali, zjistili bychom, že let míčku trval déle a výsledná rychlost byla menší, než jsme vypočetli pro ideální situaci. I tak však byla rychlost míčku při dopadu značná. Když jej totiž Sprinz při pátém pokusu konečně zachytil do rukavice, byl náraz tak obrovský, že ho ruka s rukavicí udeřila do tváře, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech a vyrazila pět zubů. Sprinz upadl do bezvědomí.

PŘÍKLAD 2.11

Nadhazovač vyhodí baseballový míč svisle vzhůru rychlostí $12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 2.12).

(a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?



Obr. 2.12 Příklad 2.11. Hráč vrhá míč svisle vzhůru. Rovnice pro svislý vrh platí jak pro vzestup míče, tak pro jeho pád za předpokladu, že vliv odporu vzduchu lze zanedbat.

ŘEŠENÍ: V nejvyšším bodě letu je rychlost míče nulová. Z rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - 0}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 1{,}2\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

(b) Jaká je maximální výška letu?

ŘEŠENÍ: Počátek osy y položme do místa vyhození míče. Do rovnice (2.23) dosadíme $y_0 = 0$ a vyjádříme z ní y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (0)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 7{,}3\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

V této části úlohy jsme také mohli s výhodou použít výsledku (a) a maximální výšku určit z rovnice (2.25). Ověřte si to!

(c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnici (2.22), která obsahuje pouze zadané veličiny a neznámý čas. Dosazením $y_0 = 0$ dostaneme

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

a tedy

$$5{,}0\,\mathrm{m} = (12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2.$$

Rovnici přepíšeme do tvaru (pro jednoduchost již nebudeme vypisovat jednotky):

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme*

$$t = 0{,}53\,\mathrm{s} \quad \text{a} \quad t = 1{,}9\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Existují dvě možná řešení! To nás však nesmí překvapit: Míč skutečně prochází polohou $y = 5{,}0$ dvakrát. Jednou při výstupu a podruhé při pádu.

Provedeme ještě jednoduchou kontrolu získaných výsledků. Okamžik, kdy míč dosáhl maximální výšky, by měl na časové ose ležet právě uprostřed mezi oběma okamžiky, v nichž byla poloha míče určena souřadnicí 5 m. Je tomu skutečně tak. Aritmetický průměr těchto časových údajů

$$t = \tfrac{1}{2}(0{,}53\,\mathrm{s} + 1{,}9\,\mathrm{s}) = 1{,}2\,\mathrm{s}$$

se shoduje s výsledkem příkladu (a).

KONTROLA 6: Jaké je znaménko posunutí míče v příkladu 2.11 (a) při vzestupu míče a (b) při jeho pádu? (c) Jaké je zrychlení v nejvyšším bodě letu?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.8: *Význam záporného znaménka*

Vzpomeňme si, že některé z hodnot polohy, rychlosti či zrychlení získané při řešení př. 2.9, 2.10 a 2.11 měly záporné znaménko. Je důležité, abychom význam záporného znaménka u těchto veličin uměli správně interpretovat. Při řešení úloh o svislém vrhu jsme svislou souřadnicovou osu y volili vždy tak, aby její kladný směr byl orientován vzhůru. Volba opačné orientace osy by byla stejně dobře možná. Počátek osy y jsme vybírali tak, aby to bylo při řešení konkrétní úlohy výhodné: v př. 2.9 byl počátek umístěn v poloze ruky opraváře, v př. 2.10 v letadélku a v př. 2.11 v ruce nadhazovače. Záporná hodnota souřadnice určující polohu tělesa znamená, že se těleso nachází *pod úrovní* počátku osy y.

Záporná rychlost znamená, že se těleso pohybuje tak, že hodnota jeho y-ové souřadnice klesá, v našich příkladech tedy dolů. Tato interpretace záporného znaménka rychlosti je správná nezávisle na okamžité poloze tělesa.

Ve všech řešených příkladech bylo zrychlení svislého vrhu záporné ($= -9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), bylo tedy orientováno proti kladnému směru osy y. Význam záporného znaménka zrychlení je v tomto případě následující: pohybuje-li se těleso vzhůru (jeho rychlost je kladná) je vlivem záporného zrychlení brzděno (velikost jeho rychlosti klesá). Naopak, těleso pohybující se dolů (rychlost je záporná) je vlivem záporného zrychlení urychlováno, velikost jeho rychlosti roste. Tato interpretace nezávisí na poloze a rychlosti tělesa.

* Řešení obecné kvadratické rovnice je uvedeno v dod. E.

Bod 2.9: *Neočekávané výsledky*

Stává se, že při výpočtu dostaneme i výsledky, které se na první pohled zdají nesmyslné, jako třeba v př. 2.11c. Získáme-li více výsledků, než jsme očekávali, nezavrhujme hned ty, které jsou zdánlivě nesprávné. Zvažujme je pečlivě a pokusme se nalézt jejich fyzikální význam. Často nějaký mají.

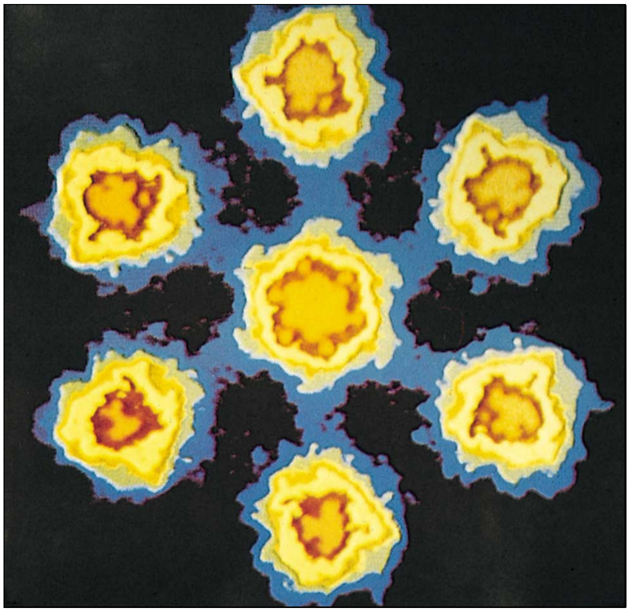
I záporný časový údaj má svůj dobrý smysl. Odpovídá události, která nastala dříve než v okamžiku $t = 0$, kdy jsme se (zcela libovolně) rozhodli spustit stopky.

2.9 ČÁSTICOVÁ FYZIKA

Na různých místech v knize občas odbočíme od popisu velkých objektů našeho světa, se kterými máme každodenní a bezprostřední zkušenosti, a všimneme si objektů mnohem menších. Doposud jsme pracovali s objektem zvaným hmotný bod, který má i přes své zanedbatelné rozměry konečnou hmotnost. Nahrazovali jsme jím reálná tělesa jako například dítě, míč, automobil. Zůstává však otázka, jak malé ve skutečnosti mohou reálné objekty být. Jaké jsou „nejposlednější“ částečky přírody? Tímto problémem se zabývá **fyzika elementárních částic**, moderní oblast fyziky, která poutá pozornost celé řady špičkových fyziků.

Poznání, že hmota není spojitá, ale je tvořena velmi malými objekty — atomy, bylo klíčové pro pochopení mnoha zákonitostí nejen ve fyzice, ale i v chemii. Pomocí moderních mikroskopů je možné jednotlivé atomy dokonce i zobrazit. Jedna z ukázek takového zobrazení je na obr. 2.13. Hmota tedy není spojitá, ale „zrnitá“. Také veličiny, které její chování popisují, nabývají **diskrétních** — **kvantovaných** hodnot (lat. *quantus* = jak mnoho). Mění se jen po určitých dávkách, zvaných **kvanta**. Kvantování je základní vlastností přírody. V dalším textu knihy poznáme mnohé fyzikální veličiny, které jsou kvantovány, pokud je zkoumáme v dostatečně jemném měřítku. Tato „všudypřítomnost“ kvantování dala jméno i fyzikální disciplíně zabývající se zákony mikrosvěta, **kvantové fyzice**.

Mezi světem velkých těles (makrosvětem) a světem kvantovým (mikrosvětem) není ostrá hranice. Zákony mikrosvěta jsou platné všeobecně. Jakmile však přejdeme od atomů k míčům a automobilům, stává se kvantování méně nápadným a nakonec je zcela neměřitelné. Diskrétnost (v matematice a fyzice protiklad spojitosti, nespojitost) se ztrácí a obecné zákony kvantové fyziky směřují ke speciálním limitním tvarům, tzv. zákonům **klasické fyziky**, které dobře popisují pohyb velkých těles.



Obr. 2.13 Šesterečné uspořádání atomů uranu je „zviditelněno“ pomocí zobrazení v rastrovacím prozařovacím elektronovém mikroskopu. Barvy jsou jednotlivým částem objektu uměle přiřazeny počítačovým zpracováním obrazu (tzv. „nepravé barvy“).

Stavba atomu

Atom je složen z velmi malého, nepředstavitelně hutného **jádra**. V jádru, které je obklopeno jedním nebo více lehkými **elektrony**, je soustředěna prakticky celá hmota atomu. Obvykle předpokládáme, že jádro i celý atom mají kulový tvar. Poloměr atomu je řádově 10^{-10} m, jádro je asi 100 000krát menší, přibližně 10^{-15} m. Soudržnost atomu je zajištěna vzájemným elektrickým přitahováním záporných elektronů v atomovém obalu s jádrem, obsahujícím kladné protony. Zákony popisující tuto přitažlivou interakci budeme studovat později. V této chvíli si pouze uvědomme, že bez ní by nemohly existovat atomy, a tedy ani my sami.

Stavba jádra

Nejmenší jádro, jádro běžného atomu vodíku, je tvořeno jediným protonem. Existují i dvě složitější varianty, zvané **izotopy** neboli **nuklidy** vodíku, jejichž jádro navíc obsahuje jeden nebo dva elektricky neutrální **neutrony**. Tyto izotopy nazýváme **deuterium** a **tritium**.

Vodík, ve všech variantách, je příkladem jednoho **prvku**. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atom s jedním protonem v jádře je vodík, atom se šesti protony v jádře je uhlík. Různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře. Protony a neutrony nazýváme společně **nukleony**.

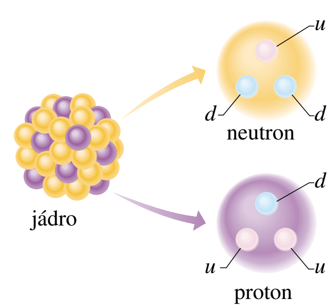
Roli neutronů v jádře lze velmi zhruba charakterizovat tak, že zabezpečují jeho „soudržnost“. Protony totiž mají kladný náboj, a elektrickými silami se proto velmi silně odpuzují. Mezi nukleony však při velmi malých vzdálenostech působí i přitažlivá síla, zvaná **silná interakce**. Jediný atom, který nepotřebuje neutrony k zajištění stability svého jádra, je běžný atom vodíku. Jeho jádro je totiž tvořeno jediným protonem. Všechna ostatní jádra by se bez neutronů rozpadla.

Mnoho izotopů běžných prvků je nestabilních. Naštěstí ty, na kterých bytostně závisí naše existence, mají též izotopy stabilní. Například 19 z 21 izotopů mědi je nestabilních, samovolně se rozpadají a mění v jiné prvky.

Měď, kterou známe jako celkem běžný kov a používáme ji v elektronice i jiných technologiích, je složena ze zbývajících dvou stabilních izotopů.

Struktura subatomárních částic

Elektron si sice někdy počíná velmi neobvykle, ale přesto je to jednoduchá částice. Při detekci se chová tak, jako by neměl žádné rozměry ani vnitřní strukturu. Elektron (značka e, někdy pro upřesnění e^-) patří do skupiny částic zvaných **leptony**. Je jich celkem šest. Vedle elektronu existují ještě dvěstěkrát těžší **mion** (značka μ, dříve nazývaný **mezon** μ) a více než třítisíckrát těžší **tauon** (značka τ). Každý z nich má své **neutrino** ν_e, ν_μ, ν_τ s hmotností téměř nulovou (možná i přesně nulovou). Ke každému leptonu existuje **antičástice**. Antičástici k elektronu nazýváme **pozitron** (značka e^+).



Obr. 2.14 Představa atomového jádra a protonů a neutronů, z nichž je složeno. Protony a neutrony jsou tvořeny kvarky „up“ (u) a „down“ (d).

Podle současných znalostí se protony a neutrony liší od elektronů a dalších leptonů tím, že se skládají ze tří jednodušších částic zvaných **kvarky**.* Proton se skládá ze dvou u-kvarků (angl. *up* = nahoru) a jednoho d-kvarku (angl. *down* = dolů). Neutron je tvořen jedním u-kvarkem

* Slovo „kvark“ pochází ze slovních hříček užitých v básni *Finnegans Wake* od Jamese Joyce.

a dvěma d-kvarky (obr. 2.14). I jiné částice, které jsme dříve považovali za elementární, se skládají z kvarků.

Je podivuhodné, že kvarků je známo šest druhů*, tedy stejný počet jako leptonů. Fyziky zajímá, zda má tato shoda hlubší smysl, nebo zda je zcela náhodná. Odpověď prozatím neznáme.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Poloha

Polohu hmotného bodu určujeme souřadnicí x vzhledem k **počátku** souřadnicové osy. Souřadnice může být jak kladná, tak i záporná, podle toho, na které straně od počátku osy se bod nachází. Je-li hmotný bod přímo v počátku, je jeho souřadnice nulová. Kladným směrem osy rozumíme směr, ve kterém souřadnice roste, opačný směr je záporný.

Posunutí

Posunutí Δx hmotného bodu je definováno jako změna jeho polohy:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

Posunutí je vektorová veličina. Při jednorozměrném pohybu je kladné, pokud se hmotný bod posunul v kladném směru osy x, v opačném případě je záporné.

Průměrná rychlost

Při přesunutí hmotného bodu z polohy x_1 do polohy x_2 za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ je jeho *průměrná rychlost*

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Znaménko průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ určuje směr pohybu ($\overline{v_x}$ je vektorová veličina). Průměrná rychlost nezávisí na trajektorii, kterou hmotný bod při svém pohybu skutečně prošel, ale pouze na výchozí a koncové poloze.

V grafu závislosti polohy na čase $x(t)$ je průměrná rychlost v časovém intervalu Δt rovna směrnici přímky spojující krajní body části křivky vymezené tímto časovým intervalem.

Průměrná velikost rychlosti

Průměrná velikost rychlosti hmotného bodu závisí na skutečně uražené dráze v daném časovém intervalu:

$$\overline{v} = \frac{\text{skutečně uražená dráha}}{\text{celá doba pohybu}}. \tag{2.3}$$

Průměrná velikost rychlosti *není totéž jako* velikost průměrné rychlosti.

Okamžitá rychlost

Budeme-li zmenšovat Δt v rovnici (2.2) bez omezení k nule, bude se průměrná rychlost $\overline{v_x}$ limitně blížit k jisté hodnotě v_x, kterou nazýváme *okamžitá rychlost* (zjednodušeně jen **rychlost**) hmotného bodu v daném okamžiku. Je tedy

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.4}$$

Okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny vedené ke grafu funkce $x(t)$ v bodě, který odpovídá danému okamžiku t.

Průměrné zrychlení

Průměrné zrychlení je definováno jako poměr změny rychlosti Δv_x a délky časového intervalu Δt, během něhož k uvedené změně došlo:

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Znaménko zrychlení $\overline{a_x}$ určuje jeho směr.

Okamžité zrychlení

Okamžité zrychlení (zjednodušeně jen **zrychlení**) získáme ze zrychlení průměrného analogickým limitním přechodem, jako v případě definice okamžité rychlosti:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2.8}$$

Zrychlení je také druhou derivací polohy $x(t)$ podle času:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.9}$$

V grafu závislosti $v_x(t)$ je zrychlení a_x v okamžiku t dáno směrnicí tečny ke grafu sestrojené v bodě, který tomuto okamžiku odpovídá.

Rovnoměrně zrychlený pohyb

Na obr. 2.9 jsou zakresleny závislosti $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$ pro velmi důležitý případ (přímočarého) pohybu, totiž pohybu s konstantním zrychlením a_x. Tento pohyb nazýváme **rovnoměrně zrychlený**. Je popsán pěti rovnicemi shrnutými v tab. 2.1:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2, \tag{2.15}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0), \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t, \tag{2.17}$$

$$x - x_0 = v_x t - \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.18}$$

Není-li zrychlení konstantní, pak tyto rovnice *neplatí*.

* Další typy jsou c (angl. *charm* = půvabný), s (angl. *strange* = podivný), t (angl. *top* = vršek) a b (angl. *bottom* = spodek).

Tíhové zrychlení

Důležitými a častými případy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu jsou volný pád a svislý vrh tělesa v blízkosti zemského povrchu. Rovnice popisující obecný rovnoměrně zrychlený pohyb platí i pro tyto případy, je však výhodné je mírně upravit: (1) Polohu tělesa určujeme na svislé souřadnicové ose y orientované kladným směrem vzhůru. (2) Zrychlení a_y nahradíme hodnotou $-g$, kde g je velikost tíhového zrychlení. V blízkosti povrchu Země je $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Svislý vrh je popsán rovnicemi (2.21) až (2.25).

Stavba atomů

Všechny látky se skládají z atomů, které jsou tvořeny velmi hutným **jádrem** obklopeným lehkými **elektrony**. Jádro je složeno z neutronů a protonů. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atomy se stejným počtem protonů, ale odlišným počtem neutronů, se nazývají **izotopy** daného prvku.

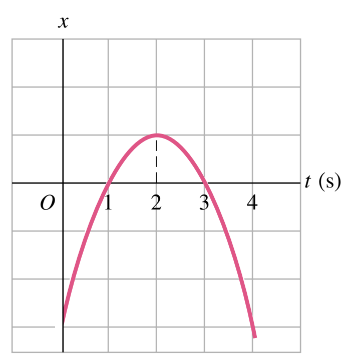
Kvarky a leptony

Elektrony se chovají jako částice bez vnitřní struktury. Protony a neutrony jsou složeny z ještě elementárnějších částic, které nazýváme **kvarky**. V současnosti je známo šest druhů kvarků a ke každému z nich existuje antičástice. Elektrony patří do skupiny **leptonů**, zahrnující rovněž šest druhů. Ke každému leptonu existuje antičástice.

OTÁZKY

1. (a) Může mít těleso současně nulovou rychlost a nenulové zrychlení? (b) Může se těleso pohybovat proměnnou rychlostí, jejíž velikost je konstantní? (c) Je možné, aby se směr pohybu tělesa změnil v opačný, má-li těleso konstantní zrychlení? (d) Může se velikost rychlosti tělesa zvyšovat za současného poklesu velikosti jeho zrychlení?

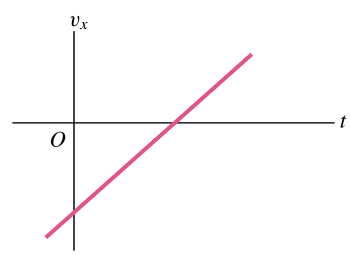
2. Na obr. 2.15 je zakreslen graf časové závislosti polohy tělesa $x(t)$. (a) Jaké je znaménko x-ové souřadnice tělesa v okamžiku $t = 0$? Rozhodněte, zda je v okamžicích (b) $t = 1\,\mathrm{s}$, (c) $t = 2\,\mathrm{s}$ a (d) $t = 3\,\mathrm{s}$ rychlost tělesa kladná, záporná, nebo nulová. (e) Kolikrát (během zobrazeného časového intervalu) prošlo těleso počátkem soustavy souřadnic $x = 0$?



Obr. 2.15 Otázka 2

3. Hmotný bod se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. V okamžiku $t_0 = 0$ je jeho poloha určena souřadnicí $x_0 = -20\,\mathrm{m}$. Sledujme znaménko jeho počáteční rychlosti v_0 (v čase t_0) a znaménko jeho zrychlení. Mohou nastat čtyři případy: (1) $+, +$, (2) $+, -$, (3) $-, +$, (4) $-, -$. (a) Ve kterém z nich se rychlost hmotného bodu v jistém okamžiku $t > 0$ anuluje? (b) Ve kterém z případů bod s jistotou projde počátkem soustavy souřadnic? (c) Ve kterém z nich počátkem nikdy neprojde? Ve všech částech úlohy uvažujte pouze o kladných hodnotách časové proměnné t.

4. Na obr. 2.16 je zakreslena časová závislost rychlosti částice pohybující se podél osy x. (a) Jaký je počáteční směr jejího pohybu? (b) Kterým směrem se bude částice pohybovat po velmi dlouhé době? (c) Je v některém okamžiku její rychlost nulová? (d) Určete znaménko jejího zrychlení. (e) Je její zrychlení konstantní nebo proměnné?



Obr. 2.16 Otázka 4

5. V následujících čtyřech situacích je zadána počáteční a výsledná rychlost hmotného bodu: (a) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (d) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Velikost zrychlení je ve všech případech stejná. Uspořádejte situace sestupně podle velikosti posunutí hmotného bodu, ke kterému došlo během sledované změny jeho rychlosti.

6. Následující vztahy popisují čtyři případy časové závislosti rychlosti tělesa: (a) $v_x = 3$; (b) $v_x = 4t^2+2t-6$; (c) $v_x = 3t-4$; (d) $v_x = 5t^2 - 3$. Ve kterých z nich lze pro popis pohybu tělesa použít vztahů z tab. 2.1?

7. Z horkovzdušného balonu stoupajícího se zrychlením $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ vypadlo jablko. (a) Určete zrychlení jablka vůči Zemi. (b) Jaká je rychlost jablka (velikost a směr) bezprostředně po jeho upuštění, je-li v tom okamžiku rychlost balonu rovna $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

8. (a) Nakreslete závislosti $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující pohyb jablka, které vyhodíme svisle vzhůru z hrany útesu. Při pádu jablko útes těsně míjí a padá podél něj dolů. (b) Do grafů získaných v části (a) zakreslete tytéž veličiny, tj. $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$, pro případ, že jsme jablko z hrany útesu pouze volně vypustili.

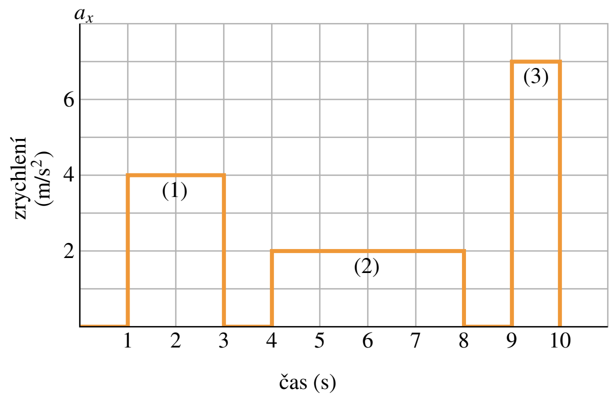
9. Míč, který jsme vyhodili z hrany skalního útesu svisle vzhůru rychlostí o velikosti v_0, dopadl na zem pod úrovní útesu. Rozhodněte, zda by rychlost při dopadu míče byla větší, menší či stejná jako v prvém případě, kdybychom jej hodili svisle dolů stejně velkou rychlostí v_0? (*Tip*: Použijte rovnici (2.23).)

10. Řidička jede v autě rychlostí 100 km/h. Náhle si uvědomí, že už už dohání autobus, který jede stejným směrem rychlostí 60 km/h. Musí začít brzdit. Jaká může být nejvyšší rychlost jejího auta v okamžiku, kdy autobus dostihne, nemá-li dojít ke srážce? (Příprava na úlohu 57.)

11. Motocyklista stojící v místě o souřadnici $x = 0$ se začne rozjíždět v okamžiku $t = 0$. Jeho zrychlení má konstantní velikost 2,0 m·s^{-2} a míří podél kladné osy x. O dvě sekundy později projíždí bodem $x = 0$ automobil, který jede stejným směrem. Jeho rychlost má v tomto okamžiku velikost 8 m·s^{-1}. Auto zvyšuje svou rychlost s konstantním zrychlením 3,0 m·s^{-2}. Zapište dvojici rovnic, jejichž řešením lze určit polohu místa, v němž řidič auta předjede motocyklistu. (Příprava na úlohu 56.)

12. Na obr. 2.17 je znázorněna časová závislost zrychlení částice $a_x(t)$. Částice je postupně urychlována ve třech fázích svého pohybu. Seřaďte jednotlivé fáze sestupně podle přírůstku rychlosti.

13. Dítě upustilo z balkonu dva stejné míče v časovém odstupu 1 s. Rozhodněte, zda se během pádu míčů bude vzdálenost mezi nimi zvětšovat, zmenšovat, nebo zůstane stejná.



Obr. 2.17 Otázka 12

CVIČENÍ & ÚLOHY

Úkolem některých cvičení je nakreslit graf časové závislosti polohy, rychlosti nebo zrychlení. Postačí jen schematický náčrtek, vždy je však třeba pečlivě popsat osy a zřetelně odlišit přímé a zakřivené části grafu. Při kreslení grafu je možné použít počítač nebo programovatelnou kalkulačku.

ODST. 2.3 Průměrná rychlost

1C. Carl Lewis uběhne sprinterskou trať 100 m přibližně za 10 s. Bill Rodgers dokáže absolvovat maraton (42 km 194 m) asi za 2 h 10 min. (a) Jaké jsou průměrné velikosti rychlostí obou běžců? (b) Za jak dlouho by Lewis uběhl maraton, kdyby vydržel po celou dobu sprintovat?

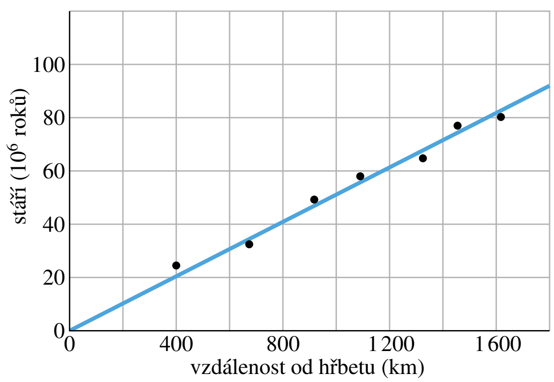
2C. Při silném kýchnutí zavře člověk oči asi na 0,50 s. Jakou vzdálenost urazí za tuto dobu automobil, jede-li rychlostí 90 km/h?

3C. Průměrné mrknutí trvá asi 100 ms. Jakou dráhu urazí stíhačka Mig 25 při mrknutí pilota, letí-li rychlostí 3 380 km/h?

4C. Nadhazovač v baseballu dokáže vyhodit míček vodorovnou rychlostí 160 km/h. Za jak dlouho míček doletí k pálkaři vzdálenému 18,4 m?

5C. Hornina uvolněná z oceánského hřbetu se pomalu vzdaluje od jeho paty přibližně konstantní rychlostí. Graf na obr. 2.18 znázorňuje tuto vzdálenost jako funkci času. Vypočtěte rychlost posuvu horniny v cm za rok.

6C. O kolik minut se zkrátila doba jízdy po dálnici z Prahy do Brna po zvýšení rychlostního limitu ze 110 km/h na 130 km/h? Předpokládejte, že řidič projede celou trasu nejvyšší povolenou rychlostí.



Obr. 2.18 Cvičení 5

7C. S použitím tabulek v dodatku D určete rychlost světla ($3\cdot10^8$ m·s^{-1}) v mílích za hodinu, stopách za sekundu, světelných rocích za rok.

8C. Automobil jede po rovné silnici rychlostí 30 km/h. Poté, co urazil dráhu 40 km, zvýší rychlost na 60 km/h a pokračuje v jízdě dalších 40 km. (a) Jaká je průměrná rychlost automobilu na celé osmdesátikilometrové trati? (Zvolte soustavu souřadnic tak, aby osa x byla souhlasně rovnoběžná se směrem jízdy automobilu a určete průměrnou rychlost včetně znaménka.) (b) Jaká je průměrná velikost rychlosti automobilu? (c) Určete průměrnou rychlost graficky (pomocí grafu $x(t)$).

9Ú. Vypočtěte průměrnou rychlost pohybu člověka ve dvou případech: (a) Chůze 72 m rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 72 m rychlostí 3 m·s^{-1}. (b) Chůze 1 min rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 1 min rychlostí 3 m·s^{-1}. (c) V obou případech určete průměrnou rychlost graficky (z grafu $x(t)$).

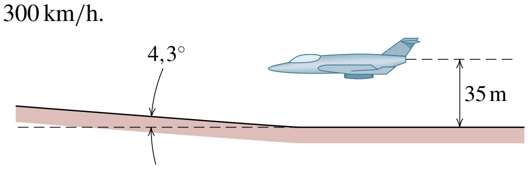
10Ú. Automobil jede do kopce rychlostí 40 km/h. Nahoře ne-čeká a vrací se stejnou cestou zpět, tentokrát rychlostí 60 km/h. Určete průměrnou velikost rychlosti pro celou trasu.

11Ú. Nákladní automobil jede z Brna do Olomouce (77 km). V první polovině jízdní *doby* udržuje konstantní rychlost o velikosti 56 km/h, ve druhé polovině pak 89 km/h. Na zpáteční cestě projede první polovinu *vzdálenosti* rychlostí o velikosti 56 km/h a druhou rychlostí o velikosti 89 km/h. Jaká je průměrná velikost rychlosti jízdy (a) z Brna do Olomouce, (b) z Olomouce do Brna a (c) na celé cestě? (d) Jaká je průměrná rychlost (vektor) na celé cestě? Zvolte soustavu souřadnic tak, aby trasa z Brna do Olomouce vedla podél kladné osy x. Nakreslete graf $x(t)$ pro tuto část cesty a určete z něj průměrnou rychlost.

12Ú. Poloha tělesa pohybujícího se po ose x je dána vztahem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaká je poloha tělesa v okamžicích $t = 1$ s, 2 s, 3 s a 4 s? (b) Jaké je posunutí tělesa v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4$ s? (c) Jaká je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 2$ s do $t = 4$ s? (d) Nakreslete graf funkce $x(t)$ pro $0 \leqq t \leqq 4$ s a použijte jej pro grafické řešení úkolu (c).

13Ú. Poloha hmotného bodu je dána vztahem $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, kde x je v centimetrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu od $t = 2{,}00$ s do $t = 3{,}00$ s, okamžitou rychlost v okamžicích (b) $t = 2{,}00$ s, (c) $t = 3{,}00$ s a (d) $t = 2{,}50$ s, (e) okamžitou rychlost v bodě ležícím uprostřed mezi polohami, v nichž se hmotný bod nachází v okamžicích $t = 2{,}00$ s a $t = 3{,}00$ s. (f) Předchozí úkoly vyřešte i graficky. Použijte grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$.

14Ú. Při testování radarové navigace letí tryskové letadlo ve výšce 35 m nad zemí. Náhle dorazí k místu, kde se terén počíná zvedat s mírným, snadno přehlédnutelným, sklonem 4,3° (obr. 2.19). V jakém nejzazším okamžiku musí být dokončena korekce letu, aby letadlo nenarazilo na zem? Rychlost letounu je 1 300 km/h.



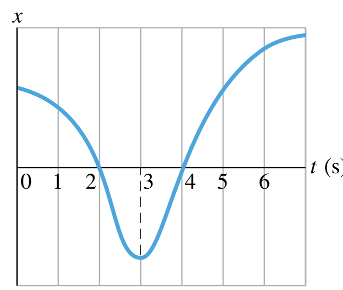
Obr. 2.19 Úloha 14

15Ú. Dva vlaky jedou po přímé trati proti sobě, každý rychlostí 30 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 60 km, vyletí od jednoho z nich pták rychlostí 60 km/h a zamíří k druhému. Jakmile k němu doletí, obrátí se a vrací se zpět k prvnímu vlaku. Zde se opět obrátí a takto létá, dokud se vlaky nesetkají. Nezabývejte se pohnutkami, které vedou ptáka právě k tomuto pohybu a určete, (a) kolikrát pták přelétne vzdálenost mezi oběma vlaky a (b) jakou celkovou dráhu při tom urazí?

ODST. 2.4 Okamžitá rychlost

16C. (a) Poloha částice je dána rovnicí $x = 4 - 12t + 3t^2$ (kde t je v sekundách a x v metrech). Pro okamžik $t = 1$ s určete (a) rychlost částice, (b) směr jejího pohybu a (c) velikost její rychlosti. (d) Rozhodněte, zda je velikost rychlosti částice pro $t > 1$ s větší či menší než pro $t = 1$ s. Následující dvě otázky se pokuste zodpovědět bez výpočtu. (e) Existuje okamžik, ve kterém má částice nulovou rychlost? (f) Nastane pro $t > 3$ s okamžik, kdy se směr pohybu částice obrátí?

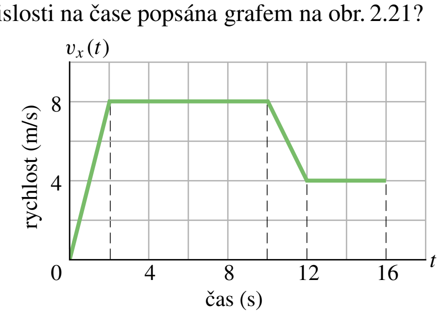
17C. Obr. 2.20 popisuje pohyb pásovce, který běhá podél osy x střídavě doleva (záporný směr) a doprava. (a) Je pásovec v některém okamžiku (kterém) nalevo od počátku osy x? Je v některém okamžiku (kterém) jeho rychlost (b) záporná, (c) kladná, nebo (d) nulová?



Obr. 2.20 Cvič. 17

18C. Myš je uvězněna v úzkém průchodu (osa x) a hledá cestu ven. Při tom zmateně pobíhá sem a tam: (1) běží vlevo (v záporném směru osy) konstantní rychlostí o velikosti 1,2 m·s^{-1}, (2) postupně zpomaluje až na rychlost 0,6 m·s^{-1}, (3) opět zrychluje na 2,0 m·s^{-1} a stále běží doleva. (4) Zpomaluje do zastavení, rozběhne se doprava a dosáhne rychlosti o velikosti 1,2 m·s^{-1}. Nakreslete graf $x(t)$. Určete časové intervaly, v nichž je sklon křivky grafu největší a nejmenší.

19Ú. Jakou vzdálenost urazí za 16 s běžec, jehož rychlost $v_x(t)$ je v závislosti na čase popsána grafem na obr. 2.21?

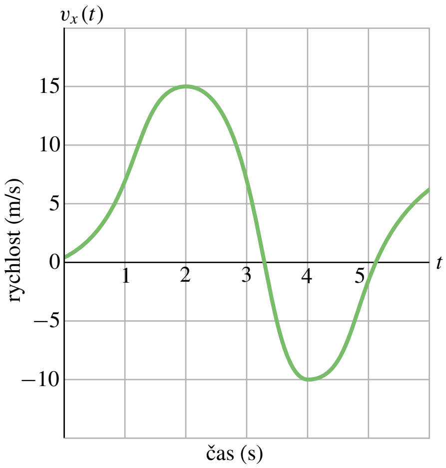


Obr. 2.21 Úloha 19

ODST. 2.5 Zrychlení

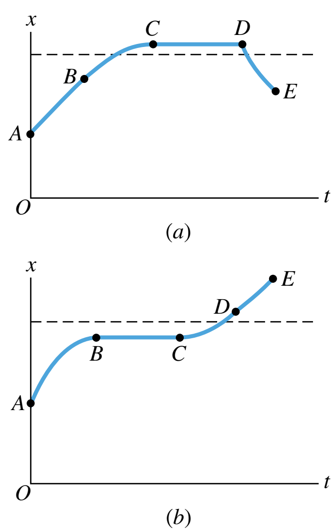
20C. Částice má počáteční rychlost 18 m·s^{-1}. V průběhu následujících 2,4 s se její rychlost změní tak, že dosáhne velikosti 30 m·s^{-1}, míří však v opačném směru. (a) Jaká je velikost průměrného zrychlení částice v tomto časovém intervalu? (b) Průměrné zrychlení určete také pomocí grafu $v_x(t)$.

21C. Těleso se pohybuje po přímce a jeho rychlost je popsána grafem na obr. 2.22. Načrtněte graf závislosti zrychlení tělesa na čase.



Obr. 2.22 Cvičení 21

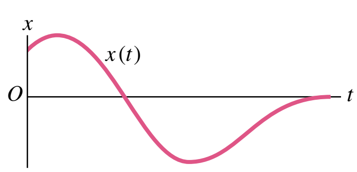
22C. Časová závislost polohy částice pohybující se podél osy x je zadána grafem na obr. 2.23a. (a) Ve kterém z úseků AB, BC, CD a DE je rychlost v_x kladná, záporná, nebo nulová? Ve kterém z nich je zrychlení a_x kladné, záporné, nebo nulové? (Neuvažujte krajní body intervalů). (b) Je v některém ze zmíněných úseků zrychlení tělesa zjevně proměnné? (c) Změní se nějak odpovědi na předchozí otázky, posunou-li se souřadnicové osy tak, že osa t splyne s přerušovanou čarou?



Obr. 2.23
Cvičení 22 a 23

23C. Zodpovězte otázky ze cvičení 22 pro případ pohybu znázorněného na obr. 2.23b.

24C. Částice se pohybuje podél osy x. Časový průběh její polohy $x(t)$ je zadán grafem na obr. 2.24. Nakreslete grafy $v_x(t)$ a $a_x(t)$.



Obr. 2.24
Cvičení 24

25C. Nakreslete schematicky možný tvar grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$, pohybujícího se podél osy x tak, že v okamžiku $t = 1$ s je (a) jeho rychlost nulová a zrychlení kladné, (b) rychlost nulová a zrychlení záporné, (c) rychlost záporná a zrychlení kladné, (d) rychlost záporná a zrychlení záporné. (e) Ve kterém z těchto případů velikost rychlosti v okamžiku $t = 1$ s roste?

26C. Uvažujme veličiny definované výrazy $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$ a $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. (a) Představují tyto výrazy tutéž veličinu? (b) Jaké jsou jejich jednotky v soustavě SI?

27C. Částice se pohybuje podél osy x. Její poloha je popsána rovnicí $x = 50t + 10t^2$, kde x je zadáno v metrech a t v sekundách. Vypočtěte (a) průměrnou rychlost částice během prvních tří sekund jejího pohybu, (b) rychlost částice v okamžiku $t = 3$ s, (c) zrychlení částice v okamžiku $t = 3$ s. (d) Zodpovězte otázku (a) pouze užitím grafu $x(t)$. (e) Pomocí téhož grafu řešte i úkol (b). (f) Nakreslete graf $v_x(t)$ a použijte jej k řešení úkolu (c).

28C. Poloha hmotného bodu je dána rovnicí $x = 20t - 5t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Je v některém okamžiku rychlost hmotného bodu nulová? V kladném případě tento okamžik určete. (b) Kdy je zrychlení a_x hmotného bodu nulové? (c) Kdy je a_x záporné, kladné? (d) Nakreslete grafy $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

29Ú. Muž čeká na jednom místě od okamžiku $t = 0$ do $t = 5{,}00$ min a potom jde svižným krokem stále jedním směrem. Jeho rychlost je konstantní a má velikost $2{,}20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Chůze trvá 5 minut, tj. od okamžiku $t = 5{,}00$ min do $t = 10{,}0$ min. Určete průměrnou rychlost a průměrné zrychlení pohybu člověka v následujících časových intervalech: (a) od 2,0 min do 8,0 min, (b) od 3,0 min do 9,0 min. (c) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ a vyřešte úkoly (a) a (b) také graficky.

30Ú. Poloha tělesa závisí na čase vztahem $x = 2{,}0t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost a (b) průměrné zrychlení tělesa v časovém intervalu od $t = 1{,}0$ s do $t = 2{,}0$ s. Vypočtěte jeho (c) okamžitou rychlost a (d) okamžité zrychlení v okamžicích $t = 1{,}0$ s a $t = 2{,}0$ s. (e) Porovnejte průměrné a okamžité hodnoty odpovídajících si veličin a rozdíly vysvětlete. (f) Řešte úkoly (a) až (d) pomocí grafů $x(t)$ a $v_x(t)$.

31Ú. Při jedné videohře se světelná stopa na monitoru pohybuje podle rovnice $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, kde x je vzdálenost od levého okraje monitoru měřená v centimetrech a t je čas v sekundách. Jakmile stopa dorazí k levému ($x = 0$) nebo pravému ($x = 15{,}0$ cm) okraji obrazovky, čas t se vynuluje a pohyb stopy se opakuje v souhlasu se zadanou časovou závislostí $x(t)$. (a) Určete, ve kterém okamžiku od počátku pohybu se rychlost stopy anuluje. (b) Ve kterém místě obrazovky k tomu dojde? (c) Jaké je v tom okamžiku zrychlení stopy? (d) Kterým směrem se stopa pohybovala bezprostředně před tím, než dosáhla nulové rychlosti? (e) Kterým směrem potom její pohyb pokračoval? (f) Za jakou dobu od počátku pohybu dorazila stopa poprvé k okraji obrazovky?

32Ú. Poloha částice, pohybující se podél osy x, závisí na čase vztahem $x = at^2 - bt^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaký je fyzikální rozměr konstant a a b? Předpokládejme, že tyto konstanty mají v jednotkách SI hodnoty $a = 3{,}0$ a $b = 1{,}0$. (b) Určete okamžik, v němž má souřadnice x částice největší hodnotu. (c) Jakou vzdálenost urazí částice během prvních 4,0 sekund pohybu? (d) Vypočtěte její posunutí v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0\,\mathrm{s}$. (e) Určete její rychlost v okamžicích $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$; 2,0 s; 3,0 s a 4,0 s. (f) Jaké je v těchto okamžicích její zrychlení?

ODST. 2.6 Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ

33C. Pohyb hlavy útočícího chřestýše je tak prudký, že její zrychlení může dosáhnout až hodnoty $50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Představme si, že by takového zrychlení mohl dosáhnout rozjíždějící se automobil. Za jakou dobu by dosáhl rychlosti 100 km/h, pokud by byl zpočátku v klidu?

34C. Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením $+3{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V jistém okamžiku má rychlost $+9{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zjistěte jeho rychlost o (a) 2,5 s dříve, (b) 2,5 s později.

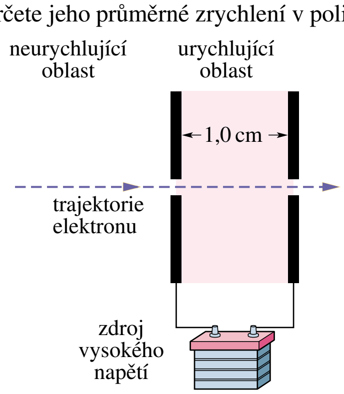
35C. Automobil plynule zvýší svou rychlost z 25 km/h na 55 km/h během 0,50 min. Cyklista se rovnoměrně rozjíždí z klidu a dosáhne rychlosti 30 km/h také za 0,50 min. V obou případech určete zrychlení.

36C. Kosmická loď se pohybuje s konstantním zrychlením $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, aby se podmínky pro pobyt posádky co nejvíce blížily pozemským. (a) Za jak dlouho dosáhne loď jedné desetiny rychlosti světla ve vakuu, startuje-li z klidu? Jakou dráhu přitom urazí?

37C. Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně 360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé 1,8 km?

38C. Elementární částice mion μ^- vlétne do elektrického pole rychlostí $5{,}00{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V něm se rovnoměrně zpomaluje se zrychlením o velikosti $1{,}24{\cdot}10^{14}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jakou dráhu urazí do okamžiku zastavení? (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ charakterizující její pohyb.

39C. Elektron s počáteční rychlostí $1{,}50{\cdot}10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je v úseku své trajektorie dlouhém 1,0 cm urychlován elektrickým polem (obr. 2.25). V okamžiku, kdy pole opouští, má rychlost $5{,}70{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete jeho průměrné zrychlení v poli. (Zadání úlohy odpovídá reálné situaci v elektronových tryskách používaných v televizních obrazovkách a osciloskopech.)



Obr. 2.25 Cvičení 39

40C. Automobil jedoucí rychlostí 100 km/h začne rovnoměrně brzdit a zastaví na dráze 43 m. (a) Určete velikost jeho zrychlení v jednotkách SI a jednotkách g. (b) Jak dlouho trvá brzdění? Kolikrát je doba brzdění delší než reakční doba řidiče, která činí 400 ms?

41C. 19. března 1954 dosáhl plukovník John P. Stapp pozemního rychlostního rekordu při jízdě na raketových saních. Rekordní rychlost měla velikost 1 020 km/h. Poté byly sáně zabrzděny za dobu 1,4 s (obr. 2.8). Jakému zrychlení byl jezdec vystaven? Výsledek vyjádřete v jednotkách g.

42C. Na kvalitní suché silnici může automobil s neopotřebenými pneumatikami brzdit se zrychlením o velikosti $4{,}92\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Za jak dlouho automobil zastaví, je-li jeho počáteční rychlost $24{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (b) Jak dlouhá bude brzdná dráha? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ během brzdění.

43C. Při zkoumání fyziologických účinků velkého zrychlení na lidský organismus se používá raketových saní. Saně se pohybují přímočaře a při klidovém startu mohou dosáhnout rychlosti 1 600 km/h za pouhých 1,8 s. Za předpokladu, že se saně pohybují rovnoměrně zrychleně, určete (a) jejich zrychlení v jednotkách g a (b) dráhu potřebnou k dosažení maximální rychlosti.

44C. Automobil může brzdit se zrychlením $5{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Za jak dlouho lze vůz zabrzdit z rychlosti 130 km/h na předepsaný rychlostní limit 90 km/h poté, co řidič zahlédne dopravního policistu? (Výsledek ukáže, že je zcela beznadějné před policejním radarem brzdit.) (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$, charakterizující pohyb automobilu.

45C. Motocykl se pohybuje rychlostí $30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v okamžiku, kdy řidič začne rovnoměrně brzdit. Za 3,0 s se jeho rychlost sníží na $15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou dráhu urazí motocykl od počátku brzdění až do úplného zastavení?

46Ú. Sportovní automobil typu „hot rod"* startující z klidu může dosáhnout rychlosti 60 km/h za 5,4 s. (a) Určete odpovídající průměrné zrychlení v $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (b) Jakou dráhu automobil urazí za 5,4 s, je-li jeho zrychlení konstantní? (c) Za jak dlouho by urazil vzdálenost 0,25 km, kdyby jeho zrychlení bylo po celou dobu jízdy konstantní a mělo velikost vypočtenou v části (a)?

47Ú. Rychlík stojí ve stanici. V okamžiku $t = 0$ se začne rozjíždět s konstantním zrychlením a v okamžiku t_1 má rychlost $30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Poté, co za dobu τ urazí dalších 160 m, zvýší se jeho rychlost na $50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte (a) zrychlení vlaku, (b) dobu τ, (c) dobu t_1, potřebnou k dosažení rychlosti $30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a (d) vzdálenost, kterou za tuto dobu urazí. (e) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu vlaku.

---

* Výkonný automobil většinou amatérské konstrukce za použití levných dílů z vrakovišť. Cílem konstruktéra je docílit vedle dobrého výkonu motoru i co nejneobvyklejšího vzhledu. Vozy jsou oblíbené téměř výhradně ve Spojených státech, kde se účastní závodů ve zrychlení s pevným startem na vzdálenosti 1/4 míle nebo 1 míle.

48Ú. Automobil jede rychlostí 56,0 km/h. Řidič zpozoruje na silnici překážku a ve vzdálenosti 24,0 m před ní začne rovnoměrně brzdit. Auto narazí do překážky za 2,00 s od tohoto okamžiku. (a) Určete zrychlení automobilu. (b) Jakou rychlostí narazí automobil do překážky?

49Ú. Automobil se pohybuje s konstantním zrychlením a urazí vzdálenost 60,0 m za 6,00 s. Na konci tohoto úseku jede rychlostí 15 m·s^{-1}. (a) Jakou rychlost měl na začátku šedesátimetrového úseku? (b) Jaké je jeho zrychlení? (c) V jaké vzdálenosti před měřeným úsekem se auto začalo rozjíždět? (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu automobilu.

50Ú. Dvě zastávky metra jsou vzdálené 1 100 m. Souprava se první polovinu cesty rozjíždí s konstantním zrychlením $+1{,}2$ m·s^{-2} a ve druhé polovině brzdí se zrychlením $-1{,}2$ m·s^{-2}. (a) Jaký je celkový čas jízdy mezi stanicemi a (b) největší rychlost soupravy? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ pro celou jízdu.

51Ú. Vyžaduje-li dopravní situace, aby řidič náhle zastavil, nezačne vůz brzdit hned. Od okamžiku, kdy si řidič uvědomí nutnost zabrzdit, uplyne nejprve jistá reakční doba řidiče a brzdového systému a teprve poté automobil rovnoměrně brzdí. Určete (a) celkovou reakční dobu a (b) velikost zrychlení automobilu při rovnoměrném brzdění z těchto údajů: Od okamžiku, kdy si řidič automobilu jedoucího rychlostí 80 km/h uvědomil nutnost zastavit, urazil ještě dráhu 57 m. Při rychlosti 48 km/h mu stačila dráha 24 m.

52Ú. Vůz se blíží ke světelné křižovatce, když se náhle rozsvítí oranžové světlo. Vůz jede největší povolenou rychlostí 50 km/h a může brzdit se zpomalením 5,2 m·s^{-2}. Celková reakční doba řidiče a brzdového systému je $T = 0{,}75$ s. Řidič nechce vjet do křižovatky na červenou. Má začít brzdit nebo pokračovat v jízdě nezměněnou rychlostí? Vzdálenost vozu od křižovatky v okamžiku změny světelné signalizace je (a) 40 m, doba, po kterou svítí oranžové světlo, je 2,8 s, (b) 32 m a 1,8 s.

53Ú. Vzdálenost potřebná pro náhlé zastavení vozidla je dána součtem „reakční vzdálenosti" (součin počáteční rychlosti a reakční doby) a „brzdné vzdálenosti", kterou vozidlo urazí během brzdění. Typické hodnoty těchto veličin jsou uvedeny v následující tabulce:

POČÁTEČNÍ RYCHLOST (m·s^{-1})	REAKČNÍ VZDÁLENOST (m)	BRZDNÁ VZDÁLENOST (m)	CELKOVÁ VZDÁLENOST (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

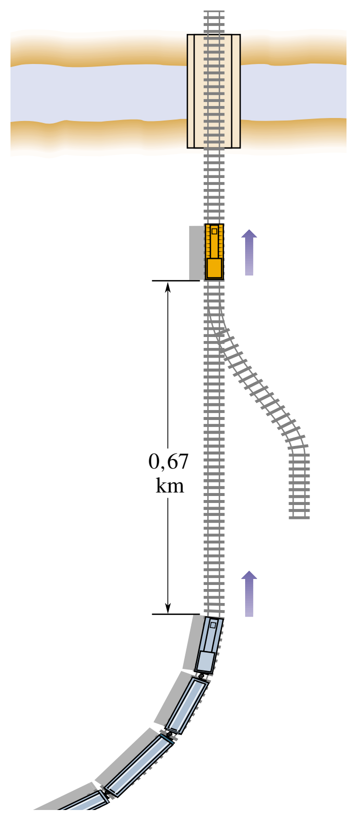
(a) Jaká reakční doba byla použita při výpočtu této tabulky? (b) Jakou celkovou vzdálenost automobil urazí, má-li náhle zastavit při počáteční rychlosti 25 m·s^{-1}?

54Ú. Největší povolené zrychlení soupravy podzemní dráhy je 1,34 m·s^{-2}. (a) Jaká je nejvyšší rychlost, které smí souprava dosáhnout při jízdě mezi stanicemi vzdálenými 806 m? (b) Jaká je odpovídající doba jízdy? (c) Předpokládejte, že souprava stojí ve stanici 20 s. Určete její maximální průměrnou rychlost v časovém intervalu mezi výjezdy ze dvou sousedních stanic. (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$.

55Ú. Délka dráhy kabiny výtahu v newyorském mrakodrapu Marquis Marriott je 190 m. Kabina se pohybuje nejvýše rychlostí 305 m·min^{-1}. Její zrychlení při rozjezdu i brzdění má velikost 1,22 m·s^{-2}. (a) Jakou vzdálenost urazí kabina od chvíle, kdy se začne rozjíždět, do okamžiku, kdy dosáhne nejvyšší rychlosti? (b) Za jak dlouho vyjede z dolního podlaží až nahoru, započteme-li rozjezd i brzdění?

56Ú. Osobní automobil se začne rozjíždět se zrychlením $a = 2{,}2$ m·s^{-2} přesně v okamžiku, kdy se na semaforech rozsvítí zelená. Ve stejném okamžiku ho ve vedlejším pruhu předjíždí kamion jedoucí konstantní rychlostí 9,5 m·s^{-1}. (a) Jak daleko za semafory automobil opět předjede kamion? (b) Jaké rychlosti v tomto okamžiku dosáhne?

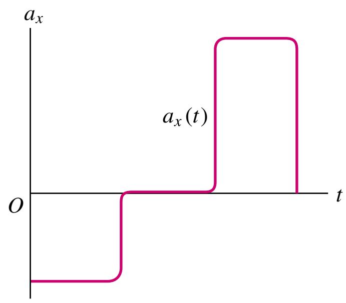
57Ú. Rychlík vyjíždí ze zatáčky rychlostí 160 km/h. Strojvůdce náhle spatří ve vzdálenosti 0,67 km lokomotivu, která jede po téže koleji stejným směrem rychlostí 29 km/h (obr. 2.26). Strojvůdce rychlíku začne okamžitě brzdit. (a) Určete nejmenší možné zpomalení rychlíku, při němž ještě nedojde ke srážce. (b) Okamžiku, kdy strojvůdce rychlíku zahlédl lokomotivu, přisoudíme hodnotu $t = 0$ a počátek osy x (tj. $x = 0$) zvolíme v místě, ve kterém se rychlík v tomto okamžiku nacházel. Nakreslete grafy časových závislostí $x(t)$ obou vlaků pro případ, že se tak tak podařilo srážku odvrátit.



Obr. 2.26 Úloha 57

58Ú. Dva vlaky jedou proti sobě po přímém úseku jednokolejné trati rychlostmi 72 km/h a 144 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 950 m, spatří oba strojvůdci protijedoucí vlak a začnou okamžitě brzdit se zrychlením o velikosti 1,0 m·s^{-2}. Dojde ke srážce?

59Ú. Nakreslete graf $v_x(t)$ odpovídající grafu $a_x(t)$ z obr. 2.27.



Obr. 2.27 Úloha 59

ODST. 2.8 Svislý vrh

60C. Dělníkovi na stavbě spadl nešťastnou náhodou hasák a narazil na zem rychlostí 24 m·s^{-1}. (a) Z jaké výšky padal? (b) Jak dlouho trval jeho pád? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$.

61C. (a) Jakou rychlostí musíme svisle vyhodit míč, aby dosáhl výšky 50 m? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na zem? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující let míče. V prvních dvou z nich vyznačte okamžik, kdy je míč právě ve výšce 50 m.

62C. Kapka deště dopadne na zem z mraku ve výšce 1 700 m. Jakou rychlostí by dopadla, kdyby její let nebyl brzděn odporem vzduchu? Bylo by v tomto případě bezpečné setrvávat během bouře venku?

63C. Nákladní stavební výtah je upevněn na jediném laně. Lano se náhle přetrhne, když výtah stojí v nejvyšším patře budovy, ve výšce 120 m. (a) Jakou rychlostí dopadne kabina na zem? (b) Jak dlouho poletí? (c) Jakou rychlost bude mít právě v polovině vzdálenosti měřené od výchozího bodu k zemi? (d) Za jak dlouho urazí první polovinu této vzdálenosti?

64C. Zlý výrostek Hugo hází kamením svisle dolů ze střechy budovy vysoké 30 m. Počáteční rychlost kamene má velikost 12,0 m·s^{-1}. (a) Za jak dlouho dopadne kámen na zem? (b) Jak velká bude jeho rychlost při dopadu?

65C. Ve výzkumném ústavu pro beztížný stav agentury NASA Lewis Research Center je i 145 m vysoká experimentální věž, z níž je vyčerpán vzduch. Jedním z experimentů, k nimž věž slouží, je volný pád koule o průměru 1 m, ve které jsou umístěny měřicí přístroje. (a) Jak dlouho trvá pád koule? (b) Jaká je její rychlost těsně před dopadem na záchytné zařízení ve spodní části věže? (c) Při záchytu je koule brzděna s průměrným zrychlením o velikosti $25g$ až do úplného zastavení. Jaká dráha je potřebná k zastavení koule?

66C. Model rakety poháněný hořícím palivem startuje svisle vzhůru. Nakreslete schematické grafy časových závislostí její polohy y, rychlosti v_y a zrychlení a_y. V grafech vyznačte, ve kterém místě došlo palivo, kdy model dosáhl největší výšky a kdy dopadl zpátky na zem.

67C. Kámen volně vypustíme z útesu vysokého 100 m. Za jakou dobu urazí (a) prvních 50 m dráhy, (b) druhých 50 m?

68Ú. Vyplašený pásovec vyskočí do výšky 0,544 m za 0,200 s (obr. 2.28). (a) Jaká je jeho počáteční rychlost? (b) Jaká je jeho rychlost v zadané výšce? (c) Jak vysoko ještě vyletí?

Obr. 2.28 Úloha 68

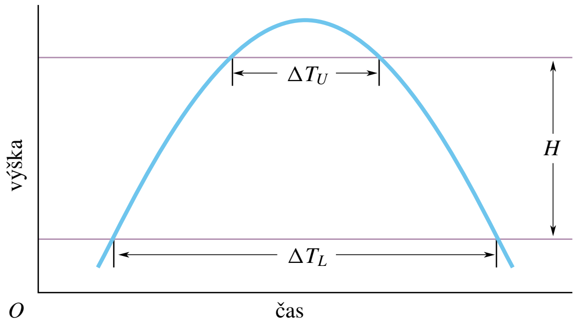
69Ú. Těleso padá z mostu, který je ve výšce 45 m nad hladinou řeky. Spadne přímo do loďky, která pluje pod mostem konstantní rychlostí. V okamžiku uvolnění tělesa na mostě byla loďka vzdálena právě 12 m od místa dopadu. Jaká je její rychlost?

70Ú. Model rakety je odpálen svisle vzhůru a stoupá s konstantním zrychlením 4,00 m·s^{-2} po dobu 6,00 s. Pak dojde palivo a raketa letí bez pohonu. (a) Jaké maximální výšky dosáhne? (b) Jaká je celková doba jejího letu od startu až po pád na zem?

71Ú. Basketbalista, který doskakuje pod košem, vyskočí svisle do výšky 76 cm. Jak dlouho setrvává (a) blíže než 15 cm od nejvyššího bodu své dráhy, (b) blíže než 15 cm od podlahy? Výsledek tohoto výpočtu nám pomůže pochopit, proč se zdá, že basketbalista při výskoku chvíli visí ve vzduchu.

72Ú. V Národní fyzikální laboratoři v Anglii měřili tíhové zrychlení g pomocí svislého vrhu tělesa ve vyčerpané trubici. Při letu byly registrovány průchody tělesa dvěma body v různých výškách dráhy letu (obr. 2.29). Označme ΔT_L dobu, která uplynula mezi dvěma průchody dolním bodem, ΔT_U dobu mezi průchody horním bodem a H svislou vzdálenost těchto dvou bodů. Ukažte, že

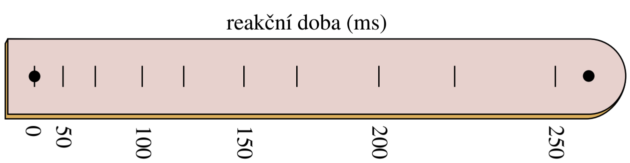
$$g = \frac{8H}{\Delta T_L^2 - \Delta T_H^2}.$$



Obr. 2.29 Úloha 72

73Ú. Koule z vlhké hlíny padá z výšky 15,0 m. Po dopadu na zem se po dobu 20 ms plasticky deformuje, než se její pohyb zcela zastaví. Jaké je průměrné zrychlení koule při této deformaci? (Při řešení nahraďte kouli hmotným bodem.)

74Ú. Z výšky h hodíme svisle *dolů* míč s počáteční rychlostí v_{0y}. (a) Jaká bude rychlost míče těsně před dopadem? (b) Za jak dlouho míč dopadne? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), vyhodíme-li míč svisle vzhůru z téže výšky stejnou rychlostí? Než začnete řešit příslušné rovnice, rozvažte předem, zda hodnoty získané v části úkolu (c) budou větší, menší či stejné jako výsledky úloh (a) a (b).



Obr. 2.30 Úloha 75

75Ú. Na obr. 2.30 je jednoduché zařízení pro měření reakční doby člověka. Je vyrobeno z pásku lepenky s nakresleným měřítkem a dvěma velkými tečkami. Reakční dobu si můžeme sami změřit takto: Náš pomocník uchopí pásek mezi palec a ukazováček v místě tečky umístěné na obr. 2.30 vpravo a drží jej měřítkem svisle dolů. Přiblížíme ruku k pásku tak, aby procházel mezi palcem a ukazováčkem právě v místě druhé tečky. Je třeba, aby palec a ukazováček byly co nejblíže u sebe, nesmíme se však pásku dotýkat. Náhle náš přítel pásek pustí a my se jej snažíme co nejrychleji chytit. Reakční dobu zjistíme podle značky v místě, kde se nám podaří pásek zachytit. (a) V jaké vzdálenosti od dolní tečky musí být nakreslena značka s údajem 50 ms? (b) V kolikrát větší vzdálenosti od dolní tečky musí být zakresleny značky s údaji 100 ms, 150 ms, 200 ms a 250 ms? (Myslíte, že například značka 100 ms je v dvojnásobné vzdálenosti od dolní tečky než značka 50 ms? Lze v odpovědích na otázku (b) najít nějakou zákonitost?)

76Ú. Žonglér vyhazuje míč do jisté výšky. Kolikrát výše musí míč vyhodit, aby jeho let trval dvojnásobnou dobu?

77Ú. Kámen je vržen svisle vzhůru. Při vzestupu míjí jistý bod A rychlostí v a další bod B rychlostí $\frac{1}{2}v$. Bod B je o 3,00 m výše než bod A. Určete (a) rychlost v a (b) největší výšku, do které kámen vyletí nad úroveň bodu B.

78Ú. Kvalitu tenisového míčku můžeme ověřit například tak, že zjišťujeme, jak skáče. Volně jej upustíme z výšky 4,00 m. Míč se odrazí a vyskočí do výšky 3,00 m. Jaké bylo průměrné zrychlení při odrazu, trval-li 10 ms? Odpor prostředí zanedbejte.

79Ú. Voda kape na podlahu ze sprchové růžice upevněné ve výšce 200 cm. Kapky padají v pravidelných intervalech. Právě v okamžiku dopadu první kapky začíná pád čtvrté. Jaká je poloha druhé a třetí kapky v tomto okamžiku?

80Ú. Olověná koule je vržena do jezera z plošiny umístěné 5,20 m nad hladinou. Koule dopadne na hladinu určitou rychlostí a začne se potápět. Klesá při tom ke dnu stejnou rychlostí, se kterou dopadla na hladinu. Na dno dosedne za 4,8 s od okamžiku, kdy byla z plošiny vypuštěna. (a) Jak je jezero hluboké? (b) Jaká je průměrná rychlost koule? Představme si, že vodu z jezera vypustili. Kouli vyhodíme ze stejné plošiny a požadujeme, aby na dno jezera dopadla opět za 4,8 s. Jaká musí být její počáteční rychlost?

81Ú. Těleso volně padá z výšky h. Za poslední sekundu pádu urazí dráhu $0{,}50h$. Určete (a) dobu pádu a (b) výšku h. Objasněte fyzikální význam obou kořenů kvadratické rovnice, jejíž řešení je součástí výpočtu.

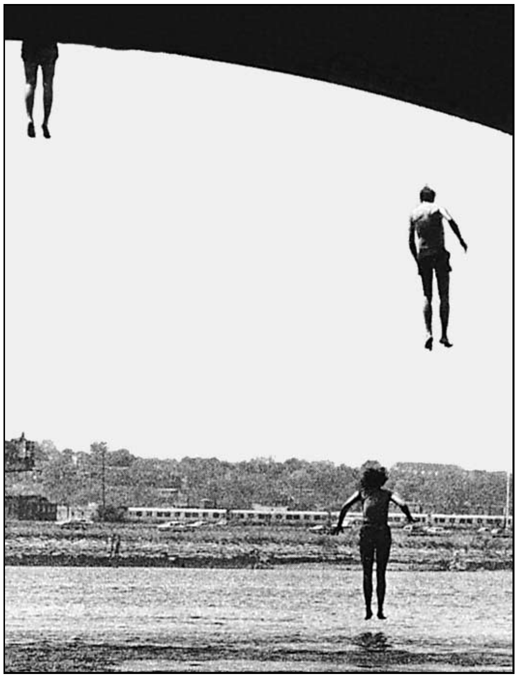
82Ú. Dívka spadla ze střechy budovy vysoké 44 m a dopadla na plechovou konstrukci vzduchotechniky. Stropní stěna konstrukce se při tom promáčkla o 46 cm. Dívka pád přežila bez vážnějšího poranění. Předpokládejte, že její zrychlení v průběhu brzdění pádu bylo konstantní a určete je. Výsledek vyjádřete v jednotkách SI i v násobcích g.

83Ú. Kámen byl volně upuštěn do vody z mostu vysokého 44 m. Za jednu sekundu poté byl svisle dolů hozen druhý kámen. Oba kameny dopadly do vody současně. (a) Jaká byla počáteční rychlost druhého kamene? (b) Nakreslete grafy časové závislosti rychlosti obou kamenů. (Počátek časové osy přisoudíme okamžiku, kdy začal padat první kámen.)

84Ú. Parašutistka padá po výskoku z letadla nejprve volným pádem a urazí 50 m. Poté otevře padák, který zpomaluje její pohyb se zrychlením o velikosti $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Na zem dopadne rychlostí $3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jak dlouho trval její let? (b) V jaké výšce nad zemí vyskočila z letadla?

85Ú. Dvě tělesa jsou volně vypuštěna ze stejné výšky v časovém odstupu 1 s a letí volným pádem. Za jak dlouho od okamžiku, kdy začalo padat první z nich, je jejich vzdálenost 10 m?

86Ú. Klára a Jan seskočili těsně po sobě z mostu (obr. 2.31). Za jak dlouho po Kláře seskočil Jan? Předpokládejte, že Jan je vysoký 170 cm a místo, odkud oba skočili, je právě na horním okraji obrázku. Číselné hodnoty nutné pro výpočet je třeba získat přímo měřením na fotografii.



Obr. 2.31 Úloha 86

87Ú. Horkovzdušný balon stoupá rychlostí 12 m·s^{-1}. Ve výšce 80 m vyhodí posádka balíček. Určete (a) dobu jeho pádu a (b) jeho rychlost při dopadu.

88Ú. Otevřená výtahová klec stoupá vzhůru konstantní rychlostí 10 m·s^{-1}. Chlapec jedoucí ve výtahu si hraje s míčem a vyhazuje jej svisle vzhůru. Ve výšce 2 m nad podlahou výtahu má míč vzhledem k výtahu rychlost 20 m·s^{-1}. V tom okamžiku je podlaha výtahu právě 28 m nad zemí. (a) Do jaké největší výšky nad zemí míč vyletí? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na podlahu výtahu?

89Ú. Koule z tvrzené gumy je volně puštěna ze střechy budovy. Při svém pádu míjí okno vysoké 1,20 m a její let podél okna trvá 0,125 s. Dopadne na chodník, kde se pružně odrazí, takže při výstupu prolétne kolem téhož okna opět za dobu 0,125 s. Doba mezi oběma průchody kolem dolního okraje okna je 2,00 s. Jak je budova vysoká?

90Ú. Podřimující kočka zahlédne otevřeným oknem letící květináč, který nejprve stoupá vzhůru a pak opět padá. Celková doba, po kterou je květináč vidět v okně, je 0,50 s. Okno je vysoké 2,00 m. Jak vysoko nad horní okraj okna květináč vyletěl?

PRO POČÍTAČ

Úlohy v této části řešíme pomocí počítače.

91Ú. Zkušební jezdec testuje brzdy automobilu vybaveného systémem ABS, který zajišťuje maximální brzdný účinek bez prokluzu pneumatik. Testovací jízdy probíhají na přímém a suchém úseku zkušební dráhy. Úkolem jezdce je zastavit vůz na nejkratší možné dráze od okamžiku, kdy zahlédne světelný signál. Dráha potřebná k zastavení je pro šest různých počátečních rychlostí uvedena v následující tabulce. (a) Najděte závislost brzdné dráhy d na velikosti počáteční rychlosti $v_{i,x}$, reakční době řidiče T_R a velikosti a_x konstantního zrychlení automobilu. Metodou nejmenších čtverců určete (b) a_x a (c) T_R.

$v_{i,x}$ (m·s^{-1})	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00
d (m)	4,6	12,1	22,3	35,2	51,0	69,5

92Ú. Motocyklista se rozjíždí (z klidu) po vodorovné přímé silnici, na které jsou v pravidelných desetimetrových rozestupech umístěny fotobuňky. První z nich je právě u startu. (Pomocí fotobuňky je možné měřit okamžik průjezdu motocyklu daným místem.) V následující tabulce jsou shrnuty výsledky měření. (a) Najděte závislost uražené dráhy d na zrychlení a_x. Předpokládejte, že zrychlení je konstantní. (b) Hodnoty z tabulky zakreslete do grafu znázorňujícího závislost dráhy d na druhé mocnině času t^2. (c) Metodou lineární regrese určete ze zadaných údajů zrychlení motocyklu a_x.

Pořadové číslo fotobuňky	1	2	3	4	5	6
Vzdálenost (m)	0	10	20	30	40	50
Čas (s)	0	1,63	2,33	2,83	3,31	3,79

93Ú. Motocyklista z předchozí úlohy se opět rozjíždí s konstantním zrychlením na přímé testovací dráze, na které jsou umístěny měřicí body s rozestupy $d_0 = 10$ m. První bod je v neznámé vzdálenosti d od startu jezdce. V následující tabulce jsou výsledky měření rychlosti motocyklu v těchto bodech. (a) Najděte závislost čtverce rychlosti $v_{j,x}^2$ v j-tém bodě na rychlosti $v_{1,x}$ v prvním bodě, na vzdálenosti d_0, na konstantním zrychlení a_x a na pořadovém čísle měřicího bodu j. (b) Nakreslete graf závislosti $v_{j,x}^2$ na $(j-1)$. Metodou lineární regrese určete (c) zrychlení a_x a (d) vzdálenost d.

Vztažný bod číslo	1	2	3	4	5	6
Rychlost (m·s^{-1})	14,0	18,3	21,7	24,6	27,5	30,0

94Ú. Předpokládejme, že časová závislost polohy částice při jejím pohybu podél osy x je dána vztahem

$$x(t) = -32{,}0 + 24{,}0t^2\mathrm{e}^{-0{,}0300t},$$

kde x je měřeno v metrech a t v sekundách. (a) Najděte vztahy pro rychlost v_x a zrychlení a_x částice jako funkce času. (b) Nakreslete grafy časových závislostí její polohy, rychlosti a zrychlení pro časový interval od 0 do 100 s. (c) Určete, ve kterém okamžiku je částice v počátku soustavy souřadnic ($x = 0$). Určete její rychlost a zrychlení v tomto okamžiku. (d) Určete, ve kterém okamžiku je její rychlost nulová, a vypočtěte odpovídající polohu a zrychlení.