Matematická logika

1. prednáška

Čo je logika?
Výroková logika I
Logické spojky, tvorba výrokových formúl (syntax) a pravdivostné ohodnotenie formúl (sémantika)


Leibniz, Boole a Gödel pracovali v logike
Ja pracujem v logike
Ja som Leibniz, Boole a Gödel
s.harris

1. Výroková logika

Výroková logika študuje také formy usudzovania, pre ktoré platnosť záverov nezávisí od obsahu a ani od vnútornej štruktúry výrokov, ale výlučne len pravdivosti či nepravdivosti týchto výrokov.

Analyzujme tieto jednoduché oznamovacie vety:

(1) Atóm je fyzikálna štruktúra	(pravdivý výrok).
(2) Atóm je sociálna štruktúra.	(nepravdivý výrok)
(3) Vo vesmíre existuje život aj mimo Zeme.	(zatiaľ nerozhodnuteľný)
(4) Láska je rádioaktívna.	(nezmysel)
(5) Rast nášho hospodárstva má neustálu tendenciu.	(nesprávny)

Elementárny výrok *je jednoduchá oznamovacia veta, pri ktorej má zmysel pýtať sa, či je alebo nie je pravdivá. Elementárne výroky budeme označovať malými písmenami abecedy* p, q, r , s , p_1, p_2, ...

Pravdivostná hodnota *výroku* p *bude označená* $val\left(p\right)$, *pričom, ak výrok* p *je pravdivý* (*nepravdivý*), *potom* $val\left(p\right)=1$ ($val\left(p\right)=0$).

Logické spojky

Prirodzený jazyk obsahuje spojky (napr. *a*, *alebo*, *ak..., potom...*, *je ekvivalentné*, *nie je pravda, že...*) pomocou ktorých z elementárnych výrokov vytvárame zložitejšie výroky (výroky), pričom ich pravdivosť alebo nepravdivosť je určená len pravdivostnými hodnotami ich zložiek (elementárnymi výrokmi).

(1) *Negácia*

Unárna logická spojka, z výroku p vytvára nový výrok

„nie je pravda, že p“

čo zapíšeme pomocou symbolu negácie $\neg$ takto: $\neg p$.

Ak je výrok pravdivý p (nepravdivý), potom jeho negácia $\neg p$ je nepravdivá (pravdivá)

$$val(\neg p) = 1 - val(p).$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

(2) *Konjunkcia*

Binárna symetrická spojka z dvoch výrokov p, q vytvára nový výrok „p a q“, ktorý je formálne označený „$p \wedge q$“.

Príklad: uvažujme zložený výrok

„Peter je v škole a Milan je v kine“,

kde elementárne výroky sú p=(Peter je v škole) a q=(Milan je v kine).

Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí od pravdivostných hodnôt jeho zložiek, pričom nutným predpokladom, aby jeho pravdivostná hodnota bola pravda je pravdivosť oboch jeho zložiek,

$$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}.$$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(3) *Disjunkcia*

Binárna symetrická logická spojka z dvoch výrokov p, q vytvára nový výrok „p alebo q", ktorý je formálne označený „$p \vee q$".

Príklad: uvažujme zložený výrok

„Peter je v škole alebo Peter je v divadle",

kde elementárne výroky sú p=(Peter je v škole) a q=(Peter je v divadle).

Pravdivosť zloženého výroku $p \vee q$ záleží od toho, či aspoň jedna zložka je pravdivá, ak sú obe nepravdivé, potom pravdivosť zloženého výroku je nepravda

$$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}.$$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(4) *Implikácia*

Binárna logická spojka z dvoch výrokov p a q vytvára nový výrok „ak p, potom q“, alebo „p implikuje q“, ktorý je formálne označený „$p \Rightarrow q$“.

Príklad: uvažujme zložený výrok

„Ak je Peter v škole, potom Tomáš je na výlete“,

kde elementárne výroky sú p=(Peter je v škole) a q=(Tomáš je na výlete).

Budeme postulovať, že implikácia je nepravdivá len vtedy, ak $val(p)=1$ a $val(q)=0$, pre všetky ostatné pravdivostné hodnoty p a q je pravdivá.

$$val\left(p \Rightarrow q\right) = max\left\{1, 1 - val\left(p\right) + val\left(q\right)\right\}$$

$$= \begin{cases} 1 & \left(val\left(p\right) \le val\left(q\right)\right) \\ 0 & \left(\text{ináč}\right) \end{cases}.$$

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Príklad

$p=(5+2=8)$
q=(*Masaryk bol prvý prezident Československa*)

Zložený výrok $p \Rightarrow q$

„ak *5+2=8,* potom *Masaryk bol prvý prezident Československa“*

je pravdivý výrok, aj keď bežný čitateľ bude pokladať tento výrok za nepravdivý ba až nezmyselný.

Jeden zo zakladateľov modernej logiky G. Frege (1848-1925) navrhol riešiť tento problém tak, že v rámci implikácie sa môžu vyskytovať len výroky, ktoré sú v príčinnej súvislosti.

Tieto problémy s určením pravdivostných hodnôt implikácie viedli v prvej polovici 20.storočia niektorých logikov k štúdiu tzv. *neklasických logík,* ktoré majú jemnejšie prostriedky na špecifikáciu implikácie (chápanej ako relácia príčinného vzťahu).

(5) *Ekvivalencia*

Binárna symetrická logická „*p* je ekvivalentné *q*“, formálne „ $p \equiv q$ “

Príklad: uvažujme zložený výrok

„číslo *n* je párne je ekvivalentné číslo *n* je deliteľné 2“,

kde elementárne výroky sú p=(číslo *n* je párne) a q=(číslo *n* je deliteľné 2).

Ekvivalencia dvoch výrokov $p \equiv q$ je pravdivá len vtedy, ak jej elementárne výroky *p* a *q* sú súčasne buď pravdivé alebo nepravdivé

$$val\left(p \equiv q\right) = \left(val\left(p\right) = val\left(q\right)\right)$$

p	q	$p \equiv q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alternatívna definície ekvivalencie je jej určenie pomocou implikácie a konjunkcie

$$(p \equiv q) =_{def} ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

$$val(p \equiv q) = min\begin{Bmatrix} min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}, \\ min\{1, 1 - val(q) + val(p)\} \end{Bmatrix}$$

V matematike sa často používa táto logická spojka v týchto dvoch alternatívnych jazykových formách:

(1) „*p* je nutnou a dostatočnou podmienkou *q*“, alebo
(2) „*p* práve vtedy a len vtedy (vtt) ak *q*“.

Príklady:

(1) Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby číslo n bolo párne je, aby bolo deliteľné 2.
(2) Číslo n je párne vtedy a len vtedy, ak je deliteľné 2

Jazyk výrokovej logiky (syntax)

Formálny systém pre konštrukciu formúl výrokovej logiky (*výrokových formúl*), ktoré sú zostrojené pomocou

(1) iných výrokov (buď elementárnych alebo zložitých)

(2) logických spojok.

Nech $\boldsymbol{P} = \{p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots\}$ je množina elementárnych výrokov (výrokové premenné); výrokové konštanty $\{0,1\}$

Definícia. *Výroková formula nad množinou* ***P*** *výrokových premenných je zostrojená opakovaným použitím týchto dvoch pravidiel:*

- *Každá výroková premenná* $p \in \boldsymbol{P}$ *je výroková formula.*
- *Ak výrazy* φ *a* ψ *sú výrokové formule, potom aj výrazy* $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *a* $(\varphi \equiv \psi)$ *sú výrokové formuly.*

Obvykle sa ešte zdôrazňuje, že žiadne iné výrazy, ako tie, ktoré môže vzniknúť opakovaným použitím uvedených pravidiel, nie sú formulami výrokovej logiky.

Zátvorky sa používajú ako pomocné symboly, pomocou ktorých môžeme odstrániť prípadnú nejednoznačnosť výrokových formúl. Uvažujme o formule $p \wedge q \vee r$, pomocou zátvoriek môžeme ju interpretovať dvoma rôznymi spôsobmi $(p \wedge q) \vee r$ a $p \wedge (q \vee r)$.

Príklad. Nech $\boldsymbol{P} = \{p, q, r, s\}$ je množina výrokových premenných, potom

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg s))$$

$$((\neg p \wedge (r \vee s)) \wedge (p \Rightarrow s))$$

sú výrokové formuly, zatiaľ čo

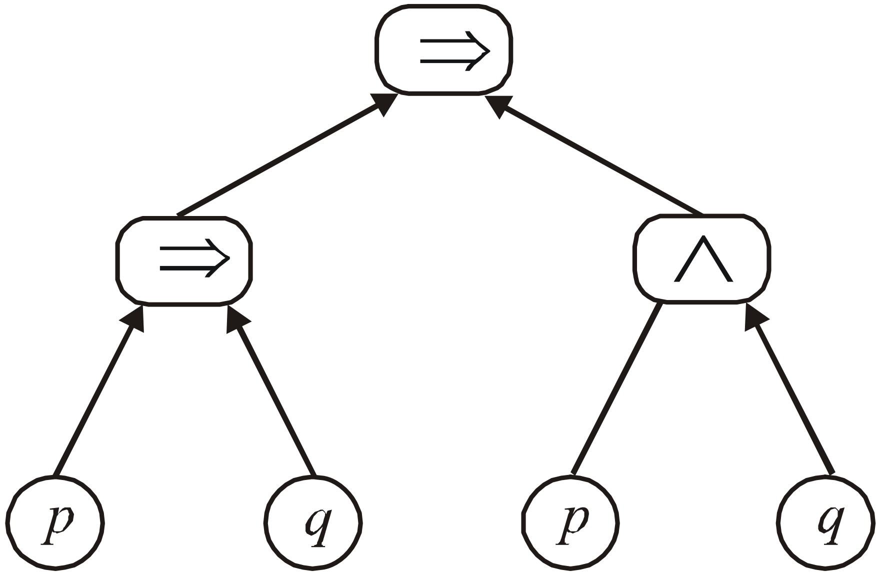
$$\cancel{(\Rightarrow (\wedge p))}$$

$$\cancel{((\Rightarrow \Rightarrow s) \Rightarrow p)}$$

nie sú výrokové formuly.

Každá výroková formula je reprezentovaná pomocou grafického útvaru nazývaného *syntaktický strom*

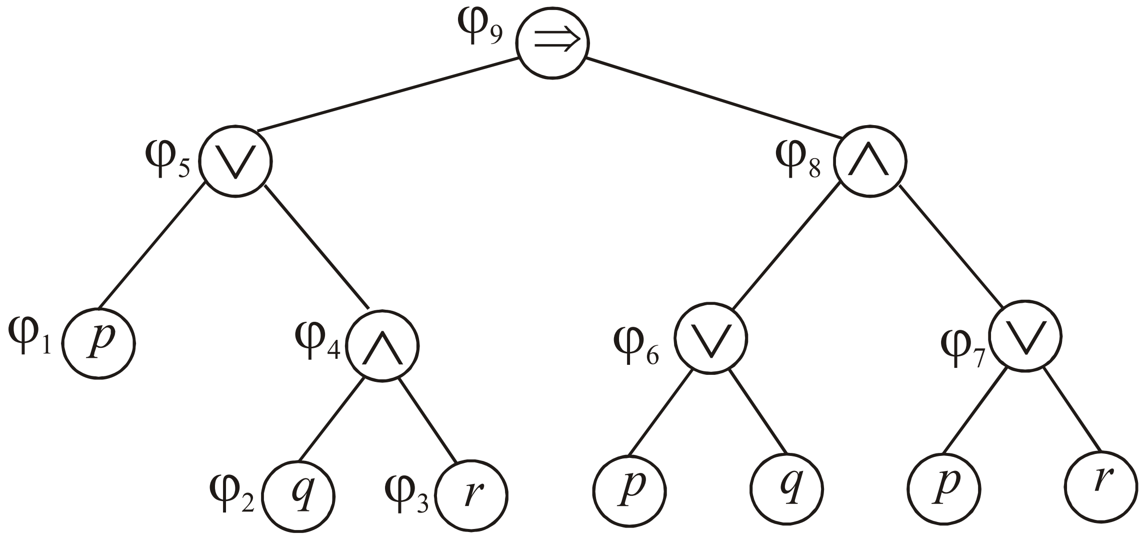
$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$$



Koncové vrcholy stromu reprezentujú výrokové premenné p a q, vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor.

Každému vrcholu syntaktického stromu môžeme priradiť ***podformulu***

$$\varphi = \Big(\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)\Big)$$



Jednotlivé podformule sú určené takto:

$$\varphi_1 = p, \varphi_2 = q_1, \varphi_3 = r, \varphi_4 = q \wedge r, \varphi_5 = p \vee \varphi_4 = p \vee (q \wedge r)$$

$$, \varphi_6 = p \wedge q, \varphi_7 = p \wedge r, \varphi_8 = \varphi_6 \wedge \varphi_7 = (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$\varphi = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_9 = \Big(\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)\Big).$$

Definícia. ***Konštrukcia*** *formule* φ *nad množinou* ***P*** *je tvorená postupnosťou formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, *pričom posledný prvok* φ_n *je totožný s formulou* φ, *pre každé* $i = 1, 2, ..., n$ *platí jedna s týchto troch možností:*

(1) φ_i *je výroková premenná z* ***P*** *alebo výroková konštanta.*

(2) φ_i *vznikla z niektorého z prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou unárnej logickej spojky negácie,* $\varphi_i = (\neg \varphi_j)$, *pre* $j = 1, 2, ..., i-1$.

(3) φ_i *vznikla z niektorých dvoch prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou binárnej logickej spojky, napr.* $\varphi_i = (\varphi_j \wedge \varphi_k)$, *pre* $j < k = 1, 2, ..., i-1$.

Prvky postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *sa nazývajú* ***podformule*** *formule* φ, $\varphi_i \subseteq \varphi$ *pre* $i = 1, 2, ..., n$.

V teórii formálnych jazykov je zvykom špecifikovať ich syntax pomocou Backusovej a Naurovej formy (BNF), použijeme tento prístup aj pre alternatívne určenie syntaxu formúl výrokovej logiky:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathit{formula} \rangle ::= {} & \langle \mathit{výroková\ premenná} \rangle \mid \\
& \langle \mathit{logická\ konštanta} \rangle \mid \\
& (\neg \langle \mathit{formula} \rangle) \mid \\
& (\langle \mathit{formula} \rangle \langle \mathit{binárna\ logická\ spojka} \rangle \langle \mathit{formula} \rangle)
\end{aligned}
$$

$$\langle \mathit{výroková\ premenná} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid \ldots \mid p_1 \mid p_2 \mid p_3 \mid \ldots$$

$$\langle \mathit{logická\ konštanta} \rangle ::= 0 \mid 1$$

$$\langle \mathit{binárna\ logická\ spojka} \rangle ::= \Rightarrow \mid \wedge \mid \vee \mid \equiv$$

Pravdivostné ohodnotenie formúl výrokovej logiky (sémantika)

Syntax formúl výrokovej logiky je jednoznačne určená spôsobom ich konštrukcie, pomerne ľahko vieme rozhodnúť, či daná formula ma korektnú syntax, alebo nemá.

Podobne ako v prirodzenom jazyku, kde syntax špecifikuje tvar vety, nie všetky vety, ktoré môžeme zostrojiť jednoduchým zreťazením slov, sú syntakticky korektné.

Podobne aj vo výrokovej logike, nie každé zreťazenie prípustných symbolov nám definuje formulu, existujú formuly, ktoré nie sú syntakticky správne.

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax).

Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá.

Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov.

Príklad

$$\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(p \wedge q\right)$$

ktorá má korektnú syntax (napr. reprezentovaný syntaktickým stromom), je jej sémantika plne určená vyššie uvedenou tabuľkou jej pravdivostných hodnôt pre všetky štyri kombinácie výrokov p a q.

Uvažujme formulu výrokovej logiky A, ktorej výrokové premenné $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú špecifikované τ, ktorý určuje pravdivostné hodnoty jej premenných. Táto š*pecifikácia premenných* $\tau = \left(p/\tau_1, q/\tau_2, \ldots, r/\tau_n\right)$, kde $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \{0,1\}$, spočíva v priradení binárnych pravdivostných hodnôt jednotlivým premenným.

Rôznych špecifikácii premenných τ, ktoré sú priradené n výrokovým premenným je 2^n. Pravdivostná hodnota formule A pre danú špecifikáciu τ je označená výrazom $val_\tau\left(A\right)$.

Ako bude prebiehať výpočet $val_\tau(\varphi)$?

Predpokladajme, že konštrukcia formule φ je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$. Pravdivostné vyhodnotenie jednotlivých členov postupnosti pre $i = 1, 2, ..., n$ sa vykonáva takto:

(1) Ak φ_i je výroková premenná, potom $val_\tau(\varphi_i)$je určená priamo špecifikáciou τ, ktorý špecifikuje pravdivostné hodnoty premenných.

(2) Ak φ_i nie je výroková premenná a vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$aplikáciou unárnej logickej spojky negácie, $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$, pre $j = 1, 2, ..., i-1$, potom $val_\tau(\varphi_i) = 1 - val_\tau(\varphi_j)$.

(3) Ak φ_i nie je výroková premenná a *vznikla z niektorýho dvoch prvkov množiny* $\varphi_j, \varphi_k \in \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$*aplikáciou binárnej logickej spojky, potom* $val_\tau(\varphi_i)$ je vyhodnotený na základe tabuľky 1.1 pomocou už známych pravdivostných hodnôt $val_\tau(\varphi_j)$ a $val_\tau(\varphi_k)$. Tak napríklad, nech $\varphi_i = (\varphi_j \wedge \varphi_k)$, pre $j < k < i$, potom $val_\tau(\varphi_i) = val_\tau(\varphi_j) \cdot val_\tau(\varphi_k)$.

Tento rekurentný postup je názorne realizovaný pomocou ***tabuľkovej metódy***, kde postupne počítame pravdivostné hodnoty jednotlivých podformúl pre všetky možné špecifikácie τ

$$\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(p \wedge q\right)$$

1	2	3	4	5
p	q	$1 \Rightarrow 2$	$1 \wedge 2$	$3 \Rightarrow 4$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Z tejto tabuľky vyplýva, že existujú také pravdivostné hodnoty premenných p a q (p=0, q=0 a p=0, q=1), pre ktoré je pravdivostná hodnota danej výrokovej formuly nepravda (0).

Vo výrokovej logike majú mimoriadne postavenie také formuly, ktorých pravdivostná hodnota je pravda pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt premenných vo všetkých riadkoch. Takéto formuly nazývame *tautológie* a majú postavenie „zákonov“ výrokovej logiky. Ich používanie pri odvodzovaní nových formúl zabezpečuje, že sú taktiež tautológie.

Definícia**. Formula* φ *sa nazýva* ***tautológia (*čo vyjadríme* $\models \varphi$)*, ak pre každú špecifikáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi)=1$*; v opačnom prípade, ak pre každú špecifikáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi)=0$*, formula sa nazýva* ***kontradikcia****. Ak pre niektorú špecifikáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi)=1$ *a pre inú špecifikáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi)=0$*, potom formula* φ *je* ***splniteľná****.*

Často používané tautológie

(1) Zákon totožnosti $\models \left(p \Rightarrow p \right)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $\models \left(\neg\neg p \equiv p \right)$.

(3) Zákon vylúčenia tretieho $\models \left(p \vee \neg p \right)$.

(4) De Morganov zákon pre konjunkciu

$\models \left(\neg \left(p \wedge q \right) \equiv \left(\neg p \vee \neg q \right) \right)$.

(5) De Morganov zákon pre disjunkciu

$\models \left(\neg \left(p \vee q \right) \equiv \left(\neg p \wedge \neg q \right) \right)$.

(6) Zákon ekvivalencie

$$\models \left(\left(p \equiv q \right) \equiv \left(\left(p \Rightarrow q \right) \wedge \left(q \Rightarrow p \right) \right) \right)$$

(7) Zákon tranzitívnosti implikácie

$$\models \left(p \Rightarrow r \right) \Rightarrow \left(\left(r \Rightarrow q \right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow q \right) \right)$$

(8) Distribúcia konjunkcie

$$\models \left(\left(p \vee \left(q \wedge r \right) \right) \equiv \left(\left(p \vee q \right) \wedge \left(p \vee r \right) \right) \right).$$

(9) Distribúcia disjunkcie

$$\models \left(\left(p \wedge \left(q \vee r \right) \right) \equiv \left(\left(p \wedge q \right) \vee \left(p \wedge r \right) \right) \right).$$

(10) Zákon kontrapozície

$$\vDash \left(\left(p \Rightarrow q \right) \equiv \left(\neg q \Rightarrow \neg p \right) \right)$$

(11) Zákon „reductio ad absurdum“

$$\vDash \left(\left(\left(p \Rightarrow q \right) \wedge \left(p \Rightarrow \neg q \right) \right) \Rightarrow \neg p \right).$$

(12) Zákon nahradenia implikácie

$$\vDash \left(\left(p \Rightarrow q \right) \equiv \left(\neg p \vee q \right) \right).$$

(13) Zákon „modus ponens“

$$\vDash \left(\left(p \Rightarrow q \right) \wedge p \right) \Rightarrow q$$

Mike Mcmahon / AP

The End