1. kontrolná písomka z ML konaná dňa 5. 4. 2013

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?
(e) čo je dôkaz formuly φ ?

Príklad 2. Pomocou prirodzenej dedukcie overte správnosť záverov:

(a) Ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd.
Ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár.
Prúd ide.

Ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár.

(b) Je doma alebo je v kaviarni.
Ak je doma, potom vás očakáva.

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni.

Príklad 3. Pomocou sémantických tabiel zistite, či formuly sú tautológie.
(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$,
(b) $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,

Príklad 4. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, či platia relácie logického vyplývania

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$
(b) $\{\neg p \vee \neg q\} \vdash \neg(p \wedge q)$

Príklad 5. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa rozmnožujú vajcami.
(b) Niektorí športovci majú zlú fyzickú kondíciu.

Poznámka: Čas na písomku je 45 min. Každý príklad sa hodnotí 4 bodmi, max. počet bodov je teda 4x5=20 bodov.

Riešenie

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(f) čo je formula?
(g) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(h) čo je teória a čo je model?
(i) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?
(j) čo je dôkaz formuly φ ?

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny {p,q,q,…} a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula::=premenná | (formula) | (formula ∧ formula) | (formula ∨ formula) |
(formula ⇒ formula) | (¬formula)

(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) *F*ormula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \vDash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2. Overte správnosť dôsledkov.:

(a) Ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd.
Ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár.
Prúd ide.

Ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár.

Elementárne výroky:
p = motor beží,
q = motor je chybný,
r = ide prúd,
s = musí sa zavolať opravár.

1. predpoklad: $\varphi_1 = (\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$
2. predpoklad: $\varphi_2 = (q \Rightarrow s)$
3. predpoklad: $\varphi_3 = r$

---

záver: $\varphi = (\neg p \Rightarrow s)$

1.	$\neg p$	(aktivácia predpokladu)
2.	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$	(1. predpoklad)
3.	$q \Rightarrow s$	(2. predpoklad)
4.	r	(3. predpoklad)
5.	$(q \vee \neg r) = (r \Rightarrow q)$	(aplikácia modus ponens na 1. a 2.)
6.	q	(aplikácia modus ponens na 4. a 5.)
7.	s	(aplikácia modus ponens na 3. a 6.)
8.	$\neg p \Rightarrow s$	(deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(b) Je doma alebo je v kaviarni.
Ak je doma, potom vás očakáva.
___
Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni.

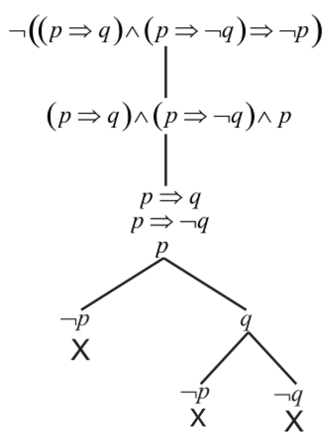
Elementárne výroky:
p = je doma,
q = je v kaviarni,
r = očakáva vás.

1. predpoklad: $\varphi_1 = (p \vee q)$
2. predpoklad: $\varphi_2 = (p \Rightarrow r)$
___
záver: $\varphi = (\neg r \Rightarrow q)$

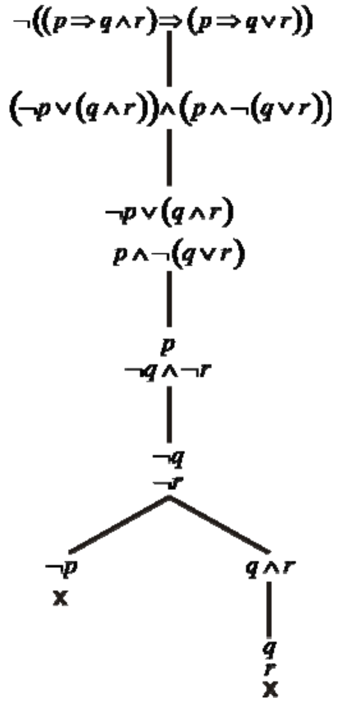
1.	$\neg r$	(aktivácia predpokladu)
2.	$p \vee q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	(1. predpoklad)
3.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
4.	$\neg p$	(modus tollens pre 1. a 3.)
5.	q	(modus ponens pre 2. a 4.)
6.	$\neg r \Rightarrow q$	(deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

Príklad 3. Pomocou sémantických tabiel zistite, či formuly sú tautológie.
(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$,



(b) $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,



Príklad 4. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, či platia relácie logického vyplývania
(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$

1	p	aktivácia pomocného predpokladu
2	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
3	$q \Rightarrow r$	2. predpoklad
4	q	E$\Rightarrow$ (modus ponens na 1. a 3.)
5	r	E$\Rightarrow$ (modus ponens na 3. a 4.)
6	$p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\{\neg p \vee \neg q\} \vdash \neg(p \wedge q)$

1	$\neg p \vee \neg q$	1. predpoklad
2	$p \wedge q$	aktivácia pomocného predpokladu
3	p	E$\wedge$ na 2.
4	q	E$\wedge$ na 2.
4	$\neg p$	E$\vee$ na 1. a 4.
5	$p \wedge q \Rightarrow p$	deakt. pomocného predpokladu na 3.
6	$\neg(p \wedge q)$	aplikácia modus tollens na 4. a 5.

Príklad 5. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa rozmnožujú vajcami.

$$\forall x\left(Vtak(x) \Rightarrow Mnoz\_vaj(x)\right)$$

$$\exists x\left(Vtak(x) \wedge \neg Mnoz\_vaj(x)\right)$$

Existuje taký vták, ktorý sa nerozmnožuje vajcami.

(b) Niektorí športovci majú zlú fyzickú kondíciu.

$$\exists x\left(sport(x) \wedge \neg fyz\_kond(x)\right)$$

$$\forall x\left(\neg sport(x) \vee fyz\_kond(x)\right) \equiv \forall x\left(sport(x) \Rightarrow fyz\_kond(x)\right)$$

Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.