# Opravná písomná skúška predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 3. 2. 2010

**1. príklad.** Aký záver vyplýva z množiny výrokov?
„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.

**2. príklad**. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A=\{a\}$.

**3. príklad.**
Zistite, či relácia $R$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x \le y$,

(b) $x$ má rovnaké krstné meno ako $y$, $km(x)=km(y)$,

(c) $x$ je deliteľné 2 a $y$ je deliteľné 2 a 4.

**4. príklad**. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

**5. príklad**
**Cvičenie 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,

**6. príklad.**
Nech na turnaji je $2^k$ družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

**7. príklad.** Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z\ .$$

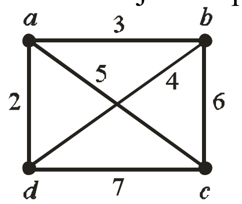
**8. príklad.** Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5 \\
x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\
x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3
\end{array}$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**10. príklad.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf




pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.

**11. príklad.** Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗ a keď ju nepredpokladáme?

(a) $x \otimes y \otimes z$

(b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$

(c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

**Poznámka:** Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

# Riešenie

**1. príklad.** Aký záver vyplýva z množiny výrokov?
„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.
$p$ = som chytrý
$q$ = mám šťastie
$r$ = zvíťazím v lotérii

| | |
|---|---|
| $p \vee q$ | predpoklad$_1$ |
| $\neg q$ | predpoklad$_2$ |
| $q \Rightarrow r$ | predpoklad$_3$ |
| $p$ | dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad$_1$ a predpoklad$_2$ |

záver: som chytrý

**2. príklad**. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A=\{a\}$.
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$,
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\}$

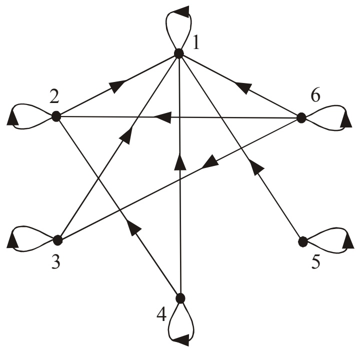
**3. príklad.**
Zistite, či relácia $R$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x \le y$,
(b) $x$ má rovnaké krstné meno ako $y$, $km(x)=km(y)$,
(c) $x$ je deliteľné 2 a $y$ je deliteľné 2 a 4.

(a)
je reflexívna, $x \le x$,
nie je symetrická, neplatí implikácia $x \le y \Rightarrow y \le x$,
nie je antisymetrická, neplatí implikácia $x \le y \Rightarrow y \le x$,
je tranzitívna, platí implikácia $(x \le y)\wedge(y \le z)\Rightarrow(x \le z)$.
(b)
je reflexívna, platí $km(x)=km(y)$, pre $x=y$,
je symetrická, platí implikácia $(km(x)=km(y))\Rightarrow(km(y)=km(x))$,
nie je antisymetrická (je symetrická)
je tranzitívna, platí implikácia $(km(x)=km(y))\wedge(km(y)=km(z))\Rightarrow(km(x)=km(z))$.
(c)
nie je reflexívna, nie každé číslo $x$ je súčasne deliteľné 2 a 4,
nie je symetrická, nie každá dvojica $x$ a $y$ je taká, že $x$ je deliteľné 2 a $y$ je deliteľné 4 a súčasne $y$ je deliteľné 2 a $x$ je deliteľné 4,
nie je antisymetrická, existujú také dvojica $x$ a $y$, že $x$ je deliteľné 2 a $y$ je deliteľné 4 a súčasne $y$ je deliteľné 2 a $x$ je deliteľné 4 (napríklad 4 a 8),

je tranzitívna, ak máme dve dvojice $x,y$ a $y,z$, ktoré vyhovujú podmienkam relácie, potom tieto podmienky musia platiť aj pre dvojicu $x,z$.

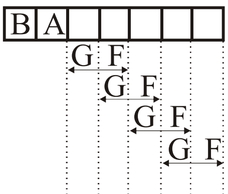
**4. príklad**. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}$$

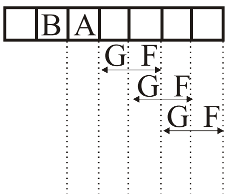



$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

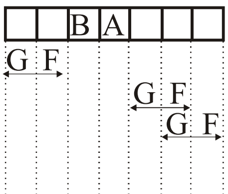
**5. príklad**
**Cvičenie 4.15.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,



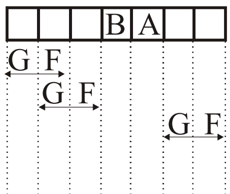

N=4x6=24



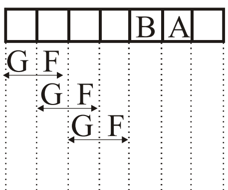

N=3x6=18



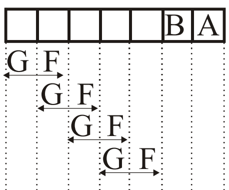

N=3x6=18




N=3x6=18




N=3x6=18




N=4x6=24

Celkový počet reťazcov je 2×24+4×18 = 120.

**6. príklad.**
Nech na turnaji je $2^k$ družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

1. kolo: pre $2^k$ družstiev existuje $2^{k-1}$ zápasov.

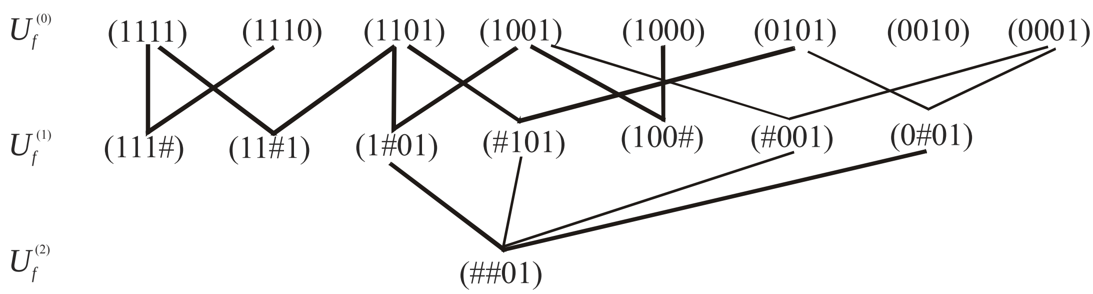
2. kolo: pre $2^{k-1}$ družstiev existuje $2^{k-2}$ zápasov.
...............................
($k$-1). kolo: pre $2^1$ družstiev existuje 2 zápasy (semifinále).
k. kolo: pre $2^0$ existuje 1 zápas (finále)

Celkový počet zápasov je teda $2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2+1=\dfrac{2^k-1}{2-1}=\boxed{2^k-1}$

**7. príklad.** Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz+wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+w\bar{x}\bar{y}z+w\bar{x}\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}\,\bar{x}y\bar{z}+\bar{w}\,\bar{x}\bar{y}z\,.$$

| 0. etapa | | | 1. etapa | | | | 2. etapa | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1111) | | 1 | (1,2) | (111#) | | 1 | (3,7) | (##01) |
| 2 | (1110) | | 2 | (1,3) | (11#1) | | 2 | (4,6) | (##01) |
| 3 | (1101) | | 3 | (3,4) | (1#01) | | | | |
| 4 | (1001) | | 4 | (3,6) | (#101) | | | | |
| 5 | (1000) | | 5 | (4,5) | (100#) | | | | |
| 6 | (0101) | | 6 | (4,8) | (#001) | | | | |
| 7 | (0010) | | 7 | (6,8) | (0#01) | | | | |
| 8 | (0001) | | | | | | | | |




$$\tilde{V}=\{(111\#),(\#\#01),(100\#),(0010)\}$$

$$f\left(w,x,y,z\right)=wxy+\bar{y}z+w\bar{x}\,\bar{y}+\bar{w}\,\bar{x}y\bar{z}$$

**8. príklad.** Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\ x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \boxed{2} & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$x_4 = l$, $x_3 = k$, $x_2 = 3 - k - l$, $x_1 = 4 - 3k - 2l$, kde $k, l \in \mathbb{R}$,

$$x = \begin{pmatrix} 4-3k-2l \\ 3-k-l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

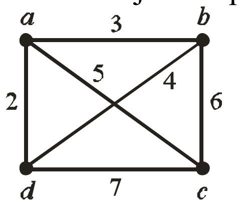
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1/2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 5/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

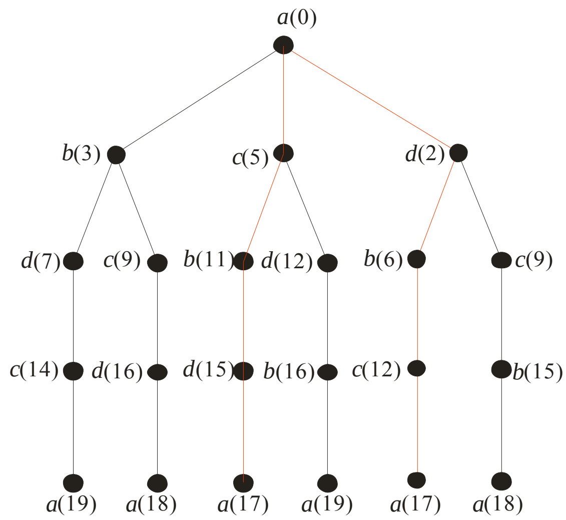
$$= \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 37/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{7}{2}(-1)2\frac{2}{7}4 = 8$$

**10. príklad.** Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf




pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.




Minimálna hamiltonovská kružnica je a-d-b-c-a (prípadne reprezentovaná v opačnej orientácii) s dĺžkou 17.

**11. príklad.** Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗ a keď ju nepredpokladáme?

(d) $x\otimes y\otimes z$
(e) $t\oplus x\otimes y\otimes z$
(f) $t\otimes x\oplus y\otimes z$

Riešenie:
Keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗
(a) 1 interpretácia, $x\otimes y\otimes z$
(b) 3 interpretácie, $(t\oplus x)\otimes y\otimes z$, $t\oplus(x\otimes y\otimes z)$, $(t\oplus(x\otimes y))\otimes z$
(c) 4 interpretácie, $(t\otimes x)\oplus(y\otimes z)$, $((t\otimes x)\oplus y)\otimes z$, $(t\otimes(x\oplus y))\otimes z$, $t\otimes(x\oplus(y\otimes z))$
Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie ⊗
(a) 2 interpretácie, $(x\otimes y)\otimes z$, $x\otimes (y\otimes z)$
(b) 5 interpretácií, $(t\oplus x)\otimes(y\otimes z)$, $t\oplus((x\otimes y)\otimes z)$, $t\oplus(x\otimes(y\otimes z))$, $(t\oplus(x\otimes y))\otimes z$, $((t\oplus x)\otimes y)\otimes z$
(c) 5 interpretácií, $(t\otimes x)\oplus(y\otimes z)$, $((t\otimes x)\oplus y)\otimes z$, $(t\otimes(x\oplus y))\otimes z$, $t\otimes(x\oplus(y\otimes z))$, $t\otimes((x\oplus y)\otimes z)$