Záverečná písomka z Matematickej logiky
(31. 5. 2013)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Čo je formula?

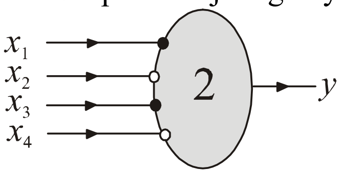
(b) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a zostrojte množinu jej všetkých možných podformúl.

(c) Čo je tautológia, aký je jej význam vo výrokovej logike? Čo je splniteľná formula?

(d) Čo je teória a čo je model?

(e) Čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$?

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej DNF formu



Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$\dfrac{\begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ t \Rightarrow s \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} r \vee \neg s \\ \neg r \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} r \Rightarrow s \\ r \Rightarrow \neg s \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \end{array}}{\qquad}$, $\dfrac{\begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \end{array}}{\qquad}$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.

(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2), ktoré sú prvočísla.

(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.

(e) Existuje dieťa bez matky.

Príklad 5. Rozhodnite (<u>a zdôvodnite</u>) pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\exists y\ \forall x\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall x\ \exists y\ P(x,y))$

(b) $\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$,

(c) $(\exists x\ P(x)) \Rightarrow (\forall x\ P(x))$,

(d) $(\exists x \forall y\ P(x,y)) \Rightarrow (\exists x\ P(x,a))$.

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy pomocou prirodzenej dedukcie a odôvodnite výsledok:

(a)
Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP.

(b)
Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

(c)
Niektorí chemici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

(d)
Každý študent nie je včelár
niektorí včelári sú analfabeti

Príklad 7. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

(b) $\forall x\left(P(x) \wedge R(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x P(x)\right) \wedge \left(\forall y R(y)\right)$.

Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formuly sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi \vee \neg\varphi$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Príklad 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q sú vo fuzzy logike výrokové formuly pravdivé

(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 6 bodmi, maximálny počet bodov je 60. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a meno cvičiaceho pedagóga. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

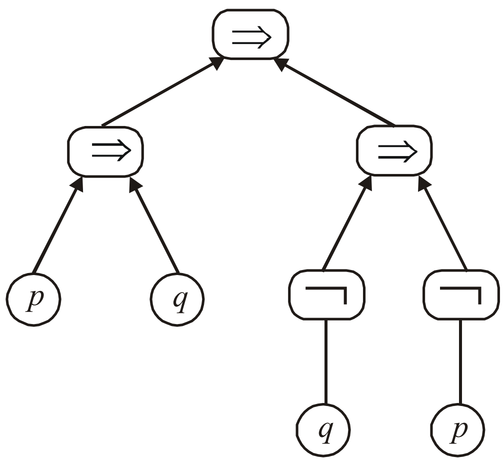
Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Čo je formula?
(b) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a zostrojte množinu jej všetkých možných podformúl.
(c) Čo je tautológia, aký je jej význam vo výrokovej logike? Čo je splniteľná formula?
(d) Čo je teória a čo je model?
(e) Čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \models \varphi$?

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny {p,q,r,…} a znaky logických spojok $\{\Rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b)



$$\{p, q, \neg p, \neg q, p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\}$$

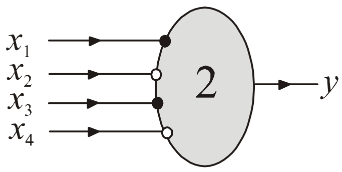
(c) Formula sa nazýva tautológia vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; tautológia je alternatívny názov pre zákon v logike. Formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(d) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(e) *F*ormula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \models \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



$$y = s\left(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\right)$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$s\left(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\right)$	y
1	0	0	0	0	s(-2)	0
2	0	0	0	1	s(-3)	0
3	0	0	1	0	s(-1)	0
4	0	0	1	1	s(-2)	0
5	0	1	0	0	s(-3)	0
6	0	1	0	1	s(-4)	0
7	0	1	1	0	s(-2)	0
8	0	1	1	1	s(-3)	0
9	1	0	0	0	s(-1)	0
10	1	0	0	1	s(-2)	0
11	1	0	1	0	s(0)	1
12	1	0	1	1	s(-1)	0
13	1	1	0	0	s(-2)	0
14	1	1	0	1	s(-1)	0
15	1	1	1	0	s(-1)	0
16	1	1	1	1	s(-2)	0

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4\right)$$

Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ r \\ \hline \neg s \end{array}, \quad \begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ t \Rightarrow s \\ \hline t \Rightarrow \neg r \end{array}, \quad \begin{array}{l} r \vee \neg s \\ \neg r \\ \hline \neg s \end{array}, \quad \begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ r \\ \hline ? \end{array}, \quad \begin{array}{l} r \Rightarrow s \\ r \Rightarrow \neg s \\ \hline \neg r \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \\ \hline \neg s \end{array}, \quad \begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \\ \hline ? \end{array}$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.

$\forall x\left(Angl\left(x\right) \Rightarrow Rad\_caj\left(x\right)\right)$

$\exists x\left(Angl\left(x\right) \wedge \neg Rad\_caj\left(x\right)\right)$

Existuje taký Angličan, ktorý nemá rád čaj.

(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu..

$\exists x\left(sport\left(x\right) \wedge \neg fyz\_kond\left(x\right)\right)$

$\forall x\left(\neg sport(x)\vee fyz\_kond(x)\right)\equiv\forall x\left(sport(x)\Rightarrow fyz\_kond(x)\right)$
Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2) , ktoré sú prvočísla.
$\exists x\left(neparne(x)\wedge prime(x)\right)$
$\forall x\left(\neg neparne(x)\vee\neg prime(x)\right)\equiv\forall x\left(neparne(x)\Rightarrow\neg prime(x)\right)$
Každé nepárne číslo nie je prvočíslo.

(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.
$\exists x\left(navst\_plavaren(x)\wedge\neg vie\_plavat(x)\right)$
$\forall x\left(\neg navst\_plavaren(x)\vee vie\_plavat(x)\right)\equiv\forall x\left(navst\_plavaren(x)\Rightarrow vie\_plavat(x)\right)$
Každý, kto navštevuje plaváreň, vie plávať.

(e) Existuje dieťa bez matky.
$\exists x\left(dieta(x)\wedge\neg matka(x)\right)$
$\neg\exists x\left(dieta(x)\wedge\neg matka(x)\right)\equiv\forall x\left(dieta(x)\Rightarrow matka(x)\right)$
Každé dieťa má matku.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $\left(\exists y\ \forall x\ P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\forall x\ \exists y\ P(x,y)\right)$,
Formula je tautológia, dôkaz uskutočníme tak, že implikáciu prepíšeme do disjunktívneho tvaru, pričom negácie kvantifikátorov upravíme pomocou zákonov $\neg\forall x\ P(x)\equiv\left(\exists x\ \neg P(x)\right)$ a $\neg\left(\exists x\ P(x)\right)\equiv\left(\forall x\ \neg P(x)\right)$

$$\begin{aligned}\left(\exists y\ \forall x\ P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\forall x\ \exists y\ P(x,y)\right)&\equiv\neg\left(\exists y\ \forall x\ P(x,y)\right)\vee\left(\forall x\ \exists y\ P(x,y)\right)\\&\equiv\left(\forall y\ \exists x\ \neg P(x,y)\right)\vee\left(\forall x\ \exists y\ P(x,y)\right)\\&\equiv\left(\forall y\ \exists x\ \neg P(x,y)\right)\vee\left(\forall y\ \exists x\ P(y,x)\right)\\&\equiv\forall x\ \exists y\left(\left(\neg P(x,y)\right)\vee P(y,x)\right)\end{aligned}$$

Výraz v zátvorke je pravdivý, pretože pre každé $x\in\mathcal{U}$ je disjunkcia $\bigvee_{y\in\mathcal{U}}\left(\left(\neg P(x,y)\right)\vee P(y,x)\right)$ pravdivá (aspoň pre $x=y$).

(b) $\forall x\left(P(x)\vee\neg P(x)\right)$, táto formula je automaticky pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\left(P(x)\vee\neg P(x)\right)\equiv 1$ pre každé indivíduum x.

(c) $\left(\exists x\ P(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\ P(x)\right)$, navrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\ P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\ P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia $(1\Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo“).

(d) $(\exists x \forall y\, P(x,y)) \Rightarrow (\exists x\, P(x,a))$, formulu $(\exists x \forall y\, P(x,y))$ môžeme pomocou zákona pre elimináciu univerzálneho kvantifikátora (konkretizáciou) $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$ previesť do ekvivalentného tvaru $(\exists x\, P(x,a))$, formula je tautológia.

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP. ?

Vykonáme prepis sylogizmu do predikátovej logiky

$$\varphi_1 : \forall x\,(vodic(x) \Rightarrow nad15(x)) \Rightarrow (vodic(t) \Rightarrow nad15(t))$$
$$\varphi_2 : \forall x\,(nad15(x) \Rightarrow maOP(x)) \Rightarrow (nad15(t) \Rightarrow maOP(t))$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ dostaneme

$(vodic(t) \Rightarrow maOP(t))$ pre ľubovolné indivíduum t, čiže platí aj

$$\forall x\,(vodic(x) \Rightarrow maOP(x))$$

Záver zo sylogizmu je: „každý vodič má OP.“

(b)

Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

?

$$\varphi_1 : \exists x\,(st(x) \wedge hasic(x)) \Rightarrow (st(a) \wedge hasic(a))$$
$$\varphi_2 : \exists x\,(hasic(x) \wedge slob(x)) \Rightarrow (hasic(b) \wedge slob(b))$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí chemici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

?

$$\varphi_1 : \exists x\,(chem(x) \wedge astr(x)) \Rightarrow (chem(a) \wedge astr(a))$$
$$\varphi_2 : \forall x\,(fyz(x) \Rightarrow \neg chem(x)) \Rightarrow (fyz(a) \Rightarrow \neg chem(a))$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *chem*(a) a *astr*(a). Použitím *chem*(a) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg fyz(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg fyz(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg fyz(x)$$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú fyzici".

(d)
Každý študent nie je včelár
Niektorí včelári sú analfabeti

?

$$\varphi_1 : \forall x\,(st(x) \Rightarrow \neg vce(x)) \Rightarrow (st(a) \Rightarrow \neg vce(a)) \Rightarrow (vce(a) \Rightarrow \neg st(a))$$
$$\varphi_2 : \exists x\,(vce(x) \wedge anal(x)) \Rightarrow (vce(a) \wedge anal(a))$$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *vce*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg st$(a) , spojením s *anal*(a) dostaneme

$$anal(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, anal(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje včelár): „niektorý analfabet nie je študent"

Príklad 7. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad)
2.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
3.	p	(aktivácia pomocného predpokladu)
4.	q	(modus ponens na 1. a 3.)
5.	r	(modus ponens na 2. a 3.)
6.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na 4. a 5.)
7.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia 3.)

(b) $\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)\Rightarrow\left(\forall xP(x)\right)\wedge\left(\forall yR(y)\right)$.

1.	$\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)$	aktivácia predpokladu
2.	$P(t)\wedge R(t)$	E$\forall$, kde $\forall t\in U$
3.	$P(t)$	E$\wedge$ na 2
4.	$R(t)$	E$\wedge$ na 2
5.	$\forall xP(x)$	I$\forall$ na 3
6.	$\forall yR(y)$	I$\forall$ na 4
7.	$\forall xP(x)\wedge\forall yR(y)$	I$\wedge$ na 5 a 6
8.	$\forall x\left(P(x)\wedge R(x)\right)\Rightarrow\forall xP(x)\wedge\forall yR(y)$	deaktivácia predpokladu

Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\neg(\neg\varphi\wedge\varphi)\equiv\varphi\vee\neg\varphi$,

1	2	3	4	5	6	7	8
φ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi\wedge\varphi$	$\neg(\neg\varphi\wedge\varphi)$	$\varphi\vee\neg\varphi$	4⇒5	5⇒4	6∧7
0	1	0	1	1	1	1	1
½	½	½	½	½	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1

(b) $\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\varphi)$,

φ	ψ	$\psi\Rightarrow\varphi$	$\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1
½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Príklad 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je vo fuzzy logike výrokové formuly pravdivé

(a) $p\Rightarrow(\neg p\Rightarrow q)$

$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) = 1$

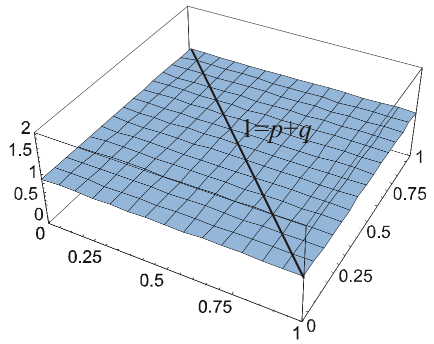
$p \leq (\neg p \Rightarrow q)$

$1\text{-}p \leq q$, $1 \leq q+p$ | $1\text{-}p > q$, $1 > q+p$

$\boxed{p \leq 1}$ | $p \leq (1\text{-}(1\text{-}p)+q)$

$p \leq p+q$

$\boxed{0 \leq q}$



Formula je tautológia fuzzy logiky.

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q) = 1$

$\neg(p \vee q) \leq (\neg p \wedge \neg q)$

$1 - max\{p,q\} \leq min\{1\text{-}p, 1\text{-}q\}$

$p \leq q$ | $p > q$

$1\text{-}q \leq 1\text{-}q$ | $1\text{-}p \leq 1\text{-}p$

$\boxed{1 \leq 1}$ | $\boxed{1 \leq 1}$

Formula je tautológia fuzzy logiky.

Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

$w \vDash \neg(\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi))$

$w \vDash (\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\Box\varphi \wedge \Box\neg\psi))$

$w \vDash \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi)$
$w \vDash \Box\varphi$
$w \vDash \Box\neg\psi$

$w_1 \vDash \varphi \quad pre\ \forall w_1 \in \Gamma(w)$
$w_2 \vDash \neg\psi \quad pre\ \forall w_2 \in \Gamma(w)$
$w_3 \vDash (\varphi \Rightarrow \psi) \quad pre\ \exists w_3 \in \Gamma(w)$

$w_1 = w_3$ | $w_2 = w_3$

$w_3 \vDash \neg\varphi$ | $w_3 \vDash \psi$

X | X