2. kontrolná písomka z matematickej logiky (10. 5. 2012)

Príklad 1.
Nájdite riešenie sylogizmov pomocou prirodzenej dedukcie (ak je potrebné, uveďte aj nutné vedľajšie podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý S je V
každý I je V
?

(b) žiadny I nie je S
každý V je S
?

(c) každý J je I
každý J je S
?

Príklad 2.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow (q \wedge r))$

Príklad 3.
Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautológia.

Príklad 4.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula fuzzy logiky je tautológia: $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$.

Príklad 5.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula predikátovej logiky

$$\varphi = (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x))$$

je tautológia.

Príklad 6 (prémiový).
Dokáže priamo z definície, že negácie kvantifikátorov sú určené formulami

$$\neg(\forall x)\,p(x) \equiv (\exists x)\neg p(x)$$
$$\neg(\exists x)\,p(x) \equiv (\forall x)\neg p(x)$$

Poznámka: Prémiový 6. príklad sa nemusí počítať, poskytuje určitú šancu tým, čo nevyriešili ostatné príklady. **Každý príklad je hodnotený 5 bodmi.**

Riešenie

Príklad 1.
Nájdite riešenie sylogizmov pomocou prirodzenej dedukcie (ak je potrebné, uveďte aj nutné vedľajšie podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý S je V
každý I je V
?

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\left[A(x)\Rightarrow V(x)\right]\\ \forall x\left[I(x)\Rightarrow V(x)\right]\end{array}}{}$$

nie je čo dokazovať
riešenie: neexistuje

(b) žiadny I nie je S
každý V je S
?

1 $\forall x\left[I(x)\Rightarrow \neg S(x)\right]$
2 $\forall x\left[V(x)\Rightarrow S(x)\right]$

---

3 $I(t)\Rightarrow \neg S(t)$ odstránenie $\forall$ v (1)
4 $V(t)\Rightarrow S(t)$ odstránenie $\forall$ v (2)
5 $S(t)\Rightarrow \neg I(t)$ inverzia implikácie v (3)
6 $V(t)\Rightarrow \neg I(t)$ hypotetický sylogizmus na (4) a (5)
7 $\forall x\left(V(x)\Rightarrow \neg I(x)\right)$ zavedenie $\forall$ v (6), riešenie
riešenie: žiadny *V* nie je *I*.

(c) každý J je I
každý J je S
?

1 $J(a)$ dodatočný predpoklad
2 $\forall x\left[J(x)\Rightarrow I(x)\right]$
3 $\forall x\left[J(x)\Rightarrow S(x)\right]$

---

4 $J(a)\Rightarrow I(a)$ odstránenie $\forall$ v (2)
5 $J(a)\Rightarrow S(a)$ odstránenie $\forall$ v (3)
6 $I(a)$ modus ponens na (1) a (4)
7 $S(a)$ modus ponens na (1) a (5)

8 $I(a) \wedge S(a)$ introdukcia $\wedge$ na (6) a (7)

9 $\exists x\big(I(x) \wedge S(x)\big)$ zavedenie $\exists$ v (8)

riešenie: niektorý I je S (za predpokladu, že existuje aspoň jeden objekt s vlastnosťou J).

Príklad 2.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\varphi = p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

1	$p \wedge q$	akt. pomocného predpokladu
2	p	eliminácia konjunjkcie na 1
3	q	eliminácia konjunkcie na 1
4	$p \vee q$	introdukcia disjunkcie na 2
5	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \big(p \Rightarrow (q \wedge r)\big)$

1	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
2	$p \Rightarrow r$	2. predpoklad
3	p	akt. pomocného predpokladu
4	q	aplikácia m.p. na 1 a 3
5	r	aplikácia m.p. na 2 a 3
6	$q \wedge r$	introdukcia konjunkcie na 4 a 5
7	$p \Rightarrow q \wedge r$	deaktivácia pomocného predpokladu

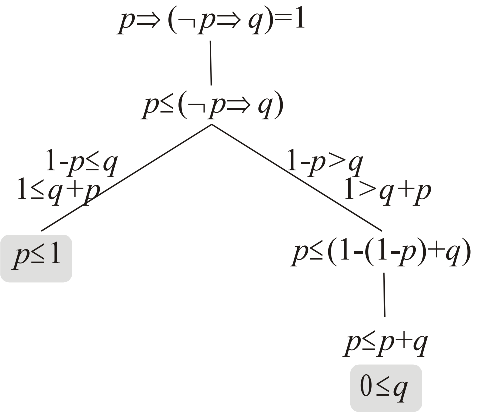
Príklad 3.
Pomocou tabuľkovej metódy zistite, či formula je tautológia Lukasiewiczovej 3-hodnotovej logiky.
$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

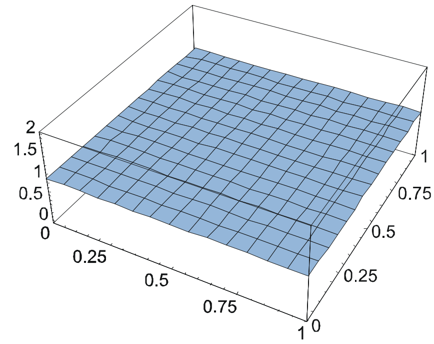
φ	ψ	$\varphi\Rightarrow\psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi\Rightarrow\neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	½	1	½	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
½	0	½	1	½	½	1
½	½	1	½	½	1	1
½	1	1	0	½	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	½	½	½	0	½	1
1	1	1	0	0	1	1

Formula je tautológia.

Príklad 4. Pomocou sémantického tabla zistite, či formula fuzzy logiky je tautológia: $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$.

Riešenie:





Formula je tautológia.

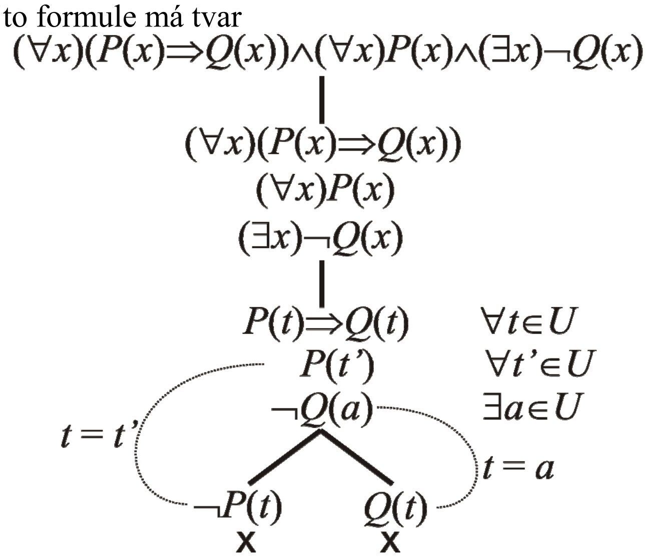
Príklad 5. Pomocou sémantického tabla zistite, či formula predikátovej logiky je tautológia

$$\varphi=(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)\big)$$

Riešenie: Negácia formuly φ má tvar

$$\neg\varphi=(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\wedge(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)\neg Q(x)$$

sémantické tablo k tejto formule má tvar



Sémantické tablo je uzavreté, preto formula φ je tautológia.

Príklad 6 (premiový).
Dokáže priamo z definície, že negácie kvantifikátorov sú určené formulami

$$\neg(\forall x)\,p(x)\equiv(\exists x)\neg p(x),\ \neg(\exists x)\,p(x)\equiv(\forall x)\neg p(x)$$

Riešenie: Kvantifikátory sú definované takto

$$(\forall x)\,p(x)\equiv_{def}\bigwedge_{x\in U}p(x)\equiv p(a)\wedge p(b)\wedge....\wedge p(u)\wedge...$$

$$(\exists x)\, p(x) \equiv_{def} \bigvee_{x \in U} p(x) \equiv p(a) \vee p(b) \vee .... \vee p(u) \vee ...$$

Použitím De Morganových zákonov pre konjukcia/disjunkciu negácie týchto formúl dostaneme

$$\neg(\forall x)\, p(x) \equiv_{def} \bigvee_{x \in U} \neg p(x) \equiv \neg p(a) \vee \neg p(b) \vee .... \vee \neg p(u) \neg ... \equiv (\exists x) \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x)\, p(x) \equiv_{def} \bigwedge_{x \in U} \neg p(x) \equiv \neg p(a) \wedge \neg p(b) \wedge .... \wedge \neg p(u) \neg ... \equiv (\forall x) \neg p(x)$$

QED.