Záverečná písomka z Matematickej logiky
(24. 6. 2013)

Príklad 1.

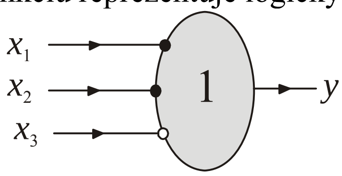
(a) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, zostrojte množinu jej všetkých podformúl.

(b) Dokáže pomocou sémantického tabla, že formula z (a) je tautológia.

(c) Dokážte, že teória $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ je konzistentná

(d) Dokážte, že teória $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, p \wedge \neg q\}$ nie je konzistentná.

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej DNF formu



Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ r \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ t \Rightarrow s \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} r \vee \neg s \\ \neg r \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ r \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} r \Rightarrow s \\ r \Rightarrow \neg s \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \wedge q \\ \hline \\ \end{array}, \quad \begin{array}{c} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \Rightarrow p \\ \hline \\ \end{array}$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.
(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2), ktoré sú prvočísla.
(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.
(e) Existuje dieťa bez matky.

Príklad 5. Pomocou definície kvantifikátorov dokáže formuly

(a) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$, ,

(b) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$,

(c) $P(a) \Rightarrow (\exists x\, P(x))$

(d) $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$,

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy pomocou prirodzenej dedukcie:

(a)
Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP.

(b)
Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

(c)
Niektorí chemici sú astronómovia
žiadny fyzik nie je chemik

(d)
Žiadny študent nie je včelár
niektorí včelári sú analfabeti

Príklad 7. Dokážte tieto prirodzené dedukcie (podrobne špecifikujte použitie jednotlivých pravidiel):

(a)

1	$D \Rightarrow E$	1. predpoklad
2	$E \Rightarrow F$	2. predpoklad
3	$F \Rightarrow G$	3. predpoklad
4	$D \Rightarrow F$	1. dôsledok
5	$D \Rightarrow G$	2. dôsledok

(b)

1	$E \vee F$	1. predpoklad
2	$E \Rightarrow G$	2. predpoklad
3	$\neg F$	3. predpoklad
4	E	1. dôsledok
5	G	2. dôsledok

(c)

1	$G \vee \neg F$	1. predpoklad
2	$H \Rightarrow F$	2. predpoklad
3	$\neg G$	3. predpoklad
4	$\neg F$	1. dôsledok
5	$\neg H$	2. dôsledok

(d)

1	$(A \vee B) \Rightarrow K$	1. predpoklad
2	$C \Rightarrow (A \vee B)$	2. predpoklad
3	$D \equiv C$	3. predpoklad
4	$\neg K \Rightarrow \neg D$	1. dôsledok

Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formuly sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi \vee \neg\varphi$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Príklad 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q sú vo fuzzy logike výrokové formuly pravdivé

(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

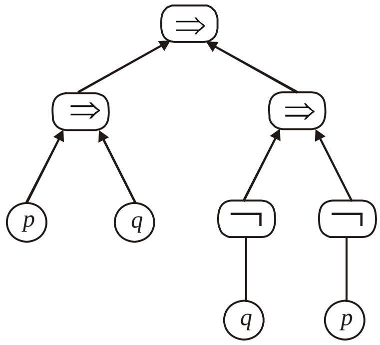
Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $w \vDash \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 6 bodmi, maximálny počet bodov je 60. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a meno cvičiaceho pedagóga. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

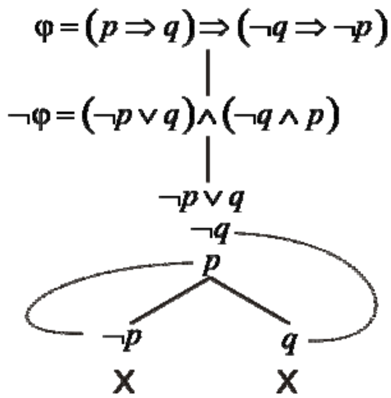
Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) Zostrojte syntaktický strom pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a zostrojte množinu jej všetkých možných podformúl.



Množina podformúl: $\{p, q, \neg p, \neg q, p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\}$

(b) Dokáže pomocou sémantického tabla, že formula z (a) je tautológia.



(c) Dokážte, že teória $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ je konzistentná

p	*q*	*r*	*p⇒q*	*q⇒r*	
0	*0*	*0*	*1*	*1*	
0	*0*	*1*	*1*	*1*	
0	*1*	*0*	*1*	*0*	
0	*1*	*1*	*1*	*1*	
1	*0*	*0*	*0*	*1*	
1	*0*	*1*	*0*	*1*	
1	*1*	*0*	*1*	*0*	
1	*1*	*1*	*1*	*1*	$\tau = (1,1,1)$

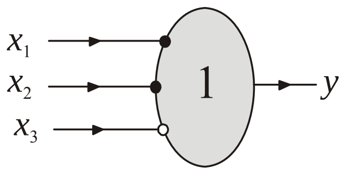
$M(\Phi) = \{(1,1,1)\} \neq \emptyset$, t.j. Φ je konzistentná teória

(d) Dokážte, že teória $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, p \wedge \neg q\}$ nie je konzistetná

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	

$M(\Phi) = \emptyset$, t.j. Φ je nekonzistentná teória

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



$$y = s(x_1 + x_2 - x_3 - 1)$$

#	x_1	x_2	x_3	$s(x_1 + x_2 - x_3 - 1)$	y
1	0	0	0	s(-1)	0
2	0	0	1	s(-2)	0
3	0	1	0	s(0)	1
4	0	1	1	s(-1)	0
5	1	0	0	s(0)	1
6	1	0	1	s(-1)	0
7	1	1	0	s(1)	1
8	1	1	1	s(0)	1

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Príklad 3. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{\neg s}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ t \Rightarrow s \end{array}}{t \Rightarrow \neg r}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \vee \neg s \\ \neg r \end{array}}{\neg s}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow \neg s \\ \neg s \end{array}}{?}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ r \end{array}}{?}, \quad \frac{\begin{array}{l} r \Rightarrow s \\ r \Rightarrow \neg s \end{array}}{\neg r}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \wedge q \end{array}}{\neg s \wedge q}, \quad \frac{\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg s \\ \neg r \Rightarrow p \end{array}}{\neg r \Rightarrow \neg s \wedge p}$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Angličania majú radi čaj.

$$\forall x (Angl(x) \Rightarrow Rad\_caj(x))$$

$\exists x\left(Angl(x)\wedge\neg Rad\_caj(x)\right)$
Existuje taký Angličan, ktorý nemá rád čaj.

(b) Niektorý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu..
$\exists x\left(sport(x)\wedge\neg fyz\_kond(x)\right)$
$\forall x\left(\neg sport(x)\vee fyz\_kond(x)\right)\equiv\forall x\left(sport(x)\Rightarrow fyz\_kond(x)\right)$
Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Existujú nepárne čísla (väčšie ako 2) , ktoré sú prvočísla.
$\exists x\left(\neg parne(x)\wedge prime(x)\right)$
$\forall x\left(parne(x)\vee\neg prime(x)\right)\equiv\forall x\left(prime(x)\Rightarrow parne(x)\right)$
Každé prvočíslo je párne.

(d) Niektorí ľudia, ktorí navštevujú plaváreň, nevedia plávať.
$\exists x\left(navst\_plavaren(x)\wedge\neg vie\_plavat(x)\right)$
$\forall x\left(\neg navst\_plavaren(x)\vee vie\_plavat(x)\right)\equiv\forall x\left(navst\_plavaren(x)\Rightarrow vie\_plavat(x)\right)$
Každý, kto navštevuje plaváreň, vie plávať.

(e) Existuje dieťa bez matky.
$\exists x\left(dieta(x)\wedge\neg matka(x)\right)$
$\neg\exists x\left(dieta(x)\wedge\neg matka(x)\right)\equiv\forall x\left(dieta(x)\Rightarrow matka(x)\right)$
Každé dieťa má matku.

Príklad 5. Pomocou definície kvantifikátorov dokáže formuly
(a) $\forall xP(x)\Rightarrow P(a)$, ,
Vyplýva z vlastnosti $p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n\Rightarrow p_a$, kde a je ľubovoľný objekt z univerza U.

(b) $\left(\exists x\,P(x)\right)\Rightarrow P(a)$,
Vyplýva z vlastnosti $p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n\Rightarrow p_a$, kde a je vybraný objekt z univerza U.

(c) $P(a)\Rightarrow\left(\exists x\,P(x)\right)$, kde a je vybraný objekt z univerza U.
Vyplýva z vlastnosti $p_a\Rightarrow p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n$

(d) $\forall xP(x)\Rightarrow\exists xP(x)$,
Kombináciou vlastnosti (a) a (c)
$p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n\Rightarrow p_a$
$p_a\Rightarrow p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n$
$p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n\Rightarrow p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n$
$\forall xp(x)\Rightarrow\exists xp(x)$

Príklad 6. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý vodič má viac ako 15 rokov.
Každý kto má viac ako 15 rokov má OP. ?

Vykonáme prepis sylogizmu do predikátovej logiky

$$\varphi_1: \forall x\left(vodic(x) \Rightarrow nad15(x)\right) \Rightarrow \left(vodic(t) \Rightarrow nad15(t)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(nad15(x) \Rightarrow maOP(x)\right) \Rightarrow \left(nad15(t) \Rightarrow maOP(t)\right)$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
dostaneme

$\left(vodic(t) \Rightarrow maOP(t)\right)$ pre ľubovolné indivíduum *t*, čiže platí aj

$$\forall x\left(vodic(x) \Rightarrow maOP(x)\right)$$

Záver zo sylogizmu je: „každý vodič má OP."

(b)

Niektorí študenti sú hasiči.
Niektorí hasiči sú slobodní.

?

$$\varphi_1: \exists x\left(st(x) \wedge hasic(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge hasic(a)\right)$$
$$\varphi_2: \exists x\left(hasic(x) \wedge slob(x)\right) \Rightarrow \left(hasic(b) \wedge slob(b)\right)$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí chemici sú astronómovia
každý fyzik nie je chemik

?

$$\varphi_1: \exists x\left(chem(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \wedge astr(a)\right)$$
$$\varphi_2: \forall x\left(fyz(x) \Rightarrow \neg chem(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \Rightarrow \neg chem(a)\right)$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *chem*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *chem*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme ¬*fyz*(*a*). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg fyz(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg fyz(x)$$

alebo, „žiadny astronóm nie je fyzik".

(d)
Každý študent nie je včelár
Niektorí včelári sú analfabeti

?

$\varphi_1 : \forall x \left(st(x) \Rightarrow \neg vce(x) \right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg vce(a) \right) \Rightarrow \left(vce(a) \Rightarrow \neg st(a) \right)$

$\varphi_2 : \exists x \left(vce(x) \wedge anal(x) \right) \Rightarrow \left(vce(a) \wedge anal(a) \right)$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *vce*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg st$(a) , spojením s *anal*(a) dostaneme

$anal(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, anal(x) \wedge \neg st(x)$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje včelár): „niektorý analfabet nie je študent"

Príklad 7. Dokážte tieto prirodzené dedukcie:

(a)

1	$D \Rightarrow E$	1. predpoklad
2	$E \Rightarrow F$	2. predpoklad
3	$F \Rightarrow G$	3. predpoklad
4	$D \Rightarrow F$	1. dôsledok, hypotet. sylogizmus na 1 a 2
5	$D \Rightarrow G$	2. dôsledok, hypotet. sylogizmus na 3 a 4

(b)

1	$E \vee F$	1. predpoklad
2	$E \Rightarrow G$	2. predpoklad
3	$\neg F$	3. predpoklad
4	E	1. dôsledok, aplikácia E$\vee$ na 1 a 3
5	G	2. dôsledok, aplikácia m.p. na 2 a 4

(c)

1	$G \vee \neg F$	1. predpoklad
2	$H \Rightarrow F$	2. predpoklad
3	$\neg G$	3. predpoklad
4	$\neg F$	1. dôsledok aplikácia E$\vee$ na 1 a 3
5	$\neg H$	2. dôsledok, aplikácia m.t. na 2 a 4

(d)

1	$(A \vee B) \Rightarrow K$	1. predpoklad
2	$C \Rightarrow (A \vee B)$	2. predpoklad
3	$D \equiv C$	3. predpoklad
4	$C \Rightarrow K$	hypotet. sylogizmus na 1 a 2
5	$(D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D)$	prepis ekvivalencie 3
6	$(D \Rightarrow C)$	aplikácia E$\wedge$ na 5
7	$D \Rightarrow K$	dôsledok, aplikácia hypotet. sylogizmu na 4 a 6

Príklad 8. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi \vee \neg\varphi$,

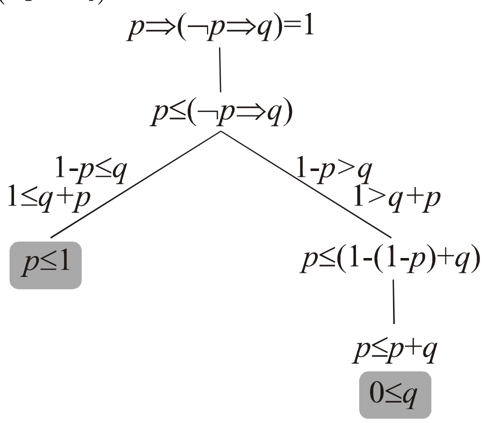
1	2	3	4	5	6	7	8
φ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi \wedge \varphi$	$\neg(\neg\varphi \wedge \varphi)$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$4 \Rightarrow 5$	$5 \Rightarrow 4$	$6 \wedge 7$
0	1	0	1	1	1	1	1
½	½	½	½	½	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1

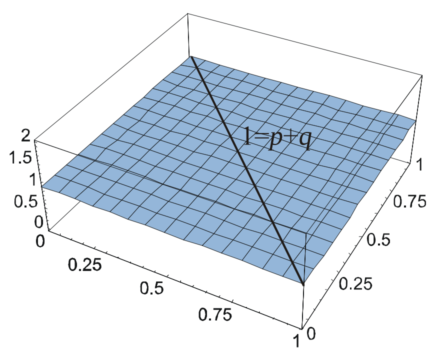
(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1
½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Príklad 9. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je vo fuzzy logike výrokové formuly pravdivé

(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$





Formula je tautológia fuzzy logiky.

(b) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$$\neg(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q)=1$$

$$\neg(p\vee q)\le(\neg p\wedge\neg q)$$

$$1-max\{p,q\}\le min\{1\text{-}p,1\text{-}q\}$$

$p\le q$	$p>q$
$1\text{-}q\le 1\text{-}q$	$1\text{-}p\le 1\text{-}p$
$\boxed{1\le 1}$	$\boxed{1\le 1}$

Formula je tautológia fuzzy logiky.

Príklad 10. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\Box\varphi\Rightarrow\Diamond\psi)$.

$$w\models\neg(\Diamond(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\Box\varphi\Rightarrow\Diamond\psi))$$

$$w\models(\Diamond(\varphi\Rightarrow\psi)\wedge(\Box\varphi\wedge\Box\neg\psi))$$

$$w\models\Diamond(\varphi\Rightarrow\psi)$$
$$w\models\Box\varphi$$
$$w\models\Box\neg\psi$$

$$w_1\models\varphi \quad pre\ \forall w_1\in\Gamma(w)$$
$$w_2\models\neg\psi \quad pre\ \forall w_2\in\Gamma(w)$$
$$w_3\models(\varphi\Rightarrow\psi) \quad pre\ \exists w_3\in\Gamma(w)$$

$w_1=w_3$	$w_2=w_3$
$w_3\models\neg\varphi$	$w_3\models\psi$
×	×