

Náhradná 2. kontrolná písomka z ADM konaná dňa 18. 5. 2006)

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, (1 bod)

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, (1 bod)

(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 15$, $A_1 \subseteq A_2$, (1 bod)

3. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa. (2 body)

(b) Rozhodnite, či $(\mathbb{N}, *)$ je monoid, odôvodnite. (1 bod)

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxyz + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z \quad (3 \text{ body})$$

5. príklad. Stanovte hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ body})$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ body})$$

Riešenie príkladov

1. príklad. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 7, ktoré obsahujú párny počet jednotiek (t. j. 0, 2, 4 a 6)? (3 body)

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = 1 + 21 + 35 + 7 = 64$$

2. príklad. Koľko elementov obsahuje zjednotenie $A_1 \cup A_2$, ak

(a) $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 30$

(b) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 10$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 11$

(c) $|A_1| = 8$, $|A_2| = 15$, $A_1 \subseteq A_2$, $|A_1 \cup A_2| = |A_2| = 15$

3. príklad. Nech $(\mathbb{N}, *)$ je algebraická štruktúra, kde \mathbb{N} je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x * y = \min\{x, y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia $'*'$ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x < y < z$

$$(x * y) * z = y * z = z$$

$$x * (y * z) = x * z = z$$

(a2) $x < z < y$

$$(x * y) * z = y * z = y$$

$$x * (y * z) = x * y = y$$

(a3) $y < x < z$

$$(x * y) * z = x * z = z$$

$$x * (y * z) = x * z = z$$

.....
Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x * y) * z = x * (y * z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, *)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či $(\mathcal{N}, *)$ je monoid. (1 bod)

K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\mathcal{N}, *)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element $e = \infty$, ktorý patrí do množiny \mathcal{N}

$$x * e = \min\{x, \infty\} = x$$

$$e * x = \min\{\infty, x\} = x$$

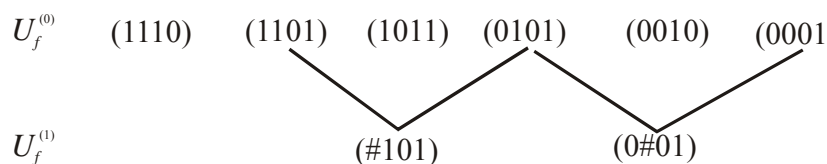
Avšak $\infty \notin \mathcal{N}$, t. j. štruktúra $(\mathcal{N}, *)$ nie je monoid.

Poznámka: príklad uznať, aj keď tam táto negatívna poznámka nie je uvedená.

4. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny tvar Boolovej funkcie

$$wxy\bar{z} + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				



$$\tilde{V} = \{(\#101), (0\#01), (1110), (1011), (0010)\}$$

$$\tilde{f}(w, x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{w}\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

5. príklad. Stanovte hodnotu matic

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 2$$

Prémiový príklad. Zostrojte inverznú maticu pre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$