Metódy spracovania experimentálnych výsledkov

Autor pôvodného textu: **Peter Ballo**

Každé meranie je zaťažené chybami, ktoré sú zapríčinené nedokonalosťou našich pozorovacích schopností, nepresnosťou prístrojov, nedokonalosťou meracej techniky, nedodržaním podmienok experimentu, alebo vplyvom neznámych porúch pochádzajúcich z okolia. To znamená, že fyzikálne veličiny nemožno merať absolútne presne, preto na priblíženie sa skutočnej hodnote používame rôzne, najmä štatistické metódy.

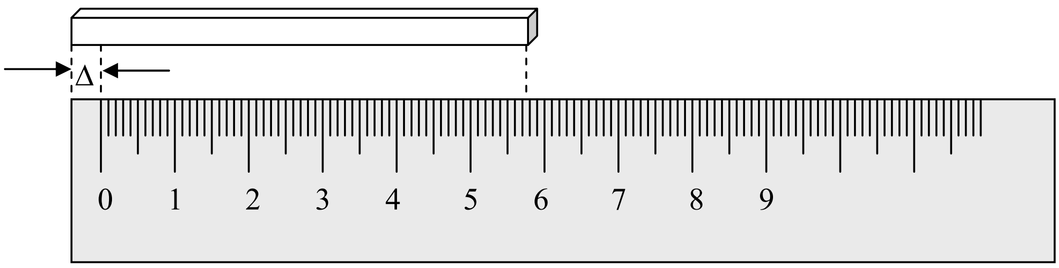
Chyby podľa ich pôvodu môžeme rozdeliť na tri hlavné skupiny.

Hrubé chyby vznikajú omylom pri meraní, alebo nesprávnym odčítaním nameranej hodnoty. Pri svedomitom prístupe k meraniu sa im dá vyhnúť, alebo pri opakovanom meraní hodnoty zaťažené hrubou chybou vylúčime z nameraného súboru.

Systematické chyby sú obvykle spôsobené nedokonalosťou metódy merania, alebo nedodržaním podmienok pri experimente. Príkladom takejto chyby je zanedbanie vztlakovej sily pri vážení v kvapaline. Odstrániť chyby tohto druhu možno dôsledným dodržiavaním exprimentálnych podmienok, alebo pripočítavaním opráv (korekcií) vyplývajúcich z povahy systematickej chyby.

Náhodné chyby vznikajú pri každom meraní a nemožno ich z merania úplne odstrániť. Prejavujú sa tým, že pri opakovanom meraní, aj pri dodržaní rovnakých experimentálnych podmienok, sa jednotlivé výsledky navzájom líšia. Tento druh chyby je spôsobený veľkým množstvom náhodných vplyvov z okolia, ktorých veľkosť a pôvod nevieme presne určiť. Pomocou teórie chýb však možno vyjadriť ich vplyv na výsledok merania.

Ako príklad výskytu jednotlivých typov chýb uvedieme meranie dĺžky hranola pomocou pravítka s milimetrovou stupnicou, pričom desatiny milimetra boli určované odhadom.



Výsledky desiatich meraní sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Číslo merania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l (mm)	57,4	57,5	57,4	47,3	57,5	57,4	57,6	57,4	57,5	57,3
l - Δ (mm)	53,4	53,5	53,4	43,3	53,5	53,4	53,6	53,4	53,5	53,3

Na pravítku stupnica nezačína hneď z kraja, ale až 4 mm od neho. Ak na túto okolnosť pozabudneme, dopustíme sa *systematickej chyby*, ktorú musíme korigovať tak, že od nameraných hodnôt dĺžky odčítame $\Delta = 4$ mm. Pri podrobnejšom prezretí nameraných údajov zistíme, že nameraná hodnota č. 4 sa výrazne líši od ostatných. Dá sa predpokladať, že pri tomto meraní sme sa dopustili *hrubej chyby*, a preto ju vylúčime zo súboru. Ostatné rozdiely medzi výsledkami predstavujú *náhodné chyby*.

Štatistické spracovanie výsledkov

Predpokladajme, že pri meraní fyzikálnej veličiny x, ktorej skutočná hodnota je x_s, dochádza len k náhodným chybám. Rozdiel (x_i - x_s) medzi *i*–tou nameranou hodnotou x_i a skutočnou hodnotou veličiny je ***chyba i-teho merania***. Tú však nedokážeme určiť, lebo nepoznáme skutočnú hodnotu meranej veličiny. Vďaka viacnásobnému meraniu tej istej veličiny však môžeme určiť jej pravdepodobnú hodnotu. Predpokladajme, že počas experimentu sme získali n realizácií meranej veličiny x. Štatistickými metódami sa dá exaktne dokázať, že aritmetický priemer $\bar{x}$ takto získaného súboru hodnôt x_i

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{1}$$

predstavuje najpravdepodobnejšiu hodnotu nameranej veličiny. Pre dostatočne veľký počet meraní ($n \to \infty$) sa hodnota aritmetického priemeru blíži ku skutočnej hodnote meranej veličiny. Ukazuje sa, že pri bežnom experimente sa nedosahuje podstatné zlepšenie výsledku, ak sa počet meraní zvyšuje nad $n = 20$, takže túto hranicu budeme považovať za dostatočnú.

Pomocou najpravdepodobnejšej experimentálnej hodnoty $\bar{x}$, teda pomocou aritmetického priemeru, sa určuje ***odchýlka i–teho merania*** Δx_i :

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} . \tag{2}$$

Aritmetický priemer má dve veľmi dôležité vlastnosti

- súčet všetkých odchýliek merania sa rovná nule: $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0$,
- súčet štvorcov odchýliek dosahuje minimálnu hodnotu.

Meranie je tým presnejšie, čím sú chyby jednotlivých meraní menšie. Na kvantitatívne posúdenie presnosti merania sa zavádza parameter s názvom ***smerodajná odchýlka*** (σ), ktorá je definovaná pomocou chýb jednotlivých meraní, a preto ju nedokážeme priamo určiť. Dokážeme však vypočítať tzv. ***odhad smerodajnej odchýlky*** (s) ktorý počítame pomocou odchýliek jednotlivých meraní. ***Odhad smerodajnej odchýlky jedného merania*** je definovaný vzťahom:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\mathrm{n} - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mathrm{n}\bar{x}^2}{\mathrm{n} - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/\mathrm{n}}{\mathrm{n} - 1}} . \tag{3}$$

Dá sa očakávať, že pri veľkom počte meraní sa odhad smerodajnej odchýlky s veľmi priblíži smerodajnej odchýlke σ.

Aritmetický priemer súboru meraní má istotne bližšie k skutočnej hodnote veličiny, ako hodnota náhodne vybratého merania. Preto aj odhad jeho smerodajnej odchýlky je prirodzene menší. Ako vyplýva z exaktného posúdenia štatistickými metódami, ***odhad smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru*** $s_{\bar{x}}$ súboru n meraní a odhad smerodajnej odchýlky jedného merania s súvisia prostredníctvom vzťahu

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{\mathrm{n}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mathrm{n}\bar{x}^2}{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/\mathrm{n}}{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}}\,. \tag{4}$$

Odporúčaný postup pri spracovaní výsledkov merania

A

Pri **priamom meraní** veličiny, pri spracovaní rovnako presných meraní, je vhodné postupovať nasledovne:

1. Zo súboru n nameraných hodnôt sa vypočíta aritmetický priemer podľa vzťahu (1).
2. Pomocou vzťahu (2) sa vypočítajú odchýlky Δx_i jednotlivých meraní.
3. Vypočíta sa odhad smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru podľa vzťahu (4).
4. Výsledok merania sa zapíše v tvare $x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, a spravidla sa uvedie aj relatívna chyba merania v percentách $\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100$

Údaj $\pm s_{\bar{x}}$ sa nazýva ***neistota merania***.

Keď chceme charakterizovať presnosť použitého spôsobu merania (meraciu metódu), udávame smerodajnú odchýlku jedného merania s . Ak chceme ohodnotiť presnosť čísla, ktoré sme získali ako aritmetický priemer súboru meraní, udávame veličinu $s_{\bar{x}}$. Preto je rozlišovanie týchto dvoch smerodajných odchýlok v praxi dôležité.

B

Väčšinu fyzikálnych veličín určujeme **nepriamym meraním**, t.j. počítame pomocou niekoľkých priamo meraných veličín, vystupujúcich vo vzťahu, ktorý vyjadruje ich vzájomnú súvislosť. Predpokladajme, že hľadaná veličina y je funkciou nezávisle od seba meraných veličín x_1 , x_2 , ... , x_n , pričom odhady ich smerodajných odchýlok s_1 , s_2 , ..., s_n určíme výpočtom (pri viacnásobnom meraní), alebo z presnosti použitých meracích prístrojov. V takom prípade pre odhad smerodajnej odchýlky s_y veličiny y platí vzťah

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\, s_i\right)^2 \tag{5}$$

kde $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sú parciálne derivácie veličiny y podľa priamo meraných veličín, nazývané aj citlivosti veličiny y na zmeny veličín x_i .

Vzťah (5) v istých prípadoch nadobúda jednoduchšiu formu.

- Ak vzťah na výpočet nepriamo meranej veličiny predstavuje súčet, alebo rozdiel dvoch priamo meraných veličín, dostaneme výsledok

$$(s_y)^2 = (s_1)^2 + (s_2)^2 \tag{6}$$

- Ak vzťah na výpočet nepriamo meranej veličiny predstavuje súčin, alebo podiel dvoch priamo meraných veličín, platí výsledok

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{s_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{x_2}\right)^2 . \qquad (7)$$

- Ak vzťah na výpočet nepriamo meranej veličiny predstavuje m-tú mocninu priamo meranej veličiny, potom

$$\frac{s_y}{y} = \sqrt{m}\,\frac{s_1}{x_1} . \qquad (8)$$

Grafické spracovanie experimentálnych hodnôt

Pri meraní vzájomnej závislisti dvoch veličín x a y získame množinu dvojíc (x_i, y_i). Ich grafická reprezentácia predstavuje body v rovine, pričom sa zvyčajne usilujeme týmito bodmi preložiť spojitú čiaru. Väčšina fyzikálnych závislostí sa dá vyjadriť ako

lineárna $\quad y = a + bx,$

kvadratická $\quad y = a + bx + cx^2 ,$

alebo exponenciálna $\quad y = a\,e^{bx} .$

Závislosť hyperbolického typu $y = a + b/x$ sa dá substitúciou $1/x = t$ previesť na lineárnu. Aj exponenciálnu závislosť je možné transformovať na lineárnu, keď ju logaritmujeme, čím dostaneme $\ln y = \ln a + bx$. Na graf potom ako závisle premennú vynášame nie y , ale $\ln y$.

Namerané dvojice (x_i , y_i), zaťažené chybami merania, neležia presne na predpokladanej krivke (priamke), takže optimálne preloženie krivky pomedzi namerané body vyžaduje použiť matematické postupy, ktoré sú už súčasťou aj temer bežných kalkulačiek. Na prekladanie optimálnych kriviek je však vhodnejšie použiť špecializované grafické programy ktoré sú súčasťou PC, využívajúce metódu najmenších štvorcov (napr. EXCELL). Tie nielen že poskytnú parametre preložených kriviek (napr. smernicu priamky), ale závislosť aj zobrazia.

Pri hľadaní optimálnej priamky (tzv. lineárna regresia), ktorej rovnicu zapisujeme v tvare $y = a + bx$, ide o nájdenie parametrov a, b , pričom východiskovými číselnými hodnotami sú súradnice (x_i , y_i) nameraných bodov v rovine závislej a nezávisle premennej. Teória regresnej analýzy poskytuje výsledky, ktoré si možno naprogramovať:

$$b = \frac{n\sum x_i\,y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} , \qquad a = \frac{1}{n}\sum y_i - b\frac{1}{n}\sum x_i , \qquad (9)$$

pričom sa sumuje cez všetkých n nameraných hodnôt.

Informáciu o tom, ako dobre ležia experimentálne body na preloženej priamke, poskytuje ***koeficient lineárnej korelácie*** r, ktorý je definovaný vzťahom

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad . \tag{10}$$

Takto určené číslo môže nadobúdať hodnoty z uzavretého intervalu $< -1, +1 >$. Ak sa jeho hodnota blíži k +1, tak experimentálne body ležia blízko priamky, t.j. experiment spĺňa predpoklad lineárnej závislosti. Ak sa hodnota koeficientu blíži k nule, experimentálna závislosť nie je lineárna a je potrebné hľadať iné vyjadrenie funkčnej závislosti.

Výpočet parametrov iných funkčných závislostí (kvadratickej, kubickej ...) je zložitejší, a nebude tu uvádzaný. Je predmetom numerických matematických metód.