

# Algebra a diskrétna matematika

## Príklady na precvičenie

### 12. týždeň

**Príklad 1:** Overte, či sú izomorfné nasledujúce dvojice grúp

- a)  $\mathbb{Z}_8$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ,
- b)  $\mathbb{Z}_{10}$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ,
- c)  $D_5$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ,
- d)  $A_4$  a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ .

**Príklad 2:** Ukážte, že množina  $\{e, (12), (345), (354), (12)(345), (12)(354)\}$  tvorí grupu vzhľadom na operáciu skladania permutácií. Je táto grupa komutatívna?

**Príklad 3:** Vypíšte všetky prvky permutačnej grupy  $S_4$  a zistite, ktoré z nich sú navzájom inverzné.

**Príklad 4:** Pre  $a = (12345678)$  z grupy  $S_8$  vypočítajte mocniny  $a^i$ , pričom  $2 \leq i \leq 10$ .

**Príklad 5:** K daným prvkom z grupy  $S_9$  nájdite inverzné prvky.

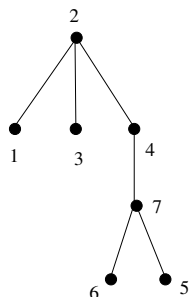
$$a = (13476)(259), \quad b = (2364)(78), \quad c = (134)(2697), \quad d = (145)(26)(79)$$

**Príklad 6:** Pre prvky  $a = (236)(57)$  a  $b = (147)$  z grupy  $S_7$  vypočítajte:

- a)  $ab$
- b)  $(ab)^{-1}$
- c)  $(ab)^{-2}$
- d)  $a^{-1}b^{-1}$
- e)  $b^{-1}a^{-1}$

**Príklad 7:** Ukážte, že grupa  $A_5$  je generovaná prvkami  $(123)$ ,  $(124)$  a  $(125)$ .

**Príklad 8:** Ukážte, že grupa  $S_7$  je generovaná všetkými 6 transpozíciami  $(ab)$ , kde  $ab$  je hrana ohodnoteného stromu z obrázku.



**Príklad 9:** Nech  $i, j, k, \ell, m$  sú rôzne prvky v  $S_n$ , kde  $n \geq 5$ . Vypočítajte permutácie

- a)  $(ij)(jk)(kj)$
- b)  $(ij)(jk\ell m)(ij)$

**Príklad 10:** V každom z prípadov ukážte, že grupa  $S_n$  je generovaná danými prvkami.

- a)  $(12), (123 \dots n)$
- b)  $(12), (23), (34), \dots, (n-1 \ n)$
- c)  $(12), (13), (14), \dots, (1n)$

**Príklad 11:** Zistite, ktoré prvky v poli  $\mathbb{Z}_{17}$  nemajú druhé odmocniny.

**Príklad 12:** Vyriešte dané kvadratické rovnice.

- a)  $x^2 + 2x \equiv 10 \pmod{11}$
- b)  $x^2 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{7}$
- c)  $x^2 + 2x + 5 \equiv 0 \pmod{13}$

**Príklad 12:** V poli  $\mathbb{Z}_{11}$  riešte danú sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6 \\ 3x + 7y &= 0 \end{aligned}$$

**Príklad 13:** V poli  $\mathbb{Z}_5$  riešte sústavu rovníc

$$3x + 2y + z = 2$$

$$x + 3y + z = 3$$

$$2x + y + z = 3$$

**Príklad 14:** V poli  $\mathbb{Z}_7$  riešte sústavu rovníc

$$x + y + 2z = 1$$

$$2x + y + 3z = 1$$

$$4x + 2y + 5z = 4$$