

Laboratórna úloha č. 22

Fázová a grupová rýchlosť v kvapalinách

Úloha: Odmerať fázovú a grupovú rýchlosť vo vode.

Teoretický úvod

Šírenie sa harmonického vlnenia v smere osi x môžeme opísať vlnovou funkciou

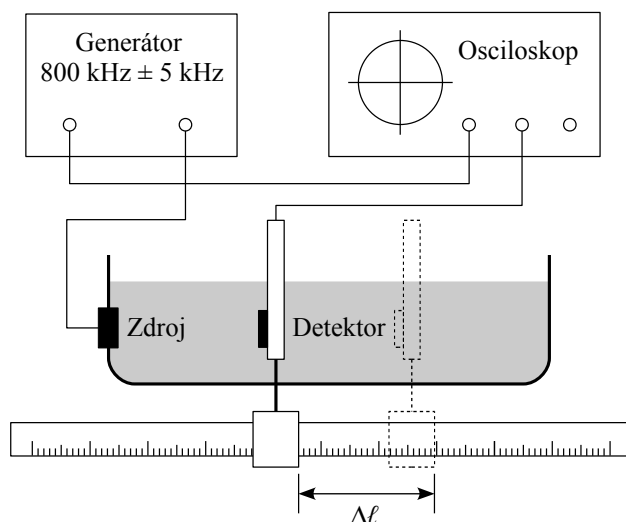
$$y = y_0 \sin \left[2\pi f \left(t \pm \frac{x}{v_f} \right) \right] \quad (1)$$

kde y je okamžitá výchylka hmotného elementu z rovnovážnej polohy v danom mieste, f je frekvencia vlnenia, v_f je fázová rýchlosť vlnenia.

Fázová rýchlosť v_f je rýchlosť, akou sa šíri fáza monochromatickej vlny. Pre fázovú rýchlosť platí:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (2)$$

kde λ je vlnová dĺžka – je to vzdialenosť medzi dvomi najbližšími bodmi prostredia, ktoré sú v tom istom čase vo fáze; ω je kruhová frekvencia, k je vlnové číslo.



Grupová rýchlosť v_g charakterizuje rýchlosť šírenia sa amplitúdy skupiny (grupy) vln a rýchlosť prenosu energie vlnením. Je definovaná vzťahom:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3)$$

Súvis medzi obidvomi rýchlosťami udáva vzťah

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (4)$$

Kvapalina	$v_f \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	$v_g \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$
glycerol	1 880	1 900
nasýtený roztok NaCl	1 800	1 800

Tabuľka 1: Fázové a grupové rýchlosti glycerolu a nasýteného roztoku NaCl.

Meranie fázovej rýchlosti

Meranie je nepriame a vychádza zo vzťahu (2). Pri určení vlnovej dĺžky λ postupujeme nasledovne: Vlnenie v mieste x_1 a čase t sa vyznačuje fázou $2\pi f(t - x_1/v_f)$, v mieste x_2 v tom istom čase t s fázou $2\pi f(t - x_2/v_f)$. Aby častice prostredia v mieste x_1 a x_2 kmitali vo fáze v ľubovoľnom čase, musí pre rozdiel fáz platiť

$$2\pi f\left(t - \frac{x_1}{v_f}\right) - 2\pi f\left(t - \frac{x_2}{v_f}\right) = 2\pi m \quad (5)$$

kde $m = 0, 1, 2, \dots$

Po úprave dostaneme

$$x_2 = x_1 + \lambda m \quad (6)$$

čo znamená, že vlnenie v mieste x_2 je vo fáze s vlnením v mieste x_1 vždy, ak je miesto x_2 posunuté o $\lambda, 2\lambda, \dots$. Zo vzťahu (6) vyplýva pre vlnovú dĺžku

$$x_2 - x_1 = \lambda m \quad (7)$$

V experimente na určenie vlnovej dĺžky λ vlnenia vo vode používame ultrazvukový generátor na generovanie harmonického napätia, ktoré privádzame do piezoelektrického meniča – zdroja vlnenia. Vlnenie sa šíri ako pozdĺžne v nádobe s vodou a je detekované piezoelektrickým meničom, ktorý transformuje mechanické kmity na elektrické. Obe elektrické harmonické napätia – z generátora a detektora – privádzame na vstupy dvojkanálového osciloskopu. Spúšťanie časovej základne osciloskopu sa deje interne cez kanál 2 signálom z detektora. Posúvaním detektora nastavíme na osciloskope vzájomnú polohu časových priebehov elektrických signálov na 1. a 2. kanáli tak, aby boli vo fáze. Amplitúdu signálu na 1. kanáli prispôbime buď zosilnením alebo veľkosťou výstupného napätia z generátora. Amplitúda signálu privádzaného na 2. kanál je konštantná.

Upozornenie: Potenciometer na ultrazvukovom generátore treba nastaviť tak, aby značka *nezasahovala* do šrafovej časti!

Potom z tejto polohy $\ell_1(m = 0)$ – posúvame detektor do ďalších polôh ℓ , pri ktorých budú signály vo fáze a zaznamenáme, koľkonásobne (m) sa zmenila fáza o 2π . Hodnoty ℓ_1, ℓ, m zapíšeme do tabuľky 1. (Krok veličiny m zvoľte rovný číslu 5.)

Vlnovú dĺžku určíme pomocou vzťahu (7), kde za $x_2 - x_1$ dosadíme $\ell - \ell_1 = \Delta\ell$. Potom platí

$$\Delta\ell = m\lambda \quad (8)$$

čo je lineárna závislosť medzi $\Delta\ell$ a m . Konštantný člen a smernicu tejto závislosti určíme z lineárnej regresie.

Výrobca udáva pre frekvenciu generátora $f = 800$ kHz štandardnú neistotu typu B $s_{Bf} = 5$ kHz.

Fázovú rýchlosť určíme podľa vzťahu (2). Neistotu (typu A) určenia fázovej rýchlosti získame zo vzťahu

$$s_{Av_f} = v_f \sqrt{\left(\frac{s_{A\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{s_{Bf}}{f}\right)^2} \quad (9)$$

pričom $s_{A\lambda}$ je štandardná neistota typu A vlnovej dĺžky. Keďže vlnovú dĺžku určujeme ako smernicu lineárnej závislosti medzi m a $\Delta\ell$, tak za odhad hodnoty $s_{A\lambda}$ zoberieme smerodajnú odchýlku smernice, ktorú určíme z regresného výpočtu.

Meranie grupovej rýchlosti

Pri určení grupovej rýchlosti nebudeme vychádzať z definičného vzťahu, ale postupujeme tak, že odmeriame dobu $\Delta t = t - t_1$, za ktorú zvukový impulz prekoná vzdialenosť $\Delta\ell = \ell - \ell_1$ zodpovedajúcu zmene polohy detektora. Potom

$$v_g = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \quad (10)$$

Skôr, ako začneme merať, odpojíme kábel zo vstupu do 2. kanála a zapojíme ho do vstupu pre externú časovú základňu. Na generátore zatlačíme gombík označujúci impulzný režim.

Časová základňa osciloskopu sa spúšťa externe pomocou synchronizačného signálu generátora nastaveného na impulznú prevádzku, pri ktorej generuje elektrické impulzy s opakovacou frekvenciou 500 Hz.

Detektor nastavíme čo najbližšie k zdroju – poloha ℓ_1 – a na časovej základni odčítame dobu t_1 , za ktorú zvukový impulz (jeho čelo) dospeje k detektoru. (Vhodnejšie je nastaviť celočíselný čas, napr. $t_1 = 20 \mu\text{s}$ a odčítať polohu detektora ℓ_1 .) Posúvaním detektora vpravo zväčšujeme jeho vzdialenosť od zdroja a tým sa zväčšuje doba t . Detektor posúvame tak, aby sa čas zväčšoval o $5 \mu\text{s}$. Časová základňa s rozsahom $10 \mu\text{s}/\text{cm}$ je nastavená a očiachovaná pomocou harmonického signálu s frekvenciou $f = 800$ kHz z generátora. Hodnoty ℓ_1 , t_1 , ℓ , t zapisujeme do tabuľky 2.

Zo vzťahu (10) vyplýva, že

$$\Delta\ell = v_g \Delta t \quad (11)$$

takže hodnotu v_g určíme lineárnou regresnou analýzou tejto závislosti. Je zrejmé, že v_g je smernicou tejto závislosti. Z lineárnej regresie vypočítame aj smerodajnú odchýlku smernice, ktorú budeme považovať za odhad štandardnej neistoty s_{Av_g} (typu A) určenia grupovej rýchlosti.

Ak v experimente zistíme, že grupová rýchlosť je (v rámci stanovených neistôt s_{Av_f} a s_{Bv_f} zhodná s fázovou rýchlosťou, znamená to [pozri vzťah (4)], že pre danú frekvenciu

(800 kHz) a jej zodpovedajúcu vlnovú dĺžku platí $dv_f/d\lambda = 0$, čiže na tejto frekvencii sa prípadná disperzia prostredia¹ neprejavuje.

Inštrukcie pre zostojenie grafov

Do grafu pre výsledky z merania fázovej rýchlosti zakreslite namerané hodnoty napr. krížikmi. Modelovú rovnicu zapíšte v symbolickom tvare $\Delta\ell = a + bm$. Na vhodné miesto v grafe zaznačte hodnoty koeficientov a a b (aj s jednotkami) získané lineárnou regresiou. Regresným výpočtom určte a do grafu zaznačte aj hodnoty smerodajných odchýlok (opäť aj s jednotkami) a štvorca koeficientu determinovanosti, ktoré v grafe značte s_a , s_b a $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$. Nameranými bodmi pomocou pravítka preložte priamku v súlade s výsledkami regresie.

V prípade grafu pre meranie grupovej rýchlosti postupujte obdobne s tým, že modelovou rovnicou bude $\Delta\ell = a' + b'\Delta t$.

Niektoré z hodnôt uvedených v grafoch je potrebné uviesť aj do výsledkovej časti protokolu, aj keď pod iným označením.

¹Pod disperzným prostredím rozumieme také, v ktorom fázová rýchlosť vlny závisí od frekvencie.

Meno:

Kružok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 22
Fázová a grupová rýchlosť v kvapalinách

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Schéma zapojenia

Záznam merania, výpočty a výsledky

$\ell_1 =$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ℓ_i (mm)										
m_i	0									
$\Delta\ell_i$ (mm)	0									
$s_{A\lambda} =$			$v_f =$				$s_{Av_f} =$			

$\ell_1 =$					$t_1 =$					
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ℓ_i (mm)										
t_i (μ s)										
$\Delta\ell_i$ (mm)	0									
Δt_i (μ s)	0									
$v_g =$					$s_{Av_g} =$					

Prílohy

- graf závislosti $\Delta\ell$ od m pri meraní fázovej rýchlosti
- graf závislosti $\Delta\ell$ od Δt pri meraní grupovej rýchlosti

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: