loíOtázky ku skúške Matematická analýza I.

1. Definícia limity funkcie v bode

Definícia 12 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ *a* a *je hromadným bodom množiny* A. *Ak pre každé* $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ *existuje* $\mathcal{O}^o_\delta(a)$ *také, že* $f(\mathcal{O}^o_\delta(a) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, *hovoríme, že funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *má v bode* a *limitu* b. *Píšeme* $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

2. Veta o limite zúženia funkcie

Definícia 14 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $(f|C) : C \to \mathbb{R}$, $(f|C)(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 2 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$, $C \subset A$ *a* $a \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodom množiny* C. *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. *Potom aj* $\lim_{x\to a}(f|C)(x) = b$.

3. Veta o limite zloženej funkcie

Veta 6 *Nech* $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ *a* $g : B \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *a* $\lim_{x\to b} g(x) = c$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $x \in A \setminus \{a\}$ *je* $f(x) \neq b$.
- *Funkcia* g *je spojitá v bode* b.

Potom $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

4. Definícia spojitosti funkcie v bode, na množine a spojitosti

Definícia 13 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $a \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *budeme hovoriť, že funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bode* a.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $a \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá na množine* C.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $a \in A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá.*

5. Definícia postupnosti reálnych čísel. Definícia konvergentnej postupnosti

Definícia 18 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. *Hodnotu* $f(n) = a_n$ *nazývame n-tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.*

6. Definícia nekonečného radu, jeho konvergencie a súčtu

Definícia 21 *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n *nazývame n-tý člen radu.*

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je priradená taká postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, *že platí*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. *Postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná, tak hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.*

7. Bolzano - Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 21 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $m > n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

8. Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu. Uviesť príklad, že nie je postačujúcou podmienkou (harmonický rad)

Veta 22 *(Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

harmonický rad je rad tvaru

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

9. Definícia majorantného radu, majorantné kritérium konvergencie nekonečného radu

Definícia 25 *Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. (Je zrejmé, že $0 \leq b_n$.) Potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 24 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 3 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný, tak je divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

10. D' Alembertovo (podielové) kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 25 *(d'Alembertovo kritérium konvergencie radu) Nech $a_n \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ak*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

11. Cauchyho (odmocninové) kritérium konvergencie nekonečného radu

Veta 26 *(Cauchyho kritérium konvergencie radu) Nech*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

12. Definícia radu so striedavými znamienkami, kritérium o jeho konvergencii

Definícia 27 *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 27 *(Leibnitzovo kritérium konvergencie radu) Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ a postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný.*

Veta 62 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 7 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$