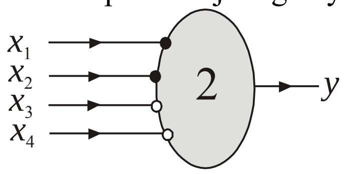
Záverečná písomka (18. 1. 2005)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?
(e) čo je dôkaz formuly φ ?

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model
a či formula α je logickým dôsledkom T, $T \vdash \alpha$,
$T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.
(a) Vtáky sa množia vajciami.
(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Neexistuje dym bez ohňa.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:
(a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$,
(b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$,
(c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,
(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$.

Príklad 6. Rozhodnite pomocou rezolventy, či množina $\boldsymbol{S}$ formúl je splniteľná alebo nie, uveďte aj dôvod (P a R sú unárne predikáty).
$\boldsymbol{S} = \{\forall x\, (P(x) \wedge R(x)), \neg \exists x\, R(x), \neg P(a)\}$.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(b) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

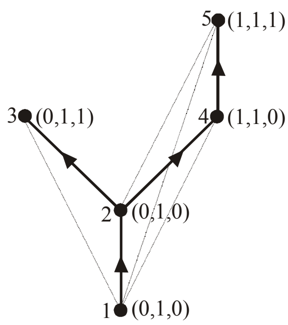
(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

Cvičenie 10. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg q \vee \neg r))$$

pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou *R*, pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných *p*, *q* a *r*.



Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných *p* a *q* je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Záverečná písomka (18. 1. 2005)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(f) čo je formula?
(g) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(h) čo je teória a čo je model?
(i) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?
(j) čo je dôkaz formuly φ ?

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny {p,q,q,…} a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

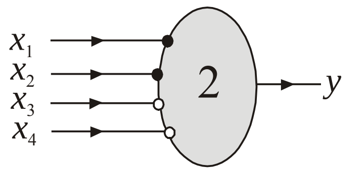
(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) *F*ormula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \vDash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



$$y = s(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2)$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$s(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2)$	y
1	0	0	0	0	s(-2)	0
2	0	0	0	1	s(-3)	0
3	0	0	1	0	s(-3)	0
4	0	0	1	1	s(-4)	0
5	0	1	0	0	s(-1)	0
6	0	1	0	1	s(-2)	0

7	0	1	1	0	s(-2)	0
8	0	1	1	1	s(-3)	0
9	1	0	0	0	s(-1)	0
10	1	0	0	1	s(-2)	0
11	1	0	1	0	s(-2)	0
12	1	0	1	1	s(-3)	0
13	1	1	0	0	s(0)	1
14	1	1	0	1	s(-1)	0
15	1	1	1	0	s(-1)	0
16	1	1	1	1	s(-2)	0

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\wedge x_2\wedge \bar{x}_3\wedge \bar{x}_4)$$

Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T, $T\vDash\alpha$,

$T=\{x\Rightarrow y, y\Rightarrow(z\vee\neg x), \neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z), t\Rightarrow x\}$, $\alpha=z$

Ak $T=\{C_1,C_2,\dots,C_n\}$, potom vlastnosť $T\vDash\alpha$ je ekvivaletná platnosti implikácie

$$C_1\wedge C_2\wedge\dots\wedge C_n\Rightarrow\alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1\wedge C_2\wedge\dots\wedge C_n\wedge\neg\alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T\vDash\alpha$.

$$(x\Rightarrow y)\wedge(y\Rightarrow(z\vee\neg x))\wedge(\neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z))\wedge(t\Rightarrow x)\wedge\neg z$$

Prepíšeme ju do tvaru NKF

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge\underbrace{(t\vee(t\wedge\neg z))}_{t\wedge(t\vee\neg z)}\wedge(\neg t\vee x)\wedge\neg z$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idenpotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$(\neg x\vee y)\wedge(\neg y\vee z\vee\neg x)\wedge(t\vee\neg z)\wedge t\wedge(\neg t\vee x)\neg z$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg x\vee y$	$\neg y\vee z\vee\neg x$	$t\vee\neg z$	t	$\neg z$	$\neg t\vee x$	7	8				
z		1	0		0		$\neg y\vee t\vee\neg x$	$\neg y\vee\neg x$	9	10		
y	1						0	0	$\neg x\vee t$	$\neg x$	11	
x						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	$\square$

Záver: Platí tautologické vyplývanie

$$\{x\Rightarrow y, y\Rightarrow(z\vee\neg x), \neg t\Rightarrow(t\wedge\neg z), t\Rightarrow\}\vDash z$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa množia vajciami.
$\forall x\left(Vtak\left(x\right)\Rightarrow Mnoz\_vaj\left(x\right)\right)$
$\exists x\left(Vtak\left(x\right)\wedge\neg Mnoz\_vaj\left(x\right)\right)$
Existuje taký vták, ktorý sa nemnoží vajciami.

(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
$\forall x\left(sport\left(x\right)\Rightarrow fyz\_kond\left(x\right)\right)$
$\exists x\left(sport\left(x\right)\wedge\neg fyz\_kond\left(x\right)\right)$
Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
$\forall x\left(neparne\left(x\right)\Rightarrow prime\left(x\right)\right)$
$\exists x\left(neparne\left(x\right)\wedge\neg prime\left(x\right)\right)$
Niektoré nepárne čísla nie sú prvočíslava.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
$\forall x\left(navst\_UK\left(x\right)\Rightarrow hovori\_angl\left(x\right)\right)$
$\exists x\left(navst\_UK\left(x\right)\wedge\neg hovori\_angl\left(x\right)\right)$
Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Neexistuje dym bez ohňa.
$\neg\exists x\left(dym\left(x\right)\wedge\neg ohen\left(x\right)\right)$
$\forall x\left(dym\left(x\right)\Rightarrow ohen\left(x\right)\right)$
Každý dym je s ohňom.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $\left(\exists x\, P\left(x\right)\right)\vee\left(\exists x\,\neg P\left(x\right)\right)$,
Pomocou formule z príkladu 7.2 $\exists x\left(P\left(x\right)\vee Q\left(x\right)\right)\equiv\left(\exists xP\left(x\right)\vee\exists xQ\left(x\right)\right)$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

$$\exists x\underbrace{\left(P\left(x\right)\vee\neg P\left(x\right)\right)}_{1}\equiv 1$$

(b) $\forall x\left(P\left(x\right)\vee\neg P\left(x\right)\right)$, táto formula je automatický pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $\left(P\left(x\right)\vee\neg P\left(x\right)\right)\equiv 1$ pre každé indivíduum x.

(c) $\left(\exists x\, P\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\, P\left(x\right)\right)$, nvrhneme interpretáciu $\mathcal{I}$, pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,...\}$ a $P(x)$ je unárny predikát, ktorého význam je „x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x\, P\left(x\right)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x, ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x\, P\left(x\right)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia

$(1 \Rightarrow 0)$ je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie $\mathcal{I}$ v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „x je nezáporné číslo“).

(d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$, tto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora $(\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x))$ do ekvivalentného tvaru $(\forall x\, P(x)) \wedge \neg(\forall x\, P(x))$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p/\forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 6. Rozhodnite pomocou rezolventy, či množina ***S*** formúl je splniteľná alebo nie, uveďte aj dôvod (P a R sú unárne predikáty).

$\boldsymbol{S} = \{\forall x (P(x) \wedge R(x)), \neg \exists x\, R(x), \neg P(a)\}$.

Prvá formula z množiny S znamená „ pre každé x predikáty $P(x)$ a $Q(x)$ sú pravdivé“. To znamená, že tak druhá ako aj tretia formula z množiny S sú nepravdivé, čiže množina S je ***nekonzistentné***.

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

φ_1: $\forall x (st(x) \Rightarrow mat(x)) \Rightarrow (st(t) \Rightarrow mat(t))$
φ_2: $\forall x (mat(x) \Rightarrow \neg analf(x)) \Rightarrow (mat(t) \Rightarrow \neg analf(t))$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
dostaneme

$(st(t) \Rightarrow \neg analf(t))$ pre ľubovolné indivíduum t, čiže platí aj

$\forall x (st(x) \Rightarrow \neg analf(x))$

Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

$\varphi_1: \exists x \left(st(x) \wedge kom(x) \right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge kom(a) \right)$
$\varphi_2: \exists x \left(kom(x) \wedge mat(x) \right) \Rightarrow \left(kom(b) \wedge mat(b) \right)$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?
$\varphi_1: \exists x \left(fyz(x) \wedge astr(x) \right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a) \right)$
$\varphi_2: \forall x \left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x) \right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a) \right)$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(*a*) a *astr*(*a*). Použitím *fyz*(*a*) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme ¬*chem*(*a*). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg chem(x)$$

alebo, „niektorý astronómovia nie sú chemici".

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?
$\varphi_1: \forall x \left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x) \right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a) \right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a) \right)$
$\varphi_2: \exists x \left(analf(x) \wedge vce(x) \right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a) \right)$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(*a*) a *vce*(*a*) . Použitím *analf*(*a*) s prvou premisou dostaneme ¬*st*(a) , spojením s *vce*(*a*) dostaneme

$$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, vce(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje analafabet): „niektorý včelár nie je študent"

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

1.	$p \Rightarrow q$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$q \Rightarrow r$	(aktivácie 2. pomocného predpokladu)
3.	p	(aktivácia 3. pomocného predpokladu)
4.	q	(modus ponens na 1. a 3.)
5.	r	(modus ponens na 2. a 4.)
6.	$p \Rightarrow r$	(deaktivácia 3.)
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(deaktivácia 2.)
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(deaktivácia 1.)

(b) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

1.	$\forall x\, \varphi(x)$
2.	$\varphi(t)$
3.	$\exists x\, \varphi(x)$
4.	$(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Príklad 9. Pomocou tabuľkovej metódy preverte, či formule sú tautológie 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky:

(a) $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$,

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
0	0	1	0	1
0	½	1	½	1
0	1	1	1	1
½	0	½	½	1
½	½	1	½	1
½	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	½	½	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

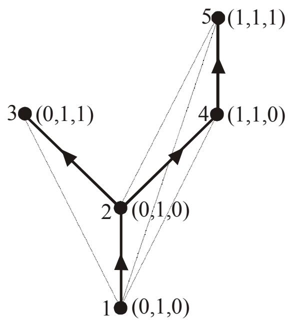
φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
0	0	1	1
0	½	½	1
0	1	0	1
½	0	1	1
½	½	1	1

½	1	½	1
1	0	1	1
1	½	1	1
1	1	1	1

Cvičenie 10. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly

$$p \Rightarrow \left(\left(\neg \left(p \wedge q \right) \right) \vee \left(\neg q \vee \neg r \right) \right)$$

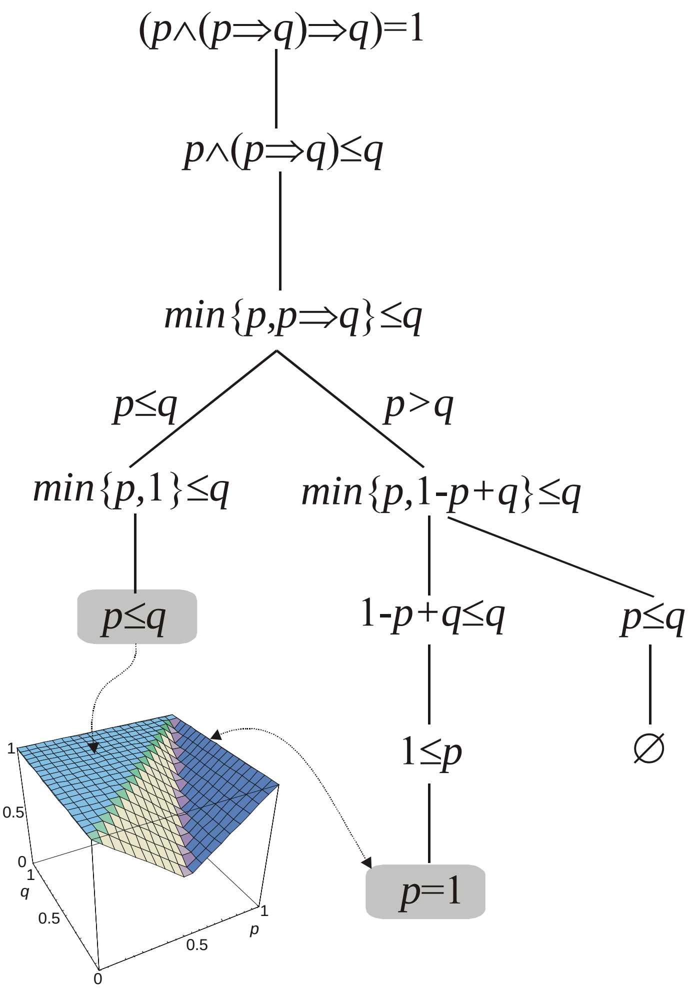
pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou *R*, pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných *p*, *q* a *r*.



	1	2	3	4	5
p	0	0	0	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0	0	1	0	1
$p\wedge q$	0	0	0	1	1
$\neg r$	0	0	0	0	0
$\neg q$	0	0	0	0	0
$\neg q\vee\neg r$	0	0	0	0	0
$\neg (p\wedge q)$	0	0	1	0	0
$(\neg (p\wedge q)) \vee (\neg r\vee\neg q)$	0	0	1	0	0
$p\Rightarrow(\neg (p\wedge q)) \vee (\neg r\vee\neg q)$	0	0	1	0	0

Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré h7odnoty premenných *p* a *q* je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q \right) \right) \Rightarrow q$.



Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

1. $v(w_1, \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)) = 0$
2. $v(w_1, \Diamond(\varphi \Rightarrow \psi)) = 1$
3. $v(w_1, \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi) = 0$
4. $v(w_2, \varphi \Rightarrow \psi) = 1 \quad (\exists w_2 \in \Gamma(w_1))$
5. $v(w_1, \Box\varphi) = 1$
6. $v(w_1, \Diamond\psi) = 0$
7. $v(w_3, \varphi) = 1 \quad (\forall w_3 \in \Gamma(w_1))$
8. $v(w_4, \psi) = 0 \quad (\forall w_4 \in \Gamma(w_1))$
9. $(v(w_2, \varphi) = 0) \vee (v(w_2, \psi) = 1) \quad (\exists w_2 \in \Gamma(w_1))$

Riadky 7, 8 a 9 produkujú kontradikciu, z tejto skutočnosti vyplýva, že formula je tautológia (pre každú interpretáciu je pravdivá).