1. kontrolná písomka z Matematickej logiky
písaná dňa 19. 3. 2010

1. príklad. Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka tak, aby vyjadrenie bolo jednoznačné.(3 body).

(a) Ak na výlet pôjde Jana alebo Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš. (1 bod)
(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena ani Tomáš. (1 bod)
(c) Jano športoval alebo ak študoval, potom sa učili fyziku. (1 bod)

2. príklad. Pomocou vety o dedukcii dokážte, že z teórie $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ logicky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow r$, t. j. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$. (3 body)

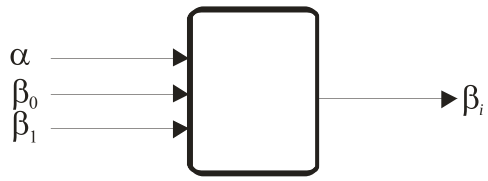
3. príklad. Nájdite riešenie týchto jednoduchých schém usudzovania (ak existujú). (3 body)

(a) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{padá sneh}\end{array}}{?}$, (b) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{kúpem sa}\end{array}}{?}$

(c) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nepadá sneh}\end{array}}{?}$, (d) $\dfrac{\begin{array}{l}\textit{ak padá sneh, potom sa nekúpem}\\ \textit{nekúpem sa}\end{array}}{?}$

Príklad 4. Napíšte ako sú definované DNF a KNF a prepíšte do DNF a KNF formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (3 body)

5. príklad. Zostrojte Boolovu funkciu $\beta_i = f(\alpha, \beta_0, \beta_1)$, kde binárne číslo α rozhoduje, ktorý zo vstupov β_i bude skopírovaný na výstup (3 body).



$f(0, \beta_0, \beta_1) = \beta_0$, $f(1, \beta_0, \beta_1) = \beta_1$

Riešenie

1. príklad. Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana alebo Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš. (1 bod)
Riešenie:
p = na výlet pôjde Jana
q = na výlet pôjde Eva
r = na výlet pôjde Tomáš
Výrok sa vyjadrí pomocou formule

$$\varphi = ((p \vee q) \Rightarrow \neg r) \equiv (\neg(p \vee q) \vee \neg r)$$

$$\neg\varphi = (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Jana a Tomáš alebo Eva a Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena ani Tomáš. (1 bod)
Riešenie:
p = na výlet pôjde Eva
q = na výlet pôjde Helena
r = na výlet pôjde Tomáš
Výrok sa vyjadrí pomocou formule

$$\varphi = (p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \equiv (\neg p \vee \neg(q \vee r))$$

$$\neg\varphi = (p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Eva a Helena alebo Eva a Tomáš.

(c) Jano športoval alebo ak študoval, potom sa učili fyziku. (1 bod)
Riešenie:
p = Jano športoval
q = Jano študoval
r = Jano sa učil fyziku
Výrok sa vyjadrí pomocou formule

$$\varphi = p \vee (q \Rightarrow r) \equiv p \vee \neg q \vee r$$

$$\neg\varphi = \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Jano nešportoval a študoval a neučil sa fyziku.

2. príklad. Pomocou vety o dedukcii dokážte, že z teórie $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ logicky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow r$, t. j. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$.

Riešenie.

1.	p	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
3.	$q \Rightarrow r$	2. predpoklad
4.	q	aplikácia modus ponens na 1 a 2
5.	r	aplikácia modus ponens na 3 a 4
6.	$p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu 1, QED

3. príklad. Nájdite riešenie týchto jednoduchých schém usudzovania (ak existujú).

$$(a)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ padá\ sneh \end{array}}{?},\quad (b)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ kúpem\ sa \end{array}}{?}$$

$$(c)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ nepadá\ sneh \end{array}}{?},\quad (d)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ nekúpem\ sa \end{array}}{?}$$

Riešenie.

$$(a)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ padá\ sneh \end{array}}{nekúpem\ sa},\quad (b)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ kúpem\ sa \end{array}}{nepadá\ sneh}$$

$$(c)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ nepadá\ sneh \end{array}}{\varnothing},\quad (d)\ \frac{\begin{array}{l} ak\ \ padá\ sneh,\ potom\ sa\ nekúpem \\ nekúpem\ sa \end{array}}{\varnothing}$$

Príklad 4. Ako sú definované DNF a KNF a prepíšte do DNF a KNF formulu $\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow r\right)$

Riešenie.

$\varphi_{DNF} =_{def} \left(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots\right) \vee \left(l_1' \wedge l_2' \wedge \ldots\right) \vee \left(l_1'' \wedge l_2'' \wedge \ldots\right) \vee \ldots$ ...disjunkcia konjunktívnych klauzúl

$\varphi_{KNF} =_{def} \left(l_1 \vee l_2 \vee \ldots\right) \wedge \left(l_1' \vee l_2' \vee \ldots\right) \wedge \left(l_1'' \vee l_2'' \vee \ldots\right) \wedge \ldots$ ...konjunkcia disjunktívnych klauzúl

$$\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow r\right)$$

$$\neg\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right) \vee \left(p \Rightarrow r\right)$$

$$\neg\left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee r\right)\right) \vee \left(\neg p \vee r\right)$$

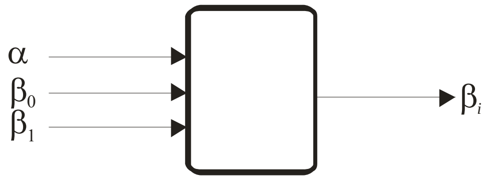
$$\left(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)\right) \vee (\neg p \vee r)$$

$$DNF: \boxed{\left((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)\right) \vee (\neg p) \vee (r)}$$

$$\left((p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)\right) \vee (\neg p \vee r)$$

$$KNF: \left(\underbrace{(p \vee q \vee \neg p \vee r)}_{1} \wedge \underbrace{(p \vee \neg r \vee \neg p \vee r)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg q \vee q \vee \neg p \vee r)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg q \vee \neg r \vee \neg p \vee r)}_{1} \right) \equiv \boxed{1}$$

5. príklad. Zostrojte Boolovu funkciu $\beta_i = f(\alpha, \beta_0, \beta_1)$, kde binárne číslo α rozhoduje, ktorý zo vstupov β_i bude skopírovaný na výstup.



$$f(0, \beta_0, \beta_1) = \beta_0,\ f(1, \beta_0, \beta_1) = \beta_1$$

Riešenie: Obvod je špecifikovaný tabuľkou

<table>
<tr><th colspan="3">vstup</th><th>výstup</th></tr>
<tr><th>α</th><th>β0</th><th>β1</th><th>β</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

$$\begin{aligned} f &= (\neg\alpha \wedge \beta_0 \wedge \neg\beta_1) \vee (\neg\alpha \wedge \beta_0 \wedge \beta_1) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\beta_0 \wedge \beta_1) \vee (\alpha_1 \wedge \beta_0 \wedge \beta_1) \\ &= (\neg\alpha \wedge \beta_0) \vee (\alpha \wedge \beta_1) \end{aligned}$$