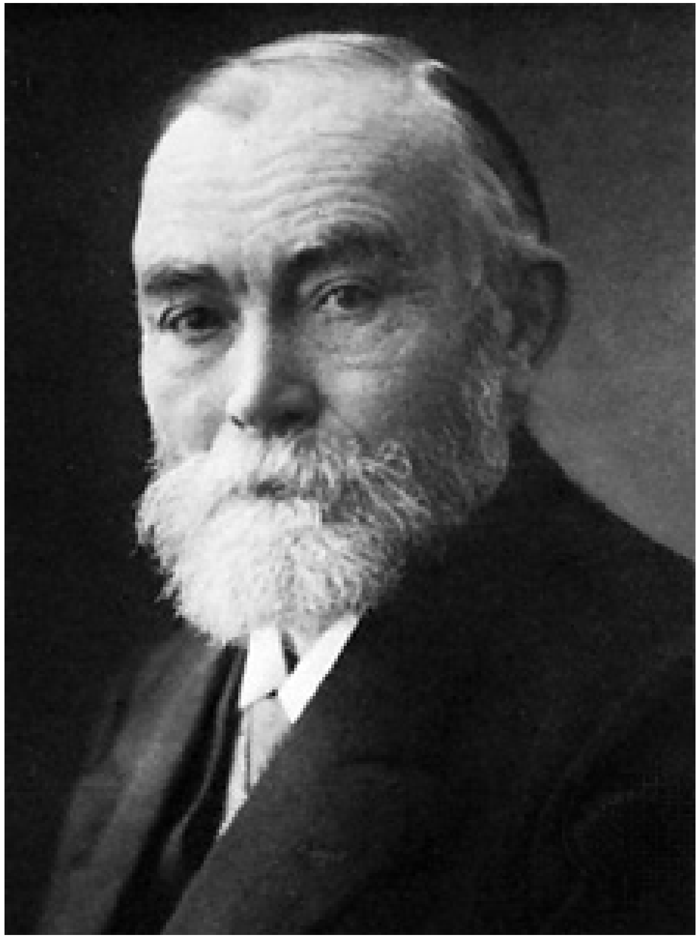
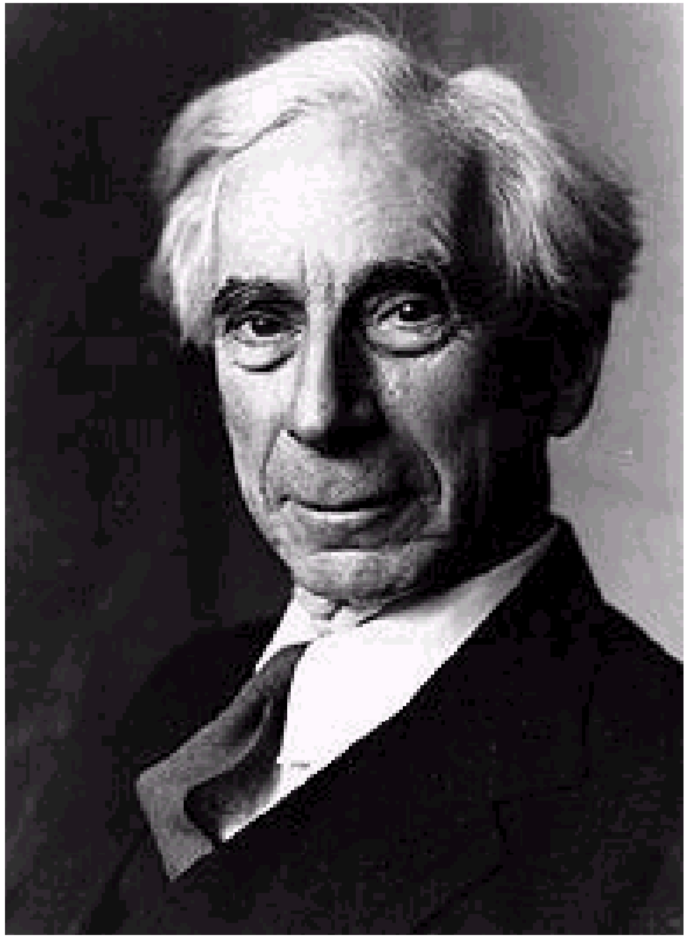
Predikátová logika

(syntax a sémantika)



Gottlob Frege (1848 - 1925)



Bertrand Russell (1872-1970)

Intuitívny prechod od výrokovej logiky k predikátovej logike

Príklad 1

Milan je študent
Každý študent má index

Milan má index

- Druhá premisa obsahuje slovo „***každý***“, s ktorým si vo výrokovej logike nevieme poradiť.
- Výroková logika ***nepokrýva všetky situácie a možnosti*** ľudského usudzovania, ktoré sú podstatne bohatšie, ako možnosti výrokovej logiky.
- Ohraničenosť výrokovej logiky je možné prekonať jej zovšeobecnením na ***predikátovú logiku***, ktorá je schopná postihnúť aj procesy usudzovania podobné vyššie uvedenému príkladu.

Označme písmenom

- *S* vlastnosť – predikát byť študentom
- *I* vlastnosť – predikát mať vec–index.

$$\frac{\text{Milan je } S \qquad \text{Každý kto je S má } I}{\text{Milan má } I}$$

Vidíme, že aj táto čiastočná formalizácia schémy usudzovania ešte nie je moc nápomocná k riešeniu problému jej korektnosti.

Zavedieme predikáty:

- symbol $S(m)$ označuje predikát S (byť študentom) s konštantou m (Milan), jeho význam je „Milan je študent“.
- symbol $I(m)$ označuje predikát I (mať index) s konštantou m, jeho význam je „Milan má index“, kde
- symbol $\forall$ označuje *univerzálny kvantifikátor.*
- symbol $\forall x$ čítame ako „pre každé x“ .

$$\frac{\begin{array}{l} S(m) \\ \forall x\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \end{array}}{I(m)}$$

Interpretácia univerzálneho kvantifikátora

Výraz $\forall x\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať ako konjunkciu implikácií pre rôzne osoby (konštanty), napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\forall x\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)\equiv\big(S(m)\Rightarrow I(m)\big)\wedge\big(S(j)\Rightarrow I(j)\big)\wedge\big(S(r)\Rightarrow I(r)\big)\wedge\ldots$$
$$\equiv\bigwedge_{x\in U}\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)$$

kde U je množina objektov – osôb.

$$\forall x\big(S(x)\Rightarrow I(x)\big)\Rightarrow\big(S(m)\Rightarrow I(m)\big)$$

Dôsledok výrokovej formuly $p\wedge q\wedge r\ldots\Rightarrow p$

Pozorovanie: Zo všeobecného výroku $\forall x P(x)$, kde $P(x)$ je predikát definovaný nad univerzom U, vyplýva aj jeho *konkretizácia* pre konštantu $a \in U$

$$\boxed{\forall x P(x) \Rightarrow P(a)}$$

Rozšírená schéma usudzovania

$$\frac{\dfrac{S(m)}{\forall x\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big)} \qquad \forall x\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \Rightarrow \big(S(m) \Rightarrow I(m)\big)}{I(m)}$$

Upravíme pomocou pravidla modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} S(m) \\ S(m) \Rightarrow I(m) \end{array}}{I(m)}$$

Týmto sme vlastne dokázali korektnosť usudzovania pôvodnej verbálne formulovanej schémy usudzovania. Musíme však zdôrazniť, že k tomu, aby sme dokázali korektnosť tejto schémy používajúcej väzbu „***každý***“ museli sme ***opustiť rámec výrokovej logiky*** a zaviesť predikáty a symbol $\forall x$, čím sme sa dostali z domény výrokovej logiky do domény tzv. predikátovej logiky.

Príklad 2

Milan je študent
Milan má index

Niektorý objekt je študent a má index

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, táto intuitívne korektná schéma usudzovania nemôže byť študovaná v rámci výrokovej logiky.

Budeme formalizovať túto schému podobným spôsobom, ako v predchádzajúcom ilustratívnom príklade. Zavedieme nový symbol nazývaný *existenčný kvantifikátor* $\exists x$, ktorý čítame ako „existuje také x“.

$$\begin{array}{l} S(m) \\ I(m) \\ \hline \exists x\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{array}$$

Výraz $\exists x\big(S(x)\wedge I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať ako disjunkciu konjunktívnych výrokov pre rôzne osoby, napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} \exists x\big(S(x)\wedge I(x)\big) &\equiv \big(S(m)\wedge I(m)\big)\vee\big(S(j)\wedge I(j)\big)\vee\big(S(r)\wedge I(r)\big)\vee\ldots \\ &\equiv \bigvee_{x\in U}\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{aligned}$$

Z tejto interpretácie existenčného kvantifikátora vyplýva implikácia

$$\left(S\left(m\right)\wedge I\left(m\right)\right)\Rightarrow\exists x\left(S\left(x\right)\wedge I\left(x\right)\right)$$

Pozorovanie: Z partikulárneho výroku $P(a)$ môžeme pomocou existenčného kvantifikátora zostrojiť výrok $\exists xP\left(x\right)$, kde $P(x)$ je predikát definovaný nad univerzom U

$$\boxed{P\left(a\right)\Rightarrow\exists xP\left(x\right)}$$

$$
\begin{array}{l}
S(m) \\
I(m) \\
S(m) \wedge I(m) \\
\underline{\big(S(m) \wedge I(m)\big) \Rightarrow \exists x\big(S(x) \wedge I(x)\big)} \\
\exists x\big(S(x) \wedge I(x)\big)
\end{array}
$$

Použijeme pravidlo modus ponens.

Príklad 3

V tomto príklade zavedieme pojem funkcie, ktorá objektom z univerza U priradí nejaký iný objekt z univerza U.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Číslo 2 je párne}\\ \text{Ak prirodzené číslo je párne, potom jeho nasledovník je nepárne číslo}\end{array}}{\text{Nasledovník čísla 2 je nepárne číslo}}$$

predikát $P(x)$ má význam „číslo x je párne“
predikát $Q(x)$ má význam „číslo x je nepárne“
funkcia $f(x)$ každému prirodzenému číslu x priradí jeho nasledovníka x+1

$$
\frac{\begin{array}{l} P(2) \\ \forall x\big(P(x) \Rightarrow Q\big(f(x)\big)\big) \\ \forall x\big(P(x) \Rightarrow Q\big(f(x)\big)\big) \Rightarrow \big(P(2) \Rightarrow Q\big(f(2)\big)\big) \end{array}}{Q\big(f(2)\big)}
$$

Záver dostaneme použitím modus ponens.

Formálna interpretácia predikátu a funkcie

Predikát *P* je zobrazenie

$$P : U^n \Rightarrow \{0,1\}$$

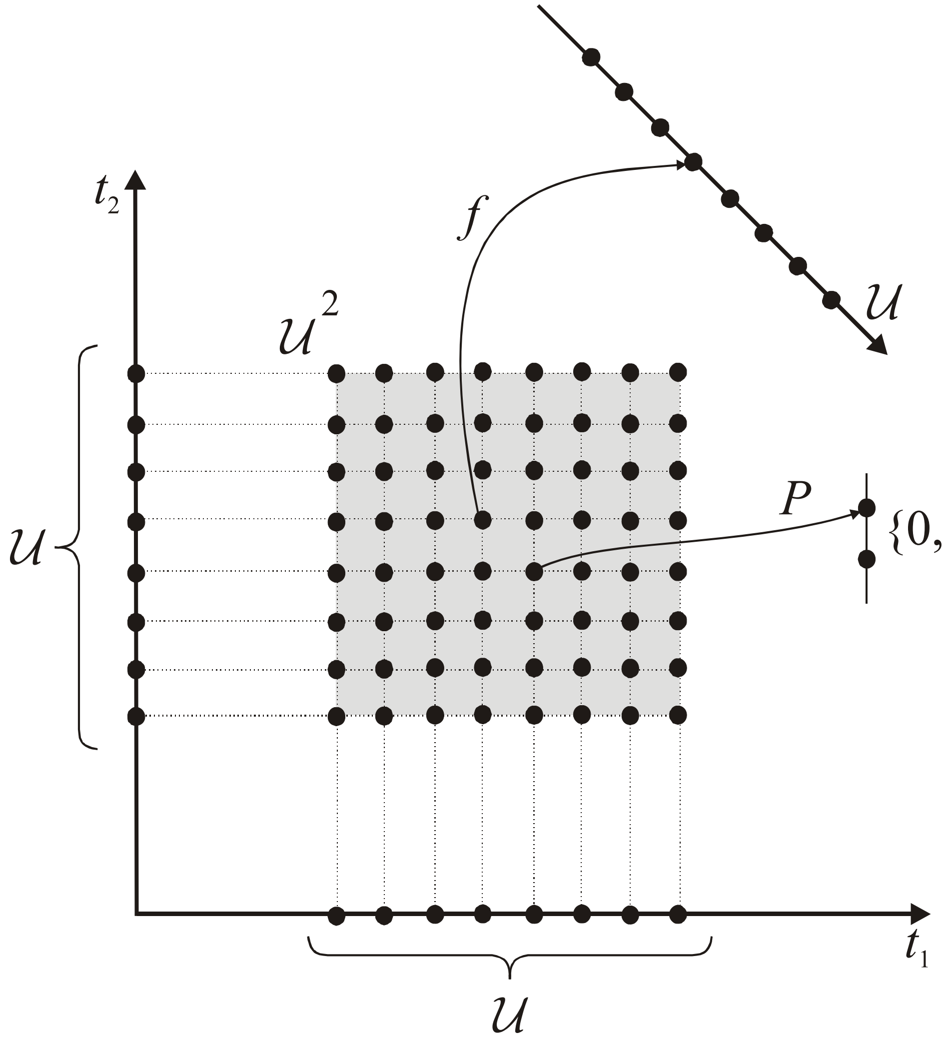
ktoré priradí každej *n*-tici indivíduí z univerza *U* pravdivostnú hodnotu z $\{0,1\}$

Funkcia *f* je zobrazenie

$$f : U^n \Rightarrow U$$

ktoré každej *n*-tici indivíduí z univerza *U* priradí objekt z *U*

Znázornenie binárneho predikátu *P* a binárnej funkcie *f*



Príklad

P je binárny predikát „súrodenec“ definovaný nad univerzom

$$U = \{Fero, Jano, Eva, Jana, ...\}$$

$$P(a,b) = \begin{cases} 1 & (\text{indivíduá } a \text{ a } b \text{ sú súrodenci}) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

	Fero	*Jano*	*Eva*	*Jana*	....
Fero	—	1	0	1	
Jano	1	—	0	0	
Eva	0	0	—	1	
Jana	1	0	1	—	
....					—

f je binárna funkcia „súčet kvadrátov“ definovaná nad univerzom prirodzených čísel

$$U = N = \{1,2,3,4,5,...\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

	1	2	3	4	...
1	1	5	10	17	
2	5	4	13	20	
3	10	13	18	25	
4	17	20	25	32	
...					

Jazyk predikátovej logiky (syntax)

Symboly jazyka predikátovej logiky sú

(1) množina indivíduových premenných $\mathcal{X} = \{x, y, ..., x_1, x_2, ...\}$;

(2) množina indivíduových konštánt $\mathcal{C} = \{a, b, ..., a_1, b_2, ...\}$;

(3) množina predikátových symbolov (predikátov) $\mathcal{P} = \{P, Q, ..., P_1, P_2, ...\}$;

(4) množina funkčných symbolov (funkcií) $\mathcal{F} = \{f, g, ..., f_1, f_2, ...\}$;

(5) množina logických symbolov $\mathcal{L} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \forall, \exists\}$;

(6) množina pomocných symbolov $\mathcal{B} = \{(,)\}$.

Formuly predikátovej logiky.

Termy:

(1) Indivíduové premenné a indivíduové konštanty sú termy;

(2) ak f je n-miestny symbol funkcie a t_1, t_2, ..., t_n sú termy, potom výraz $f(t_1,t_2, ...,t_n)$ je term;

(3) žiadne iné symboly nie sú termy.

(1) $\Lambda_{term}:=\mathcal{C}\cup\mathcal{X}$

(2) ak $t_1,t_2,...,t_n \in \Lambda_{term}$ a $f \in \mathcal{F}$ je funkcia s n argumentami, potom

$$\Lambda_{term}:=\Lambda_{term}\cup\left\{f\left(t_1,t_2,...,t_n\right)\right\}$$

Atomické formuly:

(1) Ak P je n-miestny predikátový symbol, t_1, t_2, ..., t_n sú termy, potom výraz $P(t_1,t_2, ...,t_n)$ je atomická formula;

(2) žiadne iné symboly nie sú atomické formuly.

(1) $\Lambda_{atomic\ formula} := \emptyset$

(2) Ak $P \in \mathcal{P}$ je n-miestný predikát a $t_1,t_2,...,t_n \in \Lambda_{term}$, potom

$$\Lambda_{atomic\ formula} := \Lambda_{atomic\ formula} \cup \left\{ P\left(t_1,t_2,...,t_n \right) \right\}$$

Formuly:

(1) Každá atomická formula je formula;

(2) ak φ a ψ sú formuly, x je premenná, potom výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$, $(\varphi\equiv\psi)$, $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ sú formuly.

(3) Žiadne iné symboly nie sú formuly.

(1) $\Lambda_{formula} := \Lambda_{atomic\ formula}$

(2) ak $\varphi,\psi\in\Lambda_{formula}$, potom

(a) $\Lambda_{formula} := \Lambda_{formula}\cup\left\{(\neg\varphi),(\neg\psi)\right\}$

(b) $\Lambda_{formula} := \Lambda_{formula}\cup\left\{(\varphi\wedge\psi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\Rightarrow\psi),(\varphi\equiv\psi)\right\}$

(c) $\Lambda_{formula} := \Lambda_{formula}\cup\left\{((\forall x)\varphi),((\forall x)\psi),((\exists x)\varphi),((\exists x)\psi)\right\}$

Príklad

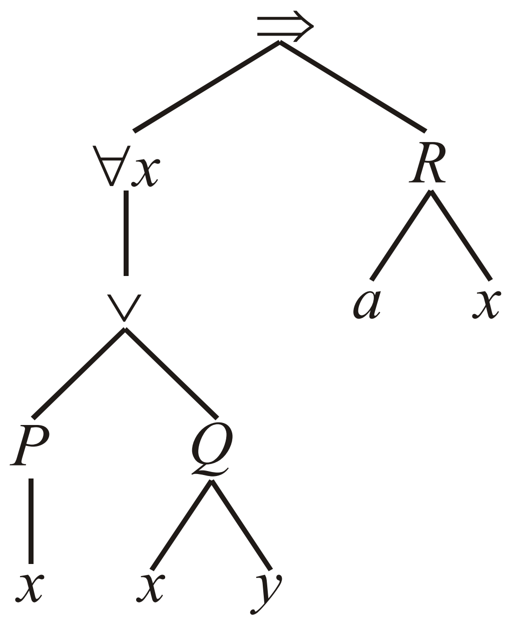
Študujme tieto dva reťazce symbolov

$$\alpha = \left(\left(\forall\right)\left(P\left(x\right) \vee Q\left(x,b\right)\right)\right) \Rightarrow R\left(a,b\right)$$
$$\beta = \left(\left(\forall x\right)\left(P\left(x\right) \vee Q\left(x,y\right)\right)\right) \Rightarrow R\left(a,x\right)$$

kde *P* je unárny predikát, *Q* a *R* sú binárne predikáty, *a* a *b* sú konštanty, *x* a *y* sú premenné.

- Reťazec α nie je formula, pretože symbol $\forall$ nie je nasledovaný symbolom premennej.
- Reťazec β je korektná formula.

Každá formula predikátovej logiky je reprezentovaná syntaktickým (derivačným) stromom



$$\big((\forall x)\big(P(x)\vee Q(x,y)\big)\big)\Rightarrow R(a,x)$$

K podstromom sú priradené ***podformuly*** (ktoré sú taktiež syntakticky korektné formuly).

Definícia.

- Ak formula má tvar $(\forall x)\varphi$ alebo $(\exists x)\varphi$, hovoríme, že premenná x je ***viazaná*** v tejto formule. V opačnom prípade sa premenná nazýva ***volná*** (obsahuje volné premenné).
- Formula je ***uzavretá*** (alebo ***sentencia***), ak neobsahuje volné premenné.
- Formula je ***otvorená***, ak neobsahuje viazané premenné.

Príklad

Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky výroky prirodzeného jazyka:

(1) *Každý riaditeľ má aspoň jedného podriadeného zamestnanca*.

$$\forall x\, \exists y \left(R\left(x\right) \Rightarrow P\left(x, y\right) \right)$$

kde $R(x)$ znamená, že indivíduum x je riaditeľ, $P(x,y)$ znamená, že indivíduum y je podriadeným indivídua x.

(2) Neexistuje taký človek, ktorý by sa každému páčil.

$$\neg \exists x\, \forall y\, P\left(x, y\right)$$

kde $P(x,y)$ znamená, že indivíduum x sa páči indivíduu y.

(3) *Nie je pravda, že každý člen vedenia podniku je aj majiteľom podnikových akcií*.

$$\neg\forall x\left(V\left(x\right)\Rightarrow A\left(x\right)\right)$$

kde $V(x)$ znamená, že indivíduum x je člen vedenia podniku a $A(x)$ znamená, že indivíduum x je majiteľom podnikových akcií.

(4) Postupnosť $\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ má *limitu* a: Pre každé $\varepsilon>0$ existuje také n_0 , že pre každé $n>n_0$ platí $\left|a-a_n\right|<\varepsilon$.

$$\forall\left(\varepsilon>0\right)\exists\left(n_0\right)\forall\left(n>n_0\right)\left(\left|a-a_n\right|<\varepsilon\right)$$

(5) Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 *minimum*: existuje také ε>0, že pre každé $x \in U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$ platí $f(x) \geq f(x_0)$ (množina $U_\varepsilon(x_0)$ je ε-okolie bodu x_0).

$$\exists(\varepsilon > 0)\,\forall\big(x \in U_\varepsilon(x_0)\big)\big(f(x) \geq f(x_0)\big)$$

(6) Funkcia $f(x)$ je *rastúca* v bode a: existuje také ε>0, že pre každé $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(a)$ platí implikácia $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$$\exists(\varepsilon > 0)\,\forall\big(x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0)\big)\big(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\big)$$

(7) *V každom meste je radnica, v niektorých mestách radnica nie je*.

$$\big(\forall x\,(M(x) \Rightarrow R(x))\big) \vee \big(\exists x\,(M(x) \wedge \neg R(x))\big)$$

kde $M(x)$ znamená, že indivíduum x je mesto a $R(x)$ znamená, že indivíduum x má radnicu.

Pravdivostné hodnotenie formúl predikátovej logiky (sémantika)

- Problém pravdivostného hodnotenia formúl predikátovej logiky je podstatne zložitejší proces ako vo výrokovej logike.

- Interpretácia formúl predikátovej logiky obsahuje interpretáciu konštánt, funkčných a predikátových symbolov.

Príklad

Uvažujme formulu

$$\forall x\Big(S(x) \Rightarrow S\big(f\big(f(x)\big)\big)\Big)$$

kde S je unárny predikát a f je unárna funkcia.

Uvažujme tieto dve rôzne interpretácie:

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$. Indivíduá sú ľudia. Predikát S reprezentuje vlastnosť „byť živý“, funkcia f priradí každému objektu (človeku) jeho otca. Potom študovaná formula má význam „*každý kto je živý má živého starého otca*“, pravdivostná hodnota tohto významu je evidentne nepravda.

(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$. Indivíduá sú prirodzené čísla. Predikát S reprezentuje vlastnosť „byť párne číslo“, funkcia f priradí každému prirodzenému číslu jeho nasledovníka, $f(x)=x+1$ a $f(f(x))=x+2$. Pri tejto voľbe objektov, predikátov a funkcií, význam formule je „*každé číslo ktoré je párne má dvojitého nasledovníka, ktorý je párny*“, čo je evidentne pravdivý výraz.

Záver:

a. Pravdivostná hodnota predikátovej formule je určená interpretáciou $\mathcal{I}$ premenných, konštánt, predikátov a funkcií.

b. V rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ predikát P a funkciu f chápeme ako zobrazenia, ktoré sú definované nad karteziánskymi produktmi množiny indivíduí (univerzom) $\mathcal{U}$.

Definícia.
n-miestný ***predikát*** P je zobrazenie

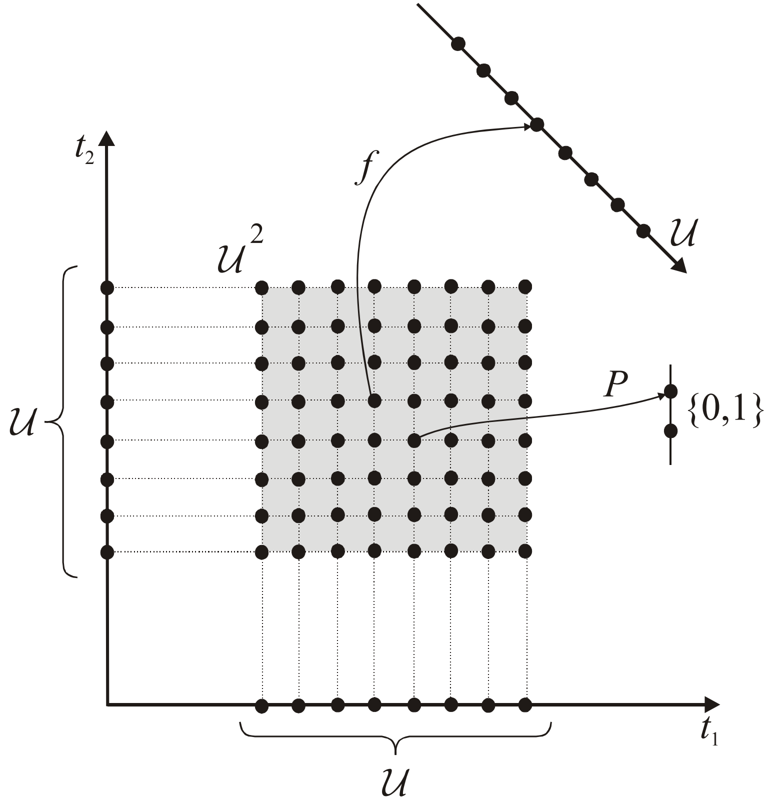
$$P:\mathcal{U}^n \to \{0,1\}$$

ktoré usporiadanej n-tici indivíduí $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathcal{U}^n$ priradí binárnu pravdivostnú hodnotu 0/1. Predikát je chápaný ako špeciálny typ výroku, ktorý je definovaný nad karteziánskym produktom univerza $\mathcal{U}^n$ a ktorý má pravdivostnú hodnotu 0/1.

n-miestna ***funkcia*** f je zobrazenie

$$f:\mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$$

ktorá usporiadanej n-tici indivíduí $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathcal{U}^n$ priradí indivíduum z $\mathcal{U}$.



Znázornenie interpretácie $\mathcal{I}$, kde predikát P a funkcia f sú definované nad karteziánskym súčinom $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Predikát P priradí dvojici indivíduí $(t_1,t_2)\in\mathcal{U}^2$ binárne číslo $P(t_1,t_2)\in\{0,1\}$, zatiaľ čo funkcia f priradí dvojici $(t_1,t_2)\in\mathcal{U}^2$ indivíduum $f(t_1,t_2)\in\mathcal{U}$.

Príklad 1

Uvažujme univerzum $\mathcal{U}=\{Ján,Jozef,Viera,Eva,Maja\}$, pričom rodičia *Ján* a *Viera* majú deti *Jozefa* a *Evu*, *Maja* je ich známa. Ternárny (n=3) predikát $P(x,y,z)$ je pravdivý, ak indivíduum x má otca y a matku z). V našom prípade, potom pre predikát P platia tieto ilustračné príklady: $P\left(Jozef,Ján,Viera\right)=1$, $P\left(Ján,Jozef,Viera\right)=0$, $P\left(Eva,Ján,Viera\right)=1$, $P\left(Eva,Eva,Maja\right)=0$.

Príklad 2

Nech univerzum $\mathcal{U}$ sa rovná množine prirodzených čísel, $\mathcal{U} = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$. Binárna funkcia ($n$=2) $f(x,y)$ dvojici prirodzených čísel ich súčet, t.j. $f(x,y) = (x+y) \in \mathbb{N}$. Tak napríklad, $f(1,2) = 3$, $f(0,5) = 5$, .. .

- K tomu, aby sme rozhodli či formula $\forall x\Big(S(x) \Rightarrow S\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big)$ je pravdivá alebo nie musíme poznať pravdivostné hodnoty jej podformúl $S(x)$ a $S\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

- Pravdivostná hodnota formuly s univerzálnym kvantifikátorom $(\forall x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ vždy pravdivý.

- Formula s existenčným kvantifikátorom $(\exists x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ pravdivý aspoň raz.

Príklad

Formula $\forall x\left(S(x)\Rightarrow S\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)$ je pravdivá len vtedy, ak predikát $S(x)\Rightarrow S\left(f\left(f(x)\right)\right)$ je vždy pravdivý. Ako už bolo ukázané, táto podmienka je splnená len pre špeciálne interpretácie.

Definícia.
Interpretácia $\mathcal{I}$ formuly predikátovej logiky priradí každej konštante a každej premennej indivíduá z $\mathcal{U}$, každá funkcia f s n argumentmi je špecifikovaná ako zobrazenie $f: U^n \to U$ a každý predikát P s m argumentmi je špecifikovaný ako zobrazenie $P: U^n \to \{0,1\}$.

Pravdivostná hodnotu formule pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$

(1) Nech atomická formula φ má tvar $\varphi = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, kde P je n−miestný predikát s termami t_1, t_2, ..., t_n. Súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je vyhodnotenie tejto formuly pravdivostnou hodnotou.

(2) Ak φ a ψ sú formule vyhodnotené v predchádzajúcom kroku, potom

- formula $\neg\varphi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak φ je nepravdivé,
- formula $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak φ a ψ sú pravdivé,
- formula $\varphi \vee \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak φ alebo ψ sú pravdivé,
- formula $\varphi \Rightarrow \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak φ je nepravdivá alebo ψ je pravdivá,
- formula $\varphi \equiv \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak φ a ψ sú súčasne pravdivé alebo súčasne nepravdivé.

(3) Formula $\forall x\, \varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá pre každé $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

(4) Formula $\exists x\, \varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá aspoň pre jedno $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

Ak formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je pravdivá, potom to zapíšeme takto $\models_{\mathcal{I}} \varphi$, v opačnom prípade, ak je formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je nepravdivá, potom $\not\models_{\mathcal{I}} \varphi$.

Príklad

- Množina predikátových symbolov je $\mathcal{P} = \{P, Q\}$,
- množina konštánt je $\mathcal{C} = \{a, b\}$ a
- množina funkčných symbolov je $\mathcal{F} = \{f, g\}$,
- kde P a f sú unárne symboly a Q a g sú binárne symboly.

Interpretácia $\mathcal{I}$ je definovaná takto:

- Univerzum $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel,
- konštanty a a b sú určené a=0 a b=1,
- premenné x, y sú prirodzené čísla z univerza $\mathcal{U}$,
- funkcia f je nasledovník argumentu, $f\left(x\right) = x + 1$, pre každé $x \in \mathbb{N}$,
- funkcia g je súčtom svojich argumentov, $g\left(x, y\right) = x + y$, pre každé $x, y \in \mathbb{N}$,
- predikát P je pravdivý vtedy, ak jeho argument je párne číslo,
- predikát Q je pravdivý pre dvojicu argumentov $\left(x, y\right) \in \mathbb{N}^2$ ak platí $x \leq y$.

Budeme študovať pravdivosť alebo nepravdivosť týchto päť formúl

(1) $P\left(g\left(f\left(a\right),g\left(a,f\left(b\right)\right)\right)\right)$. V prvom kroku vyhodnotíme argumenty predikátu P, $f(a)=f(0)=1$, $f(b)=f(1)=2$, $g\left(a,f\left(b\right)\right)=g\left(0,2\right)=2$, $g\left(1,2\right)=3$. To znamená, že študovaná formula je nepravdivá, pretože 3 nie je párne číslo, $P\left(3\right)=0$.

(2) $Q\left(g\left(a,b\right),f\left(b\right)\right)$. Argumenty predikátu Q majú hodnoty $g\left(a,b\right)=g\left(0,1\right)=1$ a $f(b)=f(1)=2$. Potom $Q\left(1,2\right)=1$, pretože $1\leq 2$, študovaná formula je pravdivá.

(3) $P(b) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$. Zo zadania interpretácie $\mathcal{I}$ priamo vyplýva, že $P(b)$ je nepravdivé (b nie párne číslo), potom študovaná formula tvaru $P(b) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$ musí byť pravdivá.

(4) $\exists x\, \forall y\, Q(y,x)$. „Preložíme“ túto formulu do prirodzeného jazyka: „existuje také prirodzené číslo x, že pre každé prirodzené číslo y platí $y \leq x$“, táto vlastnosť je evidentne nepravdivá, potom aj študovaná formula je nepravdivá.

(5) $\forall x\, \exists y\, Q(y,x)$. Podobne ako pre predchádzajúcu formulu, študovaná formula v prirodzenom jazyku hovorí „pre každé prirodzené číslo x existuje také prirodzené číslo y, že platí $x \leq y$“, čo je pravdivý výrok, čiže aj študovaná formula je pravdivá.

Definícia.

(1) Formula φ sa nazýva ***splniteľná*** v interpretácii $\mathcal{I}$ vtedy a len vtedy, ak je v tejto interpretácii pravdivá, $\models_{\mathcal{I}} \varphi$.

(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$, $\models \varphi$. Formula φ sa nazýva ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak nie je splniteľná pre každdú interpretáciu $\mathcal{I}$.

(3) Interpretáciu $\mathcal{I}$ sa nazýva ***model*** uzavretej formuly (sentencie) φ vtedy a len vtedy, ak formula φ je splniteľná pre interpretáciu $\mathcal{I}$, $\models_{\mathcal{I}} \varphi$.

Poznámka: touto definíciou sme zaviedli model len pre také formule, ktoré sú sentencie, ktoré nemajú voľné premenné.

Príklad

$$\alpha = \left(\forall x\, P(x)\right) \vee \left(\neg \forall x\, P(x)\right)$$

Dokážeme, že táto formula je tautológia. Musíme ukázať, že táto formula je pravdivá pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$. Pre zvolenú interpretáciu $\mathcal{I}$ je podformula $\beta = \left(\forall x\, P(x)\right)$ buď pravdivá alebo nepravdivá, potom však disjunkcia $\beta \vee \neg\beta$ je vždy pravdivá.

Analogickú predikátovú tautológiu dostaneme z výrokovej tautológie $p \Rightarrow p$ substitúciou $p / \left(\forall x P(x)\right)$, $\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x)\right)$.

Najznámejšie tautológie predikátovej logiky

1. ***Eliminácia univerzálneho kvantifikátora*** (konkretizácia)

$$\boxed{\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(a)}$$

Táto formula je dôsledkom tautológie $p \wedge q \Rightarrow p$

$$\forall x\, P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \Rightarrow P(a)$$

čo bolo potrebné dokázať.

2. ***Zavedenie existenčného kvantifikátora*** (abstrakcia)

$$\boxed{P(a) \Rightarrow (\exists x\, P(x))}$$

Táto formula je dôsledkom tautológie $p \Rightarrow p \vee q$

$$\exists x\, P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee \ldots \equiv \bigvee_{x \in U} P(s)$$

$$P(a) \Rightarrow P(a) \vee P(b) \vee \ldots \equiv \exists x\, P(x)$$

čo bolo potrebné dokázať.

3. ***Zmena univerzálneho kvantifikátora na existenčný kvantifikátor***

$$\boxed{\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow \exists x\, P(x)}$$

Dôkaz priamo vyplýva z predchádzajúcich dvoch formúl

$$\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(a)$$
$$P(a) \Rightarrow \left(\exists x\, P(x)\right)$$

Ak použijeme zákon hypotetického sylogizmu (tranzitivita implikácie) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$, potom dostaneme dokazovanú formulu.

4. ***Negácia univerzálneho kvantifikátora***

$$\boxed{\neg\forall x\, P(x) \equiv \left(\exists x\, \neg P(x)\right)}$$

Dôkaz tejto formuly plynie priamo z de Morganovho zákona výrokovej logiky pre konjunkciu

$$\neg\left(\forall x\, P(x)\right) \equiv \neg\left(P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots\right) \equiv \left(\neg P(a)\right) \vee \left(\neg P(b)\right) \vee \ldots \equiv$$

$$\bigvee_{x\in U}\left(\neg P(s)\right) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

5. ***Negácia existenčného kvantifikátora***

$$\boxed{\neg\left(\exists x\, P(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg P(x)\right)}$$

Dokáže sa podobným spôsobom ako predchádzajúca formula pomocou de Morganovho zákona pre negáciu disjunkcie

6. ***Komutácia univerzálnych kvantifikátorov***

$$\left(\forall x\,\forall y\, P(x,y)\right) \equiv \left(\forall y\,\forall x\, P(x,y)\right)$$

Dôkaz tejto tautológie je založený na komutatívnosti a asociatívnosti konjunkcie ($p \wedge q \equiv q \wedge p$)

$$\begin{aligned}
\forall x\,\forall y\, P(x,y) \equiv\ & P(a,a) \wedge P(a,b) \wedge P(a,c) \wedge \ldots \\
& \wedge P(b,a) \wedge P(b,b) \wedge P(b,c) \wedge \ldots \\
& \wedge P(c,a) \wedge P(c,b) \wedge P(c,c) \wedge \ldots \\
& \equiv P(c,a) \wedge P(b,a) \wedge P(a,a) \wedge \ldots \\
& \wedge P(c,b) \wedge P(b,b) \wedge P(a,b) \wedge \ldots \\
& \wedge P(c,c) \wedge P(b,c) \wedge P(a,c) \wedge \ldots \equiv \forall y\,\forall x\, P(x,y)
\end{aligned}$$

7. ***Komutácia existenčných kvantifikátorov***

$$\boxed{\left(\exists x\,\exists y\; P\left(x,y\right)\right)\equiv\left(\exists y\,\exists x\; P\left(x,y\right)\right)}$$

Dôkaz je podobný ako predchádzajúci dôkaz, v tomto prípade je založený na komutatívnosť a asociatívnosti disjunkcie.

8. ***Komutácia univerzálneho a existenčného kvantifikátora***

$$\boxed{\left(\exists x\, \forall y\, P(x,y)\right) \Rightarrow \left(\forall y\, \exists x\, P(x,y)\right)}$$

Dôkaz uskutočníme tak, že implikáciu prepíšeme do disjunktného tvaru.

$$\left(\exists x\, \forall y\, P(x,y)\right) \Rightarrow \left(\forall y\, \exists x\, P(x,y)\right) \equiv \neg\left(\exists x\, \forall y\, P(x,y)\right) \vee \left(\forall y\, \exists x\, P(x,y)\right)$$

$$\equiv \left(\forall x\, \exists y\, \neg P(x,y)\right) \vee \left(\forall y\, \exists x\, P(x,y)\right) \equiv \left(\forall x\, \exists y\, \neg P(x,y)\right) \vee \left(\forall x\, \exists y\, P(y,x)\right)$$

$$\equiv \forall x\, \exists y \left(\left(\neg P(x,y)\right) \vee P(y,x)\right)$$

Poznamenajme, že tento spôsob dôkazu (6.20h) je nepoužiteľný pre obrátenú implikáciu, $\left(\forall y\, \exists x\, P(x,y)\right) \Rightarrow \left(\exists x\, \forall y\, P(x,y)\right)$.

Príklad

$$\left(\forall y\,\exists x\,P(x,y)\right)\Rightarrow\left(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\right)$$

Navrhneme takú interpretáciu tejto formule v ktorej je nepravdivá, čiže nemôže byť tautológia.

Nech premenné x, y sú reálne čísla a predikát P je relácia <. Potom ľavá strana implikácie $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ je evidentne pravdivá formula (pre každé číslo y existuje také číslo x, že $x < y$). Pravá strana implikácie $\exists x\,\forall y\,P(x,y)$je evidentne nepravdivá formula (existuje také x, ktoré je menšie ako každé y, čo je evidentná nepravda). Týmto sme dokázali, že pre danú interpretáciu ľavá strana je pravdivá, zatiaľ čo pravá strana je nepravdivá, z čoho vyplýva že implikácia je nepravdivá.

Príklad

$$\forall x\ \exists y\ Q(x,y),$$

kde Q je binárny predikát

1. Univerzum $\mathcal{U}$ je totožné s množinou $\mathbb{N}$ prirodzených čísel a predikátový symbol Q je stotožnený s reláciou $\leq$. Potom slovná interpretácia vety je, že pre každé prirodzené číslo x existuje také prirodzené číslo y, pre ktoré platí $x \leq y$.

2. Ak binárny predikát $Q(x,y)$ je stotožnený s reláciou $x < y$, potom Q(0,y) je evidentne nepravdivý.

Definícia

(1) ***Existenčný uzáver*** formule φ s voľnými premennými x, y, ... sa nazýva formula $\exists x\, \exists y \ldots \varphi$, kde voľné premenné sú viazané existenčnými kvantifikátormi umiestnenými pred formulou.

(2) ***Univerzálny uzáver*** formule φ s voľnými premennými x, y, ... sa nazýva formula $\forall x\, \forall y \ldots \varphi$, kde voľné premenné sú viazané univerzálnymi kvantifikátormi umiestnenými pred formulou.

Príklad: $R(x,a) \Rightarrow (\forall y\, R(y,z))$, potom

(1) existenčný uzáver je sentencia $\exists x\, \exists z\, \big(R(x,a) \Rightarrow (\forall y\, R(y,z))\big)$,

(2) univerzálnym uzáverom je sentencia $\forall x\, \forall z\, \big(R(x,a) \Rightarrow (\forall y\, R(y,z))\big)$.

Veta

(1) Formula φ je splniteľná vtedy a len vtedy, ak je jej existenčný uzáver je splniteľný.

(2) Formula φ je tautológia vtedy a len vtedy, ak jej univerzálny uzáver je tautológiou.

Definícia

Teóriou T predikátovej logiky je ľubovolná neprázdna množina ***sentencií***, $T=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$. Ak pre teóriu T existuje taká interpretácia $\mathcal{I}$ v ktorej je každá sentencia z T pravdivá, potom táto interpretácia sa nazýva ***model***. Teória T je ***konzistentná***, ak má model. Ak teória T nemá model, potom sa nazýva nekonzistentná.

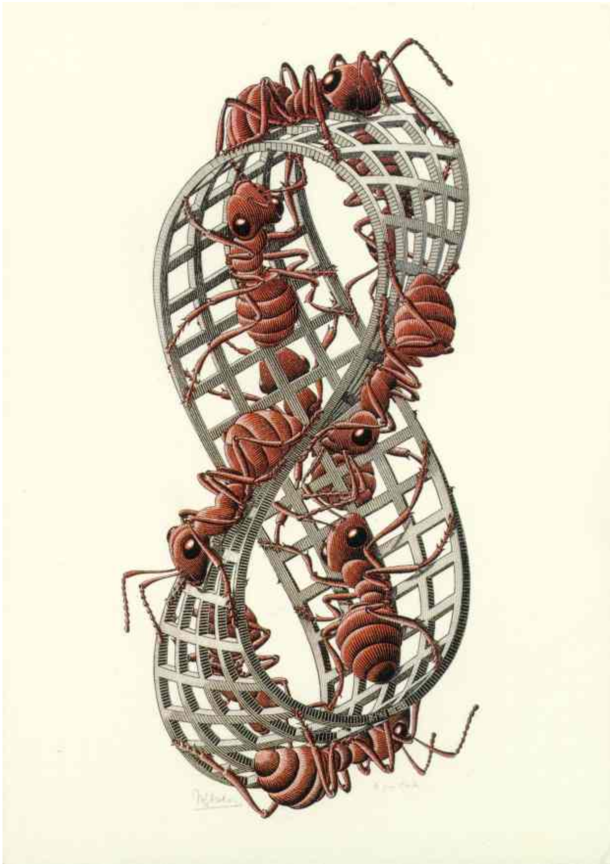
Príklad

$$\boldsymbol{T}_1 = \left\{ \forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x) \right), P(a), \exists x \left(\neg Q(x) \right) \right\},$$

Ak sa nám podarí zostrojiť model týchto množín, potom sú konzistentné
Stojíme pred problémom zostrojiť takú interpretácia $\mathcal{I}$, pre ktorú sú tri sentencie súčasne pravdivé.

- $\mathcal{U}$ je totožné s množinou prirodzených čísel $\mathbb{N}$,
- predikát P je vlastnosť „párne číslo“,
- predikát Q je vlastnosť „deliteľný dvoma“,
- konštanta a=4.

Špecifikovali sme takú interpretáciu $\mathcal{I}$ pre ktorú sú všetky tri sentencie z $\boldsymbol{T}_1$ pravdivé, čiže množina je konzistentná.



THE END