

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Pomocné pojmy	3
1.2	Príklady	5
2	Diferenciálny počet	9
2.1	Úvodné pojmy.	9
2.2	Limita a spojitosť funkcie	9
2.2.1	Príklady	12
2.3	Postupnosti	17
2.3.1	Príklady	18
2.4	Nekonečné rady	19
2.4.1	Príklady	22
2.5	Diferencovateľnosť funkcie	26
2.6	Priebeh funkcie	28
2.6.1	Lokálne extrémny	28
2.6.2	Intervalové vlastnosti funkcií	28
2.6.3	Príklady	29
2.6.4	Monotónnosť	34
2.6.5	Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod	35
2.6.6	Príklady	37
3	Integrálny počet	45
3.1	Určitý integrál	45
3.1.1	Definícia určitého integrálu	45
3.1.2	Vlastnosti určitého integrálu	46
3.1.3	Veta o strednej hodnote	47
3.1.4	Hlavná veta integrálneho počtu	48
3.2	Neurčitý integrál	49
3.2.1	Definícia	49
3.2.2	Metóda per partes	50
3.2.3	Substitučná metóda	50
3.2.4	Niektoré význačné substitúcie	51
3.2.5	Príklady	55

Kapitola 1

Úvod

1.1 Pomocné pojmy

O funkcii budeme hovoriť v tom prípade, keď máme k dispozícii dve množiny A, B a pravidlo (predpis) f , pomocou ktorého je každému prvku $x \in A$ priradený práve jeden prvok $f(x) \in B$. (Zapisujeme $x \mapsto f(x)$.) Teda funkcia je vlastne trojica (A, B, f) , čo budeme zapisovať v tvare

$$f : A \longrightarrow B.$$

V tejto súvislosti množinu A nazývame definičný obor (obor definície) funkcie f . Zvykneme používať aj označenie $A = \mathcal{D}(f)$. Množinu B nazývame koobor funkcie f . Oborom hodnôt funkcie f nazývame množinu

$$\mathcal{H}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Je zrejmé, že vždy platí $\mathcal{H}(f) \subseteq B$. O obore hodnôt má zmysel uvažovať iba v prípade zloženej funkcie a pri inverznej funkcii. Vo zvyšných prípadoch vystačíme s kooborom.

Definícia 1 *Nech $f : A \longrightarrow B$ a $g : B \longrightarrow C$ sú dané funkcie. Potom je definovaná funkcia*

$$h = (g \circ f) : A \longrightarrow C, \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Túto funkciu nazývame zložená funkcia (kompozícia) z funkcií f a g . Funkciu $g : B \longrightarrow C$ nazývame hlavná zložka a funkciu $f : A \longrightarrow B$ vedľajšia zložka zloženej funkcie.

Definícia 2 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow B$.*

- 1. Nech pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Potom hovoríme, že funkcia f je injekcia.*

2. Nech $B = \mathcal{H}(f)$. Potom hovoríme, že funkcia f je surjekcia.

3. Ak f je injekcia a aj surjekcia súčasne, tak ju nazývame bijekcia.

Definícia 3 Nech funkcia $f : A \longrightarrow B$ je bijekcia. Potom je definovaná funkcia

$$f^{-1} : B \longrightarrow A, y \mapsto f^{-1}(y)$$

taká, že

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{práve vtedy, keď} \quad f(x) = y.$$

Funkciu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ nazývame inverzná funkcia funkcie f .

Tento semester sa budeme zaoberať len reálnymi funkciami jednej reálnej premennej. To znamená, že $A \subseteq \mathbb{R}$ a aj $B \subseteq \mathbb{R}$. Pretože vo väčšine prípadov nás nebude zaujímať obor hodnôt funkcie, budeme uvažovať o maximálne možnom koobore, a teda položíme $B = \mathbb{R}$. Túto dohodu budeme zapisovať v tvare

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definícia 4 Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Nech A je taká množina, že pre každé $x \in A$ aj $-x \in A$. Potom:

1. Ak pre každé $x \in A$ platí

$$f(-x) = f(x),$$

tak hovoríme, že funkcia f je párna. (Jej graf je súmerný podľa osi y -ovej.)

2. Ak pre každé $x \in A$ platí

$$f(-x) = -f(x),$$

tak hovoríme, že funkcia f je nepárna. (Jej graf je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.)

Definícia 5 Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Nech existuje $T > 0$ také, že

1. pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: $x \in A$ práve vtedy, keď $x + T \in A$,

2. pre každé $x \in A$ platí $f(x) = f(x + T)$.

Potom hovoríme, že f je periodická funkcia a T je jej perióda. Ak existuje najmenšie $T > 0$, ktoré spĺňa podmienky periodičnosti funkcie, tak ho nazývame najmenšia perióda funkcie f .

Poznamenávame, že nie každá periodická funkcia musí mať najmenšiu periódu (viď konštantná funkcia).

Definícia 6 Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ je daná funkcia. Potom množinu

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

nazývame graf funkcie f .

Definícia 7 Nech $A \subset \mathbb{R}$ a existuje také $M > 0$, že pre každé $x \in A$ platí $|x| \leq M$. Potom hovoríme, že množina A je ohraničená.

Definícia 8 Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Ak jej obor hodnôt $\mathcal{H}(f)$ je ohraničená množina, tak hovoríme, že funkcia f je ohraničená.

1.2 Príklady

Časť I

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sin(2x)} + \log(1-x)$ $[\langle -1, 0 \rangle \cup (0, 1)]$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2 x}$ $[(0, 8)]$.

(c) $f(x) = \sqrt{2 \cos(3x) - \sqrt{3}}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \rangle, k \in \mathbb{Z}]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

(a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
 $[(-\infty, -1) \cup (2, \infty); \text{nie je párna, ani nepárna}]$.

(b) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$ $[\mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{nepárna}]$.

3. Daná je funkcia $f : f(x) = |x| \sqrt{\frac{x^2-4}{|4-x^2|}}$. Nájdite definičný obor, obor funkčných hodnôt, upravte predpis funkcie a potom načrtnite graf.

$[\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty); \mathcal{H}(f) = (2, \infty)]$.

4. Zistite, či k funkcii $\sqrt{1 - \log_2(x-1)}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.

$\left[\begin{array}{l} f : (1, 3) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow (1, 3), f^{-1}(x) = 2^{1-x^2} + 1. \end{array} \right]$.

5. V nasledujúcich príkladoch sú dané funkcie $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Nájdite množiny A, B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a potom nájdite jej predpis.

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, g(x) = \sqrt{x}$.
 $\left[\begin{array}{l} A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), B = \langle 0, \infty \rangle \\ f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}, \\ (g \circ f) : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{array} \right]$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
 $\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty), B = (-\infty, 1) \cup (1, \infty), \\ f : \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty) \rightarrow (-\infty, 1) \cup (1, \infty), f(x) = \sqrt{x}, \\ g : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ (g \circ f) : \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}. \end{array} \right]$.

Časť II

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

(a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2+6}}$ $[(-2, 3)]$.

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$ $[(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup \langle 3, \infty)]$.

(c) $f(x) = \sqrt{-2 + \log_3(x-1)}$ $[\langle 10, \infty)]$.

(d) $f(x) = \sqrt{-2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$ $[(1, \frac{10}{9})]$.

(e) $f(x) = \sqrt{|x-3|-1}$ $[(-\infty, 2) \cup \langle 4, \infty)]$.

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\cotg x}}{\cos x}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi) \}]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

(a) $f(x) = 1 - \sqrt{2 \cos(2x)}$ $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle, \text{ párna}]$.

(b) $f(x) = \ln \left(\frac{3+x}{3-x} \right)$ $[(-3, 3) \text{ nepárna}]$.

(c) $f(x) = \log \left(\frac{x^2-2}{x} \right)$.
 $[(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty), \text{ ani párna, ani nepárna}]$.

(d) $f(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2-1}}$ $[\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle, \text{ nepárna}]$.

(e) $f(x) = \sqrt{1 - \tg x}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \text{ ani párna, ani nepárna}]$.

3. Riešte tieto dve úlohy:

(a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = -5 + 3\sqrt{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle -5, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle -5, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f^{-1}(x) = \left(\frac{x+5}{3} \right)^2. \end{array} \right].$$

(b) Daná je funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$. Nájdite také dve zúženia s maximálnym $\mathcal{D}(f_i)$, $i = 1, 2$, aby k nim existovali inverzné funkcie. Nájdite ich predpisy a načrtnite grafy danej aj inverznej funkcie v oboch prípadoch.

$$\left[\begin{array}{l} f_1 : (-\infty, 2) \rightarrow \langle -4, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f_1^{-1} : \langle -4, \infty \rangle \rightarrow (-\infty, 2), f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4+x}, \\ f_2 : \langle 2, \infty \rangle \rightarrow \langle -4, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f_2^{-1} : \langle -4, \infty \rangle \rightarrow \langle 2, \infty \rangle, f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}. \end{array} \right].$$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , ak

(a) $f(x) = \arcsin(3x-5)$ $[\langle \frac{4}{3}, 2 \rangle]$.

- (b) $f(x) = \arcsin \frac{3}{x-2}$ $[(-\infty, -1) \cup \langle 5, \infty)]$.
 (c) $f(x) = \arccos(x^2 - 2x)$ $[\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle]$.
 (d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-5}$ $[\mathbb{R} \setminus \{5\}]$.
 (e) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}}$ $[(-\infty, 2) \cup \langle 3, \infty)]$.
 (f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$ $[\langle -3, 3 \rangle \setminus \{1\}]$.

5. Dané sú funkcie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis, ak:

- (a) $f(x) = \ln(5-x)$, $g(x) = 2 + \sqrt{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} A = (-\infty, 4), B = \langle 0, \infty \rangle, \\ f : (-\infty, 4) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f(x) = \ln(5-x), \\ g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 + \sqrt{x}, \\ (g \circ f) : (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 + \sqrt{\ln(5-x)}. \end{array} \right].$$

 (b) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(5-x)$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, 9 \rangle, B = (-\infty, 5), \\ f : \langle 0, 9 \rangle \rightarrow (-\infty, 5), f(x) = 2 + \sqrt{x}, \\ g : (-\infty, 5) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(5-x), \\ (g \circ f) : \langle 0, 9 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(3 - \sqrt{x}). \end{array} \right].$$

Časť III

1. Nakreslite graf funkcie f , ak

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$,
 (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
 (c) $f(x) = 2^x$,
 (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,
 (e) $f(x) = \log_2 x$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

- (a) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(5-x)}$ $[\langle -3, 5 \rangle]$.
 (b) $f(x) = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$ $[\langle \frac{7}{2}, \infty \rangle]$.
 (c) $f(x) = \log_5 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \right)$ $[\langle 0, 4 \rangle]$.
 (d) $f(x) = \log_3 \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2+x-x^2} \right)$ $[\langle 0, 2 \rangle]$.
 (e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x}$ $[\langle -1, 0 \rangle \cup (0, 3)]$.
 (f) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $[(-\infty, -3) \cup (5, \infty)]$.

- (g) $f(x) = \ln[1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16)]$ $[(2, 3)]$.
3. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď
- (a) $f(x) = x\sqrt{6 - 2|x|}$ $[\langle -3, 3 \rangle, \text{ nepárna}]$.
- (b) $f(x) = \ln(5 - |2x - 3|)$ $[(-1, 4) \text{ ani párna, ani nepárna}]$.
- (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|3x|}$ $[\mathbb{R} \setminus (-1, 1), \text{ párna}]$.
- (d) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\ln(1 - x)}$ $[(-1, 0) \cup (0, 1), \text{ ani párna, ani nepárna}]$.
- (e) $f(x) = \frac{|x|}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$ $[(-\infty, -3) \cup (3, \infty) \setminus \{-5, 5\}, \text{ párna}]$.
- (f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(2x)}$. .. $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \rangle, \text{ ani párna, ani nepárna}]$.
4. Riešte nasledujúce dve úlohy:
- (a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = 3 + \arcsin(2x + 1)$.

$$\left[\begin{array}{l} f : \langle -1, 0 \rangle \rightarrow \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2} \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 0 \rangle, f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(x - 3). \end{array} \right].$$
- (b) Vyšetrite, či funkcia $f : (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, -7)$, $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ je bijekcia. Ak áno nájdite k nej inverznú funkciu.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Daná funkcia je bijekcia,} \\ f^{-1} : (-\infty, -7) \rightarrow (-\infty, 0), f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{-x - 3}. \end{array} \right].$$
5. Dané sú funkcie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis, ak:
- (a) $f(x) = 6^x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, \infty \rangle, B = \langle 1, \infty \rangle, \\ f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 1, \infty \rangle, f(x) = 6^x, \\ g : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x - 1}, \\ (g \circ f) : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{6^x - 1}. \end{array} \right].$$
- (b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = 6^x$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 1, \infty \rangle, B = \mathbb{R}, \\ f : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - 1}, \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6^x, \\ (g \circ f) : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 6^{\sqrt{x - 1}}. \end{array} \right].$$

Kapitola 2

Diferenciálny počet

2.1 Úvodné pojmy.

Definícia 9 *Nech $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Prstencovým epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.*

Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ nazývame ε -ovým okolím bodu ∞ . Prstencové ε -ové okolie $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty)$ definujeme predpisom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 10 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Definícia 11 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Budeme hovoriť, že bod a je hromadným bodom množiny A , ak v každom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a)$ leží bod množiny A .*

2.2 Limita a spojitost' funkcie

Definícia 12 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ a a je hromadným bodom množiny A . Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje $\mathcal{O}_\delta^o(a)$ také, že $f(\mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, hovoríme, že funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ má v bode a limitu b . Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.*

Definícia 13 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A . Ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, budeme hovoriť, že funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a .*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in C \subset A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá na množine C .

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá.

Veta 1 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b_1 + b_2$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2$,
3. ak $b_2 \neq 0$ a aj $g(x) \neq 0$ pre každé $x \in A$, tak

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{b_1}{b_2},$$

4. $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |b_1|$.

Definícia 14 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subset A$. Potom funkciu $(f|C) : C \rightarrow \mathbb{R}$, $(f|C)(x) = f(x)$ pre každé $x \in C$, nazývame zúženie funkcie f na množine C .

Veta 2 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $C \subset A$ a $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny C . Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Potom aj $\lim_{x \rightarrow a} (f|C)(x) = b$.

Definícia 15 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Nech $C = (-\infty, a) \cap A$ a $D = (a, \infty) \cap A$. Ak a je hromadným bodom množiny C , tak $\lim_{x \rightarrow a} (f|C)(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ nazývame limita funkcie f v bode a zľava.

Podobne, ak a je hromadným bodom množiny D , tak $\lim_{x \rightarrow a} (f|D)(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ nazývame limita funkcie f v bode a sprava.

Veta 3 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Ak $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$, tak aj $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

Podobne, ak $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D = (a, \infty) \cap A$, potom $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$.

Veta 4 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$ a aj hromadným bodom množiny $D = (a, \infty) \cap A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. V prípade existencie potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Definícia 16 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$. Nech $C = (-\infty, a) \cap A$ a $D = (a, \infty) \cap A$.

Ak a je hromadným bodom množiny C a funkcia $(f|C)$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a zľava.

Ak a je hromadným bodom množiny D a funkcia $(f|D)$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a sprava.

Veta 5 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in A$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$ a aj hromadným bodom množiny $D = (a, \infty) \cap A$. Potom funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď je spojitá v bode a sprava aj zľava.

Veta 6 Nech $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ a $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$. Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- Pre každé $x \in A \setminus \{a\}$ je $f(x) \neq b$.

- Funkcia g je spojitá v bode b .

Potom $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Veta 7 Nech $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ je spojitá v bode a a funkcia $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode $f(a)$. Potom funkcia $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a .

Dôsledok 1 Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.

Definícia 17 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{\infty, -\infty\}$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta 8 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\infty$.

Veta 9 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \infty$.

Veta 10 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $k > 0$ a $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \infty$.

Veta 11 Nech $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = 0$.

Veta 12 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = \infty$.

Veta 13 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

1. Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x)$, tak v prípade existencie vlastných limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, tak existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Veta 14 Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá (na intervale $\langle a, b \rangle$.) Potom:

1. Je na intervale $\langle a, b \rangle$ ohraničená.
2. Nadobúda na intervale $\langle a, b \rangle$ minimum a aj maximum. To znamená, že existujú $c, C \in \langle a, b \rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(c) \leq f(x) \leq f(C)$.
3. Ak $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$,

Dôsledok 2 (Veta o medzihodnotách) Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $a, b \in I$ sú ľubovoľné a $d \in \mathbb{R}$ je také, že $\min\{f(a), f(b)\} \leq d \leq \max\{f(a), f(b)\}$. Potom existuje $c \in \langle \min\{a, b\}, \max\{a, b\} \rangle$ také, že $f(c) = d$.

2.2.1 Príklady

Časť I

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 3}$ $[-\frac{3}{2}]$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(2x)} + \ln(1-x^2) \right]$ $[\frac{1}{8}]$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg}(6x)}$ $[\frac{5}{6}]$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$ $[e^6]$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-2x}{2+5x} \right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$ $[\sqrt{\frac{3}{2}}]$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^5 + 5x^3 - 7x + 10)$ $[-\infty]$.
- (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 5x^3 - 7x + 10)$ $[\infty]$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 5}{2x^3 - 4x + 1}$ $[0]$.
- (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 7}{7x^3 - 3x^2 - 6x + 9}$ $[\frac{4}{7}]$.
- (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + x - 1}$ $[\infty]$.
- (k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $[1]$.
- (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $[1]$.
- (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $[\infty]$.
- (n) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $[\infty]$.
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} (2^{\cot x} - 1)$ [Neexistuje].
- (p) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2^{\cot x} - 1)$ $[1]$.
- (q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2^{\cot x} - 1)$ $[0]$.
- (r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e^{-1}]$.

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pre } x < 0, \\ -\frac{1}{x} \cos x & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $[-\infty]$.

3. Nech $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$. Vypočítajte

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ $[1]$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $[1]$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)$ $[\infty]$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ $[-\infty]$.

Načrtnite graf funkcie.

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

$$(a) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{1-x} & \text{pre } x \neq 1, \\ -3 & \text{pre } x = 1. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 = f(1), \text{ teda je v bode } a \text{ spojitá}].$

$$(b) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ neexistuje, teda nie je v bode } a \text{ spojitá}].$

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) \quad a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x^2+x+6}{-x^2+3x-2} & \text{pre } x \neq 2 \quad \text{a} \quad x \neq 1, \\ p & \text{pre } x = 2. \end{cases} \quad \dots [p = 3].$$

$$(b) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} p \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right) & \text{pre } x < 0, \\ \frac{8-x}{p} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \quad \dots [p \in \{-2, 2\}].$$

$$(c) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{p}{2} & \text{pre } x \leq 1, \\ -x + \frac{5p}{4} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$$

Potom načrtnite graf funkcie. $\dots [p = 4].$

Časť II

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2}. \quad \dots [-1].$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}. \quad \dots [4\sqrt{3}].$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4}. \quad \dots [\frac{1}{5}].$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x^2+3x-4}. \quad \dots [\text{Neexistuje}].$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 3x + 7x^2 - 4x^3). \quad \dots [-\infty].$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{5x^3-3x^2+x+2}. \quad \dots [0].$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-3x^2+x+2}{2x^2+1}. \quad \dots [-\infty].$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4+2x-3}{10x^4-4x^3+1}. \quad \dots [-\frac{1}{2}].$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x]. \quad \dots [1].$$

$$(j) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2} \right)^{2x-1}. \quad \dots [e^3].$$

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{pre } x < 3, \\ (x-3)^2 \sin \frac{1}{x-3} & \text{pre } x > 3. \end{cases}$
 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ [Neexistuje].

3. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} & \text{pre } -\frac{\pi}{6} < x < 0, \\ 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{pre } 0 < x < \frac{\pi}{6}. \end{cases}$
 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ [3].

4. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞ , $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+7x+10}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -5+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \infty \end{array} \right].$$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty \end{array} \right].$$

(c) $f(x) = \frac{x^2-x^3}{|x-1|}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, & \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1, \end{array} \right].$$

5. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

(a) $a = 2$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6x-20}{x^3-3x^2+2x} & \text{pre } x \neq 2, x \neq 0, x \neq 1, \\ 7 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 = f(2), \text{ teda je v bode 2 spojitá}].$

(b) $a = 4$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}} & \text{pre } x \neq 4, \\ 2 & \text{pre } x = 4. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4\sqrt{3} \neq f(4) = 2, \text{ teda nie je v bode 4 spojitá}].$

(c) $a = 0$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x \cos(3x)} & \text{pre } x \neq 0, \\ \frac{x+2}{x^2+1} & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2, \text{ teda je v bode 0 spojitá}].$

(d) $a = 1$, $f(x) = \begin{cases} (x-1) \cos \frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ 2x^2 - 1 & \text{pre } x \geq 1. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ neexistuje, teda nie je v 1 spojitá}].$

$$(e) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pre } x \leq 0, \\ \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ neexistuje, teda nie je v } 0 \text{ spojitá}].$

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{2x} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \frac{5}{2}].$$

$$(b) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p \text{ neexistuje}].$$

7. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

$$(a) \quad a = 3, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{pre } x \neq 3, \\ p & \text{pre } x = 3. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 1].$$

$$(b) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} px^2 & \text{pre } x \leq 1, \\ \frac{6}{p} - \frac{px}{2} & \text{pre } x > 1. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \pm 2].$$

$$(c) \quad a = -2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}x & \text{pre } x \neq -2, \\ p & \text{pre } x = -2. \end{cases} \dots\dots\dots [p \text{ neexistuje}].$$

8. Dá sa funkcia $f(x)$ dodefinovať v bode a tak, aby bola v ňom spojitá? (V prípade kladnej odpovede napíšte jej predpis!)

$$(a) \quad a = 1, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}. \quad \dots\dots \left[f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{pre } x \neq 1, \\ \frac{4}{3} & \text{pre } x = 1. \end{cases} \right].$$

$$(b) \quad a = 2, \quad f(x) = \frac{x}{x-2}. \quad \dots [\lim_{x \rightarrow 2} \text{ neexistuje, nedá sa dodefinovať}].$$

$$(c) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} & \text{pre } x < 0, \\ \frac{x+9}{x+3} & \text{pre } x > 0. \end{cases} \dots\dots\dots [\text{áno, } f(0) = 3].$$

Časť III

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}. \quad \dots\dots\dots [1].$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 2x - 3}. \quad \dots\dots\dots [0].$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{x+3}}{x+2}. \quad \dots\dots\dots [-\frac{1}{2}].$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-1} - 2}. \quad \dots\dots\dots [20].$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + 3x^2 + 7x^3 - 4x^5). \quad \dots\dots\dots [-\infty].$$

- (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^3 + 5x^2 - 3} \dots\dots\dots [0].$
 (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - 2x + 1} \dots\dots\dots [-\infty].$
 (h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + x - 3x^2 - 4x^3}{5x^3 - 2x + 1} \dots\dots\dots [-\frac{4}{5}].$
 (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x+2} \dots\dots\dots [e^2].$
2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi x}{x - \pi} & \text{pre } x < \pi, \\ (x \sin(\frac{3\pi}{2} - x)) & \text{pre } x > \pi. \end{cases}$
 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \dots\dots\dots [\pi].$

3. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞ , $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

- (a) $f(x) = \frac{3}{2+x}.$
 $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty \end{array} \right].$
 (b) $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 9}.$
 $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \infty \end{array} \right].$
 (c) $f(x) = \frac{3-x}{x^2 - 2x - 3}.$
 $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{4}, & \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \infty, & \end{array} \right].$

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

- (a) $a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{pre } x \neq 2, \\ 4 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$
 $[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12 \neq f(2), \text{ teda nie je v bode } 2 \text{ spojitá}].$
 (b) $a = \pi, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(2x)^2 - 4\pi x}{\pi - x} & \text{pre } x < \pi, \\ 4x \sin(x - \frac{3\pi}{2}) & \text{pre } x \geq \pi. \end{cases}$
 $[\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -4\pi = f(\pi), \text{ teda je v bode } \pi \text{ spojitá}].$
 (c) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)\operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ \pi & \text{pre } x = 1, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$
 $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \neq f(1) = \pi, \text{ teda nie je v bode } 1 \text{ spojitá}].$

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) \quad a = 5, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2-4}{x-5} & \text{pre } x \neq 5, \\ p & \text{pre } x = 5. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 4].$$

$$(b) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} p^2x & \text{pre } x < 1, \\ \operatorname{ptg} \frac{\pi x}{4} & \text{pre } x \geq 1. \end{cases} \dots\dots\dots [p \in \{0, 1\}].$$

$$(c) \quad a = 4, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4p} - 1 & \text{pre } x \leq 4, \\ \frac{2x^2-8x}{x-4} & \text{pre } x > 4. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \frac{1}{9}].$$

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

$$(a) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{px} & \text{pre } x < 0, \\ p - x & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 1].$$

$$(b) \quad a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} x + p & \text{pre } x < 2, \\ -2 & \text{pre } x = 2, \\ \frac{p}{x} & \text{pre } x > 2. \end{cases} \dots\dots\dots [p = -4].$$

7. Zistite, či k funkcii $f : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.

$$\left[\begin{array}{l} f : (-\infty, -1) \rightarrow (0, \infty) \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, -1), \quad f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{array} \right].$$

2.3 Postupnosti

Definícia 18 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Hodnotu $f(n) = a_n$ nazývame n -tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare $(a_n)_{n=1}^\infty$.*

Ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je konvergentná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.

Veta 15 *Postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je konvergentná a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}^+$ platí*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Definícia 19 *Nech $(a_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ je*

- $a_n < a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je rýdzo rastúca;
- $a_n \leq a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je rastúca;
- $a_n > a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je rýdzo klesajúca;
- $a_n \geq a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je klesajúca.

Uvedené postupnosti sa nazývajú monotónne postupnosti.

Veta 16 Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná.

Definícia 20 Nech $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, $f(k) = n_k$ je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel a $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(n) = a_n$ je postupnosť reálnych čísel. Potom zloženú funkciu (ktorá je tiež postupnosťou) $g \circ f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(n_k) = a_{n_k}$ nazývame vybraná postupnosť z postupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ pomocou postupnosti $(n_k)_{k=1}^\infty$.

Veta 17 Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Potom pre každú jej vybranú postupnosť $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Veta 18 (Bolzano-Cauchyho kritérium konverencie postupnosti) Postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $m, n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.3.1 Príklady

Časť I

- Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$, a nájdite príslušné n_0 , ak $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ [$n_0 = 4999$].
- Nájdite n -tý člen postupnosti $\{0, 9; 0, 99; 0, 999; \dots\}$ a vypočítajte jej limitu. [$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$].
- Zistite, či sú postupnosti konvergentné
 - $\{1 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^\infty$ [Divergentná].
 - $\left\{\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}_{n=1}^\infty$ [Konverguje k $-\frac{1}{2}$].
- Vypočítajte limitu postupnosti, ak
 - $\left\{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{\frac{n}{4n+1}}\right\}_{n=1}^\infty$ [$\frac{3}{2}$].
 - $\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^\infty$ [0].
 - $\{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-4}\}_{n=2}^\infty$ [0].

Časť II

- Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, nájdite príslušné n_0 , ak $\varepsilon = \frac{1}{10}$ [$n_0 = 19$].
- Vypočítajte limitu postupnosti, ak:

- (a) $a_n = \sqrt{1+n^2} - n$ $[0]$.
 (b) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $[\frac{1}{2}]$.
 (c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ $[\frac{1}{2}]$.
 (d) $a_n = (1 + \frac{1}{4n})^{1-3n}$ $[e^{-\frac{3}{4}}]$.

2.4 Nekonečné rady

Definícia 21 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n nazývame n -tý člen radu.

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je priradená taká postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, že platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.

Definícia 22 Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbb{R}$, tak rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$$

nazývame súčin radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a konštanty c .

Veta 19 Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech tieto rady sú konvergentné a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. Potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nech $c \in \mathbb{R}$ a $c \neq 0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V prípade konverencie, ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = cs = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definícia 23 *Rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

nazývame geometrický rad. Číslo q nazývame kvocient geometrického radu.

Veta 20 *Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ je konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$. V prípade konverencie platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Veta 21 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konverencie nekonečného radu) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $m > n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

Veta 22 *(Nutná podmienka konverencie nekonečného radu) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Definícia 24 *Rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ nazývame zvyšok radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po k -tom člene.*

Veta 23 *Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný jeho zvyšok*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

po (ľubovoľnom) k -tom člene.

Definícia 25 *Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. (Je zrejmé, že $0 \leq b_n$.) Potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 24 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 3 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný, tak je divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definícia 26 *Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentný, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný.*

Poznámka 1 *Pretože $|a_n| \leq |a_n|$, je zrejmé, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Z toho už vyplýva, ak daný rad je absolútne konvergentný, tak je aj konvergentný. Tvrdenie neplatí v opačnom slede.*

Veta 25 *(d'Alembertovo kritérium konverencie radu) Nech $a_n \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Veta 26 *(Cauchyho kritérium konverencie radu) Nech*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Definícia 27 *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 27 *(Leibnitzovo kritérium konverencie radu) Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ a postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný.*

Definícia 28 *Rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

nazývame mocninovým radom. Číslo $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva stred radu. Čísla a_n sa nazývajú koeficienty mocninového radu.

Veta 28 Pre každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $0 \leq \rho \leq \infty$ také, že daný rad konverguje pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ a diverguje pre každé $x \in (-\infty, a-\rho) \cup (a+\rho, \infty)$. Hodnotu ρ nazývame polomer konvergenzie mocninového radu.

Daný mocninový rad konverguje len pre $x = a$ práve vtedy, keď $\rho = 0$. Rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $\rho = \infty$.

2.4.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)} \cdot \dots\dots\dots [\frac{13}{36}].$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}). \dots\dots\dots [0].$

2. Vyšetrite konvergenciu geometrického radu

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n} \cdot \dots\dots\dots [\text{Konverguje, } s = \frac{5}{6}].$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n} \cdot \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} \cdot \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n} \cdot \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n} \cdot \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \cdot \left(\frac{1}{n} + n\right)\right) \cdot \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1} \cdot \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+2n+5} \cdot \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite množinu všetkých čísel, pre ktoré dané rady konvergujú:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)} \cdot (x-4)^n$ $[\langle 2, 6 \rangle]$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot x^n$ $[\langle -1, 1 \rangle]$.
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)} \cdot (x-4)^{2n}$ $[(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})]$.
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+1)^n$ $[x \in \{-1\}]$.

Časť II

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$ $[\frac{5}{6}]$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}})$ $[e + \sqrt{e} - 2]$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{3^{n-1}}$ $[\frac{9}{4}]$.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+5(-1)^{n+1}}{4^n}$ $[0]$.

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ [Konverguje].
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$ [Konverguje].
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{3n}$ [Diverguje].
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$ [Konverguje].
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ [Diverguje].
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{3^n}$ [Konverguje].
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ [Konverguje].

- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ [Diverguje].
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{5n}$ [Konverguje].
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ [Diverguje].
- (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$ [Konverguje].
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{n^5+4n^2+2}$ [Konverguje].
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5}{n^5+3n^4+1}$ [Diverguje].
- (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergenzie:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3n}}} \cdot (x-3)^n$ [$x \in \langle 2, 4 \rangle$, $\rho = 1$].
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$ [$x \in \mathbb{R}$, $\rho = \infty$].
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x-4)^n$ [$x \in \langle \frac{11}{3}, \frac{13}{3} \rangle$, $\rho = \frac{1}{3}$].
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n} \cdot (x+3)^n$ [$x \in \langle -8, 2 \rangle$, $\rho = 5$].
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot (x-2)^{2n}$ [$x \in (0, 4)$, $\rho = 2$].

Časť III

1. Pomocou definície nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ [$\frac{1}{3}$].
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$ [$\frac{3}{2}$].
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+4}{5^{n-1}}$ [$\frac{25}{6}$].

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6+4(-1)^{n+1}}{3^n}. \dots\dots\dots [6].$$

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{5^n}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^3}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6^{n+1}}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1} \right)^{2n}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)^2. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2+2n}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^4+2n^2+3}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+2n+1}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergenencie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 \cdot (x-1)^n. \dots\dots\dots [x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \rho = \frac{1}{2}].$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \cdot (x-2)^n. \dots\dots\dots [x \in \mathbb{R}, \rho = \infty].$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)7^n} \cdot x^n. \dots\dots\dots [x \in \langle -7, 7 \rangle, \rho = 7].$$

2.5 Diferencovateľnosť funkcie

Definícia 29 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A . Nech existuje vlastná limita*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a . Hodnotu $f'(a)$ nazývame derivácia funkcie f v bode a .

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $a \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M . Ak funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná na množine A , tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Definícia 30 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $A_1 = \{a \in A \mid \text{existuje } f'(a)\}$. Potom funkciu $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ nazývame derivácia funkcie f .*

Ak funkcia $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je v bode a spojitاً diferencovateľná.

Ak funkcia $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná v každom bode množiny $M \subseteq A_1$, tak hovoríme, že je spojitاً diferencovateľná na množine M .

Ak $A_1 = A$ a funkcia f je spojitاً diferencovateľná na množine A , tak zjednodušene hovoríme, že funkcia f je spojitاً diferencovateľná funkcia.

Veta 29 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom existuje taká funkcia $p : A \rightarrow \mathbb{R}$, že:*

1. $p(a) = 0$,
2. funkcia $p : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a . To znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) = 0$,
3. pre každé $x \in A$ platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + p(x)(x - a).$$

Veta 30 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 31 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú diferencovateľné v bode $a \in A$. Potom*

- Funkcia $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- Funkcia $(f \cdot g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

za predpokladu, že funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je na množine A definovaná, a teda aj $g(a) \neq 0$.

Veta 32 (Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech funkcia $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$ a funkcia $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $f(a) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = ((g' \circ f)(a))f'(a) = ((g' \circ f) \cdot f')(a).$$

Veta 33 Nech I je interval a funkcia $f : I \rightarrow J$ je spojitá bijekcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in I$. Nech $f'(a) \neq 0$. Potom jej inverzná funkcia $f^{-1} : J \rightarrow I$ je diferencovateľná v bode $b = f(a)$ a platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}.$$

Definícia 31 Nech je daný mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Potom hovoríme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

vznikol z daného mocninového radu derivovaním člen po člene.

Veta 34 Nech ρ je polomerom konverencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Nech pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = s(x).$$

Potom ρ je polomerom konverencie aj radu $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ a pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots = s'(x).$$

2.6 Pribeh funkcie

2.6.1 Lokálne extrémny

Definícia 32 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$.*

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}_\delta^o(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) < f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdže lokálne maximum.*
2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) > f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdže lokálne minimum.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \leq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne maximum.*
2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \geq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne minimum.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémny.

Definícia 33 *Nech I je ľubovoľný interval s koncovými bodmi a, b . Potom vnútorom intervalu I nazývame interval $\text{Int}(I) = (a, b) \subseteq I$.*

Veta 35 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech A je interval a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *$a \in \text{Int}(A)$ je bod z vnútra intervalu A .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode a .*
3. *Funkcia f má v bode a lokálny extrém.*

Potom $f'(a) = 0$.

2.6.2 Intervalové vlastnosti funkcií

Veta 36 *(Rolleho veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) .*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f'(c) = 0$.

Veta 37 *(Lagrangeova veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*

2. Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) .

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dôsledok 4 Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia. Nech pre každé $x \in I$ je $f'(x) = 0$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $f(x) = c$ pre každé $x \in I$.

Veta 38 (Cauchyho veta) Nech sú dané funkcie $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorých platí:

1. Sú spojité (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).
2. Sú diferencovateľné na otvorenom intervale (a, b) .
3. $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)(c) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Veta 39 (l'Hospitalovo pravidlo) Nech sú dané také funkcie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že o nich platí:

1. Sú diferencovateľné (na intervale (a, b)).
2. $g(x) \neq 0$ a $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Ak za týchto predpokladov existuje $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, tak existuje aj

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Poznámka 2 Veta platí v tom istom znení, keď v nej tretiu podmienku $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nahradíme podmienkou $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

2.6.3 Príklady

Časť I

1. Zderivujte funkciu $f(x) = \sin(\cos 2x)$ $[(\cos(\cos 2x))(-\sin 2x)2]$.
2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:

- (a) $a = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x}. \quad \dots\dots\dots [f'(2) = -\frac{1}{4}] .$
 (b) $a = 1, \quad f(x) = \sqrt{|x-1|}. \quad \dots\dots\dots [f'(1) \text{ neexistuje}] .$
3. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ v bode $A = (0, ?) \dots\dots\dots [A = (0, 1), \quad t : x + y - 1 = 0, \quad n : x - y + 1 = 0] .$
4. Nájdite rovnice dotyčníc k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, ktoré sú kolmé na priamku $p : 2x + 4y - 3 = 0$.
 $[t_1 : 2x - y - 1 = 0, \quad t_2 : 2x - y + 1 = 0] .$
5. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} . \quad \dots\dots\dots [-1] .$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 5x)} . \quad \dots\dots\dots [1] .$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{4} \right) . \quad \dots\dots\dots \left[-\frac{4}{\pi} \right] .$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x . \quad \dots\dots\dots [1] .$
6. Vyšetrite spojitost funkcie

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \log_{10}(1-x) & \text{pre } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{pre } x = 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}} & \text{pre } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

v bode 1.

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = e. \quad \text{Funkcia } f \text{ nemôže byť spojitá} \\ \text{v bode 1, lebo } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ neexistuje, a teda sa nerovná } f(1). \end{array} \right] .$$

Časť II

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

- (a) $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{-\sin x}{2 \cos x} \right] .$
 (b) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}. \quad \dots\dots\dots \left[2^{\operatorname{tg} x} \frac{\ln 2}{\cos^2 x} \right] .$
 (c) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}. \quad \dots\dots\dots \left[x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \right] .$
 (d) $f(x) = \operatorname{arccotg}^3(\sqrt{x}). \quad \dots\dots\dots \left[-\frac{3 \operatorname{arccotg}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+x)} \right] .$
 (e) $f(x) = \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right). \quad \dots\dots\dots \left[\frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}} \right] .$
 (f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{1+x^2}. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{x^2-1}{x^2+(1+x^2)^2} \right] .$
 (g) $f(x) = 10^{\sqrt{x}} x. \quad \dots\dots\dots \left[10^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\ln 10 \sqrt{x}}{2} \right) \right] .$

- (h) $f(x) = (\ln x)^x$ $[(\ln x)^x (\ln \ln x + \frac{1}{\ln x})]$.
2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:
- (a) $a = 2$, $f(x) = |3x - 6|$ [neexistuje].
- (b) $a = 4$, $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ $[\frac{1}{12}]$.
- (c) $a = 0$, $f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{pre } x \leq 0, \\ x^2 & \text{pre } x > 0. \end{cases}$ $[0]$.
3. Zistite, či je funkcia
- $$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$
- (a) spojitá v bode $a = 0$,
- (b) diferencovateľná v bode $a = 0$.
- [a) Je spojitá v bode $a = 0$,
b) Nie je diferencovateľná v bode 0 .]
4. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A , ak $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$, $A = (2, ?)$.
- $[A = (2, 2), t : x + y - 4 = 0, n : x - y = 0.]$.
5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f : f(x) = e^{1-x^2}$, ktorá prechádza priesečníkom grafu funkcie s priamkou $y = 1$.
- [Priesečníky $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (-1, 1)$
 $t_1 : 2x + y - 3 = 0$, $n_1 : x - 2y + 1 = 0$
 $t_2 : 2x - y + 3 = 0$, $n_2 : x + 2y - 1 = 0$]
6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 3$, ak dotyčnica t je rovnobežná s priamkou $p : 3x - y + 5 = 0$.
- $[t : 12x - 4y - 13 = 0, n : 4x + 12y - 61 = 0]$.
7. Zistite, v ktorom bode je dotyčnica ku grafu funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ rovnobežná s osou o_x $[(e, \frac{1}{e})]$.
8. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln x$, ak dotyčnica je kolmá na priamku $p : x + 2y - 2 = 0$.
- $[t : y - 2x + 1 + \ln 2 = 0, n : 4y + 2x - 1 + 4 \ln 2 = 0]$.
9. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$ $[-1]$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ $[2]$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1) \cotg x$ $[1]$.

- (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \dots [1]$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \dots [1]$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x \dots \left[e^{-\frac{2}{\pi}}\right]$.
 (g) $\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \dots \left[\frac{1}{2}\right]$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \dots \left[\frac{1}{2}\right]$.
 (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\cotg(x-3)} \dots [e^{\cotg 3}]$.

10. Vyšetrite spojitost funkcie

$$f: \left\langle -\frac{\pi}{2}, 1 \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{pre } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ x^2 \ln x & \text{pre } x \in (0, 1). \end{cases}$$

[Funkcia nie je spojitá v bode 0].

11. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode 0, ak:

- (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \dots [0]$.
 (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ x^3, & x \leq 0 \end{cases} \dots [0]$.

12. Zistite, či funkcia

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{pre } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá a vypočítajte $f'(0)$.

[Funkcia je spojitá, $f'(0) = -\frac{1}{12}$].

Časť III

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

- (a) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{x}} \dots \left[\frac{(-\sin 2x) \sqrt[5]{x} - \frac{\cos^2 x}{5 \sqrt[5]{x^4}}}{\sqrt[5]{x^2}} \right]$.
 (b) $f(x) = 3^{\cotg x} \arcsin x \dots \left[3^{\cotg x} \left(-\frac{(\ln 3) \arcsin x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right]$.
 (c) $f(x) = \log_5(\operatorname{tg} x^3) \dots \left[\frac{3x^2}{(\operatorname{tg} x^3)(\ln 5)(\cos^2 x^3)} \right]$.
 (d) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{5x})) \dots \left[\frac{5}{2(\operatorname{arctg} \sqrt{5x})(1+5x)\sqrt{5x}} \right]$.

- (e) $f(x) = (3x)^{\sin x}$ $\left[(3x)^{\sin x} \left((\cos x)(\ln 3x) + \frac{\sin x}{x}\right)\right]$.
- (f) $f(x) = (\cotg x)^{\arccos x}$.
 $\left[(\cotg x)^{\arccos x} \left(\frac{-\ln(\cotg x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{(\cotg x)(\sin^2 x)}\right)\right]$.
- (g) $f(x) = e^{x^3} \operatorname{arccotg} x$ $\left[e^{x^3} \left(3x^2 \operatorname{arccotg} x - \frac{1}{1+x^2}\right)\right]$.

2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:

- (a) $a = 2$, $f(x) = \sqrt{4x+1}$ $[f'(2) = \frac{2}{3}]$.
- (b) $a = 3$, $f(x) = |x-3|$ $[f'(3) \text{ neexistuje}]$.

3. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1, \\ 0 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$$

- (a) spojitá v bode $a = 1$,
 (b) diferencovateľná v bode $a = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) Je spojitá v bode } a = 1, \\ \text{b) Je diferencovateľná v bode } 1 \text{ a } f'(1) = 0. \end{array} \right]$$

4. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 3x + 5$, ak t je rovnobežná s priamkou $p: x - y + 1 = 0$.

$$[A = (2, 3), t: x - y + 1 = 0, n: x + y - 5 = 0].$$

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \operatorname{tg} x$ v bode $A = (\frac{\pi}{4}, ?)$.

$$[A = (\frac{\pi}{4}, 1), t: y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}, n: y = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{\pi}{8}].$$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x-2)$, ak dotyčnica t je kolmá na priamku $p: x + y = 0$.

$$[A = (3, 0), t: y = x - 3, n: y = -x + 3].$$

7. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ $[\frac{1}{3}]$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \ln(1-x)$ $[0]$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x})$ $[0]$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ $[1]$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^3]$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ $[\frac{1}{2}]$.

8. Daná je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} & \text{pre } x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x} & \text{pre } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \text{ neexistuje} \right].$$

9. Zistite, či funkcia $f(x)$ je spojitá v bode $a = 0$, ak:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \cotg x - \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [\text{Je}].$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{pre } x \leq 0, \\ (\sin x)^x & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$$[\text{Nie je, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \neq f(0) = 3].$$

2.6.4 Monotónnosť

Definícia 34 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x_2$ je*

1. $f(x_1) < f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo rastúca funkcia.
2. $f(x_1) > f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo klesajúca funkcia.
3. $f(x_1) \leq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rastúca funkcia.
4. $f(x_1) \geq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je klesajúca funkcia.

Všetky uvedené funkcie nazývame monotónne funkcie. Funkcie uvedené v prvých dvoch bodoch sa nazývajú rýdzo monotónne funkcie.

Definícia 35 *Nech je daná funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|I : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) na intervale I .*

Veta 40 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\operatorname{Int}(I)$ intervalu I .*
3. *Pre každé $x \in \operatorname{Int}(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*

Potom je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rastúca funkcia (na celom intervale I).

Veta 41 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .*
3. *Pre každé $x \in \text{Int}(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*
4. *Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f'(x) = 0$ pre každé $x \in J$.*

Potom je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rýdzo rastúca funkcia (na celom intervale I).

2.6.5 Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod

Definícia 36 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí:*

1. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konvexná funkcia.*
2. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konkávna funkcia.*
3. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konvexná funkcia.*
4. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konkávna funkcia.*

Definícia 37 *Nech je daná funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|I : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) na intervale I .*

Veta 42 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Funkcia f je rýdzo konvexná práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

2. *Funkcia f je rýdzo konkávna práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

3. *Funkcia f je konvexná práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

4. Funkcia f je konkávna práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Veta 43 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f' : \text{Int}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca)

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Veta 44 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$, $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$) pre každé $x \in \text{Int}(I)$.

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Veta 45 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pre každé $x \in \text{Int}(I)$.
4. Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f''(x) = 0$ pre každé $x \in J$.

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Definícia 38 Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in \text{Int}(I)$. Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a) \subset \text{Int}(I)$, že je splnená jedna z nasledujúcich podmienok

1. Funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervale $(a - \delta, a)$ rýdzo konvexná a na intervale $\langle a, a + \delta \rangle$ rýdzo konkávna.
2. Funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervale $(a - \delta, a)$ rýdzo konkávna a na intervale $\langle a, a + \delta \rangle$ rýdzo konvexná.

Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a inflexný bod.

Veta 46 *Nech I je interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia a $a \in \text{Int}(I)$ je jej inflexný bod. Ak je f v bode a dva razy diferencovateľná, tak $f''(a) = 0$.*

Veta 47 (Taylorova veta) *Nech n je prirodzené číslo a funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je*

1. n -razy spojito diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$),
2. $(n + 1)$ -razy diferencovateľná na (a, b) .

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!} (b - a) + \frac{f''(a)}{2!} (b - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}.$$

2.6.6 Príklady

Časť I

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} &: - \\ \bigcup \text{ na} &: (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ a } \langle 0, \sqrt{3} \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 2x \quad \text{v} \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

2. $f(x) = 16x(x - 1)^3$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle \frac{1}{4}, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, \frac{1}{4}) \\ \bigcup \text{ na} &: (-\infty, \frac{1}{2}) \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

3. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= (0, \infty) \\ \nearrow \text{ na} &: (0, e^2) \\ \searrow \text{ na} &: \langle e^2, \infty \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: \langle e^{\frac{8}{3}}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: (0, e^{\frac{8}{3}}) \\ \text{ABS} &: x = 0 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \text{v} \quad \infty \end{array} \right].$$

4. $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= (-2, 2), \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} &: (-2, 0) \\ \searrow \text{ na} &: (0, 2) \\ \bigcup \text{ na} &: - \\ \bigcap \text{ na} &: (-2, 2) \\ \text{ABS} &: x = -2, x = 2, \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

5. $f(x) = x - 2\arctg x$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{ na} &: (-1, 1) \\ \bigcup \text{ na} &: (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \text{ABS} &: \text{nemá}, \\ \text{ASS} &: y = x - \pi \text{ v } \infty, \quad y = x + \pi \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

6. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ nepárna, periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} &: \langle (4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \rangle, k \in \mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} &: \langle (4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2} \rangle, k \in \mathbb{Z} \\ \bigcup \text{ na} &: - \\ \bigcap \text{ na} &: - \\ \text{ABS} &: \text{nemá}, \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

7. $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{ na} &: (-\infty, -4) \text{ a } (0, \infty) \\ \searrow \text{ na} &: (-4, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \bigcup \text{ na} &: (-1, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -1) \\ \text{ABS} &: x = -1, \\ \text{ASS} &: y = x - 3 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

Časť II

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{10x}{(x+2)^2}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ \nearrow \text{na} &: (-2, 2) \\ \searrow \text{na} &: (-\infty, -2) \text{ a } \langle 2, \infty \rangle \\ \bigcup \text{na} &: \langle 4, \infty \rangle \\ \bigcap \text{na} &: (-\infty, -2) \text{ a } (-2, 4) \\ \text{ABS} &: x = -2 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \text{v} \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

$$2. f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{na} &: (-\infty, -1) \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} &: (-1, 1) \\ \bigcup \text{na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 2) \\ \bigcap \text{na} &: \langle 2, \infty \rangle \\ \text{ABS} &: x = -1 \\ \text{ASS} &: y = 1 \quad \text{v} \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

$$3. f(x) = \frac{1+\ln x}{x}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= (0, \infty) \\ \nearrow \text{na} &: (0, 1) \\ \searrow \text{na} &: \langle 1, \infty \rangle \\ \bigcup \text{na} &: \langle \sqrt{e}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{na} &: (0, \sqrt{e}) \\ \text{ABS} &: x = 0 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \text{v} \quad \infty \end{array} \right].$$

$$4. f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \nearrow \text{na} &: (-\infty, 1) \text{ a } \langle 5, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} &: (1, 5) \\ \bigcup \text{na} &: \langle -1, 1 \rangle \text{ a } (1, \infty) \\ \bigcap \text{na} &: (-\infty, -1) \\ \text{ABS} &: x = 1 \\ \text{ASS} &: y = x + 5 \quad \text{v} \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

$$5. f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \nearrow \text{na} &: \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} &: (-\infty, 0) \text{ a } (0, \frac{1}{2}) \\ \bigcup \text{na} &: (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \\ \bigcap \text{na} &: - \\ \text{ABS} &: x = 0 \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

6. $f(x) = \arcsin \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \langle 0, \infty \rangle \\ \nearrow \text{ na} &: - \\ \searrow \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: - \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = -\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \infty \end{array} \right].$$

7. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle 0, 1 \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, 0) \quad \text{a} \quad (1, \infty) \\ \bigcup \text{ na} &: \left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \quad \text{a} \quad (1, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \\ \text{ABS} &: x = 1 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

8. $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}.$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{ na} &: (-\infty, -3) \quad \text{a} \quad (-1, \infty) \\ \searrow \text{ na} &: \langle -3, -1 \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -1) \quad \text{a} \quad (-1, 0) \\ \text{ABS} &: x = -1 \\ \text{ASS} &: y = \frac{x}{2} - 1 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

9. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle -1, 1 \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \quad \text{a} \quad \langle 1, \infty \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \quad \text{a} \quad \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -\sqrt{3}) \quad \text{a} \quad \langle 0, \sqrt{3} \rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

10. $f(x) = x \ln(x^2).$

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: \left(-\infty, -\frac{1}{e} \right) \quad \text{a} \quad \left\langle \frac{1}{e}, \infty \right\rangle \\ \searrow \text{ na} &: \left\langle \frac{1}{e}, 0 \right\rangle \quad \text{a} \quad \left(0, \frac{1}{e} \right) \\ \bigcup \text{ na} &: (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

11. $f(x) = \cos x + \ln(\cos x)$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \text{párna, periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} &: \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} &: \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \bigcup \text{ na} &: - \\ \bigcap \text{ na} &: \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ABS} &: x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

12. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: - \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \\ \bigcup \text{ na} &: (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

13. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \bigcup \text{ na} &: \mathbb{R} \\ \bigcap \text{ na} &: - \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = \frac{\pi x}{2} - 1 \quad \vee \quad \infty, \quad y = -\frac{\pi x}{2} - 1 \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

14. $f(x) = \frac{2}{e^x - 3}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\} \\ \nearrow \text{ na} &: - \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, \ln 3) \text{ a } (\ln 3, \infty) \\ \bigcup \text{ na} &: (\ln 3, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, \ln 3) \\ \text{ABS} &: x = \ln 3 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \infty, \quad y = \frac{-2}{3} \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

15. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle -1, 0 \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } \langle 0, 1 \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: \langle -\sqrt{3}, -1 \rangle \text{ a } \langle -1, 1 \rangle \text{ a } \langle 1, \sqrt{3} \rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

Poznámka 3 f' a f'' neexistujú v bodoch $x = \pm 1$.

Časť III

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} &: - \\ \bigcup \text{ na} &: (-\infty, -\sqrt{12}) \text{ a } (0, \sqrt{12}) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\sqrt{12}, 0) \text{ a } (\sqrt{12}, \infty) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = x \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

2. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle -1, 1 \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \bigcup \text{ na} &: \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ a } (0, \sqrt{3}) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

3. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle 0, 1 \rangle \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \bigcup \text{ na} &: (-1, 1) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \text{ABS} &: x = -1, x = 1 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} &: - \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -2) \text{ a } (-2, 2) \text{ a } (2, \infty) \\ \bigcup \text{ na} &: (-2, 0) \text{ a } (2, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -2) \text{ a } (0, 2) \\ \text{ABS} &: x = -2, x = 2 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

5. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \bigcup \text{ na} &: (-1, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: (-\infty, -1) \\ \text{ABS} &: x = -1 \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

6. $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \searrow \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \bigcup \text{ na} &: \left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \text{ a } \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right) \\ \bigcap \text{ na} &: \left\langle \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

7. $f(x) = (1 - 3x)e^{2x}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} &: \left(-\infty, \frac{-1}{6}\right) \\ \searrow \text{ na} &: \left\langle \frac{-1}{6}, \infty\right) \\ \bigcup \text{ na} &: \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \\ \bigcap \text{ na} &: \left\langle \frac{-2}{3}, \infty\right) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

8. $f(x) = x \ln x$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= (0, \infty) \\ \nearrow \text{ na} &: \langle e^{-1}, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (0, e^{-1}) \\ \bigcup \text{ na} &: (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: - \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

9. $f(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} &: (-\infty, 0) \\ \bigcup \text{ na} &: (-\infty, -1) \text{ a } \left\langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle; \text{ a } (1, \infty) \\ \bigcap \text{ na} &: \left\langle -1, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right\rangle; \text{ a } \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right\rangle \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

10. $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ \nearrow \text{na} &: (-\infty, 3); \text{a } (3, \infty) \\ \searrow - & \\ \bigcup \text{na} &: (-\infty, 3) \\ \bigcap \text{na} &: (3, \infty) \\ \text{ABS} &: x = 3 \\ \text{ASS} &: y = x - 3 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

11. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= (-1, 1), \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{na} &: (-1, 1) \\ \searrow - & \\ \bigcup \text{na} &: \langle 0, 1 \rangle \\ \bigcap \text{na} &: (-1, 0) \\ \text{ABS} &: x = 1, x = -1 \\ \text{ASS} &: \text{nemá} \end{array} \right].$$

12. $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \\ \nearrow \text{na} &: (-\infty, -1) \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} &: \langle -1, 1 \rangle \\ \bigcup \text{na} &: \langle 0, \infty \rangle \\ \bigcap \text{na} &: (-\infty, 0) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = x \quad \vee \quad \infty, \quad y = x + 2\pi \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

13. $f(x) = xe^x$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{D}(f) &= \mathbb{R} \\ \nearrow \text{na} &: \langle -1, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} &: (-\infty, -1) \\ \bigcup \text{na} &: \langle -2, \infty \rangle \\ \bigcap \text{na} &: (-\infty, -2) \\ \text{ABS} &: \text{nemá} \\ \text{ASS} &: y = 0 \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

Kapitola 3

Integrálny počet

3.1 Určitý integrál

3.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 39 1. Nech $\langle a, b \rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. Potom $k + 1$ -ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nazývame deliace intervaly.

2. Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ nazývame norma delenia D .

3. Nech $(D_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$.

4. Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Definícia 40 Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^\infty$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^\infty$ konverguje k tomu istému číslu J , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Veta 48 (Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 41 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. Funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$.
2. V intervale $\langle a, b \rangle$ existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.
3. V každom bode z intervalu (a, b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.
4. Existujú vlastné limity $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

Potom hovoríme, že funkcia f je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 49 (Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

3.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 50 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

1. Funkcia $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Funkcia $(cf) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

3. Funkcia $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Veta 51 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.*

Veta 52 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 53 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

3.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b K \, dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 54 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b \rangle$ svoju strednú hodnotu.

3.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 42 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkciu*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f .

Veta 55 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je spojitá.

Veta 56 (Hlavná veta integrálneho počtu) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a navyše

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

Definícia 43 *Nech je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde I je interval. Nech existuje funkcia $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Veta 57 *Nech funkcia $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnu funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom funkcia $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnu funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ práve vtedy, ak existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in I$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$. To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 58 (Newtonov - Leibnitzov vzorec) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je jej ľubovoľná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Poznámka 4 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int_a^a f = 0$.
2. Ak $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
3. Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu

$$G : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

Táto funkcia je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a platí

$$G'(x) = -f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

4. Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, I je interval a bod $a \in I$. Definujme funkciu $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a $G'(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.

Veta 59 Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia na intervale I . Potom k nej existuje primitívna funkcia.

3.2 Neurčitý integrál

3.2.1 Definícia

Definícia 44 Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia. Potom jej ľubovoľnú primitívnu funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame neurčitý integrál funkcie f . Označujeme $F(x) = \int f(x) dx$.

Poznámka 5 1. Je zrejmé, že označením $\int f(x) dx$ nie je výsledok jednoznačne určený. Je to jedna z primitívnych funkcií funkcie f . Teda $\int \sin x dx = -\cos x$ rovnako dobre, ako $\int \sin x dx = -\cos x + 356$. Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o konštantu. Preto, keď napíšeme

$$\int \sin x dx = \int \sin x dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ taká, že

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. Označenie $F(x) = \int f(x) dx$ nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť $\int \sin 3d3 = -\cos 3$ nedáva žiaden zmysel. Označenie $\int f(x) dx$ treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primitívnych funkcií funkcie f a rovnosť $F(x) = \int f(x) dx$ ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.

3.2.2 Metóda per partes

Veta 60 *Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojitاً diferencovateľné na intervale I . Nech $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \rightarrow \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 5 *Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojitاً diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovoľne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

3.2.3 Substitučná metóda

Veta 61 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dôsledok 6 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovoľné. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 62 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitاً diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dôsledok 7 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitاً diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \text{lcm}\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$.

2. Položíme

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$

3. Potom

$$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a} = \varphi(t).$$

4. Ďalej

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt.$$

5. Ešte máme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$

6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál

$$\int R\left(c, \frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \dots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt,$$

čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$

V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x . Preto môžeme vypočítať x .

3. Dostávame

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}, \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\right) \left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\right) dt.$$

III. Integrály typu

$$\int R(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

V tejto rovnosti vypadne c , preto môžeme krátiť x -om. Vypočítame x .

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{ca})}{(t^2 - a)^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} \right) t.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}, \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} \right) t\right) \left(\frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{ca})}{(t^2 - a)^2} \right) dt.$$

IV. Integrály typu

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

V. Integrály typu

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

3.2.5 Příklady

Časť I

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{1}{3+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} \right]$.
 (b) $\int \frac{x}{3+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{8} \ln(3+4x^2) \right]$.
 (c) $\int \frac{x}{(x^2+5)^4} dx$ $\left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3} \right]$.
 (d) $\int e^x \operatorname{tg} e^x dx$ $[-\ln |\cos e^x|]$.
 (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+5) - 4 \operatorname{arctg}(x+2) \right]$.
 (f) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx$ $\left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \right]$.
 (g) $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3} dx$ $\left[\frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{6}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} \right]$.

2. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$.
 $[5x + 2 \ln |x| + 3 \ln |x-2| + 4 \ln |x+2|]$.
 (b) $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6} dx$ $\left[\ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right|^3 \right]$.
 (c) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx$ $\left[2 \ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2 \ln |x+1| \right]$.
 (d) $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6} dx$.
 $\left[2 \ln |x-3| + \frac{3}{2} \ln (x^2+2x+2) - 5 \operatorname{arctg}(x+1) \right]$.
 (e) $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5} dx$.
 $[2 \ln |x+5| - 3 \operatorname{arctg}(2x+1)]$.
 (f) $\int \frac{1}{x^3+1} dx$.
 $\left[\frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln (x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} (2x-1) \right]$.
 (g) $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x} dx$.
 $\left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln |x(x-2)| \right]$.
 (h) $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)} dx$.
 $\left[-\frac{x+2}{2(4x^2+4x+17)} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{4} \right]$.

3. Počítajme metódou "Per partes":

- (a) $\int x \sin x dx$ $[\sin x - x \cos x]$.

- (b) $\int x e^{2x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4} \right].$
- (c) $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \right].$
- (d) $\int_0^{\pi} (2x^2 + 3) \cos 2x dx. \dots\dots\dots [\pi].$
- (e) $\int \ln x dx. \dots\dots\dots [x \ln x - x].$
- (f) $\int x \log_{10} 2x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} \left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2 \ln 10} \right) \right].$
- (g) $\int e^x \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right].$
- (h) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \dots\dots\dots [x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|].$
- (i) $\int \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right].$
- (j) $\int x \ln(x^2 + 3x - 10) dx.$
- $$\left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 3x - 10) - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - 2 \ln |x - 2| - \frac{25}{2} \ln |x + 5| \right].$$
- (k) $\int \ln(x^2 - 4x + 6) dx.$
- $$\left[(x - 2) \ln(x^2 - 4x + 6) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x-2)}{\sqrt{2}} \right].$$
- (l) $\int x \operatorname{arctg}(x + 3) dx.$
- $$\left[\frac{(x^2-8)}{2} \operatorname{arctg}(x + 3) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 10) \right].$$

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{2^x}{(2^x+3)^7} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{6 \ln 2 (2^x+3)^6} \right].$
- (b) $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} \right].$
- (c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{4} \sqrt{3-4x^2} \right].$
- (d) $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx.$
- $$\left[\frac{1}{2} (\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}} \left(\operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{6}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \right].$$
- (e) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5 \sin x - 6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{7} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{6 + \sin x} \right| \right].$
- (f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^4 x + \cos^3 x} \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{3}{2} \right].$
- (g) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{4}{3} \right].$
- (h) $\int \frac{2}{x(\ln x - 2)(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)} dx. \dots\dots \left[\ln \frac{|\ln x - 2|}{\sqrt{(\ln x - 1)^2 + 1}} - \operatorname{arctg} (\ln x - 1) \right].$

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24 \ln \left| \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x+1}} \right| \right].$
- (b) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right), t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \right].$
- (c) $\int_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx. \dots\dots\dots \left[12 \ln \frac{3}{2} \right].$
- (d) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} dx. \dots\dots \left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)}, t = -x + \sqrt{x^2+x+3} \right].$
- (e) $\int \sqrt{x^2+4x+3} dx.$
 $\left[-\frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} + \frac{\ln|t+2|}{2} + \frac{1}{8(t+2)^2}, t = x - \sqrt{x^2+4x+3} \right].$
- (f) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x} \right) \right].$
- (g) $\int_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx. \dots\dots\dots [-8, 345].$
- (h) $\int \frac{1}{\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| \right].$
- (i) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5} (3 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + 1) \right].$
- (j) $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right| \right].$
- (k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1} dx. \dots\dots\dots \left[\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right].$
- (l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{4} \right].$
- (m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx. \dots\dots\dots [1, 246].$
- (n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{4} \right].$
- (o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5 + 2 \cos x} dx. \dots\dots\dots [0, 152].$
- (p) $\int \cos(\ln x) dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \right].$

6. Vypočítajme $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

$$\left[\left(2(\sqrt{x})^5 - 10x^2 + 40(\sqrt{x})^3 - 120x + 240\sqrt{x} - 240 \right) e^{\sqrt{x}} \right].$$

7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y = x \ln x, x = \frac{1}{2}, x = 2, y = 0. \dots\dots\dots \left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8} \ln 2 \right].$

- (b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$ $\left[\frac{9}{4}\right]$.
8. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x . Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$ $[7\pi]$.

Časť II

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajte (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{1}{4+3x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$.
- (b) $\int \frac{x}{4+3x^2} dx$ $\left[\frac{1}{6} \ln(4+3x^2)\right]$.
- (c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$ $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]$.
- (d) $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) - 6 \operatorname{arctg}(x+1)\right]$.
- (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]$.
- (f) $\int e^x \cotg e^x dx$ $[\ln |\sin e^x|]$.

2. Počítajte integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{2}{9x^2-1} dx$ $\left[\frac{1}{3} \ln \left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|\right]$.
- (b) $\int \frac{1-x}{x^2+x} dx$ $[\ln |x| - 2 \ln |x+1|]$.
- (c) $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right]$.
- (d) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$ $\left[\frac{2}{9} \ln |x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln |x+2|\right]$.
- (e) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5} dx$ $\left[2 \ln |x+5| - \ln |x+1| - \frac{3}{x+1}\right]$.
- (f) $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7} dx$.
 $\left[\frac{3}{10} \ln |x-1| - \frac{3}{20} \ln (x^2+2x+7) + \frac{\sqrt{6}}{15} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]$.
- (g) $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2} dx$ $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right]$.
- (h) $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5} dx$.
 $\left[\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.
- (i) $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4} dx$.
 $\left[\frac{1}{2} \ln [(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)] - 2 \operatorname{arctg}(x+1)\right]$.

3. Počítajte metódou "Per partes":

- (a) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ $\left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right]$.

- (b) $\int x^2 e^{3x} dx$ $\left[\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) \right]$.
- (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x dx$ $\left[\frac{2}{5} e^{\pi} + \frac{1}{5} \right]$.
- (d) $\int x \ln x^2 dx$ $\left[\frac{x^2}{2} (\ln x^2 - 1) \right]$.
- (e) $\int \ln(x^2 + 1) dx$ $[x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x]$.
- (f) $\int_1^e \ln^2 x dx$ $[(e - 2)]$.
- (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(3x) dx$ $\left[-\frac{3}{13} \left(e^{\pi} + \frac{2}{3} \right) \right]$.
- (h) $\int x \ln(x^2 - 2x + 5) dx$.
 $\left[\frac{1}{2} (x^2 + 3) \ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{x^2}{2} - x + 4 \operatorname{arctg} \frac{(x-1)}{2} \right]$.
- (i) $\int \ln(x^2 + x - 2) dx$.
 $[x \ln(x^2 + x - 2) - 2x - \ln|x - 1| + 2 \ln|x + 2|]$.
- (j) $\int x^2 \ln(x^2 + 4x + 4) dx$.
 $\left[\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 4x + 4) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln|x + 2| \right) \right]$.
- (k) $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$ $\left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) \right]$.
- (l) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ $[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)]$.
- (m) $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} dx$ $\left[x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| + \operatorname{arctg}(x - 1) \right]$.
- (n) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ $\left[\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + 4 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - 4 \right]$.

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{e^x + 10}{(e^{2x} - 2e^x + 5)} dx$ $[2x - \ln|e^{2x} - 2e^x + 5| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(\frac{e^x - 1}{2})]$.
- (b) $\int \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} + 1} dx$ $[\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg}(e^x)]$.
- (c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^{2x} + e^x - 6} dx$ $[\ln \sqrt{5}]$.
- (d) $\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x + 3}{e^{2x} + 2e^x + 2} e^x dx$ $[\ln 2 + \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2]$.
- (e) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 3} dx$.
 $\left[\frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + \sin x + 3) - \frac{\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{11}}{11} (2 \sin x + 1) \right) \right]$.
- (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5 - \cos x) \sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} dx$ $[-3 \ln 2]$.

$$(g) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x} dx.$$

$$\left[\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \sin x \right) \right) \right].$$

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

$$(a) \int x \sqrt[3]{x+2} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^4} \right].$$

$$(b) \int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx. \quad \dots\dots\dots [6 \ln(1 + \sqrt[6]{x})].$$

$$(c) \int \frac{x}{(1 + \sqrt{x-1})} dx.$$

$$\left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4 \ln(1 + \sqrt{x-1}) \right].$$

$$(d) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx. \quad \dots\dots\dots [7 + \ln 4].$$

$$(e) \int \frac{1 - \sqrt[6]{x+1}}{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^4}} dx.$$

$$[\ln |x+1| - 3 \ln |\sqrt[3]{x+1} + 1| - 6 \operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x+1})].$$

$$(f) \int \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[2 \ln(x + \sqrt{2x-1}) + \frac{2}{1 + \sqrt{2x-1}} \right].$$

$$(g) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x + 2\sqrt{x-1}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[2\sqrt{x-1} - \ln(1 + \sqrt{x-1})^4 - \frac{2}{1 + \sqrt{x-1}} \right].$$

$$(h) \int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} \right].$$

$$(i) \int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arcsin \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \right) \right) \right].$$

$$(j) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{-x-1 + \sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} \right| \right].$$

$$(k) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad \dots\dots\dots [2\pi].$$

$$(l) \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} t, t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x} \right].$$

$$(m) \int_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{4}{45} \right].$$

$$(n) \int \frac{1}{\sin x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \right].$$

$$(o) \int \frac{1}{3 - \cos x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) \right].$$

$$(p) \int \frac{1}{3 + \cos x + \sin x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{2\sqrt{7}}{7} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}(2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + 1)}{7} \right) \right].$$

$$(q) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx. \quad \dots\dots\dots \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \right].$$

$$(r) \int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} dx. \quad \dots\dots\dots [2(\ln |t-1| - \ln |t| - \operatorname{arctg} t), t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}].$$

- (s) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right].$
- (t) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2}. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} x \right) \right].$
6. Vypočítajte $\int_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{6} \right].$
7. Vypočítajte plošný obsah rovinnnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = \frac{27}{x^2+9}, y = \frac{x^2}{6}. \dots\dots\dots \left[\frac{3}{2} (3\pi - 2) \right].$
- (b) $y = \ln x, y = \ln^2 x. \dots\dots\dots [3 - e].$
8. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajte plošný obsah menšej z nich. $\dots\dots\dots \left[2\pi + \frac{4}{3} \right].$
9. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi}, y = \sin x, x \geq 0. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi^2}{12} \right].$

Časť III

1. Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajte:
- (a) $\int 3x^3 + 2x - 4 dx. \dots\dots\dots \left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x \right].$
- (b) $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} \right) dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10} \right].$
- (c) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}} \right].$
- (d) $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} dx. \dots\dots\dots \left[\ln |x| - \frac{1}{4x^4} \right].$
- (e) $\int \frac{x(\sqrt[3]{x-x\sqrt[3]{x}})}{\sqrt[4]{x}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37} + \frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25} \right].$
- (f) $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right].$
- (g) $\int e^x a^x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a} \right].$
- (h) $\int \left(5 \cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2} \right) dx. \dots\dots\dots \left[5 \sin x - \frac{x^6}{6} + 3 \operatorname{arctg} x \right].$
- (i) $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1} \right) dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2 \operatorname{arctg} x \right].$
- (j) $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx. \dots\dots\dots [-2 \cos x - 3 \sin x].$
- (k) $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}} \right].$
- (l) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx. \dots\dots\dots \left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)} \right].$

- (m) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$
 (n) $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x} dx. \dots\dots\dots [-\cotg x - \operatorname{tg} x].$
 (o) $\int \operatorname{tg}^2 x dx. \dots\dots\dots [\operatorname{tg} x - x].$
 (p) $\int \cotg^2 x dx. \dots\dots\dots [-\cotg x - x].$
 (q) $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x} dx. \dots\dots\dots [\operatorname{tg} x].$
 (r) $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right].$
 (s) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots [\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x].$

2. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{-1}{2\sin^2 x}\right].$
 (b) $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln|5+x^3|\right].$
 (c) $\int \frac{1}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)\right].$
 (d) $\int \frac{x}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{18} \ln(3+9x^2)\right].$
 (e) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].$
 (f) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}}\right].$
 (g) $\int \frac{\sin x}{\cos x-1} dx. \dots\dots\dots [-\ln|\cos x-1|].$
 (h) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{4}{3} \sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3}\right].$

3. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right].$
 (b) $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right].$
 (c) $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right].$
 (d) $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3 \ln|x+1|\right].$
 (e) $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} dx. \dots\dots\dots \left[\ln|x+3| + 2 \ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right].$
 (f) $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx.$
 $\left[\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$
 (g) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right].$
 (h) $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right].$

- (i) $\int_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{1}{24} \right].$
- (j) $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{5}{2} - \ln 3 \right].$
- (k) $\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1} dx. \dots\dots\dots \left[\ln 2 + \frac{17}{8} \right].$

4. Počítajme metódou "Per partes":

- (a) $\int x \ln x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) \right].$
- (b) $\int x e^{-x} dx. \dots\dots\dots [-x e^{-x} - e^{-x}].$
- (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{(1+2e^{\pi})}{5} \right].$
- (d) $\int \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right].$
- (e) $\int x^2 3^x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{3^x}{\ln 3} \left(x^2 - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{2}{(\ln 3)^2} \right) \right].$
- (f) $\int x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2} \right].$
- (g) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \dots\dots\dots [\pi^2 - 4].$
- (h) $\int_0^1 x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \right].$
- (i) $\int \arccos x dx. \dots\dots\dots [x \arccos x - \sqrt{1-x^2}].$
- (j) $\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{5\pi}{12} - \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \right].$
- (k) $\int \ln(x^2 - 2x - 3) dx.$
 $[x \ln(x^2 - 2x - 3) - 2x + \ln|x+1| - 3 \ln|x-3|].$
- (l) $\int \ln(x^2 - 6x + 9) dx.$
 $[x \ln(x^2 - 6x + 9) - 2x - 6 \ln|x-3|].$
- (m) $\int \ln(x^2 + 2x + 3) dx.$
 $\left[(x+1) \ln(x^2 + 2x + 3) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} \right].$
- (n) $\int x^2 \operatorname{arctg} (x-1) dx.$
 $\left[\frac{1}{3} \left((x^3 + 2) \operatorname{arctg} (x-1) - \frac{x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 - 2x + 2) \right) \right].$

5. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{5} \sqrt{2-5x^2} \right].$
- (b) $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{3}(e^x - 1) \right) \right].$

- (c) $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10} dx. \dots\dots\dots [x - 2 \ln |e^x - 2| + 3 \ln |e^x - 5|].$
 (d) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 5} dx. \dots\dots\dots [-\ln (\cos^2 x + 2 \cos x + 5) + \operatorname{arctg} (\frac{\cos x + 1}{2})].$
 (e) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2} dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{3} \ln |\sin x - 1| + \frac{2}{3} \ln (\sin x + 2)].$
 (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6} dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{5} \ln \frac{3}{8}].$
 (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \cos x - 6} dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{5} \ln \frac{16}{27}].$

6. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5} dx. \dots\dots\dots [2x - \ln (e^{2x} - 2e^x + 5) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x-1}{2}].$
 (b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}} dx. \dots\dots\dots [6 (\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln (\sqrt[6]{x} + 1))].$
 (c) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right].$
 (d) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx. \dots\dots\dots [2\sqrt{1+x} + \ln |\sqrt{1+x} - 1| - \ln |1 + \sqrt{1+x}|].$
 (e) $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x} dx. \dots\dots\dots$

$$\left[-\frac{t^2}{2} - 4t - 9 \ln |t - 3| + \ln |t + 1|, t = \sqrt{2x+3} \right].$$

- (f) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \dots\dots\dots [\ln 9].$
 (g) $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}} dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{3} (\arcsin (x + \frac{1}{3}))].$
 (h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}} dx. \dots\dots\dots [\ln \frac{5+2\sqrt{5}}{5}].$
 (i) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |2t + 1| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t+1}, t = \sqrt{x^2-x+1} - x \right].$
 (j) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{6}) \right].$
 (k) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx. \dots\dots\dots [\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln (\operatorname{tg}^2 (\frac{x}{2}) + 1)].$
 (l) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{4-5 \sin x} dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{3} \ln 2].$
 (m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx. \dots\dots\dots [\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2].$
 (n) $\int \frac{1}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{14}}{14} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{tg} x \right) \right].$

7. Vypočítajme $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx. \dots\dots\dots [4 - \pi].$

8. Vypočítajte $\int_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x \, dx$ $[0]$.
9. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$ $[\frac{16}{3}]$.
- (b) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 2$ $[\frac{8}{3} (2 - \sqrt{2})]$.
10. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
Oblasť je určená čiarami $y = \sin x, y = \frac{2x}{\pi}$ $[\frac{\pi^2}{6}]$.

