

Diskrétny pravdepodobnostný priestor.

Ak množina všetkých možných výsledkov náhodného pokusu je konečná, alebo spočítateľná, tak za model náhodného pokusu môžeme vziať dvojicu (Ω, P)

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad p_i = P(\omega_i), \quad \sum p_i = 1.$$

Za systém náhodných udalostí v tomto prípade berieme systém všetkých podmnožín množiny Ω . Ak A je náhodná udalosť, tak pravdepodobnosť $P(A)$ definujeme vzťahom:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

Zápisu treba rozumieť tak, že ak napr. $A = \{\omega_3, \omega_5, \omega_9\}$, tak $P(A) = p_3 + p_5 + p_9$. Ak A má nekonečne veľa prvkov, tak $P(A)$ je súčtom nekonečného radu. Ľahko sa ukáže, že takto definovaná pravdepodobnosť je aditívna.

Ak Ω je konečná, tak špeciálnym prípadom sú situácie, v ktorých pravdepodobnosť všetkých výsledkov je rovnaká. Ak Ω má n bodov, tak (vďaka aditivite) $P(\omega_i) = 1/n$, a preto

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Konečný priestor, v ktorom $P(\omega_i) = 1/n$, nazývame *homogénny*. Pri hľadaní $|A|$, (t.j. počtu prvkov množiny A) sa často dajú uplatniť kombinatorické úvahy.

Ak pokus nemôžeme modelovať priestorom, ktorý je homogénny, stanoviť $P(A)$ nie je vždy jednoduché. Často je kľúčom nájsť

- pomocného priestoru Ω_0 , ktorý je homogénny a
- zobrazenia, ktoré predstavuje korešpondenciu medzi Ω a Ω_0 , t.j. vzťah medzi bodmi $\omega \in \Omega$, ktoré nie sú rovnako pravdepodobné a bodmi Ω_0 – výsledkami pomocného homogénneho priestoru (ktoré sú rovnako pravdepodobné).

1. Náhodný pokus spočíva v hode dvomi hracími kockami, modrou a červenou. Za výsledok pokusu považujeme usporiadanú dvojicu čísel, ktoré na kockách padli: $\omega = (i, j)$, i na modrej, j na červenej. Stanovte pravdepodobnosti náhodných udalostí predpokladajúc, že ide o normálne (t.j. nie falošné) kocky)

- a) na modrej viac ako na červenej
- b) súčet bodov na kockách je aspoň 5
- c) na modrej menej ako 4 a pritom na červenej párne číslo
- d) rozdiel čísel v absolútnej hodnote je menší ako 3
- e) súčet bodov na kockách je aspoň 5 a pritom na modrej viac ako na červenej
- f) rozdiel čísel v absolútnej hodnote je menší ako 3, a pritom na červenej viac ako 3.

2. Náhodný pokus spočíva v hode tromi normálnymi hracími kockami: modrou, červenou a žltou. Nájdite pravdepodobnosti náhodných udalostí:

- a) na modrej a na červenej padne aspoň 5 bodov
- b) na každej padne párne číslo
- c) na všetkých padne to isté číslo
- d) aspoň na jednej padne 6
- e) aspoň na dvoch padne 6
- f) súčet bodov na kockách sa rovná 11
- g) súčet bodov na kockách sa rovná 12.

3. Náhodný pokus spočíva v hode štyrmi riadnymi, ale označenými mincami. Určte pravdepodobnosti náhodných udalostí:
 - a) na druhej minci padne znak
 - b) znak padne len na druhej minci
 - c) na prvej a na tretej minci padne znak
 - d) znak padne len na prvej a tretej minci
 - e) padnú práve dva znaky
 - f) padnú najviac dva znaky

4. Systém pozostáva z dvoch blokov typu I a troch blokov typu II. Ak náhoda ovplyvňuje fungovanie, resp. nefungovanie jednotlivých blokov, jednotlivé stavy systému môžeme chápať ako výsledky náhodného experimentu. Stavy systému popisujeme usporiadanými 5-ticami núl a jednotiek. Predpokladajme, všetkých 32 stavov je rovnako pravdepodobných. Za tohto predpokladu stanovte pravdepodobnosti nasledovných udalostí
 - a) udalosti, ktorá spočíva v tom, že funguje len druhý blok typu I a len tretí blok typu II
 - b) udalosti núdzového režimu, ktorý nastáva, ak funguje práve jeden bloku typu I a súčasne práve jeden blok typu II
 - c) udalosti spoľahlivého fungovania, ktorá nastáva, ak funguje aspoň jeden blok typu I a súčasne aspoň dva bloky typu II.

5. V škatuli máme 100 výrobkov a medzi nimi 10 nepodarkov. Náhodne vyberme 15 (bez vrátenia). Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými
 - a) nie je nepodarok?
 - b) je jeden nepodarok?
 - c) sú dva nepodarky?
 - d) sú najviac štyri nepodarky?

6. V škatuli máme 100 výrobkov a medzi nimi 10 nepodarkov. Náhodne vyberieme 20 (bez vrátenia) a zistíme, že medzi vybranými je jeden nepodarok. S akou pravdepodobnosťou medzi ďalšími desiatimi náhodne vybratými
 - a) nie je nepodarok?
 - b) je jeden nepodarok?
 - c) sú dva nepodarky?
 - d) sú najviac dva nepodarky?

7. Zámok na heslo má na spoločnej osi päť kotúčikov a na obode každého z nich sú cifry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zámok sa otvára len na jedinú päťicu cifier (heslo zámku). Aká je pravdepodobnosť otvorenia zámku, ak
 - a) náhodne zvolíme nejakú päťicu cifier?
 - b) vieme, že v hesle sa žiadna cifra neopakuje?
 - c) vieme, že v hesle sa nevyskytuje nula?

8. V škatuli máme 5 bielych, 4 čierne a 2 modré guľky. Náhodne vyberáme naraz dve. Aká je pravdepodobnosť toho, že
 - a) obe budú biele?
 - b) vytiahneme bielu a čiernu?
 - c) vytiahnuté guľky budú guľky rovnakej farby?

9. V škatuli máme 5 bielych, 4 čierne a 2 modré guľky. Náhodne vyberáme naraz tri. Aká je pravdepodobnosť toho, že

- a) sú rovnakej farby?
 - b) medzi nimi nie je biela?
 - c) medzi vybranými je aspoň jedna modrá?
 - d) vytiahnuté guľičky budú guľičky len dvoch farieb?
10. V škatuli je 9 lístkov očíslovaných číslami 1, 2, 3, ..., 9. Náhodne vyberieme naraz dva lístky. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- a) čísla na vytiahnutých lístkoch sa líšia o viac ako o dva?
 - b) súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je aspoň 7?
 - c) súčin čísel na vytiahnutých lístkoch je aspoň 9?
11. V škatuli je 9 lístkov očíslovaných číslami 1, 2, 3, ..., 9. Náhodne vyberieme dva lístky tak, že najprv ťaháme prvý, poznačíme si číslo na ňom, vrátíme ho späť a potom ťaháme druhý. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- a) čísla na vytiahnutých lístkoch sa líšia o viac ako o dva?
 - b) súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je aspoň 7?
 - c) súčin čísel na vytiahnutých lístkoch je aspoň 9?
12. Pokus spočíva v hádzaní piatimi mincami, ktorých ruby, resp. líca sme označili číslami 1 resp. 2. Aká je pravdepodobnosť toho, že súčet padnutých čísel je 7 alebo 8?
13. Z balíčka 52 francúzskych kariet sme si náhodne vytiahli päť kariet. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- a) máme v ruke 4 karty rovnakej hodnoty?
 - b) máme v ruke práve dvoch kráľov?
 - c) máme v ruke práve tri karty rovnakej hodnoty?
 - d) máme v ruke práve tri karty rovnakej farby? Terminologická poznámka: balíček má karty štyroch farieb: trefy, kára, srdcia a piky.
14. V škatuli máme 9 lístkov očíslovaných od 1 po 9. Náhodne vyberajme jeden po druhom, (dodržiujúc poradie vytiahnutých), pričom vytiahnuté nedávame späť. Vytiahnutím (pred)posledného lístku dostávame náhodnú permutáciu čísl 1 až 9. Aká je pravdepodobnosť toho, že v náhodnej permutácii
- a) cifra 5 bude na "svojom" mieste?
 - b) cifra 5 a cifra 8 budú na svojich miestach?
- Pre náročnejších pridajme ťažšie otázky: Aká je pravdepodobnosť toho, že
- c) nebude existovať "zhoda" t.j. žiadne číslo nebude na "svojom" mieste?
 - d) bude existovať práve jedna zhoda?
 - e) budú existovať práve tri zhody?
15. Do šiestich (prázdnych) skladov rozdelíme náhodne 30 výrobkov takým spôsobom, aby všetkých 6^{30} rozmiestnení bolo rovnako možných. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- a) prvý sklad ostane prázdny?
 - b) prvý sklad bude obsahovať práve 5 výrobkov?
 - c) prvý sklad bude obsahovať 5 a druhý 7 výrobkov?
- Náročnejším ponúkame zaujímavejšie otázky: Aká je pravdepodobnosť toho, že
- d) bude existovať prázdny sklad?
 - e) práve prvý sklad ostane prázdny?
 - f) práve jeden sklad ostane prázdny?
 - g) práve dva sklady ostanú prázdne?

Výsledky:

Úloha 1.

- a) $5/12$ b) $5/6$ c) $1/4$ d) $2/3$ e) $13/36$ f) $1/3$

Úloha 2.

- a) $1/9$ b) $1/8$ c) $1/36$ d) $91/216$ e) $16/216$ f) $27/216$
g) $25/216$

Úloha 3.

- a) $1/2$ b) $1/16$ c) $1/4$ d) $1/16$ e) $6/16$ f) $11/16$

Úloha 4.

- a) $1/32$ b) $6/32$ c) $12/32$

Úloha 5.

- a) 0.1808 b) 0.3568 c) 0.2919 d) 0.9937

Úloha 6.

- a) 0.2804 b) 0.4071 c) 0.2326 d) 0.9201

Úloha 7.

- a) $5.950 \cdot 10^{-5}$ b) $3.968 \cdot 10^{-4}$ c) $1.286 \cdot 10^{-4}$

Úloha 8.

- a) $2/11$ b) $4/11$ c) $17/55$

Úloha 9.

- a) $14/165$ b) $20/165$ c) $81/165$ d) $111/165$

Úloha 10.

- a) $7/12$ b) $5/6$ c) $3/4$

Úloha 11.

- a) $14/27$ b) $22/27$ c) $61/81$

Úloha 12.

$20/32$

Úloha 13.

- a) $2.40 \cdot 10^{-4}$ b) $3.99 \cdot 10^{-2}$ c) $2.26 \cdot 10^{-2}$ d) 0.3262

Úloha 14.

- a) $1/9$ b) $1/72$ c) 0.367879 d) 0.367882 e) $53/864$

Úloha 15.

- a) $4.21 \cdot 10^{-3}$ b) 0.1921 c) 0.0213 d) 0.025198 e) 0.004187
f) 0.02512 g) $5.211 \cdot 10^{-6}$