Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 23. 5. 2005

Skupina A

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$max\{a,min\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\}$, kde *a,b,c* sú reálne čísla.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $A - B = A$, (b) $A \cap B = A$, (c), $A \cup B = A$

3. príklad.
Zistite, či relácia *R* nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) *x* je menší ako *y*,
(b) *x* má rovnaké krstné meno ako *y,*
(c) *x* a *y* sa narodili v rovnakom dni,

4. príklad.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve jednu jednotku,
(b) maximálne tri jednotky,
(c) minimálne tri jednotky.

5. príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}z$,

7. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov *p* a *q* má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

9. príklad. Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi má hodnosť $h(A) = 3$

10. príklad. Skonštruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

S_1: x:=0
S_2: x:= x + 1
S_3: y:=2
S_4: z:=y
S_5: x:= x + 2
S_6: y:= x + z

11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešené príklady

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$max\{a,min\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.

Riešenie:
(a) $a \le b \le c$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{b}$$

(b) $a \le c \le b$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{c}$$

(c) $b \le a \le c$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{a}$$

(d) $b \le c \le a$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$

(e) $c \le a \le b$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$

(f) $c \le b \le a$

$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$

Vo všetkých prípadoch sme dostali rovnosť, čiže identita platí pre každé *a, b, c*.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $A - B = A$, $A \cap B = \emptyset$
(b) $A \cap B = A$, platí ak $A \subseteq B$
(c) $A \cup B = A$, platí ak $B \subseteq A$

3. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y,
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left(\left(x<y\right)\wedge\left(y<z\right)\Rightarrow\left(x<z\right)\right)$
antisymetrická: $\forall x\forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\notin R\right)$

(b) x má rovnaké krstné meno ako y,
reflexívna: $\forall x\left(\left(x,x\right)\in R\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left(\left(x,y\right)\in R\wedge\left(y,z\right)\in R\Rightarrow\left(x,z\right)\in R\right)$

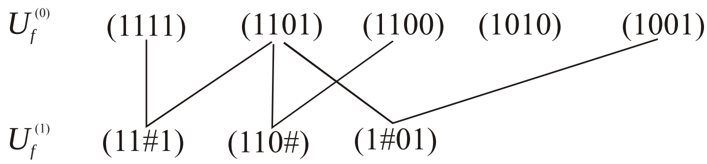
(c) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x\left(\left(x,x\right)\in R\right)$
symetrická: $\forall x\forall y\left(\left(x,y\right)\in R\Rightarrow\left(y,x\right)\in R\right)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z\left(\left(x,y\right)\in R\wedge\left(y,z\right)\in R\Rightarrow\left(x,z\right)\in R\right)$

4. príklad.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve jednu jednotku, $\boxed{10}$
(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}=1+10+45+120=\boxed{176}$
(c) minimálne tri jednotky,
$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=$
$120+210+252+210+120+45+10+1=\boxed{968}$
$=2^{10}$-C(10,0)-C(10,1)-C(10,2)=1024-1-10-45=968

5. príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.
$|MA|=345$, $|DM|=212$,$|MA\cap DM|=188$
$|MA\cup DM|=|MA|+|DM|-|MA\cap DM|=345+212-188=369$

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám $wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(11#1)
2	(1101)		2	(2,3)	(110#)
3	(1100)		3	(2,5)	(1#01)
4	(1010)				
5	(1001)				



Klauzule z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

$$\tilde{V} = \{(11\#1),(110\#),(1\#01),(1010)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w,x,y,z) = wxz + wx\overline{y} + w\overline{y}z + w\overline{x}y\overline{z}$$

7. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.
Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{p} & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{q} & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p = -3-2q$ a $1+p = 3+q$, riešením tohto systému dostaneme $p=3$ a $q=1$, potom posledná ekvivaletná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Riešenie:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

9. príklad. Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

má hodnosť $h(A) = 3$.

Riešenie:
Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty

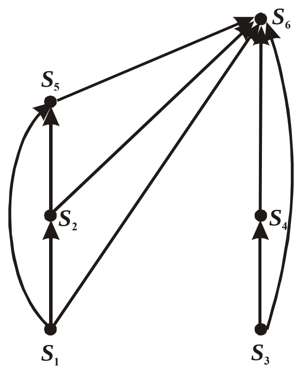
$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} = 0$$
$$\alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} = 0$$
$$\alpha_3 a_{33} = 0$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1, s_2, s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Skonštruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

S_1: x:=0
S_2: x:= x + 1
S_3: y:=2
S_4: z:=y
S_5: x:= x + 2
S_6: y:= x + z

Riešenie:



11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6\times4/2-6+1+1=8$.
kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.