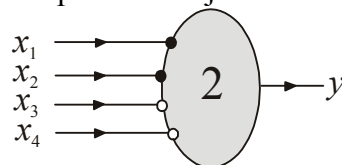


Záverečná písomka (25. 6. 2009)

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

- (a) čo je formula?
- (b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
- (c) čo je teória a čo je model?
- (d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$?
- (e) čo je dôkaz formuly φ ?

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón, reprezentujte ju tabuľkou spolu s hodnotou vstupu do prechodovej funkcie a napíšte jej DNF formu



Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je logickým dôsledkom T , $T \vdash \alpha$,
 $T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

- (a) Vtáky sa množia vajcami.
- (b) Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.
- (c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
- (d) Existuje taký, čo navštívil Anglicko a hovorí po anglicky..
- (e) Existuje dym bez ohňa.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

- (a) $(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$,
- (b) $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$,
- (c) $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$,
- (d) $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x))$.

Príklad 6. Rozhodnite pomocou sémantického tabla, či teória T je konzistentná.

$$T = \{\forall x (P(x) \wedge R(x)), \neg \exists x R(x), \neg P(a)\}.$$

Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet
?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti
?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

(b) $(\forall x \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y \varphi(y))$

Príklad 9. Pomocou sémantických tabiel preverte, či formuly modálnej logiky sú pravdivé vo svete w_0 :

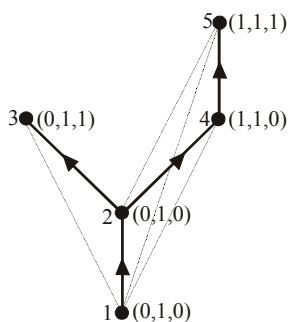
(a) $w_0 \models \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$,

(b) $w_0 \models \Diamond\varphi \Rightarrow \Box\varphi$,

Cvičenie 10. Vypočítajte pravdivostné hodnoty intuicionistickej formuly

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg q \vee \neg r))$$

v každom svete pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou R , pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných p , q a r .



Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

- (a) čo je formula?
- (b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
- (c) čo je teória a čo je model?
- (d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$?
- (e) čo je dôkaz formuly φ ?

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrovkových premenných z množiny $\{p, q, r, \dots\}$ a znaky logických spojok $\{\Rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula ::= premenná | (formula) | (formula \wedge formula) | (formula \vee formula) |
(formula \Rightarrow formula) | (\neg formula)

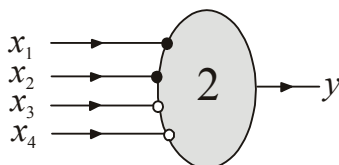
(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá (nepravdivá); formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) Formula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl T (čo označíme $T \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in T$ alebo je bezprostredným dôsledkom T alebo je bezprostredným dôsledkom T rozšírenej o niektoré jej logické dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie T (čo označíme $T \models \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie T je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá).

Príklad 2. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej DNF formu



$$y = s(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2)$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$s(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2)$	y
1	0	0	0	0	$s(-2)$	0
2	0	0	0	1	$s(-3)$	0
3	0	0	1	0	$s(-3)$	0
4	0	0	1	1	$s(-4)$	0

5	0	1	0	0	s(-1)	0
6	0	1	0	1	s(-2)	0
7	0	1	1	0	s(-2)	0
8	0	1	1	1	s(-3)	0
9	1	0	0	0	s(-1)	0
10	1	0	0	1	s(-2)	0
11	1	0	1	0	s(-2)	0
12	1	0	1	1	s(-3)	0
13	1	1	0	0	s(0)	1
14	1	1	0	1	s(-1)	0
15	1	1	1	0	s(-1)	0
16	1	1	1	1	s(-2)	0

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4)$$

Príklad 3. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či teória T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T , $T \models \alpha$,

$$T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}, \alpha = z$$

Ak $T = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, potom vlastnosť $T \models \alpha$ je ekvivalentná platnosti implikácie

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n \Rightarrow \alpha$$

Negácia tejto implikácie má tvar

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n \wedge \neg \alpha$$

Ak sa nám podarí dokázať, že táto formula je kontradikcia, potom platí $T \models \alpha$.

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow (z \vee \neg x)) \wedge (\neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z)) \wedge (t \Rightarrow x) \wedge \neg z$$

Prepíšeme ju do tvaru KNF

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x) \wedge \underbrace{(t \vee (t \wedge \neg z))}_{t \wedge (t \vee \neg z)} \wedge (\neg t \vee x) \wedge \neg z$$

Ak vynecháme opakujúce klauzule (dôsledok idempotentnosti konjunkcie a disjunkcie) dostaneme

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x) \wedge (t \vee \neg z) \wedge t \wedge (\neg t \vee x) \wedge \neg z$$

	1	2	3	4	5	6						
	$\neg x \vee y$	$\neg y \vee z \vee \neg x$	$t \vee \neg z$	t	$\neg z$	$\neg t \vee x$	7	8				
z		1	0		0		$\neg y \vee t \vee \neg x$	$\neg y \vee \neg x$	9	10		
y	1						0	0	$\neg x \vee t$	$\neg x$	11	
x						1			0	0	$\neg t$	12
t				1							0	□

Záver: Platí tautologické vyplývanie

$$\{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\} \models z$$

Príklad 4. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa množia vajcami.

$$\forall x (Vtak(x) \Rightarrow Mnoz_vaj(x))$$

$$\exists x (Vtak(x) \wedge \neg Mnoz_vaj(x))$$

Existuje taký vták, ktorý sa nemnoží vajcami.

(b) Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.

$$\exists x (sport(x) \wedge \neg fyz_kond(x))$$

$$\forall x (sport(x) \Rightarrow fyz_kond(x))$$

Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé nepárne číslo je prvočíslo.

$$\forall x (neparne(x) \Rightarrow prime(x))$$

$$\exists x (neparne(x) \wedge \neg prime(x))$$

Niektoré nepárne čísla nie sú prvočísla.

(d) Existuje taký, čo navštívil Anglicko a hovorí po anglicky.

$$\exists x (navst_UK(x) \wedge hovori_angl(x))$$

$$\forall x (navst_UK(x) \Rightarrow \neg hovori_angl(x))$$

Každý, kto navštívil Anglicko nehovorí po anglicky.

(e) Existuje dym bez ohňa.

$$\exists x (dym(x) \wedge \neg ohen(x))$$

$$\forall x (dym(x) \Rightarrow ohen(x))$$

Každý dym je s ohňom.

Príklad 5. Rozhodnite pre každú formulu, či je tautológia, kontradikcia, alebo či je splniteľná formula, ktorá nie je tautológia:

(a) $(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$,

Pomocou formule $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ prepíšeme skúmanú formulu do ekvivalentného tvaru

$$\exists x \underbrace{(P(x) \vee \neg P(x))}_1 \equiv 1$$

(b) $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$, táto formula je automaticky pravdivá, pretože podformula stojaca za univerzálnym kvantifikátorom $(P(x) \vee \neg P(x)) \equiv 1$ pre každé individuum x .

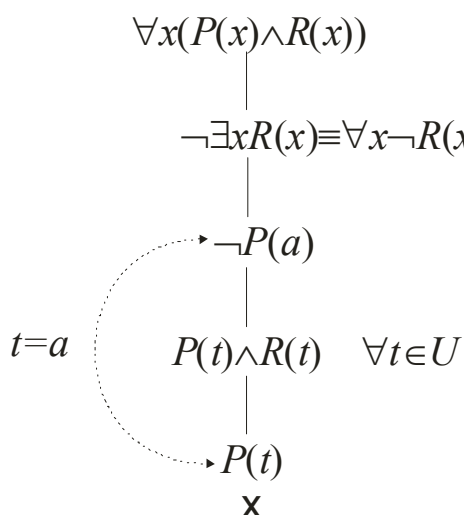
(c) $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$, navrhne interpretáciu \mathcal{I} , pre ktorú je formula nepravdivá. Nech univerzum U je množina prirodzených čísel $\{0,1,2,3,\dots\}$ a $P(x)$ je unárny predikát,

ktorého význam je „ x je párne číslo“. Ľavá časť implikácie $\exists x P(x)$ je evidentne pravdivá, „existuje také prirodzené číslo x , ktoré je párne“. Pravá časť implikácie $\forall x P(x)$ je evidentne nepravdivá, nie „každé prirodzené číslo je párne“. To znamená, že celková implikácia ($1 \Rightarrow 0$) je nepravdivá. To znamená, že študovaná formula nie je ani tautológia a ani kontradikcia, je splniteľná (existujú interpretácie \mathcal{I} v ktorých je pravdivá, napr. ak predikát $P(x)$ interpretujeme „ x je nezáporné číslo“).

(d) $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x))$, túto formulu môžeme pomocou zákona pre negáciu univerzálneho kvantifikátora ($\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$) previesť do ekvivalentného tvaru $(\forall x P(x)) \wedge \neg(\forall x P(x))$, ktorá môže vzniknúť z elementárnej tautológie výrokovej logiky $p \wedge \neg p$ substitúciou $p / \forall x P(x)$, formula je kontradikcia.

Príklad 6. Rozhodnite pomocou sémantického tabla, či teória T je konzistentná.

$$T = \{ \forall x (P(x) \wedge R(x)), \neg \exists x R(x), \neg P(a) \}.$$



Príklad 7. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý študent je maturant

Každý maturant nie je analfabet

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

$$\phi_1: \forall x (st(x) \Rightarrow mat(x)) \Rightarrow (st(t) \Rightarrow mat(t))$$

$$\phi_2: \forall x (mat(x) \Rightarrow \neg analf(x)) \Rightarrow (mat(t) \Rightarrow \neg analf(t))$$

použitím hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

dostaneme

$(st(t) \Rightarrow \neg analf(t))$ pre ľubovoľné individuum t , čiže platí aj

$$\forall x (st(x) \Rightarrow \neg analf(x))$$

Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“

(b)

niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

$$\varphi_1: \exists x (st(x) \wedge kom(x)) \Rightarrow (st(a) \wedge kom(a))$$

$$\varphi_2: \exists x (kom(x) \wedge mat(x)) \Rightarrow (kom(b) \wedge mat(b))$$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$$\varphi_1: \exists x (fyz(x) \wedge astr(x)) \Rightarrow (fyz(a) \wedge astr(a))$$

$$\varphi_2: \forall x (chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)) \Rightarrow (chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a))$$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí $fyz(a)$ a $astr(a)$. Použitím $fyz(a)$ a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg chem(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x astr(x) \wedge \neg chem(x)$$

alebo, „niektorý astronómovia nie sú chemici“.

(d)

Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$$\varphi_1: \forall x (st(x) \Rightarrow \neg analf(x)) \Rightarrow (st(a) \Rightarrow \neg analf(a)) \Rightarrow (analf(a) \Rightarrow \neg st(a))$$

$$\varphi_2: \exists x (analf(x) \wedge vce(x)) \Rightarrow (analf(a) \wedge vce(a))$$

Z druhej premisy vyplýva, že $analf(a)$ a $vce(a)$. Použitím $analf(a)$ s prvou premisou dostaneme $\neg st(a)$, spojením s $vce(a)$ dostaneme

$$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x vce(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje analfabet): „niektorý včelár nie je študent“

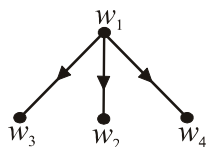
Príklad 8. Pomocou prirodzenej dedukcie odvod'te formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad)
2.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
3.	p	(aktivácia pomocného predpokladu)
<hr/>		
4.	q	(modus ponens na 1. a 3.)
5.	r	(modus ponens na 2. a 3.)
6.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na 4. a 5.)
7.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia 3.)

(b) $(\forall x \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y \varphi(y))$

1.	$\forall x \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t)$	konkretizácia všeob. kvantifikátora
3.	$\exists x \varphi(x)$	introdukcia existenčného kvantif.
4.	$(\forall x \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y \varphi(y))$	deaktivácia 1

$$(a) \quad w_0 \models \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

$$3 \quad v(w_1, \Box \varphi \Rightarrow \Box \psi) = 0$$

2 a 3 vznikli z 1 podl'a (12.9d')

4 vznikla z 2 podľa (12.9e), $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$

5 a 6 vznikli z 3 podľa (12.9d')

7 vznikla z 5 podľa (12.9e), $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$

8 vznikla z 6 podľa (12.9e), $\exists w_i \in \Gamma(w_i)$

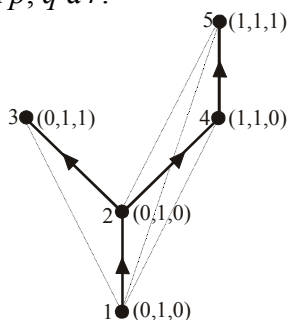
9 vznikli z 4 podľa (12.9d)

$$(b) \quad w_0 \models \Diamond \varphi \Rightarrow \Box \varphi,$$
$$w_0 \not\models \Box \varphi$$
$$w_2 \not\models \psi \quad \exists w_2 \in \Gamma(w_0)$$

O

$$p \Rightarrow ((\neg(p \wedge q)) \vee (\neg q \vee \neg r))$$

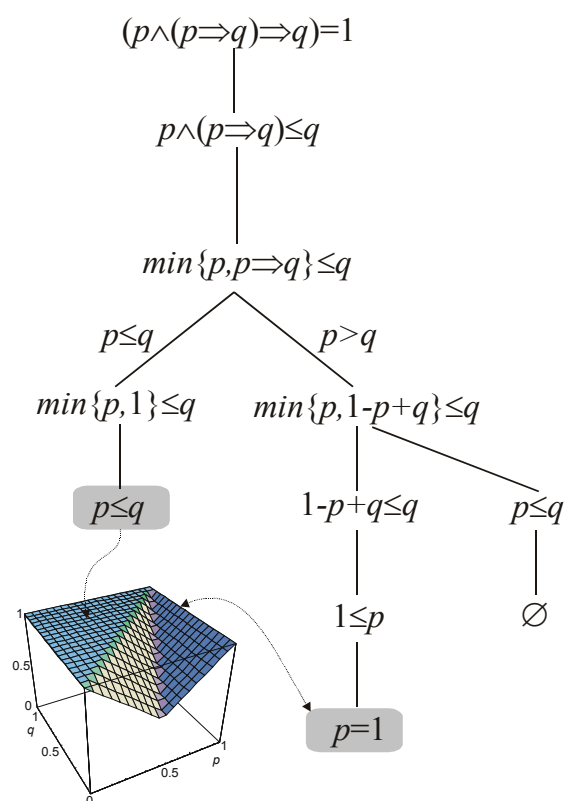
pre Kripkeovský model špecifikovaný reláciou R , pričom každý vrchol je ohodnotený trojicou pravdivostných hodnôt premenných p , q a r .



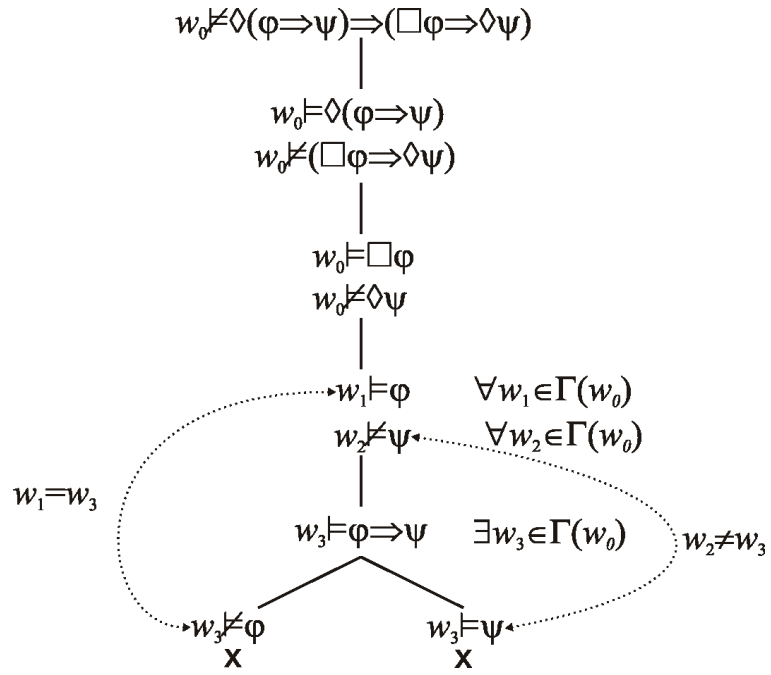
	1	2	3	4	5
p	0	0	0	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0	0	1	0	1
$p \wedge q$	0	0	0	1	1
$\neg r$	0	0	0	0	0
$\neg q$	0	0	0	0	0
$\neg q \vee \neg r$	0	0	0	0	0
$\neg (p \wedge q)$	0	0	1	0	0
$(\neg (p \wedge q)) \vee (\neg r \vee \neg q)$	0	0	1	0	0
$p \Rightarrow (\neg (p \wedge q)) \vee (\neg r \vee \neg q)$	0	0	1	0	0

Z nasledujúcich dvoch príkladov vyberte jeden a ten riešte, v prípade, že budete riešiť oba, započíta sa vám lepší výsledok z týchto dvoch.

Príklad 11a. Zistite pre ktoré hodnoty premenných p a q je výroková formula vo fuzzy logike pravdivá $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.



Príklad 11b. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formuly modálnej logiky $\Diamond(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$.



Obidve vetvi tabla sú uzavreté, preto formula je tautológia.