1. kontrolná písomka z ADM, skupina A
(konaná dňa 16. 3. 2006)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n \quad \text{(3 body)}$$

pre $a,b \geq 0$.

2. príklad. Dokážte pre navzájom rôzne a,b,c metódou vymenovaním prípadov vlastnosť

$$min\{a,min\{b,c\}\} = min\{min\{a,b\},c\} \quad \text{(3 body)}$$

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

(a) $A \cup B = A$ (1 bod)

(b) $A \cap B = A$ (1 bod)

(c) $A - B = A$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

5. príklad. Nájdite koeficient x^4y^3 v rozvoji $(x + y)^7$. (3 body)

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$(a+b)^n \ge a^n + b^n \quad \text{(3 body)}$$

pre $a,b \ge 0$.

(1) Indukčný predpoklad $\qquad P(n) = (a+b)^n \ge a^n + b^n$

(2) Platnosť pre n=1 $\qquad P(1) = (a+b) \ge a^1 + b^1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1) = (a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \ge (a^n + b^n)(a+b)$$
$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \underbrace{a^n b + ab^n}_{\ge 0} \ge a^{n+1} + b^{n+1}$$

2. príklad. Dokážte pre navzájom rôzne a,b,c metódou vymenovaním prípadov vlastnosť

$$min\{a, min\{b,c\}\} = min\{min\{a,b\}, c\} \quad \text{(3 body)}$$

(1) $a<b<c$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a}, c\right\}}_{a}$$
$$a = a$$

(2) $a<c<b$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a}, c\right\}}_{a}$$
$$a = a$$

....

(6) $c<b<a$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{c}$$
$$c = c$$

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

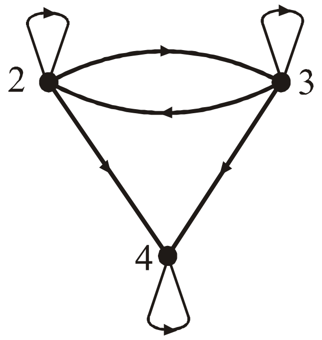
(a) $A \cup B = A$ (1 bod) .... $B \subset A$

(b) $A \cap B = A$ (1 bod) .... $A \subset B$

(c) $A - B = A$ (1 bod) .... $(A \cap B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$

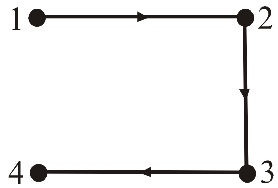
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient x^4y^3 v rozvoji $(x + y)^7$. (3 body)

$$(x+y)^7 = \sum_{j=0}^{7}\binom{7}{j}x^{7-j}y^j = \ldots + \binom{7}{3}x^4y^3 + \ldots$$

Koeficient pri x^4y^3 je binomiálny koeficient $(7/3) = 7!/(3!\,4!) = 35$

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{(A_1 \cup (A_2 \cup A_3))} = \bar{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cup A_3)} = \bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$$
$$= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$