Matematicka logika, Teoria mnozin I, Teoria mnozin II
Matematicka logika

Schema Usudzo-vania	Teorem vyrokovej logiky	Nazov schemy
	$p \Rightarrow (p \vee q)$	adicia
	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	simplifikacia
	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	konjunkcia
	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	modus ponens
	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow) \Rightarrow \neg p)$	modus tollens
	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	hypoteticky sylogizmus
	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	disjunktivny sylogizmus
	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	inverzia implikacie
	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	reductio ad absurdum

vlastnost	formula teorie mnozin
komutativnost	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
asociativnost	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributivnost	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ to iste aj pre zjednotenie
DeMorgan.	Uvedene vyssie
idempotentnost	$A \cap A = A,\ A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A,\ A \cup \emptyset = A$
absorbcia	$A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup U = U$
involucia	$\bar{A} = A$
z. vylucenia tretieho	$A \cup A = U$
zakon sporu	$A \cap A = \emptyset$
rozdiel mnozin	$A - B = \bar{A} \cup B$
distr z. pre rozdiely	$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

Metody dokazov viet

Priamy dokaz – Priamo dokazujeme implikaciu $p \Rightarrow q$

Nepriamy dokaz – Z implikacie $p \Rightarrow q$ spravime inverznu implikaciu $\neg q \Rightarrow \neg p$ pretoze tato implikacia ma rovnaku pravdivostnu tabulku ako predosla, teda dokazanim inverznej dokazeme povodnu

Dokaz sporom – Namiesto $p \Rightarrow q$ dokazujeme toto: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$ Teda, ak $p \Rightarrow q \wedge p \Rightarrow \neg q$, potom plati $\neg p$

Nejake dalsie logicke vzorce
$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$p \Rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q)$
DeMorganove pravidla: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \quad ; \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Mnoziny
Def: 2 mnoziny A, B sa rovnaju prave vtedy, ak: $(A = B) \forall (x \in U) : ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$
Def: A je podmnozinou B prave vtedy, ak: $\forall x \in U : ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$
Def: $A \cup B$ je zjednotenie mnozin prave vtedy, ak: $x \in A \vee x \in B$
Def: Hovorime, ze mnozina $A \cap B$ je prienik mnozin prave vtedy, ak: $x \in A \wedge x \in B$
Def: Hovorime, ze mnozina $\bar{A}$ je doplnok mnoziny A prave vtedy, ak: $x \notin A$
Def: Hovorime, ze mnozina A-B je rozdiel mnozin prave vtedy, ak: $x \in A \wedge x \notin B$ **Veta:** Mohutnost potencnej mnoziny je $|P(A)| = 2^{|A|}$
Veta: Mohutnost karzetianskeho sucinu $X \times Y$ s konecnous mohutnostou $|X| = m,\ |Y| = n$ je $m.n$

Relacie
Def: Diagonalna relacia ma tieto vlastnosti:

- **Reflexivna**, $\forall x \in X : (x, x) \in R$
- **Symetricka**, $\forall (x, y \in X) : ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- **Antisymetricka**, $\forall (x, y \in X) : ((X, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y)$
- **Tranzitivna**, $\forall (x, y, z \in X) : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Typy relacii: Ekvivalentnost: (R,S,T); Ciastocne usporiadanie: (R,A,T)
Veta: Relacia ekvivalentnosti rozdeluje mnozinu X na disjunktne triedy ekvivalentnosti

Kombinatorika
Veta: Vlastnosti kombinacnych cisel
$\frac{\binom{n}{k}=n!}{(n-k)!k!}$

Kombinatorika I, II, Algebraicke struktury
Kombinatorika

Veta: Vlastnosti kombinacnych cisel
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$; $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$; $\binom{n+1}{k} = \frac{n-1}{n-k+1}\binom{n}{k}$
Vzorce pre kombinatoriku: Kombinacie s pakovanim : $C' = \binom{n+k-1}{k-1}$ Permutacie s opakovanim: $P' = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_p!}$ **Veta: Binomicka veta** Nech x a y su kladne realne premenne a n je kladne cele cislo, potom $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
Veta: Multinomicka veta Nech n je kladne prirodzene cislo, potom pre lubovolne $x_1, x_2, x_3, \ldots$ plati: $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p}$
Financna matematika: Dam do banky p_0 korun, rocny urok mam y a chcem vediet. kedy budem mat p_n penazi: $p_n = p_{n-1} + \frac{y}{100}.p_{n-1}$ Expliticny vzorec, podla ktoreho ratame: $p_n = p_0(1 + \frac{y}{100})^n$, pricom to posledne n nepoznam, a mam ho vyratat podla zadania. Ak mam splacat urok, tak to iste, ale v zatvorke bude $(1 - \frac{y}{100})$
Veta: Princip Inkluzie: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Veta: Pocet vsetkych derangementalnych permutacii n obejktov je: $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

Algebraicke struktury
Operacie nad mnozinami:

- asociativna na mnozine X vtedy a len vtedy, ak pre kazde $x, y, z \in X$ plati: $(x * y) * z = x * (y * z)$
- komutativna na mnozine X vtedy a len vtedy, ak pre kazde $x, y \in X$ plati: $x * y = y * x$
- Element $e \in X$ sa nazyva jednotkovy vzhĂžadom k binarnej operacii $*$ na mnozine X vtedy a len vtedy, ak pre kazde $x \in X$ plati: $x * e = x \wedge e * x = x$
- Element y.X sa nazyva inverzny vzhĂžadom k elementu x . X a k binarnej operacii . na mnozine X vtedy a len vtedy, ak plati: $y * x = x * y = e$

Def: Nech G je neprazdna mnozina a . je binarna operacia nad touto mnozinou. Algebraicka struktura (G,.) sa nazyva pologrupa vtedy a len vtedy, ak binarna operacia $*$ je asociativna. Ak binarna operacia $*$ je aj komutativna, potom algebraicka struktra sa nazyva komutativna pologrupa (alebo Abelova pologrupa)
Def: Pologrupa (A,*) sa nazyva monoid vtedy a len vtedy, ak ma jednotkovy element
Def: Monoid (G,*) sa nazyva grupa vtedy a len vtedy, ak ku kazdemu elementu $x \in G$ existuje inverzny element $x^{-1} \in G$. Plati teda, ze algebraicka struktura (G,*) je grupa vtedy a len vtedy, ak s splnene tieto tri podmienky:

1. binarna operacia * je asociativna,
2. existuje jednotkovy element $e \in G$
3. pre kazde $x \in G$ existuje inverzny element $x^{-1} \in G$

Mohutnost mnoziny G sa nazyva rad grupy (G,*) , oznacuje sa $|G|$.

polo gru pa-asoc iati vna
-nepraz dna
-je defino vana na mnoz ine
mono id- pol ogru pa
-existuje jed notko vy prv ok
grup a-mo noi d
-existuje i nverz ny prv ok
komutat ivn a V x,y p atri M: x◦y =y◦x
asociativ na V x,y,z patr i M: (x◦y) ◦z=x◦ (y*z)
inv.p rvok V x patr i M, E y patr i M : x◦y=e ^ y◦x =e
jedn.prv ok E e p atri M, V x p atri M: x◦e =x ^ e◦x =x

Boolova Algebra, Matice I, II, Grafy I
Boolova Algebra

Matice
Vlastnosti maticovych operacii

- Nasobit mozme navzajom len ak mame taketo matice: $t(A) = (m, k)$ a $t(B) = (k, n)$ a potom vysledna matica bude typu $t(C) = (m, n)$.

Hodnost matice

- Ratame tak, ze maticu upravujeme na Δ tvar, a potom pocet nenulovych riadkov je jej hodnost
- Mozme pri tom pouzit operacie: *Vymenit riadok, vymenit stlpec, vynasobit riadok nenulovou konstantou, spocitat riadky*
- Ak mame riadok alebo stlpec nulovy, tak ho mozme vynechat, takisto ak je riadok alebo stlpec nasobok ineho riadku alebo stlpca.
- Majme maticu $A_{k \times k}$. Ak $h(A) = k$, potom maticu nazyvame regularna. Ak $h(A) < k$, potom je matica singularna

Inverzna matica
Inverzna matica $A^{-1} \exists \Leftrightarrow A$ je regularna
A je regularna $\Leftrightarrow t(A) = (k, k) \ \wedge \ h(A) = k$

Gaussova Elminacna metoda
Ak mame n neznamych, tak si ako parametre zvolime $(n-1)$ neznamych. Vzdy zaciname od spodneho riadku.

Binarne Matice

1. Operacia $\wedge$ je po zlozkach
2. Operacia $\vee$ je po zlozkach
3. Operacia $\otimes$ je ako nasobenie, ale namiesto $\cdot$ mame $\wedge$ a namiesto $+$ mame $\vee$

Determinanty

- Priraduju sa len stvorcovym maticiam
- Pri ratani determinantov nemozeme skrtat riadky / stlpce
- Povolene upravy: *Vymena riadkov -¿ zmena znamienka, Nasobenie nenulovym cislom -¿ musime potom determinant tymto cislom vydelit, K riadku mozme pridat k-nasobok ineho riadku, bez cla*
- Matica je regularna, ak je determinant nenulovy
- Ak su matice A a B rovnakeho typu, tak determinant ich sucinu je sucin ich determinantov
- Determinant Δ matice je sucin prvkov na diagonale
- $|A| = |A^T|$
- Ak matica obsahuje nulovy riadok, alebo stlpec, potom je $det(A) = 0$

Crammerovo pravidlo, Frobienova veta

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ |A| \neq 0$$

Veta: Homogenny system linearnych rovnic ma netrivialne (nenulove) riesenie vtedy a len vtedy, ak hodnost matice koeficientov je mensia ako pocet neznamych: $h(A) < n$.
Frobeniova veta: System linearnych rovnic $Ax = b$ ma riesenie vtedy a len vtedy, ak: $h(A) = h(A')$, kde A' je rozsirena matica. Plati:

1. Ak $h(A) \neq h(A')$, potom system nema riesenie
2. Ak $h(A) = h(A') = n$, ma prave jedno riesenie
3. Ak $h(A) = h(A'A < n$, ma nekonecne vela rieseni

Grafy

Sled – Alternujuca postupnost vrcholov a hran. Sled zacina a konci vrcholom. Ked su vedla v sebe v slede vrchol a hrana, tak musia incidovat.

Tah – Taky sled, v ktorom sa hrany neopakuju

Cesta – Taky sled, v ktorom sa vrcholy neopakuju

Kruznica – Uzavreta cesta

Hamiltonovska cesta – Cesta, ktora prechadza vsetkymi vrcholmi grafu

Matica susednosti a incidencie

- Matica susednosti je VxV, teda vrcholy krat vrcholy. Je symetricka, obsahuje len 1 alebo 0 (pripadne cislo vyjadrujuce nasobnost, ak mame graf s nasobnymi hranami.
- Matica incidencie je vxE, teda riadky su vrcholy, a stlpce su hrany.

Hladanie vsetkych sledov v grafe
A = matica susednosti, n = dlzka sledu, x = pocet sledov dlzky n z bodu a do bodu d: urobime si A^n a potom cislo x ma suradnice (a, d) vo vyslednej matici.

Par vlastnosti grafov

- Sucet stupnov vsetkych vrcholov je (musi byt) rovny dvojnasobku poctu hran
- Graf sa da nakreslit jednym tahom (je Eulerovsky), ak vsetky vrcholy su parneho stupna, alebo ak prave 2 vrcholy su neparneho stupna
- Sucet stupnov vrholov v grafe musi byt parne cislo (inak sa neda nakreslit - nemoze existovat)

Bipartitne Grafy
Graf, ktory ma vlastnost, ze jeho vrcholova mnozina moze byt rozdelena na dve disjunktne podmnoziny V_1 a V_2 tak, ze kazda hrana spaja vrchole z jednej z tychto mnozin s vrcholom z druhej z tychto podmnozin. Ziazdny kompletny graf, ktory ma pocet vrholov viac ako **2** nemoze byt bipartitny.

Kompletne grafy

- Pocet hran v kompletnom grafe K_n : $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$; $|V| = n$
- Kompletny graf je Eulerovksy (da sa nakreslit jednym tahom), ak n je neparne cislo.
- Kompletny graf neobsahuje slucky.
- $K_{r,s}$ je ina forma kompletneho grafu. Plati: $|V| = r.s$ a $|E| = r + s$. V ramci triedy nemozu byt ziadne hrany, medzi triedami su spojene vsetky hrany.

Podgraf

1. Graf sam sebe je podgrafom
2. Faktorovy podgraf = vsetky vrcholy musia zostat, ale mozu sa vynechat niektore hrany
3. Pocet vsetkych faktorovych podgrafov: ak ma graf n hran, potom je to 2^n

Komplement Obsahuje rovnake vrcholy, ale ine hrany, a to tie hrany, ktore sa nenachadzaju v tom grafe, ktory komplementuje.

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$max\{a,min\{b,c\}\}=min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.
Riešenie:
(a) $a\le b\le c$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{b}$$
(b) $a\le c\le b$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{c}$$
(c) $b\le a\le c$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}}_{a}$$
(d) $b\le c\le a$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$
(e) $c\le a\le b$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$
(f) $c\le b\le a$
$$\underbrace{max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{a}\right\}}_{a}$$
Vo všetkých prípadoch sme dostali rovnosť, čiže identita platí pre každé a, b, c.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A-B=A$, $A\cap B=\emptyset$
(b) $A\cap B=A$, platí ak $A\subseteq B$
(c) $A\cup B=A$, platí ak $B\subseteq A$

3. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) x je menší ako y,
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x<y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z))$
antisymetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\notin R)$
(b) x má rovnaké krstné meno ako y,
reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$
(c) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$

4. príklad.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve jednu jednotku, 10
(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}=1+10+45+120=176$
(c) minimálne tri jednotky,
$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=$
$120+210+252+210+120+45+10+1=968$
$=2^{10}$-C(10,0)-C(10,1)-C(10,2)=1024-1-10-45=968

5. príklad
Na fakulte je 345 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 212 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 188 študentov, ktorí si zapísali súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika. Koľko študentov má zapísaný aspoň jeden z predmetov Matematická analýza alebo Diskrétna matematika.
$|MA|=345$, $|DM|=212$, $|MA\cap DM|=188$
$|MA\cup DM|=|MA|+|DM|-|MA\cap DM|=345+212-188=369$

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxyz+wx\overline{y}z+wx\overline{y}\,\overline{z}+w\overline{x}y\overline{z}+w\overline{x}\,\overline{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(11#1)
2	(1101)		2	(2,3)	(110#)
3	(1100)		3	(2,5)	(1#01)
4	(1010)				
5	(1001)				

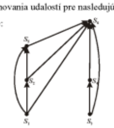
$U_f^{(0)}$ (1111) (1101) (1100) (1010) (1001)
$U_f^{(1)}$ (11#1) (110#) (1#01)

Klauzule z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto
$$\tilde{V}=\{(11\#1),(110\#),(1\#01),(1010)\}$$
Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar
$$f(w,x,y,z)=wxz+wx\overline{y}+w\overline{y}z+w\overline{x}y\overline{z}$$

7. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&1&1&1\\q&1&-3&3\end{pmatrix}$$
hodnosť 2.
Riešenie:
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\\boxed{2}&1&-1&2\\\boxed{p}&1&1&1\\\boxed{q}&1&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&1&1-2p&1+p\\0&1&-3-2q&3+q\end{pmatrix}$$
Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p=-3-2q$ a $1+p=3+q$, riešením tohto systému dostaneme p=3 a q=1, potom posledná ekvivaletná matica má tvar
$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\end{pmatrix}$$

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla
$$2x_1-3x_2+x_3=1$$
$$x_1+2x_2-x_3=0$$
$$2x_1+x_2+x_3=-1$$
Riešenie:
$$|A|=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&2&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=12,\ |A_1|=\begin{vmatrix}1&-3&1\\0&2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=2,$$
$$|A_2|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-6,\ |A_3|=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&2&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10$$
Potom riešenie
$$x_1=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ x_2=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{-10}{12}=-\frac{5}{6}$$

9. príklad. Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica
má hodnosť $h(A)=3$. $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}$
Riešenie:
Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice
$$s_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\0\\0\end{pmatrix},\ s_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\0\end{pmatrix},\ s_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$$
Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty
$$\alpha_1s_1+\alpha_2s_2+\alpha_3s_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty
$$\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{12}+\alpha_3a_{13}=0$$
$$\alpha_2a_{22}+\alpha_3a_{23}=0$$
$$\alpha_3a_{33}=0$$
Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1,s_2,s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Skonštruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:
S_1: x:=0
S_2: x:= x + 1
S_3: y:=2
S_4: z:=y
S_5: x:= x + 2
S_6: y:= x + z
Riešenie:


11. príklad. Predpokladajme, že spojitý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6\times4/2-6+1+1=8$.
kde $|R|$ je počet oblastí, $|E|$ je počet hrán, $|V|$ je počet vrcholov a $|K|$ je počet komponent.

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$min\{a,min\{b,c\}\}=min\{min\{a,b\},c\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.
(1) $a\le b\le c$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{a}$
(2) $a\le c\le b$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{a}$
(3) $b\le a\le c$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{b}$
(4) $b\le c\le a$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{b}$
(5) $c\le a\le b$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{c}$
(6) $c\le b\le a$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{c}$

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A\cap B=B\cap A$, (e) $A-B=B-A$, (c) $A-B=A$.

(a) $A\cap B=B\cap A$, platí pre každé množiny A a B
(b) $A-B=B-A$, platí ak $A=B$.
(c) $A-B=A$, platí ak $A\cap B=\emptyset$

3. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) x je väčší ako y,
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
(c) x navštevuje rovnakú školu ako y.

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty
$$\alpha_1a_{11}=0$$
$$\alpha_1a_{21}+\alpha_2a_{22}=0$$
$$\alpha_1a_{31}+\alpha_2a_{32}+\alpha_3a_{33}=0$$
Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1,s_2,s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Odôvodnite, prečo môže či nemôže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?
Riešenie:
Nemôže existovať, taký graf by mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, čo odporuje teorému 10.1.

11. príklad. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n?

Riešenie: V príklade v textu sme videli, že chromatické číslo C_n je 2 pre párne n a 3 pre nepárne n. Pretože koleso W_n je iba n-uholník C_n s centrálnym vrcholom naviac, prepojeným so všetkými vrcholmi C_n na obvode, W_n potrebuje iba o jednu farbu viac ako C_n, práve pre centrálny vrchol. Preto je chromatické číslo W_n je 3 pre párne n a 4 pre nepárne n.

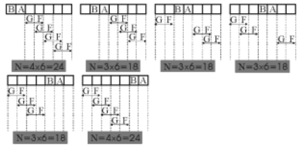
(a) x je väčší ako y,
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x>y)\wedge(y>z)\Rightarrow(x>z))$
antisymetrická: $\forall(x,y\in X)((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\notin R)$
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$
(c) x navštevuje rovnakú školu ako y.
reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$

4. príklad.
Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré
(a) obsahujú podreťazec BCD, (b) obsahujú podreťazec CFGA, (c) dva podreťazce BA a GF.

(a) obsahujú podreťazec BCD, 5!=120

(b) obsahujú podreťazec CFGA, 4! = 24

(c) dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je 2×24+4×18 = 120.

5. príklad
V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

$A_1=\{\text{červivé jabľčka}\}$, $A_2=\{\text{nahnité jabľčka}\}$ $|A_1|=20$, $|A_2|=15$, $|A_1\cap A_2|=10$,
$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=\boxed{\overline{A_1\cup A_2}}=|U|-|A_1\cup A_2|=|U|-(|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|)$$
$$=|U|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=100-20-15+10=$$ [redacted]

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}yz+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$.

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

$U_f^{(0)}$ (1110) (1101) (1011) (0101) (0010) (0001
$U_f^{(1)}$ (#101) (0#01)

$$\tilde{V}=\{(\#101),(0\#01),(1110),(1011),(0010)\}$$
$$f(w,x,y,z)=x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{y}z+wxy\overline{z}+w\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

7. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}$$
hodnosť 2.
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&-1&3-2p&-3+p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&1&-3+2p&3-p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}$$
Pretože požadujme, aby 2., 3. a 4. riadok boli ekvivaletné, potom z podmienok
$$(-3+2p=-5)\wedge(3-p=4)\Rightarrow\boxed{p=-1}$$
$$(1-2q=-5)\wedge(1+q=4)\Rightarrow\boxed{q=3}$$
Potom ekvivaltná matica na prvej strane má tvar
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&1&-3+2p&3-p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\end{pmatrix}$$
To znamená, že pre p=-1 a q=3 má matica hodnosť 2.

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla
$$1x_1+2x_2+x_3=-1$$
$$-3x_1+2x_2+x_3=1$$
$$2x_1+x_2-x_3=0$$
$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-12,\ |A_1|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\1&2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=6,$$
$$|A_2|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-3&1&1\\2&0&-1\end{vmatrix}=-2,\ |A_3|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-3&2&1\\2&1&0\end{vmatrix}=10$$
Potom riešenie
$$x_1=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6},\ x_3=\frac{10}{-12}=-\frac{5}{6}$$

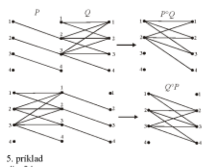
9. príklad.
Dokážte priamo z definície, že matica
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$
s nenulovými diagonálnymi elementmi, má hodnosť $h(A)=3$
Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice
$$s_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\ s_2=\begin{pmatrix}0\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\ s_3=\begin{pmatrix}0\\0\\a_{33}\end{pmatrix}$$
Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty
$$\alpha_1s_1+\alpha_2s_2+\alpha_3s_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1. príklad. Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.
2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny $\{x;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2=1)\}$
3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{a\}$
4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ a
$Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ sú relácie nad $X=\{1,2,3\}$ a $Y=\{1,2,3,4\}$, zostrojte $P\cup Q$, $P\cap Q$,
5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú podreťazec BCD.
6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$ špecifikuje binárnu operáciu na množine A. Ak nie, tak vysvetlite prečo.
7. príklad. Aká je hodnota Boolovej premennej x, ktorá je určená podmienkou $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$, $x+x=\mathbf{0}$, $x\cdot\mathbf{1}=x$.
8. príklad Riešte systémy lineárnych rovníc
$$\begin{array}{rrrcl}x&+y&+z&=&2\\2x&-2y&-z&=&2\\3x&-y&&=&4\end{array}$$
9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy jej transformácie na trojuholníkový tvar
$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}$$
10. príklad. Keď je G obyčajný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, koľko hrán má graf $\overline{G}$? (*Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G. Slučky neuvažujeme.)
11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 40 hranách?

1. príklad.
$np(a)\wedge np(b)\Rightarrow p(a+b)$. Ak $a=2k+1$ a $b=2l+1$, potom $a+b=2(k+l+1)$.
2. príklad
$\{-1,1\}$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel
3. príklad
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$,
4. príklad
$P\cup Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
$P\cap Q=P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
5. príklad
5!=120
6. príklad
Nie je binárna operácia, pretože pre $x,y\in A$ výsledok binárnej operácie $x*y\notin A$ (napr. pre $x<y$ dostaneme záporné $z=x-y$), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do A.
7. príklad
$x=\mathbf{0}$.
$x=\mathbf{0}$.
$x=\mathbf{1}\vee x=\mathbf{0}$
8. príklad
$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\\boxed{2}&-2&-1&2\\\boxed{3}&-1&0&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-4&-3&-2\\\cancel{0}&\cancel{-4}&\cancel{-3}&\cancel{-2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-4&-3&-2\end{array}\right)$$
$$z=4t,\ -4y-3z=-2\Rightarrow y=\frac{1}{2}-3t,\ x+y+z=2\Rightarrow x=\frac{3}{2}-t,\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}3/2\\1/2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}.$$
9. príklad.
$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\\boxed{1}&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&\boxed{-1}&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2$$
10. príklad. Keď je G obyčajný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, koľko hrán má graf $\overline{G}$?
Riešenie: $|V|(|V|-1)/2-|E|$
11. príklad
Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 40 hranách?
$$2|E|=|V|\deg(v)$$
Riešenie: $2\times40=|V|\times4$
$$20=|V|$$

1. príklad. Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.
2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\{x;(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-3x+2=0)\}$
3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.
4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ a
$Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}\subseteq X\times Y$ sú relácie nad $X=\{1,2,3\}$ a $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte $P\circ Q$, $Q\circ P$
5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú podreťazec CFGA?
6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x+y$, pre $A=\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine A. Ak nie, tak vysvetlite prečo.
7. príklad. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
$x+\overline{x}=\mathbf{1}$
$x\cdot\overline{x}=\mathbf{0}$
$x+x=1$
8. príklad. Riešte systémy lineárnych rovníc
$$\begin{array}{rrrcl}2x&+2y&+z&=&4\\x&-y&-z&=&2\\3x&+y&&=&6\end{array}$$
9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy jej transformácie na trojuholníkový tvar
$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$$
10. príklad. Pre ktoré hodnoty n je kompletný graf K_n bipartitný? Pre ktoré hodnoty n je cyklus C_n bipartitný? (Graf, ktorý má vlastnosť, že jeho vrcholová množina môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že každá hrana spája vrchol z jednej z týchto podmnožín s vrcholom z druhej z týchto podmnožín, sa volá *bipartitný graf*.)
11. príklad. Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a jeho doplnkový graf $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G? (*Doplnkový* (complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G. Slučky neuvažujeme.)

1. príklad.
$np(a)\wedge np(b)\Rightarrow np(a\cdot b)$. Ak $a=2k+1$ a $b=2l+1$, potom $a\cdot b=2(2kl+k+l)+1$.
2. príklad
$\{1,2\}$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel
3. príklad
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
4. príklad
$P\circ Q=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$
$Q\circ P=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$



5. príklad
4! = 24
6. príklad
Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do A.
7. príklad
$x=\mathbf{0}\vee x=\mathbf{1}$.
$x=\mathbf{0}\vee x=\mathbf{1}$.
$x=\mathbf{1}$.
8. príklad
$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&1&4\\\boxed{1}&-1&-1&2\\\boxed{3}&1&0&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&1&4\\0&4&3&0\\0&\boxed{4}&3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&1&4\\0&4&3&0\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}2&2&1&4\\0&4&3&0\end{pmatrix}$$
$$z=4t,\ y=-3t,\ x=2+t,\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}2+t\\-3t\\4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}.$$
9. príklad
$$\left(|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\\boxed{1}&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&\boxed{1}&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=2\right)$$
10. príklad
Pre ktoré hodnoty n sú nasledujúce grafy bipartitné?
a) K_n
Riešenie: Iba pre n=2, pre viac ako 2 sú vždy aspoň dva vrcholy v jednej partícii, a ľubovoľné 2 vrcholy musia byť spojené hranou.
b) C_n
Riešenie: pre kružnice párneho stupňa, keď si oindexujeme postupne vrcholy idúc po hranách kružnice, do jednej partície dame vrcholy indexované párnym číslom, do druhej nepárnym číslom.
11. príklad
Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G?
Riešenie: Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf
$$2|E|=|V|\deg(v)$$
$$2\times28=|V|\times(|V|-1)$$
$$|V|=8$$