

# Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 14. 1. 2011

**1. príklad.** Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

**2. príklad.** Ktoré elementy patria do množiny:  $A = \{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 4 = 0)\}$ , vytvorte komplement tejto množiny  $\bar{A}$  vzhľadom k  $\mathbb{R}$ ?

**3. príklad.** Zostrojte potenčnú množinu  $\mathcal{P}(A)$  pre  $A = \{\emptyset, a\}$ .

**4. príklad.**  $P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\} \subseteq Y \times Y$  a  $Q = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,4)\} \subseteq Y \times Y$  sú relácie nad  $Y = \{1,2,3,4\}$ . Zostrojte kompozície  $P \circ Q$ ,  $Q \circ P$ .

**5. príklad.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

**6. príklad.** Rozhodnite, či symbol  $*$  definovaný ako  $x * y = x - y$ ,  $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$  špecifikuje binárnu operáciu na množine  $A$ . Ak nie, tak vysvetlite prečo.

**7. príklad.** Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej  $x$  platia nasledujúce podmienky

(a)  $\bar{x} \cdot 0 = 1$ , (b)  $\bar{x} + 1 = 0$ , (c)  $x \cdot 1 = 0$ , (d)  $\bar{x} + \bar{x} = 1$ , (e)  $x \cdot 1 = x$ .

**8. príklad** Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 6$$

$$2x - 2y - z = -5$$

$$3x - y = 1$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**10. príklad.** Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápalek, kedy máte na začiatku hry 5 zápalek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

**11. príklad.** Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

**Prémiový príklad.** Zostrojte inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Poznámka:** Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi (alebo 60 bodmi, v prípade korektného riešenie prémiového príkladu), čas na písomku je 90 minút.

## Riešenie

**1. príklad.** Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

Riešenie: Ľahko sa presvedčíme, že  $P(1) = 1$ , potom pre  $P(n+1)$  platí

$$P(n+1) = P(n) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

**2. príklad.** Ktoré elementy patria do množiny:  $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 4 = 0)\}$

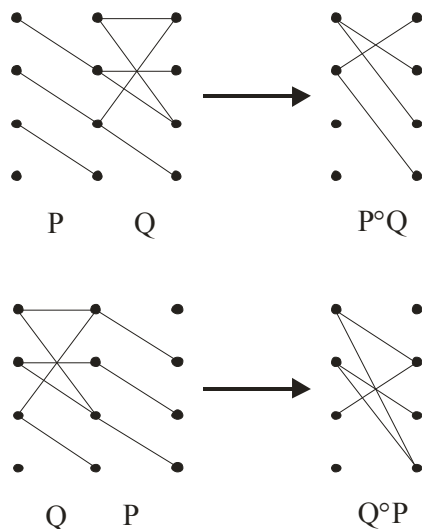
Riešenie:  $A = \{-2, 2\}$ ,  $\bar{A} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ .

**3. príklad.** Zostrojte potenčnú množinu  $\mathcal{P}(A)$  pre  $A = \{\emptyset, a\}$ .

Riešenie:  $A = \left\{ \begin{smallmatrix} \emptyset & a \\ a & b \end{smallmatrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

**4. príklad.**  $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \subseteq Y \times Y$  a  $Q = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\} \subseteq Y \times Y$  sú binárne relácie nad  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ . Zostrojte kompozície  $P \circ Q$ ,  $Q \circ P$ .

Riešenie:



**5. príklad.** Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

Riešenie:

$$6! = 720$$

**6. príklad.** Rozhodnite, či symbol  $*$  definovaný ako  $x * y = x - y$ ,  $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  špecifikuje binárnu operáciu na množine  $A$ . Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Riešenie:

Nie je binárna operácia, pretože pre  $x, y \in A$  výsledok binárnej operácie  $x * y \notin A$  (napr. pre  $x < y$  dostaneme záporné  $z = x - y$ ), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do  $A$ .

**7. príklad.** Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej  $x$  platia nasledujúce podmienky

- (a)  $\bar{x} \cdot 0 = 1$
- (b)  $\bar{x} + 1 = 0$
- (c)  $x \cdot 1 = 0$ ,
- (d)  $\bar{x} + \bar{x} = 1$ ,
- (e)  $x \cdot 1 = x$ .

Riešenie:

- (a) neplatí pre žiadne  $x$
- (b) neplatí pre žiadne  $x$
- (c)  $x = 0$ ,
- (d)  $x = 0$ ,
- (e) platí pre každé  $x$

**8. príklad** Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$x + y + z = 6$$

$$2x - 2y - z = -5$$

$$3x - y = 1$$

Riešenie:

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

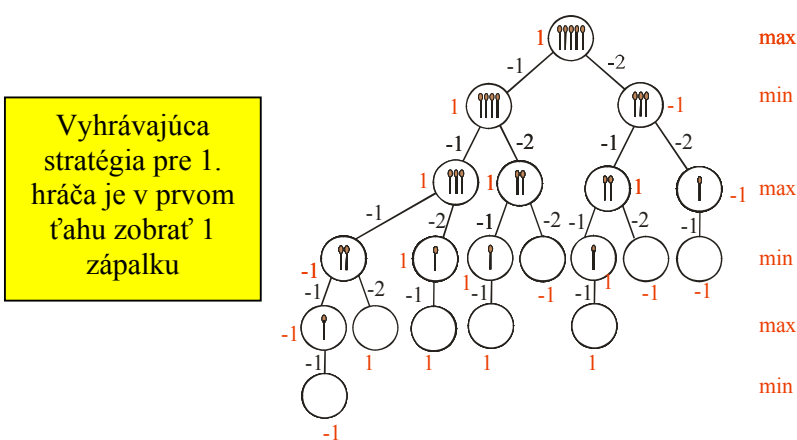
$$z = t, -4y - 3z = -17 \Rightarrow y = \frac{17}{4} - \frac{3}{4}t, x + y + z = 6 \Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}t, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**9. príklad.** Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

**10. príklad.** Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápalek, kedy máte na začiatku hry 5 zápalek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

Riešenie:



Na obrázku sú vrcholy s počtom zápalky na hromádke, červená jednotka znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), červene označená  $-1$  znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Čierne ohodnotenia hrán  $-1$  a  $-2$  znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápalky hráčom. Z ohodnotenia koreňa vyplýva, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia.

**11. príklad.** Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

Riešenie:  $2 \times 30 = |V| \times 5$

$$12 = |V|$$

**Prémiový príklad.** Zostrojte inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$