Appendix

Polynómy, algebraické rovnice, korene a rozklad racionálnej funkcie

A1. Základné vlastnosti polynómov

Polynóm n-tého stupňa premennej x (komplexnej) je definovaný vzťahom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{(A1)}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sú koeficienty (komplexné) polynómu. ***Stupeň polynómu*** $P(x)$ označíme

$$deg(P) = n \qquad \text{(A2)}$$

Nech $\mathcal{P}(x)$ je množina všetkých polynómov premennej x,

$$\mathcal{P}(x) = \{P(x)\} \qquad \text{(A2)}$$

Nad takto definovanou množinou obsahujúcou všetky možné polynómy premennej x môžeme definovať operácie súčinu skalára s polynómom, súčet, súčin a rozdiel dvoch polynómov. Pripomeňme, že tieto operácie zachovávajú množinu $\mathcal{P}(x)$. Dva polynómy $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ sú si ***rovné*** (ekvivalentné, $P(x) = Q(x)$) vtedy a len vtedy ak platí

(1) $$deg(P) = n = deg(Q) = m \qquad \text{(A3a)}$$

(2) $$(\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\})(a_k = b_k) \qquad \text{(A3b)}$$

Jednotlivé operácie nad polynómami sú špecifikované takto:

(a) ***Súčin skalára α s polynómom*** $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$$\alpha * P(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha * a_k) x^k \qquad \text{(A4a)}$$

(b) ***Súčet (rozdiel) polynómov*** $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$, pričom predpokladáme, že $deg(P) \geq deg(Q)$

$$P(x) \pm Q(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \pm b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k \qquad \text{(A4b)}$$

(c) ***Súčin polynómov*** $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$

$$P(x) * Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k'=0}^{m} a_k b_{k'} x^{k+k'} \qquad \text{(A4c)}$$

Operácia delenia dvoch polynómov je podstatne komplikovanejšia, než ako predchádzajúce operácie, ***podiel*** polynómov $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ a $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ má tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{A5a}$$

čo môžeme prepísať pomocou vynásobenia polynómom $Q(x)$ do alternatívneho tvaru

$$P(x) = R(x) * Q(x) + S(x) \tag{A5b}$$

V prípade, že platí $\deg(P) < deq(Q)$, potom platí $S(x) = P(x)$ a $R(x) = 0$, t. j. podiel dvoch polynómov je dobre definovaná operácia len ak je splnená táto podmienka

$$\deg(P) \geq deq(Q) \tag{A6}$$

Potom pre stupne $R(x)$ a $S(x)$ platí

$$deg(R) = deg(P) - deg(Q) \geq 0 \tag{A7a}$$

$$deg(S) < deg(Q) \tag{A7b}$$

Príklad 1. Nech $P(x) = 1 + 2x + x^2 - x^3$ a $Q(x) = 2 + x + x^2$, podľa požadovanej vlastnosti (A5a) spočítame podiel

$$\frac{1 + 2x + x^2 - x^3}{2 + x + x^2} = R(x) + \frac{S(x)}{2 + x + x^2}$$

alebo

$$1 + 2x + x^2 - x^3 = R(x)\left(2 + x + x^2\right) + S(x) \tag{$*$}$$

Predpokladajme, že polynómy $R(x)$ a $S(x)$ majú tvar

$$R(x) = a_0 + a_1 x$$

$$S(x) = b_0 + b_1 x$$

kde a_i a b_j sú neznáme koeficienty, ktoré určíme tak, aby platila podmienka ($*$). Dosadením týchto dvoch polynómov do ($*$) dostaneme

$$1 + 2x + x^2 - x^3 = (a_0 + a_1 x)\left(2 + x + x^2\right) + (b_0 + b_1 x)$$

Porovnaním pravej a ľavej strany dostaneme rovnice, ktoré špecifikujú neznáme koeficienty a_i a b_j

$$1 + 2x + x^2 - x^3 = \underbrace{(2a_0 + b_0)}_{1} + \underbrace{(a_0 + 2a_1 + b_1)}_{2} x + \underbrace{(a_0 + a_1)}_{1} x^2 + \underbrace{(a_1)}_{-1} x^3$$

Riešením týchto rovníc dostaneme

$$a_1 = -1, a_0 = 2, b_1 = -2, b_0 = -3$$

Potom riešenie delenia dvoch polynómov má tvar

$$\frac{1 + 2x + x^2 - x^3}{2 + x + x^2} = (2 - x) + \frac{-3 - 2x}{2 + x + x^2}$$

Príklad 2. Konštrukcia rozkladu racionálnej funkcie na tvar (A5a) môže byť jednoducho realizovaná pomocou „stredoškolskej“ operácia delenie dvoch polynómov, čo ukážeme na príklade dvojice polynómov z predchádzajúceho príkladu

$$\left(-x^3 + x^2 + 2x + 1\right) : \left(x^2 + x + 2\right) = ?$$

1. krok:

$$\left(\boxed{-x^3}+x^2+2x+1\right):\left(\boxed{x^2}+x+2\right)=-x$$

$$\frac{-x^3}{x^2}=-x$$

$$\underline{+x^3+x^2+2x}$$

$$2x^2+4x+1$$

2. krok:

$$\left(-x^3+x^2+2x+1\right):\left(\boxed{x^2}+x+2\right)=\underbrace{-x+2}_{podiel}$$

$$\boxed{2x^2}+4x+1$$

$$\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\underline{-2x^2-2x-4}$$

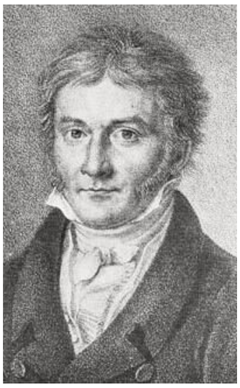
$$\underbrace{2x-3}_{zbytok}$$

3. krok:

$$\left(-x^3+x^2+2x+1\right):\left(\boxed{x^2}+x+2\right)=\underbrace{-x+2+\frac{2x-3}{x^2+x+2}}_{podiel\ a\ zbytok}$$

$$\boxed{2x}-3$$

A2. Algebraická rovnica, korene



C. F. Gauss (1777–1855)

Nech $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ je polynóm n-tého stupňa, ***algebraická rovnica*** priradená tomuto polynómu má tvar

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0 \tag{A8}$$

Číslo α sa nazýva ***koreň*** algebraickej rovnice (A8) práve vtedy ak platí

$$P(\alpha)=0 \tag{A9}$$

Môžeme si položiť otázku, či každá algebraická rovnica má aspoň jeden koreň, tento problém rieši tzv. ***Gaussova fundamentálna veta algebry***.

Fundamentálna veta algebry. Každá algebraická rovnica má v oblasti komplexných čísel aspoň jeden koreň.

Dôkaz tejto vety je netriviálna záležitosť, pri jej dôkazu sa obvykle využíva sofistikovaný aparát matematickej analýzy v oblasti komplexných čísel.

Ak α_1 je koreňom algebraickej rovnice (A8) potom platí formula

$$P(x)=(x-\alpha_1)S(x) \tag{A10a}$$

kde $S(x)$ je polynóm so stupňom o jednotku menším, ako stupeň pôvodného polynómu $P(x)$

$$deg\ S(x) = deg\ P(x) - 1 \tag{A10b}$$

Lineárny polynóm $(x-\alpha_1)$ sa nazýva ***koreňový člen***.

Obráťme našu pozornosť na dôkaz dôležitej formuly (A10). Nech α_1 je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ n-tého stupňa, potom platí $P(\alpha_1) = 0$. Pre každé komplexné x potom platí

$$P(x) - P(\alpha_1) = (x-\alpha_1)a_1 + (x^2-\alpha_1^2)a_2 + ... + (x^n - \alpha_1^n)a_n \tag{$*$}$$

Pre každé $k > 1$ platí $(x^k - \alpha_1^k) = (x-\alpha_1)(\alpha_1^{k-1} + \alpha_1^{k-2}x + ... + x^{k-1})$, Potom ($*$) môžeme upraviť do tvaru $P(x) - P(\alpha_1) = (x-\alpha_1)(\beta_0 + \beta_1x + ... + \beta_{n-1}x^{n-1})$, kde $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$ sú koeficienty nového polynómu $S(x) = \beta_0 + \beta_1x + ... + \beta_{n-1}x^{n-1}$, týmto sme dokázali (A10a).

Postupným použitím formuly (A10) môžeme každý polynóm $P(x)$ prepísať do tvaru, ktorý obsahuje len koreňové členy

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) \tag{A11}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sú korene algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

Predpokladajme, že polynóm $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ obsahuje len reálne koeficienty $a_0, a_1, ..., a_n$, potom algebraická rovnica $P(x) = 0$ rovnica obsahuje buď len reálne korene, ak obsahuje aj komplexné korene, potom tieto sa vyskytujú po komplexne združených dvojiciach $\alpha_{1,2} = a \pm ib$, t. j. $\alpha_2 = \alpha_1^*$. Dôkaz tejto vety je jednoduchý. Nech platí $P(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_1^n = 0$, komplexným združením tejto formuly dostaneme $P(\alpha_1^*) = a_0 + a_1\alpha_1^* + ... + a_n(\alpha_1^*)^n = 0$, t. j. aj α_1^* je koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$. Súčin dvoch koreňových členov, ktoré sú priradené navzájom komplexne združeným koreňom má tvar $(x-\alpha_1)(x-\alpha_1^*) = x^2 + px + q$, kde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$, t. j. $x^2 + px + q = 0$ je kvadratická rovnica s reálnymi koeficientmi, ktorá obsahuje dvojicu navzájom komplexne združených koreňov. To znamená, že polynóm $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ s reálnymi koeficietmi môžeme prepísať ako súčin elementárnych členov, ktoré sú priradené reálnym a komplexným koreňom pridruženej algebraickej rovnice $P(x) = 0$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \underbrace{(x-\alpha_1)...(x-\alpha_u)}_{\textit{reálne korene}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)...(x^2+p_vx+q_v)}_{\textit{komplexné korene}} \tag{A12}$$

Na záver upravíme túto dôležitú formulu rozkladu polynómu s reálnymi koeficientmi pomocou multiplicity (násobnosti) tak reálnych ako aj komplexných koreňov

$$P(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}...}_{\textit{reálne korene}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}...}_{\textit{komplexné korene}} \tag{A13}$$

kde r_i je násobnosť (multiplicita) i-teho reálneho koreňa a s_j je násobnosť j-tej dvojice komplexne združených koreňov.

A3. Hornerova schéma výpočtu funkčnej hodnoty polynómu

W. G. Horner (1786 – 1837)

K tomu, aby sme efektívne vypočítali funkčnú hodnotu polynómu $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ pre dané číslo x, upravíme polynóm do tvaru

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \underbrace{a_0 + \underbrace{\left(a_1 + \underbrace{\left(a_2 + \underbrace{\left(a_3 + \ldots \left(\underbrace{a_n}_{b_n} x\right)\right)}_{b_3} x\right)}_{b_2} x\right)}_{b_1} x}_{b_0 = P(x)} \qquad \text{(A14)}$$

Zavedieme rekurentne špecifikované nové koeficienty b_i, pomocou ktorých postupne počítame funkčnú hodnotu polynómu $P(x)$

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n x \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 &= a_1 + b_2 x \\ P(\alpha) = b_0 &= a_0 + b_1 x \end{aligned} \qquad \text{(A15)}$$

Posledná hodnota koeficientu b_0 sa rovná funkčnej hodnote polynómu $P(x)$ v čísle α. Postupný výpočet týchto koeficientov, od b_n až poi b_0, nayývame Hornerova schéma a je vizualizovaná pomocou tabuľky

x	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
α	a_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Príklad 3. Majme polynóm $P(x) = 6 + x + 2x^2 + 2x^3 - 4x^4 + x^5$, našou úlohou je vzpočítať funkčnú hodnotu tohto polynómu pre číslo $x = 2$. Priamočiary prístup (brute force) k tomuto výpočtu má nasledovný tvar

$$P(x) = 6 + 2 + 2(2)^2 + 2(2)^3 - 4(2)^4 + (2)^5 = 6 + 2 + 2\times4 + 2\times8 - 4\times16 + 32 = 0$$

Podstatne jednoduchší je výpočet založený na predchádzajúcej rekurentnej schéme

$$b_5 = 1$$
$$b_4 = -4 + (1) \times 2 = -2$$
$$b_3 = 2 + (-2) \times 2 = -2$$
$$b_2 = 2 + (-2) \times 2 = -2$$
$$b_1 = 1 + (-2) \times 2 = -3$$
$$b_0 = 6 + (-3) \times 2 = 0 \Rightarrow P(2) = 0$$

Týmto sme aj priamo z definície dokázali, že číslo $x = 2$ je koreňom danej algebraickej rovnice $6 + x + 2x^2 + 2x^3 - 4x^4 + x^5 = 0$. Tento postup môže byť jednoducho reprezentovaný aj tabuľkovou metódou, ktorá sa nazýva Hornerova schéma (alebo algoritmus), pozri obr. A1.

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	1	-4	2	2	1	6
2	1	-2	-2	-2	-3	0
1	1	-3	-1	1	2	8
-1	1	-5	7	-5	6	0

Obrázok A1. Znázornenie tabuľkovej metódy výpočtu funkčných hodnôt polynómu , pre tri číselné hodnoty argumentu $x = 2, 1, -1$, v prvom a treťom prípade bolo ukázané, že tieto čísla sú aj koreňom príslušnej algebraickej rovnice $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0$.

A4. Konštrukcia delenia polynómov koreňovými členmi pomocou Hornerovej schémy

Hornerova schéma môže byť efektívne použitá aj pre delenie polynómov ich koreňovými členmi. Podľa formuly A10 platí

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) \tag{A16}$$

kde α je reálny koreň algebraickej rovnice $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, polynóm $Q(x)$ je výsledok delenia polynómu $P(x)$ koreňovým členom, $P(x)/(x-\alpha) = Q(x)$ pričom $deg\, Q(x) = deg\, P(x) - 1$. Predpokladajme, že polynóm $Q(x)$ má tvar

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x + b_1$$

Z podmienky (A16) dostaneme roznásobením pravej strany tejto rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)\left(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1\right) =$$
$$b_n x^n + (b_{n-1} - \alpha b_n) x^{n-1} + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-2} + \ldots + (b_1 - \alpha b_2) x - \alpha b_1$$

Porovnaním pravej a ľavej strany dostaneme tieto podmienky pre koeficienty dostaneme systém rekurentných rovníc (A15). Týmto sme dokázali, že pomocou Hornerovej schémy môžeme aj deliť polynómy elementárnym koreňovým členom $(x - \alpha)$. V prípade, že α je koreňom rovnice $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, potom dostaneme, že koeficient b_0 = 0, hovoríme, že polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $(x-\alpha)$ bez zbytku; v opačnom prípade, ak $b_0 \neq 0$, potom polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $(x-\alpha)$ so zbytkom b_0.

Príklad 4. Polynóm $P(x)=6+x+2x^2+2x^3-4x^4+x^5$ budeme deliť členom $x-\alpha$ pre $\alpha=1,2$, Hornerova schéma je znázornená na obrázku A2

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	1	-4	2	2	1	6
1	1	-3	-1	1	2	8
2	1	-2	-2	-2	-3	0

Obrázok A2. Znázornenie Hornerovej schémy pre výpočet funkčných hodnôt polynómu $P(x)$ pre čísla $\alpha=1,2$. Z druhého riadku schémy vyplýva, že $\alpha=1$ nie je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$ (t. j. polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $x-1$ so zbytkom 8, t. j. platí $P(x)/(x-1)=(x^4-3x^3-x^2+x+2)+8/(x-1)$. V treťom riadku je znázornený výpočet funkčnej hodnoty polynómu $P(x)$ pre čísla $\alpha=2$, ktorá je v tomto prípade nulová. Potom hovoríme, že $\alpha=2$ je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$; alebo, že polynóm $P(x)$ je deliteľný členom $x-2$ bez zbytku, t. j. $P(x)/(x-2)=(x^4-2x^3-2x^2-2x-3)$.

Znázornený prístup pre výpočet funkčných hodnôt polynómu $P(x)$ pre číslo $x=\alpha$ môže byť efektívne použitý na hľadanie koreňov algebraickej rovnice $P(x)=0$. Ak pre dané číslo $x=\alpha$ dostaneme v poslednom stĺpci nulovú hodnotu, potom $P(\alpha)=0$, t. j. číslo α je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$. Taktiež, prvých $(n-1)$ čísel v danom riadku sú koeficienty nového polynómu $Q(x)$. Tak napríklad, na obr. A2 je v treťom riadku Hornerovej schémy prevedený výpočet funkčnej hodnoty $P(2)$, v poslednom stĺpci je nulová hodnota, t. j. $x=2$ je koreňom algebraickej rovnice $P(x)=0$. Čísla z prvého až piateho stĺpca špecifikujú koeficienty nového polynómu $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{(x-2)}=\underbrace{(x^4-2x^3-2x^2-2x-3)}_{Q(x)}$$

To znamená, že tento riadok (v poslednom stĺpci s nulou) môžeme použiť pre stanovenie ďalších koreňov s už redukovaným polynómom $Q(x)$, pozri obr. A3

x	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0	
x	1	-4	2	2	1	6	$x^5-4x^4+2x^3+2x^2+x+6$
2	1	-2	-2	-2	-3	0	$(x-2)(x^4-2x^3-2x^2-2x-3)$
-1	1	-3	1	-3	0		$(x-2)(x+1)(x^3-3x^2+x-3)$
3	1	0	1	0			$(x-2)(x+1)(x-3)(x^2+1)$

Obrázok A3. Modifikovaný tvar Hornerovej schémy, kde prvý riadok obsahuje koeficienty polynómu $P(x)=6+x+2x^2+2x^3-4x^4+x^5$. V ďalších troch riadkoch sme ukázali, že čísla $x=2,-1,3$ sú korene algebraickej rovnice $P(x)=0$. Každý riadok je využitý ako nový redukovaný polynóm $Q(x)$, ktorý vznikol z predchádzajúceho polynómu výpočtom jeho funkčnej hodnoty pre daný koreň.

Na obr. A3 je ukázané, že postupným použitím Hornerovej schémy môžeme vyjadriť polynóm $P(x)$ ako súčin koreňových členov $(x-\alpha_i)$, ktoré sú priradené reálnym koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$. Určité problémy spôsobuje stanovanie členov (x^2+px+q) so záporným diskriminantom $D=p^2-4q$, ktoré sú priradené komplexným koreňom algebraickej rovnice $P(x) = 0$.

Vychádzajúc z analógie s riešeným príkladom na obr. A3 vyjadríme algebraickú rovnicu $P(x) = 0$ pomocou rozkladu na súčin koreňových členov

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_a)^{k_a}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_bx+q_b)^{l_b} \tag{A17}$$

kde α_i je k_i-násobný reálny koreň a kvadratická rovnica $x^2+p_jx+q_j$ špecifikuje dvojicu komplexne združených l_j-násobných koreňov $-(p/2)\pm\sqrt{(p/2)^2-q}$.

Príklad 5. Nájdite korene algebraickej rovnice

$$P(x)=x^6-5x^5+12x^4-16x^3+17x^2-13x+6=0$$

ak poznáme komplexný koreň tejto rovnice $x=1+\sqrt{2}i$. K riešeniu tohto príkladu využijeme vlastnosť, že zo skutočnosti, že rovnica má reálne koeficienty, potom komplexné korene sa vyskytujú po dvojica navzájom komplexne združené, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}i$. Zostrojíme kvadratickú rovnicu, ktorá má tieto komplexné korene

$$q(x)=(x-x_1)(x-x_2)=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)=x^2-2x+3$$

Týmto kvadratickým polynómom podelíme pôvodnú algebraickú rovnicu

$$(x^6-5x^5+12x^4-16x^3+17x^2-13x+6):(x^2-2x+3)=x^4\text{-}3x^3\text{+}3x^2\text{-}3x\text{+}2$$

V ďalšom kroku budeme hladať ďalšie štyri korene riešením kvartickej algebraickej rovnice $x^4\text{-}3x^3\text{+}3x^2\text{-}3x\text{+}2\text{=}0$. Jej kandidáti na racionálne korene sú $\{\pm1,\pm2\}$, použitím Hornerovej schémy dostaneme

	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0	
x	1	-3	3	-3	2	$x^4-3x^3+3x^2-3x+2$
1	1	-2	1	-2	0	$(x-1)(x^3-2x^2+x-2)$
2	1	0	1	0		$(x-1)(x-2)(x^2+1)$

To znamená, že kompletný rozklad polynómu má tvar

$$P(x)=x^6-5x^5+12x^4-16x^3+17x^2-13x+6=(x-1)(x-2)(x^2-2x+3)(x^2+1)$$

A5. Racionálne korene algebraických rovníc

Ukážeme jednoduchú aplikáciu Hornerovej schémy, ako určiť korene algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami za predpokladu, že existujú racionálne korene.

Veta A2.
Ak algebraická rovnica s celočíselnými koeficietami $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=0$ má racionálne korene $\alpha=p/q$, kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom koeficient a_0 je deliteľný číslom p a koeficient a_n je deliteľný číslom q.

Dôkaz tejto vety je pomerne jednoduchý. Nech algebraická rovnica $P(x)=0$ má racionálny koreň $\alpha=p/q$, potom dosadením tohto koreňa do algebraickej rovnice dostaneme

$$a_0q^n+a_1pq^{n-1}+a_2p^2q^{n-2}+...+a_np^n=0 \qquad (*)$$

Túto rovnicu prepíšeme do tvaru

$$\frac{a_0}{p}q^n=-\left(a_1q^{n-1}+a_2pq_{n-2}+...+a_np^{n-1}\right) \qquad \text{(A17)}$$

Pretože pravá strana tejto rovnice je celé číslo, potom a_0/p musí byť súdeliteľné (pretože p a q sú nesúdeliteľné). Podobným spôsobom prepíšeme (∗) do tvaru

$$\frac{a_n}{q}p^n=-\left(a_0q^{n-1}+a_1pq^{n-2}+...+a_{n-1}p^{n-1}\right) \qquad \text{(A18)}$$

Pretože pravá strana je celé číslo, potom a_n/q musí byť súdeliteľné, QED.

Príklad 6. Hľadajme korene algebraickej rovnice $8x^3-36x^2+54x-27=0$. Predpokladajme, že táto rovnica má racionálne korene typu p/q. Na základe predchádzajúcej vety vieme, že ak existuje takýto racionálny koreň, potom $27/p$ a $8/q$ sú súdeliteľné, potom kandidáti pre p a q majú hodnoty

$$27/p\ \textit{je deliteľné} \Rightarrow p=\pm1,\pm3,\pm9,\pm27\,,\ 8/q\ \textit{je deliteľné} \Rightarrow q=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$$

Potom 16 kandidátov na racionálne korene danej algebraickej rovnice sú tieto

$$\alpha=\frac{p}{q}\in\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8},\pm3,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{3}{4},\pm\frac{3}{8},\pm9,\pm\frac{9}{2},\pm\frac{9}{4},\pm\frac{9}{8},\pm27,\pm\frac{27}{2},\pm\frac{27}{4},\pm\frac{27}{8}\right\}$$

	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	8	-36	54	-27
3/2	8	-24	18	0
3/2	8	-12	0	
3/2	8	0		

To znamená, že pomocou Hornerovej schémy sme ukázali, že číslo $x = 3/2$ je koreňom algebraickej rovnice $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 8(x - 3/2)^3 = 0$

Príklad 7. Majme algebraickú rovnicu $-6 + 11x - 12x^2 + 12x^3 - 6x^4 + x^5 = 0$. Nech táto rovnica má racionálne korene, potom

$$\frac{-6}{p} = \textit{deliteľné bez zbytku} \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$\frac{1}{q} = \textit{deliteľné bez zbytku} \Rightarrow q = \pm 1$$

Potom racionálni kandidáti na korene sú z množiny

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Pomocou Hornerovej schémy vykonáme verifikáciu, ktorý z 8 kandidátov je koreň

	a_5/b_5	a_4/b_4	a_3/b_3	a_2/b_2	a_1/b_1	a_0/b_0
x	1	-6	12	-12	11	-6
1	1	-5	7	-5	6	0
2	1	-3	1	-3	0	
3	1	0	1	0		

Verifikovali sme, že čísla $\alpha = 1, 2, 3$ sú korene danej algebraickej rovnice. V poslednom štvrtom riadku schémy sú koeficienty zbytku $(x^2 + 1)$. To znamená, že polynóm $P(x) = -6 + 11x - 12x^2 + 12x^3 - 6x^4 + x^5$ môžeme prepísať do tvaru súčinu koreňových členov

$$P(x) = -6 + 11x - 12x^2 + 12x^3 - 6x^4 + x^5 = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$$

Algebraická rovnica má tri reálne korene $\alpha = 1, 2, 3$ a dva komplexné korene $\alpha = \pm i$.

A6. Rozklad racionálnej funkcie na sumu elementárnych parciálnych zlomkov

Racionálna funkcia $R(x)$ premennej x je definovaná ako podiel dvoch polynómov

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{A19}$$

pričom predpokladáme, že $deg\, Q(x) > 0$ (t. j. menovateľ nie je konštanta, potom by sa polynómy $R(x)$ a $P(x)$ líšili len konštantou). Rozklad racionálnej funkcie rozdelíme do 3 krokov.

1. krok: Racionálnu funkciu delením upravíme tak, aby stupeň čitateľa bol menší ako stupeň menovateľa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = U(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{A20}$$

V prípade, že $deg\, P(x) > deg\, Q(x)$, potom pomocou delenia $P(x):Q(x)$ znížime stupeň $P(x)$ tak, aby bol menší ako stupeň $Q(x)$, pričom zbytok delenia je $S(x)$. Tento krok budeme ilustrovať jednoduchým príkladom

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} = \underbrace{x + 4}_{U(x)} + \frac{\overbrace{8x^3 - 8x^2 + 9x - 7}^{S(x)}}{\underbrace{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}_{Q(x)}} \tag{A21}$$

2. krok: Pomocou metódy špecifikovanej v kapitole A4 vyjadríme polynóm Q(x) ako súčin elementárnych členov. Najprv odhadneme kandidátov na racionálne korene $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2\}$, použitím Hornerovej schémy vykonáme verifikáciu jednotlivých kandidátov na racionálne korene, dostaneme dva korene $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, pričom zbytok je $x^2 + 1$, potom

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)(x^2+1) \tag{A22}$$

3. krok. Rozklad $S(x)/Q(x)$ má tvar

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{8x^3 - 8x^2 + 9x - 7}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + d}{x^2+1}$$

Ak túto rovnicu vynásobíme Q(x) dostaneme

$$8x^3 - 8x^2 + 9x - 7 = A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + C(x-1)(x-2)(Cx+D)$$

Roznásobením pravej strany a jej porovnaním s ľavou stranou dostaneme systém 4 lineárnych rovníc pre 4 neznáme A, B, C a D

$$\begin{aligned} &A + B + C = 8 \\ &-2A - B - 2C + D = -8 \\ &A - B + 2C - 3D = 9 \\ &-2A - B + 2D = -7 \end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostaneme

$$A = -17, B = 19, C = 6, D = -11$$

To znamená, že rozklad racionálnej funkcie $S(x)/Q(x)$ má finálny tvar

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{8x^3 - 8x^2 + 9x - 7}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{-17}{x-1} + \frac{19}{x-2} + \frac{6x - 11}{x^2+1}$$

Kritický krok v zjednodušovaní racionálnej funkcie je 3. krok, kde sa racionálna funkcia $S(x)/Q(x)$, pričom $deg\, S(x) < deg\, Q(x)$, rozloží na súčet parciálnych zlomkov. Vo všeobecnosti tento krok môžeme špecifikovať takto: Nech polynóm $Q(x)$ má tvar (A17), potom racionálnu funkciu $S(x)/Q(x)$ môžeme vyjadriť ako sumu jednotlivých elementárnych racionálnych funkcii, ktoré sú pridané buď

(1) reálnemu členu $\left(x-\alpha_i\right)^{k_i}$ $\left(\text{pre } 1 \le i \le \text{a}\right)$

$$\frac{A_1^{(i)}}{\left(x-\alpha_i\right)}+\frac{A_2^{(i)}}{\left(x-\alpha_i\right)^2}+\ldots+\frac{A_1^{(k_i)}}{\left(x-\alpha_i\right)^{k_i}} \qquad \text{(A23a)}$$

(2) alebo komplexnému členu $\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_{j1}}$

$$\frac{B_j^{(1)}+C_j^{(1)}x}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)}+\frac{B_j^{(2)}+C_j^{(2)}x}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{B_j^{(l_j)}+C_j^{(l_j)}x}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}} \qquad \text{(A23b)}$$

Príklad 8. Študujme racionálnu funkciu

$$\frac{x^2+2x-3}{\left(x-1\right)^3\left(x-3\right)^2\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Rozklad tejto ravionálnej funkcie na elementárne zlomky má tvar

$$\frac{x^2+2x-3}{\left(x-1\right)^2\left(x-3\right)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{\left(x-1\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-1\right)^3}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{\left(x-3\right)^2}+$$

$$+\frac{C_1+D_1x}{x^2+x+1}$$

Kde konštanty A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, D_1 sú určené tak, aby sa pravá strana rovnala ľavej strane.

$$\frac{x^2+2x-3}{\left(x-1\right)^3\left(x-3\right)^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{1}{3\left(x-1\right)}-\frac{34}{169\left(x-3\right)}+\frac{3}{13\left(x-3\right)^2}+\frac{-47-67x}{505\left(x^2+x+1\right)}$$