2. kontrolná písomka z Matematickej logiky konaná dňa 2.4.2009

1. príklad. Zostrojte neurónovú sieť pre Boolovu funkciu určenú tabuľkou

p	q	r	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(3 body)

2. príklad Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje formulu výrokovej logiky
$\varphi = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

(2 body)

3. príklad. Pomocou metódy (α) sémantických tabiel a (β) rezolventy zistite, či platí $T \models \alpha$ pre

$$T = \{r \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \vee \neg r), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg p), t \Rightarrow r\},\ \alpha = p$$

(4 body)

4. príklad. Výroky v prirodzenom jazyku prepíšte do formuly predikátovej logiky, vykonajte operáciu negácie nad formulami, upravte pomocou štandardných zákonov predikátovej logiky, na záver prepíšte výsledok do prirodzeného jazyka:
(α) niekto hovorí po nemecky alebo anglicky
(β) v každom okresnom meste existuje radnica
(γ) každý prezident sa niekomu nepáči

(3 body)

5. príklad. Definujme interpretáciu $\mathcal{I}$ nad univerzom prirodzených čísel $U = \{0,1,2,3,...\}$, kde predikáty a funkcie majú túto interpretáciu:

(1) predikát $P(x)$ „x je deliteľné 2“
(2) predikát $Q(x)$ „x je deliteľné 3“
(3) funkcia „nasledovník“ $f(x)=x+1$
(4) funkcia „súčet“ $g(x,y)=x+y$

Pomocou tejto interpretácie preložte do prirodzeného jazyka tieto formuly predikátovej logiky a rozhodnite, či takto získaný výrok je pravdivý:
(α) $\forall x\left[P(x) \Rightarrow \neg P(f(x))\right]$
(β) $\forall x\,\forall y\left[P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(g(x,y))\right]$
(γ) $\forall x\,\forall y\left[Q(x) \wedge Q(y) \Rightarrow P(g(x,y))\right]$
(δ) $\forall x\,\forall y\left[(P(x) \wedge P(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg P(y)) \Rightarrow P(g(x,y))\right]$

(3 body)

Prémia: Neurónovú sieť zostrojenú v príklade 1 zoptimalizujte

(1 bod)

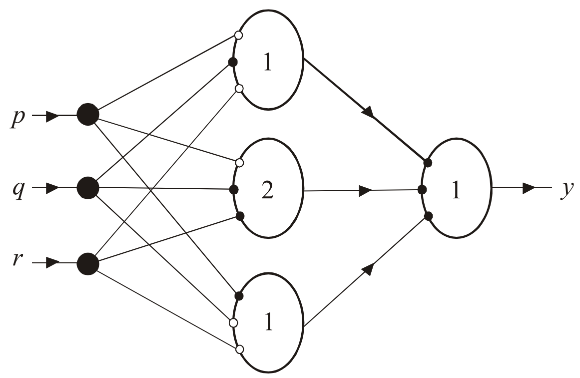
Riešenie

1. príklad. Zostrojte neurónovú sieť pre Boolovu funkciu určenú tabuľkou

p	q	r	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

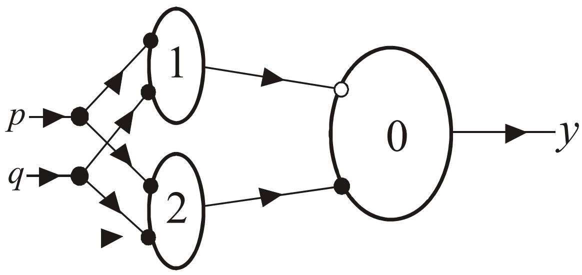
Riešenie. Boolova funkcia v DNF určená tabuľkou má tvar

$$\varphi_{NDF} = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$



Príklad 2. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje formulu výrokovej logiky

$$\varphi = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

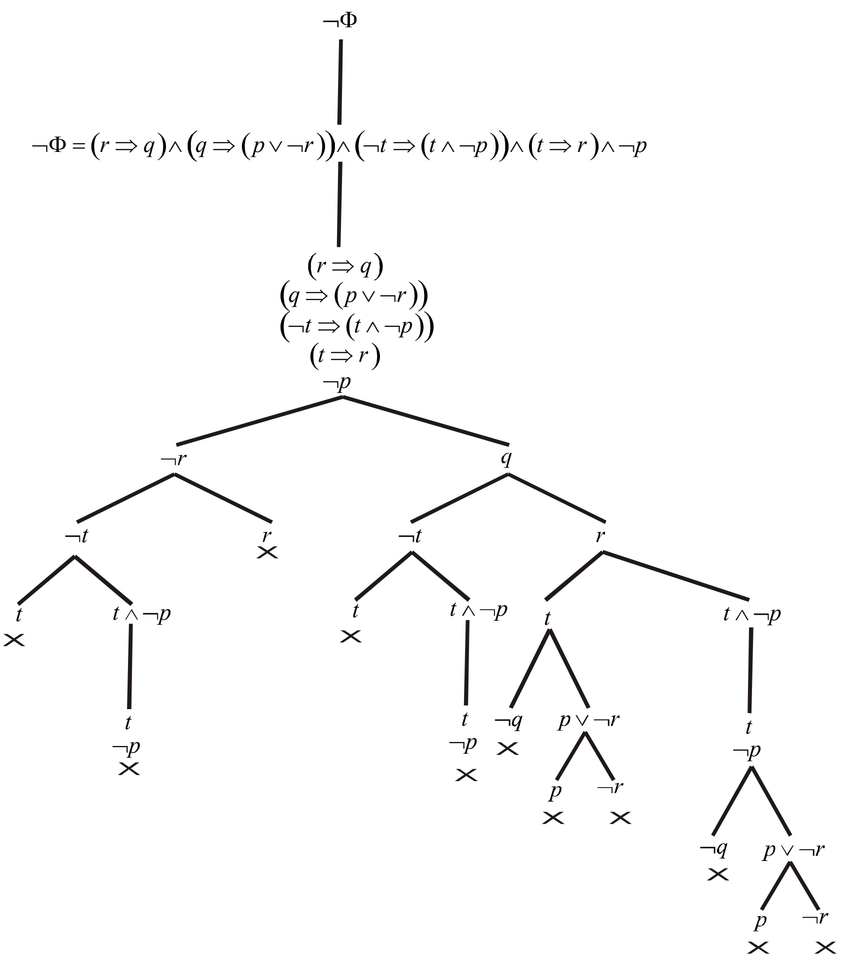


Príklad 3. Pomocou metódy (α) sémantických tabiel a (β) rezolventy zistite, či platí $T \vDash \alpha$ pre

$$T = \{r \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \vee \neg r), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg p), t \Rightarrow r\},\ \alpha = p$$

Riešenie (α)

$$\Phi = (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \vee \neg r)) \wedge (\neg t \Rightarrow (t \wedge \neg p)) \wedge (t \Rightarrow r) \Rightarrow p$$



Dokázali sme, že platí $T \vDash \alpha$.

Riešenie (β)**.** Pomocou rezolučnej metódy zistite, či platí $T \vDash \alpha$ pre

$$T = \{r \Rightarrow q, q \Rightarrow (p \vee \neg r), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg p), t \Rightarrow r\},\ \alpha = p$$

$$T' = \{\neg r \vee q, \neg q \vee p \vee \neg r, t \vee (t \wedge \neg p), \neg t \vee r, \neg p\}$$

$$T' = \{\neg r \vee q, \neg q \vee p \vee \neg r, t, t \vee \neg p, \neg t \vee r, \neg p\}$$

	1	2	3	4	5	6					
	$\neg r \vee q$	$\neg q \vee p \vee \neg r$	t	$t \vee \neg p$	$\neg t \vee r$	$\neg p$	7	8			
r	0	0			1		$q \vee \neg t$	$\neg q \vee p \vee \neg t$	9		
p				0		0		1	$\neg q \vee \neg t$	10	
q							1		0	$\neg t$	11
t			1							0	$\square$

Dokázali sme, že platí $T \vDash \alpha$.

4. príklad. Výroky v prirodzenom jazyku prepíšte do formuly predikátovej logiky, vykonajte operáciu negácie nad formulami, upravte pomocou štandardných zákonov predikátovej logiky, na záver prepíšte výsledok do prirodzeného jazyka:
(α) niekto hovorí po nemecky alebo anglicky
(β) v každom okresnom meste existuje radnica
(γ) každý prezident sa niekomu nepáči

Riešenie.
(α) niekto hovorí po nemecky alebo anglicky

$$\Phi = \exists x\left(nem(x) \vee ang(x)\right)$$

$$\neg\Phi = \neg\exists x\left(nem(x) \vee ang(x)\right) \equiv \forall x\left(\neg nem(x) \wedge \neg ang(x)\right)$$

$$\forall x\left(\neg nem(x) \wedge \neg ang(x)\right)$$

Nikto nehovorí po nemecky a nikto nehovorí po anglicky

(β) v každom okresnom meste existuje radnica

$$\Phi = \forall x\left(OM(x) \Rightarrow Rad(x)\right)$$

$$\neg\Phi = \neg\forall x\left(OM(x) \Rightarrow Rad(x)\right) \equiv \neg\forall x\left(\neg OM(x) \vee Rad(x)\right) \equiv \exists x\left(OM(x) \wedge \neg Rad(x)\right)$$

Existuje okresné mesto, ktoré nemá radnicu.

(γ) Niektorí prezidenti nie sú Záhoráci.

$$\Phi = \exists x\left(Pr(x) \wedge \neg Zh(x)\right)$$

$$\neg\Phi = \neg\exists x\left(Pr(x) \wedge \neg Zh(x)\right) \equiv \forall x \neg\left(Pr(x) \wedge \neg Zh(x)\right) \equiv \forall x\left(\neg Pr(x) \vee Zh(x)\right)$$

$$\equiv \forall x\left(Pr(x) \Rightarrow Zh(x)\right)$$

Každý prezident je Záhorák.

5. príklad. Definujme interpretáciu $\mathcal{I}$ nad univerzom prirodzených čísel $U = \{0,1,2,3,...\}$, kde predikáty a funkcie majú túto interpretáciu:

(α) predikát $P(x)$ „x je deliteľné 2“
(β) predikát $Q(x)$ „x je deliteľné 3“
(γ) funkciu „nasledovník“ $f(x)=x+1$
(δ) funkciu „súčet“ $g(x,y)=x+y$

Pomocou tejto interpretácie preložte do prirodzeného jazyka tieto formuly predikátovej logiky a rozhodnite, či takto získaný výrok je pravdivý:

(α) $\forall x\left[P(x) \Rightarrow \neg P(f(x))\right]$

V prirodzenom jazyku: „*každé číslo deliteľné dvoma nemá nasledovníka deliteľného dvoma*“, pravdivý výrok.

(β) $\forall x \forall y\left[P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(g(x,y))\right]$

V prirodzenom jazyku: „*každé dve čísla deliteľné dvoma majú súčet deliteľný dvoma*“, pravdivý výrok

(γ) $\forall x \forall y\left[Q(x) \wedge Q(y) \Rightarrow P(g(x,y))\right]$

V prirodzenom jazyku: „*každé dve čísla deliteľné troma majú súčet deliteľný dvoma*“, neplatí pre 3 a 6, neplatný výrok.

(δ) $\forall x\,\forall y\left[\left(P(x)\wedge P(y)\right)\vee\left(\neg P(x)\wedge\neg P(y)\right)\Rightarrow P\left(g(x,y)\right)\right]$

V prirodzenom jazyku: „*každé dve čísla, ktoré sú buď deliteľné dvoma alebo nie sú deliteľné dvoma, majú súčet deliteľný dvoma*“, pravdivý výrok.

Prémia: Neurónovú sieť zostrojenú v príklade 1 zoptimalizujte

Riešenie. Boolova funkcia v DNF určená tabuľkou má tvar

$$\begin{aligned}\varphi_{NDF} &= (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\\ &\equiv(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\end{aligned}$$