

Písomná skúška predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 5. 6. 2007

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny výrokov:

„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“ ?

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A = \{a\}$.

3. príklad.

Zistite, či relácia R je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x \leq y$,

(b) x má rovnaké krstné meno ako y , $km(x) = km(y)$,

(c) x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4.

4. príklad. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte jej reprezentáciu pomocou binárnej matice.

5. príklad.

Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF.

6. príklad.

Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

7. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z.$$

8. príklad. Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

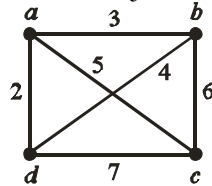
$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.

11. príklad. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes a keď ju nepredpokladáme?

- (a) $x \otimes y \otimes z$
- (b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
- (c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny výrokov?

„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.

p = som chytrý

q = mám šťastie

r = zvíťazím v lotérii

$p \vee q$	predpoklad ₁
$\neg q$	predpoklad ₂
$q \Rightarrow r$	predpoklad ₃
<hr/>	
p	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad ₁ a predpoklad ₂

záver: som chytrý

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A = \{a\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$$

3. príklad.

Zistite, či relácia R je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x \leq y$,

(b) x má rovnaké krstné meno ako y , $km(x) = km(y)$,

(c) x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4.

(a)

je reflexívna, $x \leq x$,

nie je symetrická, neplatí implikácia $x \leq y \Rightarrow y \leq x$,

je antisymetrická, platí implikácia $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$,

je tranzitívna, platí implikácia $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.

(b)

je to relácia ekvivalencie (čiže je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, a je tranzitívna)

je reflexívna, platí $km(x) = km(x)$,

je symetrická, platí implikácia $(km(x) = km(y)) \Rightarrow (km(y) = km(x))$,

nie je antisymetrická (môžu byť rôzni ľudia x a y s rovnakým krstným menom

$$\neg((km(x) = km(y)) \wedge (km(y) = km(x)) \Rightarrow x = y)$$

je tranzitívna, platí implikácia $(km(x) = km(y)) \wedge (km(y) = km(z)) \Rightarrow (km(x) = km(z))$.

(c)

nie je reflexívna, nie každé číslo x je súčasne deliteľné 2 a 4,

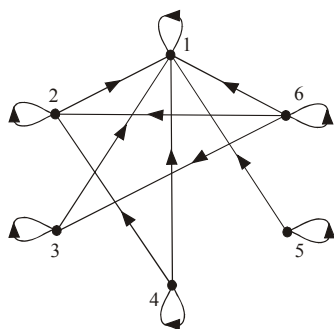
nie je symetrická, nie každá dvojica x a y je taká, že keď x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4 potom y je deliteľné 2 a x je deliteľné 2 a 4, kontrapríkladom je napr. $x=2$ a $y=4$

nie je antisymetrická, existujú také dvojice x a y , že x je deliteľné 2 a y je deliteľné 4 a súčasne y je deliteľné 2 a x je deliteľné 4 a pritom $x \neq y$ (napríklad 4 a 8),

je tranzitívna, ak máme dve dvojice x,y a y,z , ktoré vyhovujú podmienkam relácie, potom tieto podmienky musia platiť aj pre dvojicu x,z .

4. príklad. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R = \{(x, y); x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

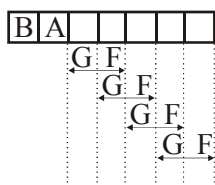
$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$



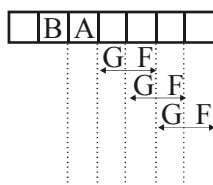
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. príklad

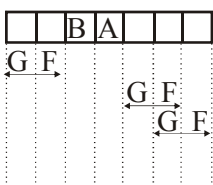
Cvičenie 4.15. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,



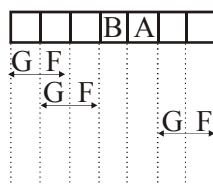
$$N=4 \times 6=24$$



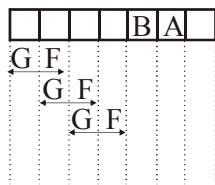
$$N=3 \times 6=18$$



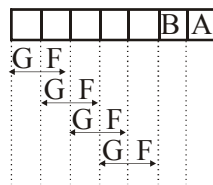
$$N=3 \times 6=18$$



$$N=3 \times 6=18$$



$$N=3 \times 6=18$$



$$N=4 \times 6=24$$

Celkový počet reťazcov je $2 \times 24 + 4 \times 18 = 120$.

6. príklad.

Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

1. kolo: pre 2^k družstiev existuje 2^{k-1} zápasov.
2. kolo: pre 2^{k-1} družstiev existuje 2^{k-2} zápasov.

.....
 (k-1). kolo: pre 2^1 družstiev existuje 2 zápasy (semifinále).

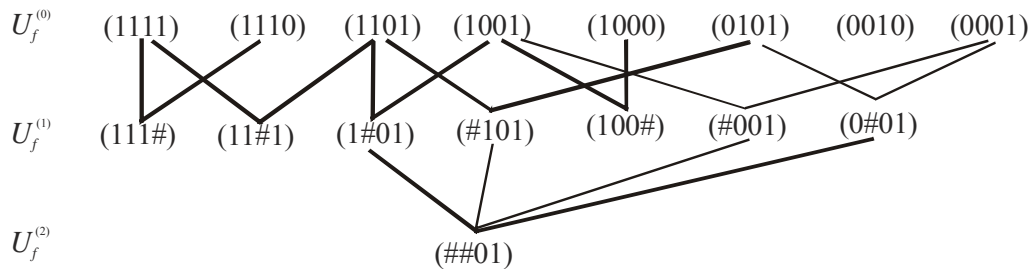
k. kolo: pre 2^0 existuje 1 zápas (finále)

Celkový počet zápasov je teda $2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1 = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = \boxed{2^k - 1}$

7. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z.$$

0. etapa			1. etapa			2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)	1	(3,7)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)	2	(4,6)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)			
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)			
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)			
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)			
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)			
8	(0001)							



$$\tilde{V} = \{(111\#), (##01), (100\#), (0010)\}$$

$$f(w, x, y, z) = wxy + \bar{y}z + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}yz$$

8. príklad. Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_4 = l, x_3 = k, x_2 = 3 - k - l, x_1 = 4 - 3k - 2l, \text{ kde } k, l \in \mathbb{R},$$

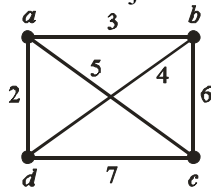
$$x = \begin{pmatrix} 4 - 3k - 2l \\ 3 - k - l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

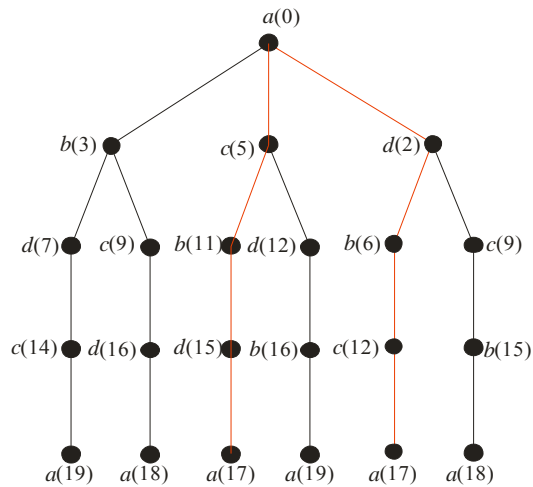
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1/2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{-1} & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & 5/2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 37/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ = -\frac{7}{2}(-1)2\frac{2}{7}4 = 8$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.



Minimálna hamiltonovská kružnica je a-d-b-c-a (prípadne reprezentovaná v opačnej orientácii) s dĺžkou 17.

11. príklad. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes a keď ju nepredpokladáme?

- (a) $x \otimes y \otimes z$
- (b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
- (c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Riešenie:

Keď predpokladáme asociatívnosť operácie \otimes

- (a) 1 interpretácia, $x \otimes y \otimes z$
- (b) 3 interpretácie, $(t \oplus x) \otimes y \otimes z$, $t \oplus (x \otimes y \otimes z)$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$
- (c) 4 interpretácie, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$

Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie \otimes

- (a) 2 interpretácie, $(x \otimes y) \otimes z$, $x \otimes (y \otimes z)$
- (b) 5 interpretácií, $(t \oplus x) \otimes (y \otimes z)$, $t \oplus ((x \otimes y) \otimes z)$, $t \oplus (x \otimes (y \otimes z))$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$, $((t \oplus x) \otimes y) \otimes z$
- (c) 5 interpretácií, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$, $t \otimes ((x \oplus y) \otimes z)$