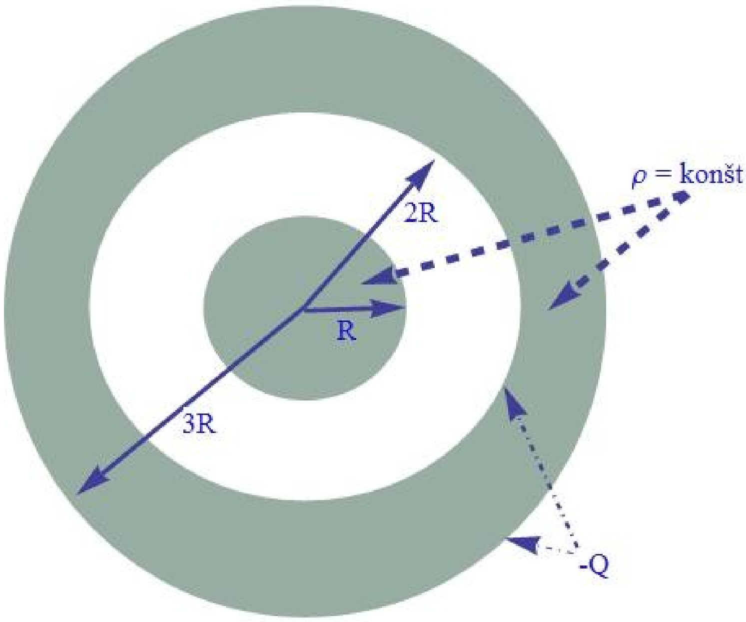
Príklad č. 2 – Gaussov zákon

Zadanie:

Na obrázku je znázornená guľa s polomerom R, ktorá je rovnomerne nabitá nábojom s objemovou hustotou ρ. Vo vzdialenosti 2R sa nachádza guľová vrstva, nabitá s tou istou objemovou hustotou náboja ρ, ktorej vonkajší aj vnútorný povrch je navyše rovnomerne pokrytý nábojom –Q. Určte veľkosť intenzity elektrického poľa vo vzdialenosti:

A. $r = 0{,}5\,R$ (bod vo vnútornej guli) **2 body**
B. $r = 1{,}5\,R$ (bod v dutine) **2 body**
C. $r = 4\,R$ (bod mimo objektu) **2 body**



Riešenie:

V každej parciálnej úlohe použijeme Gaussov zákon:

$$\oint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0},$$

ktorý sa v prípade sférickej symetrie zredukuje na tvar:

$$E.S = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0},$$

kde E je intenzita elektrického poľa, Spovrch uzavretej gaussovej plochy (v našom prípade je to povrch gule s polomerom r, ktorý je totožný so vzdialenosťou v ktorej počítame intenzitu elektrického poľa), $Q_{vnútorný}$ je celkový náboj, ktorý je v tej gaussovej ploche uzavretý.

A. $r = 0{,}5\ R$ (2 body)

$$E = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ S} = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{V\ \rho}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{{}^4\!/_3\ \ \pi\ r^3 \rho}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{r\ \rho}{\varepsilon_0\ 3}.$$

Teraz už iba dosadíme za $r = 0{,}5\ R$:

$$E = \frac{R\ \rho}{\varepsilon_0\ 6}.$$

B. $r = 1{,}5\ R$ (2 body)

$$E = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ S} = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{V\ \rho}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{{}^4\!/_3\ \ \pi\ R^3 \rho}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{R^3 \rho}{3\ \varepsilon_0\ r^2}.$$

Opäť iba dosadíme za $r = 1{,}5\ R$:

$$E = \frac{4\ R\ \rho}{27\ \varepsilon_0}.$$

C. $r = 4\ R$ (2 body)

$$E = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ S} = \frac{Q_{vnútorný}}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} =$$

$$= \frac{(-Q) + (-Q) + \left({}^4\!/_3\ \ \pi\ R^3 \rho\right) + \left\{{}^4\!/_3\ \ \pi\ \rho\ [(3R)^3 - (2R)^3]\right\}}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2} = \frac{\left({}^{20}\!/_3\right)\pi\ R^3 \rho - 2Q}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ r^2}.$$

A dosadíme za $r = 4\ R$:

$$E = \frac{\left({}^{20}\!/_3\right)\pi\ R^3 \rho - 2Q}{\varepsilon_0\ 4\ \pi\ 16\ R^2}.$$