Opravná písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 27. 6. 2006

1. príklad. Dokážte, že súčin párneho a nepárneho čísla je párne číslo.

2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{R}\right)\wedge\left(x^2-4=0\right)\right\}$

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}\left(A\right)$ pre $A=\left\{\varnothing,a\right\}$.

4. príklad. $P=\left\{\left(1,2\right),\left(2,3\right),\left(3,4\right)\right\}\subseteq X\times Y$ a
$Q=\left\{\left(1,1\right),\left(1,3\right),\left(2,2\right),\left(2,3\right),\left(3,1\right),\left(3,3\right),\left(3,4\right)\right\}\subseteq X\times Y$ sú relácie nad $X=\left\{1,2,3\right\}$ a $Y=\left\{1,2,3,4\right\}$.
Zostrojte kompozície $P\circ Q$, $Q\circ P$.

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{N}=\left\{0,1,2,3,...\right\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$
(b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$
(c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$,
(d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$,
(e) $x\cdot\mathbf{1}=x$.

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6\\ 2x & -2y & -z & = & -5\\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, kedy máte na začiatku hry 5 zápaliek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 5, písomka môže byť hodnotená max. 55 bodmi, čas na písomku je 90 minút.

Riešenie

1. príklad. Dokážte, že súčin párneho a nepárneho čísla je párne číslo.
Riešenie: $a = 2k$, $b = 2l + 1$, potom $a \cdot b = 2k \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k = 2(2kl + k)$

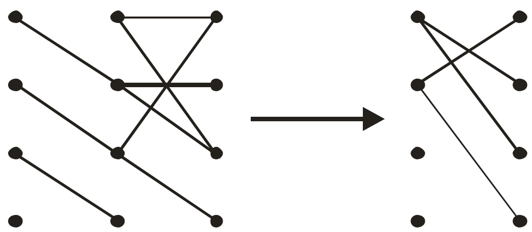
2. príklad. Ktoré elementy patria do množiny: $\{x\,;(x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 4 = 0)\}$

Riešenie: $\{-2,2\}$

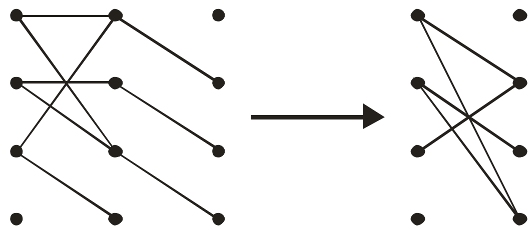
3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A = \{\emptyset, a\}$.

Riešenie: $A = \Big\{\underbrace{\emptyset}_{a}, \underbrace{a}_{b}\Big\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset.a\}\}$

4. príklad. $P = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \subseteq Y \times Y$ a $Q = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4)\} \subseteq Y \times Y$ sú binárne relácie nad $Y = \{1,2,3,4\}$. Zostrojte kompozície $P \circ Q$, $Q \circ P$.
Riešenie:



P Q P°Q



Q P P°Q

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?
Riešenie:
6!=720

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x * y = x - y$, $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.
Riešenie:
Nie je binárna operácia, pretože pre $x, y \in A$ výsledok binárnej operácie $x * y \notin A$(napr. pre *x* < y dostaneme záporné *z* = *x* – *y*), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej x platia nasledujúce podmienky

(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$

(b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$

(c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$,

(d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$,

(e) $x\cdot\mathbf{1}=x$.

Riešenie:

(a) neplatí pre žiadne x

(b) neplatí pre žiadne x

(c) $x=\mathbf{0}$,

(d) $x=\mathbf{0}$,

(e) platí pre každé x

8. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

Riešenie:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & -5 \\ \boxed{3} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{-3} & \cancel{-17} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array}\right)$$

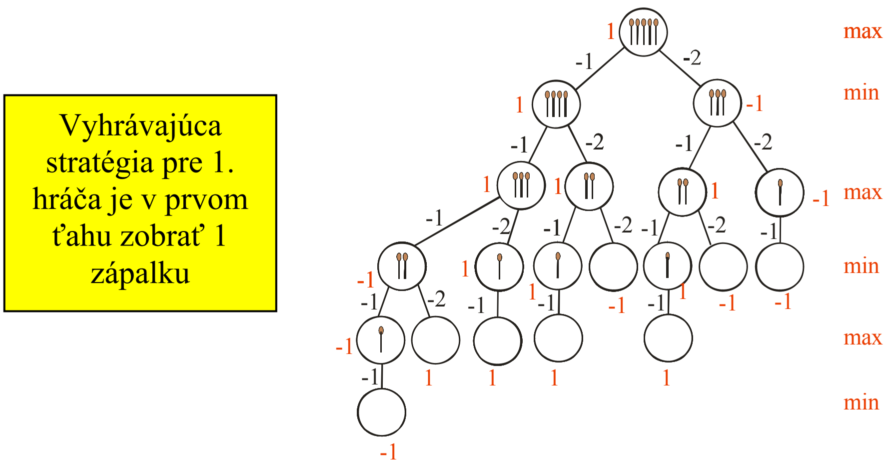
$$z=t,\ -4y-3z=-17\Rightarrow y=\frac{17}{4}-\frac{3}{4}t,\ x+y+z=6\Rightarrow x=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}t,\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou metódy transformácie na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=2$$

10. príklad. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, kedy máte na začiatku hry 5 zápaliek, každý hráč môže odobrať buď jednu alebo dve zápalky, hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku (posledné zápalky) prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu **ohodnoťte pomocou minimax princípu** a špecifikujte optimálnu stratégiu (ak existuje) pre 1. hráča.

Riešenie:



Na obrázku sú vrcholy s počtom zápaliek na hromádke, červená jednotka znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), červene označená –1 znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Čierne ohodnotenia hrán –1 a –2 znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápaliek hráčom. Z ohodnotenia koreňa vyplýva, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia.

11. príklad. Obyčajný graf sa volá *pravidelný*, keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 5 má pravidelný graf o 30 hranách?

Riešenie:
$$2|E| = |V|\deg(v)$$
$$2\times 30 = |V|\times 5$$
$$12 = |V|$$