Náhradná 1. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 18. 5. 2006)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne $a,b,c,$ metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\left\{a,max\left\{b,c\right\}\right\} = min\left\{max\left\{a,b\right\},c\right\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

(a) $A - B = B - A$ (1 bod)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod)

(c) $A - B = A$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(x + y)^7$. (3 body)

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

(1) Indukčný predpoklad $P(n) = n^2 \geq n$

(2) Platnosť pre n=1 $P(1) = 1^2 \geq 1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + (2n+1) = n + \underbrace{\left(n^2+n+1\right)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 = n + n^2 - n = n + \underbrace{n(n-1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 \geq n$$

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne *a*,*b*,*c*, metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\{a, max\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

(1) $a<b<c$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{max\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{b} \Rightarrow a \neq b$$

Záver: študovaná formula nie je identita, existujú hodnoty a, b, c pre ktoré neplatí.

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

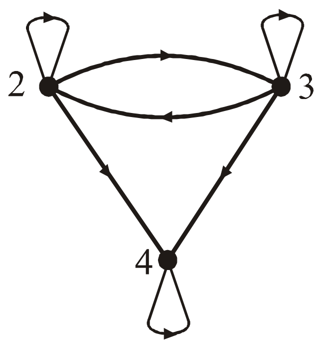
(a) $A - B = B - A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$ alebo $A = B$

(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod).......platí pre každé množiny A, B, t. j. je to identita.

(c) $A - B = A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$

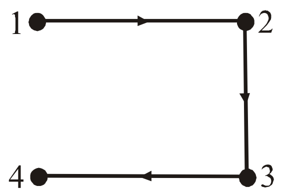
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(x + y)^7$. (3 body)

$$(x+y)^7=\sum_{j=0}^{7}\binom{7}{j}x^{7-j}y^j=\ldots+\binom{7}{5}x^2y^5+\ldots$$

Koeficient pri x^2y^5 je binomiálny koeficient $(7/5)=7!/(2!\,5!)=21$

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1\cup A_2\cup A_3)}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

$$\overline{(A_1\cup A_2\cup A_3)}=\overline{(A_1\cup(A_2\cup A_3))}=\bar{A}_1\cap\overline{(A_2\cup A_3)}=\bar{A}_1\cap(\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)$$
$$=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3$$