# Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 14. 1. 2009

**1. príklad.** Dokážte metódou vymenovania prípadov nerovnosť: $|a+b| \le |a| + |b|$, kde *a, b* sú reálne čísla.

**2. príklad**. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $(A \cap B) - B = A$, (b) $A \cap \overline{B} = A$, (c) $A \cup A = A \cap A$, (d) $A \cap B = B \cup A$

**3. príklad.**
Zistite, či relácia *R* nad množinou celých čísel je (1) reflexívna, (2) symetrická, (3) antisymetrická, alebo (4) tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x < y$,
(b) $x + y = 0$,
(c) $x$ a $y$ sú párne čísla.

**4. príklad.**
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve dve jednotky,
(b) maximálne dve nuly,
(c) minimálne dve nuly.

**5. príklad.**
Na fakulte je 315 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 390 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 32 študentov, ktorí si nezapísali predmet Matematická analýza a ani predmet Diskrétna matematika. Celkový počet študentov na fakulte je 427. Koľko študentov má zapísaných súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika?

**6. príklad.**
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálny výraz k Boolovej funkcii
$wxy + wx\overline{y} + \overline{w}xy + \overline{w}x\overline{y} + w\overline{x}y + \overline{w}\,\overline{x}\,y$

**7. príklad.** Pre ktoré hodnoty parametrov $p$ a $q$ má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2 ?

**8. príklad.**
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

**9. príklad.** Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi má hodnosť $h(A) = 3$

**10. príklad.** Planárna reprezentácia grafu s troma komponentmi má 10 oblastí a graf je tvorený z vrcholov stupňa 3.

(a) Aký je počet vrcholov tohto grafu? (3 body)
(b) Aký je najmenší počet vrcholov jedného komponentu? (1 bod)
(c) Nakreslite komponenty a určite ich typ grafu. (1 bod)

**11. príklad.** Skonštruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,25; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,17; e: 0,3; f: 0,03 a priraďte každému symbolu jeho odpovedajúci Huffmanov kód.

**Poznámka:** Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

# Riešené príklady

**1. príklad.** Dokážte metódou vymenovania prípadov nerovnosť: $|a+b| \leq |a|+|b|$, kde *a,b* sú reálne čísla.

Riešenie:
(a) $a \leq b \leq 0$ (podobne platí aj pre $b \leq a \leq 0$)
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow -a-b \leq -a-b$

(b) $a \leq 0 \leq b$ a $a+b \leq 0$
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow -a-b \leq -a+b \Rightarrow -2b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0$

(c) $a \leq 0 \leq b$ a $a+b \geq 0$
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow +a+b \leq -a+b \Rightarrow a \leq 0$

(d) $b \leq 0 \leq a$ a $a+b \leq 0$
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow -a-b \leq a-b \Rightarrow a \geq 0$

(e) $b \leq 0 \leq a$ a $a+b \geq 0$
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow a+b \leq a-b \Rightarrow b \leq 0$

(f) $0 \leq a \leq b$ (podobne platí aj pre $0 \leq b \leq a$)
$|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow a+b \leq a+b$

Vo všetkých prípadoch sme dostali nerovnosť, ktorá vyplýva z predpokladov vety, čiže identita platí pre každé *a, b*.

**2. príklad**. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí
(a) $(A \cap B) - B = A$, platí ak $A = \emptyset$, *B* môže byť
(b) $A \cap \overline{B} = A$, platí ak $A \cap B = \emptyset$
(c) $A \cup A = A \cap A$, platí pre ľubovoľné *A*, *B*
(d) $A \cap B = B \cup A$, platí ak $A = B$

**3. príklad.**
Zistite, či relácia *R* nad množinou celých čísel je (1) reflexívna, (2) symetrická, (3) antisymetrická, alebo (4) tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x < y$,
(b) $x + y = 0$,
(c) *x* a *y* sú párne čísla.

Riešenie:
(a) $x < y$.
Relácia (1) nie je reflexívna, (2) nie je symetrická, (3) je antisymetrická, (4) je tranzitívna.

(b) $x + y = 0$
Relácia (1) nie je reflexívna, (2) je symetrická, (3) nie je antisymetrická, (4) nie je tranzitívna.

(c) $x$ a $y$ sú párne čísla.
Relácia (1) je reflexívna, (2) symetrická, (3) nie je antisymetrická, (4) je tranzitívna.

**4. príklad**.
Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré
(a) obsahujú práve dve jednotky,

$$\binom{10}{2} = 45$$

(b) maximálne dve nuly, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 1 + 10 + 45 = 56$

(c) minimálne dve nuly.

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$$

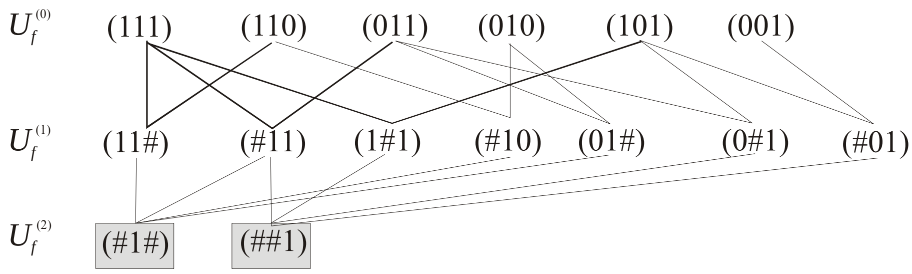
$$45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1013$$

$=2^{10}$-C(10,0)-C(10,1)=1024-1-10=1013

**5. príklad**
Na fakulte je 315 študentov, ktorí si zapísali predmet Matematická analýza, 390 študentov, ktorí si zapísali predmet Diskrétna matematika a 32 študentov, ktorí si nezapísali predmet Matematická analýza ani predmet Diskrétna matematika. Celkový počet študentov na fakulte je 427. Koľko študentov na fakulte má zapísaných súčasne predmety Matematická analýza a Diskrétna matematika?
$|MA|=315$, $|DM|=390$, $|U-(MA \cup DM)|=32$, $|U|=427$
$|MA \cup DM| = |U| - |U-(MA \cup DM)| = 427-32=395$
$|MA \cap DM| = |MA| + |DM| - |MA \cup DM| = 315+390-395=310$

**6. príklad.**
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxy + wx\overline{y} + \overline{w}xy + \overline{w}x\overline{y} + w\overline{x}y + \overline{w}\,\overline{x}\,y$ ,

| 1. etapa | | 2. etapa | | | 3. etapa | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (111) | 1 | 1-2 | (11#) | 1 | 1-5 | (#1#) |
| 2 | (110) | 2 | 1-3 | (#11) | 2 | 2-4 | (#1#) |
| 3 | (011) | 3 | 1-5 | (1#1) | 3 | 2-7 | (##1) |
| 4 | (010) | 4 | 2-4 | (#10) | 4 | 3-6 | (##1) |
| 5 | (101) | 5 | 3-4 | (01#) | 5 | | |
| 6 | (001) | 6 | 3-6 | (0#1) | 6 | | |
| | | 7 | 5-6 | (#01) | 7 | | |




Klauzule z 2. etapy sú minimálne a pokrývajú všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

$$\tilde{V} = \{(\#1\#), (\#\#1)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w,x,y) = x + y$$

**7. príklad.**

Pre ktoré hodnoty parametrov $p$ a $q$ má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1-2p & 1+p \\ 0 & 1 & -3-2q & 3+q \end{pmatrix}$$

Z podmienky rovnosti 3. a 4. riadku dostaneme $1-2p = -3-2q$ a $1+p = 3+q$, riešením tohto systému dostaneme $p$=3 a $q$=1, potom posledná ekvivaletná matica má tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-5} & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

**8. príklad.**

Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

Riešenie:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Potom riešenie

$$x_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

**9. príklad.** Dokážte priamo z definície, že trojuholníková matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

má hodnosť $h(A) = 3$.

Riešenie:
Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, \ s_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} &= 0 \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} &= 0 \\ \alpha_3 a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory $s_1, s_2, s_3$ sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice $A$ je 3.

**10. príklad.** Planárna reprezentácia grafu s troma komponentmi má 10 oblastí a graf je tvorený z vrcholov stupňa 3.

(d) Aký je počet vrcholov tohto grafu? (3 body)
(e) Aký je najmenší počet vrcholov jedného komponentu? (1 bod)
(f) Nakreslite komponenty a určite ich typ grafu (1 bod)

Riešenie:

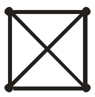
(a) Použijeme Eulerovu formulu |*R*|=|*E*|-|*V*|+|*K*| +1, spolu s formulou $2|E| = \sum_{v\in V} deg(v)$ teda,

$|E| = \frac{\sum_{v\in V} deg(v)}{2} = \frac{|V|deg(v)}{2}$, potom

10=|*V*|*3/2-|*V*|+3+1, teda |*V*|=12.

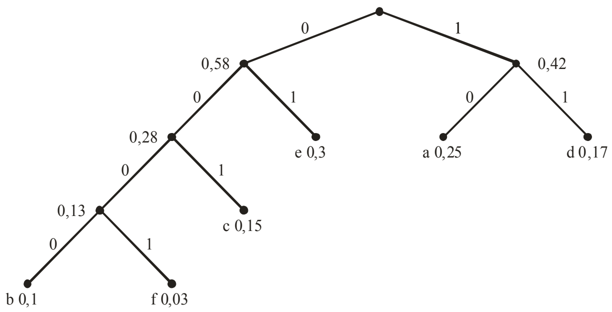
(b) Keďže stupeň každého vrcholu je 3, musí byť spojený s troma ďalšími a najmenšia veľkosť komponentu je 4.

(c) Keďže vrcholov je 12 , komponenty sú 3 a najmenšia môže mať počet vrcholov 4, všetky 3 komponenty budú mať veľkosť 4 (3x4=12). Každý komponent so štyrmi vrcholmi stupňa 3 je kompletný graf o 4 vrcholoch, $K_4$.



$K_4$

**11. príklad.** Skonštruujte binárny strom reprezentujúci Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0,25; b: 0,1; c: 0,15; d: 0,17; e: 0,3 f 0,03 a priraďte každému symbolu jeho odpovedajúci Huffmanov kód..




b: 0000, f: 0001 c:001 e: 01 a: 10 d: 11

(Existujú rôzne Huffmanove kódy odpovedajúce rôznemu poradiu nakreslenia vetiev zľava doprava, ale počet číslic kódu pre jednotlivé symboly je vždy rovnaký)