Písomná skúška predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 5. 6. 2007

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny výrokov:
„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“ ?

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A=\{a\}$.

3. príklad.
Zistite, či relácia R je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x \le y$,

(b) x má rovnaké krstné meno ako y, $km(x)=km(y)$,

(c) x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4.

4. príklad. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte jej reprezentáciu pomocou binárnej matice.

5. príklad.
Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF.

6. príklad.
Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

7. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz+wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z\,.$$

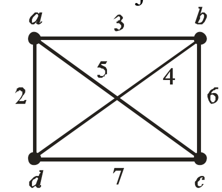
8. príklad. Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{array}{rrrrcl}
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5\\
x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7\\
x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4\\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3
\end{array}$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 4 & 2 & 5 & -1\\ 3 & 1/2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.

11. príklad. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗ a keď ju nepredpokladáme?

(a) $x \otimes y \otimes z$

(b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$

(c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

1. príklad. Aký záver vyplýva z množiny výrokov?
„Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.
p = som chytrý
q = mám šťastie
r = zvíťazím v lotérii

$p \vee q$	predpoklad$_1$
$\neg q$	predpoklad$_2$
$q \Rightarrow r$	predpoklad$_3$
p	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad$_1$ a predpoklad$_2$

záver: som chytrý

2. príklad. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ pre $A=\{a\}$.
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$,
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\}$

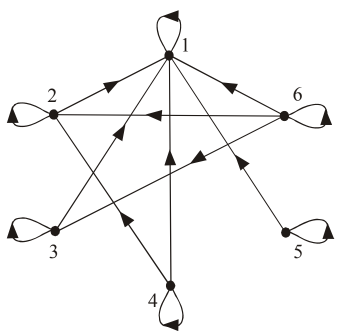
3. príklad.
Zistite, či relácia R je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) $x\le y$,
(b) x má rovnaké krstné meno ako y, $km(x)=km(y)$,
(c) x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4.

(a)
je reflexívna, $x\le x$,
nie je symetrická, neplatí implikácia $x\le y\Rightarrow y\le x$,
je antisymetrická, platí implikácia $(x\le y)\wedge(y\le x)\Rightarrow x=y$,
je tranzitívna, platí implikácia $(x\le y)\wedge(y\le z)\Rightarrow(x\le z)$.
(b)
je to relácia ekvivalencie (čiže je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, a je tranzitívna)
je reflexívna, platí $km(x)=km(x)$,
je symetrická, platí implikácia $(km(x)=km(y))\Rightarrow(km(y)=km(x))$,
nie je antisymetrická (môžu byť rôzni ľudia x a y s rovnakým krstným menom $\neg\big((km(x)=km(y))\wedge(km(y)=km(x))\Rightarrow x=y\big)$
je tranzitívna, platí implikácia $(km(x)=km(y))\wedge(km(y)=km(z))\Rightarrow(km(x)=km(z))$.

(c)
nie je reflexívna, nie každé číslo x je súčasne deliteľné 2 a 4,
nie je symetrická, nie každá dvojica x a y je taká, že keď x je deliteľné 2 a y je deliteľné 2 a 4 potom y je deliteľné 2 a x je deliteľné 2 a 4, kontrapríkladom je napr. x=2 a y=4
nie je antisymetrická, existujú také dvojice x a y, že x je deliteľné 2 a y je deliteľné 4 a súčasne y je deliteľné 2 a x je deliteľné 4 a pritom $x \neq y$ (napríklad 4 a 8),
je tranzitívna, ak máme dve dvojice x,y a y,z, ktoré vyhovujú podmienkam relácie, potom tieto podmienky musia platiť aj pre dvojicu x,z.

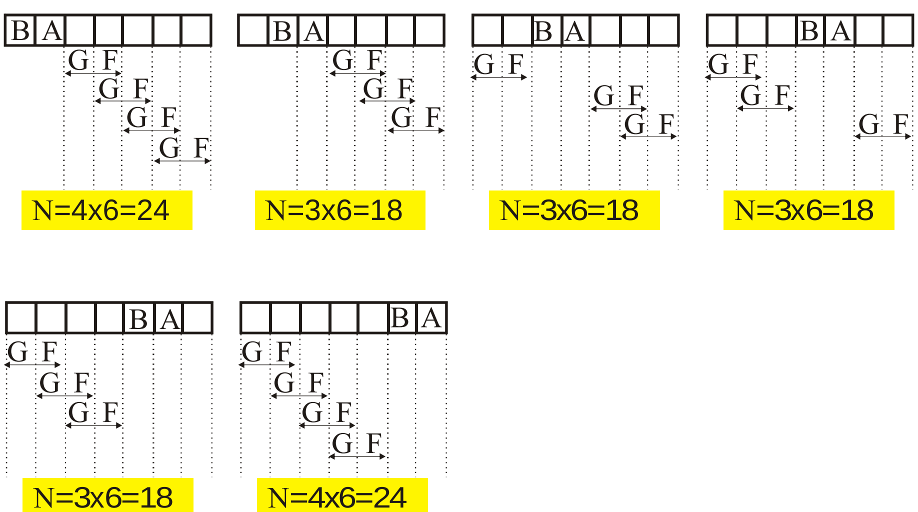
4. príklad. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R=\{(x,y);\, x \text{ je deliteľné } y\}$ pre $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, znázornite túto reláciu pomocou orientovaného grafu a zostrojte je reprezentáciu pomocou binárnej matice.

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}$$



$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. príklad
Cvičenie 4.15. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré obsahujú dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je 2×24+4×18 = 120.

6. príklad.
Nech na turnaji je 2^k družstiev, turnaj prebieha eliminačným spôsobom, t. j. do ďalšieho kola postupujú len víťazi z predchádzajúceho kola. Zostrojte funkciu pre počet vzájomných zápasov v turnaji.

1. kolo: pre 2^k družstiev existuje 2^{k-1} zápasov.
2. kolo: pre 2^{k-1} družstiev existuje 2^{k-2} zápasov.

....

(k-1). kolo: pre 2^1 družstiev existuje 2 zápasy (semifinále).

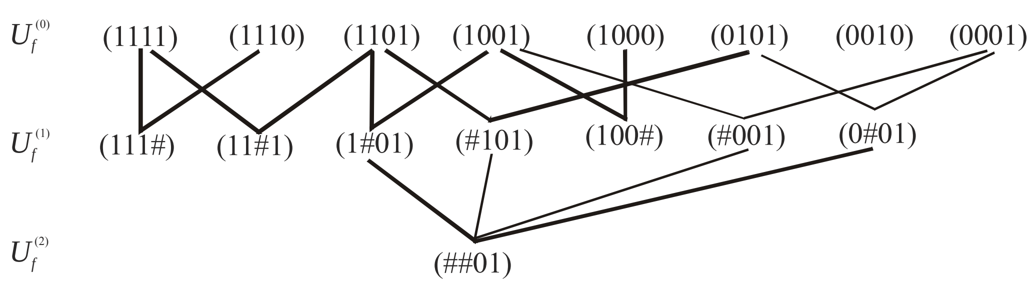
k. kolo: pre 2^0 existuje 1 zápas (finále)

Celkový počet zápasov je teda $2^{k-1}+2^{k-2}+...+2+1=\dfrac{2^k-1}{2-1}=\boxed{2^k-1}$

7. príklad. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

$$wxyz+wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z\,.$$

0. etapa			1. etapa				2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)		1	(3,7)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)		2	(4,6)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)				
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)				
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)				
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)				
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)				
8	(0001)								



$$\tilde{V}=\{(111\#),(\#\#01),(100\#),(0010)\}$$

$$f(w,x,y,z)=wxy+\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

8. príklad. Riešte pomocou Gaussovej eliminačnej metódy lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{array}{rrrrcl}
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & 5\\
x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7\\
x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4\\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 3
\end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \boxed{2} & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$x_4 = l$, $x_3 = k$, $x_2 = 3 - k - l$, $x_1 = 4 - 3k - 2l$, kde $k, l \in \mathbb{R}$,

$$x = \begin{pmatrix} 4-3k-2l \\ 3-k-l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

9. príklad. Vypočítajte determinant matice pomocou jej transformácie na trojuholníkový tvar

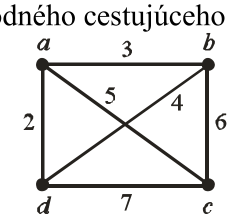
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1/2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{-1} & 4 & 5 & 2 \\ \boxed{2} & 3 & -1 & 1/2 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & 5/2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

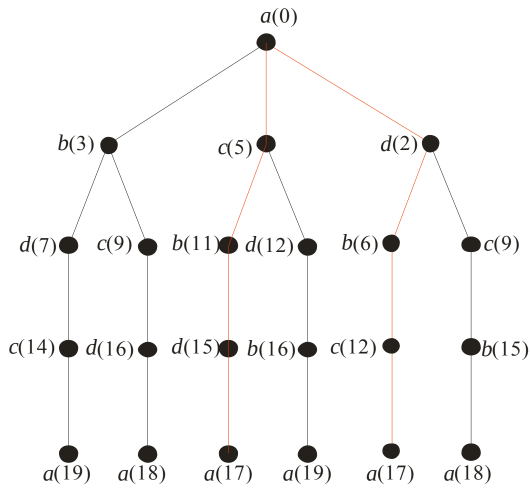
$$= \frac{7}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 37/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{7}{2}(-1)2\frac{2}{7}4 = 8$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.



Minimálna hamiltonovská kružnica je a-d-b-c-a (prípadne reprezentovaná v opačnej orientácii) s dĺžkou 17.

11. príklad. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗ a keď ju nepredpokladáme?

(a) $x \otimes y \otimes z$
(b) $t \oplus x \otimes y \otimes z$
(c) $t \otimes x \oplus y \otimes z$

Riešenie:
Keď predpokladáme asociatívnosť operácie ⊗
(a) 1 interpretácia, $x \otimes y \otimes z$
(b) 3 interpretácie, $(t \oplus x) \otimes y \otimes z$, $t \oplus (x \otimes y \otimes z)$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$
(c) 4 interpretácie, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$
Keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie ⊗
(a) 2 interpretácie, $(x \otimes y) \otimes z$, $x \otimes (y \otimes z)$
(b) 5 interpretácií, $(t \oplus x) \otimes (y \otimes z)$, $t \oplus ((x \otimes y) \otimes z)$, $t \oplus (x \otimes (y \otimes z))$, $(t \oplus (x \otimes y)) \otimes z$, $((t \oplus x) \otimes y) \otimes z$
(c) 5 interpretácií, $(t \otimes x) \oplus (y \otimes z)$, $((t \otimes x) \oplus y) \otimes z$, $(t \otimes (x \oplus y)) \otimes z$, $t \otimes (x \oplus (y \otimes z))$, $t \otimes ((x \oplus y) \otimes z)$