Neklasické logiky IV –

Modálna logika
Temporálna logika

Úvodné poznámky

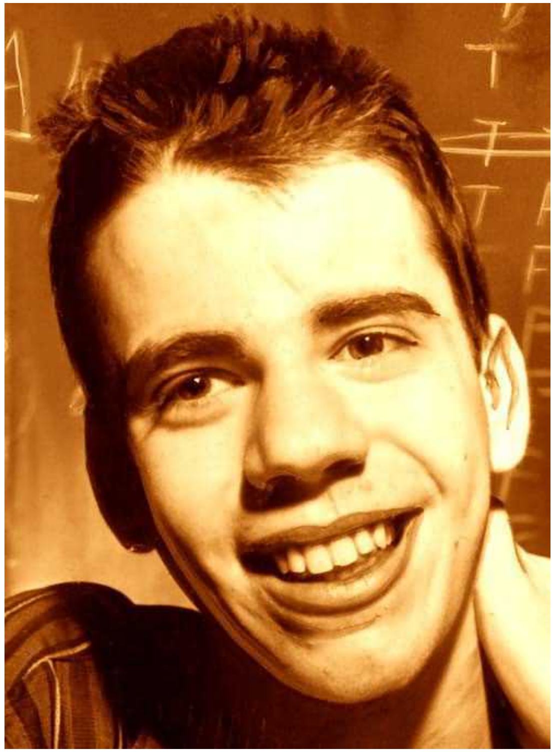
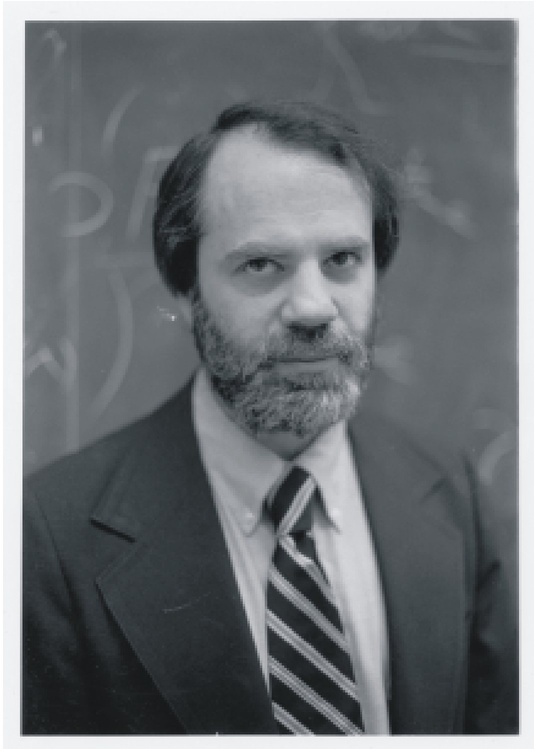
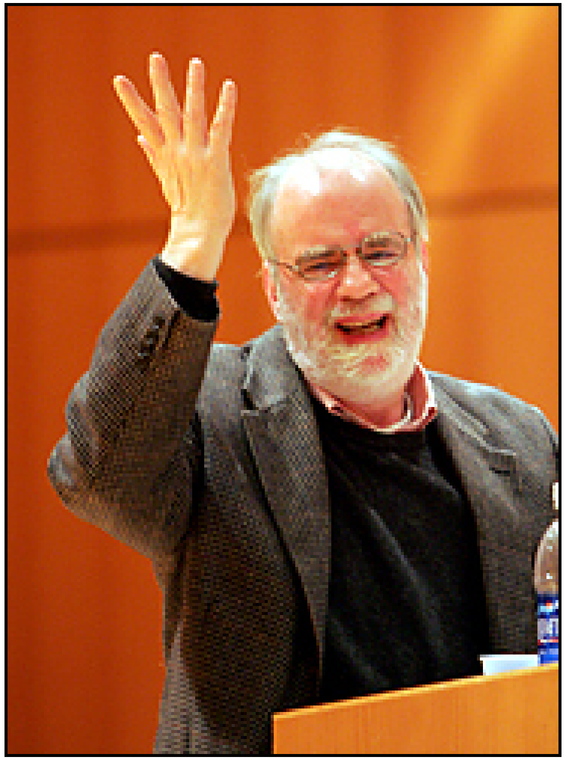
Modálna logika

- patrí medzi *neklasické logiky*, ktoré využívajú modálne spojky (tak unárne, ako aj binárne) pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania.
- je to taká *modifikácia výrokovej logiky*, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky
    - „je nutné, aby...“
    - „je možné, aby...“.
- iné typy modálnych logík sú
    - *temporálna logika* (obsahuje modálne spojky časové charakteru ako napr. „budúci“ a „minulý“),
    - *deontická logika* (obsahuje modálne spojky morálneho charakteru ako napr. „je povinné, aby...“, „je povolené, aby...“),

Spoločným rysom modálnych logík je

- *Nefunkcionálny charakter* modálnych spojok, pravdivosť nejakého výroku φ, na ktorý je aplikovaná nejaká modálna spojka, $\clubsuit\varphi$, nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou daného výroku φ (ako to napr. platí pre spojku negácie $\neg$ v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť $\neg\varphi$ je plne určená pravdivosťou φ).

- Klasická tabuľková metóda pre pravdivostné vyhodnocovanie formúl je neaplikovateľná.

Evolution in time of Saul Kripke (*1940)

Kripkeho prístup k sémantickej interpretácii neklasických logík

- Americký filozof a logik Saul Kripke navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet.

- Kripke vychádzal zo všeobecných filozofických úvah založených na predstave nemeckého filozofa 17. storočia Leibniza, ktorý sa domnieval, že Boh mohol stvoriť svet nekonečne mnohými spôsobmi.

- Pojem možného sveta inšpiroval Kripkeho pri tvorbe sémantiky modálnych výrokov. Problém určenia pravdivostnej hodnoty výroku „φ je *vždy* pravdivé“, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na iné možné svety
  - ***výrok φ je nutne pravdivý vtedy a len vtedy, ak φ je pravdivý vo všetkých možných svetoch***

  - ***výrok φ je možne pravdivý vtedy a len vtedy, ak φ je pravdivý aspoň v jednom možnom svete***.

Modálne spojky „***nutne***“ a „***možne***“ majú podobnú interpretáciu, akú majú univerzálny resp. existenčný kvantifikátor. Rozdiel je však v tom, že kvantifikátory sú definované nad univerzom vecí alebo indivíduí, zatiaľ čo modálne spojky sa vzťahujú k možným svetom.

Kripkeho ideu si môžeme predstaviť ako školu, v ktorej sa nachádza množstvo tried, pričom v každej triede ja tabuľa, na ktorej sú vypísané pravdivé výroky (napr. „Eva miluje Ivana“). Ak chceme poznať v danej triede, v ktorej sa nachádzame, pravdivostnú hodnotu nejakého modálneho výroku „nutne φ“, tak musíme skontrolovať platnosť tohto výroku φ vo všetkých ostatných triedach. Ak je v každej triede pravdivý, potom je aj „nutne φ“ pravdivý aj v danej triede. Podobne, ak chceme poznať pravdivostnú hodnotu „možne φ“ v danej triede, stačí nájsť aspoň jednu inú triedu, kde na tabuli je uvedený výrok φ, potom výrok „možne φ“ je pravdivý aj v danej triede.

- Výrok „*číslo 3 je prvočíslo*“ je pravdivý za každej situácie v každom možnom svete, t. j. je napísaný na tabuli v každej triede. Ak je tento výrok pravdivý v každom možnom svete, potom je nutne pravdivý.

- Výrok „*Havel je prezident*“ je pravdivý len v niektorých možných svetoch, potom tento výrok nie je nutne pravdivý ale len možne pravdivý.

- Výrok „*prvočíslo je deliteľné 2*“, ktorý nie je pravdivý v žiadnom možnom svete, t. j. je nutne nepravdivý.

Počiatky modálnej logiky

Modálna logika bola prvýkrát diskutovaná Aristotelom, ktorý bol asi prvý kto poukázal na skutočnosť, že nutnosť implikuje možnosť

ak (*p je nutné*), potom (*p je možné*)

Taktiež poukázal na možnosť definovať možnosť pomocou nutnosti a naopak

nie (*p je možné*) *vtedy a len vtedy ak* (*p nie je nutné*)
nie (*p je nutné*) *vtedy a len vtedy ak* (*p nie je možné*)

a taktiež zistil, že nasledujúce dva modálne výroky sú ***platné***

ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je nutný*), potom (*q je nutný*))
ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je možný*), *potom* (*q je možný*))

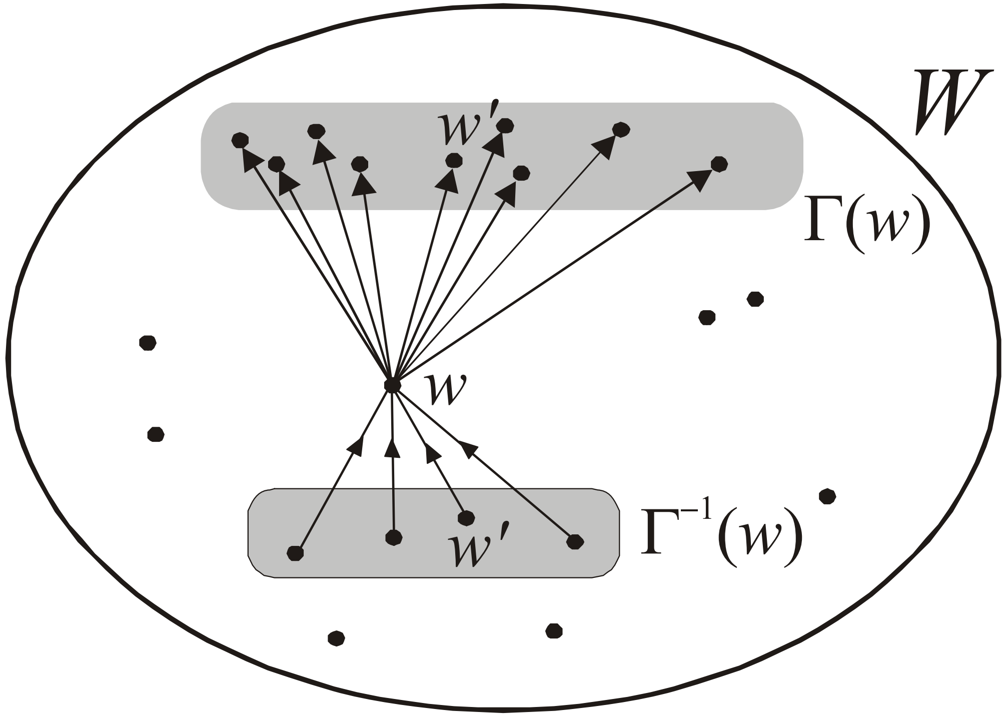
Základné pojmy Kripkovej sémantiky

Model M kripkeovskej sémantiky je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = \left(W, R, v\right)$$

- $W = \left\{w_1, w_2, ...\right\}$ je neprázdna množina obsahujúca všetky alternatívne (alebo paralélne, možné,..) svety
- $R \subseteq W \times W = \left\{\left(w, w'\right)\right\}$ je binárna relácia definovaná nad množinou W, jej zložky (usporiadané dvojice) (w,w') špecifikujú dostupnosť sveta w' zo sveta w.
- $v : W \times \Omega \rightarrow \left\{0,1\right\}$ je zobrazenie, ktoré ohodnotí každú atomickú formulu (výrokovú premennú p, q,... ,p',q',...$\in\Omega$) pravdivostnou hodnotou, výraz $v\left(w, p\right) = 1\left(0\right)$ je interpretovaný tak, že atomická formula p je pravdivá (nepravdivá) vo svete w.

Špecifikácia relácie R pomocou množín $\Gamma(w)$ a $\Gamma^{-1}(w)$, ktoré obsahujú „susedné“ svety zo sveta w.



(1) Výrok *p je nutné* (označený $\Box p$), je pravdivý vo svete *w* vtedy a len vtedy, ak je pravdivý vo všetkých alternatívnych svetoch *w*´, ktoré sú dostupné z *w*

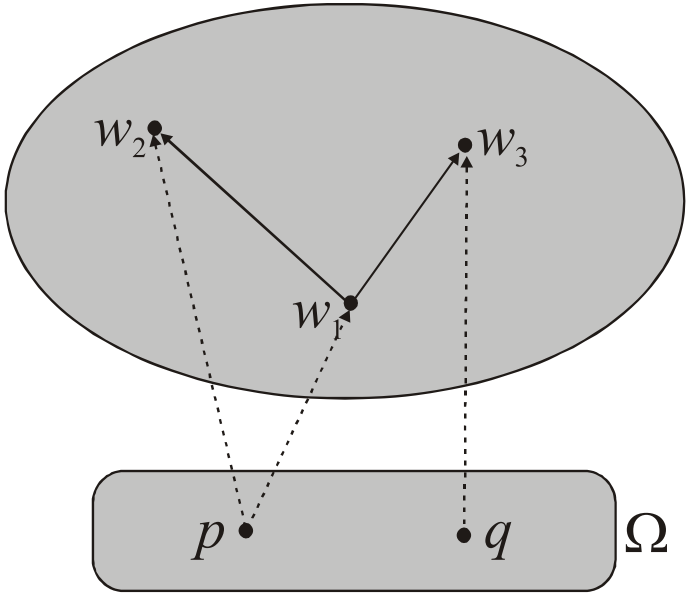
$$v(w,\Box p)=1 \text{ vtt, ak v každom svete } w' \in \Gamma(w) \text{ platí } v(w',p)=1$$
$$v(w,\Box p)=0 \text{ vtt, ak existuje taký svet } w' \in \Gamma(w) \text{ kde } v(w',p)=0$$

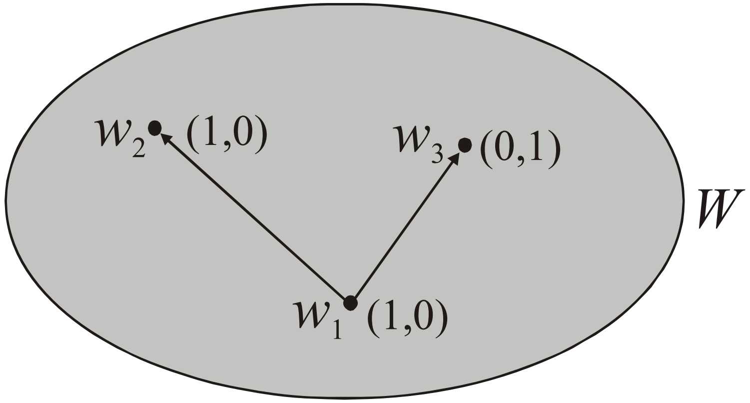
(2) Výrok *p je možné* (označený $\Diamond p$), je pravdivý vo svete *w* vtedy a len vtedy, ak je pravdivý aspoň v jednom alternatívnom svete *w*´, ktorý je dostupný zo sveta *w*

$$v(w,\Diamond p)=1 \text{ vtt, ak existuje taký svet } w' \in \Gamma(w)\text{, kde } v(w',p)=1$$
$$v(w,\Diamond p)=0 \text{ vtt, ak v každom svete } w' \in \Gamma(w) \text{ platí } v(w',p)=0$$

Príklad

$$\Omega = \{p, q\},\ \ W = \{w_1, w_2, w_3\} \text{ a } R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$$





$$v(w_1, \Box p) = v(w_2, p) \wedge v(w_3, p) = 0 \wedge 1 = 0$$

$$v(w_1, \Diamond p) = v(w_2, p) \vee v(w_3, p) = 0 \vee 1 = 1$$

Definície

Formula φ je pravdivá v rámci modelu M a vo svete w je označená symbolom

$$\left(\models_w^M \varphi\right) =_{def} \left(v\left(w,\varphi\right)=1\right)$$

kde v je zobrazenie z modelu $M=\left(W,R,v\right)$. Negácia tejto skutočnosti je označená novým symbolom

$$\left(\not\models_w^M \varphi\right) =_{def} \left(v\left(w,\varphi\right)=0\right)$$

Ohodnotenie pravdivosti formuly φ v modelu *M* a vo svete *w* je rekurentne určené pomocou jej podformúl:

(1) Negácia

$$\left(v\left(w_1,\neg\varphi\right)=1\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=0\right)$$
$$\left(v\left(w_1,\neg\varphi\right)=0\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=1\right)$$

(2) Konjunkcia

$$\left(v\left(w_1,\varphi\wedge\psi\right)=1\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=1\quad \text{a}\quad v\left(w_1,\psi\right)=1\right)$$
$$\left(v\left(w_1,\varphi\wedge\psi\right)=0\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=0\quad \text{alebo}\quad v\left(w_1,\psi\right)=0\right)$$

(3) Disjunkcia

$$\left(v\left(w_1,\varphi\vee\psi\right)=1\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=1\quad \text{alebo}\quad v\left(w_1,\psi\right)=1\right)$$
$$\left(v\left(w_1,\varphi\vee\psi\right)=0\right)\quad \text{vtt}\quad \left(v\left(w_1,\varphi\right)=0\quad \text{a}\quad v\left(w_1,\psi\right)=0\right)$$

(4) Implikácia

$$\left(v\left(w_1, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 1\right) \quad \text{vtt} \quad \left(v\left(w_1, \varphi\right) = 0, \quad \text{alebo} \quad v\left(w_1, \psi\right) = 1\right)$$

$$\left(v\left(w_1, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 0\right) \quad \text{vtt} \quad \left(v\left(w_1, \varphi\right) = 1, \quad \text{a} \quad v\left(w_1, \psi\right) = 0\right)$$

(5) Modálna spojka $\Box$

$$\left(v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 1\right) \quad \text{vtt} \quad \left(\forall w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)\left(v\left(w_2, \varphi\right) = 1\right)$$

$$\left(v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 0\right) \quad \text{vtt} \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)\left(v\left(w_2, \varphi\right) = 0\right)$$

(6) Modálna spojka $\Diamond$

$$\left(v\left(w_1, \Diamond\varphi\right) = 1\right) \quad \text{vtt} \quad \left(\exists w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)\left(v\left(w_2, \varphi\right) = 1\right)$$

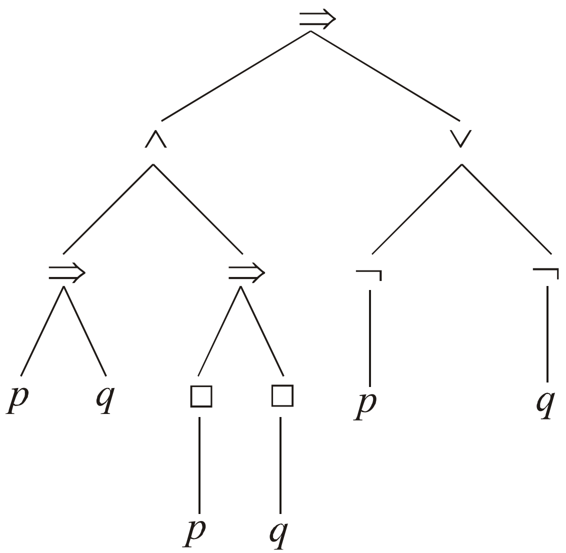
$$\left(v\left(w_1, \Diamond\varphi\right) = 0\right) \quad \text{vtt} \quad \left(\forall w_2 \in \Gamma\left(w_1\right)\right)\left(v\left(w_2, \varphi\right) = 0\right)$$

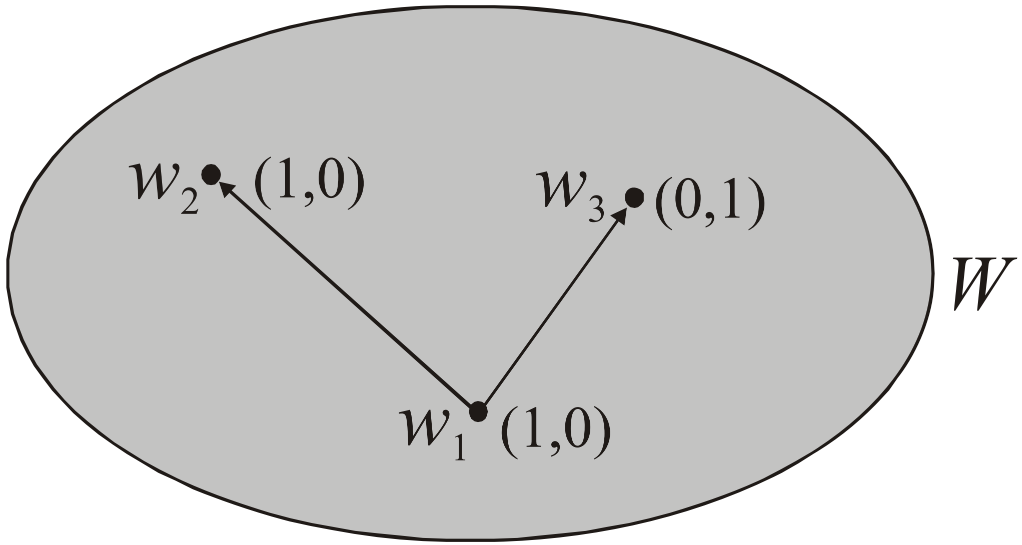
′

Príklad

Určite pravdivosť formule

$$\varphi = \left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(\Box q \Rightarrow \Box p\right)\right) \Rightarrow \left(\neg p \vee \neg q\right)$$





(0) Pravdivostné hodnoty atomických formúl

$$v(p,w_1)=1,\ v(p,w_2)=1,\ v(p,w_3)=0$$
$$v(q,w_1)=0,\ v(q,w_2)=0,\ v(q,w_3)=1$$

(1) Vyhodnotenie modálnych výrokov $\Box p$ a $\Box q$

$$v(w_1,\Box p)=\big(v(w_2,p)\big)\wedge\big(v(w_3,p)\big)=1\wedge 0=0$$
$$v(w_1,\Box q)=\big(v(w_2,q)\big)\wedge\big(v(w_3,q)\big)=0\wedge 1=0$$

(2) Vyhodnotíme podformule $p\Rightarrow q$ a $\neg p\vee\neg q$

$$v(w_1,p\Rightarrow q)=\big(v(w_1,p)\big)\Rightarrow\big(v(w_1,q)\big)=1\Rightarrow 0=0$$
$$v(w_1,\Box p\Rightarrow\Box q)=\big(v(w_1,\Box p)\big)\ \Rightarrow\ \big(v(w_1,\Box q)\big)=0\Rightarrow 0=1$$
$$v(w_1,\neg p\vee\neg q)=\big(v(w_1,\neg p)\big)\ \vee\ \big(v(w_1,\neg q)\big)=0\vee 1=1$$

(3) Použitím oboch implikácií z predchádzajúceho kroku vyhodnotíme podformulu $(p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)$

$$v\left(w_1, (p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)\right) = \left(v\left(w_1, p \Rightarrow q\right)\right) \wedge \left(v\left(w_1, \Box q \Rightarrow \Box p\right)\right) = 0 \wedge 0 = 0$$

(4) V poslednom kroku vyhodnotíme formulu φ

$$v(w_1, \varphi) = v\left(w_1, \left((p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)\right) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)\right) =$$

$$= \left(v\left(w_1, (p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)\right)\right) \Rightarrow \left(v\left(w_1, \neg p \vee \neg q\right)\right) = 0 \Rightarrow = 1$$

Môžeme teda konštatovať, že formula φ je v rámci modelu M a v jeho svete w_1 pravdivá, t.j. $\models_{w_1}^{M} \varphi$.

Definícia.

(1) Formula φ sa nazýva ***pravdivá*** v modele M ak je pravdivá v každom alternatívnom svete $w \in W$ z daného modelu

$$\left(\models^{M} \varphi\right) =_{def} \left(\forall w \in W\right)\left(\models_{w}^{M} \varphi\right)$$

(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** ak je pravdivá v každom modele M

$$\left(\models \varphi\right) =_{def} \left(\forall M\right)\left(\models^{M} \varphi\right)$$

Falzifikácia kontradikčnosti formúl

Principiálny problém pre modálnu logiku je verifikácia toho, či daná formula φ je tautológiou, $\models \varphi$. Základná myšlienka použitej metódy (falzifikácie) spočíva v tom, že ukážeme, že $\not\models_w^M \varphi$ neplatí pre ľubovolný model M a svet w, t.j. musí platiť $\models \varphi$, formálne

$$\forall M \; \forall w \left(\not\models_w^M \varphi \right) \Rightarrow \left(\models \varphi \right)$$

Príklad

Dokážte tautologičnosť formule $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

1. $v\left(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)\right) = 0$
2. $v\left(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi)\right) = 1$
3. $v\left(w_1, (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)\right) = 0$ (2, 3 vznikli z 1)
4. $v\left(w_2, \varphi \Rightarrow \psi\right) = 1$ (vznikol z 2 odstránením □)
5. $v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 1$
6. $v\left(w_1, \Box\psi\right) = 0$ (5 a 6 vznikli z 3)
7. $v\left(w_2, \varphi\right) = 1$ (vzniklo z 5 odstránením □)
8. $v\left(w_2, \psi\right) = 0$ (vzniklo z 6 odstránením □)

6\. $v\left(w_2, \varphi\right) = 0$ alebo $v\left(w_2, \psi\right) = 1$ (vzniklo z 4 odstránením implikácie)

Sémantické tablo dôkazu

$$v(w_1,\Box(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\Box\varphi\Rightarrow\Box\psi)=0$$

$$v(w_1,\Box(\varphi\Rightarrow\psi))=1$$
$$v(w_1,\Box\varphi\Rightarrow\Box\psi)=0$$

$$v(w_2,\varphi\Rightarrow\psi)=1$$
$$v(w_1,\Box\varphi)=1$$
$$v(w_1,\Box\psi)=0$$

$$v(w_2,\varphi)=1$$
$$v(w_2,\psi)=0$$

$$v(w_2,\varphi)=0 \qquad\qquad v(w_2,\psi)=1$$
$$\times \qquad\qquad\qquad\qquad \times$$

Príklad

Dokážte, že formula $\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ nie je tautológia .

$$\begin{array}{r|l}
1. & v\left(w_1, \varphi \Rightarrow \Box\varphi\right) = 0 \\
2. & v\left(w_1, \varphi\right) = 1 \\
3. & v\left(w_1, \Box\varphi\right) = 0 \\
4. & v\left(w_2, \varphi\right) = 0
\end{array}$$

(1) $\models_{w_1}^{M} \varphi$, pre svet $w_1 \in W_M$

(2) $\not\models_{w_2}^{M} \varphi$, pre svet $w_2 \in \Gamma\left(w_1\right) \subseteq W_M$

Sémantické tablo pokusu falzifikácie formule $v\left(w_1, \varphi \Rightarrow \Box\varphi\right) = 0$.

$$v(w_1, \varphi \Rightarrow \Box\varphi) = 0$$

$$\Big|$$

$$v(w_1, \varphi) = 1$$
$$v(w_1, \Box\varphi) = 0$$

?

$$\Big|$$

$$v(w_2, \varphi) = 0$$

$$\bigcirc$$

Axiomatický výstavba modálnej logiky

Axiomatický systém výrokovej logiky je rozšírený o niektoré z ďalších axióm, ktoré už obsahujú modálne spojky

Axióm M: $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$

Axióm K: $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

Axióm T: $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$

Axióm E: $\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Axióm D: $\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$

Axióm 4: $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$

Axióm B: $\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi$

V axiomatický systém modálnej logiky používa ako ďalšie pravidlo odvodzovania, okrem klasického modus ponens aj nové pravidlo

$$\frac{\models \varphi}{\models \Box \varphi}$$

Toto pravidlo je potrebné interpretovať takto: formula φ je tautológia, čiže je pravdivá pre ľubovolný model M a jeho ľubovolný svet w, t.j. $\models_w^M \varphi$. Pomocou tohto predpokladu (premisy) ľahko dokážeme, že aj $\Box\varphi$ je taktiež tautológia, pretože $\models_w^M \Box\varphi = \left(\forall w' \in \Gamma\left(w\right)\right) \models_{w'}^M \varphi$, ak použijeme východzí predpokladať pravdivosti φ pre každé M a w', potom musí byť pravdivá aj $\Box\varphi$.

Postupná výstavba axiomatického systému Σ modálnej logiky

(1) Σ je axiomatický systém výrokovej logiky (10 axióm a pravidlo modus ponenes)

(2) Σ je rozšírený o všetky teorémy (zákony) výrokovej logiky.

(3) Σ je rozšírený o formule, ktoré vznikajú z jeho formúl (teorémov výrokovej logiky) pomocou substitúcie tak, že premenné sú nahradené formulami obsahujúce modálne spojky (príklad: z teorému $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ je pomocou substitúcie $(p/\Box p, q/\Box q)$ novú formulu – tautológiu $\Box p \Rightarrow (\Box q \Rightarrow \Box p)$.

(4) Σ je rozšírený o nové pravidlo „zovšeobecnenia“

$$\left| \frac{\varphi}{\Box \varphi} \right.$$

(5) Σ je rozšírený o vybrané axiómy modálnej logiky (M-B).

(6) Ďalšie formule v Σ sa vytvárajú štandardným postupom logického dôkazu, ak formula φ logicky vyplýva z Σ, potom

$$\vdash_{\Sigma} \varphi$$

Príklad

$$\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

1. $\vdash_{\Sigma} \Box\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ (axióm T)
2. $\vdash_{\Sigma} \neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$ (kontrapozícia implikácie)
3. $\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$
4. $\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$

Príklad

$$\vdash_{\Sigma} \Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$$

1. $\vdash_{\Sigma} \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\neg\varphi$ (axióm M, substitúcia $\varphi/\neg\varphi$)
2. $\vdash_{\Sigma} \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi$
3. $\vdash_{\Sigma} \neg\neg\Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
4. $\vdash_{\Sigma} \Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

Systémy modálnej logiky

1. Najslabší modálna logika je označená K, ktorá vznikne tak, že axiomatický systém Σ obsahuje len axióm K

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

   V tomto prípade relácia *R* je bez obmedzenia

2. Ak predpokladáme, že relácia *R* obsahuje ku každému svetu aspoň jeden alternatívny svet $\forall w\, \exists w' \left((w, w') \in R\right)$, potom modálna logika D vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axióm D

$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

3. Ak relácia R je reflexívna, $\forall w\big((w,w)\in R\big)$, potom modálna logika T vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axióm T

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$

4. Ak relácia R je nielen reflexívna, ale aj tranzitívna

$$\forall w\,\forall w'\,\forall w''\big((w,w'),(w',w'')\in R \Rightarrow (w,w'')\in R\big)$$

potom modálna logika S4 vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axiómy T a 4

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$
$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$$

5. Ak je relácia R nielen reflexívna a tranzitívna, ale aj symetrická

$$\forall w\,\forall w'\big((w,w')\in R \Rightarrow (w',w)\in R\big)$$

potom modálna logika S5 vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axiómy T , 4 a E

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$
$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$$
$$\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

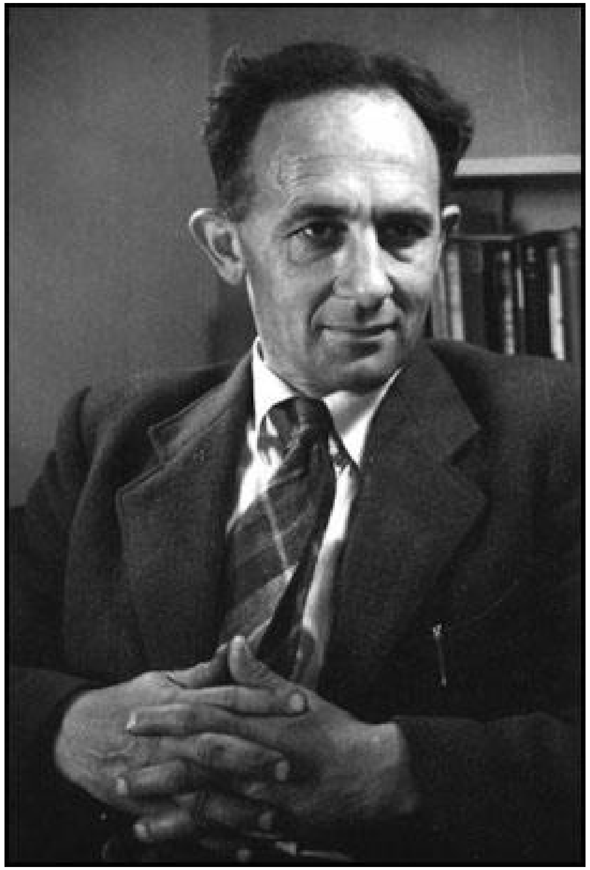
Záver. Kripkovská sémantika umožňuje jednoduchú klasifikáciu modálnych logík pomocou podmienok, ktoré sú požadované od relácie *R*.

Temporálna logika

- ***Prirodzený jazyk taktiež obsahuje aj časové modality*** ako napr. „*vždy bude p*“, „*niekedy bude p*“, alebo „*v nasledujúcom okamžiku bude p*“, kde *p* je nejaký „temporálny“ výrok, ktorý má vzťah k času, napr. môže meniť svoju pravdivostnú hodnotu v priebehiu času.

- Nebudeme študovať temporálne spojky vzťahujúce sa do ***minulosti***, pretože sú analógiou „budúcich“ temporálnych spojok.

- Temporálnou logikou ako prví sa zaoberal novozealandský teológ, filozof a logik ***Arthur Prior*** v polovici 20. storočia, ktorý ako skúmal logické vlastnosti temporálnych modalít „budúci“ a „minulý“.



Arthur Prior (1914-1969)

- ***Temporálna logika*** je efektívnym nástrojom skúmania procesov v informatike, kde jednotlivé stavy systému (počítača, programu, atď.) majú časovú následnosť a podmienenosť.

- ***Kripkeho sémantika*** pre temporálnu logiku poskytuje transparentnú metódu pre pravdivostné ohodnotenie formúl, ktoré špecifikujú stavy informatického systému.

- ***Kripkeho model*** $M = (T, v)$ je zjednodušene špecifikovaný lineárne usporiadanou množinou časových okamžikov (bodov), $T = \{t_1, t_2, t_3, ...\}$, pričom $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < ...$

- ***Zobrazenie*** $v : \Omega \times T \rightarrow \{0,1\}$ ohodnotí každú výrokovú premennú p, q,... ,p',q',... $\in \Omega$ pre nejaký časový okamžik $t \in T$ pravdivostnou hodnotou, ak $v(t, p) = 1(0)$, potom atomická formula p je v čase pravdivá (nepravdivá).

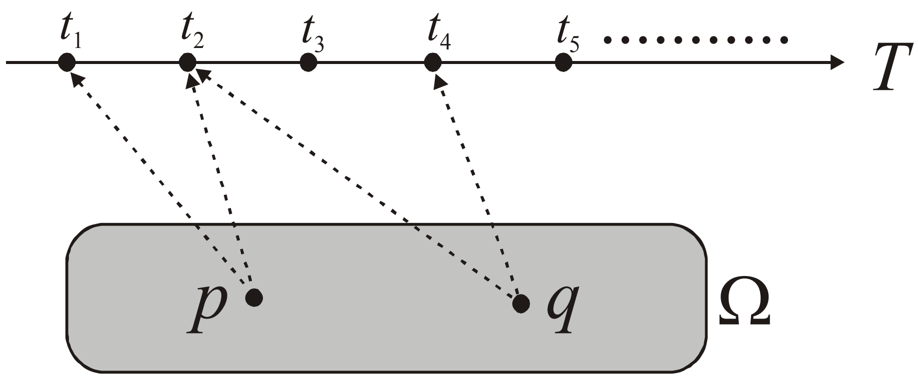
	p	q	r	…	p'	q'	r'	…
t_1	1	0	1	…	1	1	0	…
t_2	1	1	0	…	1	1	1	…
t_3	1	0	1	…	0	1	0	…
t_4	1	1	1	…	1	1	1	…
t_5	1	0	0	…	1	1	0	…
t_6	1	1	0	…	0	1	1	…
t_7	1	1	0	…	0	1	1	…
				…				…

T

Stav systému je špecufikovaný výrokovými premennými p, q, r, ..., ktorých pravdivostné hodonoty sa menia v čase.

Príklad

Predstavme si hypotetický systém, ktorého stavy sa menia v závislosti od diskrétnych časových krokov $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < ....$ Každý stav je formálne popísaný výrokov premennou z Ω, pričom ich pravdivostné hodnoty sa môžu meniť pre jednotlivé časové kroky



t	p	q
t_1	1	0
t_2	1	1
t_3	0	0
t_4	0	1
t_5	0	0
$\vdots$		

Unárne temporálne spojky

spojka	*význam*
$\Box\varphi$	*v budúcnosti vždy* φ *je splnené*
$\Diamond\varphi$	*v budúcnosti niekedy* φ *je splnené*
$\Box\ \varphi$	*v nasledujúcom okamžiku* φ *je splnené*

$$v\left(t,\Box\varphi\right)=1 \quad \text{vtt} \quad v\left(t',\varphi\right)=1 \quad \left(\text{pre každé } t'\geq t\right)$$

$$v\left(t,\Diamond\varphi\right)=1 \quad \text{vtt} \quad v\left(t',\varphi\right)=1 \quad \left(\text{pre niektoré } t'\geq t\right)$$

$$v\left(t,\Box\ \varphi\right)=1 \quad \text{vtt} \quad v\left(t+1,\varphi\right)=1$$

Skutočnosť, že premenná p je pravdivá v modele M a v čase t je určená takto

$$\left(\models_t^M p\right)=_{def}\left(v\left(t,p\right)=1\right)$$

Negáciou tohto vzťahu dostaneme

$$\left(\not\models_t^M p\right)=_{def}\left(v\left(t,p\right)=0\right)$$

Príklad

Uvažujme tieto dva výroky

$$p = \text{Jano je študent}$$
$$q = \text{Jano je inžinier}$$

budeme z nich vytvárať použitím temporálnych spojok nové výroky:

(1) $p \wedge \square\, q$ = Jano je študent a teraz bude inžinierom.
(2) $p \wedge \square q$ = Jano je študent a v budúcnosti isto bude inžinierom.
(3) $p \wedge \Diamond q$ = Jano je študent a niekedy v budúcnosti bude inžinierom.
(4) $\square\, p \wedge \Diamond q$ = Jano teraz ešte bude študentom a budúcnosti bude inžinierom.

Príklad

Pomocou temporálnych spojok budeme formulovať niektoré výroky vyskytujúce sa v špecifikáciách informatických systémov.

- *Vzájomné vylúčenie*. Dva procesy A a B nie sú nikdy súčasne vykonávané:
$$\Box\neg\left(Execute\left(A\right)\wedge Execute\left(B\right)\right)$$
- *Parciálne korektnosť*. Ak je výpočet ukončený, potom platia podmienky ukončenia
$$\Box\left(Finished \Rightarrow PostCondition\right)$$
- *Ukončenie a celková korektnosť*. Parciálna korektnosť spolu s ukončením poskytuje celkovú korektnosť
$$\Diamond Finished \wedge \Box\left(Finished \Rightarrow PostCondition\right)$$
- *Odozva na signál.* Vždy, ak systém príjme menovitý signál, potom okamžite zareaguje.
$$\Box\left(Trigger \Rightarrow \Diamond Response\right)$$

Ohodnotenie pravdivosti temporálnych elementárnych formúl v modele *M* a čase *t* je určené prostredníctvom týchto vzťahov

(1) Negácia

$$\left(v\left(t,\neg\varphi\right)=1\right)\, vtt\, \left(v\left(t,\varphi\right)=0\right)$$
$$\left(v\left(t,\neg\varphi\right)=0\right)\, vtt\, \left(v\left(t,\varphi\right)=1\right)$$

(2) Konjunkcia

$$\left(v\left(t,\varphi\wedge\psi\right)=1\right)\, vtt\, \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=1\right)\wedge\left(v\left(t,\psi\right)=1\right)\right)$$
$$\left(v\left(t,\varphi\wedge\psi\right)=0\right)\, vtt\, \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=0\right)\vee\left(v\left(t,\psi\right)=0\right)\right)$$

(3) Disjunkcia

$$\left(v\left(t,\varphi\vee\psi\right)=1\right) vtt \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=1\right)\vee\left(v\left(t,\psi\right)=1\right)\right)$$
$$\left(v\left(t,\varphi\vee\psi\right)=0\right) vtt \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=0\right)\wedge\left(v\left(t,\psi\right)=0\right)\right)$$

(4) Implikácia

$$\left(v\left(t,\varphi \Rightarrow \psi\right)=1\right) vtt \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=0\right) \vee \left(v\left(t,\psi\right)=1\right)\right)$$

$$\left(v\left(t,\varphi \Rightarrow \psi\right)=0\right) vtt \left(\left(v\left(t,\varphi\right)=1\right) \wedge \left(v\left(t,\psi\right)=0\right)\right)$$

(5) Modálna spojka ○

$$\left(v\left(t,\Box\, \varphi\right)=1\right) vtt \left(v\left(t+1,\varphi\right)=1\right)$$

$$\left(v\left(t,\Box\, \varphi\right)=0\right) vtt \left(v\left(t+1,\varphi\right)=0\right)$$

(6) Modálna spojka □

$$\left(v\left(t,\Box\varphi\right)=1\right) vtt \left(\forall\left(t' \geq t\right)\left(v\left(t',\varphi\right)=1\right)\right)$$

$$\left(v\left(t,\Box\varphi\right)=0\right) vtt \left(\exists\left(t' \geq t\right)\left(v\left(t',\varphi\right)=0\right)\right)$$

(7) Modálna spojka ◇

$$\left(v\left(t,\Diamond\varphi\right)=1\right) vtt \left(\exists\left(t' \geq t\right)\left(v\left(t',\varphi\right)=1\right)\right)$$

$$\left(v\left(t,\Diamond\varphi\right)=0\right) vtt \left(\forall\left(t' \geq t\right)\left(v\left(t',\varphi\right)=0\right)\right)$$

Definícia

Formula φ je pravdivá v modelu *M* a v čase *t* je určená takto

$$\left(\models_t^M \varphi\right) =_{def} \left(v\left(t,\varphi\right)=1\right)$$

Formula φ sa nazýva tautológia vtedy a len vtedy, ak je pravdivá v každom modelu *M* pre ľubovolný čas *t*,

$$\left(\models \varphi\right) =_{def} \left(\forall M\right)\left(\forall t \in T\right)\left(\models_t^M \varphi\right)$$

Medzi modálnymi spojkami $\Box$ *a* $\Diamond$ (vždy a niekedy) platí táto vzájomná väzba, ktorá priamo plynie z ich definície

$$\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$$

$$\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$$

Sémantické tablá v temporálnej logiky

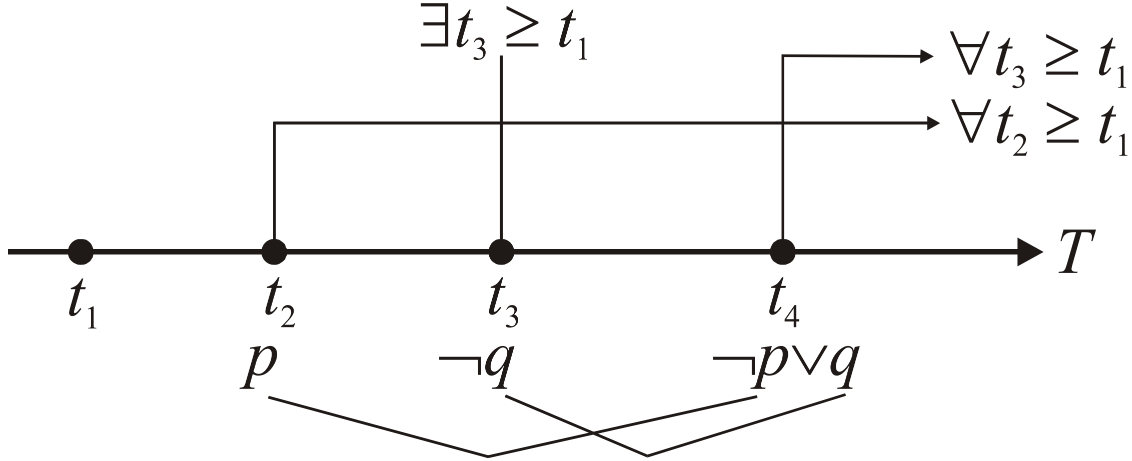
Príklad

Dokážte, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$ je v temporálnej logike tautológia.

1.	$v(t_1, \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)) = 0$	
2.	$v(t_1, \Box(p \Rightarrow q)) = 1$	
3.	$v(t_1, \Box p \Rightarrow \Box q) = 0$	(2 a 3 z 1)
4.	$v(t_1, \Box p) = 1$	(z 3)
5.	$v(t_1, \Box q) = 0$	(z 3)
6.	$v(t_2, p) = 1 \quad \forall t_2 \geq t_1$	(z 4)
7.	$v(t_3, q) = 0 \quad \exists t_3 \geq t_1$	(z 5)
8.	$v(t_4, p \Rightarrow q) = 1 \quad \forall t_4 \geq t_1$	(z 2)
9.	$v(t_4, p) = 0 \quad \vee \quad v(t_4, q) = 1 \quad \forall t_4 \geq t_1$	(z 8)

$$\left(v\left(t_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(t_3, q\right)=0\right) \wedge \left(\left(v\left(t_4, p\right)=0\right) \vee \left(v\left(t_4, q\right)=1\right)\right)$$

$$\left(\left(v\left(t_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(t_3, q\right)=0\right) \wedge \left(v\left(t_4, p\right)=0\right)\right) \vee$$
$$\left(\left(v\left(t_2, p\right)=1\right) \wedge \left(v\left(t_3, q\right)=0\right) \wedge \left(v\left(t_4, q\right)=1\right)\right)$$



Príklad

$$\varphi \Rightarrow \left(\Box\left(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi \right) \Rightarrow \Box\varphi \right)$$

Formula má zaujímavú interpretáciu: ak v čase t platí formula φ a súčasne vždy platí aj v nasledujúcom čase, potom musí platiť aj každom čase t´≥t. Pomocou jednoduchých úvah dokážeme, že táto formula je tautológia, budeme ju interpretovať ako pravidlo modus ponens

$$\begin{array}{ll} \text{1. premisa} & : \varphi \\ \text{2. premisa} & : \Box\left(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi \right) \\ \hline \text{záver} & : \Box\varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi_t \\ \forall\left(t' \geq t \right)\left(\varphi_{t'} \Rightarrow \varphi_{t'+1} \right) \\ \hline \forall\left(t'' \geq t \right)\left(\varphi \right)_t \end{array}$$

Druhá premisa sa môže rozpísať takto

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi_t \\ \varphi_t \Rightarrow \varphi_{t+1} \\ \varphi_{t+1} \Rightarrow \varphi_{t+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{t'} \Rightarrow \varphi_{t'+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}}{\left(\Box\varphi\right)_t}$$

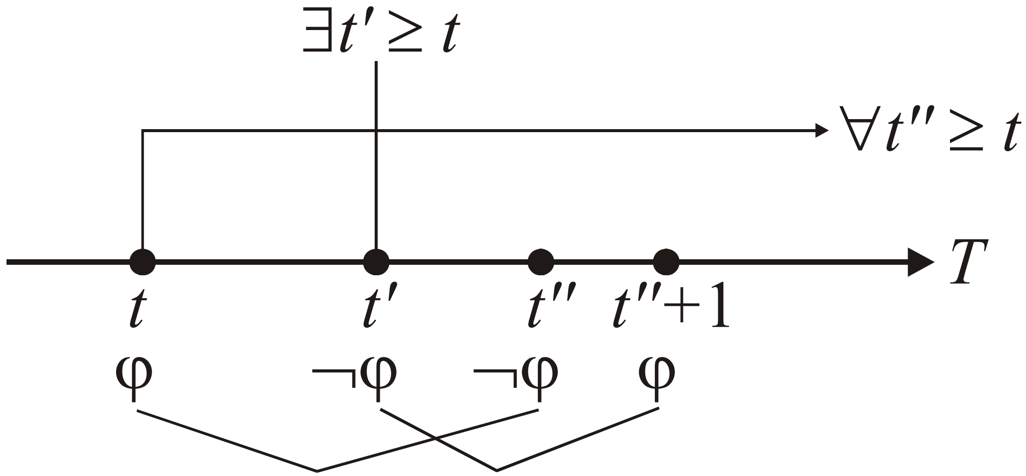
Aplikovaním postupnosti modus ponens dostaneme, že formula φ je platná nielen v čase t (1. premisa), ale aj v časoch $t+1$, $t+2$,... , t.j. platí formula $\left(\Box\varphi\right)_t$.

Dokážeme formulu pomocou sémantického tabla

1. $v\Big(t,\varphi \Rightarrow \big(\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi\big)\Big) = 0$
2. $\boxed{v(t,\varphi) = 1}$
3. $v\big(t,\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi\big) = 0$
4. $v\big(t,\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi)\big) = 1$
5. $v(t,\Box\varphi) = 0$
6. $\boxed{v(t',\varphi) = 0} \quad (\exists t' \geq t)$
7. $v(t'',\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) = 1 \quad (\forall t'' \geq t)$
8. $v(t'',\varphi) = 0 \quad \vee \quad v(t'',\Box\varphi) = 1 \quad (\forall t'' \geq t)$
9. $\boxed{v(t'',\varphi) = 0} \quad \vee \quad \boxed{v(t''+1,\varphi) = 1} \quad (\forall t'' \geq t)$

$$\Big(\big(v(t,\varphi)=1\big)\wedge\big(v(t',\varphi)=0\big)\wedge\big(v(t'',\varphi)=0\big)\Big)\vee$$

$$\Big(\big(v(t,\varphi)=1\big)\wedge\big(v(t',\varphi)=0\big)\wedge\big(v(t''+1,\varphi)=1\big)\Big)$$



V klasickej výrokovej logike platí, že formula ψ je tautologickým dôsledkom množiny formúl $S=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$, $S\vDash\psi$, vtedy a len vtedy, ak formula $\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_n\Rightarrow\psi$ je tautológia.

V temporálnej logike táto vlastnosť „tautologický dôsledok“ má trochu inú podobu.

Veta
Formula ψ je tautologickým dôsledkom množiny formúl $S=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$, $S\vDash\psi$, vtedy a len vtedy, ak formula

$$\Box\varphi_1\wedge\Box\varphi_2\wedge\ldots\wedge\Box\varphi_n\Rightarrow\psi$$

je tautológia.

Veta

Ak formula φ je tautológia vo výrokovej logike, potom formula ψ, ktorá vznikne substitúciou atomických formúl formulami temporálnej logiky, $\psi = \varphi\left(p_1/\chi_1, p_2/\chi_2, \ldots\right)$, je tautológiou v temporálnej logike.

Príklad

$$\neg\left(p \wedge q\right) \equiv \left(\neg p \vee \neg q\right)$$

substitúcia: $p/\Box\varphi$ a $q/\Diamond\psi$

$$\neg\left(\Box\varphi \wedge \Diamond\psi\right) \equiv \left(\neg\Box\varphi \vee \neg\Diamond\psi\right)$$

Najdôležitejšie „zákony“ (tautológie) temporálnej logiky

1. Zákony duality

$$\neg\Box\,\varphi \equiv \Box\,\neg\varphi$$
$$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$$
$$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$$

Spojka ○ je autoduálna, spojky □ a ◇ sú navzájom duálne.

Sémantické tablo pre formulu $\neg\bigcirc\varphi \equiv \bigcirc\neg\varphi$

1. $v\left(t, \neg\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\neg\varphi\right) = 0$
2. $v\left(t, \neg\bigcirc\varphi\right) = 1$
3. $v\left(t, \bigcirc\neg\varphi\right) = 0$ (2 a 3 z 1)
4. $v\left(t, \bigcirc\varphi\right) = 0$ (odstránenie negácie v 2)
5. $v\left(t+1, \neg\varphi\right) = 0$ (odstránenie spojky ○ v 3)
6. $\boxed{v\left(t+1, \varphi\right) = 1}$ (odstránenie negácie v 5)
7. $\boxed{v\left(t+1, \varphi\right) = 0}$ (odstránenie spojky ○ v 4)

2. Zákony reflexivity

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$
$$\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

Tieto zákony vyjadrujú intuitívnu skúsenosť, že „budúcnosť“ obsahuje aj „prítomnosť“.

3. Zákony o „sile“ temporálnych spojok.

$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$$
$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$
$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$
$$\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$

1. $v\left(t, \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi\right) = 0$
2. $v\left(t, \Diamond\Box\varphi\right) = 1$ (odstránenie implikácie v 1)
3. $v\left(t, \Box\Diamond\varphi\right) = 0$ (odstránenie implikácie v 1)
4. $v\left(t', \Box\varphi\right) = 1 \quad \left(\exists t' \geq t\right)$ (odstránenie spojky $\Diamond$ v 2)
5. $\boxed{v\left(t'', \varphi\right) = 1} \quad \left(\exists t' \geq t'', \forall t'' \geq t'\right)$ (odstránenie spojky $\Box$ v 4)
6. $v\left(t', \Diamond\varphi\right) = 0 \quad \left(\forall t' \geq t\right)$ (odstránenie spojky $\Box$ v 3)
7. $\boxed{v\left(t'', \varphi\right) = 0} \quad \left(\forall t' \geq t, \exists t'' \geq t'\right)$ (odstránenie spojky $\Diamond$ v 6)

4. Zákony idempotentnosti.

$$\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$$
$$\Diamond\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$

1. $v\left(t, \Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi\right) = 0$
2. $v\left(t, \Box\Box\varphi\right) = 1$
3. $v\left(t, \Box\varphi\right) = 0$
4. $v\left(t', \Box\varphi\right) = 1 \qquad \left(\forall t' \geq t\right)$
5. $\boxed{v\left(t'', \varphi\right) = 1} \qquad \left(\forall t'' \geq t'\right)$
6. $\boxed{v\left(t''', \varphi\right) = 0} \qquad \left(\forall t''' \geq t\right)$

5. Zákony komutatívnosti.

$$\square\square\,\varphi \Rightarrow \square\,\square\varphi$$
$$\Diamond\square\,\varphi \Rightarrow \square\,\Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\Diamond\square\,\varphi \Rightarrow \square\,\Diamond\varphi$

1. $v\left(t, \Diamond\square\,\varphi \Rightarrow \square\,\Diamond\varphi\right) = 0$
2. $v\left(t, \Diamond\square\,\varphi\right) = 1$
3. $v\left(t, \square\,\Diamond\varphi\right) = 0$
4. $v\left(t', \square\,\varphi\right) = 1 \qquad \left(\exists t' \geq t\right)$
5. $\boxed{v\left(t'+1, \varphi\right) = 1} \qquad \left(\exists t' \geq t\right)$
6. $v\left(t+1, \Diamond\varphi\right) = 0$
7. $\boxed{v\left(t'', \varphi\right) = 0} \qquad \left(\exists t'' \geq t+1\right)$

6. Zákony distributívnosti.

$$\Box\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \equiv \left(\Box\,\varphi \Rightarrow \Box\,\psi\right)$$

$$\Box\left(\varphi \wedge \psi\right) \equiv \left(\Box\,\varphi \wedge \Box\,\psi\right)$$

$$\Box\left(\varphi \vee \psi\right) \equiv \left(\Box\,\varphi \vee \Box\,\psi\right)$$

$$\Box\left(\varphi \wedge \psi\right) \equiv \left(\Box\varphi \wedge \Box\psi\right)$$

$$\Diamond\left(\varphi \vee \psi\right) \equiv \left(\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi\right)$$

$$\Box\left(\varphi \Rightarrow \psi\right) \Rightarrow \left(\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi\right)$$

$$\left(\Box\varphi \vee \Box\psi\right) \Rightarrow \Box\left(\varphi \vee \psi\right)$$

$$\left(\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi\right) \Rightarrow \Diamond\left(\varphi \Rightarrow \psi\right)$$

$$\Diamond\left(\varphi \wedge \psi\right) \Rightarrow \left(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi\right)$$

7. Zákony rekurzívnej ekvivalentnosti.

$$\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \Box\,\Box\varphi$$
$$\lozenge\varphi \equiv \varphi \wedge \Box\,\lozenge\varphi$$

Opakovaným dosadením ľavej strany do pravej strany dostaneme alternatívne určenie formuly $\Box\varphi$

$$\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \Box\,\varphi \wedge \Box\,\Box\,\varphi \wedge \ldots$$
$$\lozenge\varphi \equiv \varphi \vee \Box\,\varphi \vee \Box\,\Box\,\varphi \wedge \ldots$$

Dokážeme formulu $\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi$

1.	$v(t, \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi) = 1$		
2.	$v(t, \varphi) = 1$		
3.	$v(t, \bigcirc\Box\varphi) = 1$		(2 a 3 vznikli z 1)
4.	$v(t+1, \Box\varphi) = 1$		(odstránenie spojky ○ v 3)
5.	$v(t', \varphi) = 1$	$(\forall t' \geq t+1)$	(odstránenie spojky □ v 4)
6.	$v(t', \varphi) = 1$	$(\forall t' \geq t)$	(spojenie 2 a 5)
7.	$v(t, \Box\varphi) = 1$		(zavedenie spojky □ v 6)

8. Zákony monotónnosti.

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$
$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$
$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

Relácia tautologického vyplývania $\varphi \models \psi$ je ekvivalentná implikácii $\Box\varphi \Rightarrow \psi$.
Z vyššie uvedených zákonov vyplývajú zákony monotónnosti

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \models (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$
$$(\varphi \Rightarrow \psi) \models (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$
$$(\varphi \Rightarrow \psi) \models (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

9. Zákon o indukcii.

$$\Box(\varphi \Rightarrow \Box\, \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \Box \varphi)$$

Táto formula je priamo odvoditeľná z formuly $\varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)$ študovanej v príklade 12.10.

1. $\varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)$
2. $\neg\varphi \vee (\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee \Box\varphi)$
3. $\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \Box\varphi)$
4. $\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee (\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$
5. $\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$