Ďalšie príklady

1.7.5 Náhodný pokus spočíva v hode dvoma falošnými kockami. Na modrej kocke jednotlivé steny majú tieto pravdepodobnosti: 1/12, 1/12, 2/12, 2/12, 3/12, 3/12 (od 1 po 6) a pre červenú kocku: 3/12, 3/12, 3/12, 1/12, 1/12, 1/12 (opäť po rade od 1 po 6). Aká je pravdepodobnosť toho, že

a) na modrej padne viac bodov ako na červenej?

b) padne rovnaký počet bodov na oboch?

c) súčet padnutých bodov bude aspoň osem?

a)

MODRÁ	ČERVENÁ
2	1 − 1
3	1 − 2
4	1 − 3
5	1 − 4
6	1 − 5

M_i – náh. udalosť, na modrej padne i

C_j – náh. udalosť, na červenej padne j

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i>j} (M_i \cap C_j)\right)$$

- M_i, C_j – nezávislé
- zjednotenie disjunktných množín

$\Longrightarrow$

$$P(A) = \sum_{i>j} P(M_i) \cdot P(C_j) =$$

$$= \frac{1\cdot 3 + 2(3+3) + 2(3+3+3) + 3(3+3+3+1) + 3(3+3+3+1+1)}{12^2} =$$

$$= \frac{3 + 12 + 18 + 30 + 33}{144} = \frac{96}{144}$$

b) $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} (M_i \cap C_i)\right) = \sum_{i=1}^{6} P(M_i) P(C_i) =$

$$= \frac{1\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1}{12^2} = \frac{20}{144}$$

c)

MODRÁ	ČERVENÁ
2	6-6
3	5-6
4	4-6
5	3-6
6	2-6

$$P(D) = P\left(\bigcup_{i+j \geq 8} (M_i \cap C_j)\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 6 + 3\cdot 9}{12^2} = \frac{56}{144}$$

1.7.6 V rámci predchádzajúceho príkladu označme: A - na modrej párny počet bodov, B - na červenej menej ako 3. Nájdite pravdepodobnosti udalostí A, B a $A \cap B$. Sú udalosti A, B nezávislé?

$$P(A) = \frac{1+2+3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3+3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1(3+3) + 2\cdot(3+3) + 3(3+3)}{12^2} = \frac{36}{144}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A, B \text{ sú nezávislé}$$

1.7.7 Náhodný pokus spočíva v šesťnásobnom hádzaní obyčajnou hracou kockou. S akou pravdepodobnosťou

a) nepadne šestka

b) šestka padne práve dvakrát

c) šesť padne aspoň štyrikrát

a) zo 6 pokusov 0-krát padne 6-tka a 6-krát číslo rôzne od šestky

$$\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}3349$$

b) $$\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}2009$$

c) $$\sum_{i=4}^{6}\binom{6}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i} = 0{,}0087$$

1.7.8 Uvažujme pokus z predchádzajúceho príkladu, ale teraz nech je kocka falošná a jej steny sa objavujú s pravdepodobnosťami p_i, $i = 1, 2, \dots, 6$. Označme C náhodnú udalosť: padnutie párneho čísla. S akou pravdepodobnosťou:

a) udalosť C nenastane ani raz v tých šiestich hodoch
b) udalosť C nastane práve dvakrát
c) udalosť C nastane aspoň štyrikrát

a) $P(C) = p_2 + p_4 + p_6 \qquad P(C') = p_1 + p_3 + p_5$

$$\binom{6}{0}(p_2+p_4+p_6)^0(p_1+p_3+p_5)^6 = (p_1+p_3+p_5)^6$$

b) $$\binom{6}{2}(p_2+p_4+p_6)^2(p_1+p_3+p_5)^4$$

c) $$\sum_{i=4}^{6}\binom{6}{i}(p_2+p_4+p_6)^i(p_1+p_3+p_5)^{6-i}$$

1.7.9 Predpokladajme, že pri výrobe tvarohových koláčikov sa dodržuje technológia, ktorá predpisuje 10 000 hrozienok na 1 000 koláčikov. Aká je pravdepodobnosť, že v zakúpenom koláčiku

a) nebude ani jedno hrozienko?
b) budú práve dve hrozienka?
c) bude menej ako 15 ale aspoň 7 hrozienok?

a) $$\binom{10\,000}{0}\left(\frac{1}{1000}\right)^0\left(\frac{999}{1000}\right)^{10000} = 4{,}52\cdot 10^{-5}$$

b) $$\binom{10\,000}{2}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\left(\frac{999}{1000}\right)^{10000-2} = 2{,}26\cdot 10^{-3}$$

c) $$\sum_{i=7}^{14}\binom{10000}{i}\left(\frac{1}{1000}\right)^i\left(\frac{999}{10000}\right)^{10000-i} \doteq 0{,}7864$$

1.7.10 Predpokladajme, že dlhodobou štatistikou (evidenciou) sa zistilo, že náhodné okolnosti s pravdepodobnosťou 0,12 znemožňujú prísť študentovi na prednášku. Ak celkový počet študentov je 100, s akou pravdepodobnosťou

a) je počet prítomných na náhodne vybranej prednáške aspoň 88?
b) je počet prítomných v intervale < 70; 80) ?

(Čo musíme predpokladať, aby modelovanie Bernoulliho schémou bolo adekvátne realite?)

a) $$\sum_{i=88}^{100} \binom{100}{i} (0{,}88)^i (0{,}12)^{100-i} = \cancel{0{,}5761}$$

b) $$\sum_{i=70}^{79} \binom{100}{i} 0{,}88^i \, 0{,}12^{100-i} =$$

Musíme predpokladať nezávislosť príchodu / nepríchodu študentov na prednášku.

1.7.11 Skúsenosť hovorí, že študent zapísaný na skúšku, sa s pravdepodobnosťou 0,08 deň pred skúškou zo skúšky odhlási. Predpokladajme, že na skúške bolo v nejaký deň pôvodne prihlásených 25 študentov. S akou pravdepodobnosťou bude skúšajúci v ten deň skúšať

a) 23 študentov?
b) menej ako 23 študentov?

a) $$\binom{25}{23} 0{,}92^{23} \cdot 0{,}08^{2} = 0{,}2821$$

b) $$\sum_{i=0}^{22} \binom{25}{i} 0{,}92^{i} \cdot 0{,}08^{25-i} = 1 - \sum_{i=23}^{25} \binom{25}{i} 0{,}92^{i} \cdot 0{,}08^{25-i} =$$

$$= 0{,}3232$$

1.7.12 Skriptá majú 200 strán a na nich náhodne rozmiestnených 40 tlačových chýb (tým rozumieme to, že konkrétna chyba sa môže dostať na ktorúkoľvek stranu s rovnakou pravdepodobnosťou). S akou pravdepodobnosťou na náhodne zvolenej strane

a) nie je tlačová chyba

b) sú práve tri tlačové chyby

c) sú najviac tri tlačové chyby

a) $$\binom{40}{0}\left(\frac{1}{200}\right)^0\left(\frac{199}{200}\right)^{40} = 0{,}8183$$

b) $$\binom{40}{3}\left(\frac{1}{200}\right)^3\left(\frac{199}{200}\right)^{37} = 0{,}001026$$

c) $$\sum_{i=0}^{3}\binom{40}{i}\left(\frac{1}{200}\right)^i\left(\frac{199}{200}\right)^{40-i} = 0{,}63849$$

1.7.13 Predpokladajme, že výrobky sa skúšajú pri preťažení. Každý z nich vydrží skúšku s pravdepodobnosťou 0,9. S akou pravdepodobnosťou zo série 100 výrobkov

a) skúšku nevydržalo práve päť výrobkov?

b) počet tých, čo nevydržali skúšku, bol menší ako 10?

a) $$\binom{100}{5}0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{95} = 0{,}03387$$

b) $$\sum_{i=0}^{9}\binom{100}{i}0{,}1^i \cdot 0{,}9^{100-i} = 0{,}4513$$

1.7.14 Zo štatistík je známe, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,515. S akou pravdepodobnosťou je z prvých 50 narodených detí nového roku aspoň 25 chlapcov?

$$\sum_{i=25}^{50}\binom{50}{i}\cdot 0{,}515^i \cdot 0{,}485^{50-i}$$