Písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 23. 5. 2005

Skupina B

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$min\{a, min\{b,c\}\} = min\{min\{a,b\}, c\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A \cap B = B \cap A$, (e) $A - B = B - A$, (c) $A - B = A$.

3. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) x je väčší ako y,
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
(c) x navštevuje rovnakú školu ako y,

4. príklad.
Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré
(a) obsahujú podreťazec BCD, (b) obsahujú podreťazec CFGA, (c) dva podreťazce BA a GF,

5. príklad
V koši máme 100 jabĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jabĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jabĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

6. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$,

7. príklad.
Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ p & -1 & 3 & -3 \\ q & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. príklad.
Dokážte priamo z definície, že matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

s nenulovými diagonálnymi elementmi, má hodnosť $h(A) = 3$

10. príklad. Odôvodnite, prečo môže či prečo nemôže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?

11. príklad. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n?

Poznámka: Každý príklad je hodnotený 5 bodmi, maximálny počet bodov je 55. Nezabudnite na písomku napísať meno a priezvisko, číslo krúžku a ročník. Čas na písomku je 90 min.

Riešenie

1. príklad. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
$min\{a,min\{b,c\}\}=min\{min\{a,b\},c\}$, kde a,b,c sú reálne čísla.

(1) $a\le b\le c$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{a}$

(2) $a\le c\le b$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{a}$

(3) $b\le a\le c$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{b}$

(4) $b\le c\le a$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{b}$

(5) $c\le a\le b$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a},c\right\}}_{c}$

(6) $c\le b\le a$, $\underbrace{min\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{c}=\underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{c}$

2. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A\cap B=B\cap A$, (e) $A-B=B-A$, (c) $A-B=A$.

(a) $A\cap B=B\cap A$, platí pre každé množiny A a B
(b) $A-B=B-A$, platí ak $A=B$.
(c) $A-B=A$, platí ak $A\cap B=\emptyset$

3. príklad.
Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak
(a) x je väčší ako y,
(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
(c) x navštevuje rovnakú školu ako y.

(a) x je väčší ako y,
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(x > y \right) \wedge \left(y > z \right) \Rightarrow \left(x > z \right) \right)$
antisymetrická: $\forall \left(x, y \in X \right) \left(\left(x, y \right) \in R \Rightarrow \left(y, x \right) \notin R \right)$

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x \left(\left(x, x \right) \in R \right)$
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x, y \right) \in R \Rightarrow \left(y, x \right) \in R \right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(x, y \right) \in R \wedge \left(y, z \right) \in R \Rightarrow \left(x, z \right) \in R \right)$

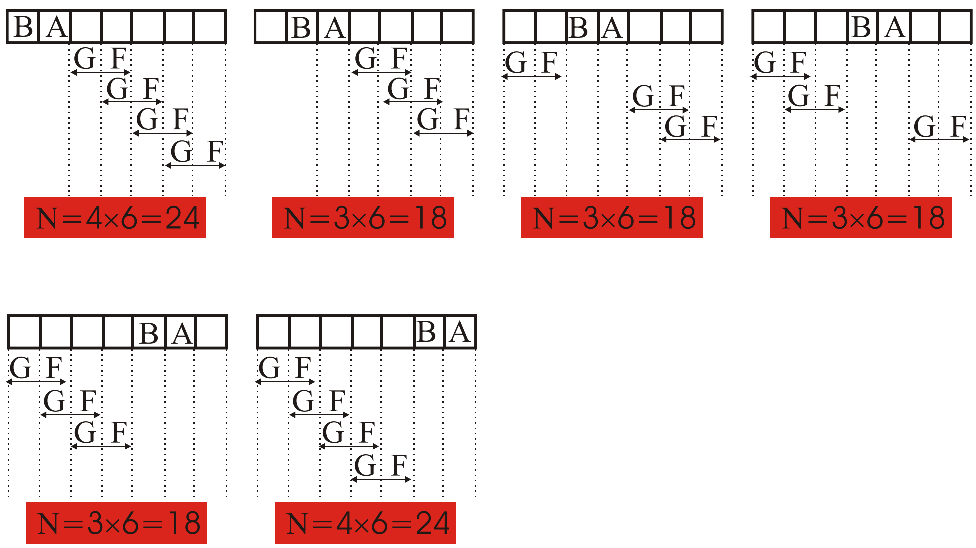
(c) x navštevuje rovnakú školu ako y.
reflexívna: $\forall x \left(\left(x, x \right) \in R \right)$
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x, y \right) \in R \Rightarrow \left(y, x \right) \in R \right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(x, y \right) \in R \wedge \left(y, z \right) \in R \Rightarrow \left(x, z \right) \in R \right)$

4. príklad.
Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré
(a) obsahujú podreťazec BCD, (b) obsahujú podreťazec CFGA, (c) dva podreťazce BA a GF.

(a) obsahujú podreťazec BCD, $5! = 120$

(b) obsahujú podreťazec CFGA, $4! = 24$

(c) dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je $2 \times 24 + 4 \times 18 = 120$.

5. príklad

V koši máme 100 jablĺčok, z ktorých 20 je červivých a 15 je nahnitých. Nech v koši je 10 jablĺčok, ktoré sú červivé a nahnité, koľko jablĺčok v koši nie je ani červivých a ani nahnitých?

$A_1=\{\text{červivé jabľčka}\}$, $A_2=\{\text{nahnité jabľčka}\}$ $|A_1|=20$, $|A_2|=15$, $|A_1\cap A_2|=10$,

$$\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\right|=\left|\overline{A_1\cup A_2}\right|=|U|-|A_1\cup A_2|=|U|-\left(|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|\right)$$

$$=|U|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=100-20-15+10=$$ [redacted]

6. príklad.

Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám $wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+w\bar{x}yz+\bar{w}xy\bar{z}+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}+\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

$U_f^{(0)}$ (1110) (1101) (1011) (0101) (0010) (0001)

$U_f^{(1)}$ (#101) (0#01)

$$\tilde{V}=\{(\#101),(0\#01),(1110),(1011),(0010)\}$$

$$f(w,x,y,z)=x\bar{y}z+\bar{w}\bar{y}z+wxy\bar{z}+w\bar{x}yz+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$

7. príklad.

Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}$$

hodnosť 2.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&-1&3-2p&-3+p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&1&-3+2p&3-p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}$$

Pretože požadujme, aby 2., 3. a 4. riadok boli ekvivaletné, potom z podmienok

$$(-3+2p=-5)\wedge(3-p=4)\Rightarrow \boxed{p=-1}$$
$$(1-2q=-5)\wedge(1+q=4)\Rightarrow \boxed{q=3}$$
Potom ekvivaltná matica na prvej strane má tvar
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&-1&2\\p&-1&3&-3\\q&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\0&1&-3+2p&3-p\\0&1&1-2q&1+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-5&4\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-5}&\cancel{4}\end{pmatrix}$$
To znamená, že pre *p*=-1 a *q*=3 má matica hodnosť 2.

8. príklad.
Nájdite riešenie systému lineárnych rovníc pomocou Crameroveho pravidla
$$\begin{aligned}1x_1+2x_2+x_3&=-1\\-3x_1+2x_2+x_3&=1\\2x_1+x_2-x_3&=0\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-12,\quad |\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\1&2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=6,$$
$$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-3&1&1\\2&0&-1\end{vmatrix}=-2,\quad |\boldsymbol{A}_3|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-3&2&1\\2&1&0\end{vmatrix}=10$$
Potom riešenie
$$x_1=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6},\quad x_3=\frac{10}{-12}=-\frac{5}{6}$$

9. príklad.
Dokážte priamo z definície, že matica
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$
s nenulovými diagonálnymi elementmi, má hodnosť $h(A)=3$

Budeme dokazovať stĺpcovú hodnosť, zavedieme stĺpce matice
$$s_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\ s_2=\begin{pmatrix}0\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\ s_3=\begin{pmatrix}0\\0\\a_{33}\end{pmatrix}$$
Tieto vektory sú lineárne nezávislé, ak ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru len pre nulové koeficienty
$$\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\alpha_3 s_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Táto vektorová rovnica špecifikuje systém 3 rovníc pre koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} & = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} & = 0 \\ \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} & = 0 \end{aligned}$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory s_1, s_2, s_3 sú lineárne nezávislé, čiže stĺpcová hodnosť matice je 3. Pretože platí veta, že stĺpcová hodnosť sa rovná riadkovej hodnosti, potom hodnosť matice A je 3.

10. príklad. Odôvodnite, prečo môže či nemôže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?
Riešenie:
Nemôže existovať, taký graf by mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, čo odporuje teorému 10.1.

11. príklad. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_{n}?

Riešenie: V príklade v textu sme videli, že chromatické číslo C_n je 2 pre párne n a 3 pre nepárne n. Pretože koleso W_{n} je iba n-uholník C_n s centrálnym vrcholom naviac, prepojeným so všetkými vrcholmi C_n na obvode, W_n potrebuje iba o jednu farbu viac ako C_n , práve pre centrálny vrchol. Preto je chromatické číslo W_n je 3 pre párne n a 4 pre nepárne n.