Náhradná 1. kontrolná písomka z ADM
(konaná dňa 14. 12. 2009)

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne $a,b,c,$ metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\{a, max\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\}, c\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí
(a) $A - B = B - A$ (1 bod)
(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod)
(c) $A - B = A$ (1 bod)

4. príklad. Znázornite reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna
(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)
(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(x+y)^7$. (3 body)

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

Riešenie príkladov

1. príklad. Dokážte pomocou matematickej indukcie

$$n^2 \geq n \quad \text{(3 body)}$$

(1) Indukčný predpoklad $P(n) = n^2 \geq n$

(2) Platnosť pre n=1 $P(1) = 1^2 \geq 1$ (tento predpoklad je platný)

(3) Dôkaz platnosti pre n+1

$$P(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + (2n+1) = n + \underbrace{(n^2 + n + 1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 = n + n^2 - n = n + \underbrace{n(n-1)}_{>0}$$

$$\Rightarrow n^2 \geq n$$

2. príklad. Dokážte, pre navzájom rôzne $a,b,c,$ metódou vymenovaním prípadov, či formula

$$min\{a, max\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\},c\}$$

je identita alebo nie. (3 body)

(1) $a<b<c$

$$\underbrace{min\left\{a, \underbrace{max\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},c\right\}}_{b} \Rightarrow a \neq b$$

Záver: študovaná formula nie je identita, existujú hodnoty a, b, c pre ktoré neplatí.

3. príklad. Čo môžeme povedať o množinách A a B, ak platí

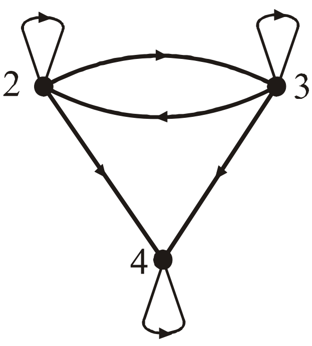
(a) $A - B = B - A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$ alebo $A = B$

(b) $A \cap B = B \cap A$ (1 bod).......platí pre každé množiny A, B, t. j. je to identita.

(c) $A - B = A$ (1 bod) .... $B \cap A = \emptyset$

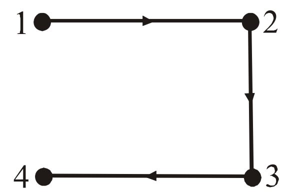
4. príklad. Znázornite každú reláciu pomocou orientovaného grafu a rozhodnite, či daná relácia je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ (2 body)



Relácia je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a je tranzitívna.

(b) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ (1 bod)



Relácia nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická a nie je tranzitívna.

5. príklad. Nájdite koeficient x^2y^5 v rozvoji $(x + y)^7$. (3 body)

$$(x+y)^7 = \sum_{j=0}^{7} \binom{7}{j} x^{7-j} y^j = \ldots + \binom{7}{5} x^2 y^5 + \ldots$$

Koeficient pri x^2y^5 je binomiálny koeficient $(7/5) = 7!/(2!\,5!) = 21$

Prémiový príklad. Pomocou de Morganovho vzťahu pre komplement zjednotenia dvoch množín dokážte formulu

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \quad \text{(2 body)}$$

kde A_i sú množiny.

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{(A_1 \cup (A_2 \cup A_3))} = \overline{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cup A_3)} = \overline{A}_1 \cap (\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$$

$$= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$