Algebra a diskrétna matematika

Príklady na precvičenie

3. týždeň

1. Vypočítajte dané determinanty.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 4+\sqrt{5} & 2-\sqrt{7} \\ 2+\sqrt{7} & 4-\sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad |E| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad |F| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad |G| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Bez vypočítania ukážte, že sa uvedené dvojice determinantov navzájom rovnajú.

a) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 5 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 6 & 15 & -4 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

3. Bez výpočtu zdôvodnite, že $\det(H) = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 7 & -2 \\ 12 & 6 & 0 & -3 \\ 11 & 0 & 8 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Predpokladajme, že $\det(K) = -4$, pričom

$$K = \begin{pmatrix} k & \ell & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{pmatrix}$$

Vypočítajte:

a) $\det(3K)$

b) $\det(2K^{-1})$

c) $\det((2K)^{-1})$

d) $\begin{vmatrix} k & q & n \\ \ell & r & o \\ m & s & p \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4k & 4\ell & 4m \\ 3n-5q & 3o-5r & 3p-5s \\ -q & -r & -s \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte dané determinanty.

$$|L| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad |N| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad |Q| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |R| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad |T| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Pomocou adjungovanej matice nájdite k daným maticiam inverzé matice.

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Pomocou Cramerovho pravidla riešte dané systémy lineárnych rovníc.

a) $$\begin{aligned} 3x + 2y + 6z &= 8 \\ -x \phantom{{}+2y} + z &= 0 \\ 6x + y - 2z &= 12 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x - 3y + 5z &= 4 \\ -2x + y + 2z &= 4 \\ 8x - 5y - 3z &= -8 \end{aligned}$$