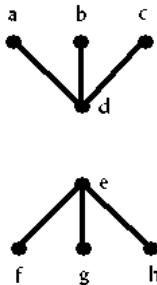


Nezávislé množiny

Definícia

$S \subseteq V$ je nezávislá množina v grafe $G = (V, E)$, ak $\forall u, v \in S$ platí $\text{not}((u, v) \in E)$.



Obrázok: Graf.

Maximálne nezávislé množiny v zmysle inklúzie:

$\{d,e\}$

$\{a,b,c,e\}$

$\{a,b,c,f,g,h\}$

Definícia

$\text{maxset}(G) = \max\{\#S; S \text{ je nezávislá množina v grafe } G\}.$

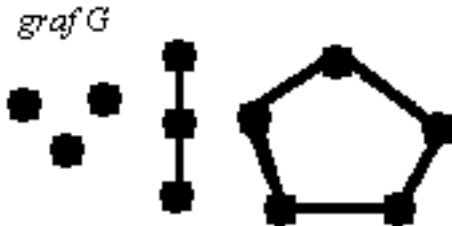
Výpočet maxset - myšlienka

- Ak graf G nemá žiadne hrany, tak $\text{maxset}(G) = |V(G)|$.
- Vyberiem ľubovoľný vrchol v^* .
- Ak v^* nepatrí do max. nezáv. množ. grafu G , tak $\text{maxset}(G) = \text{maxset}(G - \{v^*\})$.
- Ak v^* patrí do max. nezáv. množ. grafu G , tak do nej nemôžu patriť jeho susedia, a teda $\text{maxset}(G) = 1 + \text{maxset}(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))$.

Veta

$$\begin{aligned} \text{maxset}(G) = \\ \max(\text{maxset}(G - \{v^*\}), 1 + \text{maxset}(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))), \\ v^* \in V. \end{aligned}$$

Príklad - najväčšia nezávislá množina



Obrázok: Graf.

```
int Maxset1(graf G)
{
    // vráti počet prvkov maximálnej nezávislej množiny
    if ( $|E(G)| == 0$ )
        return  $|V(G)|$ ;
    else
    {
        Vyber  $v^*$  tak, že  $\rho(v^*) \geq 1$ ;
         $n_1 = \text{Maxset1}(G - \{v^*\})$ ;
         $n_2 = \text{Maxset1}(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))$ ;
        return  $\max(n_1, 1 + n_2)$ ;
    }
}
```


$$|V(G)| = n$$

$F(G)$ - výpočtová zložitost pre graf G

$$F(G) \leq kn^2 + F(G - \{v^*\}) + F(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))$$

nech $f(n) = \max_{|V|=n} F(G)$

$$f(n) \leq kn^2 + f(n-1) + f(n-2)$$

$$g(x) = x^2 - x - 1, c = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,62, kn^2 = o(1,62^n)$$

$$f(n) = \mathcal{O}(1,62^n)$$

Zložitejší triviálny prípad

- Graf G obsahuje vrcholy stupňa najviac 1.
- Potom $\text{maxset}(G) = |V(G)| - |E(G)|$.
- Zdôvodnenie.

```
int Maxset2(graf G)
{
    // vráti počet prvkov maximálnej nezávislej množiny
    if ( $\rho(v) < 2 \quad \forall v \in V(G)$ )
        return  $|V(G)| - |E(G)|$ ;
    else
    {
        Vyber  $v^*$  tak, že  $\rho(v^*) \geq 2$ ;
         $n_1 = \text{Maxset2}(G - \{v^*\})$ ;
         $n_2 = \text{Maxset2}(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))$ ;
        return  $\max(n_1, 1 + n_2)$ ;
    }
}
```

$$|V(G)| = n$$

$F(G)$ - výpočtová zložitost pre graf G

$$F(G) \leq kn^2 + F(G - \{v^*\}) + F(G - \{v^*\} - \text{Nbhd}(v^*))$$

nech $f(n) = \max_{|V|=n} F(G)$

$$f(n) \leq kn^2 + f(n-1) + f(n-3)$$

$$g(x) = x^3 - x^2 - 1, c \approx 1,46557, kn^2 = o(1,46557^n)$$

$$f(n) = \mathcal{O}(1,46557^n)$$

Zložitejší triviálny prípad

- Graf G obsahuje vrcholy stupňa najviac 2 - dá sa urobiť.
- "Triviálny prípad", t.j. najšť maxset v grafe s vrcholmi stupňa ≤ 3 je rovnako zložitý ako všeobecný prípad.