Rady, odhad súčtu radu, rekurencie

Niektoré známe rady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\ln(\frac{1}{1-x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (|x| < 1)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Niektoré známe rady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Nájdite súčet radu:

$$\ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots .$$

Vieme, že

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a teda

$$\ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Súčet radu

Theorem

Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninový rad. Potom* $\exists r \geq 0$ *také, že rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konverguje v intervale* $(x_0 - r; x_0 + r)$ *a diverguje v* $(-\infty; x_0 - r) \bigcup (x_0 + r; \infty)$*. Číslo* r *voláme polomer konvergencie.*

Súčet radu

Theorem

Nech mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *má polomer konvergencie* r. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ *v* $(-r; r)$. *Potom v* $(-r; r)$*:*

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = f'(x)$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int f(x) dx$.

Rady - príklad

Nájdite súčet radu:

$$\sum_{m\geq 1}\frac{2m+7}{5^m}=\sum_{m\geq 0}\frac{2m+7}{5^m}-7=2\sum_{m\geq 0}m(\frac{1}{5})^m+7\sum_{m\geq 0}(\frac{1}{5})^m-7=$$

$$\sum x^m=\frac{1}{1-x}\quad /x\frac{d}{dx}$$

$$\sum mx^m=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$=2\frac{1/5}{(1-1/5)^2}+7\frac{1}{1-1/5}-7=\frac{19}{8}.$$

Odhad súčtu radu

Theorem

Nech $g(x)$ je neklesajúca pre nezáporné hodnoty x. Potom

$$\int_0^n g(t)dt \leq \sum_{j=1}^{n} g(j) \leq \int_1^{n+1} g(t)dt.$$

Odhad súčtu radu

Example

Ako rýchlo rastie $f(n) = \sum_{j=0}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$?

n členov, najväčší n^2, zrejme teda $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$.

Lepší odhad?

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \leq \int_1^n x^2 dx = \frac{n^3 - 1}{3}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \geq \int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}.$$

$\forall n \geq 1 : \quad \frac{n^3}{3} \leq f(n) \leq \frac{(n+1)^3-1}{3}.$

Z toho: $f(n) \sim \frac{n^3}{3}$.

Rekurencie

Nájdite taký vzťah pre výpočet x_n, aby nebolo potrebné poznať iné členy rekurencie.

$$x_{n+1} = x_n + 3, \quad n \geq 0, x_0 = 1.$$

Niekoľko členov rekurencie:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 = x_0 + 3 = 1 + 3 &= 4 \\
x_2 = x_1 + 3 = x_0 + 3 + 3 = 1 + 3 + 3 &= 7 \\
x_3 = x_2 + 3 = x_1 + 3 + 3 = x_0 + 3 + 3 + 3 = 1 + 3 + 3 + 3 &= 10 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$x_n = 3n + 1, \quad n \geq 0.$$

Lineárna rekurencia

Definition

Rovnicu

$$x_i c_0 + x_{i-1} c_1 + x_{i-2} c_2 + \cdots + x_{i-n} c_n = a, \qquad (1)$$

$i = n, n+1, n+2, \ldots,$ kde x_i aj koeficienty $c_0, \ldots, c_n$ sú prvky poľa T, voláme lineárna rekurentná rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami. Ak $a = 0$, rovnicu voláme homogénna, inak nehomogénna.

Riešenie lineárnej rekurencie

Definition

Postupnosť $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sa volá riešenie rovnice (1), keď pre každé $i = n, n+1, n+2, \ldots$ platí rovnica (1). Prvkom $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ hovoríme počiatočné podmienky.

Poznámka: keď sú dané počiatočné podmienky $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pre rovnicu (1), je jej riešenie jednoznačne určené.

Riešenie lineárnej rekurencie

Fact

Priestor riešení homogénnej lineárnej rekurentnej rovnice (1) na poľom T, tvorí lineárny vektorový priestor dimenzie n.

Charakteristický polynóm lin. rek. rov.

Definition

Pre rovnicu (1) je polynóm
$f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ tzv. charakteristický polynóm lin. rek. rov. (1).

Example

$$x_i - x_{i-1} - x_{i-2} = 0.$$

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Riešenie lineárnej rekurencie

Theorem

Keď $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sú všetky korene char. polynómu* $f(x)$ *homogénnej rovnice (1), ktoré nie sú násobné, potom postupnosti* $s_i^{(k)} = \alpha_k^i$ *sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Každé riešenie homogénnej rovnice (1) má teda tvar*

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k^i, \quad b_1, b_2, \dots, b_n \in T$$

Riešenie lineárnej rekurencie

Example

Fibonacciho postupnosť:

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i, \quad i \geq 0, F_0 = F_1 = 1.$$

Charakteristický polynóm: $f(x) = x^2 - x - 1$.
Korene: $x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Všeobecné riešenie: $s_i = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^i$.
Konkrétne riešenie:
$F_0 = c_1 + c_2 = 1, \quad F_1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
Riešením sústavy dostaneme: $c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{5}}, c_1 = \frac{-x_2}{\sqrt{5}}$.
Konkrétne riešenie: $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{i+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{i+1}]$, $i \geq 0$.

Riešenie lineárnej rekurencie

Theorem

Keď α je koreň char. polynómu homogénnej rovnice (1), ktorý je l-násobný. Potom $\alpha^i, i\alpha^i, i^2\alpha^i, \ldots, i^{l-1}\alpha^i$ sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1).

Riešenie lineárnej rekurencie

Example

Rekurencia: $x_{i+2} = 2x_{i+1} - x_i$
Charakteristický polynóm: $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
Dvojnásobný koreň: $\alpha = 1$.
Všeobecné riešenie: $x_i = c_1 1^i + c_2 i 1^i$.

Nehomogénna rekurencia 1. rádu

$x_{n+1} = b_{n+1}x_n + c_{n+1}, \quad n \geq 0.$
x_0 - daná počiatočná podmienka.

Riešenie:
pomocou substitúcie $b_1 b_2 b_3 \dots b_n y_n = x_n, \quad n \geq 0.$

Nehomogénna rekurencia 1. rádu

Example

Rekurencia: $x_{n+1} = 3x_n + n, \quad n \geq 0, x_0 = 0.$

$x_n = 3^n y_n, \quad n \geq 1$

$y_0 = 0$

$3^{n+1} y_{n+1} = 3.3^n x_n + n$

$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{3^{n+1}}$

$$y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{3^{i+1}}$$

$$x_n = 3^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{3^{i+1}}$$

$x_n = \frac{1}{4}(3^n - 2n - 1)$

Rekurentná nerovnosť

Theorem

Nech postupnosť $\{x_n\}$ spĺňa rekurentnú nerovnosť v tvare

$$x_{n+1} \le b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \cdots + b_p x_{n-p} + G(n), \quad n \ge p,$$

kde $\forall i : b_i \ge 0$, $\sum b_i > 1$. Nech c je kladný reálny koreň polynómu $f(x) = x^{p+1} - b_0 x^p - \cdots - b_p x^0$ a nech platí $G(n) = o(c^n)$. Potom $\forall \varepsilon > 0$ platí $x_n = \mathcal{O}((c+\varepsilon)^n)$.

Rekurentná nerovnosť

Example

$h(n+2) \leq h(n+1) + h(n)$
$G(n) = 0$
$f(x) = x^2 - x - 1$
kladný koreň: $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$
ďalej platí $0 = o(c^n)$
a teda $\forall \varepsilon > 0$ platí $h(n) = \mathcal{O}((\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \varepsilon)^n)$.