Cvičenia

Cvičenie 3.1. Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R \subseteq A \times A$, $A = \{0,1,2,3,4\}$, kde $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x = y$,
$R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\}$

(b) $x + y = 4$,
$R = \{(0,4),(4,0),(1,3),(3,1),(2,2)\}$

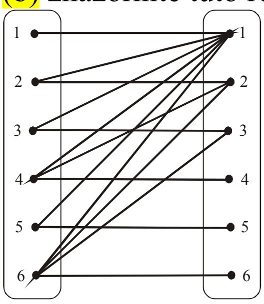
(c) $x > y$,
$R = \{(1,0),(2,1),(2,0),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

(d) x je deliteľné y.
$R = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$

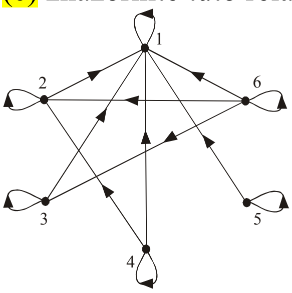
Cvičenie 3.2.

(a) Zostrojte množinu usporiadaných dvojíc pre reláciu $R = \{(x, y);\ x \text{ je deliteľné } y\}$ pre
$X = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}$

(b) znázornite túto reláciu diagramaticky tak, ako je to vykonané na obr. 3.1.



(c) znázornite túto reláciu grafom tak, ako je to vykonané na obr. 3.2,



(d) reprezentujte reláciu pomocou binárnej matice $\boldsymbol{A}$ z definície 3.7.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičenie 3.2. Pre každú z týchto relácií nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$,
nie je reflexívna, $(3,3)\notin R$
nie je symetrická, $(2,4)\in R\Rightarrow(4,2)\notin R$

(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
je reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
je tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$

(c) $\{(2,4),(4,2)\}$
je symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$

(d) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
$\varnothing$

(e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
je reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$

(f) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
$\varnothing$

Cvičenie 3.3. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých ľudí je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x,y)\in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) x je menší ako y,
tranzitívna: $\forall x\forall y\forall z((x<y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z))$

(b) x a y sa narodili v rovnakom dni,
reflexívna: $\forall x((x,x)\in R)$
symetrická: $\forall x\forall y((x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z) \right)$

(c) x má rovnaké krstné meno ako y,
reflexívna: $\forall x \left((x, x) \in R \right)$

symetrická: $\forall x \forall y \left((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \right)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z) \right)$

(d) x a y majú rovnakých starých rodičov.
reflexívna: $\forall x \left((x, x) \in R \right)$

symetrická: $\forall x \forall y \left((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \right)$

Cvičenie 3.4. Zistite, či relácia R nad množinou všetkých web stránok je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) každý, kto navštívil túto stránku x, navštívil aj stránku y,
reflexívna: $\forall x \left((x, x) \in R \right)$

(b) neexistuje spoločné prepojenie medzi stránkami x a y,
symetrická: $\forall x \forall y \left((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \right)$

(c) existuje aspoň jedno prepojenie medzi stránkami x a y,
symetrická: $\forall x \forall y \left((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \right)$

(d) existuje stránka, ktorá obsahuje všetky prepojenia stránok x a y.
symetrická: $\forall x \forall y \left((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \right)$

Cvičenie 3.5. Zistite, či relácia R nad množinou reálnych čísel je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna, pričom $(x, y) \in R$ vtedy a len vtedy, ak

(a) $x + y = 0$,
symetrická: $\forall x \forall y \left((x + y = 0) \Rightarrow (y + x = 0) \right)$

(b) $x = \pm y$,
reflexívna: $\forall x (x = x)$

symetrická: $\forall x \forall y \left((x = \pm y) \Rightarrow (y = \pm x) \right)$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left((x = \pm y) \wedge (y = \pm z) \Rightarrow (x = \pm z) \right)$

(c) $x - y$ je racionálne číslo,
reflexívna: $\forall x (x - x \ \textit{je rac. číslo})$

symetrická: $\forall x \forall y (x - y \ \textit{je rac. číslo} \Rightarrow y - x \ \textit{je rac. číslo})$

tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(x - y \text{ } je\, rac.\, číslo \right) \wedge \left(y - z \text{ } je\, rac.\, číslo \right) \Rightarrow \left(x - z \text{ } je\, rac.\, číslo \right) \right)$

(d) $x = 2y$,
antisymetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x = 2y \right) \wedge \left(y = 2x \right) \Rightarrow \left(x = y = 0 \right) \right)$

(e) $xy \geq 0$,
reflexívna: $\forall x \left(x \cdot x \geq 0 \right)$
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(xy \geq 0 \right) \Rightarrow \left(yx \geq 0 \right) \right)$
tranzitívna: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(xy \geq 0 \right) \wedge \left(yz \geq 0 \right) \Rightarrow \left(xz \geq 0 \right) \right)$

(f) $xy = 0$,
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(xy = 0 \right) \Rightarrow \left(yx = 0 \right) \right)$

(g) $x = 1$,
antisymetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x = 1 \right) \wedge \left(y = 1 \right) \Rightarrow \left(x = y = 1 \right) \right)$

(h) $x = 1$ alebo $y = 1$.
symetrická: $\forall x \forall y \left(\left(x{=}1 \text{ alebo } y{=}1 \right) \Rightarrow \left(y{=}1 \text{ alebo } x{=}1 \right) \right)$

Cvičenie 3.6. Zostrojte inverznú reláciu $R^{-1} \subseteq Y \times X$ pre relácie $R \subseteq X \times Y$, ktoré sú špecifikované

(a) $R = \{ (x, y); x < y \}$ nad množinou celých čísel.
$R^{-1} = \{ (x, y); x \geq y \}$

(b) $R = \{ (x, y); x \text{ je deliteľné } y \}$ nad množinou kladných celých čísel.
Pôvodnú reláciu R prepíšeme do ekvivalentného tvaru $R = \{ (x, y); x = ny \}$, kde n je nenulové celé číslo, potom $R^{-1} = \{ (x, y); y = mx \}$

(c) R je relácia nad všetkými európskymi štátmi, ktorá obsahuje dvojicu (x,y) vtedy a len vtedy, ak štát x susedí so štátom y.
Platí $R^{-1} = R$.

Cvičenie 3.7.
Nech $P = \{ (1,2), (2,3), (3,4) \}$ a $Q = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4) \}$ sú relácie nad $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{1,2,3,4\}$. Nájdite

(a) $P \cup Q$, $P \cap Q$,
$P \cup Q = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4) \}$
$P \cap Q = \{ \ \} Q = \{ (1,2), (2,3), (3,4) \}$

(b) $P-Q$, $Q-P$,

$P-Q=\varnothing$

$Q-P=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$,

$\overline{P}=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

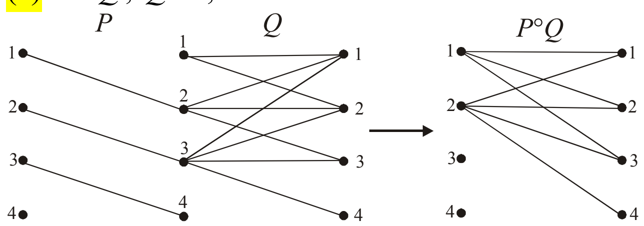
$\overline{Q}=\{(1,3),(1,4),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(d) P^{-1}, Q^{-1},

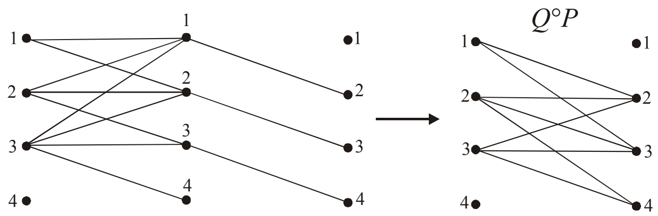
$P^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

$Q^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

(e) $P\circ Q$, $Q\circ P$,



$P\circ Q=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$



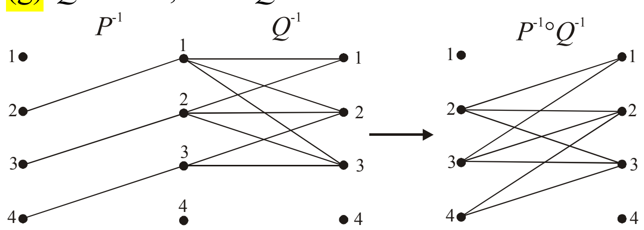
$Q\circ P=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

(f) $(P\circ Q)^{-1}$, $(Q\circ P)^{-1}$,

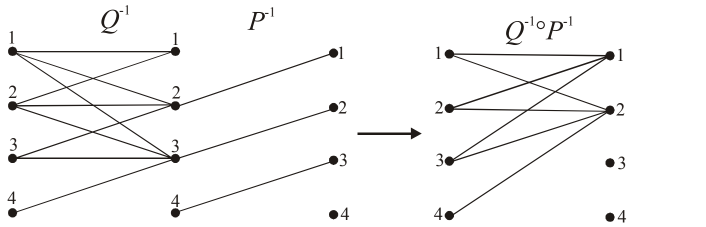
$(P\circ Q)^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

$(Q\circ P)^{-1}=\{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

(g) $Q^{-1}\circ P^{-1}$, $P^{-1}\circ Q^{-1}$.



$P^{-1}\circ Q^{-1}=\{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\}$



$Q^{-1} \circ P^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

Cvičenie 3.8. Nájdite chybu v dôkaze tejto vety:
Ak relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická a tranzitívna, potom je aj reflexívna.
Dôkaz: Nech $x \in X$, zoberte taký element $y \in X$ pre ktorý $(x,y) \in R$. Pretože R je symetrická relácia, potom taktiež $(y,x) \in R$. Použitím vlastnosti tranzitívnosti relácie R dostaneme $(x,x) \in R$, pretože $(x,y),(y,x) \in R$.
Chybný predpoklad, že pre každé x existuje y pre ktorý $(x,y) \in R$.

Cvičenie 3.9. Nech $R,S \subseteq X \times X$ sú reflexívne relácie. Dokážte alebo vyvráťte tieto tvrdenia:

(a) $R \cup S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \cup S))$, tvrdenie je platné.

(b) $R \cap S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \cap S))$, tvrdenie je platné.

(c) $R - S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \notin R - S))$, tvrdenie nie je platné.

(d) $R \circ S$ je reflexívna relácia,
$(\forall x((x,x) \in R)) \wedge (\forall y((y,y) \in S)) \Rightarrow (\forall t((t,t) \in R \circ S))$, tvrdenie je platné.

Cvičenie 3.10. Dokážte tieto tvrdenia:

(a) Relácia $R \subseteq X \times X$ je symetrická vtedy a len vtedy, ak $R = R^{-1}$.
$(\forall x \forall y((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)) \Rightarrow (\forall x \forall y((y,x) \in R^{-1} \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}))$, tvrdenie je platné.

(b) Relácia $R \subseteq X \times X$ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak $R \cap R^{-1}$ je podmnožinou „diagonálnej“ relácia $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$.
Máme dokázať

$$\left(\forall x \forall y \left(\left(\left((x,y) \in R \right) \wedge \left((y,x) \in R \right) \right) \Rightarrow (x = y) \right) \right) \equiv \left(\left(R \cap R^{-1} \right) \subseteq \Delta = \left\{ (x,x) ; x \in X \right\} \right)$$

antisymetrickú reláciu rozdelíme na dve disjunktné časti, diagonálnu a nediagonálnu

$$R = R_{diag} \cup R_{nondiag} = \underbrace{\left\{ (x,x) ; (x,x) \in R \right\}}_{R_{diag}} \cap \underbrace{\left\{ (x,y) ; \left((x,y) \in R \right) \wedge (x \neq y) \right\}}_{R_{nondiag}}$$

Pre inverznú reláciu potom platí

$$R^{-1} = R^{-1}_{diag} \cup R^{-1}_{nondiag} = \underbrace{\left\{ (x,x) ; (x,x) \in R \right\}}_{R^{-1}{}_{diag}} \cap \underbrace{\left\{ (y,x) ; \left((x,y) \in R \right) \wedge (x \neq y) \right\}}_{R^{-1}{}_{nondiag}}$$

Množiny $R_{nondiag}$ a $R^{-1}_{nondiag}$ sú disjunktné. Nech majú tieto dve množiny spoločný prvok (x,y) a (y,x), potom však zo skutočnosti, že relácia R je antisymetrická, vyplýva, že ak takého dvojice existujú, potom musí platiť $x = y$, čiže ich existencia je v spore s vlastnosťou antisymetričnosti relácie R. Prienik $R \cap R^{-1}$ obsahuje teda len diagonálne dvojice, takže musí byť podmnožinou množiny Δ.

(c) Relácia $R \subseteq X \times X$ je reflexívna vtedy a len vtedy, ak R^{-1} je reflexívna relácia.
K dôkazu tejto vlastnosti použijeme formule pre R a R^{-1} z predchádzajúceho príkladu. Pretože relácia R je reflexívna, potom jej diagonálna časť R_{diag} je totožná s množinou Δ, $R_{diag} = \Delta$. Z tvorby inverznej relácie R^{-1} vyplýva, že aj táto relácia má diagonálnu časť totožnú s Δ, $R^{-1}_{diag} = \Delta$, z čoho priamo vyplýva, že aj inverzná relácia R^{-1} je reflexívna.

(d) Ak je relácia $R \subseteq X \times X$ reflexívna a tranzitívna, potom existuje také $n > 0$, že $R^n = R$, kde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n-krát}$.

Poznámka: Príklad je prebraný od Rosena. Som schopný dokázať vlastnosť $R^2 = R$ už len pomocou reflexívnosti, nepotrebujem predpokladať aj tranzitívnosť.

Cvičenie 3.11. Rozhodnite, či $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ak

(a) $f(x) = 1/x$, $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $dom(f) = \langle 0, \infty)$

(c) $f(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$. $dom(f) = \mathbb{R}$.

Cvičenie 3.12. Nájdite doménu a kodoménu funkcií:

(a) funkcia priradí každému bitovému reťazcu rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v reťazci,

$dom(f) = \{0,1\}^n$, $codom(f) = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$

(b) funkcia priradí každému bitovému reťazcu dvojnásobok počtu núl v reťazci,

$dom(f) = \{0,1\}^n$, $codom(f) = \{0, 1, \ldots, n, \ldots, 2n\}$

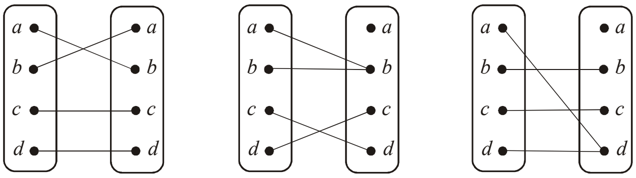
(c) funkcia priradí (štandardným spôsobom) každému bitovému reťazcu dekadické číslo. $dom(f)=\{0,1\}^n$, $codom(f)=\{0,1,...,2^n-1\}$

Cvičenie 3.13. Zistite, či funkcie $f: A \to A$, kde $A=\{a,b,c,d\}$, sú jedno-jednoznačné a nakreslite diagram zobrazenia podľa obr. 3.11.:

(a) $f(a)=b, f(b)=a, f(c)=c, f(d)=d$, jedno-jednoznačné zobrazenie

(b) $f(a)=b, f(b)=b, f(c)=d, f(d)=c$, jednoznačné zobrazenie

(c) $f(a)=d, f(b)=b, f(c)=c, f(d)=d$, jednoznačné zobrazenie



(a) (b) (c)

Cvičenie 3.14. Zistite, či funkcie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ je množina prirodzených čísel:

(a) $f(n)=n-1$, platí $f(1) = 0$, $codom(f) \neq \mathbb{N}$

(b) $f(n)=n^2$, $codom(f)=\mathbb{N}$

(c) $f(n)=1+integer(n/2)$, kde *integer*(x) je celá časť reálneho čísla, $codom(f)=\mathbb{N}$

(d) $f(n)=n^3$, $codom(f)=\mathbb{N}$

Cvičenie 3.15. Nech $f: A \to A$, zostrojte $codom(f)=f(A)$ k de $A=\{-1,0,2,4,7\}$, pre

(a) $f(x)=1$, $f(A)=\{1\}$,

(b) $f(x)=2x+1$, $f(A)=\{-1,1,5,9,15\}$

(c) $f(x)=integer(x/5)$, $f(A)=\{0,1\}$

(d) $f(x)=integer((1+x^2)/3)$, $f(A)=\{0,1,5,9,16\}$.

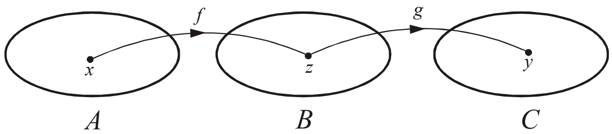
Cvičenie 3.16. Nech $f(x)=2x$, zostrojte:

(a) $f(A)$, kde A je množina celých čísel, $f(A)=\{2k; k \in A\}$

(b) $f(A)$, kde A je množina kladných celých čísel, $f(A)=\{2k; k \in A\}$,

(c) $f(\mathbb{R})$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Cvičenie 3.17. Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$, dokážte, že ak funkcie f a g sú jedno-jednoznačné, potom aj ich kompozícia $g \circ f : A \to C$ je jedno-jednoznačná funkcia.



1-1 značná funkcia je definovaná takto:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Pre zloženú funkciu platí

$$z = f(x)$$
$$y = g(z)$$
$$y = g(f(x)) = f \circ g(x)$$

Postuluje sa, že funkcie f a g sú 1-1-značné

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(z) \neq g(z')$$

potom platí, že zložená funkcia je 1-1-jednoznaščná.

Cvičenie 3.18. Zostrojte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$, kde $f(x) = 1 + x^2$ a $g(x) = x + 2$ sú funkcie s doménou reálnych čísel.

$$f(g(x)) = f(x+2) = 1 + (x+2)^2$$
$$g(f(x)) = g(1 + x^2) = (1 + x^2) + 2$$

Cvičenie 3.19. Nech $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kde a, b, c a d sú konštanty, zistite, za akých podmienok platí $f(g(x)) = g(f(x))$.

$$f(g(x)) = ag(x) + b = a(cx + d) + b = acx + ad + d$$
$$g(f(x)) = cf(x) + d = c(ax + b) + d = acx + bc + d$$

Aby platilo $f(g(x)) = g(f(x))$, musí platiť $ad = bc$.

Cvičenie 3.20. Za ktorých podmienok existuje k funkcii $f(x) = ax + b$ funkcia inverzná $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$$

Inverzná funkcia existuje ak $a \neq 0$.

Cvičenie 3.21. Nech $f : A \to B$ a nech $A', A'' \subseteq A$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f\left(A' \cup A''\right) = f\left(A'\right) \cup f\left(A''\right)$,

$f\left(A\right) = \left\{ f\left(x\right); x \in A \right\}$,

$f\left(A' \cup A''\right) = \left\{ f\left(x\right); x \in \left(A' \cup A''\right) \right\} = \left\{ f\left(x\right); x \in A' \right\} \cup \left\{ f\left(x\right); x \in A'' \right\} = f\left(A'\right) \cup f\left(A''\right)$

(b) $f\left(A' \cap A''\right) \subseteq f\left(A'\right) \cap f\left(A''\right)$.

$f\left(A' \cap A''\right) = \left\{ f\left(x\right); x \in \left(A' \cap A''\right) \right\} \subseteq \left\{ f\left(x\right); x \in A' \right\} \cap \left\{ f\left(x\right); x \in A'' \right\} = f\left(A'\right) \cap f\left(A''\right)$

Cvičenie 3.22. Nech $f\left(x\right) = x^2$ je funkcia s doménou reálnych čísel. Nájdite

(a) $f^{-1}\left(1\right)$, $f\left(1\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}\left(1\right) = 1$

(b) $f^{-1}\left(\left\{x; 0 < x < 1\right\}\right)$, $A = \left(0,1\right)$, $f\left(A\right) = \left\{ f\left(x\right) = x^2; x \in A \right\} = A \Rightarrow f^{-1}\left(A\right) = A$

(c) $f^{-1}\left(\left\{x; x > 4\right\}\right)$, $A = \left(2,\infty\right)$, $f\left(A\right) = \left(4,\infty\right) = B \Rightarrow f^{-1}\left(B\right) = A$

Cvičenie 3.23. Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B', B'' \subseteq B$. Dokážte platnosť týchto formúl:

(a) $f^{-1}\left(B' \cap B''\right) = f^{-1}\left(B'\right) \cap f^{-1}\left(B''\right)$,

$f^{-1}\left(B' \cap B''\right) = \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in \left(B' \cap B''\right) \right\} \subseteq \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B' \right\} \cap \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B'' \right\} =$

$f^{-1}\left(B'\right) \cap f^{-1}\left(B''\right)$

$f^{-1}\left(B'\right) \cap f^{-1}\left(B''\right) = \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B' \right\} \cap \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B'' \right\} \subseteq \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in \left(B' \cap B''\right) \right\}$

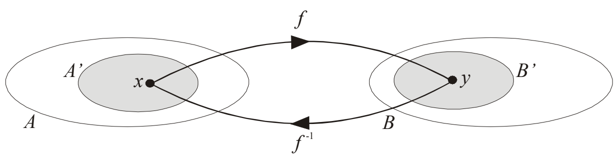
(b) $f^{-1}\left(B' \cup B''\right) = f^{-1}\left(B'\right) \cup f^{-1}\left(B''\right)$.

$f^{-1}\left(B' \cup B''\right) = \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in \left(B' \cup B''\right) \right\} \subseteq \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B' \right\} \cup \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B'' \right\} =$

$f^{-1}\left(B'\right) \cup f^{-1}\left(B''\right)$

$f^{-1}\left(B'\right) \cup f^{-1}\left(B''\right) = \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B' \right\} \cup \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in B'' \right\} \subseteq \left\{ f^{-1}\left(y\right); y \in \left(B' \cup B''\right) \right\}$

Cvičenie 3.24. Nech $f : A \rightarrow B$ a nech $B' \subseteq B$. Dokážte platnosť formuly $f^{-1}\left(\overline{B'}\right) = \overline{f^{-1}\left(B'\right)}$.



$\overline{A}' = A - A'$, $\overline{B}' = B - B'$

$f\left(A'\right)=\left\{f\left(x\right);x\in A'\right\}=B'$, $f\left(\overline{A}'\right)=\left\{f\left(x\right);x\in \overline{A}'\right\}=\overline{\left\{f\left(x\right);x\in A'\right\}}=\overline{f\left(A'\right)}=\overline{B}'$

$f^{-1}\left(B'\right)=\left\{f^{-1}\left(y\right);y\in B'\right\}=A'$, $f^{-1}\left(\overline{B'}\right)=\left\{f^{-1}\left(y\right);y\in \overline{B'}\right\}=\overline{\left\{f^{-1}\left(y\right);y\in B'\right\}}=\overline{f^{-1}\left(B'\right)}$