S T U

F I I T

Teoretické základy informatiky

Univerzálny Turingov stroj

Mgr. Daniela Chudá, PhD., chuda@fiit.stuba.sk

Turingov stroj (opakovanie)

Definícia:

Nedeterministický Turingov stroj je šestica

$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

K je konečná množina stavov,

Σ je vstupná abeceda,

Γ ja pracovná abeceda ($\Sigma \subseteq \Gamma; B \in \Gamma; B-blank$)

δ je prechodová funkcia $\delta : K \times \Gamma \to 2^{K \times \Gamma \times \{-1,0,1\}}$,

$q_0 \in K$ je počiatočný stav,

$F \subseteq K$ je množina koncových stavov.

Poznámka:

Ak platí: $\#(\delta(q, a)) \leq 1$, hovoríme, že Turingov stroj je deterministický.

Univerzalita TS

Dôležitá vlastnosť Turingových strojov je tzv. univerzalita.

Znamená to, že sa dajú zostrojiť Turingove stroje, na ktorých je možné simulovať výpočet iných Turingových strojov.

Univerzálny TS a problém zastavenia

Existuje Turingov stroj (univerzálny TS), ktorý keď sa predloží kód ľubovolného Turingovho Stroja T a kód slova x, bude simulovať činnosť stroja T pri spracúvaní slova x.

Univerzálny TS možno pokladať za mnohoúčelový počítač, ktorý má dostatočne veľké možnosti pre simuláciu ľubovolného počítača, vrátane seba samého.

Neexistuje algoritmus (TS, ktorý sa zastaví pre všetky vstupné slová), ktorý by určil pre ľubovolný Turingov stroj T a ľubovolný vstup x, či sa T so vstupom x niekedy zastaví.

Hopcroft, Ullman: Formálne jazyky a automaty

Univerzálny Turingov Stroj -UTM

Definícia: Univerzálny Turingov stroj

Nech Σ *je abeceda a nech* T_x *je Turingov stroj, ktorý je repreznetovaný svojím kódom* $x \in \Sigma^*$. Univerzálny Turingov stroj U *pre všetky vstupy* y*, pre ktoré je výstup* $T_x(y)$ *definovaný, počíta hodnotu*

$$U(x, y) = T_x(y)$$

pre všetky prípustné kódy $x \in \Sigma^*$.

Veta 6.1.1 *Existuje univerzálny Turingov stroj.*

Turingov stroj sa používa aj na formalizáciu pojmu T-vypočítateľná funkcia.

Dôkaz: UTM, myšlienka = zakódovať TS

1. Zvolenie kódovania C
   - kódovanie vstupu
   - kódovanie TS (prechodovej funkcie)
2. Konštrukcia U pre C
   - konštrukcia dvojpáskového TS
   - simulovanie TS
   - Ukončenie TS

Kódovanie vstupu

- potrebujeme zakódovať vstup, máme symboly 0,1
- vstup zakódujeme cez bezprefixový kód

Bezprefixový kód –jednoznačne určím znaky

Bezprefixový kód $Code(x) = 1^{|x|}0x; x \in \{0,1\}^*$
$|Code(x)| = 2.|x| + 1$

Príklad:

a	b	c	d	e	f	g
ϵ	0	1	00	01	10	11

$Code(a) = 0$
$Code(b) = 100$
$Code(c) = 101$
$Code(d) = 11000$
$Code(e) = 11001$
$Code(f) = 11010$
$Code(g) = 11011$

Každý symbol dokážem pretransformovať do postupnosti 0 a 1.

Kódovanie Turingovho stroja

Kódovanie Turingovho stroja

$L = \{w \in \{0,1\}^* \,|\, \#_0 w = 2k; k \in \mathbb{N}\}$

$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F); F = \{q_3\}$

$\delta(q_1, 0) = (q_2, 0, R)$

$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$

$\delta(q_2, 0) = (q_1, 0, R)$

$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, R)$

$\delta(q_1, B) = (q_3, B, L)$

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	—
q_3	—	—	—

Páska:

ccc11R0c1R1c111LBcc1R0c11R1c0cc0c0c0ccc

Kódovanie Turingovho stroja - vysvetlenie

Zakódujem všetky TS nad abecedou $\{0,1\}^*$

- počet stĺpcov tabuľky – vždy 3 → (0,1,B)
- počet riadkov tabuľky - závisí od počtu stavov
- koncový stav – jediný, riadok, ktorý je nedefinovaný pre každý symbol
- páska = na pásku kódujem kontinuálne tabuľku:
  - ccc - koncové a počiatočné oddelovače ,
  - cc – oddeľuje riadky,
  - c – oddeľuje políčka v riadkoch.
- kódujem stavy:
  - q_1 1
  - q_2 11
  - q_3 111
  - \- 0
- pri kódovaní vymieňam zapisovaný znak a pohyb hlavy, aby boli oddelené 0 a 1 → $q_2$0R - 11R0

STU FIIT

Návrh TS

Univerzálny Turingov stroj

$$U = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_U, F); F = \{q_F\}$$

$$\Sigma = \{0, 1, c, L, R\}$$

$$\Gamma = \left\{ \binom{x}{y} \,|\, x \in \{B, m\}, y \in \Sigma \bigcup \{B\} \right\}$$

- UTS využíva dvojstopú pásku $\binom{x}{y}$
- vstupná abeceda Σ,
- vstupné symboly – z kódovania
- koncový stav – q_F
- dvojice (6x2=12):
    - horné - B,m symboly
    - dolné – Σ u {B} symboly

Simulácia TS

horná stopa:			**m**																			
dolná stopa:	**c**	**c**	**c**	**1**	**1**	**R**	**0**	**c**	**1**	**R**	**1**	**c**	**1**	**1**	**1**	**L**	**B**	**c**	**c**	**1**	**R**	**0**

...

...

																m				
c	**1**	**1**	**R**	**1**	**c**	**0**	**c**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**c**	**c**	**0**	**1**	**0**	**B**

dolná stopa:

- prvá časť - kód TS, ktorý chcem simulovať
- druhá časť – dáta **010**

prvý symbol m ← aktuálny stav

druhý symbol m ← poloha čítacej hlavy

$U(x,y)=T_x(y)$

Simulácia TS

horná stopa:

dolná stopa:

		m																				
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

																		m			
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	—
q_3	—	—	—

Simulácia TS

horná stopa:

dolná stopa:

		m																			
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0

...

...

																	m			
c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:
dolná stopa:

		m																			
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0

...

...

																	m			
c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	—
q_3	—	—	—

Simulácia TS

horná stopa:																		**m**				
dolná stopa:	**c**	**c**	**c**	**1**	**1**	**R**	**0**	**c**	**1**	**R**	**1**	**c**	**1**	**1**	**1**	**L**	**B**	**c**	**c**	**1**	**R**	**0**

...

...

																		m		
c	**1**	**1**	**R**	**1**	**c**	**0**	**c**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**c**	**c**	**0**	**1**	**0**	**B**

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:
dolná stopa:

c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

	m																		m		
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:
dolná stopa:

c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

	m																		m		
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:

dolná stopa:

																		m				
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

																				m	
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:
dolná stopa:

																		m			
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0

...

...

																			m	
c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	—
q_3	—	—	—

Simulácia TS

horná stopa:																		**m**				
dolná stopa:	**c**	**c**	**c**	**1**	**1**	**R**	**0**	**c**	**1**	**R**	**1**	**c**	**1**	**1**	**1**	**L**	**B**	**c**	**c**	**1**	**R**	**0**

...

...

																			m	
c	**1**	**1**	**R**	**1**	**c**	**0**	**c**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**0**	**c**	**c**	**c**	**0**	**1**	**0**	**B**

	0	1	B
q_1	$q_2 0R$	$q_1 1R$	$q_3 BL$
q_2	$q_1 0R$	$q_2 1R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:																			m				
dolná stopa:	c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

																				m	
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:			m																			
dolná stopa:	c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0

...

...

																				m
c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:

dolná stopa:

											m										
c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0

...

...

																				m
c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

Simulácia TS

horná stopa:
dolná stopa:

c	c	c	1	1	R	0	c	1	R	1	c	1	1	1	L	B	c	c	1	R	0	...

													m							m	
...	c	1	1	R	1	c	0	c	c	0	c	0	c	0	c	c	c	0	1	0	B

akceptuje q_3

	0	1	B
q_1	$q_2 0 R$	$q_1 1 R$	$q_3 B L$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$

S T U
F I I T

Ukončenie TS

U akceptuje <=> T_x akceptuje

U sa zasekne <=> T_x sa zasekne

U cyklí <=> T_x cyklí

STU FIIT

Univerzálny TS a problém zastavenia

Problém zastavenia pre TS je definovaný takto:

Nech je daný TS v ľubovolnej konfigurácii a konečne dlhým reťazcom neprázdnych páskových symbolov, zastaví sa niekedy tento TS?

O tomto probléme hovoríme, že je rekurzívne neriešiteľný (alebo nerozhodnuteľný) v tom zmysle, že neexistuje algoritmus, ktorý pre každý TS a každú konfiguráciu určí, či tento TS v uvedenej konfigurácii nakoniec zastaví. Toto neznamená, že nemôžeme určiť, či sa konkrétny TS v nejake konfigurácii zastaví.

Hopcroft, Ullman: Formálne jazyky a automaty

Univerzálne Turingove stroje (1)

	0	1	2	3	4	5
q_0	$q_0 17L$	$q_0 4R$	$q_0 17L$	$q_0 0R$	$q_0 3L$	$q_0 7R$
q_1	$q_1 2R$	$q_1 2R$	$q_1 1L$	$q_1 4R$	$q_1 0L$	$q_0 10R$
	6	7	8	9	10	11
q_0	$q_0 9R$	$q_0 5L$	$q_0 5R$	$q_0 8L$	$q_1 11L$	$q_1 8L$
q_1	$q_1 7R$	$q_1 6L$	$q_1 9R$	$q_1 6L$	$q_0 5R$	$q_1 9R$
	12	13	14	15	16	17
q_0	$q_1 1L$	$q_0 14L$	$q_0 15L$	$q_1 16R$	–	$q_0 2R$
q_1	$q_1 14R$	$q_1 14R$	$q_1 13L$	$q_1 17R$	$q_0 17L$	$q_1 12L$

UTM(2, 18), Rogozhin (1995)

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 3L$	$q_1 4R$	$q_2 0R$	$q_3 4R$
1	$q_0 2R$	$q_2 2L$	$q_3 3R$	$q_1 5L$
2	$q_0 1L$	$q_1 3R$	$q_2 1R$	$q_3 3R$
3	$q_0 4R$	$q_1 2L$	–	–
4	$q_0 3L$	$q_1 0L$	$q_0 5R$	$q_1 5L$
5	$q_3 4R$	$q_1 1R$	$q_0 0R$	$q_3 1R$

UTM(4, 6), Rogozhin (1982)

Univerzálne Turingove stroje (2)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_4 0 R$	$q_0 1 R$	$q_3 0 L$	$q_{11} 1 L$	$q_0 1 R$	$q_6 0 L$
1	$q_1 1 R$	$q_2 1 L$	$q_1 0 L$	$q_8 0 L$	$q_5 0 L$	$q_6 1 L$
	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	$q_7 0 L$	$q_6 0 L$	$q_{18} 0 R$	$q_3 1 L$	$q_3 0 L$	$q_{18} 0 R$
1	$q_5 0 L$	$q_1 1 R$	$q_3 1 L$	$q_{12} 0 R$	—	$q_{13} 1 L$
	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}	q_{16}	q_{17}
0	$q_9 0 R$	$q_{14} 0 L$	$q_{15} 0 R$	$q_{14} 0 R$	$q_{15} 0 R$	$q_{18} 0 R$
1	$q_{23} 1 R$	$q_{10} 1 R$	$q_{16} 1 R$	$q_9 1 R$	$q_{20} 1 R$	$q_{19} 1 R$
	q_{18}	q_{19}	q_{20}	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_2 1 L$	$q_{17} 1 R$	$q_{21} O R$	$q_9 1 L$	$q_{20} 1 R$	$q_{12} 0 R$
1	$q_{17} 1 R$	$q_{17} 0 R$	$q_{22} 1 R$	$q_{20} 1 R$	$q_{20} 0 R$	$q_2 0 L$

UTM(24, 2), Rogozhin (1982)

STU FIIT

Church-Turingova téza

Každý proces, ktorý je možné intuitívne nazvať algoritmus, sa dá realizovať na Turingovom stroji.

Ďakujem za pozornosť.

chuda@fiit.stuba.sk

S T U

F I I T