Fyzika – teoretické otázky

3. **Odvoďte Gaussovu vetu v elektrostatickom poli.**
   Tok intenzity elektrického poľa $\vec{E}$ uzavretou plochou S sa rovná náboju Q uzavretému plochou a delenému elektrickou konštantou poľa (permitivitou vákua) ε_0.

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$d\Phi_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\vec{S}\vec{r}_i}{r_i^3}$$

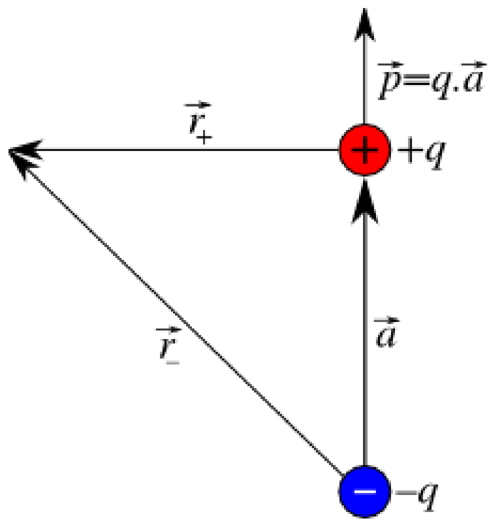
$$\Phi_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\oint \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3}}_{4\pi}$$

$$\Phi_i = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

4. **Odvoďte vzorec pre potenciál v okolí elektrického dipólu, vyjadrite E v smere osi dipólu a v rovine dipólu.**



Obr. 1: Dipól

$$\vec{a} + \vec{r}_+ = \vec{r}_- \Rightarrow \vec{r}_- = \sqrt{(\vec{a} + \vec{r}_+)^2} = \sqrt{a^2 + 2\vec{a}\vec{r}_+ + r_+^2} = r_+ \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{r_+^2}}_{(a \ll r_+)} + \frac{2ar_+}{r_+^2} + 1} =$$

$$= r_+ \cdot \sqrt{1+\frac{2\vec{a}\vec{r}_+}{r_+^2}} \underset{\substack{p\ll 1\\(1+p)^n \doteq (1+np)}}{=} r_+ \cdot \left(1+\frac{1}{2}\frac{2\vec{a}\vec{r}_+}{r_+^2}\right)$$

$$V = V_+ + V_- = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_+}\left(1-\frac{1}{2}\frac{2\vec{a}\vec{r}_+}{r_+^2}\right)\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}_+}{r_+^3} = \frac{\overbrace{q\cdot\vec{a}}^{\vec{p}}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{smer osi dipólu}} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{smer roviny dipólu}} = \frac{-\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

5. **Odvoďte vzťahy pre silu, moment sily a polohovú energiu elektrického dipólu vo vonkajšom elektrickom poli.**

$$\vec{f} = \vec{f}_+ + \vec{f}_- = q\cdot\vec{E}_+ + (-q)\cdot\vec{E}_- = q\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

[1]

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{f}_+ = \vec{a}\times q\cdot\vec{E} = q\cdot\vec{a}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

$$E_p = E_{p+} + E_{p-} = q\cdot(V_+ + V_-) = -q\cdot\vec{E}\cdot\vec{a} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

6. **Zaveďte vektor elektrickej polarizácie a vektor elektrickej indukcie, odvoďte vzťah medzi vektormi $\vec{E}$, $\vec{D}$ a $\vec{P}$.**

$$\vec{P} = -\varepsilon_0\vec{E}_p = \varepsilon_0\cdot\varkappa\cdot\vec{E}$$

[2]

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\varkappa\vec{E} = \varepsilon_0\underbrace{(1+\varkappa)}_{\varepsilon_r}\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \varrho\cdot dV$$

7. **Odvoďte vzorce pre energiu nabitého telesa a energiu nabitého kondenzátora.**

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\sum Q_i\cdot\varphi_i$$

$$W = \int \frac{Q}{C}\cdot dQ = \frac{1}{2}Q\cdot U$$

8. **Odvoďte vzorec pre hustotu energie elektrického poľa.**

$$E_k = \frac{1}{2}\varepsilon\cdot E^2\cdot V$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

9. **Definujte elektrický prúd, vektor prúdovej hustoty a odvoďte rovnicu spojitosti. Ukážte, že v stacionárnom prípade predstavuje I. Kichhoffov zákon.**
Elektrický prúd – množstvo náboja, ktoré pretečie za jednotku času

$$I = \frac{dQ}{dt} = n\cdot q_0\cdot v\cdot S$$

Prúdová hustota: $j = \frac{I}{S} = \varrho\cdot\vec{v}$
Rovnica spojitosti elektrického prúdu: $I = \oint\vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$
I. Kirchhoffov zákon – súčet prúdov, ktoré vystupujú z uzla je nulový: $-j_1\cdot S_1 + j_2\cdot S_2 + j_3\cdot S_3 = -I_1 + I_2 + I_3 = 0$

[1] V homogénnom poli $\vec{E}_+ - \vec{E}_- = 0$
[2] $\varkappa$ – elektrická susceptibilita

10. **Na základe klasických predstáv odvoďte Ohmov zákon v diferenciálnom tvare.**
Sila pôsobiaca na elektrón (nosič náboja) a tým aj rýchlosť sú úmerné intenzite elektrického poľa:
Rovnica pre objemovú prúdovú hustotu: $\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{v} = \varrho' \cdot \vec{v}$
Rýchlosť objektov v prúdovom poli: $\vec{v} = u \cdot \vec{E}$, kde u je pohyblivosť elektrického náboja
Konduktivita: $\sigma = n \cdot q \cdot u$
Prvý spôsob diferenciálnej formulácie Ohmovho zákona: $\vec{J} = n \cdot q \cdot u \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}$
Rezistivita: $\varrho = \frac{1}{\sigma}$
Druhý spôsob diferenciálnej formulácie Ohmovho zákona: $\vec{E} = \varrho \cdot \vec{J}$

11. **Zaveďte indukciu magnetického poľa a vyjadrite silu pôsobiacu na prúdový element v magnetickom poli.**
Magnetická indukcia:

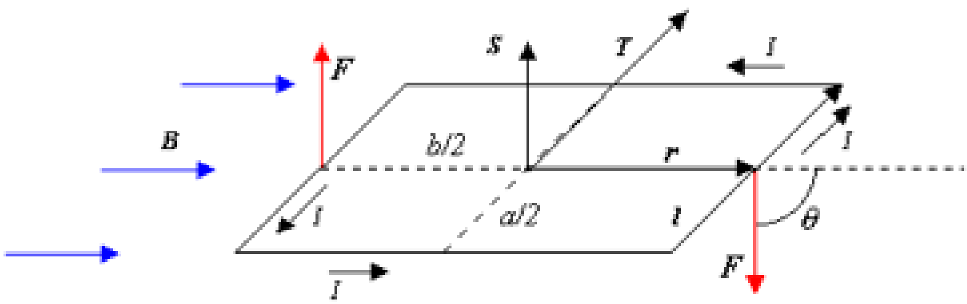
$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

Sila pôsobiaca na prúdový element:

$$d\vec{f}_m = dq \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad dq \cdot \vec{v} = I \cdot d\vec{\ell} \qquad d\vec{f}_m = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$f_m = \oint_{(\ell)} I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

12. **Odvoďte vzorec pre moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli.**



Obr. 2: Prúdová slučka v magnetickom poli

Veľkosť každej z dvojice síl na obrázku je

$$F = IaB \sin 90° = IaB \tag{1}$$

Ak $\vec{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\vec{F}$ vzhľadom na stred prúdovej slučky, potom na slučku pôsobí moment dvojice síl $\vec{\tau} = 2 \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$, ktorého veľkosť je daná

$$\tau = 2rF \sin\theta = 2\frac{b}{2}F \sin\theta = bF \sin\theta \tag{2}$$

kde θ je menší z dvoch uhlov zvieraných smermi polohového vektora $\vec{r}$ (ramena) a vektora sily $\vec{F}$. Po dosadení (1) do (2) pre veľkosť momentu sily získame

$$\tau = bF \sin\theta = IabB \sin\theta = ISB \sin\theta$$

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} \tag{3}$$

Na plochú cievku s počtom závitov N pôsobí moment $\vec{\tau} = N \cdot I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$

13. **Zaveďte magnetický moment prúdovej slučky a vyjadrite vzorec pre jeho polohovú energiu v homogénnom magnetickom poli.**

Magnetický dipólový moment $\vec{\mu}$ je definovaný prostredníctvom momentu $\vec{\tau}$ magnetickej sily pôsobiaceho na magnetický dipól v magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$

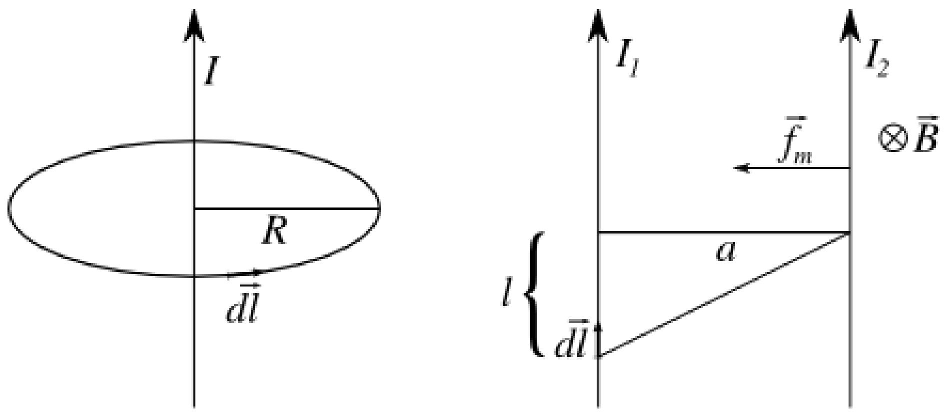
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Porovnaním so vzťahom (3) dostaneme

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$$

Pre polohovú energiu slučky platí:
$U_{min} = -\mu \cdot B$ ak magnetický moment je súhlasne orientovaný s magnetickou indukciou,
$U_{max} = \mu \cdot B$ ak sú opačne orientované.

14. **Vypočítajte veľkosť a určite smer sily pôsobiacej medzi dvoma nekonečne dlhými priamymi vodičmi. Definujte jednotku ampér.**
Ampér je stály elektrický prúd, ktorý pri prechode dvomi priamymi rovnobežnými nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu umiestnenými vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosti $1\,m$ vyvolá medzi nimi stálu silu $2 \cdot 10^{-7}\,N$ na $1\,m$ dĺžky vodiča.



Obr. 3: Sila medzi dvomi nekonečne dlhými priamymi vodičmi

Magnetické pole v okolí nekonečne tenkého priameho vodiča:
Zákon prietoku: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$
ak $\vec{B} \,||\, d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \int B \cdot d\ell = \mu_0 I$
ak $B =$ konšt. $\quad \Rightarrow \quad B \underbrace{\int d\ell}_{2\pi R} = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Sila pôsobiaca medzi dvomi nekonečne dlhými priamymi vodičmi:
$df_m = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B} \overset{d\vec{\ell}_2 \perp \vec{B}}{=} I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$
Sila na dĺžku l_2:

$$f_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l_2$$

15. **Zaveďte vektor magnetizácie a vektor intenzity magnetického poľa v hmotnom prostredí.**
Vektor magnetizácie:

$$\vec{M} = \varkappa_m \vec{B}_0$$

kde $\varkappa_m$ je magnetická susceptibilita.

$$B = B_0 + M = B_0 + \varkappa_m B_0 = B_0 \overbrace{(1 + \varkappa_m)}^{\mu_r} = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H$$

Vektor intenzity magnetického poľa:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

16. **Definujte magnetický indukčný tok, uveďte Lenzovo pravidlo a odvoďte Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie.**

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Lenzov zákon: prúd tečie takým smerom, že pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.
Faradayov zákon: $U_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = \oint \left(d\vec{\ell} \cdot \vec{v}\right) \vec{B} = -\frac{d}{dt} \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

17. **Odvoďte vzorec vyjadrujúci energiu magnetického poľa vodiča, ktorým preteká ustálený elektrický prúd.**

$$E_m = \int_0^{I_0} ILdI = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}B \cdot H \cdot V$$

18. **Odvoďte vzorec pre objemovú hustotu energie magnetického poľa.**

$$e_m = \frac{E_m}{V} = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

19. **Opíšte význam Maxwellových rovníc a ukážte význam Maxwellovho posuvného prúdu a odvoďte jeho vzorec.**
1. Maxwellova rovnica: $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$ vychádza z Gaussovej vety, tok elektrickej intenzity uzavretou plochou je rovný náboju vo vnútri plochy
2. Maxwellova rovnica: $\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, tok magnetickej indukcie uzavretou plochou je nulový
3. Maxwellova rovnica: $\int \vec{H} \cdot d\vec{r} = \varepsilon \frac{d\Phi_e}{dt}$
Maxwellov posuvný prúd: vysunutie nábojov v prostredí v dôsledku meniaceho sa elektrického poľa

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\left(D \cdot S\right)}{dt} = \frac{d\left(\varepsilon E \cdot S\right)}{dt} = \varepsilon \frac{d\left(\Phi_e\right)}{dt}$$

Meniace sa magnetické pole mení elektrické pole a naopak, sú si rovnocenné.
4. Maxwellova rovnica: $U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ vyjadruje Faradayov indukčný zákon
Pomocou Maxwellových rovníc sa dajú odvodiť všetky zákony v elektromagnetike.

20. **Odvoďte vzťah medzi vektormi $\vec{E}$ a $\vec{B}$ v rovinnej elektromagnetickej vlne.**

$$\vec{E}(x,t) = E_{\max}\vec{\jmath}\cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_{\max}\vec{k}\cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \vec{B}(x,t)}{\partial t}$$

$$-E_{\max}\sin\left(\omega t - kx\right)\left(-k\right) = +B_{\max}\sin\left(\omega t - kx\right)\omega$$

$$E_{\max} = B_{\max} \cdot \frac{\omega}{k}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f \cdot \lambda = v$$

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{v} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot E_{\max}$$

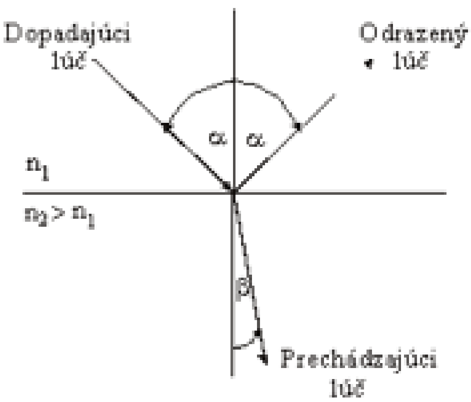
$$B = \frac{1}{c}\left(\vec{\imath} \times \vec{E}\right)$$

21. **Vyjadrite Poyntingov žiarivý vektor pre rovinnú elektromagnetickú vlnu, uveďte jeho význam a rozmer v SI. Súvis medzi Poyntingovým žiarivým vektorom a intenzitou žiarenia. Tlak žiarenia v závislosti od intenzity žiarenia.**

$$dU = dU_e + dU_m = Sdx\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

$$P = \frac{dU}{dtS} = v\cdot\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right) = E\cdot H$$

22. **Opíšte javy súvisiace s odrazom a lomom svetelných lúčov na rovinnom rozhraní (podmienky pre lom a odraz, úplný odraz, Brewsterov uhol).**
Pri prechode svetelného lúča z jedného optického prostredia do druhého sa lúč čiastočne odráža a čiastočne láme tak, ako je naznačené na obrázku. Všetky uhly sa merajú od kolmice na rozhranie medzi prostrediami.

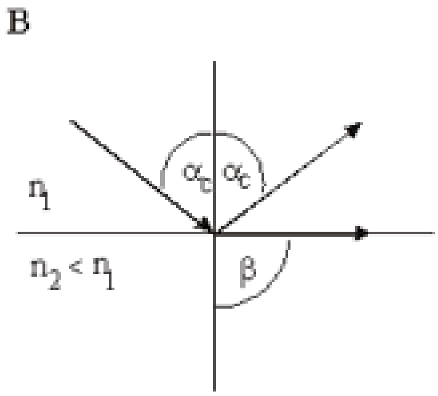


Obr. 4: Lom a odraz svetelného lúča

Pre odrazený lúč platí, že uhol odrazu sa vždy rovná uhlu dopadu. Smer prechádzajúceho lúča sa dá vypočítať pomocou Snellovho empirického zákona:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Tento zákon odvodený z pozorovaní je priamym dôsledkom všeobecnejšieho Fermatovho princípu. Vo všeobecnosti platí, že s narastajúcim uhlom dopadu sa zmenšuje intenzita prechádzajúceho lúča a zväčšuje sa intenzita odrazeného lúča. Pre veľké uhly dopadu sa prakticky všetko dopadnuté svetlo odráža od rozhrania dvoch prostredí. V takomto prípade sa rozhranie dvoch prostredí správa ako „dokonalé“ zrkadlo.
Ak svetelný lúč prechádza z prostredia s vyšším indexom lomu do prostredia s nižším indexom lomu dochádza pri istom hraničnom uhle dopadu k javu úplného odrazu lúča na rozhraní dvoch prostredí. Tento jav sa nazýva *totálny odraz na rozhraní*. Hraničný uhol dopadu, od ktorého nastáva totálny odraz, sa nazýva *Brewsterov uhol*.



Obr. 5: Totálny odraz

23. Odvodte podmienku pre polohu maxím pri prechode svetla cez optickú mriežku.

$I = I_0 \left(\frac{sinu}{u}\right)^2 \qquad u = \frac{(k.b.sin\psi)}{2} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad d.sin\psi_m = m.\lambda$

I_0 – intenzita pre Ψ=0
I – hustota svetelného toku [$J.m^{-2}.s^{-1}$] intenzita žiarenia
b – šírka
Ψ – difrakčný uhol
k – vlnové číslo
d – mriežková konštanta
m – rád difrakčného maxima

Rastúcim číslom m rastie aj uhol Ψ, teda difrakčné maximá vyššieho rádu pozorujeme pri vyšších uhloch