Cvičenia

Cvičenie 8.1. Stanovte typ matice jej názov

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $t=(2,2)$, štvorcová matica

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $t=(2,4)$, obĺžniková matica

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $t=(1,4)$, riadkový vektor

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t=(3,1)$, stĺpcový vektor.

Cvičenie 8.2. Nájdite hodnoty a, b, c a d tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 3a & -b \\ c & 2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

musí platiť:

$3a=1 \Rightarrow a=1/3$, $-b=3 \Rightarrow b=-3$, $c=$ -1, $2d+1=2 \Rightarrow d=1/2$.

Cvičenie 8.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

(a) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, každá jednotková matica je aj symetrická matica.

(b) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

Nepravdivé tvrdenie, symetrická matica nemusí byť diagonálnou maticou.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{\boldsymbol{A};\ A\ \textit{je jednotková matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, pretože $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matica.

(d) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je štvorcová matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

Nepravdivé tvrdenie, pretože štvorcová matica nemusí byť diagonálna matica.

(e) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$.

Pravdivé tvrdenie, pretože jednotková matica je aj diagonálna matica.

Cvičenie 8.4.

(a) Zostrojte matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$, typu (3,2), pre ktoré platí

$$A_{ij} = i - j,\ B_{ij} = i - 2j,\ C_{ij} = 4i + 3j.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 14 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

(b) Zostrojte maticu $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ typu (4,4), ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii} = i^2,\ A_{13} = A_{24} = 0,\ A_{14} = 3,\ A_{12} = A_{23} = A_{11} + A_{22},\ A_{34} = A_{23} - A_{14}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.
Matica typu (1,1), $A = (a_{11})$

(d) Nájdite x a y pre maticu

$$\boldsymbol{A} = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} x+y & 10 \\ 2x-y & 4 \end{pmatrix}$$

pre $A_{11} = A_{22}$ a $A_{12} = A_{21}/2$.

$x + y = A_{11}$, $2x - y = A_{21}$, $A_{22} = 4$, $A_{12} = 10$.

Potom platí $x + y = 4$, $2x - y = 20$, sčítaním týchto rovníc dostaneme $3x = 24 \Rightarrow x = 8$, potom z prvej rovnice dostaneme $y = -4$. Matica A má potom tvar

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičenie 8.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.6. Pre matice

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)

(a) $2A$, $2A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

(b) $A+B$, $A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

(c) $A+C$, neexistuje, pretože matice sú rôzneho typu.

(d) AC, $AC=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

(e) CB, neexistuje, pretože matice typu (2,3) a (2,2) nie je možné násobiť.

(f) C^TB, $C^TB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.7.

Pre maticu $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2X+B=E$$

kde X je matica typu (2,2) a E je jednotková matica typu (2,2).

$$X=\frac{1}{2}(E-B)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Cvičenie 8.9. Pre riadkové vektory u a v spočítajte uv^T (ak existuje) pre

(a) $u=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$uv^T=1\cdot 0-2\cdot 2+0\cdot 0-1\cdot 2=-4-2=-6$

(b) $u=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $uv^T=3$

(c) $u^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $uv^T=-3$

Cvičenie 8.10. Dokážte pre $u=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{pmatrix}$ platí $uu^T\ge 0$, pričom rovnosť platí len pre nulový vektor.

$uu^T=u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2\ge 0$, rovná sa nule len pre $u=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.11. Pre každú dvojicu matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$t(A)=(3,2)$, $t(B)=(2,3)$, $AB=\begin{pmatrix} 17 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 32 & 13 & 14 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$t(A)=(2,2)$, $t(B)=(3,2)$, súčin AB neexistuje.

(c) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$t(A)=(1,4)$, $t(B)=(4,2)$, $AB=\begin{pmatrix} 29 & 3 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.12.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

(a) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -18 & -15 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$,

(f) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$,

(g) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$,

(h) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

(i) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -14 & -2\end{pmatrix}$,

(j) $(\boldsymbol{AB})^T=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.13.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{B}^2$.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Cvičenie 8.14. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica, potom $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ je symetrická matica.
Nech $C=A+A^T$, potom $C_{ij}=A_{ij}+A_{ij}^T=A_{ij}+A_{ji}$, potom $C_{ij}=C_{ji}$, $\boldsymbol{C}$ je symetrická matica.

Cvičenie 8.15. Dokážte tieto vlastnosti transponovanej matice:

(a) $\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T=\boldsymbol{A}$,

Nech $B=A^T$, potom $B_{ij}^T=B_{ji}=A_{ji}^T=A_{ij}$.

(b) $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$,

Nech $C=A+B$, potom $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$, alebo $C_{ij}^T=C_{ji}=A_{ji}+B_{ji}=A_{ij}^T+B_{ij}^T$

(c) $\left(\boldsymbol{AB}\right)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$,

Nech $C=AB$, potom $C_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}\Rightarrow C_{ij}^T=C_{ji}=\sum_k A_{jk}B_{ki}=\sum_k B_{ik}^T A_{kj}^T\Rightarrow C^T=B^TA^T$

Cvičenie 8.16. Stanovte hodnosť matíc

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $h(A)=3$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $h(A)=3$.

(c) Pre ktoré hodnoty p, má matica $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}$ hodnosť 1?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}\cdot(-p)\sim\begin{pmatrix}-p & -2p\\ p & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-p & -2p\\ 0 & -1-2p\end{pmatrix}$$

Trojuholníková matica na pravej strane má $h(A) = 1$ len vtedy, ak druhý riadok je nulový, čiže $p = 1/2$.

(d) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $h(A) = 3$.

(e) Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ p & 1 & 1 & 1\\ q & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$ hodnosť 2?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ p & 1 & 1 & 1\\ q & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & p & 1 & 1\\ 1 & q & -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & q & -3 & 3\\ \boxed{1} & 2 & -1 & 2\\ \boxed{1} & p & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & q & -3 & 3\\ 0 & 2-q & 2 & -1\\ 0 & p-q & 4 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & q\\ 0 & -1 & 2 & 2-q\\ 0 & \boxed{-2} & 4 & p-q\\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & q\\ 0 & -1 & 2 & 2-q\\ 0 & 0 & 0 & -4+p+q\\ 0 & 0 & 0 & -1+q\end{pmatrix}$$

Ak v poslednej matici položíme $p = 3$ a $q = 1$, potom matica má tvar v ktorom sú posledné dva riadky nulové

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(A) = 2$ pre $p = 3$ a $q = 1$.

Cvičenie 8.17. Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7/8 & 9/2 & -5/4\\ 3/8 & 3/2 & -1/4\\ 1/4 & 2 & -1/2\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A) < 3$, inverzná matica neexistuje.

(c) $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

(d) $A=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/4 & 2\\ -1/4 & 1\end{pmatrix}$.

(e) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A)<2$, inverzná matica neexistuje.

(f) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(g) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A)<3$, inverzná matica neexistuje.

(h) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ -1 & 2 & 0\\ -5/2 & 4 & -1/2\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.18. Dokážte matematickou indukciou formulu
$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}...\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

Východiskový indukčný predpoklad je $(A_1A_2)^{-1}=A_2^{-1}A_1^{-1}$. Predpokladajme, že formula platí pre n-1, $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_{n-1})^{-1}=\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}...\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$. Potom

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n)^{-1}=((\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_{n-1})\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_{n-1})^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}...\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

Cvičenie 8.19. Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ sú štvorcové matice rovnakého typu (n,n). Dokážte, že ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom zo vzťahu $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ vyplýva $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.
Z predpokladu regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$ vyplýva existencia inverznej matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, potom rovnicu $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ môžeme zľava vynásobiť inverznou maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AC})\Rightarrow\underbrace{(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{B}=\underbrace{(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{EC}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

Cvičenie 8.20. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové rovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\underbrace{\boldsymbol{AA}^{-1}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$$

Cvičenie 8.21. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové rovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^n=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$, každé kladné celé číslo n.
Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, v predchádzajúcom príklade bola dokázaná formula pre $n=2$, nech formula platí pre $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^{n-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{n-1}\boldsymbol{A}$, potom

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^n=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{n-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$$

Cvičenie 8.22. Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, ukážte, že $\left(\boldsymbol{A}^{n}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n}$.
Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, musíme dokázať, že táto formula platí aj pre hodnotu $n = 2$, $\left(\boldsymbol{A}^{2}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{2}$. Pretože inverzná matica existuje jednoznačne, potom predpokladajme, že platí $\left(\boldsymbol{A}^{2}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{2}$, správnosť tejto formuly dokážeme tak, že preveríme dosadením platnosť $A^{2}\left(A^{2}\right)^{-1}=AAA^{-1}A^{-1}=E$; podobne by sme dokázali aj $\left(A^{2}\right)^{-1}A^{2}=A^{-1}A^{-1}AA=E$.
Nech platí formula $\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n-1}$, potom

$$\left(\boldsymbol{A}^{n}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n},$$

čo bolo potrebné dokázať.

Cvičenie 8.23. Nech matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú blokovú štruktúru

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc}4 & 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 0 & -2 & 3\end{array}\right)\quad \text{a}\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & -1\\ \hline 3 & -2 & 0\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Potom ich formálne môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\quad \text{a}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$$

Vypočítajte $\boldsymbol{AB}$ a ukážte

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4\end{pmatrix}$$

Ukážte taktiež

$$\boldsymbol{B}^{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1^{T} & \boldsymbol{B}_3^{T}\\ \boldsymbol{B}_2^{T} & \boldsymbol{B}_4^{T}\end{pmatrix}$$

Dôkaz prvej formuly vyplýva priamo z definície súčinu matíc, druhá formula vyplýva priamo z definície transponovanej matice.

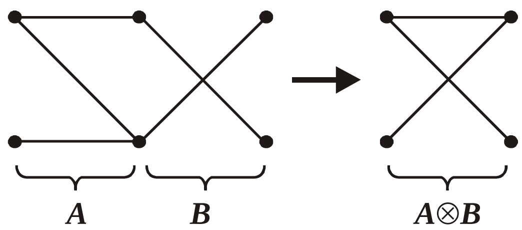
Cvičenie 8.24.
Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Tento výsledok môžeme jednoducho graficky znázorniť pomocou grafickej reprezentácie matíc A a B ako binárnych relácií (pozri obr. 8.6)



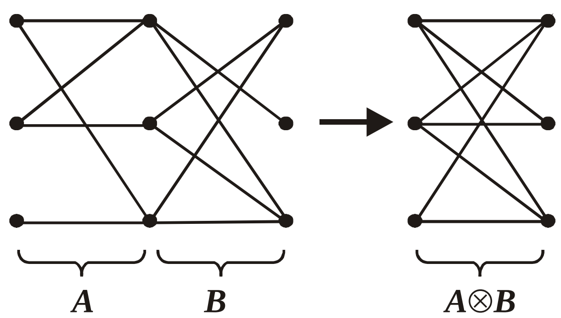
Cvičenie 8.25.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$



Cvičenie 8.26. Nech **A** je binárna matica, dokážte $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. Tieto vlastnosti vyplývajú zo skutočnosti, že operácie konjunkcie a disjunkcie sú idepotetné, čiže $x\wedge x=x$ a $x\vee x=x$.