

Príklad 1a. c^{4n}

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ c^{4n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$\varepsilon, cccc, cccccccc, cccccccccccc, \dots$

Riešenie:

$$\diamond G = (N, T, P, S)$$

$$\diamond N = \{S\}$$

$$\diamond T = \{c\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$S \rightarrow ccccS$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$\}$$

Odvodenie slov:

► ε

$$S \Rightarrow \varepsilon$$

► $cccc$

$$S \Rightarrow ccccS \Rightarrow cccc$$

► $cccccccc$

$$S \Rightarrow ccccS \Rightarrow ccccccccS \Rightarrow cccccccc$$

► $cccccccccccc$

$$S \Rightarrow ccccS \Rightarrow ccccccccS \Rightarrow ccccccccccccS \Rightarrow cccccccccccc$$

Príklad 1b. $c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}^+$

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$

Príklady slov z jazyka:

$cccc, cccccccc, cccccccccccc, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S\}$
- ◇ $T = \{c\}$
- ◇ $P = \{$
 $\quad S \rightarrow cccc \mid ccccS$
 $\quad \}$

Odvodenie slov:

- $cccc$

$$S \Rightarrow cccc$$

- $cccccccc$

$$S \Rightarrow ccccS \Rightarrow cccccccc$$

- $cccccccccccc$

$$S \Rightarrow ccccS \Rightarrow ccccccccS \Rightarrow cccccccccccc$$

Príklad 2. $a^i b^j$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$\varepsilon, a, b, ab, aab, abb, aaab, \dots$

Riešenie 1:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $\quad A \rightarrow aA \mid B$
 $\quad B \rightarrow bB \mid \varepsilon$
 $\quad \}$

Odvodenie slov:

► ε

$$A \Rightarrow B \Rightarrow \varepsilon$$

► ab

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aB \Rightarrow abB \Rightarrow ab$$

► bb

$$A \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow bb$$

► $aabbb$

$$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabbB \Rightarrow aabbbB \Rightarrow aabbb$$

Riešenie 2:

$$\diamond G = (N, T, P, S)$$

$$\diamond N = \{S\}$$

$$\diamond T = \{a, b\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow aS$$

$$S \rightarrow Sb$$

$$\}$$

Odvodenie slov:

$$\blacktriangleright \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \varepsilon$$

$$\blacktriangleright ab$$

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$\blacktriangleright bb$$

$$S \Rightarrow Sb \Rightarrow Sbb \Rightarrow bb$$

$$\blacktriangleright aabbb$$

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaSbbb \Rightarrow aabbb$$

Príklad 3. Prvé dve písmená rovnaké

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ w \mid \text{prvé dve písmená rovnaké} \mid w \in \{a, b\}^* \}$

Príklady slov z jazyka:

$aa, bb, aab, aaab, bba, bbba, bbaab, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, X\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $S \rightarrow aaX \mid bbX$
 $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► $aaba$

$$S \Rightarrow aaX \Rightarrow aabX \Rightarrow aabaX \Rightarrow aaba$$

► $bbbba$

$$S \Rightarrow bbX \Rightarrow bbbbX \Rightarrow bbbbba$$

Príklad 4. Práve jedna 0 na posledných dvoch miestach

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ w \mid \text{práve jedna 0 na posledných dvoch miestach} \mid w \in \{0,1\}^* \}$

Príklady slov z jazyka:

01, 10, 001, 101, 010, 110, 0001, 1101, 0010, 1110, ...

Riešenie 1:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{0, 1\}$
- ◇ $P = \{$
 $A \rightarrow B01 \mid B10$
 $B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► 0110

$$A \Rightarrow B10 \Rightarrow B0110 \Rightarrow 0110$$

► 1101

$$A \Rightarrow B01 \Rightarrow 1B01 \Rightarrow 11B01 \Rightarrow 1101$$

Riešenie 2:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{0, 1\}$
- ◇ $P = \{$
 $A \rightarrow B01 \mid B10$
 $B \rightarrow B1 \mid B0 \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► 0110

$$A \Rightarrow B10 \Rightarrow B0110 \Rightarrow 0110$$

► 1101

$$A \Rightarrow B01 \Rightarrow B101 \Rightarrow B1101 \Rightarrow 1101$$

Riešenie 3:

$$\diamond G = (N, T, P, A)$$

$$\diamond N = \{A\}$$

$$\diamond T = \{0, 1\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$A \rightarrow 1A \mid 0A \mid 10 \mid 01 \\ \}$$

Odvodenie slov:

► 0110

$$A \Rightarrow 0A \Rightarrow 01A \Rightarrow 0110$$

► 1101

$$A \Rightarrow 1A \Rightarrow 11A \Rightarrow 1101$$

Príklad 5. Obsahuje podslovo ab

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ w = uabv \mid u, v \in \{a, b\}^* \}$

Príklady slov z jazyka:

$ab, aab, bab, aba, bbaba, aaabbb, \dots$

Riešenie 1:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $A \rightarrow BabB$
 $B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► $bbaba$

$A \Rightarrow BabB \Rightarrow bBabB \Rightarrow bbBabB \Rightarrow bbabB \Rightarrow bbabaB \Rightarrow bbaba$

► $aaabbb$

$A \Rightarrow BabB \Rightarrow BabbB \Rightarrow BabbB \Rightarrow BabbB \Rightarrow aBabbB \Rightarrow aaBabbB \Rightarrow aaabbb$

Riešenie 2:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, T\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $S \rightarrow aS \mid bS \mid abT$
 $T \rightarrow aT \mid bT \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► *bbaba*

$$S \Rightarrow bS \Rightarrow bbS \Rightarrow bbabT \Rightarrow bbabaT \Rightarrow bbaba$$

► *aaabbb*

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaabT \Rightarrow aaabbT \Rightarrow aaabbbT \Rightarrow aaabbb$$

Príklad 6. Záporné čísla deliteľné 5

Zadanie:

■ Napíš gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ w \mid \text{záporné čísla deliteľné } 5 \}$

Príklady slov z jazyka:

-5, -10, -15, -20, -25, -30, -125, ...

Riešenie 1:

$$\diamond G = (N, T, P, A)$$

$$\diamond N = \{A, B, C\}$$

$$\diamond T = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$A \rightarrow -B0 \mid -B5 \mid -5$$

$$B \rightarrow 1C \mid 2C \mid 3C \mid \dots \mid 9C$$

$$C \rightarrow \varepsilon \mid 0C \mid 1C \mid 2C \mid 3C \mid \dots \mid 9C$$

$$\}$$

Odvodenie slov:

► -35

$$A \Rightarrow -B5 \Rightarrow -3C5 \Rightarrow -35$$

► -2940

$$A \Rightarrow -B0 \Rightarrow -2C0 \Rightarrow -29C0 \Rightarrow -294C0 \Rightarrow -2940$$

Riešenie 2:

$$\diamond G = (N, T, P, S)$$

$$\diamond N = \{S, X\}$$

$$\diamond T = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$S \rightarrow -1X \mid -2X \mid -3X \mid \dots \mid -9X \mid -5$$

$$X \rightarrow 0X \mid 1X \mid 2X \mid \dots \mid 9X \mid 0 \mid 5$$

$$\}$$

Odvodenie slov:

► -35

$$S \Rightarrow -3X \Rightarrow -35$$

► -2940

$$S \Rightarrow -2X \Rightarrow -29X \Rightarrow -294X \Rightarrow -2940$$

Príklad 7. $a^n b^n$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots$

Riešenie:

$$\diamond G = (N, T, P, A)$$

$$\diamond N = \{A\}$$

$$\diamond T = \{a, b\}$$

$$\diamond P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \varepsilon \mid aAb \\ \end{array} \right\}$$

Odvodenie slov:

► ab

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow ab$$

► $aabb$

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAbb \Rightarrow aabb$$

Príklad 8a. $a^{n+1}b^n$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^{n+1}b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$a, aab, aaabb, aaaabbb, \dots$

Riešenie:

$$\diamond G = (N, T, P, A)$$

$$\diamond N = \{A\}$$

$$\diamond T = \{a, b\}$$

$$\diamond P = \{ \\ A \rightarrow aAb \mid a \\ \}$$

Odvodenie slov:

► aab

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aab$$

► $aaabb$

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAbb \Rightarrow aaabb$$

Príklad 8b. $a^{3n+1}b^n$

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^{3n+1}b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$a, aaaab, aaaaaabb, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $\quad A \rightarrow aaaAb \mid a$
 $\quad \}$

Odvodenie slov:

► $aaaab$

$$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaab$$

► $aaaaaaabb$

$$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaaaaAbb \Rightarrow aaaaaaabb$$

Príklad 8c. $a^{3n+1}b^{n+3}$

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^{3n+1}b^{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$abbb, aaaabbbb, aaaaaabbbbb, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $\quad A \rightarrow aaaAb \mid abbb$
 $\quad \}$

Odvodenie slov:

► $aaaabbbb$

$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaabbbb$

► $aaaaaaabbbbb$

$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaaaAbb \Rightarrow aaaaaabbbbb$

Príklad 8d. $a^{3n+2}cb^{n+3}$

Zadanie:

- Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^{3n+2}cb^{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$aacbbb, aaaaacbbbb, aaaaaaacbbbbb, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A\}$
- ◇ $T = \{a, b, c\}$
- ◇ $P = \{$
 $\quad A \rightarrow aacbbb \mid aaaAb$
 $\quad \}$

Odvodenie slov:

► $aaaaacbbbb$

$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaaacbbbb$

► $aaaaaaacbbbbb$

$A \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaaaaAbb \Rightarrow aaaaaaacbbbbb$

Príklad 9a. $a^x b^y a^y b^x$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^x b^y a^y b^x \mid x, y \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

$\varepsilon, ba, ab, abab, abbaab, aabbaabb, \dots$

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $A \rightarrow aAb \mid B$
 $B \rightarrow bBa \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► $abbaab$

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aBb \Rightarrow abBab \Rightarrow abab$$

► $aabbaabb$

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAbb \Rightarrow aaBbb \Rightarrow aabBabb \Rightarrow aabbBaabb \Rightarrow aabbaabb$$

Príklad 9b. $a^{x+3}b^{2y}a^yb^x$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ a^{x+3}b^{2y}a^yb^x \mid x, y \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

ε , aaa , $aaaab$, $aaabba$, $aaaabbab$, \dots

Riešenie 1:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $A \rightarrow aAb \mid aaaB$
 $B \rightarrow bbBa \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► $aaabba$

$$A \Rightarrow aaaB \Rightarrow aaabbBa \Rightarrow aaabba$$

► $aaaabbab$

$$A \Rightarrow aAb \Rightarrow aaaaBb \Rightarrow aaaabbBab \Rightarrow aaaabbab$$

Riešenie 2:

- ◇ $G = (N, T, P, S)$
- ◇ $N = \{S, T, U\}$
- ◇ $T = \{a, b\}$
- ◇ $P = \{$
 $S \rightarrow aaaT$
 $T \rightarrow aTb \mid U \mid \varepsilon$
 $U \rightarrow bbUa \mid \varepsilon$
 $\}$

Odvodenie slov:

► $aaabba$

$$S \Rightarrow aaaT \Rightarrow aaaU \Rightarrow aaabbUa \Rightarrow aaabba$$

► $aaaabbab$

$$S \Rightarrow aaaT \Rightarrow aaaaTb \Rightarrow aaaaUb \Rightarrow aaaabbUab \Rightarrow aaaabbab$$

Príklad 10. $0^x 1^{3x} 0^y 1^{y+5}$

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ 0^x 1^{3x} 0^y 1^{y+5} \mid x, y \in \mathbb{N} \}$

Príklady slov z jazyka:

11111, 01110111111, 00111111001111111, ...

Riešenie:

- ◇ $G = (N, T, P, A)$
- ◇ $N = \{A, B, C\}$
- ◇ $T = \{0, 1\}$
- ◇ $P = \{$
 - $A \rightarrow BC$
 - $B \rightarrow 0B111 \mid \varepsilon$
 - $C \rightarrow 0C1 \mid 11111$ $\}$

Odvodenie slov:

► 01110111111

$A \Rightarrow BC \Rightarrow 0B111C \Rightarrow 0111C \Rightarrow 01110C1 \Rightarrow 01110111111$

► 00111111001111111

$A \Rightarrow BC \Rightarrow 0B111C \Rightarrow 00B11111C \Rightarrow 00111111C \Rightarrow 001111110C1 \Rightarrow 0011111100C11$
 $\Rightarrow 00111111001111111$

Príklad 11. ww^R

Zadanie:

■ Napíšte gramatiku, ktorá generuje jazyk $L = \{ ww^R \}$

Príklady slov z jazyka:

ε , aa , bb , $abba$, $baab$, $abaaba$, $bbabbabb$, ...

Riešenie:

$$\diamond G = (N, T, P, S)$$

$$\diamond N = \{S\}$$

$$\diamond T = \{a, b\}$$

$$\diamond P = \{$$

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon$$

$$\}$$

Odvodenie slov:

► $abba$

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abba$$

► $bbabbabb$

$$S \Rightarrow bSb \Rightarrow bbSbb \Rightarrow bbaSabb \Rightarrow bbabSbabb \Rightarrow bbabbabb$$