1 Цель

Требуемый функционал и примерное описание интерфейса. Программа должна иметь расчетный модуль, написанный на языке Haskell, который расчитывает значения семейства функций Бесселя: функции Бесселя, функции Неймана, функций Ханкеля первого и второго рода.

Программа должна позволять вводить необходимый тип функции, ее порядок и аргумент, и выводить для них значение функции с точностью не хуже десяти знаков после запятой для порядков функции 0, 1 и 2, и с точностью не хуже пяти знаков после запятой для остальных порядков для проверки по таблицам.

Также программа должна позволять вводить интервалы значений аргумента и порядка для построения графиков, в том числе двухмерных. При построении двухмерных графиков серии значений для изменяющегося аргумента и постоянного порядка разделяются пустыми строками. Пример:

```
#Порядок  Аргумент  Значение
   0         0         0
   0         1         2
   0         2         3

   1         0         1
   1         1         3
   1         2         4
```

Все далее приведенные формулы будут иметь ссылку на таковые из справочника по специальным функциям под редакцией Абрамовица.

2 Порядок

Предпочтительный порядок воплощения требуемых функций:

1. функция Бесселя, 9.1.10.
2. функция Неймана, 9.1.11 ($\nu \in Z$), иначе 9.1.2.
3. функции Ханкеля, 9.1.3, 9.1.4.

3 Функция Бесселя

Для воплощения функции Бесселя используется базовая формула:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{1}$$

Эта формула работает для $\nu \in R, \quad \nu \geq 0, \quad z \in C, \quad |z| \leq 25$, но ограничения на порядок — строгие, а ограничения на аргумент возникают из-за точности используемых в расчетах чисел, чем выше точность чисел, поддерживаемая вычислителем, тем большие аргументы в этой формуле можно использоавать. Число 25 является примерным, зависит от качества воплощения.

Здесь используется гамма-функция, ее описание будет позже отдельно.

Асимптотика. Для увеличения диапазона поддерживаемых аргументов требуется использовать асимптотические продолжения при больших значениях аргумента: 9.2.1 или 9.2.5 (вместе с 9.2.9 и 9.2.10).

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|Im(z)|} O(|z|^{-1})) \right\} \qquad (|arg(z)| < \pi). \tag{2}$$

Эта формула проще, но начинает работать достаточно хорошо только с больших аргументов. При некачественном воплощении базовой формулы и использовании этой формулы может возникать видимый скачок значения на графике функции, что недопустимо. В таком случае потребуется использование

$$\begin{aligned}
&J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(P(\nu, z) \cos(\xi) - Q(\nu, z) \sin(\xi)\right) \qquad (|arg \quad z| < \pi); \\
&P(\nu, z) \sim 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-16)(\mu-25)}{4!(8z)^4} - ... \\
&Q(\nu, z) \sim \frac{\mu-1}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-16)}{3!(8z)^3} + ... \\
&\mu = 4\nu^2, \qquad \xi = z - \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\right)\pi.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рекуррентные выражения. При запросе функций отрицательных порядков базовая формула не используется, для расчета требуется свести функцию к сумме функций большего порядка. Предлагается использовать рекуррентные выражения 9.1.27

$$\begin{aligned}
&J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z); \\
&J_\nu(z) = \frac{2(\nu+1)}{z} J_{\nu+1}(z) - J_{\nu+2}(z).
\end{aligned} \tag{4}$$

Это выражение нужно использовать рекурсивно до тех пор, пока порядки используемых функций не станут неотрицательными.

Гамма-функция. Для реализации функций Бесселя нецелых порядков требуется воплотить Гамма-функцию, она — близкий родственник факториала, но является его обобщением по области определения и значений с множества натуральных чисел плюс ноль на множество действительных чисел. Воплощение предлагается выполнить по формулам 6.1.15 и 6.1.34.

$$\begin{aligned} &\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1); \\ &\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < \infty). \end{aligned} \tag{5}$$

На самом деле, применение второй формулы лучше ограничить интервалом $zin[1,2]$, приводя остальные значения к указанным через первую — рекуррентную формулу. Значения c_k:

$\#k$	c_k
1	1.00000 00000 000000
2	0.57721 56649 015329
3	-0.65587 80715 202538
4	-0.04200 26350 340952
5	0.16653 86113 822915
6	-0.04219 77345 555443
7	-0.00962 19715 278770
8	0.00721 89432 466630
9	-0.00116 51675 918591
10	-0.00021 52416 741149
11	0.00012 80502 823882
12	-0.00002 01348 547807
13	-0.00000 12504 934821
14	0.00000 11330 272320
15	-0.00000 02056 338417
16	0.00000 00061 160950
17	0.00000 00050 020075
18	-0.00000 00011 812746
19	0.00000 00001 043427
20	0.00000 00000 077823
21	-0.00000 00000 036968
22	0.00000 00000 005100
23	-0.00000 00000 000206
24	-0.00000 00000 000054
25	0.00000 00000 000014
26	0.00000 00000 000001

4 Функция Неймана

Для реализации функции Неймана в качестве базовых используются две формулы: 9.1.2 и 9.1.11, первая из них гораздо проще, но может применяться только для нецелых порядков.

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}. \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Y_n(z) = -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \\ -\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\}\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}. \end{aligned} \tag{7}$$

Эти формулы опять же работают для неотрицательных порядков и небольших аргументов, так что требуются асимптотика и рекуррентные соотношения.

Асимптотика. Здесь формулы 9.2.2 или 9.2.6 (9.2.9 и 9.2.10).

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|Im \quad z|}O(|z|^{-1}))\right\} \qquad (|arg \quad z| < \pi). \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(P(\nu,z)\sin(\xi) + Q(\nu,z)\cos(\xi)\right) \qquad (|arg \quad z| < \pi); \\ &P(\nu,z) \sim 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-16)(\mu-25)}{4!(8z)^4} - ... \\ &Q(\nu,z) \sim \frac{\mu-1}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-16)}{3!(8z)^3} + ... \\ &\mu = 4\nu^2, \qquad \xi = z - \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\right)\pi. \end{aligned} \tag{9}$$

Рекуррентные выражения

$$\begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}Y_\nu(z); \\ Y_\nu(z) = \frac{2(\nu+1)}{z}Y_{\nu+1}(z) - Y_{\nu+2}(z). \end{aligned} \tag{10}$$

Это выражение нужно использовать рекурсивно до тех пор, пока порядки используемых функций не станут неотрицательными.

5 Функции Ханкеля

Для расчета функций Ханкеля требуется использовать формулы 9.1.3 и 9.1.4.

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z); \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z); \end{aligned} \tag{11}$$

6 Итог

Про необходимые выражения для расчета семейства рассказано, порядок указан. Эти выражения не являются совсем достаточными для полностью точного расчета в рамках чисел двойной точности, но для лабораторной — достаточны.

Про способ расчета — потом.