



Nome

Número

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3 valores] Considere o seguinte subconjunto de \mathbb{R}^2

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 16 \text{ e } |y| \geq 1\}.$$

- a) Apresente um esboço do conjunto A ;
- b) Defina analítica e graficamente o interior, o derivado e a fronteira de A ;
- c) Justifique que A não é aberto.

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}.$$

- a) Identifique e esboce as curvas de nível 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, de f ;
- b) Identifique a superfície definida pelo gráfico de f ;
- c) Apresente uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 3)$.

Questão 3. [2 valores] Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2};$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}.$

Questão 4. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Justifique que f é contínua em \mathbb{R}^2 ;
- b) Indique, caso exista, o valor de $f_x(0, 0)$ e de $f_y(0, 0)$;
- c) Calcule, ou justifique que não existe, $Df((0, 0); (1, 1))$;
- d) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere $A \subseteq \mathbb{R}^2$, um conjunto fechado. Então:

- ☐ $\bar{A} \neq A'$;
 ☐ $\overset{\circ}{A} \neq \bar{A}$;
 ☐ $\partial A \subseteq \bar{A}$;
 ☐ $\partial A \subseteq A'$.

Questão 2. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e os subconjuntos de \mathbb{R}^2 que se seguem:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabendo que cada um dos conjuntos A e B está contido numa curva de nível da função f , qual das seguintes situações acontece:

- ☐ $f(1, 0) \neq f(-1, 0)$;
 ☐ $f(1, 1) = f(-1, 1)$;
- ☐ $f(0, 0) = 0$;
 ☐ A função f é descontínua em $(0, 0)$.

Questão 3. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ Se f admite derivadas parciais em \mathbb{R}^2 , então f é derivável em $(0, 0)$;
 ☐ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$;
- ☐ Se f admite derivadas parciais contínuas em \mathbb{R}^2 , então f é contínua em $(0, 0)$;
 ☐ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções tais que $\nabla f(x, y) = (x^2, x + 3y)$ e $g(x, y) = (f(x, y), f(x, y))$. Então $Jg(x, y)$ é a matriz:

- ☐ $\begin{pmatrix} x^2 & x + 3y \\ x^2 & x + 3y \end{pmatrix}$;
 ☐ $\begin{pmatrix} x^2 & x + 3y \\ x + 3y & x^2 \end{pmatrix}$;
- ☐ $\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ x + 3y & x + 3y \end{pmatrix}$;
 ☐ $\begin{pmatrix} x + 3y & x^2 \\ x + 3y & x^2 \end{pmatrix}$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

Questão 1. Se $A = \mathbb{Z} \times [0, 1]$ então o conjunto dos pontos isolados de A é não vazio.

☐ ☐

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 2$ então $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x^2, y^2) = 4$.

☐ ☐

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x, y) - (1, 2)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - 3| < \varepsilon,$$

então f é contínua em $(1, 2)$.

☐ ☐

Questão 4. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $f_x(a, b) = f_y(b, a)$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

☐ ☐