



Exercício 7.1 Seja \mathcal{R} o retângulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Calcule os seguintes integrais:

- a) $\iint_{\mathcal{R}} (x^3 + y^2) d(x, y);$ c) $\iint_{\mathcal{R}} (xy)^2 \cos x^3 d(x, y);$
b) $\iint_{\mathcal{R}} ye^{xy} d(x, y);$ d) $\iint_{\mathcal{R}} \ln((x+1)y) d(x, y).$

Exercício 7.2 Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:

- a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx;$ c) $\int_0^1 \int_1^{e^y} (x+y) dx dy;$
b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx;$ d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx.$

Exercício 7.3 Calcule $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) d(x, y)$, usando as duas possíveis ordens de integração, quando f e \mathcal{D} são:

- a) $f(x, y) = xy$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\};$
b) $f(x, y) = x \sin(x+y)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq 1\};$
c) $f(x, y) = e^{x+y}$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\};$
d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$

Exercício 7.4 Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração em cada um dos seguintes integrais:

- a) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx;$ b) $\int_{-1}^1 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx;$
c) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx dy;$ d) $\int_{-3}^2 \int_{-4+y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy;$
e) $\int_{-2}^2 \int_{-4+y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy;$ f) $\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^x f(x, y) dy dx;$
g) $\int_{-2}^2 \int_0^{-|y|+2} f(x, y) dx dy;$ h) $\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy;$
i) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} f(x, y) dy dx;$
j) $\int_{-2}^0 \int_0^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_0^{-y+2} f(x, y) dx dy.$

Exercício 7.5 Representa graficamente o conjunto \mathcal{D} e calcule, recorrendo a integrais duplos, a sua área:

- a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\};$
- b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}.$

Exercício 7.6 Determine a área limitada pelas curvas definidas por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = 0$.

Exercício 7.7 Usando integrais duplos obtenha as expressões das áreas da circunferência de raio r e da elipse de semieixos a e b .

Exercício 7.8 Calcule o volume dos sólidos limitados

- a) pelos planos definidos por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$ e pela superfície definida por $z = x^2 + y^4$;
- b) pela superfície definida por $z = \sin y$ e pelos planos definidos por $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $z = 0$;
- c) pelo parabolóide definido por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano definido por $z = 0$.

Exercício 7.9 Seja $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

- a) Calcule $\iint_{\mathcal{D}} (x + y) d(x, y)$.
- b) Calcule o integral da alínea anterior, fazendo a mudança de variáveis $x = u + v$, $y = u - v$.

Exercício 7.10 Calcule os seguintes integrais, usando uma mudança de variáveis adequada:

- a) $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) d(x, y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - y \leq 0, -1 \leq x + y \leq 0\}$;
- b) $\iint_{\mathcal{D}} (x - y) d(x, y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq 3 - x, 2x - 2 \leq y \leq 2x\}$.

Exercício 7.11 Calcule os seguintes integrais, usando coordenadas polares.

- a) $\int_0^{2R} \int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$;
- b) $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$.

Exercício 7.12 Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Exercício 7.13 Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^3 d(x, y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Exercício 7.14 Calcule, usando coordenadas polares, o volume dos sólidos limitados por:

- a) $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$;
- b) $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.