Para v.a contínua X $\quad f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } -0,1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{se c.c.} \end{cases}$

$$F(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx = 0, & \text{se } c < -0,1 \\ \int_{-\infty}^{-0,1} 0\,dx + \int_{-0,1}^{c} 10\,dx = 10(c+0,1), & \text{se } -0,1 \leq c \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{-0,1} 0\,dx + \int_{-0,1}^{0} 10\,dx + \int_{0}^{c} 0\,dx = 1, & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

Folha 2

1)

a)

i) X: "v.a que representa o número de face ímpares obtidas"

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

$F(c): \mathbb{R} \to [0,1]$

$c \to F(c)$

$$P(X \leq c) \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 1/4, & c \geq 0 \wedge c < 1 \\ 3/4, & c \geq 1 \wedge c < 2 \\ 1, & c \geq 2 \end{cases}$$

ii) X: "v.a que representa o número de face ímpares obtida"

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases} \qquad P(X \leq c) \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 1/4, & c \geq 0 \wedge c < 1 \\ 3/4, & c \geq 1 \wedge c < 2 \\ 1, & c \geq 2 \end{cases}$$

iii) X = "v.a que representa o máximo da face obtida"

$$X \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{array} \right.$$

$$P(X \leq c) \begin{cases} 1/36 & c \leq 1 \\ 4/36 & c > 1 \wedge c \leq 2 \\ 9/36 & c > 2 \wedge c \leq 3 \\ 16/36 & c > 3 \wedge c \leq 4 \\ 25/36, & c > 5 \wedge c \leq 5 \\ 1 & c \geq 6 \end{cases}$$

iv) X: "v.a que representa o modulo da diferença da face obtida".

$$X \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \\ \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} & \frac{6}{36} \end{array} \right.$$

$$P(X \leq c) \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 6/36, & 0 \leq c < 1 \\ 16/36, & 1 \leq c < 2 \\ 24/36, & 2 \leq c < 3 \\ 30/36, & 3 \leq c < 4 \\ 34/36, & 4 \leq c < 5 \\ 1, & 5 \leq c \end{cases}$$

b)

i) A probabilidade de sair pelo menos uma face par é de $\frac{3}{4}$.

ii) A probabilidade de não sair qualquer face par é de $\frac{1}{4}$

iii) A probabilidade de todas as faces serem inferiores ou iguais a 3 é de $\frac{1}{4}$.

iv) A probabilidade de saírem duas faces iguais é de $\frac{1}{6}$.

v) A probabilidade de saírem duas faces diferentes é de $\frac{5}{6}$.

2)

a) $0{,}05 + a + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}3 + 2a = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a = 0{,}3 \Leftrightarrow a = 0{,}1$

R: O valor de a é 0,1.

b)

i) A probabilidade de se venderem pelo menos 3 embalagens é de 0,65.

ii) A probabilidade de venderem mais de 3 embalagens é de 0,5.

iii) A probabilidade de venderem no máximo 3 embalagens é de 0,5.

c)

$$P(X \leq c) = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 0{,}05, & 0 \leq c < 1 \\ 0{,}15, & 1 \leq c < 2 \\ 0{,}35, & 2 \leq c < 3 \\ 0{,}5, & 3 \leq c < 4 \\ 0{,}8, & 4 \leq c < 5 \\ 1, & 5 \leq c \end{cases}$$

d)

i) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}8} = 0{,}1875$

R: A probabilidade de se terem vendido menos de 2 embalagens é de 0,1875

ii) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625$

R: A probabilidade de se terem vendido mais de duas embalagens é de 0,5625

iii) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375$

R: A probabilidade de se terem vendido exatamente 4 embalagens é de 0,375

4)

a) $\frac{1}{4}(6-4) = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

$4a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow 4a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$

R: Fica desta forma demonstrado que a é igual a $\frac{1}{8}$.

b) i) $P\left(X < \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

ii) $P\left(X > \frac{3}{2}\right) = \left(4 - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{16} + \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$

iii) $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{16}$

iv) $P(3 < X \leq 5) = (4-3) \times \frac{1}{8} + (5-4) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

v) $P(3 \leq X \leq 5) = \frac{3}{8}$

vi) $P(3 \leq X < 5) = \frac{3}{8}$

c) i) $\int_{1,5}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,dx =$

$= \left.\frac{x}{8}\right|_{1,5}^{4} + \left.\frac{x}{4}\right|_{4}^{6} = \frac{4}{8} - \frac{1,5}{8} + \frac{6}{4} - 1 = 0,8125$

R: A probabilidade de o cliente demorar mais de 1,5 minutos a ser atendido é de 0,8125.

ii) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0,575}{0,8125} = 0,7077$

$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = 0,575$

R: A probabilidade de esperar pelo menos mais um minuto é de 0,7077.

3)

a) $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}^2$

b)

i)

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
cara, cara	2	0
coroa, cara	1	1
cara, coroa	1	1
coroa, coroa	0	2

ii)

$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases} \qquad Y \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$

$$P(X \leq c)\begin{cases} 0, & c<0 \\ 1/4, & 0\leq c<1 \\ 3/4 & 1\leq c<2 \\ 1 & 2\leq c \end{cases} \qquad P(Y\leq c)\begin{cases} 0, & c<0 \\ 1/4, & 0\leq c<1 \\ 3/4, & 1\leq c<2 \\ 1, & 2<c \end{cases}$$

R: Como a função massa de probabilidade de X é igual à de Y, podemos concluir que ambas possuem a mesma função de distribuição.

5)

a) $\int_1^3 Kx \, dx = \frac{Kx^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{9K}{2} - \frac{K}{2} = \frac{8K}{2} = 4K$

$4K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{8}$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx = 0, & c\leq 1 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{c} \frac{x}{4} = \frac{c^2-1}{8}, & 1\leq c\leq 3 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{3} \frac{x}{4}\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = 1, & c>3 \end{cases}$$

b) 1 h 30 min = 1,5 = $\frac{3}{2}$

$\int_{3/2}^{3} f(x)\,dx = \int_{3/2}^{3} \frac{x}{4}\,dx = \frac{9}{8} - \frac{9}{32} = 0,84$

R: A probabilidade de a bactéria viver mais de 1h 30 min é de 0,84.

ii) A probabilidade de sobreviver pelo menos 1h 30 min é de 0,84.

iii) $\int_{5/4}^{2} f(x)\,dx = \frac{x^2}{8}\Big|_{5/4}^{2} = \frac{4}{8} - \frac{25}{128} = 0,3$

R: A probabilidade de sobreviver durante esse período de tempo é de 0,3.

c) A = viver 1h 30 min $\quad P(A) = \left(\frac{\frac{3}{2}}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} = 0,14$

$$\int_2^3 \frac{x}{4}\,dx = \left.\frac{x^2}{8}\right|_2^3 = \frac{9}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

$1 - 0,14 = 0,86$

$0,86 - 1$

$5/8 - x \qquad x = 0,72$

R: A probabilidade de a bactéria viver pelo menos mais 30 minutos é de 0,72.

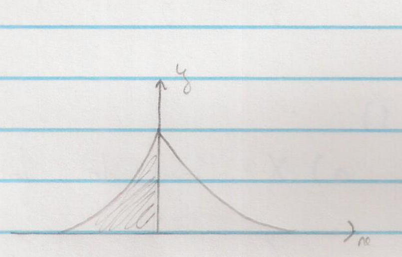
6)

a) $\int \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int -\lambda e^{\lambda x}\,dx = -e^{\lambda x} + C$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx = 0, & c < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{Kc} + 1, & c \geq 0 \end{cases}$$

7)

a) $\int K e^{x}\,dx = K\int e^{x}\,dx = Ke^{x} + C$



$$\int_{-\infty}^{0} K e^{x}\,dx = Ke^{0} - Ke^{-\infty} = K - 0 = K$$

$K + K = 1 \Leftrightarrow 2K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} \frac{e^{x}}{2}\,dx = \frac{e^{c}}{2}, & c \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x}}{2}\,dx + \int_0^c \frac{1}{2e^{x}}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{c}} + \frac{1}{2e^{0}} = 1 - \frac{1}{2e^{c}}, & c > 0 \end{cases}$$

R: O valor de K é $\frac{1}{2}$.

b)

i) $P(X<0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{2}\,dx = \frac{e^0}{2} - \frac{e^{-\infty}}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

ii) $P(X>0) = P(X\geq 0) = P(\overline{X<0}) = 1 - P(X\geq 0)$

$\frac{1}{2} = 1 - P(X \geq 0) \iff P(X\geq 0) = \frac{1}{2}$

iii) $P(0<X<1) = \int_{0}^{1} \frac{1}{2e^x}\,dx = \frac{-1}{2e^1} + \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$

iv) $P(0\leq X \leq 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$

v) $P(X^2<1) = P(-1<X<1) = \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2e^x}\,dx =$

$= \frac{e^0}{2} - \frac{e^{-1}}{2} + \left(\frac{-1}{2e^1} + \frac{1}{2e^0}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

1)

a) X = "Soma das faces obtidas nos lançamentos"

$$X: \begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{cases}$$

$$P(X\leq c) \begin{cases} 0, & c<2 \\ 1/36, & 2\leq c<3 \\ 1/12, & 3\leq c<4 \\ 1/6, & 4\leq c<5 \\ 5/18, & 5\leq c<6 \\ 5/12, & 6\leq c<7 \\ 7/12, & 7\leq c<8 \\ 3/18, & 8\leq c<9 \\ 5/6, & 9\leq c<10 \\ 11/12, & 10\leq c<11 \\ 35/36, & 11\leq c<12 \\ 1, & 12\leq c \end{cases}$$

R. A probabilidade da soma das faces ser inferior ou igual a 4 é de 1/6.