Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações MIE Informática

Análise

FOLHA 1 — 2018'19

$\mathbb{R}^n$: Generalidades & Noções Topológicas

1. Considere o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ e, nele, dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.
Usando as propriedades que definem um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e a definição $||x|| = +\sqrt{x \cdot x}$,

(a) verifique que

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = 2\left(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2\right) \qquad \text{(lei do paralelogramo).}$$

(b) com $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vetores não nulos, verifique que existe um ângulo $\boldsymbol{\theta}$, compreendido entre $\boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{\pi}$, tal que

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||}.$$

2. Verifique que a função $\boldsymbol{d}$ definida por $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \\ 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$, definida em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

(a) é uma distância.

(b) não permite definir, em $\mathbb{R}^2$, uma norma tal que $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||$.
Sugestão: Observe que teria de ser $||\boldsymbol{x}|| = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = 1, \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

3. Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Complete o seguinte quadro:

Conjunto $\mathcal{S}$	int $\mathcal{S}$	fr $\mathcal{S}$	$\mathcal{S}'$
Qualquer conjunto finito			
Todos os pontos/vetores de coordenadas inteiras			
Todos os pontos/vetores de coordenadas racionais			
$\mathbb{R}^n$			
$\emptyset$			

4. Em cada alínea, determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $\mathcal{A}$. Pronuncie-se ainda sobre se $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado ou aberto:

(a) $\mathcal{A} = [0,1] \times [2,3]$ (b) $\mathcal{A} = [0,1] \times]2,3[$ (c) $\mathcal{A} =]0,1[\times]2,3[$

5. Em cada alínea, determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $\mathcal{B}$. Pronuncie-se ainda sobre se $\mathcal{B}$ é um conjunto fechado ou aberto:

(a) $\mathcal{B} = \{-1\} \times [0,1]$

(b) $\mathcal{B} = ([-1,1] \times]0,3[) \cup \{(4,4)\}$

(c) $\mathcal{B} = ([0,1] \times [1,2]) \cup ([1,2] \times [2,3])$