Universidade do Minho — LEI
Dep. Matemática — 2021/2022

Lógica

2º teste — 26 de maio de 2022 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de função binário g. Dê exemplo de um L-termo t_1 e de um L-termo t_2 tais que: $\mathsf{g}(x_1, \mathsf{g}(x_1, x_2))[t_1/x_1] = \mathsf{g}(x_0, x_2)[t_2/x_2]$.

   Resposta:

2. Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de relação binário R. Dê exemplo de uma L-fórmula φ que tenha no máximo 4 subfórmulas e tal que $\mathrm{LIV}(\varphi) = \{x_0, x_1\}$ e $\mathrm{LIG}(\varphi) = \{x_0\}$.

   Resposta:

3. Seja φ a L_{Arit}-fórmula: $\exists x_0 (x_0 = x_1) \wedge \neg(x_0 = x_1)$. Determine a L_{Arit}-fórmula $\varphi[\mathsf{s}(x_0)/x_0]$.

   Resposta:

Nas questões 4., 5. e 6. deste grupo, considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{g}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ tal que:

$\overline{\mathsf{c}} = 2$ — $\overline{\mathsf{g}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathsf{g}}(m, n) = 3m + n$

$\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\overline{\mathsf{f}}(n) = n^2$ — $\overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é divisível por } 6\}$

$\overline{\mathsf{R}} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \text{ e } n \text{ têm o mesmo resto na divisão inteira por } 3\}$

4. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i-2$. Indique o valor de: $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x_1, \mathsf{f}(\mathsf{c})))\,[a]_E$.

   Resposta:

5. Dê exemplo de uma atribuição a' em E tal que $\mathsf{P}(\mathsf{f}(x_0)) \to \forall x_0\, \mathsf{R}(x_0, \mathsf{c})\ [a']_E = 0$.

   Resposta:

6. Indique uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: O resto da divisão inteira do quadrado de um qualquer inteiro por 3 não é 2.

   Resposta:

7. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$. Dê exemplo de uma L-estrutura E cujo domínio seja $\{1, 2\}$ e tal que E seja um modelo de $\{\exists x_0 \mathsf{P}(x_0), \neg \mathsf{P}(\mathsf{c})\}$.

   Resposta:

8. Seja L um tipo de linguagem com uma constante c e um símbolo de relação binário R e seja $\Gamma = \{\mathsf{R}(\mathsf{c}, x_0), \exists x_0\, \mathsf{R}(x_0, \mathsf{c}), \mathsf{R}(\mathsf{c}, \mathsf{c})\}$. Dê exemplo de $\varphi \in \Gamma$ tal que: $\forall x_0\, \mathsf{R}(x_0, x_0) \not\models \varphi$.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 6 questões deste grupo na folha de exame, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Mostre que $\Gamma = \{p_0 \to \bot, p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

2. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que, se $\Gamma \models \varphi$ e Γ é sintaticamente consistente, então $\Gamma \not\vdash \neg\varphi$.

Nas questões 3. e 4. deste grupo, considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ das perguntas 4. a 6. do Grupo I.

3. Seja ψ a L-fórmula: $\neg \mathsf{P}(x_0) \to \exists x_1 \mathsf{R}(\mathsf{g}(x_0, x_1), \mathsf{c})$. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: Toda a variável está livre para qualquer L-termo t em ψ.

4. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_1\, (\mathsf{P}(x_1) \to \mathsf{P}(\mathsf{g}(\mathsf{c}, x_1)))$. Mostre que:

   (a) φ é válida em E.

   (b) φ não é universalmente válida.

5. Sejam φ e ψ fórmulas para um tipo de linguagem L e seja x uma variável. Mostre que: se $\varphi \to \psi$ é universalmente válida e $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então $\varphi \models \forall x \psi$.

6. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = \mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$. Construa uma derivação em DN que mostre que: $\forall x_0(\mathsf{P}(x_0) \to \mathsf{Q}(\mathsf{f}(x_0))) \vdash \mathsf{P}(\mathsf{c}) \to \exists x_1 \mathsf{Q}(x_1)$.

Cotações	II (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	2+1,5+2+3+1,5+2

Grupo I

1. $g \in \mathcal{F}$ $\quad \mathcal{N}(g) = 2$

$$g(x_1, g(x_1, x_2))[t_1/x_1] = g(x_0, x_2)[t_2/x_2]$$

sse $g(t_1, g(t_1, x_2)) = g(x_0, t_2)$

tomemos $t_1 = x_0$

e $t_2 = g(x_0, x_2)$

2.

$\varphi = \forall x_0 R(x_0, x_1) \wedge R(x_0, x_1)$

$subf(\varphi) = \{R(x_0,x_1), \forall x_0 R(x_0,x_1), \varphi\}$

$LIV(\varphi) = \{x_0, x_1\}$

$LIG(\varphi) = \{x_0\}$.

3. $\varphi[s(x_0)/x_0] = \exists x_0 (x_0 = x_1) \wedge \neg (s(x_0) = x_1)$

4.

$$f(g(x_1, f(c)))[a]_E = \overline{f}(\overline{g}(a(x_1), \overline{f}(\overline{c})))$$

$$= \overline{f}(\overline{g}(1-2, 2^2)) = \overline{f}(3 \times (1-2) + 2^2)$$

$$= \overline{f}(1) = 1^2 = 1$$

5.

$\forall x_0 R(x_0, c)[a']_E = 0$, para ~~qq~~ atribuição a' em E.

De facto,

$\forall x_0 R(x_0,c)[a']_E = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, d e 2 têm o mesmo resto na divisão inteira por 3

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, o resto da divisão inteira de d por 3 é 2, o que é falso.

Logo, $\forall x_0 R(x_0,c)[a']_E = 0$.

Assim, para que $P(f(x_0)) \rightarrow \forall x_0 R(x_0,c)[a']_E = 0$, é necessário que $P(f(x_0))[a']_E = 1$, ou seja, que

$$\bar{f}(a'(x_0)) \in \bar{P}.$$

Ora, $\bar{f}(a'(x_0)) \in \bar{P}$ sse $a'(x_0)^2$ é divisível por 6.

Consideremos, então, a' dada por

$$a'(x_i) = i + 6,$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Temos que $a'(x_0)^2 = 6^2 = 36$, que é divisível por 6.

6.

$$\forall x_0 \; \neg R(x_0, c)$$

7.

$E = (\{1,2\}, \bar{\ })$ onde $\bar{c} = 1$ e $\bar{P} = \{2\}$.

Temos que, para toda a atribuição a em E,

$E \models \exists x_0 P(x_0)[a]$ sse Existe $d \in \{1,2\}$ tal que $d \in \bar{P}$,
o que é verdade (basta tomar $d=2$)

e

$E \models \neg P(c)[a]$ sse $\bar{c} \notin \bar{P}$
sse $1 \notin \{2\}$, o que é verdade.

Portanto, para toda a atribuição a em E, $E \models \exists x_0 P(x_0)[a]$ e $E \models \neg P(c)[a]$. Logo, E é um modelo de $\{\exists x_0 P(x_0), \neg P(c)\}$.

8.

$$\varphi = R(c, x_0)$$

Sejam $E = (\{1,2\}, \bar{\ })$, onde $\bar{c} = 1$ e $\bar{R} = \{(1,1),(2,2)\}$, e $a: V \to \{1,2\}$ a atribuição em E dada por $a(x_i) = 2$.

Temos que

$E \models \forall x_0\, R(x_0,x_0)[a]$ sse $\forall x_0\, R(x_0,x_0)\,[a]_E = 1$

sse Para todo $d \in \{1,2\}$, $R(x_0,x_0)\left[a\binom{x_0}{d}\right]_E = 1$

sse Para todo $d \in \{1,2\}$, $(d,d) \in \overline{R}$, o que é verdade, uma vez que $\overline{R} = \{(1,1),(2,2)\}$

Logo, $E \models \forall x_0\, R(x_0,x_0)\,[a]$.

No entanto, $R(c,x_0)\,[a] = 0$, uma vez que $(\overline{c}, a(x_0)) =$

$= (1,2) \notin \overline{R}$.

Portanto, $\forall x_0\, R(x_0,x_0) \not\models R(c,x_0)$ e, por conseguinte,

$\forall x_0\, R(x_0,x_0) \nvdash R(c,x_0)$.

Grupo II

1.

$$D: \dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\,\wedge_1 E \qquad p_0 \to \perp}{\perp} \to E$$

é uma derivação em DNP de conclusão $\perp$ tal que $\mathcal{H}(D) = \{p_0 \wedge p_1, p_0 \to \perp\}$. Logo, $\Gamma \vdash \perp$ e, portanto, Γ é sintaticamente inconsistente.

2. Admitamos que $\Gamma \models \varphi$ e que Γ é sintaticamente consistente. Então, Γ é semanticamente consistente. Existe, portanto, pelo menos uma valoração v que satisfaz Γ. Como $\Gamma \models \varphi$, dado que $v \models \Gamma$, segue-se que $v(\varphi) = 1$. Logo, $v(\neg\varphi) = 0$. Assim, v é uma valoração que satisfaz Γ mas não satisfaz $\neg\varphi$, pelo que $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Pelo Teorema da Correção, $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.

3. φ: $\neg P(x_0) \to \exists x_1\, R(g(x_0,x_1), c)$

a segunda ocorrência de x_0 é livre e está no alcance de $\exists x_1$. Logo, x_0 não está livre para t em φ se $x_1 \in VAR(t)$

Portanto, não é verdade que qualquer variável está livre para qualquer L-termo t em φ.

4. $\varphi: \forall x_1 \, (P(x_1) \to P(g(c, x_1)))$

(a) Seja a uma atribuição em $\mathcal{E}$.

Temos que

$\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, $P(x_1) \to P(g(c, x_1))\,[a\binom{x_1}{d}] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \in \overline{P}$ então $\overline{g}(\overline{c}, d) \in \overline{P}$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se d é divisível por 6, então $3 \times 2 + d$ é divisível por 6, o que é verdade

Logo, $\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$.

Portanto, φ é válida em $\mathcal{E}$.

(b) Consideremos a atribuição $\mathcal{E}' = (\mathbb{Z}, \sim)$ exatamente igual a $\mathcal{E}$ exceto na interpretação de c que é $\tilde{c} = 1$.

Temos que para $d = 6 \in \mathbb{Z}$, d é divisível por 6 mas $3 \times 1 + 6 = 9$ não é divisível por 6. Logo, $\varphi[a]_{\mathcal{E}'} = 0$, para toda a atribuição a em $\mathcal{E}'$

Portanto, φ não é universalmente válida.

5. Sejam $\mathcal{E}$ uma L-estrutura e a uma atribuição em $\mathcal{E}$ tais que

$$\mathcal{E} \models \varphi\,[a].$$

i.e., $\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$. Sabemos que $(\varphi \to \psi)[a'] = 1$, para toda a atribuição a' em $\mathcal{E}$.

$$\varphi \to \forall x \psi \iff \neg\varphi \vee \forall x \psi \overset{x \notin Lig(\varphi)}{\iff} \forall x \, (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\iff \forall x \, (\varphi \to \psi)$$

$\forall x \, (\varphi \to \psi)\,[a]_{\mathcal{E}} = 1$ sse Para todo $d \in dom(\mathcal{E})$ $(\varphi \to \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$

o que é verdade pois $\varphi \to \psi$ é universalmente válida.

Portanto, $\varphi \to \forall x \psi\,[a]_{\mathcal{E}} = 1$. Portanto, $\forall x \psi\,[a]_{\mathcal{E}} = 1$

Assim, $\varphi \models \forall x \psi$

6.

$$
\mathcal{D}: \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{P(c)}^{(1)} \qquad \dfrac{\forall x_0 \left(P(x_0) \to Q(f(x_0))\right)}{P(c) \to Q(f(c))} \forall E\ (**)}{\dfrac{Q(f(c))}{\exists x_1\, Q(x_1)} \exists I\ (*)} \to E}{P(c) \to \exists x_1\, Q(x_1)} \to I^{(1)}
$$

(**) x_0 está livre para c em $P(x_0) \to Q(f(x_0))$;

(*) x_1 está livre para $f(c)$ em $Q(x_1)$.

$\mathcal{D}$ é uma derivação em DN de conclusão $P(c) \to \exists x_1\, Q(x_1)$ tal que $\mathcal{H}(\mathcal{D}) = \{\forall x_0 \left(P(x_0) \to Q(f(x_0))\right)\}$, o que mostra que

$\forall x_0 \left(P(x_0) \to Q(f(x_0))\right) \vdash P(c) \to \exists x_1\, Q(x_1)$.