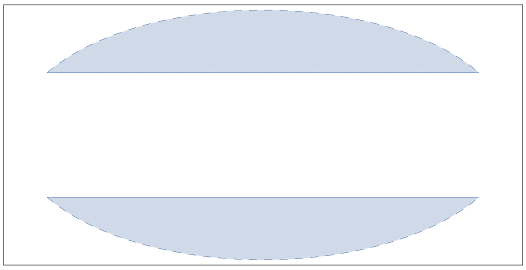
Questão 1

a



b

$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 16 \wedge |y| > 1\}$

$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16 \wedge |y| \geq 1\}$

$\partial A = \{(x, y) \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}] \times \mathbb{R} : x^2 + 4y^2 = 16 \wedge |y| = 1\}$

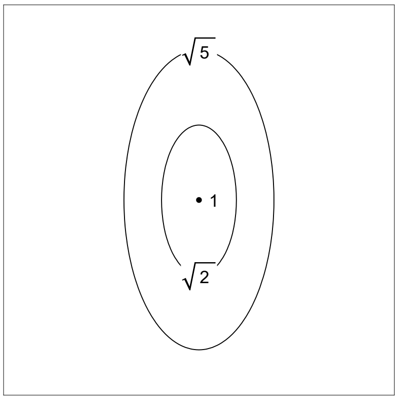
c

$\mathring{A} \neq A$

Questão 2

a

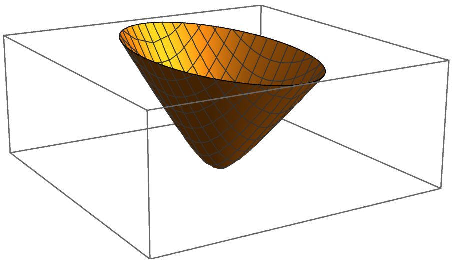
A curva de nível 1 reduz-se a um ponto; as curvas de nível $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são elipses.



b

Cone elíptico

Out[84]=



c

$$z = \frac{1}{3}(1 + 4x + 2y)$$

Questão 3

a

Não existe.

b

Não existe.

Questão 4

b

$f_x(0, 0) = 2$ e $f_y(0, 0) = 1$.

c

$Df((0, 0); (1, 1)) = 3$.

d

f não é derivável em $(0, 0)$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere $A \subseteq \mathbb{R}^2$, um conjunto fechado. Então:

○ $\overline{A} \neq A'$; ○ $\mathring{A} \neq \overline{A}$; ⊗ $\partial A \subseteq \overline{A}$; ○ $\partial A \subseteq A'$.

Questão 2. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que se seguem:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabendo que cada um dos conjuntos A e B está contido numa curva de nível da função f, qual das seguintes situações acontece:

○ $f(1, 0) \neq f(-1, 0)$;
⊗ $f(1, 1) = f(-1, 1)$;
○ $f(0, 0) = 0$;
○ A função f é descontínua em $(0, 0)$.

Questão 3. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

○ Se f admite derivadas parciais em $\mathbb{R}^2$, então f é derivável em $(0, 0)$;
○ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$;
⊗ Se f admite derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$, então f é contínua em $(0, 0)$;
○ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funções tais que $\nabla f(x, y) = (x^2, x + 3y)$ e $\boldsymbol{g}(x, y) = (f(x, y), f(x, y))$. Então $J\boldsymbol{g}(x, y)$ é a matriz:

⊗ $\begin{pmatrix} x^2 & x+3y \\ x^2 & x+3y \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x^2 & x+3y \\ x+3y & x^2 \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ x+3y & x+3y \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x+3y & x^2 \\ x+3y & x^2 \end{pmatrix}$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
Questão 1. Se $A = \mathbb{Z} \times [0, 1]$ então o conjunto dos pontos isolados de A é não vazio.	○	⊗
Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 2$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x^2, y^2) = 4$.	○	⊗
Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \\|(x, y) - (1, 2)\\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x, y) - 3\| < \varepsilon$, então f é contínua em $(1, 2)$.	⊗	○
Questão 4. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(x, y) = f(y, x),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $f_x(a, b) = f_y(b, a),\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.	⊗	○