4.4 Mudança de variáveis em integrais triplos

Transformações de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$
- Sistema de coordenadas cilíndricas
- Sistema de coordenadas esféricas

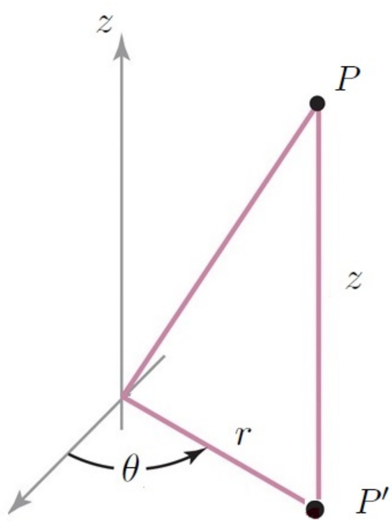
Mudança de coordenadas em integrais triplos
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas

Sistema de coordenadas cilíndricas

- [Definição]

  Coordenadas cilíndricas de $P = (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$:

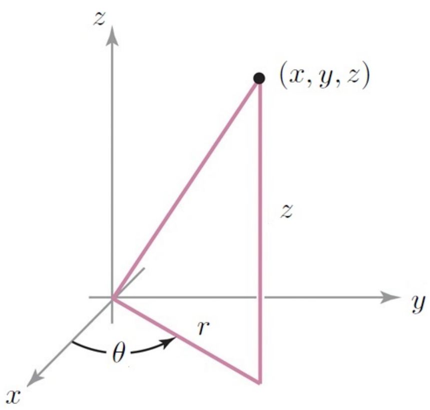
  - r e θ coordenadas polares de P', a projeção de P no plano horizontal;
  - z igual à coordenada vertical das coordenadas cartesianas



- [Coordenadas cartesianas vs coordenadas cilíndricas]

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas cilíndricas

$P = (r, \theta, z)$

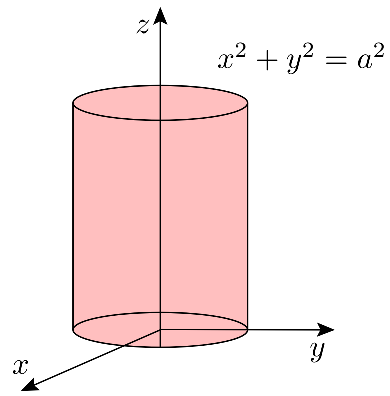
- Relação entre coordenadas cilíndricas e cartesianas

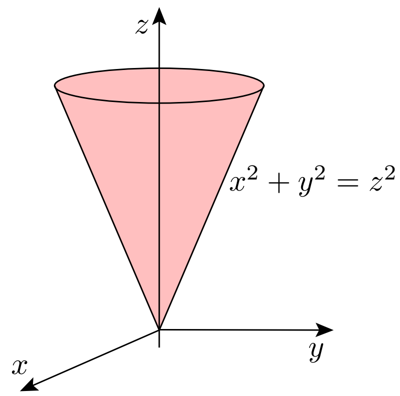
$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta, & r \in [0, +\infty[\\ y = r\ \mathrm{sen}\,\theta, & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = z, & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observação

- Tal como no caso das coordenadas polares, a descrição de um ponto em coordenadas cilíndricas não seria única sem a restrição de θ ao intervalo $[0, 2\pi[$.

- As coordenadas cilíndricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente ao eixo dos zz.





▶ [Mudança de coordenadas cilíndricas para cartesianas]

Considere-se a função vetorial $T : D^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z)$$

onde $D^* = [0,+\infty[\times [0,2\pi[\times \mathbb{R}$.

A função T é de classe $\mathscr{C}^1$, a sua matriz Jacobiana é

$$J\,T(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det J\,T(r,\theta,z) = r$.

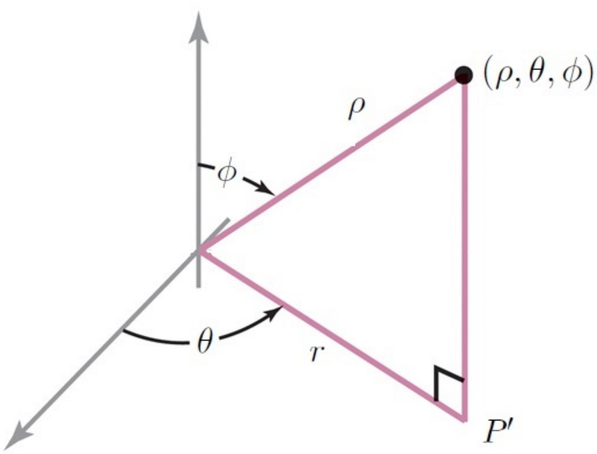
- A função T define uma mudança de coordenadas em $r\theta\,z$.
- A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas em xyz.

Sistema de coordenadas esféricas

▶ [Definição]

Coordenadas esféricas de $P = (\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3$:

- ρ distância de P à origem do referencial;
- ϕ ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo vertical;
- θ ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo dos xx.



Observação

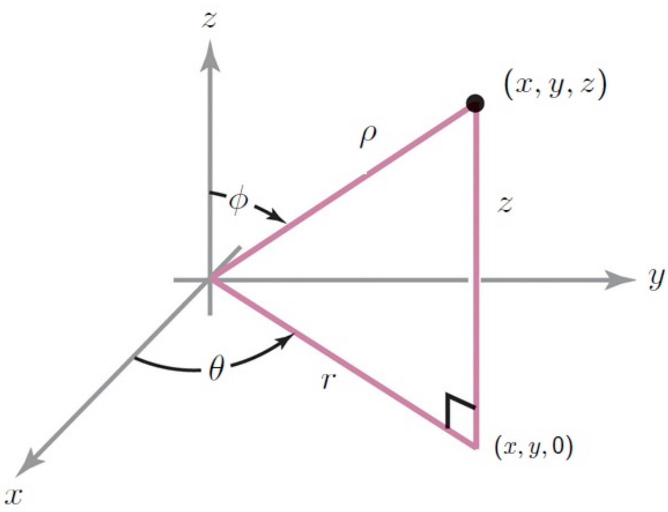
- A designação dos ângulos θ e ϕ bem como a sua definição não é consensual
  - Neste curso define-se θ como o ângulo entre $\overline{OP'}$ e a parte positiva do eixo dos x e ϕ como o ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo dos z;
  - Em geografia, por exemplo, a latitude, isto é, o ângulo ϕ é o ângulo entre $\overline{OP}$ e o plano horizontal.

- As coordenadas esféricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente a um ponto.

- [Coordenadas cartesianas vs coordenadas esféricas]

Coordenada cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas esféricas

$P = (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = |OP|$

- Da trigonometria do triângulo retângulo vem $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ e

$$\begin{cases} x = r \cos\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{array}$$

- Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, & \rho \in [0, +\infty[\\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = \rho \cos\phi, & \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

- [Mudança de coordenadas esféricas para cartesianas]

Considere-se a função vetorial $T : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

onde $S = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$. A função T é de classe $\mathscr{C}^1$, a sua matriz Jacobiana é

$$JT(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

e $\det JT(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas no espaço $\rho\,\theta\,\phi$.
  - A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas no espaço xyz.

Mudança de coordenadas em integrais triplos

Sejam

- S^* e S regiões elementares do espaço uvw e do espaço xyz respetivamente;
- T uma transformação injetiva de classe $\mathscr{C}^1$ tal que
  - $\det JT(u,v,w) \neq 0$ para todo $(u,v,w) \in int(S^*)$;
  - transforma[1] a região S^* na região S:

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w));$$

- f uma função contínua em S.
  Então

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{S^*} (f \circ T)(u,v,w)\,|\det JT(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

[1] Isto é, $T(S^*) = S$

Observação

- Sendo $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ o Jacobiano de T é

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

- De forma análoga ao caso no plano, o Jacobiano de T, $\det JT$, mede como a transformação T deforma o volume do seu domínio.

Exemplo
Folha 6

- [Exer 8] Calcule o volume de S quando
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x+2y+z \leq 2,\, 0 \leq x+y-z \leq \frac{4}{\pi},\, 0 \leq z \leq 1\}\,.$$

- [Caso particular: coordenadas cilíndricas]

  Seja S^* uma região do espaço $r\,\theta\,z$ e S uma região do espaço xyz.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por
$$T(r, \theta, z) = (r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta,\, z).$$
  Se $T(S^*) = T(S)$ então
$$\iiint_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S^*} (f \circ T)(r, \theta, z)\,r\;dr\,d\theta\,dz.$$

Exemplo

Folha 6

- [Exer 9.] Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,(x^2+y^2)\ dx\,dy\,dz.$$

- [Caso particular: coordenadas esféricas]

  Seja S^* uma região do espaço $\rho\theta\phi$ e S uma região do espaço xyz.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

$$T(\rho,\theta,\phi) = (\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

  Se $T(S^*) = S$, então

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S^*} (f\circ T)(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\ \operatorname{sen}\phi\ \ d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

  uma vez que

$$\det JT(\rho,\theta,\phi) = \rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Exemplo

Folha 6

- [Exer 13.] Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ e à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercícios

- Folha 6
  - 8
  - 11
  - 12
  - 14
  - 16 a)b)e c)