



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

3. Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

2023/2024

3.1 DERIVADAS PARCIAIS

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in \mathcal{D}$.

- ▶ A derivada parcial de f em ordem a x , no ponto (a, b) é o limite (se este existir e for um número real)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{ou} \quad f_x(a, b).$$

- ▶ A derivada parcial de f em ordem a y , no ponto (a, b) é o limite (se este existir e for um número real)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \text{ou} \quad f_y(a, b).$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos o gráfico de uma função f de duas variáveis e a curva que resulta da interseção desse gráfico com o plano de equação $y = b$.

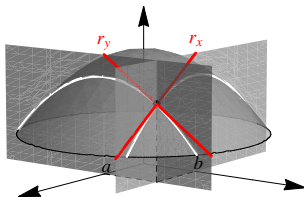
Esta curva é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$.

Assim

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$ é o declive da reta r_x tangente à curva no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Analogamente,

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é o declive da reta r_y tangente ao gráfico da função $h(y) = f(a, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.



Exemplo: Se $f(x, y) = x^2y + y^3$, então:

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 1+h) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + (1+h)^3 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = 4.\end{aligned}$$

O cálculo da derivada em ordem a x faz-se considerando y como constante e aplicando as regras usuais de derivação relativamente à variável x .

O cálculo da derivada em ordem a y faz-se de forma análoga.

Exemplo: Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

► Se $(x, y) \neq (0, 0)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

► Se $(x, y) = (0, 0)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

f possui derivadas parciais em todos os pontos, embora seja descontínua!

GENERALIZAÇÃO

Sejam \mathcal{D} um aberto de \mathbb{R}^n e $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis x_1, \dots, x_n .

A derivada parcial de f em ordem a x_i , no ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$ é, se existir e for um número real, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \quad \text{ou} \quad f_{x_i}(\mathbf{a}).$$

3.2 DERIVADAS DIRECIONAIS

Sejam \mathcal{D} um aberto de \mathbb{R}^n , $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ e \mathbf{u} um vetor de \mathbb{R}^n .

A derivada de f , no ponto \mathbf{a} , segundo o vetor \mathbf{u} define-se como o limite (se este existir e for um número real)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

e denota-se por $Df(\mathbf{a}; \mathbf{u})$ ou $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u})$.

A derivada direcional de f , no ponto \mathbf{a} , na direção e sentido do vetor não nulo \mathbf{u} denota-se por $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ e define-se como

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = Df\left(\mathbf{a}; \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right).$$

► Se \mathbf{e}_i designar o i -ésimo vetor da base canónica de \mathbb{R}^n , então

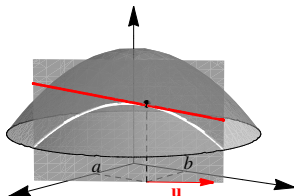
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Quando $n = 2$, a derivada direcional de f no ponto (a, b) , segundo o vetor não nulo \mathbf{u} , tem a seguinte interpretação geométrica:

Consideremos o plano vertical que passa no ponto $(a, b, f(a, b))$ e tem a direção do vetor \mathbf{u} .

Este plano intersesta o gráfico de f segundo uma curva.



$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a, b)$ é o declive (tomando como sentido positivo o sentido do vetor \mathbf{u}) da reta tangente a essa curva no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Exemplo: Sejam

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- ▶ Se $u = (0, 0)$, então $Df((0, 0); (0, 0)) = 0$;
- ▶ Se $u \neq (0, 0)$, então

$$\begin{aligned} Df((0, 0); (u_1, u_2)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(u_1, u_2)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 u_1^3 u_2}{h^7 u_1^6 + h^3 u_2^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h u_1^3 u_2}{h^4 u_1^6 + u_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Esta função tem derivada em $(0, 0)$, segundo **todas as direções**. No entanto, esta função **não é contínua** em $(0, 0)$ (verifique!).

3.3 DERIVADA GLOBAL

Sejam \mathcal{D} um aberto de \mathbb{R}^n e \mathbf{a} um elemento de \mathcal{D} .

Uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **derivável** ou **diferenciável** em \mathbf{a} , se existir uma aplicação linear¹

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Pode provar-se que a aplicação linear L , se existir, é única.

L diz-se a **derivada de f em \mathbf{a}** e denota-se por $Df(\mathbf{a})$ ou $f'(\mathbf{a})$, i.e.

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto L(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

¹Relembre que, dados dois espaços vetoriais reais E e F , $L : E \rightarrow F$ é uma aplicação linear se $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$, para todo $x, y \in E$ e todo $a, b \in \mathbb{R}$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Será possível relacionar a derivada de f no ponto (a, b) com a noção de plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$?

Recordando a interpretação das retas r_x e r_y do diapositivo 3, se existir plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$, parece natural ser o plano definido por essas retas. Sendo os vetores

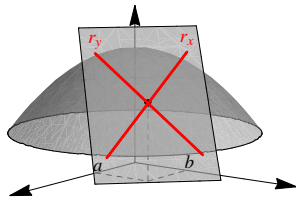
$$(1, 0, f_x(a, b)) \quad \text{e} \quad (0, 1, f_y(a, b))$$

vetores diretores do plano, uma equação desse plano é

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(1, 0, f_x(a, b)) + \mu(0, 1, f_y(a, b)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ou ainda

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$



Interpretemos o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ como sendo o plano que melhor aproxima, num certo sentido, o gráfico de f na vizinhança de $(a, b, f(a, b))$. Dizemos que

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

corresponde à *melhor aproximação linear* de f na vizinhança de (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|f(x, y) - (f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b))|}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

Considerando a aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(u_1, u_2) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$, a expressão anterior escreve-se como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - L(x - a, y - b)|}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0,$$

donde se conclui de imediato que $L \equiv Df(a, b)$.

No que se segue \mathcal{D} é um aberto de \mathbb{R}^n , \mathbf{a} é um ponto de \mathcal{D} e f é uma função real definida em \mathcal{D} .

Teorema: *Se f é derivável em \mathbf{a} , então existem todas as derivadas parciais de f em \mathbf{a} e*

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a}) : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})u_n \end{aligned}$$

Chama-se **gradiente de f em \mathbf{a}** e denota-se por $\nabla f(\mathbf{a})$, ao vetor

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Conclui-se de imediato que, se f é derivável em \mathbf{a} , então

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

Exemplo: Consideremos novamente a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

A função f será derivável em $(0, 0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Já sabemos que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, logo $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

e este limite não existe (verifique!), conclui-se que f não é derivável em $(0, 0)$.

Teorema: Se f é derivável no ponto $a \in \mathcal{D}$, então f é contínua em $a \in \mathcal{D}$.

Exemplo: Relativamente à função anterior, poderíamos ter concluído que ela não é derivável em $(0, 0)$, porque já tínhamos verificado anteriormente que esta função não é contínua em $(0, 0)$.

Teorema: *Seja f uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas numa vizinhança de um ponto $a \in \mathcal{D}$. Então f é derivável em a .*

Uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas diz-se uma **função de classe \mathcal{C}^1** .

Exemplo: Consideremos novamente a função do exemplo anterior. Já sabemos que:

- ▶ existem as derivadas parciais de f em todos os pontos;
- ▶ f não é derivável em $(0, 0)$.

O resultado anterior permite concluir que pelo menos uma das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ é descontínua na origem (verifique!).

Teorema: Se $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a , então f admite derivada em a segundo qualquer vetor u e

$$Df(a; u) = Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u.$$

Exemplo: A função $f(x, y, z) = xe^{-yz}$ é de classe \mathcal{C}^1 , logo é derivável.

$$Df((0, 0, 0); (1, 1, 1)) = \nabla f(0, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = 1.$$

Exemplo: Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

- ▶ $Df((0, 0); (1, 1)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{h} = 2;$
- ▶ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0;$
- ▶ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$

Como

$$Df((0, 0); (1, 1)) \neq \nabla f(0, 0) \cdot (1, 1),$$

conclui-se que f não é derivável na origem.

RESUMO:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existem e são contínuas numa vizinhança de \mathbf{a}

⇓ ✗ [Ex 3.13]

a função f é derivável no ponto \mathbf{a} e

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

⇓ ✗ [Ex 3.11]

existem as derivadas em \mathbf{a} segundo todos os vetores \mathbf{u} e

$$Df(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

⇓ ✗ [Ex 3.10]

existem as derivadas parciais no ponto \mathbf{a} e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i)$$

GENERALIZAÇÃO

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em $a \in \mathcal{D}$, se existir uma aplicação linear

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

A esta aplicação linear, que se existir é única, chama-se **derivada de f em a** e denota-se por $Df(a)$ ou $f'(a)$.

Teorema: A função $f = (f_1, \dots, f_m)$ é derivável em a se e só se cada função componente f_i é derivável em a .

Teorema: Se $f = (f_1, \dots, f_m)$ é derivável em a , então

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

À matriz de Df relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m chama-se **matriz jacobiana de f em a** e denota-se por $Jf(a)$, i.e.

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Note que a linha i de $Jf(a)$ “corresponde” ao vetor gradiente de f_i em a .

Exemplo: Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (e^{x+y} + y, y^2x + x, \sin(x + y)) \end{aligned}$$

Calcular $Df(0, 0)$.

► As funções componentes de f

$$f_1(x, y) = e^{x+y} + y, \quad f_2(x, y) = y^2x + x, \quad f_3(x, y) = \sin(x + y)$$

são funções de classe \mathcal{C}^1 , logo f é derivável em $(0, 0)$.

$$\text{► } Jf(0, 0) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ u_1 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{► } Df(0, 0)(u_1, u_2) = (u_1 + 2u_2, u_1, u_1 + u_2).$$

3.4 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ e $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ numa vizinhança de \mathbf{a} .

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivada parcial em ordem a x_j em \mathbf{a} , diz-se que f tem uma **derivada parcial de segunda ordem em \mathbf{a}** que se representa por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \quad \text{ou} \quad f_{x_i x_j}(\mathbf{a}) \quad \text{ou} \quad \partial x_j \partial x_i f(\mathbf{a}).$$

É também usual representar $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\mathbf{a})$ por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a})$.

Note que poderão existir n^2 **derivadas parciais de segunda ordem**.

Indutivamente define-se **derivada parcial de ordem k** como uma derivada parcial de uma derivada parcial de ordem $k - 1$.

Quantas derivadas parciais de ordem k poderão existir?

Exemplo: Determine todas as derivadas parciais de 2ª ordem da função $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$:

$$\blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y) = 2x + 5y;$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y) = 5x + 8y;$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 5y) = 2;$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(5x + 8y) = 8;$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(5x + 8y) = 5;$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y) = 5.$$

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- ▶ Diz-se que f é de classe \mathcal{C}^k , quando existem e são contínuas todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k .
- ▶ Uma função f diz-se de classe \mathcal{C}^0 se for contínua.
- ▶ Uma função f diz-se de classe \mathcal{C}^∞ se f for de classe \mathcal{C}^k , para todo k .

$$\mathcal{C}^0 \not\supseteq \mathcal{C}^1 \not\supseteq \mathcal{C}^2 \not\supseteq \dots \not\supseteq \mathcal{C}^\infty$$

Teorema de Schwarz

Se f é de classe \mathcal{C}^2 , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$.

O teorema anterior implica que, se f é de classe \mathcal{C}^k , então qualquer permutação na ordem de derivação de uma derivada parcial de ordem menor ou igual a k , conduz ao mesmo resultado.

Exemplo: Verifique o Teorema de Schwarz para a função

$$f(x, y) = xe^y + yx^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2yx, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x.$$

Exemplo: Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- ▶ $f_x(0, y) = -y, \quad f_y(x, 0) = x.$
- ▶ $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 1.$
- ▶ $f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = -1.$

Esta função possui derivadas de 2ª ordem em todos os pontos, mas

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Este resultado contraria o Teorema de Schwarz?

3.5 PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

- Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é derivável em a e $c \in \mathbb{R}$, então $h(x) = cf(x)$ é derivável em a e

$$Dh(a) = cDf(a)$$

$$\updownarrow$$

$$Jh(a) = cJf(a)$$

- Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são deriváveis em a , então $h(x) = f(x) + g(x)$ é derivável em a e

$$Dh(a) = Df(a) + Dg(a)$$

$$\updownarrow$$

$$Jh(a) = Jf(a) + Jg(a)$$

PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

- Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis em \mathbf{a} , então $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ é derivável em \mathbf{a} e

$$Dh(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})$$



$$\nabla h(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})$$

- Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis em \mathbf{a} e g não se anula em \mathcal{D} , então $h(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ é derivável em \mathbf{a} e

$$Dh(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}$$



$$\nabla h(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}$$

REGRA DA CADEIA

Sejam $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções tais que g é derivável em a e f é derivável em $g(a)$. Então $f \circ g$ é derivável em a e

$$Df \circ g(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a)$$



$$Jf \circ g(a) = Jf(g(a))Jg(a)$$

Exemplo: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \longmapsto (xz, xy)$ $(x, y) \longmapsto x^2 + y$

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

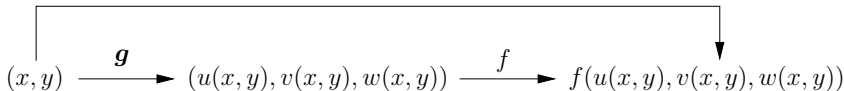
$$\begin{aligned} \nabla g \circ f(x, y, z) &= \nabla g(f(x, y, z))Jf(x, y, z) = (2xz^2 + y, x, 2x^2z) \\ &\quad (2xz \quad 1) \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = (2xz^2 + y \quad x \quad 2x^2z) \end{aligned}$$

Observação:

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h = f \circ \mathbf{g}$$



$$\nabla h(x, y) = \nabla f(\mathbf{g}(x, y)) J\mathbf{g}(x, y)$$

$$\nabla f(\mathbf{g}(x, y)) = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathbf{g}(x, y)}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\mathbf{g}(x, y)}, \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\mathbf{g}(x, y)} \right)$$

$$f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$$

$$\nabla f(\mathbf{g}(x, y)) = \nabla f(u, v, w)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w} \right)$$

$$h = f(u, v, w), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y).$$

$$\nabla h(x, y) = \nabla f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \, J\mathbf{g}(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $h(x, y) = f(e^{-x+y}, e^{xy})$ e $f(u, v) = u^2 - 3v$.

$$h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \quad u(x, y) = e^{-x+y}, \quad v(x, y) = e^{xy}.$$

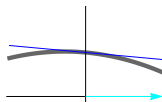
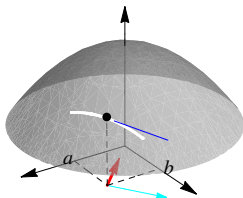
$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u \Big|_{u=e^{-x+y}} (-e^{-x+y}) - 3ye^{xy} \\ &= -2e^{-2x+2y} - 3ye^{xy}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 2u \Big|_{u=e^{-x+y}} e^{-x+y} - 3xe^{xy} \\ &= 2e^{-2x+2y} - 3xe^{xy}. \end{aligned}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE

► Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(x_0) \neq 0$.

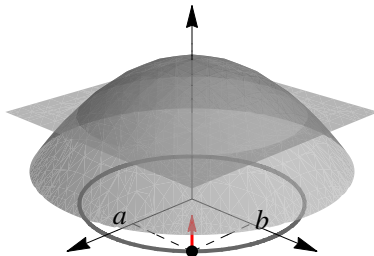
$\nabla f(x_0)$ aponta na direção e sentido de crescimento máximo.



► Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$ e seja Σ_c a hipersuperfície de nível c de f , isto é,

$$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{D} : f(x) = c\}.$$

$\nabla f(x_0)$ é normal, em x_0 , à hipersuperfície de nível $f(x_0)$ de f .



RETA NORMAL E HIPERPLANO TANGENTE A Σ_c

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável, Σ_c a hipersuperfície de nível c de f e $x_0 \in \Sigma_c$ tal que $\nabla f(x_0) \neq 0$.

- ▶ Uma equação da **reta normal** a Σ_c em x_0 é

$$x = x_0 + \lambda \nabla f(x_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Uma equação do **hiperplano tangente** a Σ_c em x_0 é

$$(x - x_0) \cdot \nabla f(x_0) = 0.$$

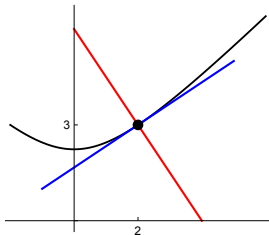
Exemplo: Determinar uma equação da reta perpendicular e da reta tangente à hipérbole $y^2 - x^2 = 5$ no ponto $(2, 3)$.

A hipérbole é a curva de nível 5 da função

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

e passa em $(2, 3)$. Como $\nabla f(2, 3) = (-4, 6)$, obtém-se:

- ▶ **reta perpendicular:** $(x, y) = (2, 3) + \lambda(-4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- ▶ **reta tangente:** $(x - 2, y - 3) \cdot (-4, 6) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 5$.



Exemplo: Determinar uma equação do plano tangente à superfície de equação $z = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$ no ponto $(1, 2, \frac{e}{5})$.

Esta superfície é a superfície de nível 0 da função

$$f(x, y, z) = z - \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

e passa em $(1, 2, \frac{e}{5})$. Como

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2e^x x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{e^x}{x^2 + y^2}, \frac{2e^x y}{(x^2 + y^2)^2}, 1 \right),$$

obtém-se $\nabla f(1, 2, \frac{e}{5}) = (-\frac{3e}{25}, \frac{4e}{25}, 1)$

Plano tangente:

$$(x - 1, y - 2, z - \frac{e}{5}) \cdot (-\frac{3e}{25}, \frac{4e}{25}, 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + \frac{25}{e}z = 10.$$