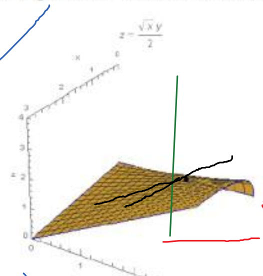
Folha 5

28 de maio de 2020 09:03

4. Na figura, relativa ao gráfico da função real de duas variáveis reais definida por $f(x, y) = \frac{1}{2} y\sqrt{x}$, destaca-se o ponto de coordenadas $(1, 2, f(1, 2))$.

$P = (1,2)$

a) X Y P $\nabla f(1$



(a) Use o gráfico para representar uma sua conjetura sobre o vetor gradiente de f em $(1, 2)$, recordando que este apontará na direção e no sentido do máximo crescimento da função no ponto dado.

(b) Determine o vetor gradiente e compare-o com a sua conjetura da alínea anterior.

(c) Em que direção e sentido a função f diminuiria mais, no ponto $(1, 2)$?

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 09:14

b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} y, \frac{\sqrt{x}}{2}\right), \nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $-\nabla f(1,2) = -(1,1)$

7) $S: x^3 + xyz = 12$

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; f(x,y,z) = x^3 + xyz$

$P(2,2,1), \; f(P) = 12, \; P \in S$

Equação do plano tangente

$\nabla f(P) \cdot (X - P) = 0, \; X = (x,y,z)$

Temos $\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + yz, xz, xy)$

$\nabla f(P) = (14, 2, 4)$

Logo $\nabla f(P) \cdot (X - P) = 0$

$\Leftrightarrow (14, 2, 4) \; (x-2, y-2, z-1) = 0$

$\Rightarrow 7(x-2) + (y-2) + 2(z-1) = 0$

$\Rightarrow 7x + y + 2z = 18$

Equação da Reta normal a S

$X = P + \lambda \nabla f(P), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda (14, 2, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 14\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \rightarrow \begin{cases} x = 7y - 12 \\ z = y - 3 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Folha 6

28 de maio de 2020 09:54

5 d) Hessiana aumentada

$f(x,y) = xy$, $x+y=1$

(Ver 1c) e 5c))

M1L

$\nabla f(x,y) = (y, x)$

$\nabla g(x,y) = (1,1) \neq \vec{0}$

$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\lambda = ?!$

$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$ Ponto crítico $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Classificação usando a Hessiana aumentada

$L(\lambda, x, y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$
$= xy - \lambda x - \lambda y$

$\nabla L(\lambda, x, y) = (-x-y, y-\lambda, x-\lambda)$

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ é const

$\det HL(\lambda, x, y) = 0 + (-1)^3 \times (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + 1 = 2 > 0$ máx $f|_\Sigma$

Obs Hessiana aumentada

$\det HL(\lambda, P) > 0$, P máx $f|_\Sigma$

$\det HL(\lambda, P) < 0$, P min $f|_\Sigma$

$\det HL(\lambda, P) = 0$ nada se pode concluir det H zero não dá pra concluir

11) $\pi: 2x - y + z = 1$

$P = (-4, 1, 3)$

$$d(X, P), \quad X \in \pi$$

$$d(X,P)^2 = \left(\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}\right)^2$$

Quero

$$\min \ (x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$$

$$g(x,y,z) = 1, \ \text{onde} \ g(x,y,z) = 2x - y + z$$

12) ordenada mínima

$$\min \ f(x,y) = y$$

$$g(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$$

Testes antigos

28 de maio de 2020 10:29

Questão 2. [3 valores] Considere a função definida por $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Classifique os pontos críticos encontrados na alínea anterior.

c) Mostre que f não possui extremos absolutos.

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 10:29

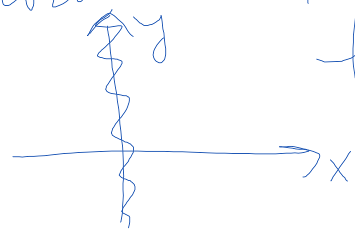
a) $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, $P = (1,0)$

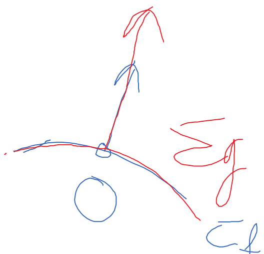
b) Max

c) $D = \mathbb{R}^2$

Para $x = 0$ $f(0,y) = -e^{3y}$

$\lim_{y \to +\infty} f(0,y) = \text{“}-\infty\text{”}$





Questão 1. Se $f(0,0) = 1$, $\nabla f(0,0) = (1,2)$, $g(0,0) = 1$ e $\nabla g(0,0) = (2,4)$ então as curvas de nível 1 de f e g são tangentes em $(0,0)$.

Questão 2. O ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{4})$ é um ponto da superfície definida pela equação $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ no qual o plano tangente é perpendicular à reta definida por $x = 2 - 3t$, $y = 7 - 8t$ e $z = 5 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 10:42

$\Sigma \quad z = 8 - 3x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow \Sigma_0$

$f(x,y,z) = 8 - 3x^2 - 2y^2 - z$

$\nabla f(x,y,z) = (-6x, -4y, -1)$

$\nabla f(\frac{1}{2}, -2, 3/4) = (-3, 8, -1)$

$\vec{v} = (3, 8, 1)$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 7 - 8t \\ z = 5 - t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (2,7,5) + t\underbrace{(-3,-8,-1)}_{\vec{v}}$$

$\nabla f(P) \neq \lambda \vec{v}$

Questão 2. As superfícies de nível da função definida por $g(x, y, z) = x + 2y + z$ são planos paralelos.

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 10:56

Sup nível

$g(x,y,z) = K, \; K \in \mathbb{R}$

$x + 2y + z = 1, \; K = 1$

no normo

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 11:05

derivável = diferenciável

Exercício 4. [3 valores] Seja $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (\operatorname{sen} x \cos y, 2 \cos x \operatorname{sen} y)$$

e seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função derivável cuja matriz jacobiana é

$$J\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & 4xy \\ 4y & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{g}$;

b) Calcule $D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

b) $D(f \circ g)(\pi/4, \pi/4) = Df(g(\pi/4, \pi/4)) \circ Dg(\pi/4, \pi/4)$

a) $= \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ 2 \operatorname{sin} x \operatorname{sen} y & +2 \cos x \cos y \end{pmatrix}$

b) $Df \leftrightarrow J, \; Dg \leftrightarrow J$

$g(\pi/4, \pi/4) = (2/4, 1)$

$Jf(1/2, 1) = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$Jg(\pi/4, \pi/4) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \; & 1 \end{pmatrix}$

$$Jg\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jf\left(\tfrac{1}{2},1\right) \times Jg\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \tfrac{3}{2} & 2 \\ & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ - & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{4} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)$$

Questão 3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq f(x,y) \leq x+1$, então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Recorte de ecrã efetuado: 28/05/2020 11:32

Em cálculo $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$$|f(x)| < H(x)$$

$$|f(x) - f| < g(x) \longrightarrow 0,\quad X = (x,y)$$

$$df(a).v = \nabla f(a)\, v$$

a) $$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2},\quad u = (\alpha,\beta)$$

b) $$df(0,0)(\alpha,\beta) = \nabla f(0,0)(\alpha,\beta)$$

2e a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\quad \alpha = 1, \ \beta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ $\quad \alpha = 0, \ \beta = 1$

Daí

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$\nabla f(0,0) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

Se f é dif em $(0,0)$

$$df(0,0)(v_1, v_2) = \nabla f(0,0) \cdot (v_1, v_2)$$

$$= 0$$

$\neq$

$$df(0,0)(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$