Análise

FOLHA 2 — 2018'19

Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ & Limites e Continuidade

1. Considere as funções, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, que a seguir se definem. Em cada uma delas,

(a) identifique n e m e indique o tipo de função que lhes corresponde,

(b) indique o domínio.

i. $f(x,y) = x^2 + y^2$

ii. $v(r,h) = \pi r^2 h$

iii. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

iv. $g(x,y) = \ln(xy)$

v. $h(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

vi. $t(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+y^2-9}}{x}$

vii. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

viii. $s(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$

ix. $f(t) = (t, \operatorname{sen} t)$

x. $g(x,y) = \left(\sqrt[3]{x-2}, \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}, y\right)$

xi. $h(x,y,z) = \left(\dfrac{x^2}{yz}, \sqrt{y-1}, \sqrt{\dfrac{5-z}{1-x}}\right)$

xii. $r(t) = \left(\ln t, \dfrac{t}{t-1}, e^{-t}\right)$

2. Defina algebricamente

(a) um plano (horizontal) de cota 3.

(b) uma superfície esférica centrada no ponto de coordenadas $(1,2,3)$ e raio 4.

(c) uma reta paralela ao eixo das abcissas, de cota 2 e ordenada -1.

3. Esboce uma representação gráfica da função real de variáveis reais, definida por:

(a) $f : [0,2] \times [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x$

(b) $f : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = y^2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

4. Determine e esboce algumas curvas de nível da função real de variáveis reais, definida por:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(b) $f(x,y) = 3\left(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4}\right)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

5. Determine os traços e esboce um diagrama de nível –com três curvas de nível, à sua escolha– das superfícies definidas (com x e y variáveis independentes) por:

(a) $4x^2 + y^2 = 16$

(b) $x + 2z = 4$

(c) $z^2 = y^2 + 4$

(d) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

(e) $z = x^2$

(f) $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$

(g) $z = e^{1+x^2-y^2}$

(h) $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$

(i) $z = |x|$

(j) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(k) $z = \dfrac{x^2}{4} + y^2$

(l) $\dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$

(m) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

(n) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

6. Prove, usando a definição ou o enquadramento de limite(s), que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x+y) = 1$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

7. Considere a função h –real de duas variáveis reais– definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ e mostre que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = 0.$

8. Calcule, se existir,

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(e^{-x-y} - 1\right)$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\operatorname{sen} y + 2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^3y$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to1} (x^2, e^x)$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{\cos x}{x^2+y^2+1}, e^{x^2}\right)$

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$

(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y^2-x^2}{x-y}$

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$

(o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

(p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(q) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(r) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} + x\right)$

(s) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2-y^2}$

(t) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^5}{x^2+y^4}$

(u) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2y^2}$

(v) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} (xe^{xz}, x^2yz)$

9. Estude a continuidade das funções, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, definidas por

(a) $f(x,y) = \left(e^{-x-y} - 1, \dfrac{x}{x^2+1}, x^2+y^2\right)$

(b) $f(x,y,z) = \left(\ln(x+y^2), \cos\sqrt{3}z\right)$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z}$

10. Estude a continuidade da função, real de duas variáveis reais, definida por $h(x,y) = \begin{cases} 1-x, & y \geq 0 \\ -2, & y < 0 \end{cases}$ ao longo da reta definida por $y = 0$.

11. Encontre, se existir, c (constante real) de tal forma que a função f, real de duas variáveis reais, é contínua em todo o seu domínio, quando

(a) $f(x,y) = \begin{cases} c+y, & x \geq 3 \\ 5-x, & x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} c+y, & x \geq 3 \\ 5-y, & x < 3 \end{cases}$

12. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^2+3y^2}$