4.2 Mudança de variáveis em integrais duplos

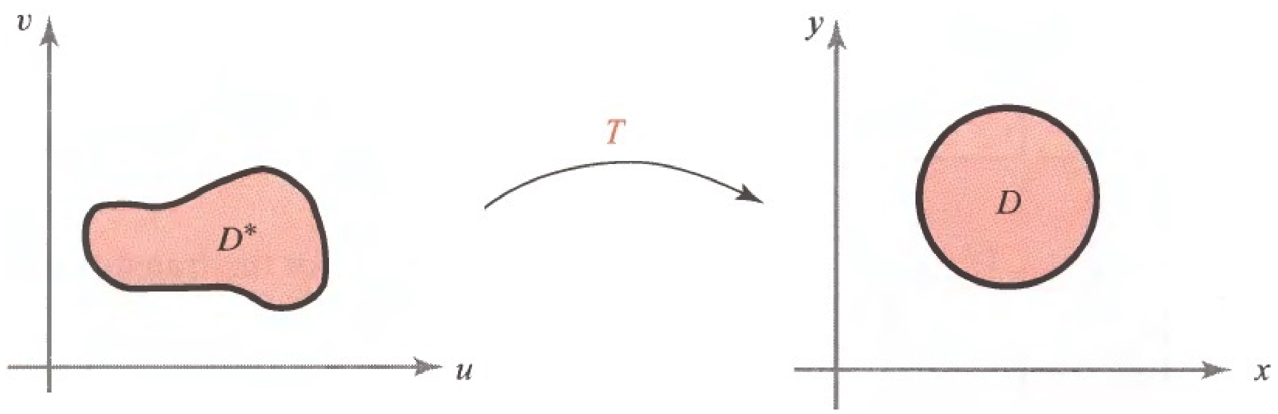
Transformações de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$

Sistema de coordenadas polares

Mudança de variáveis num integral duplo

Coordenadas polares

Transformações de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$



- D^* um subconjunto $\mathbb{R}^2$;
- $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação bijectiva e derivável;
- $T(D^*) = D$, isto é, para cada $(u, v) \in D^*$ existe um único $(x, y) \in D$ tal que $T(u, v) = (x, y)$.
- Como é que T "deforma" D^*?

- [Mudança de coordenadas]

  Seja $D^* \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma função (vetorial)

  $$T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

  é uma mudança de coordenadas em D^* se verificar as seguintes condições:

  - T é de classe $\mathscr{C}^1$;
  - T é injetiva (exceto eventualmente na fronteira de D^*);
  - $\det JT(t) \neq 0, \ t \in D^*$.

Propriedades

1. Se $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $\mathscr{C}^1$, injetiva e $\det JT \neq 0$ então T transforma a fronteira de D^* na fronteira de D.

2. Se $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear

   $$T(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

   onde A é uma matriz real tal que[1] $\det A \neq 0$ então T transforma paralelogramos em paralelogramos e vértices em vértices.

[1] A transformação T é bijectiva se e só se $\det A \neq 0$

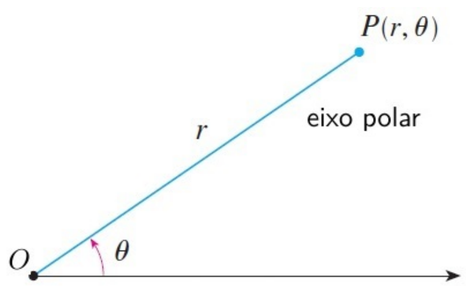
Exemplo

1. Seja $D^* = [-1,1] \times [-1,1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando
$$T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}).$$

2. Seja $D^* = [0,1] \times [0,1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando
$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

Sistema de coordenadas polares

- [Definição]



- origem do referencial O, um eixo e um ângulo;
- r é a distância a O;
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal.

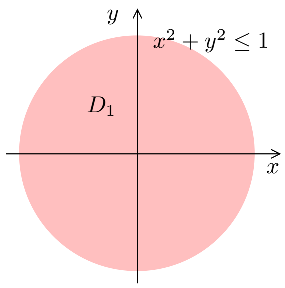
[Exemplo] Marcar os pontos de coordenadas polares $(1, \pi)$ e $(2, \pi/2)$

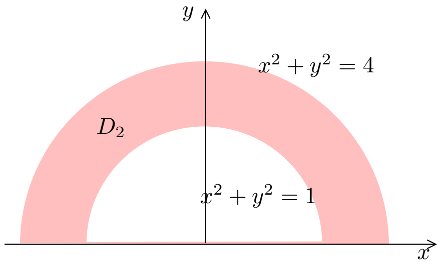
Observação

1. A descrição de um ponto em coordenadas polares não é única. Por isso toma-se $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$.
2. Assim, no sistema de coordenadas polares

$$r \in [0, +\infty[\quad \text{e} \quad \theta \in [\,0, 2\pi\,[\,.$$

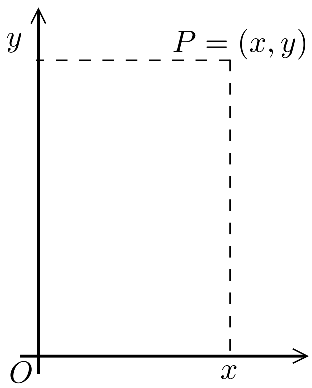
3. As coordenadas polares são indicadas para descrever regiões circulares (no plano)





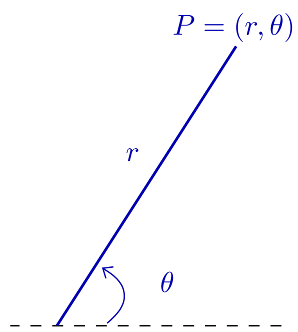
► Coordenadas cartesianas vs coordenadas polares

Coordenadas cartesianas



- origem do referencial O e dois eixos;
- x distância na horizontal a O;
- y distância na vertical a O.

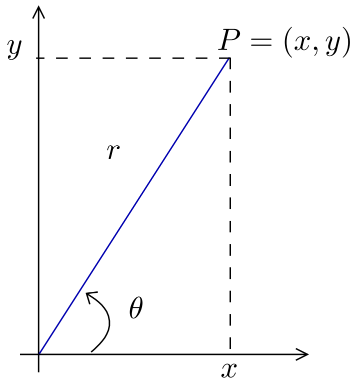
Coordenadas polares



- origem do referencial O, um eixo e um ângulo;
- r é a distância a O;
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal.

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y)$



Coordenadas polares

$P = (r, \theta)$

- Da trigonometria do retângulo vem

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta & \qquad r \in [0 + \infty[\\ y = r\,\operatorname{sen}\theta & \qquad \theta \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

- Logo

$$x^2 + y^2 = (r\,\cos\theta)^2 + (r\,\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e para $x \neq 0$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

- Assim, para passar de coordenadas polares a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta & \qquad r \in [0 + \infty[\\ & \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,. \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta & \end{cases}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

- [Mudança de coordenadas polares para cartesianas]

  Seja $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função vetorial definida por

  $$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

  onde $D^* = [0,+\infty[\times[0,2\pi[$, isto é,

  $$\begin{array}{rccl} T: & [0,+\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

  A função T é de classe $\mathscr{C}^1$ e a sua matriz Jacobiana é

  $$JT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

  e $\det JT(r,\theta) = r$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas de coordenadas no plano $rO\theta$.
  - A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas de coordenadas no plano xOy.

Exemplo

- Seja $D^* = [0,1]\times[0,2\pi]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando

  $$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Mudança de variáveis num integral duplo

Sejam

- D^* e D regiões do tipo I ou II do plano uv e do plano xy, respetivamente;
- T uma transformação injectiva e de classe $\mathscr{C}^1$ tal que
  - $\det JT(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in int(D^*)$;
  - transforma[2] a região D^* na região D:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v));$$

- f uma função contínua em D.

Então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} (f \circ T)(u,v)\,|\det JT(u,v)|\,du\,dv.$$

[2] Isto é, $T(D^*) = D$

Observação

- O Jacobiano, $\det JT$, mede como a transformação T deforma a área do seu domínio.

Exemplo

- Seja P o paralelogramo definido por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Fazendo a mudança de variáveis definida $x = u - v, y = 2u - v$ calcule o integral

$$\iint_P xy\,dx\,dy.$$

- [Caso particular: coordenadas polares]

  Seja D^* uma região do plano $rO\theta$ e D uma região do plano xOy.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

  Se $T(D^*) = D$, então

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D^*} r\,f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta\,.$$

Exemplo

1. Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$
onde
$$D = \{(x,y) \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$