1)

a) 310156 por 197

$$\begin{array}{r} 310156 \\ -\ 197000 \\ \hline 113156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9850 \\ +\ 3940 \\ \hline 13790 \end{array}$$

$197 \times 1000 + 113156$

$$\begin{array}{r} 113156 \\ -\ 98500 \\ \hline 14656 \end{array}$$

$500 \times 197 + 14656$

$$\begin{array}{r} 14656 \\ -\ 13790 \\ \hline 866 \end{array}$$

$197 \times 70 + 866$

$4 \times 197 + 78$

788

Quociente = 1574

Resto 78

b) 32 por 45

Quociente: 0

Resto = 32

c) Quociente = 0 Resto = 0

d) -19 por 6

$-24 + 5$

Quociente = -4

Resto = 6

e) -234 por -9

$3 \times 26 \times 3$

78

Quociente = 26

Resto: 0

2) a) 392 por 45

Dividendo

$$\boxed{392}\,\underline{|45|} \rightarrow \text{Divisor}$$

$$\frac{}{32} \quad 8$$

Quociente

$45 \times 9 = \cancel{3}405$

Dizer que se pode adicionar n°

$404 - 392 = 12$

b) $\boxed{32}$ $\rightarrow 45 \times 8 = 360$

$\underbrace{404}_{8 \times 45 + 1} < \underbrace{392}_{8 \times 45 + 32} < \underbrace{360}_{8 \times 45}$

3)

a) Se $a \mid bc$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$

$8 \mid 6 \times 4$, $\rightarrow 8 \nmid 6$ mas $8 \nmid 4$

Falsa

b) $8 \mid 16 \rightarrow 10\ 16$

mas $8 \nmid 10$ nem $8 \nmid 6$

Falsa

c) $8^2 = 64$, $4^3 = 64$

$8^2 \mid 4^3$, mas ~~8~~ $8 \nmid 4$.

Falsa.

4) $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$aq = 2x - 3y$ $aq' = 4x - 5y$

$2aq = 4x - 6y$

$a \mid 4x - 6y$

$aq' - a(2q) = \cancel{4x} - 5y - \cancel{4x} + 6y = y$, ou seja,

$a(\underbrace{q' - 2q}_{\in \mathbb{Z}}) = y$, logo $a \mid y$ c.q.m.

5) $\underbrace{n+1 \mid n^2+1}$

$\Downarrow$

Ou seja, $\dfrac{n^2+1}{n+1}$ = inteiro.

$$\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-2n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2n}{n+1} =$$

$$= n+1 - \frac{2n}{n+1} = n+1 + \frac{-2n+2-2}{n+1} =$$

$$= \boxed{n+1-2+\frac{2}{n+1}}$$ → Terá de ser um inteiro

$= n-1 + \frac{2}{n+1}$

$\underbrace{(n+1) \mid 2}$ $D_2 = \{1, 2\}$,

$\Downarrow$

$n=1$ obriga. $2+1 = 3 \nmid 2$

Logo, trivialmente é. c.q.m. $1+1 = 2 \mid 2$, r)

a) $\boxed{q}^2 = \boxed{3k}$ ou $\boxed{3k+1}$ $k \in \mathbb{Z}^+$

$q \in \mathbb{Z}^+$ Ou seja, o quadrado de um inteiro > 0 é múltiplo de 3 ou, então, quando dividido por 3 dá resto 1 ou 2

Seja $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, 2, 0\}$

caso $m = 3q$,

$m^2 = 9q = 3 \times (3q)$ $3k$

$\mathbb{Z}^+$

caso $m = 3q+1$,

$m^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3\underbrace{(3q+2)}_{\mathbb{Z}^+} + 1$ $3k+1$

caso $m = 3q+2$,

$m^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 =$

$= 3\underbrace{(3q^2 + 4q + 1)}_{\in \mathbb{Z}^+} + 1$ forma $3k+1$

c.q.—

b) $3a^2 - 1$ não é quadrado perfeito.

Isto literalmente é consequência da outra alínea, mas prento

(Por absurdo) Assumimo que $n^2 = 3a^2 - 1$

n^2 vai ser da forma $3k$ ① ou $3k+1$ ②

① $3a^2 - 1 = 3k \Leftrightarrow \frac{3a^2 - 1}{3} = k \rightarrow k \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ impossível

② $3a^2 - 1 = 3k + 1 \Leftrightarrow \frac{3a^2 - 2}{3} = k \rightarrow k \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ impossível

Logo, $3a^2 - 1$ não poderá ser quadrado perfeito. c.q.—

6) (esqueci-me de pôr isto)

Ou seja, $x = 2m+1$ e $y = 2q+1$

$(2n+1)^2 + (2q+1)^2 = 4n^2 + 4m + 1 + 4q^2 + 4q + 1 =$

$= \underbrace{4(n^2+n+q^2+q)+2}$, $= \underbrace{2\left[2(n^2+n+q^2+q)+1\right]}$

$\downarrow$ não é divisível por 4, por ser da forma $4k+r$, $k \in \mathbb{Z}$ $r \in \{1,2,3\}$

$\downarrow$ mas é divisível por 2, pq é da forma $2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) ou seja, $3 \mid a \vee 3 \mid a+2 \vee 3 \mid a+4$

$r \in \{0,1,2\}$

$\boxed{\text{caso } r = 0}$

$3q = a$, múltiplo de 3

$\boxed{\text{caso } r = 1}$

$\boxed{3q+1 = a} \Leftrightarrow 3q+3 = a+2 \Leftrightarrow$

$\downarrow$ não é múltiplo de

$\Leftrightarrow 3(q+1) = \boxed{a+2} \rightarrow$ múltiplo de 3.

$\boxed{\text{caso } r = 2}$

$\boxed{3q+2 = a} \Leftrightarrow \boxed{3q+4 = a+2} \Leftrightarrow \boxed{3q+6 = a+4}$

$\downarrow$ Não é

$\downarrow$ Não é

$\Leftrightarrow 3(q+2) = a+4$

$\downarrow$ é múltiplo de 3.

9) $3 \mid n(2n^2+7) \iff \frac{2n^3+7n}{3} \in \mathbb{Z}$

Se $n = 1$,

$$\frac{2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in \mathbb{Z} \quad \text{P.V}$$

Assumimos que para $n = k$ P.V, ou seja,

$$\frac{k(2k^2+7)}{3} \in \mathbb{Z} \qquad \boxed{k(2k^2+7)} = 3q, \quad q \in \mathbb{Z}$$

para $\boxed{k+1 = n}$

$$\frac{(k+1)(2(k+1)^2+7)}{3} = \frac{(k+1)(2(k^2+2k+1)+7)}{3} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+4k+9)}{3} = \frac{2k^3+4k^2+9k+2k^2+4k+}{3}$$

$$= \frac{2k^3+6k^2+7k+6k+9}{3} =$$

$$= \frac{\underbrace{k(2k^2+7)}_{\text{Múltiplo de 3}} + \overbrace{3(2k^2+2k+3)}^{\text{Múltiplo de 3}}}{3} =$$

$$= q + 2k^2 + 2k + 3 \in \mathbb{Z} \quad \text{c.q.—}$$

Pelo princípio da indução, para todo $n \in \mathbb{N}$, $3 \mid n(2n^2+7)$

10) $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

Para $n = 1$

$1 \times 2 \times \times 3 = 6 \mid 6$ ✓

$n = k$, a proposição é verdadeira, ou seja,

$k(k+1)(2k+1) \mid 6$

$\Downarrow$

$6q, q \in \mathbb{Z}$

$n = k+1$

$(k+1)(k+2)(2k+3) = k(k+1)(2k+3) + 2(k+1)(2k+3)$

$= k(k+1)((2k+1)+2) + 2(k+1)((2k+1)+2) =$

$= \underbrace{k(k+1)(2k+1)}_{6q} + 2k(k+1) + 2(k+1)(2k+1+2) =$

$= 6q + (k+1)(2k + 4k + 6) = 6q + (k+1)(6k+6) =$

$= 6q + 6\underbrace{(k+1)}_{m}{}^2 = 6(q + m^2)$, divisível por 6. c. q. d.

Pelo princípio da indução, para $n \geq 1$, $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

11) $a(a+1)(a+2)(a+3)$

$24 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

Pela imediata - se em quatro nº consecutivos, encontramos sempre pelo menos um múltiplo de 3, dois números pares cujo seu produto será divisível por 4, o que formará um múltiplo de 24, quando multiplicado. 24 é da forma $\boxed{4 \times 6}$ ou $\boxed{3 \times 8}$

Para $a = 1$, $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \mid 24$ ✓

$a = k$

$k(k+1)(k+2)(k+3)$ será múltiplo de 24.

Para $k+1$

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = k(k+2)(k+3)(k+4) + (k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= k(k+1)(k+3)(k+4) + k(k+3)(k+2) + (k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= k(k+1)(k+2)(k+4) + k(k+1)(k+4) + (k+2)(k+3)(k+4) =$$

$$= \underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)}_{24q} + k(k+1)(k+2) + k(\ldots$$

Cé sempre fazermos a mesma coisa, de modo a que, quando chegarmos ao fim tenhamos algo do tipo:

$24(q + m + v) \ldots$