Folha 1 EPTN, Teoria de Números

1) a)

$$\begin{array}{l|l} 310156 & 197 \\ \hline 1131 & 1574 \\ \ \ 1465 & \\ \ \ \ \ 866 & \\ \ \ \ \ \ \ 78 & \end{array}$$

$q = 1574$
$r = 78$

b)

$$\begin{array}{l|l} 32 & 45 \\ \hline 32 & 0 \end{array}$$

$q = 0$; $r = 32$

c)

$$\begin{array}{l|l} 0 & 28 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

$q = 0$; $r = 0$

d)

$$\begin{array}{l|l} -19 & 6 \\ \hline -1 & -3 \end{array}$$

$-19 = 6 \times (-3) - 1$

$\Leftrightarrow -19 = 6 \times (-3) - 6 - 1 + 6$

$\Leftrightarrow -19 = 6 \times (-4) + 5$

$q = -4$; $r = 5$

e)

$$\begin{array}{l|l} -234 & -9 \\ \hline -54 & 26 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

$q = 26$; $r = 0$

" f)

$$\begin{array}{l|l} -234 & -10 \\ \hline -34 & 23 \\ \ \ -4 & \end{array}$$

$-234 = -10 \times 23 - 4$

$\Leftrightarrow -234 = -10 \times 23 - 10 - 4 + 10$

$\Leftrightarrow -234 = -10 \times 24 + 6$

$q = 24$; $r = 6$

2) a)

$$\begin{array}{l|l} 392 & 45 \\ \hline 32 & 8 \end{array}$$

$392 = 45 \times 8 + 32$

$\Leftrightarrow 392 = 45 \times 8 + \underbrace{32 + 12}_{0 \leq 44 < 45} - 12$

$\Leftrightarrow 392 + 12 = 45 \times 8 + 32 + 12$

O maior inteiro que se pode somar é 12.

b) $392 = 45 \times 8 + 32$

$\Leftrightarrow 392 = 45 \times 8 + \underbrace{32 - 32}_{0 \leq 0 < 45} + 32$

$\Leftrightarrow 392 - 32 = 45 \times 8 + 32 - 32$

O maior inteiro que se pode subtrair é 32.

3) $\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{array}\right\}$ $\underbrace{8}_{a} \mid \underbrace{4 \times 2}_{bc} \wedge 8 \nmid 4 \wedge 8 \nmid 2$

Logo, a afirmação é falsa.

b) $\left.\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{array}\right\}$ $\underbrace{6}_{a} \mid \underbrace{4+2}_{b+c} \wedge 6 \nmid 4 \wedge 6 \nmid 2$

c) $\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 4 \end{array}\right\}$ $\underbrace{8^2}_{a^2} \mid \underbrace{4^3}_{b^3} \wedge \underbrace{8}_{a} \nmid \underbrace{4}_{b}$

4) $a \mid (2u - 3y) \Leftrightarrow 2u - 3y = a \cdot K_1 \quad , K_1 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2u = a \cdot K_1 + 3y \quad , K_1 \in \mathbb{Z}$

$a \mid (4u - 5y) \Leftrightarrow 4u - 5y = a \cdot K_2 \quad , K_2 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2u = a \cdot K_2 + 5y$

$\Leftrightarrow 2(a \cdot K_1 + 3y) = a \cdot K_2 + 5y$

$\Leftrightarrow a \cdot 2K_1 + 6y = a \cdot K_2 + 5y$

$\Leftrightarrow 6y - 5y = a \cdot K_2 + a \cdot (-2K_1)$

$\Leftrightarrow y = a \cdot (K_2 - 2K_1) \Rightarrow \boxed{a \mid y}$

6 ~~8~~) $x = 2k + 1, \; k \in \mathbb{Z}$

$y = 2k' + 1, \; k' \in \mathbb{Z}$

$x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$

$= 4\underbrace{(k^2 + k'^2 + k + k')}_{q} + 2$

$= 4q + 2, \; q \in \mathbb{Z}$

Logo, pode-se concluir que $4 \nmid (x^2 + y^2)$

7) a) Algoritmo da divisão por 3:

$x = 3q \vee x = 3q+1 \vee x = 3q+2, \; q \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x = 3q}$: $x^2 = (3q)^2 \Leftrightarrow x^2 = 9q^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \cdot \underbrace{3q^2}_{K}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3K, \; K \in \mathbb{Z}$

$\boxed{u = 3q+1}$: $u^2 = (3q+1)^2 \quad , \quad q \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow u^2 = 9q^2 + 6q + 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3\underbrace{(q^2+3q)}_{K} + 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3K + 1 \, , \quad K \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{u = 3q+2 :}$ $u^2 = (3q+2)^2 \quad , \quad q \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow u^2 = 9q^2 + 6q + 4$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3q^2 + 6q + 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3\underbrace{(q^2 + 2q + 1)}_{K} + 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3K + 1 \, , \quad K \in \mathbb{Z}$$

b) $3a^2 - 1 = 3\underbrace{(a^2 - 1)}_{K} + 2$

$$3a^2 - 1 = 3K + 2$$

Pela alínea a), $u^2 \neq 3K + 2$. Logo, $3a^2 - 1$ não é um quadrado perfeito.

~~10~~) Folha 2

~~11~~

14 ~~12~~) $m.d.c(a,4) = m.d.c(b,4) = 2$

$a = 2K \qquad b = 2K'$

$a = 4K + n \qquad b = 4K' + n'$

$$a + b = 4K + n + 4K' + n'$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4(K + K') + n + n'$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4q + n''$$

$2K = 4K + n$ $\qquad\qquad$ $2K' = 4K' + n'$

$\Leftrightarrow n = -2K \,,\, K \in \mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow n' = -2K' \,,\, K' \in \mathbb{Z}$

$$n, n \in \{1, 2, 3\} \;\wedge\; n = -2K \;\wedge\; n' = -2K' \,,\, K, K' \in \mathbb{Z}$$

Assim sendo n e n', que inicialmente apenas poderiam tomar os valores 1, 2 ou 3, são múltiplos de -2. Logo, $n = n' = 2$.

$$a + b = 4(K + K') + n + n'$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4(K + K') + 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4(K + K') + 4$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4(K + K' + 1) \,,\, K, K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 4 \mid (a + b)$$

4 divide $a + b$ e o máximo divisor de 4 é 4. Logo, conclui-se que $m.d.c(a+b, 4) = 4$.

15) Se $3K + 2$ e $5K + 2$ são primos entre si, então

$$m.d.c(3K+2, 5K+3) = 1$$

$$1 = (3K+2)a + (5K+3)b \,,\, a, b \in \mathbb{Z}$$

Sejam $a = 5$ e $b = -3$:

$$1 = (3K+2) \times 5 + (5K+3) \times (-3)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 15K + 10 - 15K - 9 \qquad \Leftrightarrow 1 = 1$$

Existem inteiros a e b, tais que $(3K+2)a + (5K+3)b = 1$.
Logo, $m.d.c(3K+2, 5K+3) = 1$. Assim sendo, conclui-se que $3K+2$ e $5K+3$ são primos entre si.

16) $au + by = m.d.c(a,b)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m.d.c(a,b)} u + \frac{b}{m.d.c(a,b)} y = 1$$

Logo, u e y são primos entre si e, portanto, $m.d.c(u,y) = 1$.

18) a)

$$\begin{array}{l|l} 1001 & 357 \\ \hline 287 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 357 & 287 \\ \hline 70 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 287 & 70 \\ \hline 7 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 70 & 7 \\ \hline 0 & 10 \end{array}$$

$m.d.c(1001, 357) = 7$

$$287 = 70 \times 4 + 7$$
$$\Leftrightarrow 7 = 287 - 70 \times 4$$
$$\Leftrightarrow 7 = 1001 - 2 \times 357 - (357 - 287) \times 4$$
$$\Leftrightarrow 7 = 1001 - 6 \times 357 + 4 \times 287$$
$$\Leftrightarrow 7 = 1001 - 6 \times 357 + 4 \times (1001 - 2 \times 357)$$
$$\Leftrightarrow 7 = 5 \times 1001 - 14 \times 357$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 1001 & 33 \\ \hline 11 & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 33 & 11 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad 11 = 1001 - 30 \times 33$$

$m.d.c(1001, 33) = 11$

c)

$$\begin{array}{l|l} 126 & 56 \\ \hline 14 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 56 & 14 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \qquad 14 = 126 - 2 \times 56$$

$m.d.c(56, 126) = 14$

d) $\begin{array}{r|l} 1386 & 90 \\ \hline 36 & -15 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} -90 & 36 \\ \hline 18 & -2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 36 & 18 \\ \hline 0 & -2 \end{array}$

$m.d.c(-90, 1386) = -18$

$$18 = 90 - 2 \times 36$$
$$\Leftrightarrow 18 = 90 - 2 \times (1386 - 15 \times 90)$$
$$\Leftrightarrow 18 = 1386 \times (-2) + 90 \times 31$$
$$\Leftrightarrow 18 = 1386 \times (-2) - 90 \times (-31)$$

e) $\begin{array}{r|l} 2860 & 2310 \\ \hline 550 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 2310 & 550 \\ \hline 110 & 4 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 550 & 110 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$

$m.d.c(-2860, -2310) = 110$

$$110 = 2310 - 4 \times 550$$
$$\Leftrightarrow 110 = 2310 - 4 \times (2860 - 2310)$$
$$\Leftrightarrow 110 = 2860 \times (-4) + 2310 \times 5$$
$$\Leftrightarrow 110 = -2860 \times 4 - 2310 \times (-5)$$

19) a) $\begin{array}{r|l} 72 & 56 \\ \hline 16 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 56 & 16 \\ \hline 8 & 3 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$

$m.d.c(56, 72) = 8$

$$8 = 56 - 3 \times 16$$
$$\Leftrightarrow 8 = 56 - 3 \times (72 - 56)$$
$$\Leftrightarrow 8 = 56 - 3 \times 72 + 3 \times 56$$
$$\Leftrightarrow 8 = 72 \times (-3) + 56 \times 4$$
$$\Leftrightarrow m.d.c(56, 72) = 56 \times \underbrace{4}_{x} + 72 \times \underbrace{(-3)}_{y}$$

$x = 4$

$y = -3$

b) $\begin{array}{r|l} 138 & 24 \\ \hline 18 & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 24 & 18 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$

m.d.c $(24, 138) = 6$

$6 = 24 - 18$

$\Leftrightarrow 6 = 24 - (138 - 5 \times 24)$

$\Leftrightarrow 6 = 24 \times 6 + 138 \times (-1)$

$\Leftrightarrow \text{m.d.c}(24, 138) = 24 \times \underbrace{6}_{u} + 138 \times \underbrace{(-1)}_{y}$

$u = 6$

$y = -1$

22) $\begin{array}{r|l} 507 & 3 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1287 & 3 \\ 429 & 3 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$

$1287 = 3^2 \times 11 \times 13$

$507 = 3 \times 13^2$

$\Leftrightarrow 507 = 3 \times 11^0 \times 13^2$

m.d.c $(507, 1287) = 3 \times 11^0 \times 13 = 39$

m.m.c $(507, 1287) = 3^2 \times 11 \times 13^2 = 16731$

Folha 3

26) a) $6u + 51y = 22$

m.d.c $(6, 51) = 2^0 \times 3 \times 17^0$
$= 3$

$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 22 & 3 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$

$6 = 2 \times 3$ $51 = 3 \times 17$

m.d.c $\nmid 22$. Logo, a equação diofantimo não é solução.

b) $33x + 14y = 115$;

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \times 11$ $\qquad$ $14 = 2 \times 7$

$m.d.c(33,14) = 2^0 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^0$

$\Leftrightarrow m.d.c(33,14) = 1$

$m.d.c(33,14) = 1 \mid 115$. logo, a equação diofamtima tem solução.

c) $14x + 35y = 93$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$14 = 2 \times 7$ $\qquad$ $35 = 5 \times 7$

$m.d.c(14,35) = 2^0 \times 5^0 \times 7^1$
$= 7$

$$\begin{array}{ll} 93 & \underline{|7} \\ 2 & 13 \end{array}$$

$m.d.c(14,35) = 7 \nmid 93$. logo, a equação diofamtima não tem solução.

28) a) $18x + 5y = 48$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 2 \times 3^2$ $\qquad$ $5 = 5$

$m.d.c(18,5) = 2^0 \times 3^0 \times 5^0$
$= 1$

$m.d.c(18,5) = 1 \mid 48$. logo, a equação diofamtima tem solução.

<u>Solução particular</u>:

$$\begin{array}{ll} 18 & \underline{|5} \\ 3 & 3 \end{array}$$

$3 = 18 - 5 \times 3$

$48 = 18 \times 16 - 48 \times 5$

$(x_0, y_0) = (16, -48)$

Solução geral:

$$\begin{cases} x = 16 + \frac{5}{1}t \\ y = -48 - \frac{18}{1}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 + 5t \\ y = -48 - 18t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Soluções inteiras positivas:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 5t > 0 \\ -48 - 18t > 0 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{16}{5} \\ -18t > 48 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{16}{5} \\ 18t < -48 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -3{,}2 \\ t < -\frac{48}{18} = -2{,}6(6) \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{t = -3}$$

$t = -3$:

$$\begin{cases} x = 16 + 5 \times (-3) \\ y = -48 - 18 \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$54 = 2 \times 3^3$ $\qquad$ $21 = 3 \times 7$

$$m.d.c(54, 21) = 2^0 \times 3 \times 7^0 = 3$$

$$\begin{array}{l|l} 906 & 3 \\ \hline 06 & 302 \\ 0 & \end{array}$$

$m.d.c(54, 21) = 3 \mid 906$. Logo, a equação diofantina tem solução.

$$\begin{array}{l|l} 54 & 21 \\ \hline 12 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 906 & 54 \\ \hline 366 & 16 \\ 42 & \end{array}$$

$$906 = 54 \times 16 + 42$$

$$\Leftrightarrow 906 = 54 \times 16 + 21 \times 2$$

$$\begin{array}{l|l} 906 & 54 \\ \hline 366 & 16 \\ 42 & \end{array}$$

Solução particular:

$$(x_0, y_0) = (16, 2)$$

Solução geral:

$$\begin{cases} x = 16 + \frac{21}{3} t \\ y = 2 - \frac{54}{3} t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 + 7t \\ y = 2 - 18t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Soluções inteiras positivas:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 7t > 0 \\ 2 - 18t > 0 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{16}{7} \\ 18t < 2 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{16}{7} \simeq -2{,}28\ldots \\ t < \frac{1}{9} \simeq 0{,}(1) \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \{-2, -1, 0\}$$

$t = -2$:

$$\begin{cases} x = 16 + 7 \times (-2) \\ y = 2 - 18 \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 38 \end{cases}$$

$t = -1$:

$$\begin{cases} x = 16 + 7 \times (-1) \\ y = 2 - 18 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 20 \end{cases}$$

$t = 0$:

$$\begin{cases} x = 16 + 7 \times 0 \\ y = 2 - 18 \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 2 \end{cases}$$

c) $\begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad 5 = 5$ $\qquad \begin{array}{c|c} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $\quad 11 = 11$

$m.d.c(5, 11) = 5^0 \times 11^0 = 1 \mid 29$

logo, a equação diofantina tem solução.

$\begin{array}{l|l} 11 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

$$1 = 11 - 2 \times 5$$

$$\Leftrightarrow 29 = 11 \times 29 - 2 \times 29 \times 5$$

$$\Leftrightarrow 29 = 5 \times (-58) - 11 \times (-29)$$

Solução geral:

$(x_0, y_0) = (-58, -29)$

Equação geral:

$$\begin{cases} x = -58 + \frac{-11}{1} t \\ y = -29 - \frac{5}{1} t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -58 - 11t \\ y = -29 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Soluções inteiras positivas:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -58 - 11t > 0 \\ -29 - 5t > 0 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} -11t > 58 \\ -5t > 29 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11t < -58 \\ 5t < -29 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{58}{11} \simeq -5,27\ldots \\ t < -\frac{29}{5} \simeq -5,8\ldots \end{cases} \Leftrightarrow t \leqslant -6, t \in \mathbb{Z}$$

29) $8u - 15y = 4$

$m.d.c(8,15) = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1 \mid 4$

logo, a equação diofantina tem solução.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2^3 \qquad 15 = 5 \times 3$

Solução particular:

$$8 \times 2 - 15 \times 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow 8 \times 2 \times 4 - 15 \times 4 = 4$$
$$\Leftrightarrow 8 \times 8 - 15 \times 4 = 4$$

$(u_0, y_0) = (8, 4)$

Equação geral:

$$\begin{cases} u = 8 + \frac{-15}{1} t \\ y = 4 - \frac{8}{1} t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 - 15t \\ y = 4 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Soluções inteiras positivas:

$$\begin{cases} u > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 15t > 0 \\ 4 - 8t > 0 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} -15t > -8 \\ -8t > -4 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15t < 8 \\ 8t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{8}{15} \simeq 0,5(3) \\ t < \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \leq 0, t \in \mathbb{Z}$$

Existe uma infinidade de soluções

32) Adulto Criança

1,80 € 0,75 €

x - número de adultos

y - número de crianças

$$1{,}80x + 0{,}75y = 90$$

$$\Leftrightarrow 180x + 75y = 9000$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ $\quad$ $75 = 5^2 \times 3$

$$m.d.c(180, 75) = 2^0 \times 3 \times 5 = 15 \mid 9000$$

logo, a equação tem solução!

$$\begin{array}{l|l} 9000 & 15 \\ \hline 000 & 600 \end{array}$$

Solução particular:

$$\begin{array}{l|l} 180 & 75 \\ \hline 30 & 2 \end{array}$$

$$180 - 2 \times 75 = 30$$

$$\Leftrightarrow 180 \times 300 + 75 \times (-600) = 9000$$

$$(x_0, y_0) = (300, -600)$$

Equação geral:

$$\begin{cases} x = 300 + \frac{75}{15}t \\ y = -600 - \frac{180}{15}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 + 5t \\ y = -600 - 12t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x > y \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 + 5t > -600 - 12t \\ -600 - 12t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17t > -900 \\ 12t \leq -600 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{900}{17} \simeq -52{,}94\ldots \\ t \leq -50 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \{-52, -51, -50\}$$

$t = -52$:

$$\begin{cases} x = 300 + 5 \times (-52) \\ y = -600 - 12 \times (-52) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 24 \end{cases}$$

$t = -51$:

$$\begin{cases} x = 300 + 5 \times (-51) \\ y = -600 - 12 \times (-51) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 12 \end{cases}$$

$t = -50$:

$$\begin{cases} x = 300 + 5 \times (-50) \\ y = -600 - 12 \times (-50) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 0 \end{cases}$$

Soluções:

Adultos (x)	Crianças (y)	Nº de pessoas a assistir ($x+y$)
40	24	64
45	12	57
50	0	50

33) x - idade da morte
y - idade em 1940

$$x = \frac{1}{29}(1940 - y)$$

$\Leftrightarrow 29x = 1940 - y$

$\Leftrightarrow 29x + y = 1940$

Scanned with CamScanner

$$\begin{array}{c|l} 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$29 = 29 \qquad 1 = 1$

m.d.c $(29, 1) = 1 \mid 1940$

Logo, a equação tem solução!

Solução particular:

$$\begin{array}{l|l} 1940 & 29 \\ \hline 200 & 66 \\ 26 & \end{array}$$

$$29 \times 66 + 1 \times 26 = 1940$$

$$\Leftrightarrow 29 \times 66 + 1 \times 26 = 1940$$

$$(u_0, y_0) = (66, 26)$$

Equação geral:

$$\begin{cases} u = 66 + \frac{1}{1}t \\ y = 26 - \frac{29}{1}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 66 + t \\ y = 26 - 29t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} u \geqslant y \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 66 + t \geqslant 26 - 29t \\ 26 - 29t \geqslant 0 \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 30t \geqslant -40 \\ 29t \leqslant 26 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant -\frac{4}{3} \simeq -1,(3) \\ t \leqslant \frac{26}{29} \simeq 0,89\ldots \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{-1, 0\}$$

$t = -1$:

$$\begin{cases} u = 66 - 1 \\ y = 26 - 29 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 65 \\ y = 55 \end{cases}$$

Idade em 1950: 55

$t = 0$:

$$\begin{cases} x = 66 \\ y = 26 \end{cases}$$

Idade em 1950 : 26

34)

Sabor	Preço	Vendidas
Baunilha	1,00 €	63
Morango	1,50 €	61
Chocolate	2,00 €	56

Total = 63+61+56 = 180 bolas

Dinheiro sem descontos $= 63 \times 1,00 + 61 \times 1,50 + 56 \times 2,00$
$= 266,5$ €

Dinheiro com descontos $= 249,75$ €

Desconto $= 266,5 - 249,75 = 16,75$ €

x - nº de gelados com 1 bola
y - nº de gelados com 2 bolas
z - nº de gelados com 3 bolas

$$0,31y + 0,71z = 16,75$$
$$\Leftrightarrow 31y + 71z = 1675$$

$$\begin{array}{c|l} 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$31 = 31 \qquad 71 = 71$

$m.d.c(31, 71) = 1 \mid 1675$

logo, a equação tem solução

Solução particular:

$$\begin{array}{l|l} 71 & 31 \\ \hline 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 31 & 9 \\ \hline 4 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Scanned with CamScanner

$1 = 9 - 2 \times 4$

$\Leftrightarrow 1 = 9 - 2 \times (31 - 3 \times 9)$

$\Leftrightarrow 1 = 9 \times 7 - 2 \times 31$

$\Leftrightarrow 1 = (71 - 2 \times 31) \times 7 - 2 \times 31$

$\Leftrightarrow 1 = 71 \times 7 - 16 \times 31$

$\Leftrightarrow 71 \times 7 \times 1675 + 31 \times (-16) \times 1675 = 1675$

$\Leftrightarrow 31 \times (-26800) + 71 \times 11725 = 1675$

Solução geral: (y, z) com

$$\begin{cases} y = -26800 + 71t \\ z = 11725 - 31t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -26800 + 71t \geq 0 \\ 11725 - 31t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 71t \geq 26800 \\ 31t \leq 11725 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \dfrac{26800}{71} \simeq 377{,}46\ldots \\ t \leq \dfrac{11725}{31} \simeq 378{,}22\ldots \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 378$$

$$\begin{cases} y = -26800 + 71 \times 378 \\ z = 11725 - 31 \times 378 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 38 \\ z = 7 \end{cases}$$

$x = 180 - 38 \times 2 - 7 \times 3 = 83$ gelados com 1 bola

Nº clientes no dia $= x + y + z = 83 + 38 + 7 = 128$ clientes

Folha 4

35) a) $91 \equiv 0 \pmod 7$

$$\begin{array}{l|l} 91 & 7 \\ \hline 0 & 13 \end{array}$$

$7 \mid 91 - 0$ Verdadeiro

b) $-2 \equiv 2 \pmod 8$

$$\begin{array}{l|l} -4 & 8 \\ \hline -4 & 0 \end{array}$$

$8 \nmid -2-2$

Falso

c) $17 \not\equiv 13 \pmod 2$

$$\begin{array}{l|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$2 \mid 17 - 13 = 4$

Falso

36) $25 \equiv 4 \pmod m$

$m \mid 25 - 4$

$\Leftrightarrow m \mid 21$

$\Leftrightarrow m \in \{1, 3, 7, 21\}$

37) a) $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} m \mid a-b \\ m \mid m \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid a-b$

$\Leftrightarrow a \equiv b \pmod m$

b) $a \equiv b \pmod m \iff m \mid a-b$

$\Rightarrow m \mid c(a-b)$

$\Rightarrow m \mid ca - cb$

$\Rightarrow ca \equiv cb \pmod m$

38) Por exemplo, $a = 5$, $b = 4$ e $m = 3$

$5^2 \equiv 4^2 \pmod 3 \quad \wedge \quad 5 \not\equiv 4 \pmod 3$

$\iff 25 \equiv 16 \pmod 3 \quad \wedge \quad 5 \not\equiv 4 \pmod 3$

$\iff 3 \mid 25 - 16 = 9 \quad \wedge \quad 3 \nmid 5 - 4 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

43) 2^{50}

$$\begin{array}{r|l} 50 & 3 \\ \hline 2 & 16 \end{array}$$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$

$\iff (2^3)^{16} \equiv 1^{16} \pmod 7$

$\iff 2^{48} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2 \pmod 7$

$\iff 2^{50} \equiv 4 \pmod 7$

resto da divisão de 2^{50} por 7 é 4.

$41 \equiv -1 \pmod 7$

$41^{62} \equiv (-1)^{62} \pmod 7$

$41^{62} \equiv 1 \pmod 7$

$\left.\begin{array}{l} 41 \equiv 6 \pmod 7 \\ 41^{62} \equiv 1 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 41 \times 41^{62} \equiv 6 \times 1 \pmod 7 \Rightarrow 41^{63} \equiv 6 \pmod 7$

O resto da divisão de 41^{63} por 7 é 6.

44) $4^3 \equiv 1 \pmod 9$

$215 \underline{|3}$
$05 \quad 71$
2

$215 = 71 \times 3 + 2$

$\Rightarrow (4^3)^{71} \equiv 1^{71} \pmod 9$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 4^{213} \equiv 1 \pmod 9 \\ 4^2 \equiv 7 \pmod 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 4^{213} \times 4^2 \equiv 1 \times 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{215} \equiv 7 \pmod 9$

O resto da divisão de 4^{215} por 9 é 7.

~~45)~~

Folha 5

46) $m^3 - m = 3K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 3 \lor m \equiv 1 \pmod 3 \lor m \equiv 2 \pmod 3$

$\Leftrightarrow m^3 \equiv 0^3 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 1^3 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 2^3 \pmod 3$

$\Leftrightarrow m^3 \equiv 0 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 1 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 8 \pmod 3$ *

$\Leftrightarrow m^3 \equiv 0 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 1 \pmod 3 \lor m^3 \equiv 2 \pmod 3$

Portanto, podemos concluir que $m^3 \equiv m \pmod 3$, o que é equivalente a $m^3 - m = 3K,\ K \in \mathbb{Z}$.

* $m^3 \equiv 8 \pmod 3$

$\Leftrightarrow m^3 - 8 = 3K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m^3 - 2 - 2 \times 3 = 3K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m^3 - 2 = 3K + 2 \times 3,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m^3 - 2 = 3(K + 2),\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m^3 \equiv 2 \pmod 3$

48) $N = \overline{3u5y}$

$$\begin{cases} 2\times 5 + y \equiv 0 \pmod 4 \\ 3+u+5+y \equiv 0 \pmod 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + y \equiv 0 \pmod 4 \\ 8+u+y \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 8+u+2 \equiv 0 \pmod 9 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ 8+u+6 \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 10+u \equiv 0 \pmod 9 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ 14+u \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ u = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ u = 4 \end{cases}$$

49) $N = \overline{34uu58y}$

$$\begin{cases} 3+4+u+u+5+8+y \equiv 0 \pmod 9 \\ 3+u+5+y-(4+u+8) \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+y+20 \equiv 0 \pmod 9 \\ \cancel{8}+\cancel{u}+y-4-\cancel{u}-\cancel{8} \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u+y+20 \equiv 0 \pmod 9 \\ y-4 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+24 \equiv 0 \pmod 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+12) \equiv 0 \pmod 9 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

50) $N = \overline{56a21b}$

$$\begin{cases} b \equiv 0 \pmod 2 \\ (6+2+b) - (5+a+1) \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \pmod 2 \\ 8 + b - 6 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \pmod 2 \\ b - a + 2 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} b = 2 \\ 4 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \vee \begin{cases} b = 4 \\ 6 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \vee \begin{cases} b = 6 \\ 8 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} b = 8 \\ 10 - a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 4 \\ a = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 6 \\ a = 8 \end{cases}$$

$\vee \begin{cases} b = 8 \\ a \cancel{=10} \end{cases}$, não é digito pois $9 < a = 10$.

51) a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 25 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$m.d.c(25, 29) = 1 \mid 15$. Logo, a equação tem 1 solução mod 29.

$$25x \equiv 15 \pmod{29} \Leftrightarrow 25x - 15 = 29k, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 25x - 29k = 15, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = 25 - 6 \times 4$$
$$\Leftrightarrow 1 = 25 - 6 \times (29 - 25)$$
$$\Leftrightarrow 1 = 29 \times (-6) + 25 \times 7$$
$$\Leftrightarrow 1 = 25 \times 7 - 29 \times 6$$
$$\Leftrightarrow 15 = 25 \times \underbrace{105}_{\text{solução particular}} - 29 \times 90$$

Logo, a solução mod 29 é

$$x \equiv 105 \pmod{29}$$

$105 - 29 \times 3 = 18$

$$\Leftrightarrow x \equiv 18 \pmod{29}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 18 + 29k \pmod{29}, \ k \in \mathbb{Z}$$

b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$

$$26 = 5 \times 5 + 1 \qquad 5 = 1 \times 5 + 0$$

m.d.c $(5, 26) = 1 \mid 2$. Logo, a equação tem 1 solução mod 2.

$$5x \equiv 2 \pmod{26} \Leftrightarrow 5x - 2 = 26K, \; K \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 5x - 26K = 2, \; K \in \mathbb{Z}$$

$$1 = 26 - 5 \times 5$$
$$\Leftrightarrow 2 = 5 \times \underbrace{(-10)}_{\text{solução particular}} - 26 \times (-2)$$

Logo, a solução mod 26 é:

$-10 + 26 = 16$

$$x \equiv -10 \pmod{26}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 16 \pmod{26}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 16 + 26K \pmod{26}, \; K \in \mathbb{Z}$$

c) $140x \equiv 133 \pmod{301}$

$$301 = 140 \times 2 + 21 \qquad 140 = 21 \times 6 + 14 \qquad 21 = 14 \times 1 + 7 \qquad 14 = 7 \times 2 + 0$$

$$133 = 7 \times 19 + 0$$

m.d.c $(140, 301) = 7 \mid 133$. Logo, a congruência admite 7 soluções distintas mod 301

$140x \equiv 133 \pmod{301} \Leftrightarrow 140x - 133 = 301K\ ,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 140x - 301K = 133\ ,\ K \in \mathbb{Z}$

$21 - 14 = 7$

$\Leftrightarrow 21 - (140 - 21 \times 6) = 7$

$\Leftrightarrow 21 \times 7 - 140 = 7$

$\Leftrightarrow (301 - 140 \times 2) \times 7 - 140 = 7$

$\Leftrightarrow 301 \times 7 - 140 \times 15 = 7$

$\Leftrightarrow 140 \times (-15) - 301 \times (-7) = 7 \quad) \times 19$

$\Leftrightarrow 140 \times \underbrace{(-285)}_{\text{solução particular}} - 301 \times (-133) = 133$

Solução particular mod 301:

$x \equiv -285 \pmod{301}$ $\qquad -285 + 301 = 16$

$\Leftrightarrow x \equiv 16 \pmod{301}$

Portanto, as 7 soluções mod 16 são:

$x_0 \equiv 16 \pmod{301}$

$x_1 = 16 + \frac{301}{7} \pmod{301}$

$\vdots$

$x_6 = 16 + \frac{301}{7} \times 6 \pmod{301}$

Scanned with CamScanner

52) a) $12x \equiv 6 \pmod{16}$

$m.d.c(12,16) = 4 \nmid 6$. Logo, a congruência não é solúvel.

b) $12x \equiv 7 \pmod{35}$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 12 \\ \hline 11 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 11 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 1 \\ \hline 0 & 11 \end{array}$$

$m.d.c(12,35) = 1 \mid 7$. Logo, a congruência admite 1 solução mod 35.

$$12x \equiv 7 \pmod{35} \Leftrightarrow 12x - 7 = 35K, \ K \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 12x - 35K = 7, \ K \in \mathbb{Z}$$

$$12 = 11 + 1$$
$$\Leftrightarrow 12 = 35 - 2 \times 12 + 1$$
$$\Leftrightarrow 12 \times 3 - 35 \times 1 = 1 \quad \Big) \times 7$$
$$\Leftrightarrow 12 \times \underbrace{21}_{\text{solução particular}} - 35 \times 7 = 7$$

Logo, a solução mod 35 é:

$$x \equiv 21 \pmod{35}$$

Menor solução não negativa: 21.

c) $12x \equiv 24 \pmod{35}$

Pela alínea anterior, $m.d.c(12,35) = 1 \mid 24$. Logo, existe 1 solução mod 35.

$$12x \equiv 24 \pmod{35} \Leftrightarrow 12x - 24 = 35K, \ K \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 12x - 35K = 24, \ K \in \mathbb{Z}$$

Pela alínea anterior:

$$12 \times 3 - 35 \times 1 = 1 \quad \big) \times 24$$

$$12 \times \underbrace{72}_{\text{solução particular}} - 35 \times 24 = 24$$

Logo, a solução mod 35 é:

$$x \equiv 72 \pmod{35}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{35}$$

A menor solução não negativa é: 2.

d) $10x \equiv 14 \pmod{16}$

m.d.c$(10, 16) = 2 \mid 14$. Logo, existem 2 soluções mod 16.

$$10x \equiv 14 \pmod{16} \Leftrightarrow 10x - 14 = 16K,\ K \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 10x - 16K = 14,\ K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 10 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$10 - 6 = 4$$

$$\Leftrightarrow 10 - (16 - 10) = 4$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 2 - 16 = 4 \quad \big) + 10$$

$$\Leftrightarrow 10 \times \underbrace{3}_{\text{solução particular}} - 16 = 14$$

Logo, as soluções mod 16 são

$$x_0 \equiv 3 \pmod{16}$$

$$x_1 \equiv 3 + \frac{16}{2} \pmod{16}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \equiv 11 \pmod{16}$$

A menor solução não negativa é: 3.

e) $60x \equiv -30 \pmod{165}$

$$\begin{array}{r|l} 165 & 60 \\ \hline 45 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 45 \\ \hline 15 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 15 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

m.d.c$(60, 165) = 15 \mid -30$. Logo, existem 15 soluções mod 165.

$60x \equiv -30 \pmod{165} \Leftrightarrow 60x-(-30) = 165K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 60x - 165K = -30,\ K \in \mathbb{Z}$

$15 = 60-45$

$\Leftrightarrow 15 = 60-(165-2\times 60)$

$\Leftrightarrow 15 = 60\times 3 - 165 \quad) \times(-2)$

$\Leftrightarrow 60\times\underbrace{(-6)}_{\text{solução particular}} - 165\times(-2) = -30$

logo, a solução mod 165 é:

$x \equiv -6 \pmod{165}$

$\Leftrightarrow x \equiv -6 + \frac{165}{15}K \pmod{165}, K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv -6 + 11K \pmod{165}, K\in\mathbb{Z}$

$x \equiv 5 \pmod{11}$

A menor solução não negativa é: 5

53) $14x \equiv 18 \pmod{60}$

$60 \,\underline{|14}$ — 4, 4 $\quad$ $14\,\underline{|4}$ — 2, 3 $\quad$ $4\,\underline{|2}$ — 0, 2

m.d.c$(14,60) = 2$. logo, existem 2 soluções mod 60.

$14x \equiv 18 \pmod{60} \Leftrightarrow 14x - 18 = 60K,\ K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 14x - 60K = 18,\ K \in \mathbb{Z}$

$14 - 4\times 3 = 2$

$\Leftrightarrow 14 - 3\times(60-14\times 4) = 2$

$\Leftrightarrow 14\times 13 - 60\times 3 = 2 \quad) \times 9$

$\Leftrightarrow 14\times\underbrace{117}_{\text{solução particular}} - 60\times 27 = 18$

As soluções da congruência são da forma:

$x \equiv 117 + \frac{60}{2}K \pmod{60}, K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv \underbrace{\underbrace{117}_{\text{ímpar}} + \underbrace{30K}_{\text{par};\ \forall K\in\mathbb{Z}}}_{\text{ímpar},\ \forall K\in\mathbb{Z}} \pmod{60}, K\in\mathbb{Z}$

Uma vez que $117 + 30K$ é ímpar, $\forall K \in \mathbb{Z}$, não existem soluções pares.

54) a) $13u \equiv 17 \pmod{42}$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 13 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 3 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

$m.d.c\,(13, 42) = 1 \mid 17$. logo, existe 1 solução mod 42.

$13u \equiv 17 \pmod{42} \Leftrightarrow 13u - 17 = 42K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 13u - 42K = 17,\ K \in \mathbb{Z}$

$13 - 4 \times 3 = 1$

$\Leftrightarrow 13 - 4 \times (42 - 3 \times 13) = 1$

$\Leftrightarrow 13 \times 13 - 42 \times 4 = 1 \quad) \times 17$

$\Leftrightarrow 13 \times \underbrace{221}_{\text{solução particular}} - 42 \times 68 = 17$

As soluções da congruência são da forma:

$u \equiv 221 + \frac{42}{1} K \pmod{42},\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow u \equiv 221 + 42K \pmod{42},\ K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 221 + 42K > -100 \\ 221 + 42K < 0 \end{cases},\ K \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K > -\frac{107}{14} \simeq -7{,}64\ldots \\ K < -\frac{221}{42} \simeq -5{,}26\ldots \end{cases},\ K \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} K \geqslant -7 \\ K \leqslant -6 \end{cases},\ K \in \mathbb{Z} \Rightarrow K \in \{-6, -7\}$$

Soluções

$K = -6$: $u \equiv 221 + 42 \times (-6) \pmod{42} \Leftrightarrow u \equiv -31 \pmod{42}$

$K = -7$: $u \equiv 221 + 42 \times (-7) \pmod{42} \Leftrightarrow u \equiv -73 \pmod{42}$

b) As soluções da congruência são da forma:

$$x \equiv \underbrace{\underbrace{221}_{\text{ímpar}} + \underbrace{42k}_{\text{par},\ \forall k \in \mathbb{Z}}}_{\text{ímpar},\ \forall k \in \mathbb{Z}} \pmod{42},\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, não existem soluções pares.

55) a) $18x \equiv 9 \pmod{21}$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 18 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

m.d.c $(18, 21) = 3 \mid 9$

Logo, a congruência linear admite solução.

b) $18x \equiv 9 \pmod{21} \Leftrightarrow 18x - 9 = 21k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 18x - 21k = 9,\ k \in \mathbb{Z}$

$21 - 18 = 3$

$\Leftrightarrow 18 \times (-1) - 21 \times (-1) = 3 \quad) \times 3$

$\Leftrightarrow 18 \times \underbrace{(-3)}_{\text{solução particular}} - 21 \times (-3) = 9$

As soluções da congruência são da forma:

$x \equiv -3 + \frac{21}{3} k \pmod{21},\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv -3 + 7k \pmod{21},\ k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} -3 + 7k > -1 \\ -3 + 7k \leq 80 \end{cases},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{2}{7} \simeq 0{,}28\ldots \\ k \leq \frac{83}{7} \simeq 11{,}85\ldots \end{cases},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 1 \\ k \leq 11 \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Existem 11 soluções no intervalo $]-1, 80]$.

56) a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

m.d.c $(3,5)$ = m.d.c $(3,7)$ = m.d.c $(5,7) = 1$. Logo, o sistema admite uma única solução $m = 3 \times 5 \times 7 = 105$

Sejam:

$$N_1 = \frac{m}{3} = \frac{105}{3} = 35 \; ; \; N_2 = \frac{m}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

$$N_3 = \frac{m}{7} = \frac{105}{7} = 15$$

Como m.d.c $(35,3)$ = m.d.c $(21,5)$ = m.d.c $(15,7) = 1 \mid 1$, cada uma das soluções do sistema a seguir têm solução:

$$\begin{cases} 35x \equiv 1 \pmod{3} \\ 21x \equiv 1 \pmod{5} \\ 15x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

$35x \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 35x - 1 = 3K, \; K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 35x - 3k = 1, \; K \in \mathbb{Z}$

$35 \,\underline{\lfloor 3}$ $3 \,\underline{\lfloor 2}$ $2 \,\underline{\lfloor 1}$
$2 \;\; 11$ $1 \;\; 1$ $0 \;\; 2$

$35 - 3 \times 11 = 2$

$\Leftrightarrow 35 - 3 \times 11 = 3 \times 1 - 1$

$\Leftrightarrow 35 - 3 \times 12 = -1$

$\Leftrightarrow 35 \times \underbrace{(-1)}_{\text{solução particular}} - 3 \times (-12) = 1$

A solução da congruência mod 3 é:

$x \equiv -1 \pmod{3}$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{3}$

$21u \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow 21u - 1 = 5K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 21u - 5K = 1,\ K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

A solução desta congruência mod 5 é:

$u \equiv 1 \pmod 5$

$21 \times \underbrace{1}_{\text{solução particular}} - 5 \times 4 = 1$

$15u \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow 15u - 1 = 7K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 15u - 7K = 1,\ K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 1 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

A solução desta congruência mod 7 é:

$u \equiv 1 \pmod 7$

$15 \times \underbrace{1}_{\text{solução particular}} - 7 \times 2 = 1$

Então, pelo Teorema Chinês dos Restos, a solução do sistema $\overline{x}$ é igual a:

$\overline{x} = 1 \times 35 \times 2 + 2 \times 21 \times 1 + 3 \times 15 \times 1$

$\Leftrightarrow \overline{x} = 157$. Logo, a única solução mod 105 é

$x' \equiv 157 \pmod{105}$

$\Leftrightarrow x' \equiv 52 \pmod{105}$

57) $42 = 2\times 3\times 7$

$$17x \equiv 5 \pmod{42} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x \equiv 5 \pmod{2} \\ 17x \equiv 5 \pmod{3} \\ 17x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ -x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv -3 \pmod{7}$$

m.d.c$(2,3)$ = m.d.c$(2,7)$ = m.d.c$(3,7) = 1$, o sistema admite uma única solução $m = 2\times 3\times 7 = 42$.

Sejam:
$$N_1 = \frac{m}{2} = \frac{42}{2} = 21 \; ; \; N_2 = \frac{m}{3} = \frac{42}{3} = 14$$
$$N_3 = \frac{m}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Como m.d.c$(21,2)$ = m.d.c$(14,3)$ = m.d.c$(6,7) = 1$, cada uma das seguintes congruências lineares

$$21x \equiv 1 \pmod{2}, \quad 14x \equiv 1 \pmod{3}, \quad 6x \equiv 1 \pmod{7}$$

admite uma única solução mod 2, mod 3 e mod 7, respetivamente.

$$21x \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow 21x - 1 = 2K, \; K \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 21x - 2K = 1, \; K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 2 \\ \hline 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

A solução mod 2 desta congruência é:
$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$21 \times \underbrace{1}_{\text{solução particular}} - 2\times 10 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 34 & 7 \\ \hline -1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

Scanned with CamScanner

$14u \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 14u - 1 = 3K, \; K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 14u - 3K = 1, \; K \in \mathbb{Z}$

$$14 \,\underline{|3} \qquad 3 \,\underline{|2} \qquad 2 \,\underline{|1}$$
$$2 \quad 4 \qquad 1 \quad 1 \qquad 0 \quad 2$$

$14 \times 1 - 3 \times 4 = 2$

$\Leftrightarrow 14 \times 1 - 3 \times 4 = 3 - 1$

$\Leftrightarrow 14 \times 1 - 3 \times 5 = -1$

$\Leftrightarrow 14 \times \underbrace{(-1)}_{\text{solução particular}} - 3 \times (-5) = 1$

A solução mod 3 desta congruência linear é:

$u \equiv -1 \pmod{3}$

$\Leftrightarrow u \equiv 2 \pmod{3}$

$6u \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow 6u - 1 = 7K, \; K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 6u - 7K = 1, \; K \in \mathbb{Z}$

$$7 \,\underline{|6} \qquad 6 \,\underline{|1}$$
$$1 \quad 1 \qquad 0 \quad 6$$

$7 - 6 = 1$

$\Leftrightarrow 6 \times \underbrace{(-1)}_{\text{solução particular}} - 7 \times (-1) = 1$

A solução mod 7 desta congruência linear é:

$u \equiv -1 \pmod{7}$

$\Leftrightarrow u \equiv 6 \pmod{7}$

Então, pelo Teorema Chinês dos Restos,

$\bar{x} = 1 \times 21 \times 1 + 1 \times 14 \times 2 + (-3) \times 6 \times 6 = -59$

Logo, a única solução do sistema mod 42 é:

$x' \equiv -59 \pmod{42}$

$\Leftrightarrow x' \equiv 25 \pmod{42}$

$$178 \,\underline{|42}$$
$$10 \quad 4$$

$178 - 42 \times 4 = 10$

Scanned with CamScanner

58)
$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$
$= 3 \times 4 \times 7$

$$19u \equiv 4 \pmod{84} \Leftrightarrow \begin{cases} 19u \equiv 4 \pmod 3 \\ 19u \equiv 4 \pmod 4 \\ 19u \equiv 4 \pmod 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \equiv 1 \pmod 3 \\ -u \equiv 0 \pmod 4 \\ u \equiv 5 \pmod 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \equiv 1 \pmod 3 \\ u \equiv 0 \pmod 4 \\ u \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$$

m.d.c $(3,4)$ = m.d.c $(3,7)$ = m.d.c $(4,7) = 1 \mid 4$. logo, o sistema admite uma única solução mod $m = 3 \times 4 \times 7 = 84$

Sejam: $N_1 = \frac{m}{3} = \frac{84}{3} = 28$; $N_2 = \frac{m}{4} = \frac{84}{4} = 21$

$N_3 = \frac{m}{7} = \frac{84}{7} = 12$

Como m.d.c $(28,3)$ = m.d.c $(21,4)$ = m.d.c $(12,7) = 1$, cada umas das congruências lineares

$28u \equiv 1 \pmod 3$, $21u \equiv 1 \pmod 4$, $12u \equiv 1 \pmod 7$

admite uma única solução mod 3, mod 4 e mod 7, respetivamente.

$28u \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow 28u - 1 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 28u - 3k = 1,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 3 \\ \hline 1 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

A solução mod 3 desta congruência é:
$u \equiv 1 \pmod 3$

$28 \times \underbrace{1}_{\text{solução particular}} - 3 \times 9 = 1$

Scanned with CamScanner

$21u \equiv 1 \pmod 4 \Leftrightarrow 21u - 1 = 4K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 21u - 4K = 1,\ K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

A solução mod 4 desta congruência é:

$u \equiv 1 \pmod 4$

$21 \times \underbrace{1}_{\text{solução particular}} - 4 \times 5 = 1$

$12u \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow 12u - 1 = 7K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 12u - 7K = 1,\ K \in \mathbb{Z}$

$12 \times \underbrace{3}_{\text{solução particular}} - 7 \times 5 = 1$

A solução mod 7 desta congruência é:

$u \equiv 3 \pmod 7$

Então, pelo Teorema Chinês dos Restos,

$\overline{x} = 1 \times 28 \times 1 + 0 + 5 \times 12 \times 3$

$\Leftrightarrow \overline{x} = 208$ é solução do sistema

As soluções do sistema são da forma:

$u' \equiv 208 + 84K \pmod{84},\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow u' \equiv 40 + 84K \pmod{84},\ K \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} 40 + 84K > -200 \\ 40 + 84K \leqslant 284 \end{cases},\ K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} K > -\frac{20}{7} \simeq -2{,}85\ldots \\ K \leqslant \frac{61}{21} \simeq 2{,}90\ldots \end{cases},\ K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \begin{cases} K \geqslant -2 \\ K \leqslant 2 \end{cases},\ K \in \mathbb{Z} \Rightarrow K \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$u \in \{-128, -44, 40, 124, 208\}$

64) Seja x o número de moedas.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 10 \pmod{16} \\ x \equiv 0 \pmod{15} \end{cases}$$

Uma vez que $m.d.c(17,16) = m.d.c(17,15) = m.d.c(16,15) = 1$, o sistema admite uma única solução mod $m = 17 \times 16 \times 15 = 4080$

Sejam: $N_1 = \frac{m}{17} = \frac{4080}{17} = 240$; $N_2 = \frac{m}{16} = \frac{4080}{16} = 255$

$N_3 = \frac{m}{15} = \frac{4080}{15} = 277$

Como $m.d.c(240,17) = m.d.c(255,16) = m.d.c(277,15) = 1$, cada uma das congruências lineares

$240x \equiv 1 \pmod{17}$, $255x \equiv 1 \pmod{16}$, $277x \equiv 1 \pmod{15}$

$240x \equiv 1 \pmod{17} \Leftrightarrow 240x - 1 = 17K, K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 240x - 17K = 1, K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 240 & 17 \\ \hline 70 & 14 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 2 \\ \hline 1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

A solução mod 17 desta congruência é:

$x \equiv -8 \pmod{17}$

$\Leftrightarrow x \equiv 9 \pmod{17}$

$17 - 2 \times 8 = 1$

$\Leftrightarrow 17 - (240 - 17 \times 14) \times 8 = 1$

$\Leftrightarrow 17 - 240 \times 8 + 17 \times 112 = 1$

$\Leftrightarrow 240 \times \underbrace{(-8)}_{\text{solução particular}} - 17 \times (-113) = 1$

$255u \equiv 1 \pmod{16} \Leftrightarrow 255u - 1 = 16K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 255u - 16K = 1,\ K \in \mathbb{Z}$

$$255 = 16 \times 15 + 15$$
$$16 = 15 \times 1 + 1$$
$$15 = 1 \times 15 + 0$$

$16 - 15 = 1$

$\Leftrightarrow 16 - (255 - 16 \times 15) = 1$

$\Leftrightarrow 255 \times \underbrace{(-1)}_{\text{solução particular}} + 16 \times 16 = 1$

A solução mod 16 desta congruência é:

$u \equiv -1 \pmod{16}$

$\Leftrightarrow u \equiv 15 \pmod{16}$

Pelo Teorema Chinês dos Restos,

$\overline{x} = 3 \times 240 \times 9 + 10 \times 255 \times 15 + 0$

$\Leftrightarrow \overline{x} = 44730$ é uma solução do sistema.

As soluções do sistema são da forma:

$u' \equiv 44730 + 4080k \pmod{4080},\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow u' \equiv 3930 \pmod{4080},\ K \in \mathbb{Z}$

$$44730 = 4080 \times 10 + 3930$$

3930 é a única solução mod 4080 do sistema. O número mínimo de moedas que o saco poderia ter eram 3930 moedas.

Folha 4 EPTN

39) a) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ é conjunto de resíduos.

$-2 \equiv 3 \pmod 5$

$-1 \equiv 4 \pmod 5$

$0 \equiv 0 \pmod 5$

$1 \equiv 1 \pmod 5$

$2 \equiv 2 \pmod 5$

b) $\{0, 5, 10, 15, 20\}$ não é conjunto de resíduos mod 5.

$10 \equiv 0 \pmod{5}$

c) $\{5, 11, 2, 13, 29\}$ é conjunto de resíduos mod 5.

$5 \equiv 0 \pmod{5}$

$11 \equiv 1 \pmod{5}$

$2 \equiv 2 \pmod{5}$

$13 \equiv 3 \pmod{5}$

$29 \equiv 4 \pmod{5}$

d) $\{-6, -3, 0, 3, 6\}$ é conjunto de resíduos mod 5.

$-6 \equiv 4 \pmod{5}$

$-3 \equiv 2 \pmod{5}$

$0 \equiv 0 \pmod{5}$

$3 \equiv 3 \pmod{5}$

$6 \equiv 1 \pmod{5}$

4a) $-22-8=-30$

$15 \mid -30 \iff -22 \equiv 8 \pmod{15}$ e, por isso,

$[-22]_{15} \cap [8]_{15} = [8]_{15} = \{ 8+15K : K \in \mathbb{Z} \}$

Por exemplo, para $K=1$, $8+15=23$ é primo.

b) $[20]_{15} \times ([39]_{15} + [-80]_{15}) =$

$= [20]_{15} \times [-41]_{15} = [-820]_{15} = [5]_{15} = \{ 5+15K : K \in \mathbb{Z} \}$

$$\begin{array}{r|l} 820 & 15 \\ \hline 70 & 54 \\ 10 & \end{array}$$

$820 = 54 \times 15 + 10$

$\iff -820 = 15 \times (-54) - 10$

$\iff -820 = 15 \times (-55) + 5$

$\iff -820 + 15 \times 55 = 5$

$\begin{cases} x > -40 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5+15K_1 > -40 \\ 5+15K_1 < 0 \end{cases}, K_1 \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} K_1 > -3 \\ K_1 < -\frac{1}{3} \simeq 0,3(3) \end{cases}, K_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow K_1 \in \{-2, -1\}$

Por exemplo, para $K_1 = -1$: $x = 5 + 15 \times (-1) \iff x = \boxed{-10}$

$y > 80 \iff 5 + 15K_2 > 80$, $K_2 \in \mathbb{Z} \iff K_2 > 5$, $K_2 \in \mathbb{Z}$

Por exemplo, para $K_2 = 6$: $y = 5 + 15 \times 6 \iff y = \boxed{90}$

c) $x \equiv 6 \pmod{12} \Leftrightarrow 6 \equiv x \pmod{12}$

$$\Leftrightarrow x \in [6]_{12} = \{\underbrace{6 + 12K}, K \in \mathbb{Z}\}$$

nunca é primo porque $6+12K$ é par, e diferente de 2, para todo o $K \in \mathbb{Z}$.

d) $-182 - 20 = -202$

$9 \nmid -202$. Logo, $-182 \not\equiv 20 \pmod{9}$ e, por isso,

$[-182]_9 \cap [20]_9 = \emptyset$

Logo, não existem dois elementos distintos em $[-182]_9 \cap [20]_9$.

e) $-89 \equiv 5 \pmod{m} \Leftrightarrow x \in [-89]_m = \{-89 + mK, K \in \mathbb{Z}\}$

$\Leftrightarrow 5 = -89 + mK,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mK = 94,\ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m = \frac{94}{K},\ K \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$

m é inversamente proporcional a K, portanto quanto menor for K, maior será m. Uma vez que $m \in \mathbb{N}$ e $m = \frac{94}{K}$, podemos concluir que $K \in \mathbb{N}$. Portanto, o menor valor possível que K pode tomar, tal que $K \in \mathbb{N}$, é 1.

Uma vez que $m = \frac{94}{K} = \frac{94}{1} = 94 \in \mathbb{N}$ e 94 é par, podemos concluir que o maior número par m tal que $-89 \equiv 5 \pmod{m}$ é 94.

f) $u \equiv 50 \pmod{109}$

$\Leftrightarrow u - 50 = 109K, \ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow u = 50 + 109K, \ K \in \mathbb{Z}$

$u \leq 0 \Leftrightarrow 50 + 109K \leq 0, \ K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow K \leq -\frac{50}{109} \simeq -0{,}45\ldots, \ K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow K \leq -1, \ K \in \mathbb{Z}$

$u = 50 + 109K, \ K \in \mathbb{Z}$. Quanto menor for o valor de K, menor será o valor de u. Para que u seja não positivo, obrigatoriamente, temos $K \leq -1, \ K \in \mathbb{Z}$.

$K = -1$: $u = 50 + 109 \times (-1)$

$\Leftrightarrow u = -59$, não é par!

$K = -2$: $u = 50 + 109 \times (-2)$

$\Leftrightarrow u = -168$, é par!

Portanto, o maior inteiro u par, não positivo, tal que $u \equiv 50 \pmod{109}$ é -168.

42) $p \equiv 3 \pmod 5$

$p^2 \equiv 3^2 \pmod 5 \Leftrightarrow p^2 \equiv 9 \pmod 5$

$2p \equiv 6 \pmod 5$

$-1 \equiv 4 \pmod 5$

$p^2 + 2p - 1 \equiv 9 + 6 + 4 \pmod 5$

$\Leftrightarrow p^2 + 2p - 1 \equiv 19 \pmod 5$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

$1 = 5 \times 0 + 1$

$\Leftrightarrow -1 = 5 \times 0 - 1$

$\Leftrightarrow -1 = 5 \times (-1) + 4$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \quad p^2 + 2p - 1 \equiv 4 \pmod 5$