# 4.3 Integrais triplos





# Motivação

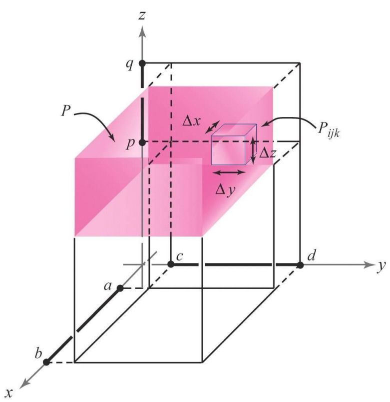
- [Recordar] A massa de um sólido de volume $V$ e densidade $\rho$ é $m = \rho V$.

- Seja $P$ o paralelepípedo

$$[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

de um material cuja densidade é dada pela função contínua $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) \geq 0 \qquad \text{em} \quad P.$$




- [Problema] Determinar a massa do paralelepípedo $P$.

# Definição de integral triplo

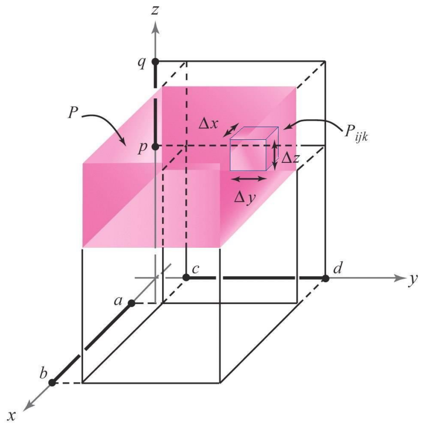
Seja $P = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de $P$ em $n \times m \times l$ paralelepípedos

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}].$$

- O volume de $P_{ijk}$ é

$$\Delta V_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$




- Para cada $P_{ijk}$ escolha-se um $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)$;

- A massa de $P_{ijk}$ pode ser aproximada por $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}$



- A soma de Riemann de $f$ relativa à subdivisão anterior de $P$ é

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}.$$

[Definição]

Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de $f$ designa-se por integral triplo de $f$ em $P$ e denota-se

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV \text{ ou } \iiint_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \text{ ou } \iiint_P f(x,y,z)\, d(x,y,z).$$

- Se existir o integral triplo de $f$ em $P$, diz-se que $f$ é integrável em $P$.

## Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num paralelepípedo fechado é integrável.

2. Seja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada no paralelepípedo $P$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de $f$ pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então $f$ é integrável.



## Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\, g : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

1. $\displaystyle\iiint_P f(x,y,z) + g(x,y,z)\, dV = \iiint_P f(x,y,z)\, dV + \iiint_P g(x,y,z)\, dV$

2. $\displaystyle\iiint_P \lambda\, f(x,y,z)\, dV = \lambda \iiint_P f(x,y,z)\, dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. Se $P = P_1 \cup P_2$ então
$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV = \iiint_{P_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{P_2} f(x,y,z)\, dV\,;$$

4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iiint_P f(x,y,z)\, dV \geq \iiint_P g(x,y,z)\, dV.$

5. $\displaystyle\left|\iiint_P f(x,y,z)\, dV\right| \leq \iiint_P |f(x,y,z)|\, dV.$

6. [Teorema de Fubini]

Sendo $P$ o paralelepípedo $[a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ então

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left[ \int_c^d \left[ \int_p^q f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$$

e é igual aos outros $5$ integrais iterados[1] que se obtêm invertendo a ordem de integração.

[1] $dx\,dy\,dz$ ou $dx\,dz\,dy$ ou $dy\,dx\,dz$ ou $dy\,dz\,dx$ ou $dz\,dx\,dy$ ou $dz\,dy\,dx$



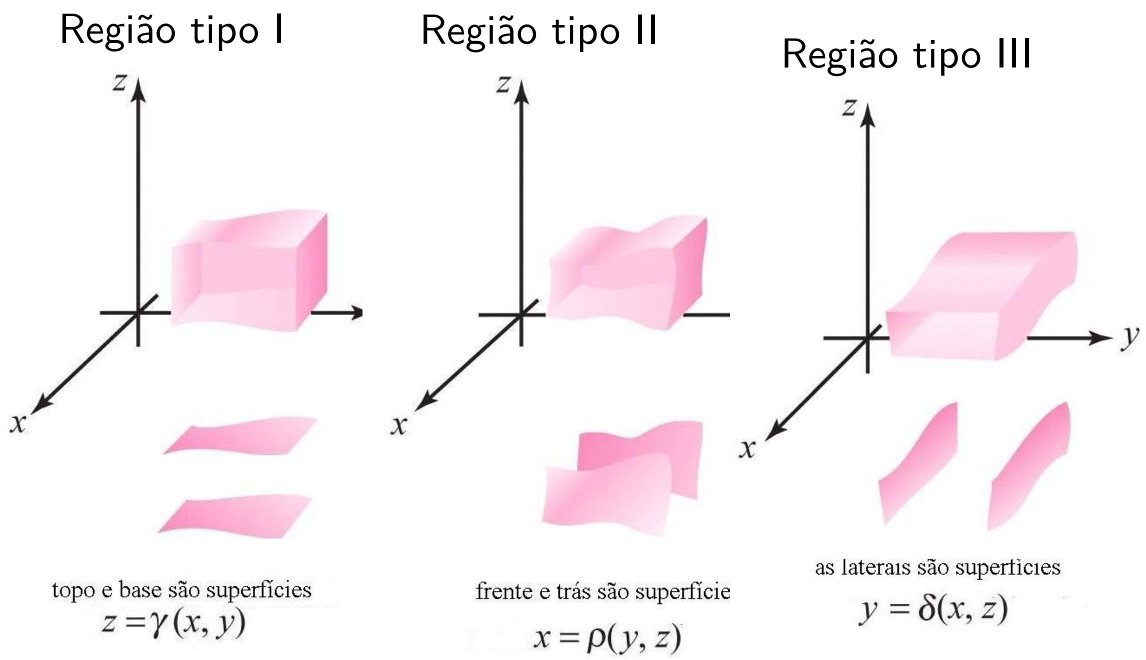
## Exemplo

Folha 6

- Seja $P = [0,2]^3$. Calcule

$$\iiint_P (x+y+z)\,d(x,y,z).$$

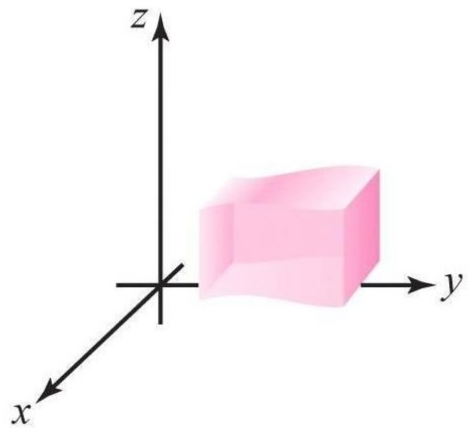
# Integração em regiões gerais






# Regiões elementares de $\mathbb{R}^3$

- [Região do tipo I]




- $D \subset \mathbb{R}^2$ região elementar do plano $XOY$
- topo de base de $S$ são superfícies $z = \gamma(x, y)$
- $(x, y) \in D$
- $\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$

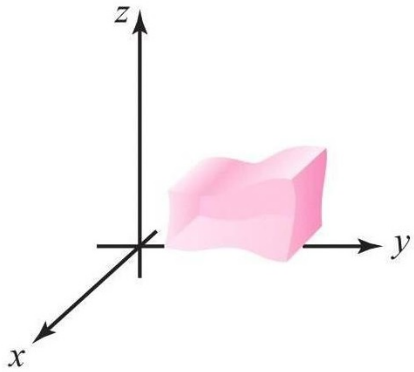
- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região $D$ do plano $XOY$ e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y) \in D, \, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[ \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy$$

## [Região do tipo II]




- $D$ é uma região elementar do plano $YOZ$
- frente e trás são superfícies $x = \rho(y, z)$
- $(y, z) \in D$
- $\rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)$

- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região $D$ do plano $YOZ$ e duas funções tais que

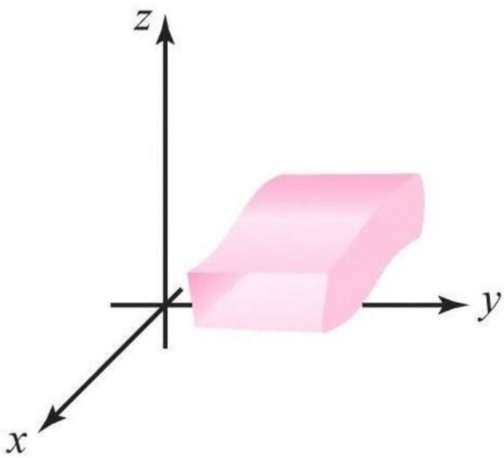
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (y, z) \in D, \, \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[ \int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dy\, dz$$



## [Região do tipo III]




- $D$ é uma região elementar do plano $XOZ$
- as laterais são superfícies $y = \delta(x, z)$
- $(x, z) \in D$
- $\delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)$

- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região $D$ do plano $XOZ$ e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, z) \in D, \, \delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[ \int_{\delta_1(x,z)}^{\delta_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dx\, dz$$

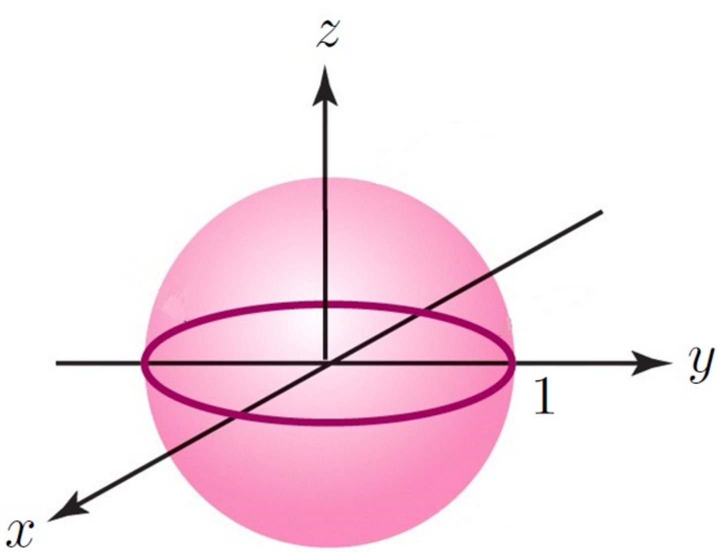
- [Região do tipo IV] $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo IV de $\mathbb{R}^3$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I, do tipo II e do tipo III.



# Exemplo

1. [A esfera como região elementar de $\mathbb{R}^3$]

   Descrever a esfera unitária
   $$\mathscr{E}: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$
   em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$.



# Exercícios

- Folha 6
  - 1b)c)
  - 4a)
  - 5



# Integração tripla e volume

- Se $S$ é uma região limitada de $\mathbb{R}^3$, o volume de $S$ é dado por

$$\mathrm{vol}(S) = \iiint_S 1\, dV.$$

- Para uma função arbitrária $f : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

  não tem nenhuma interpretação geométrica relevante, mas tem diversas interpretações, por exemplo, na física.

# Integração tripla: aplicações à física

- Se $\rho(x, y, z)$ é a função densidade em qualquer ponto $(x, y, z)$, em massa por unidade de volume, de um objeto sólido que ocupa a região $S \subset \mathbb{R}^3$ então a massa do sólido é

$$m = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dV.$$

- Se a carga elétrica está distribuída sobre uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ e a densidade de carga, em unidades de carga por área, é dada por $\sigma(x, y, z)$ em qualquer ponto $(x, y, z)$, então a carga total $Q$ é

$$Q = \iiint_S \sigma(x, y, z)\, dV.$$



# Exemplo

- [Volume de uma esfera]

  Recorrendo a integrais iterados, escreva um integral que permita calcular o volume da esfera unitária

$$\mathscr{E} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

## Exercícios

- Folha 6, exercício 3