3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

3.1 **a)** Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique uma derivação em DNP com conclusão $(p_0 \wedge p_1) \to p_1$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \to p_2$ e cujas hipóteses não canceladas sejam $p_0 \to p_1$ e $p_1 \to p_2$.

d) Indique duas derivações distintas em DNP com conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

e) Indique as subderivações de cada uma das derivações apresentadas nas alíneas anteriores.

3.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$.

b) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

c) $\varphi \to \varphi$.

d) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.

f) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.

h) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

3.3 Mostre que:

a) $p_0 \leftrightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

3.4 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

b) $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$.

d) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

3.5 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

3.6 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)