Ficha 6:

Nota a realçar: Eu não utilizo, por opção, o TCR, prefiro utilizar a aritmética modular e o método da força bruta.

Alguns exercícios não estão feitos pq isto é sempre a mesma coisa.

56. Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

$$(a)\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases};\quad (b)\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases};\quad (c)\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{cases};$$

$$(d)\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \\ x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases};\quad (e)\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 3x \equiv 9 \pmod 6 \\ 4x \equiv 1 \pmod 7 \\ 5x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases};\quad (f)\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 4 \pmod 6 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}.$$

56) a) solução módulo $3 \times 5 \times 7 = 105$

$3k+1 \equiv 2 \pmod 5 \Leftrightarrow 3k \equiv 1 \pmod 5$

$\Leftrightarrow 3k = 5y + 1 \Leftrightarrow k = y + \frac{2y+1}{3}$

se $y = 1$

$k = 1 + 1$

$k = 2 + 5t$

$x = 3(2+5t) + 1 = 15t + 7$

$15t + 7 \equiv 3 \pmod 7 \Leftrightarrow 15t \equiv -4 \pmod 7 \Leftrightarrow t \equiv 3 \pmod 7$

15 | 7 resto 1

$t = 7m + 3$

$x = 15t + 7 = 15(7m + 3) + 7 = 105m + 45 + 7 = 105m + 52$

$x \equiv 52 \pmod{105}$

$x_0 \equiv 52 \pmod{105}$

b) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$ solução módulo 70

$2k+1 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow$

$x = 2k+1$

$\Rightarrow 2k \equiv 1 \pmod 5$ Se $u=1$,

$= 2(3+5t)+1 =$

$2k = 5u + 1$ $\quad k = 2u + \dfrac{u+1}{2}$

$= 10t + 7$

$k = 2+1+5t$

$10t+7 \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10t \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow$ $m.d.c(5,7)=1$

$\Rightarrow 2t \equiv 1 \pmod 7$

Se $u=1$, $t = 4 + 7y$

$2t = 7n + 1$

$x = 10t + 7 = 10(7y + 4) + 7 = 47 + 70y$.   sol: $x_0 \equiv 47 \pmod{70}$

c) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$ m.d.c $= 2$ Solução mod 84

$x = 4k + 1 = 4(1 + 3m) + 1 = 12m + 5$

$4k + 1 \equiv 5 \pmod 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow 2k \equiv 2 \pmod 3$

$2k = 3m + 2 \longrightarrow$ Se $m = 0$, $k = 1 + 3m$

$12m + 5 \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 12m \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow$

$12m = 7y - 1$

Se $y = -5$, $m = -3 + 7l$

$$12m = -36$$

$$x = 12m + 5 = 12 \times (7l - 3) + 5 = 84l - 31$$

$$x_0 \equiv -31 \pmod{84} \Rightarrow x_0 \equiv 53 \pmod{84}$$

d) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases} \rightarrow$ se $x = 5$,

$x \equiv 5 \pmod{12}$ $\rightarrow$ Mesmo resto nos dois pq $6 \mid 12$

$$x = 2k + 1$$

$$2k + 1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2k \equiv 1 \pmod{3}$$

$$k = 2 + 3y$$

$$x = 2(3y + 2) + 1 = 6y + 5 \qquad y = 6m$$

$$6y + 5 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow 6y \equiv 0 \pmod{6}$$

$$x = 6y+5 = 36m+5 = 36\times 12u+5 \,, \quad x_0 = 5$$

$$36m \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow \quad m \equiv 0 \pmod{12}$$

e)
$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 3x \equiv 9 \pmod 6 \\ 4x \equiv 1 \pmod 7 \\ 5x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 2 \\ 4x \equiv 1 \pmod 7 \\ 5x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \\ 4x \equiv 1 \pmod 7 \\ 5x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

$$2x = 5y+1 \,, \quad x = 3+5y$$

$$3+5y \equiv 1 \pmod 2 \Leftarrow 5y \equiv 1 \pmod 2 \,, \quad y = 1+2t$$

$$x = 3+5\times(1+2t) = 8+10t$$

$$4(8+10t) \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 32+40t \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 40t \equiv -31 \pmod 7 \Rightarrow 40t \equiv 4 \pmod 7$

$40t - 4 = +7y \Rightarrow y = 5t + \frac{5t-4}{7}$

$t = -2$

$x = 8 + 10t = 8 + 10(-2+7y) = -12 + 70y \qquad t = -2 + 7y$

$5\times(-12 + 70y) \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow -60 + 350y \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 350y \equiv 51 \pmod{11}$

$350y - 51 = 11m \Rightarrow 31y - 5 + \frac{9y+4}{11} = m$

Se $y = 13 + 11m$

$x = -12 + 70(13 + 11m) = -12 + 910 + 77m = \boxed{898 + 77m}$

f) $3x \equiv 2 \pmod 5$
$2x \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow \begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

V/

$2x \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow$ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

$x \equiv 1 \pmod 2$

$x = 4 + 5t$

$4 + 5t \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 5t \equiv -2 \pmod 3 \Rightarrow 5t \equiv 1 \pmod 3$

Se $t = 2$, deixa resto 1, $t = 2 + 3y$

$x = 4 + 5(2 + 3y) = 4 + 10 + 15y = 14 + 15y$

$14 + 15y \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 15y \equiv -13 \pmod 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15y \equiv 1 \pmod 2$

$y = 1 + 2m$

$x = 14 + 15(1 + 2m) = 29 + 30m$

$x_0 \equiv 29 \pmod{30}$

59. Determine os inteiros positivos x inferiores a 336 e tais que $x \equiv 2 \pmod 8$, $x \equiv 1 \pmod 7$ e $x \equiv 2 \pmod 6$.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 8 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}$$

$x = 8k + 2$

$8k + 2 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8k \equiv -1 \pmod 7$

$\Rightarrow 8k \equiv 6 \pmod 7$

$k = -1 + 7t$

$8k - 6 = 7y \Rightarrow y = k + \frac{k-6}{7}$

$k = -1$

$x = 8(-1 + 7t) + 2 =$

$= 56t - 6$

$56t - 6 \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 56t \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow$ $28t \equiv 1 \pmod 3$

$t = 1 + 3m$

$$x = 56(1+3m) - 6 = 168m + 50$$

$$x_0 = 50 \qquad x_1 = 218.$$

60. Determine o menor inteiro a tal que $2 \mid a$, $3 \mid a+1$, $4 \mid a+2$, $5 \mid a+3$ e $6 \mid a+4$.

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod 2 \\ a \equiv -1 \pmod 3 \\ a \equiv -2 \pmod 4 \\ a \equiv -3 \pmod 5 \\ a \equiv -4 \pmod 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \pmod 2 \\ a \equiv 2 \pmod 3 \\ a \equiv 2 \pmod 4 \\ a \equiv 2 \pmod 5 \\ a \equiv 2 \pmod 6 \end{cases} \quad a = 2$$

61. Um inteiro positivo a dividido por 5 dá resto 3 e dividido por 9 dá resto 4.

(a) Determine o resto da divisão de a por 45.

(b) Calcule os inteiros positivos ímpares, compreendidos entre 100 e 300, que têm, na divisão por 45, o mesmo resto que a.

61) a) $a \equiv 3 \pmod 5 \Leftrightarrow a = 5k+3 = 5(11+9t) + 3 = 58 + 45t$

$a \equiv 4 \pmod 9$

$5k + 3 \equiv 4 \pmod 9$

$a \equiv 58 \pmod{45} \Rightarrow$ $\Rightarrow 5k \equiv 1 \pmod 9$

$\Rightarrow a \equiv 13 \pmod{45}$ $k = 11 + 9t$

Tem resto 13.

b) Basicamente pegamos em $58 + 45t$ e substituimos

63. Quando se retiram $2, 3, 4, 5, 6$ ovos de cada vez de um determinado cesto, ficam, respetivamente, $1, 2, 3, 4, 5$ ovos no cesto. Ao retirar 7 ovos de uma só vez, não sobra quaquer ovo no cesto. Qual o menor número de ovos que o cesto pode conter?

63)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv -1 \pmod 2 \\ x \equiv -1 \pmod 3 \\ x \equiv -1 \pmod 4 \\ x \equiv -1 \pmod 5 \\ x \equiv -1 \pmod 6 \end{cases}$$

$m.m.c = 60$

UwU

$x = -1 + 60t$, se $t = 1$, $x = 59$

64. Um bando de 17 piratas roubou um saco de moedas. Ao tentarem dividir igualmente por todos eles a fortuna roubada, deram conta que sobravam 3 moedas. Lutaram, para ver quem ficava com as três moedas e, nessa luta, morreu um pirata. Distribuíram, de novo, as moedas por todos e, desta vez, sobraram 10 moedas. Tendo havido nova luta, mais um pirata morreu. Desta vez, a fortuna pôde ser distribuída, na íntegra, por todos! Qual é o número mínimo de moedas que o saco roubado poderia ter contido?

$x =$ nº de moedas total.

64)

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 10 \pmod{16} \\ x \equiv 0 \pmod{15} \end{cases}$$

$x = 15k$

$15k \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow$

$15k = 17m + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = m + \dfrac{2m + 3}{15}$ $m = 6$,

$\Rightarrow k = 6 + 1 = 7$

$k = 7 + 17m$

$x = 15(7 + 17m) =$

$= 105 + 255m$

$105 + 255m \equiv 10 \pmod{16} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 255m \equiv -95 \pmod{16}$

$\Leftrightarrow 255m \equiv 1 \pmod{16}$

$255m - 1 = 16y \Leftrightarrow y = 15m + \frac{15m - 1}{16}$ se $m = -1$

$m = -1 + 16y$

$x = 105 + 255 \times (-1 + 16y) = 105 - 255 + 4080y = -150 + 4080y$

$x \equiv -150 \pmod{4080} \Leftrightarrow$

$x \equiv 3930 \pmod{4080}$

Havia 3930 moedas no saco.