



Universidade do Minho  
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

## 2. Funções de várias variáveis

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

2018/2019

## 2. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- ①  $n = 1, m = 1$  funções (escalares) reais de uma variável real

Exemplo:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto x^2 + 1$

- ②  $n = 1, m > 1$  funções vetoriais de uma variável real

Exemplo:  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $x \longmapsto (x, x - 3)$

- ③  $n > 1, m = 1$  funções (escalares) reais de várias variáveis reais

Exemplo:  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \longmapsto x + y$

- ④  $n > 1, m > 1$  funções vetoriais de várias variáveis reais

Exemplo:  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, 2x)$

## 2.1 FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Seja  $\mathcal{D}$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis.

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se o **domínio** de  $f$  e  $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{R}$  diz-se o **contradomínio**

### Exemplos

$$\blacktriangleright f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1$$

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$\blacktriangleright g(x, y, z) = \frac{x + 3y - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

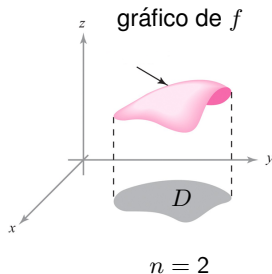
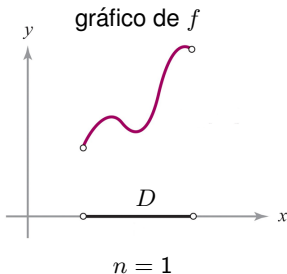
$$\mathcal{D}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

Quando o domínio de  $f$  está omissa, subentende-se que este é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  onde a expressão analítica que define  $f$  tem significado.

O **gráfico** de  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto

$$\text{Gr } f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D \text{ e } y = f(x)\}$$

- ▶ Se  $n = 1$ , o gráfico de  $f$  é uma **curva** em  $\mathbb{R}^2$ ;
- ▶ Se  $n = 2$ , o gráfico de  $f$  é uma **superfície** em  $\mathbb{R}^3$ ;
- ▶ Se  $n = 3$ , o gráfico de  $f$  é uma **hipersuperfície** em  $\mathbb{R}^4$ .



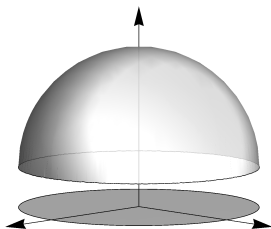
**Exemplo** Consideremos novamente a função

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1,$$

cujo domínio já vimos que é

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

O gráfico de  $f$  é uma semiesfera de raio 3 e centro em  $(0, 0, 1)$ .



Outra forma de descrever graficamente o comportamento de uma função  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  consiste em esboçar as curvas

$$f(x, y) = c, \text{ para vários valores constantes } c \in f(\mathcal{D})$$

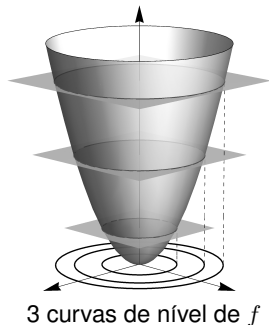
Estas curvas são chamadas **curvas de nível** de  $f$ , porque são as projeções verticais no plano  $xy$  das curvas nas quais o gráfico de  $z = f(x, y)$  intersesta o plano horizontal (nível)  $z = c$ .

### Exemplo

As curvas de nível  $c$  ( $c \geq 0$ ) da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

são circunferências centradas na origem de raio  $\sqrt{c}$ .



Se  $f$  é uma função de três variáveis, a **superfície de nível  $c$**  é o conjunto

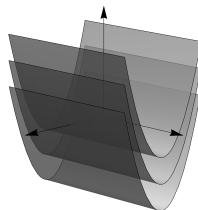
$$\Sigma_c = \{(x, y, z) \in \mathcal{D}_f : f(x, y, z) = c\}$$

### Exemplo

As superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 - z$$

são cilindros parabólicos.



3 superfícies de nível de  $f$

Em geral, a **hipersuperfície de nível  $c$**  de uma função de  $n$  variáveis é o conjunto

$$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = c\}.$$

## 2.2 FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

A função vetorial de  $n$  variáveis reais  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fica definida por  $m$  funções reais de  $n$  variáveis

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

com  $f_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . As funções  $f_i$  são designadas **funções componentes de  $f$** .

Quando não é explicitado, o domínio de  $f$  é a interseção dos domínios das suas funções componentes.

**Exemplo** Seja  $f$  a função definida por  $f(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$ . As funções componentes de  $f$  são:

$$f_1(t) = \sqrt{t-1} \quad \text{e} \quad f_2(t) = \sqrt{5-t}$$

e o domínio de  $f$  é

$$\mathcal{D}_f = [1, +\infty[ \cap ]-\infty, 5] = [1, 5].$$



## 2.3 LIMITES E CONTINUIDADE

**Definição** Sejam  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in \mathcal{D}'$ . Diz-se que  $l \in \mathbb{R}$  é o **limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$**  e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D} \ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ f(B(a, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}) \subseteq B(l, \varepsilon).$$

**Teorema:** *O limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , se existir, é único.*

- Para funções de uma variável, dizer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

é equivalente a dizer que  $f(x)$  se aproxima do número real  $l$ , quando  $x$  se aproxima de  $a$ .

- Se  $n = 2$ , isto é, se  $f$  é uma função de duas variáveis<sup>1</sup>, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

se e só se  $f(x,y)$  se aproxima do número real  $l$ , independentemente do modo como  $(x,y)$  se aproxima de  $(a,b)$ .

- Assim, se encontrarmos duas trajetórias  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_2}} f(x,y),$$

podemos concluir que **não existe**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ .

---

<sup>1</sup>Se  $n > 2$ , a situação é análoga.

**Exemplo** Seja  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Calcule, caso exista,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

- Consideremos que  $(x, y)$  se aproxima de  $(0, 0)$  ao longo da reta de equação  $x = 0$ . Então

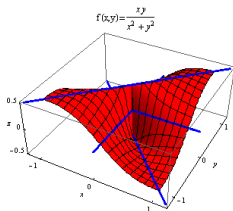
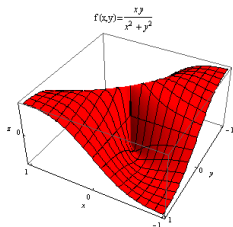
$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

- Considerando retas do tipo  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

O limite anterior depende do valor de  $m$ , i.e. para valores de  $m$  distintos, obtemos valores diferentes para os limites ao longo das trajetórias.

Logo, não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .



**Exemplo** Seja  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ . Calcule, caso exista,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

- Limite segundo a reta de equação  $x = 0$ .

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

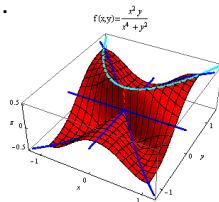
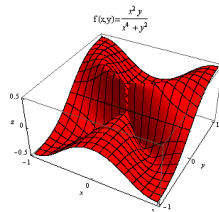
- Limite segundo retas do tipo  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{(x^2 + m^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

- Limite segundo a parábola de equação  $y = x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Logo, não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .



Podemos mostrar, em alternativa ao uso da definição, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l,$$

usando a técnica de enquadramento descrita no resultado seguinte.

**Teorema:** *Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  e sejam  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que*

$$|f(x, y) - l| \leq g(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0.$$

*Então*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l.$$

**Exemplo** Mostre que, se  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ , então existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Notemos que o limite ao longo, por exemplo, da reta de equação  $x = 0$  é 0. Isto significa que, uma vez que o limite existe, este terá que ser 0.

Usando o teorema anterior e atendendo a que

$$|f(x, y)| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y|$$

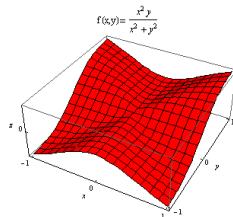
$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$



**Teorema:** *Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  e sejam  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = l_2.$$

*Então:*

- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = l_1 + l_2;$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y)g(x,y)) = l_1l_2;$
- ▶  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l_1}{l_2}, \text{ se } l_2 \neq 0.$

**Definição** Sejam  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $a \in \mathcal{D}'$ . Diz-se que  $l = (l_1, \dots, l_m)$  é o **limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$**  e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D} \ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(B(a, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}) \subseteq B(l, \varepsilon).$$

**Teorema:** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  então

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i, \quad i = 1, \dots, m.$$



**Exemplo** Considere a função definida por  $f(x, y, z) = (xe^{xz}, x^2yz)$ .  
Como

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} xe^{xz} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} x^2yz = 0,$$

então

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} f(x, y, z) = (-1, 0).$$

**Definição** Uma função  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diz-se **contínua** num ponto  $a \in \mathcal{D}$  se  $a$  é um ponto isolado ou

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Uma função  $f$  diz-se **contínua**, se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Os resultados relativos à soma, produto e composta de funções contínuas de uma variável, são extensíveis, de forma natural, a funções de duas ou mais variáveis.

## Exemplos

### ► A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

não é contínua na origem, porque não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$   
(ver p. 12).

### ► A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

é contínua na origem, porque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

(ver p.14).