

Universidade do Minho Escola de Ciências

## Análise Matemática para Engenharia Licenciatura em Engenharia Informática

2023/2024

Departamento de Matemática

Sendo  $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x,y)=x^2y$ , calcule, usando a definição: Exercício 3.1

a) 
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
;

c) 
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$
;

b) 
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);$$

$$d) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Exercício 3.2 Calcule as derivadas parciais de 1<sup>a</sup> ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

a) 
$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$$
;

g) 
$$f(x,y) = x \cos x \cos y$$
;

b) 
$$f(x,y) = \text{sen}(x^2 - 3xy);$$

h) 
$$f(x,y) = \arctan(x^2y^3)$$
;

c) 
$$f(x,y) = x^2 y^2 e^{2xy}$$
;

i) 
$$f(x,y) = x + y^2x + \ln(\sin(x^2 + y));$$

d) 
$$f(x,y) = e^x \ln(xy)$$
;

j) 
$$f(x, y, z) = z e^{x^2 + y^2}$$
;

e) 
$$f(x,y) = e^{\sin(x\sqrt{y})}$$
;

k) 
$$f(x, y, z) = \ln(e^x + z^y);$$

f) 
$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$
;

1) 
$$f(x,y,z) = \frac{xy^3 + e^z}{x^3y - e^z}$$

Para cada uma das funções seguintes, calcule, se existirem,  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$ . Exercício 3.3

a) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \pi & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$a) \quad f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ \pi & \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \quad b) \quad f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$$

Exercício 3.4 Mostre que:

a) se 
$$f(x,y) = e^{xy}$$
, então  $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$ ;

b) se 
$$f(x,y) = \ln \left(x^2 + y^2 + xy\right)$$
, então  $xf_x + yf_y = 2$ ;

$${\rm c)} \quad {\rm se} \ f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}, \ {\rm ent} \ {\rm ao} \quad f_x + f_y + f_z = 1.$$

Exercício 3.5 Determine a derivada direcional de cada uma das funções, no ponto P e na direcão do vetor v indicados.

a) 
$$f(x,y) = x^2y + x$$
,  $P = (1,0)$  e  $v = (1,1)$ ;

b) 
$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(2y)$$
,  $P = (1, \frac{\pi}{2})$  e  $v = (3, -4)$ ;

c) 
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
,  $P = (1,2,3)$  e  $v = (1,1,1)$ .

Exercício 3.6 Calcule o gradiente das seguintes funções:

a) 
$$f(x,y) = xe^{-x+y}$$
;

d) 
$$f(x, y, z) = xe^{-x^2 - y^2 - z^2}$$
;

b) 
$$f(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$$
;

e) 
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$
;

c) 
$$f(r,h) = \pi r^2 h$$
;

f) 
$$f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$$
.

Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função  $f(x,y)=x^2+y^3$ no ponto de coordenadas (3,1).

Exercício 3.8 Mostre que os gráficos das funções  $f(x,y)=x^2+y^2$  e  $g(x,y)=-x^2-y^2+xy^3$  têm o mesmo plano tangente em (0,0).

Exercício 3.9 Considere a função  $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$ .

- a) Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação z=f(x,y) no ponto (1,1,1) com o eixo dos zz.
- b) Usando uma aproximação linear de f em (1,1), calcular uma estimativa para f(1.02,0.90).

Exercício 3.10 Seja 
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
 tal que  $f(x,y)=\left\{ egin{array}{cc} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} & (x,y) 
eq (0,0) \\ 0 & \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$ 

- a) Verifique que f possui derivadas parciais em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Verifique que f não é contínua na origem e conclua que f não é diferenciável na origem.
- c) Mostre que existe  $Df((0,0);(\alpha,\beta))$  com  $\alpha\beta=0$ , mas não existe  $Df((0,0);(\alpha,\beta))$  com  $\alpha\beta\neq0$ .

Exercício 3.11 Seja 
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
 tal que  $f(x,y)=\left\{ egin{array}{c} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se} & (x,y) 
eq (0,0) \\ 0 & \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$ 

- a) Mostre que existe derivada direcional em (0,0) segundo qualquer vetor de  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Verifique que f não é diferenciável.

Exercício 3.12 Seja 
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
 tal que  $f(x,y)=\left\{ egin{array}{cc} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} & (x,y)\neq (0,0) \\ 0 & \text{se} & (x,y)=(0,0) \end{array} 
ight.$ 

- a) Mostre que existe  $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$
- b) Verifique se f é diferenciável em (0,0).

Exercício 3.13 Seja  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- ${\rm a)} \quad {\rm Calcule} \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \ {\rm e} \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$
- b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e verifique que não são contínuas em (0,0).
- c) Verifique que f é diferenciável em (0,0).

Exercício 3.14 Seja 
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
 tal que  $f(x,y)=\left\{ egin{array}{cc} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} & (x,y)\neq (0,0) \\ 0 & \text{se} & (x,y)=(0,0) \end{array} \right.$ 

Mostre que:

- a) f é contínua;
- b)  $Df((0,0);(a,b)) = f(a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$