Grupo I

1. Falso

2. $a \mid b \quad a \nmid (5b + 4c)$ então $a \nmid c$

Verdadeiro

3. $m.d.c(a, 80) = \underset{= 2\times 5}{10} \quad m.m.c(a, 80) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ → Falso.

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$80 = 2^4 \times 5 \qquad a = 2 \times 5^2 \times 3^2 = 450 < 500$

4. $a \neq 0, b \neq 0 \qquad m.d.c(a, b) \mid m.d.c(3a, 8b)$ Verdadeiro

5. $\sqrt{280} = 16^2 < 280 < 17^2 \Leftrightarrow 16 < \sqrt{280} < 17$

números primos até $\sqrt{280}$: 1, 3, 5, 7, 11, 13. Verdadeiro!

6. $p \mid a^3 b^2$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Verdadeiro.

7. $5x + 30y = 3333 \qquad 5 \nmid 3333$ logo Falso!

$m.d.c(5, 30) = 5$

$5 = 0 \times 30 + 5$

$30 = 6 \times 5 + 0$

8. $-2 \equiv 4 \pmod 6$ → resto 4

$1 \equiv 1 \pmod 6$ → resto 1 Falso.

$3 \equiv 3 \pmod 6$ → resto 3

$6 \equiv 0 \pmod 6$ → resto 0

$10 \equiv 4 \pmod 6$ → resto 4 X

9. $-85 \equiv 5 \pmod{15}$

Verdadeiro.

10. $6x \equiv 5 \pmod{33}$

m.d.c $(6, 33) = 3$ $\rightarrow$ falso $\rightarrow$ 3 soluções não congruentes

$6 = 0 \times 33 + 6$

$33 = 5 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times \underline{3} + 0$

Grupo II

m.d.c $(255, 123) = 3$

$255 = 2 \times 123 + 9$

$123 = 13 \times 9 + 6$

$9 = 1 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times \underline{3} + 0$

$3 = 9 - 1 \times 6$

$3 = 9 - 1 \times (123 - 13 \times 9)$

$3 = 14 \times 9 - 1 \times 123$

$3 = 14 \times (255 - 2 \times 123) - 1 \times 123$

$3 = 14 \times 255 - 29 \times 123$

ex 2

$255x - 123y = 6$

$255x \equiv 6 \pmod{123}$

m.d.c $(255, 123) = 3$, $3 \mid \underset{2}{6}$ logo é solúvel

$255 = 2 \times 123 + 9$

$123 = 13 \times 9 + 6$

$9 = 1 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times \underline{3} + 0$

$3 = 9 - 1 \times 6$

$3 = 9 - 1 \times (123 - 13 \times 9)$

$3 = 14 \times 9 - 1 \times 123$

$3 = 14 \times (255 - 2 \times 123) - 1 \times 123$

$3 = 14 \times 255 - 123 \times 29$

$x = 14$ $y = 29$

solução particular: $(28, 58)$

$x' \equiv 28 \pmod{123}$

soluções: $x' = 28 + 123k$, $k \in \mathbb{Z}$

duas soluções não congruentes: $\{28, 151\}$.

ex 3

$3^{124} + 1$ ~~por 7~~ $= \cancel{(3^6)^{21} \times 3^4} + 1 = (3^6)^{21} \times 3^3 \times 3 + 1 = 1 \times (-1) \times 3 + 1 = -3 + 1 = -2$

$-2 \equiv 5 \pmod 7$

Resto $= 5$

$3 \equiv 3 \pmod 7$

$3^6 \equiv 1 \pmod 7$

$3^3 \equiv -1 \pmod 7$

$124 \mid 6$

$-12 \quad 21$

04

pequeno teorema de fermat

ex 4

$\overline{2734x}$

$$\begin{cases} 2+7+3+4+x \equiv 0 \pmod 3 \\ \overline{2734x} \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16+x \equiv 0 \pmod 3 \\ 2\times 4 + x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \equiv 0 \pmod 3 \\ 8+x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \lor x = 5 \lor x = 8 \\ x = 1 \lor x = 5 \lor x = 9 \end{cases}$$

logo $x = 5$

outra maneira de fazer resolver o sistema

$$\begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod 3 \to 1 \\ 3x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

3

$\bar{x} = 2\times 4 \times 1 + 1 \times 3 \times 3 =$
$= 8 + 9 = 17$

$x' \equiv 17 \pmod{12}$

$x' \equiv 5 \pmod{12}$

$x = 5$

Grup III

ex 1

a) $55x + 77y = 902$

$x \geq 2$ e $y \geq 2$

b) $m.d.c(55, 77) = 11$

$11 \mid 902$ logo é solúvel.

82

$55 = 0 \times 77 + 55$

$77 = 1 \times 55 + 22$

$55 = 2 \times 22 + 11$

$22 = 2 \times 11 + 0$

$11 = 55 - 2 \times 22$

$11 = 55 - 2 \times (77 - 1 \times 55)$

$11 = 3 \times 55 - 2 \times 77$

$x = 3 \quad y = -2$

Solução particular: $(246, -164)$

solução geral: $\begin{cases} x = 246 + \frac{77}{11} t \\ y = -164 - \frac{55}{11} t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 246 + 7t \\ y = -164 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} 246 + 7t \geq 2 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{-244}{7} \approx -34{,}86 \\ t \dots \end{cases}$

logo $t \in \{-34\}$, Caso $t = -34$, $\begin{cases} x = 246 + 7 \times (-34) \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow$

$-164 - 5t \geq 2 \quad t \leq -\frac{166}{5} \approx -33,2$ $\quad y = -164 - 5 \times (-34)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$

Mesas circulares = 8 pessoas

Mesas retangulares = 6 pessoas

ex 2

$6x \equiv 501 \pmod{21} \rightarrow 6x - 21y = 501$

$m.d.c(6,21) = 3 \quad 3 \mid 501$ logo é solúvel. $\quad 167$

$6 = 0 \times 21 + 0$

$21 = 3 \times 6 + 3 \qquad 3 = 21 - 3 \times 6$

$6 = 2 \times 3 + 0 \qquad x = -3 \quad y = -1$

solução particular: $(-501, -167)$

$\cancel{x' \equiv 501 \pmod{21}}$

$\cancel{x' \equiv 3 \pmod{21}}$

$\hookrightarrow$ ~~solução geral = $3 + 21k, k \in \mathbb{Z}$~~

~~maior solução negativa → caso $k = -1$, $x' = 3 - 21$~~ $= -18$

ex 3

$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$

$m.d.c(7,5) = m.d.c(7,3) = m.d.c(5,3) = 1$

logo tem uma única solução mod $m = 7 \times 5 \times 3 = 105$

$N_1 = \frac{105}{7} = 15 \quad N_2 = \frac{105}{5} = 21 \quad N_3 = \frac{105}{3} = 35$

$\begin{cases} 15x \equiv 1 \pmod 7 \\ 21x \equiv 1 \pmod 5 \\ 35x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow x = 1 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \rightarrow x = 1 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

$\bar{x} = 3 \times 15 \times 1 + 4 \times 21 \times 1 + 1 \times 35 \times 2 = 45 + 84 + 70 = 199$

única solução mod 105: $x' \equiv 199 \pmod{105}$

$x' \equiv 94 \pmod{105}$

solução $> 200 = 94 + 105k > 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 105k > 106 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k > \frac{106}{105} \approx 1,009$

Para $k = 2$, $x' = 94 + 105 \times 2 = 94 + 210 = 304$ → menor solução maior que 200.