ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.6 Extremos de funções reais

Extremos locais

Vocabulário

Teste das 1.as derivadas

Teste das 2.as derivadas

Extremos Locais

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $a \in U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- $f(a)$ é um mínimo local, ou a é um minimizante local de f, se existir uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) \geq f(a), \qquad \forall x \in B(a, \varepsilon);$$

- $f(a)$ é um máximo local, ou a é um maximizante local de f, se existir uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) \leq f(a), \qquad \forall x \in B(a, \varepsilon);$$

- $f(a)$ é um extremo local, ou a é um extremante local de f, se a for um minimizante ou um maximizante local de f.

Exemplo

- O ponto $a = (0,0)$ é um minimizante local da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$.

  De facto $f(a) = 0$ e, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tem-se

  $$f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 = f(a)\,.$$

  Isto é, a é um minimizante de f e $f(a) = 0$ é um mínimo da função.

Teste das 1.as derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

- [Ponto crítico] $a \in U$ é um **ponto crítico** de f se

$$\nabla f(a) = \mathbf{0}$$

  [Teste das 1.as derivadas]

  Se $a \in U$ é um extremante local de f então é um ponto crítico de f.

- [Ponto de sela] $a \in U$ é um **ponto de sela** de f se a é ponto crítico mas não é extremante local de f.

Observações

- O teste das 1.as derivadas estabelece que os únicos candidatos a pontos extremantes de uma função de classe C^1 são os pontos do seu domínio onde se anulam todas as derivadas parciais de primeira ordem da função, simultaneamente.

- É possível definir e estudar pontos críticos em funções que não sejam de classe C^1, mas esse estudo está fora do âmbito desta UC.

Exemplo

- A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ tem um ponto crítico mas não tem extremantes.

De facto, $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ pelo que

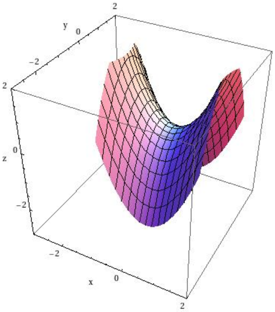
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)\,.$$

Seja $a = (0,0)$. Observe-se que $f(a) = 0$. Para os pontos sobre o eixo do x tem-se $y = 0$ e

$$\color{blue}{f(x,y)} = f(x,0) = x^2 \color{blue}{> 0 = f(a)}, \quad x \neq 0\,.$$

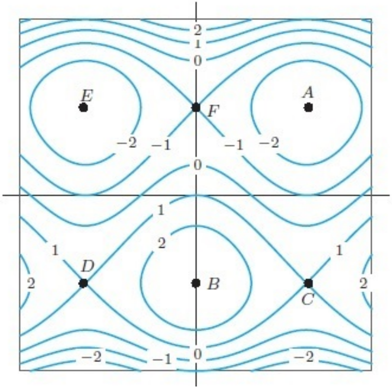
Por outro lado, para os pontos sobre o eixo dos y, tem-se $x = 0$ e

$$\color{red}{f(x,y)} = f(0,y) = -y^2 \color{red}{< 0 = f(a)}, \quad y \neq 0\,.$$



Assim, qualquer $B(a,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, contém pontos onde f assume valores superiores a $f(a)$ e outros pontos onde f assume valores inferiores a $f(a)$. Logo a, embora seja ponto crítico de f, não é um extremante da função.

Extremos vs curvas de nível



- Curvas de nível fechadas sugerem pontos de extremo (A, B, E);
- Curvas de nível que se cruzam sugerem pontos de sela (C, D, F)

Teste das 2.as derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $B(a, \varepsilon)$.

- Define-se a matriz Hessiana de f em a por

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{pmatrix}$$

  onde $f_{x_ix_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

- Hf é uma matriz
  - quadrada de dimensão n;
  - simétrica, pois pelo Teorema de Schwarz $f_{x_ix_j}(a) = f_{x_jx_i}(a)$.

- [Teste das 2.as derivadas] (para extremantes locais)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $a \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se $Hf(a)$ é definida positiva, a é um minimizante local de f;
  - se $Hf(a)$ é definida negativa, a é um maximizante local de f.

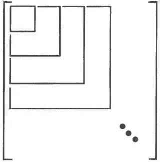
Um pouco de Álgebra Linear

Seja $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

1. A matriz Q diz-se
   - definida positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x > 0$
   - definida negativa se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x < 0$
2. Se Q é uma matriz real e simétrica então possui n valores próprios reais: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos). Neste caso,
   - Q é uma matriz
     - definida positiva se todos os $\lambda_i > 0$;
     - definida negativa se todos os $\lambda_i < 0$;
     - indefinida se existem valores próprios com sinais diferentes.
   - existe uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual Q é uma matriz diagonal: $B^{-1} Q B = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e

$$\det Q = \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

3. Sendo Q uma matriz real e simétrica, considerem-se os determinantes das n submatrizes quadradas de Q ao longo da diagonal (menores principais):



- Q é definida positiva se e só se todos estes determinantes forem positivos
- Q é definida negativa se e só se os determinantes de ordem par forem positivos e os de ordem ímpar negativos.

- [Critério dos menores principais]

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ e $a \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se todos os menores principais de $H_f(a)$ são positivos, a é um minimizante local de f;
  - se os menores principais de ordem par de $H_f(a)$ são positivos e os de ordem ímpar negativos, a é um maximizante local de f;
  - se todos os menores principais de $H_f(a)$ são não nulos mas a matriz não é definida positiva ou definida negativa, f tem um ponto de sela em a;
  - se algum dos menores principais for nulo, nada se pode concluir sobre a natureza de a.

Exemplo

- A função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ tem um minimizante em $a = (0, 0, 0)$.

  De facto, um único ponto crítico de f é determinado pela solução do sistema de três equações com três incógnitas

  $$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (2x + y, x + 2y, 2z) = (0, 0, 0)$$

  cuja solução é $a = (0, 0, 0)$.
  Por outro lado, a matriz Hessiana de f é a matriz (constante)

  $$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = H_f(a)$$

  e todos os seus menores principais são positivos, já que

  $$M_1 = 2 > 0, \quad M2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad M_3 = \det H_f(a) = 6 > 0\,.$$

  Então, pelo critério dos menores principais, conclui-se que f tem um mínimo em $f(a)$.

Teste das 2.as derivadas:: caso $n = 2$

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ em $B(a, \varepsilon)$.

- A matriz Hessiana de f em a é

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

- Há dois menores principais:
  - $M_2 = \det Hf(a) = f_{xx}(a)f_{yy}(a) - \left[f_{xy}(a)\right]^2$
  - $M_1 = f_{xx}(a)$

- [Critério dos menores principais] (caso $n = 2$)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ numa vizinhança de $a \in U$ e

$$\det Hf(a) = f_{xx}(a) f_{yy}(a) - \left[f_{xy}(a)\right]^2.$$

  Suponhamos que $a \in U$ é um ponto crítico de f.

  - se $\det Hf(a) > 0$ e
    - $f_{xx}(a) > 0$ então a é um minimizante local de f;
    - $f_{xx}(a) < 0$ então a é um maximizante local de f;
  - se $\det Hf(a) < 0$ então f tem um ponto de sela em a;
  - se $\det Hf(a) = 0$ nada se pode concluir.

Exemplo

- Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 12x^2 + 8y^3 - 24xy$.

Aqui $\nabla f(x, y) = (24x - 24y, 24y^2 - 24x)$ e

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases},$$

isto é, f tem dois pontos críticos, sejam

$$A = (0, 0) \text{ e } B = (1, 1).$$

Agora há que estudar a natureza de cada um destes pontos críticos recorrendo à matriz hessiana de f.
A matriz hessiana de f é

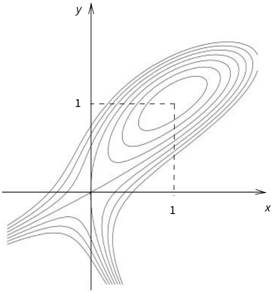
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 48\,y \end{pmatrix}$$

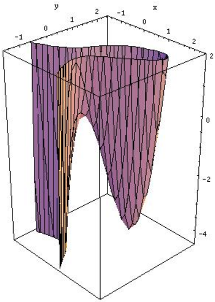
pelo que

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(B) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $\det Hf(A) = -24^2 < 0$ conclui-se que A é um ponto de sela.

Por outro lado, $\det Hf(B) = 576 > 0$ e $f_{xx}(B) = 24 > 0$ pelo que B é um minimizante de f .





- O ponto $(0, 0)$ é ponto de sela.
- O ponto $(1, 1)$ é ponto minimizante local.