3.6 Extremos de funções reais

Extremos Locais

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $a^* \in U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- f tem um minimizante local em $a^* \in U$ se existir uma vizinhança $B(a^*, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) \geq f(a^*), \qquad \forall x \in B(a^*, \varepsilon) \cap U;$$

- f tem um maximizante local em $a^* \in U$ se existir uma vizinhança $B(a^*, \varepsilon)$ de a tal que

$$f(x) \leq f(a^*), \qquad \forall x \in B(a^*, \varepsilon) \cap U;$$

- f tem um extremante local em $a^* \in U$ se tiver um minimizante ou um maximizante local em a^*.

Exemplo

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   Justifique que $A^* = (0, 0)$ é um minimizante local de f .

Teste das 1ª derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- [Ponto crítico] $a^* \in U$ é um **ponto crítico** de f se $\nabla f(a^*)$ não está definido ou se f é uma função de classe $\mathscr{C}^1$ e

$$\nabla f(a^*) = \mathbf{0}$$

  [Teste das 1.ª derivadas]

  Se $a^* \in U$ é um extremante local de f então é um ponto crítico de f .

- [Ponto de sela] $a^* \in U$ é um **ponto de sela** de f se a^* é ponto crítico mas não é extremante local de f .

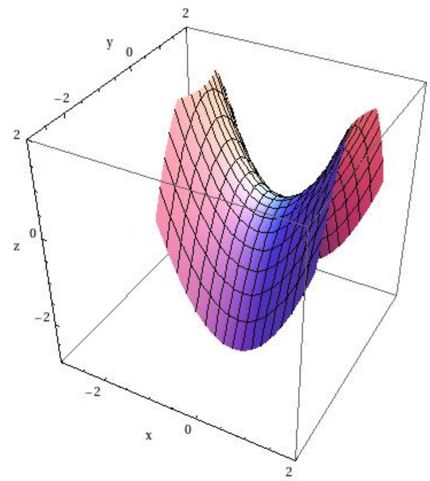
Observação

- O teste das 1.as derivadas estabelece que os únicos candidatos a pontos extremantes de uma função são os pontos do seu domínio onde se anulam todas as derivadas parciais de primeira ordem da função, simultaneamente.

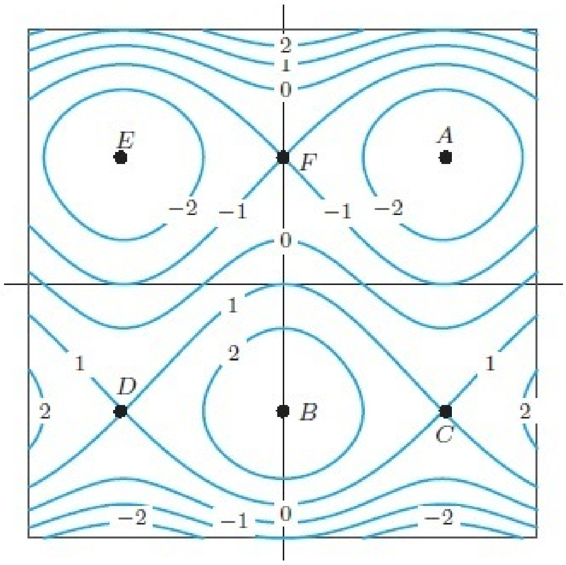
- Como fazer?
  1. Determinar os pontos críticos resolvendo o sistema de n equações com n incógnitas $\nabla f(x) = 0$;
  2. Para cada um dos pontos críticos encontrados, a^*, estudar o sinal de $f(x) - f(a^*)$ quando $x \in B(a^*, \varepsilon)$

Exemplo

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$.
   (a) Determine os pontos críticos de f.
   (b) Verifique que $(0, 0)$ é ponto de sela de f.



Extremos vs curvas de nível



- Curvas de nível fechadas sugerem pontos de extremo (A, B, E);
- Curvas de nível que se cruzam sugerem pontos de sela (C, D, F)

Exercícios:: 1

1. Folha 4
   (a) exercício 11
   (b) exercício 12

Teste das 2.º derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ em $B(a^*, \varepsilon)$.

- Define-se a matriz Hessiana de f em a por

$$Hf(a^*) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a^*) & \dots & f_{x_1x_n}(a^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a^*) & \dots & f_{x_nx_n}(a^*) \end{pmatrix}$$

onde $f_{x_ix_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

- Hf é uma matriz
  - quadrada de dimensão n;
  - simétrica pois pelo Teorema de Schwarz $f_{x_ix_j}(a^*) = f_{x_jx_i}(a^*)$.

- [Teste das 2.ª derivadas] (para extremantes locais)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ e $a^* \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se $Hf(a^*)$ é definida positiva f tem um minimizante local em a;
  - se $Hf(a^*)$ é definida negativa f tem um maximizante local em a.

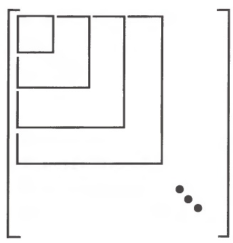
Um pouco de Álgebra Linear

Seja $Q \in \mathscr{M}_{n\times n}$.

1. A matriz Q diz-se
   - definida positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x > 0$
   - definida negativa se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x < 0$
2. Se Q é uma matriz real e simétrica então possui n valores próprios reais: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Neste caso,
   - Q é uma matriz
     - definida positiva se todos os $\lambda_i > 0$;
     - definida negativa se todos os $\lambda_i < 0$;
     - indefinida se existem valores próprios com sinais diferentes.
   - existe uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual Q é uma matriz diagonal: $B^{-1}QB = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e

$$\det Q = \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

3. Sendo Q uma matriz real e simétrica, considerem-se os determinantes das n submatrizes quadradas de Q ao longo da diagonal (menores principais):



   - Q é definida positiva se e só se todos os determinantes forem positivos
   - Q é definida negativa se e só se os determinantes de ordem par forem positivos e os de ordem ímpar negativos.

- [Critério dos menores principais]

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ e $a^* \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se todos os menores principais de $H_f(a^*)$ são positivos f tem um minimizante local em a;
  - se os menores principais de ordem par de $H_f(a^*)$ são positivos e os de ordem ímpar negativos f tem um maximizante local em a;
  - se todos os menores principais de $H_f(a^*)$ são não nulos mas a matriz não é definida positiva ou definida negativa f tem um ponto de sela em a;
  - se algum dos menores principais for nulo nada se pode concluir sobre a natureza de a.

Exemplo

1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

Teste das 2.º derivadas:: caso $n = 2$

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ em $B(a^*, \varepsilon)$.

- A matriz Hessiana de f em a é

$$Hf(a^*) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a^*) & f_{xy}(a^*) \\ f_{yx}(a^*) & f_{yy}(a^*) \end{pmatrix}$$

- Há dois menores principais:
  - $M_2 = \det Hf(a^*) = f_{xx}(a^*)f_{yy}(a^*) - [f_{xy}(a^*)]^2$
  - $M_1 = f_{xx}(a^*)$

- [Critério dos menores principais] (caso $n = 2$)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ numa vizinhança de $a^* \in U$ e

$$\det Hf(a^*) = f_{xx}(a^*)f_{yy}(a^*) - [f_{xy}(a^*)]^2.$$

  Suponha-se $a^* \in U$ é um ponto crítico de f.

  - se $\det Hf(a^*) > 0$ e
    - $f_{xx}(a^*) > 0$ então f tem um minimizante local em a;
    - $f_{xx}(a^*) < 0$ então f tem um maximizante local em a;
  - se $\det Hf(a^*) < 0$ então f tem um ponto de sela em a;
  - se $\det Hf(a^*) = 0$ nada se pode concluir.

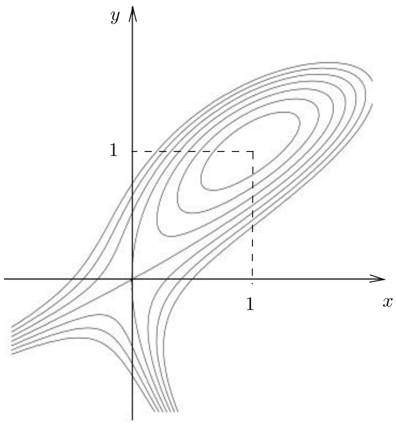
Observação

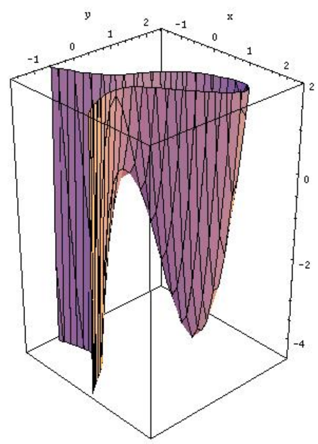
- No resultado anterior "se $\det Hf(a^*) < 0$ então f tem um ponto de sela em a". Porquê?
  - $M_2 < 0$ e M_1?
  - Se $M_2 = \det Hf(a^*) < 0$ então os 2 valores próprios de $H_f(a^*)$ têm sinais opostos pelo que $Hf(a^*)$ é uma matriz indefinida e a^* é um ponto de sela de f.

Exemplo

1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 12x^2 + 8y^3 - 24xy\,.$$





- O ponto $(0, 0)$ é ponto de sela.
- O ponto $(1, 1)$ é ponto minimizante local.

Exercícios:: 2

1. Folha 4
   (a) exercício 13 a), d)
   (b) exercício 14

Extremos condicionados

- [Problema] Pretende-se determinar os extremantes da função

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

quando as variáveis independentes estão sujeitas a algumas restrições.

Diz-se

- Extremos condicionados ou
- Extremos relativos

Métodos:

- Redução de dimensão
- Multiplicadores de Lagrange

Vocabulário

Sejam $B, U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere-se a estrutura de nível $k = 0$ da função[1] g:

$$\Sigma = \{x \in B \,:\, g(x) = 0\}\,.$$

- [Extremante relativo]

  Um ponto $a^* \in (U \cap \Sigma)$ diz-se um **extremante de f relativo**, ou condicionado, à condição $g(x) = 0$ se é um extremante da restrição de f ao conjunto Σ, $f\Big|_{\Sigma}$.

[1] Caso se tenha $g(x) = k$ pode-se definir $G(x) = g(x) - k$ e considerar $G(x) = 0$.

Observação

- Um ponto a^* em que f tem um extremante relativo a uma condição $g(x) = 0$ não é, em geral, um ponto de extremante local da função f e também não é, em geral, um ponto crítico de f.

- [Teorema de Weierstrass]

  Se f é uma função contínua e Σ é um conjunto limitado e fechado então f atinge um máximo e um mínimo em Σ.

Redução de dimensão: exemplo

- Determinar os extremantes de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição

$$y = x + 1.$$

  - Sejam $g(x,y) = y - x - 1$ e

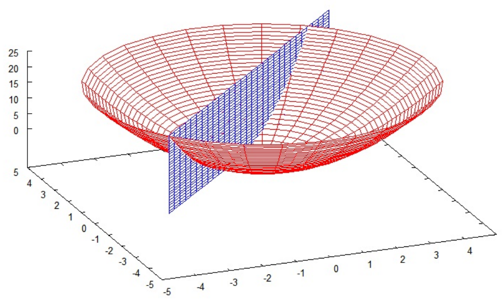
$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$$

  - Então

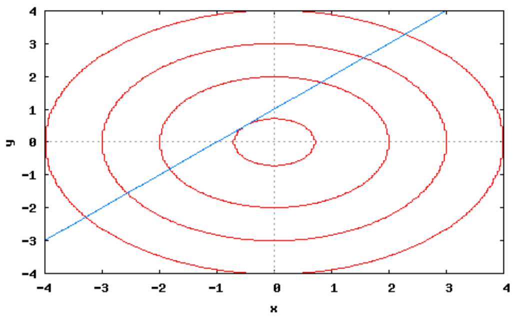
$$f\Big|_{\Sigma}(x,y) = f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 = h(x).$$

$$\dots$$

- $x = -\dfrac{1}{2}$ é ponto crítico de h.
- $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ é ponto crítico de f restrita a Σ.



Gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $y = x + 1$.



Algumas curvas de nível de f e restrição $y = x + 1$.

Multiplicadores de Lagrange

Sejam $B, U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathscr{C}^1$.

- Considere-se a estrutura de nível da função g:

$$\Sigma = \{x \in B \,:\, g(x) = 0\}.$$

- Suponha-se que $\nabla g(x) \neq \mathbf{0}$, $x \in \Sigma$.
  - Se $a^* \in (U \cap \Sigma)$ é um extremante local de f relativo à condição $g(x) = 0$ então existe um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a^*) = \lambda \nabla g(a^*).$$

  - O número λ é chamado multiplicador de Lagrange.
  - O ponto $a^* \in \Sigma$ diz-se ponto crítico de $f\Big|_{\Sigma}$.

[Método dos multiplicadores de Lagrange:: algoritmo]

Para determinar os extremantes da função $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeitos à restrição $\Sigma : g(x) = 0$, supondo que esses valores extremantes existem e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em Σ, há que

1. determinar x (e $\lambda \in \mathbb{R}$) resolvendo o sistema de $n+1$ equações

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

2. calcular o valor de f em todos os valores encontrados no passo anterior; o maior desses valores será o máximo de f e o menor será o mínimo de f sujeita a $g(x) = 0$.

Observação

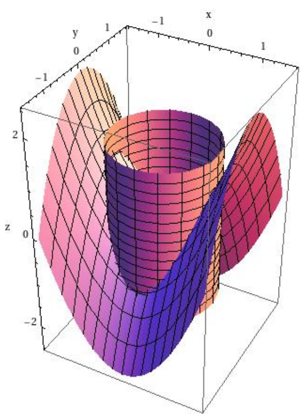
- Tal como no teste da 1.ª derivada para a determinação de extremos sem restrições, as soluções do sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ são candidatas a pontos extremantes.
  - Se f é contínua e Σ é limitado e fechado há a garantia que alguns dos pontos críticos serão extremantes.
  - Caso f não seja contínua ou Σ não limitado ou não fechado há que usar a definição para classificar os pontos críticos.
- A condição $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ significa que os vetores gradiente são paralelos.
- Quais os pontos críticos da função

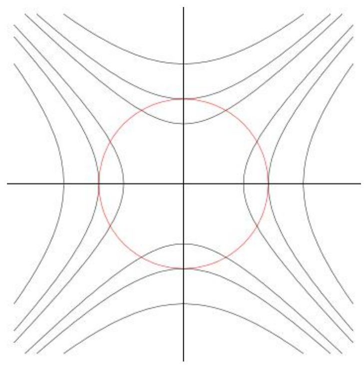
$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)\,?$$

Exemplo

1. Determinar os extremantes de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeita à condição

$$x^2 + y^2 = 1.$$





- A função f sujeita à condição dada admite
  - 2 minimizantes: $(0, 1)$, $(0, -1)$
  - 2 maximizantes: $(1, 0)$, $(-1, 0)$

ver animação

Caso de k restrições

- Havendo várias restrições

$$g_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k$$

há que resolver o sistema de $n + k$ equações

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_k g_k(x) \\ g_1(x) = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

  - Quais os pontos críticos da função

$$\mathscr{L}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \, g_1(x) - \cdots - \lambda_k \, g_k(x) \, ?$$

Exercícios:: 3

1. Folha 4
   (a) exercício 15 a), c), d)

Observação

- O método dos multiplicadores de Lagrange é equivalente ao teste das 1.ª derivadas para extremos livres.
- Tal como no caso de extremos livres, existe um teste das 2.ª derivadas para extremos condicionados.

[Teste das 2.º derivadas] (extremos condicionados)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathscr{C}^2$.
Seja $a^* \in U$, $g(a^*) = 0$ e Σ a superfície de nível 0 de g. Suponha-se que $\nabla g(a^*) \neq 0$ e que existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a^*) = \lambda^* \nabla g(a^*)$.
Seja $\overline{H}$ a matriz hessiana da função auxiliar $\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda\, g(x)$.
Então se

- $\overline{H}(a^*, \lambda^*)$ é definida positiva f tem um minimizante local em a^*;
- $\overline{H}(a^*, \lambda^*)$ é definida negativa f tem um maximizante local em a^*.

Extremos globais

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, $a^* = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- f tem um minimizante global em $a^* \in D$ se

$$f(x) \geq f(a^*), \qquad \forall x \in D;$$

- f tem um maximizante global em $a^* \in D$ se

$$f(x) \leq f(a^*), \qquad \forall x \in D;$$

- f tem um extremante global em $a^* \in D$ se tiver um minimizante ou um maximizante global em a.

- [Teorema de Weierstrass]

  Sejam D um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

  Então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D.

  - Sendo D fechado, $D = \operatorname{int} D \cup \operatorname{fr} D$
    - [$\operatorname{int} D$] é um conjunto aberto: os pontos críticos de f são tais que $\nabla f(a^*) = 0$.
    - [$\operatorname{fr} D$] os pontos críticos de f podem ser determinados usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Estratégia

- Sendo D um conjunto fechado e limitado, para determinar os extremantes globais de f em D há que

  1. determinar todos os pontos críticos de de f em $\operatorname{int} D$: $\nabla f(x) = 0$;
  2. determinar os extremantes de f em $\operatorname{fr} D$: método de redução de ordem ou método dos multiplicadores de Lagrange;
  3. calcular o valor de f em todos os pontos encontrados;
  4. se $\operatorname{fr} D$ for a reunião de várias curvas, calcular o valor de f na sua intersecção;
  5. classificar os pontos extremantes (maximizante/minimizante) por comparação dos valores de f.

Exercícios:: 3

1. Folha 4
   (a) exercício 16
   (b) restantes exercícios