\

2 de maio de 2022 21:04

26. Quais das seguintes equações diofantinas têm solução?

(a) $6x + 51y = 22$; ✗ $\quad 22 \nmid m.d.c(6,51) = 3$

(b) $33x + 14y = 115$; ✓ $\quad 115 \mid m.d.c(33,14) = 1$

(c) $14x + 35y = 93$. ✗ $\quad 93 \nmid m.d.c(14,35) = 7$

27. Determine as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas:

(a) $56x + 72y = 40$;

(b) $24x + 138y = 18$;

(c) $221x + 35y = 11$.

27) a)

$72 \,\underline{|\,56}$ $\quad 16$ $\qquad 56 \,\underline{|\,16}$ $\quad 8 \quad 3$ $\qquad 16 \,\underline{|\,8}$ $\quad 0 \quad 2$

$m.d.c(56,72) = 8$

$8 \mid 40$ ✓

$56x + 72y = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x + 9y = 5 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 - 9y}{7} \Leftrightarrow x = -y + \dfrac{5 - 2y}{7}$ → Tem de $\in \mathbb{Z}$

Se $y = -1$, então

$x = 1 + 1 = 2$

soluções: $\begin{cases} x = 2 + \dfrac{72}{8}t \\ y = -1 - \dfrac{56}{8}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = -1 - 7t \end{cases}$

b) $24x + 138y = 18$

$138 \,\underline{|\,24}$ $\quad 18 \quad 5$ $\qquad 24 \,\underline{|\,18}$ $\quad 6 \quad 1$ $\qquad 18 \,\underline{|\,6}$ $\quad 0 \quad 3$

$m.d.c(24, 138) = 6$

$18 \mid 6$ ✓ tem solução

$24x + 138y = 18 \Leftrightarrow 6x + 23y = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 - 23y}{6} \Leftrightarrow x = -3 + \dfrac{3 - 5y}{6}$

Se $y = -9$,

$\dfrac{3 + 45}{6} = 8$

$x = -3 + 8 = 5$

Então, sol: $\begin{cases} x = 5 + 23t \\ y = -9 - 6t \end{cases}$

c) $221x + 35y = 11$ $\qquad 11 \,\underline{|\,2}$ $\qquad 2 \,\underline{|\,1}$ $\qquad m.d.c(221,35) = 1$

c) $221x + 35y = 11$

$\begin{array}{r|l} 221 & 35 \\ \hline 11 & 6 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 35 & 11 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$

m.d.c $(221, 35) = 1$

$1 \mid 11$

$y = \frac{11 - 221x}{35} \Leftrightarrow y = -6 + \frac{11 - 6x}{35}$

$35z = 11 - 6x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-35z + 11}{6} = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5z + \frac{11 - 5z}{6} = x$

$y = -6 + \frac{11 - 186}{35} = -6 - \frac{175}{35} =$

$= -6 - 5 = -11$

$z = -5 \qquad \frac{11 + 25}{6} = \frac{36}{6} = 6$

$x = 25 + 6 = 31$

S.f. $:= \begin{cases} x = 31 + 35t \\ y = -11 - 221t \end{cases}$

28. Determine as soluções inteiras positivas das seguintes equações diofantinas:

(a) $18x + 5y = 48$;
(b) $54x + 21y = 906$;
(c) $5x - 11y = 29$.

28) m.d.c$(18, 5) = 1$, pq 5 é primo

$y = \frac{48 - 18x}{5} = 9 - 3x + \frac{3 - 3x}{5}$ se $\boxed{x = -4}$,

$y = 9 + 12 + 3 = 24$

S.g. : $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 24 - 18t \end{cases}$ se $t = 1$,

$x = 1 \wedge y = 6$ $(1, 6) \rightarrow$ única solução inteira positiva.

b) $54x + 21y = 906$ m.d.c $(54, 21) = 3$

$54x + 21y = 906 \Leftrightarrow 18x + 7y = 302$

$\Leftrightarrow y = \frac{302 - 18x}{7} = 43 - 2x + \frac{1 - 4x}{7}$

se $x = 1$,

7

se $x = 1$,

$\frac{1-8}{7} = -1$

$y = 43 - 2 - 1 = 40$

Sol: $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 40 - 18t \end{cases}$

se $t = 0$, $(1, 40)$

se $t = 1$ $(8, 22)$

se $t = 2$ $(15, 4)$

} únicas soluções positivas inteiras

29. De quantas maneiras se pode exprimir o número 4 como diferença de dois inteiros positivos, dos quais o primeiro é divisível por 8 e o segundo é múltiplo de 15? Indique três delas.

→ tem de ser soluções positivas

29) m.d.c$(8, 15) = 1$

$4 = 8x - 15y \Rightarrow x = \frac{4 - 15y}{8} = -1 + \frac{4 - y}{8}$

$\begin{cases} x = 1 - 15t \\ y = -4 - 8t \end{cases}$

se $y = -4$,

$x = -1 + 2 = 1$

R: $(14, 4)$, $(29, 12)$, $(44, 20)$

30. Determine dois inteiros, um positivo e outro negativo, cuja soma é 42 e tais que um deles é múltiplo de 126 e o outro é divisível por 56.

m.d.c $= 14$

30) $42 = 126x + 56y$

$\Rightarrow 3 = 9x + 4y$ $x = -1$ e $y = 3$

31. (a) Para que valores de x e de y se tem $11x + 7y = 200$?

(b) Para que valores encontrados em (a) se tem $3x + y$ múltiplo de 3? → 37

y tem de ser múltiplo de 3

31) a) m.d.c $= 1$

$11x + 7y = 200 \Rightarrow y = \underline{-11x + 200} \Rightarrow$

7

$\Leftrightarrow y = -1 + 28 + \frac{4 - 4\cancel{x}}{7}$

$x = 8$

$\frac{-28}{7} = -4$

$y = 23$

$sol: \begin{cases} x = 8 + 7t \\ y = 23 - 11t \end{cases}$

5) $\underbrace{3x}_{\downarrow} + y = 3q \quad , q \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3(\underset{\downarrow}{q} - x)$

já vai ser múltiplo de 3.

qualquer num $= z$

$y = 23 - 11t = 3z \quad , z \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{23 - 11t}{3} = z \Leftrightarrow 7 - 3t + \frac{2 - 2t}{3} = z \Rightarrow$

$t = -2$

$y = 45 + 3z$

$z = 15$

0 crianças no mínimo

32. Um teatro amador cobra 1,80 euros de entrada a cada adulto e 75 cêntimos a cada criança. Num espetáculo, as receitas totais somaram 90 euros. Sabendo que estiveram presentes mais adultos do que crianças, diga quantas pessoas estiveram a assistir a esse espetáculo.

↳ isto pede o nº máximo ou as diferentes alternativas?

32) $9000 = 180x + 75y$

$\Leftrightarrow 600 = 12x + 5y$

$\Leftrightarrow \frac{50 - 5y}{12} = x \quad \Leftrightarrow \quad y = 12 , \quad x = 45$

$sol: \begin{cases} x = 45 + 5t \end{cases}$

Se $t = 0$,

$x = 45 \wedge y = 12$,

57 pessoas

$$sf:\begin{cases} x = 45 + 5 \\ y = 12 - 12t \end{cases}$$

5 pessoas a assistir

Se o enunciado implica que há crianças, então estas são as únicas soluções válidas.

Se $t = -1$

$x = 40 \land y = 24$

64 pessoas a assistir

Se $t = -2$

$x = 35 \land y = 36$

impossível, pq crianças já ~~são~~ > que adultos

Porém, se "haver mais adultos que crianças" não discrimina a possibilidade de não haver crianças, então,

$t = 1$, $x = 50$ adultos $\land$ $y = 0$ crianças

50 pessoas a assistir também é solução.

33. Quando morreu, a idade de um homem era $\frac{1}{29}$ do ano do seu nascimento. Que idade tinha o homem em 1940?

ano nascimento $= x$

$29z = x$

idade homem em 1940 $= y$

$$\boxed{1940 - x = y}$$

$$1940 - 29z = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1940 = y + 29z$$

Se $z = 0$, $y = 1940$

$z > y$

$y > 0$

$$\begin{cases} z = t \\ y = 1940 - 29t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1940 - 29t \\ 1940 - 29t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30t > 1940 \\ t < \frac{1940}{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \boxed{64 + \frac{2}{30}} \approx 64{,}66\ldots \\ t < 66 + \frac{36}{29} \approx 66{,}8\ldots \end{cases}$$

$1940 \,\lfloor 30$ → 64, resto 2

$1940 \,\lfloor 29$ → 66, resto 26

$26 \,\lfloor 29$, -232, $0{,}8$, $28\ldots$

$29 \times 65 = 1885$

$+29 \times 66 \to 1914$

$]\ 64{,}66 \ \ldots\ 65 \ —\ 66 \ \ldots\ [$

Como $t \in \mathbb{Z}$

então só é possível $t = 65$ ou $t = 66$

Caso $t = 65$

$y = 1940 - 1885 = 55$ anos

Caso $t = 66$

$y = 1940 - 1914 = 26$ anos

34. Uma loja de gelados vende gelados de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate. Cada cliente pode comprar um cone com uma, duas ou três bolas de gelado, mas não é permitido repetir sabores no mesmo cone. Cada bola de gelado de baunilha custa 1,00 euro, cada bola de gelado de morango custa 1,50 euros e cada bola de gelado de chocolate custa 2,00 euros. O cone de duas bolas tem um desconto de 0,31 euros e o cone de 3 bolas tem um desconto de 0,71 euros. No final do dia, foram vendidas 63 bolas de gelado de baunilha, 61 bolas de gelado de morango e 56 bolas de gelado de chocolate e havia 249,75 euros em caixa. Sabendo que cada cliente comprou apenas um gelado, quantos clientes foram servidos nesse dia?

34) Baunilha: 1 Morango: 1,5 Chocolate: 2

$63 + 91,5 + 112 = 266,5$ → Total sem desconto

$266,5 - 249,75 = 16,75$ → Desconto feito

$1675 \,\underline{|\,31}$
$1 \quad 54$

$0,31x + 0,71y = 16,75 \Leftrightarrow 31x + 71y = 1675$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1675 - 71y}{31} \Leftrightarrow x = 54 - 2y + \boxed{\dfrac{1 - 9y}{31}}$

$y = 7$

$$S: \begin{cases} x = 38 + 71t \\ y = 7 - 31t \end{cases}$$

soluções únicas, se nós diminuirmos a [illegible] ou aumentarmo-la, uma das soluções fica negativa.

$a = 54 - 14 - 2 = 38$

Houve 38 pedidos de 2 bolas e
↳ 76 bolas

7 pedidos de 3 bolas.
↳ 21 bolas

$\underbrace{61 + 63 + 56}_{\text{total bolas}} - 97 = 73$ bolas

↳ 73 pedidos de uma bola

$73 + 45 = 118$ clientes servidos