Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

MiEInf
2017/2018

Lógica EI

2.º Teste — 5 de junho de 2018 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______________

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,5 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \lor p_1$.	☐	☐
2. O conjunto $\{(p_0 \lor \neg p_1) \to p_0,\ p_1 \land \neg p_2\}$ é sintaticamente inconsistente.	☐	☐
3. Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de função f e um símbolo de relação R, ambos binários, x_0 está livre para $\mathsf{f}(x_1, x_2)$ em $\forall x_0 \mathsf{R}(x_0, x_1) \to \exists x_2 \mathsf{R}(x_0, x_2)$.	☐	☐
4. A fórmula $s(x_0) + s(x_1) = s(x_0 + x_1)$ de tipo Arit é satisfazível.	☐	☐
5. Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário P, a fórmula $\forall x_0(\mathsf{P}(x_0) \to \mathsf{P}(x_0))$ é universalmente válida.	☐	☐

Grupo II

1. Sejam $\varphi = \neg(p_0 \land p_1) \land p_2$ e $\psi = p_0 \to \neg p_1$.
   (a) Construa uma demonstração de $\varphi \to \psi$ em DNP.
   (b) Mostre que, no entanto, $\not\vdash \psi \to \varphi$.
2. Prove que, para qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\psi \to \sigma$ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \varphi \to \sigma$.

Grupo III

(Nas seguintes questões, exceto na 6(a), apresente cada resposta no espaço disponibilizado para o efeito.)

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{1}, \mathsf{d}, \mathsf{x}\}, \{\mathsf{P}, >\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{1}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{d}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{x}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(>) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$\overline{\mathsf{1}} = 1$	$\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par" em $\mathbb{N}$
$\overline{\mathsf{d}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathsf{d}}(n) = 2n$	$\overline{>}$ é a relação "maior do que" em $\mathbb{N}$
$\overline{\mathsf{x}}$ é a multiplicação em $\mathbb{N}$	

1. Sem justificar, dê exemplo de um termo de tipo L com pelo menos 2 ocorrências de um dos símbolos de função de L.

2. Sem justificar, dê exemplo de um termo t de tipo L tal que $x_1, x_2 \in VAR((\mathsf{d}(x_0) \times \mathsf{1})[t/x_0])$.

3. Defina, por recursão estrutural, a função $f : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo t faz corresponder o número de ocorrências de símbolos de função não constantes em t.

4. Seja α a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(x_i) = 3i$. Indique, sem justificar, $\overline{\mathsf{d}(\mathsf{d}(x_1) \times x_2)}_\alpha$.

5. Considere a fórmula $\psi = \neg \mathsf{P}(x_1 \times x_2)$. Seja α uma atribuição em E tal que $\alpha(x_1) = 5$. Indique, sem justificar, uma condição que α tem de satisfazer de modo a que $\overline{\psi}_\alpha = 1$.

6. Seja φ a $L-$fórmula $\exists x_1(\mathsf{d}(x_1) > x_1 \times x_1)$.
   (a) Prove que φ é verdadeira em E.
   (b) Indique, sem justificar, uma estrutura E' de tipo L que seja diferente de E apenas na interpretação do símbolo d e tal que φ não seja verdadeira em E'.

Cotações

I	II	III
5	2+1,75+1,5	1,5+1,5+2,5+1+1+1,25+1

Lógica EI

2º teste

5 jun 2018

Grupo I

1. V

$$\dfrac{p_0}{p_0 \vee p_1} \vee_1 I$$

é uma derivação de conclusão $p_0 \vee p_1$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{p_0\}$. Como $\{p_0\} \subseteq \{p_0, \neg p_1\}$, segue-se que $p_0 \vee p_1$ é derivável a partir de $\{p_0, \neg p_1\}$, ou seja, $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \vee p_1$

[Em alternativa, consideremos uma valoração v tal que v sat. $\{p_0, \neg p_1\}$. Então, $v(p_0) = v(\neg p_1) = 1$, ou seja, $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$. Logo, $v(p_0 \vee p_1) = 1$. Provámos que se v é uma valoração tal que v sat. $\{p_0, \neg p_1\}$, então $v(p_0 \vee p_1) = 1$. Logo, $p_0, \neg p_1 \models p_0 \vee p_1$ e, pelo Teorema da Completude, $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \vee p_1$.

2. F Seja v uma valoração. Temos que

$$v(p_1 \wedge \neg p_2) = 1 \quad \text{sse} \quad v(p_1) = 1 \text{ e } v(p_2) = 0.$$

Se v for tal que $v(p_0) = 1$, então

$$v((p_0 \vee \neg p_1) \to p_0) = 1.$$

Assim, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$, então v sat. $\{(p_0 \vee \neg p_1) \to p_0,\ p_1 \wedge \neg p_2\}$, pelo que este conjunto é semanticamente consistente.

Logo, o conjunto é sintaticamente consistente.

3. F

x_0 tem uma ocorrência livre na fórmula no alcance da ocorrência de $\exists x_2$. Como $x_2 \in VAR(f(x_1,x_2))$, x_0 não está livre para $f(x_1,x_2)$ em $\forall x_0 R(x_0,x_1) \rightarrow \exists x_2 R(x_0,x_2)$.

4. V Seja $E = (\mathbb{N}_0, \sim)$ a estrutura de tipo Arit exatamente igual a NATS exceto na interpretação do símbolo s, sendo $\tilde{s}$ a função $\tilde{s} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definida por $\tilde{s}(m) = m$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Dada uma atribuição α em E, temos que

$$\overline{s(x_0)+s(x_1) = s(x_0+x_1)}\ \alpha = 1$$

ssc $\left(\tilde{+}\left(\tilde{s}(\alpha(x_0)), \tilde{s}(\alpha(x_1))\right), \tilde{s}\left(\tilde{+}(\alpha(x_0),\alpha(x_1))\right)\right) \in \tilde{=}$

ssc $\alpha(x_0) + \alpha(x_1) = \alpha(x_0) + \alpha(x_1)$, o que é verdade.

Logo, $s(x_0)+s(x_1) = s(x_0+x_1)$ é satisfazível.

5. V

Seja $\varphi = (\forall x_0\ P(x_0) \to P(x_0))$. Seja (E,α) uma valoração de tipo L. Temos que

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ ssc Para todo $d \in dom(E)$, $\overline{P(x_0) \to P(x_0)}\ \alpha\binom{d}{x_0} = 1$

ssc Para todo $d \in dom(E)$, $\left(\overline{P(x_0)}\alpha\binom{d}{x_0} = 0 \text{ ou } \overline{P(x_0)}\alpha\binom{d}{x_0} = 1\right)$

ssc Para todo $d \in dom(E)$, $(d \notin \overline{P}$ ou $d \in \overline{P})$, o que é verdade.

Portanto, $\overline{\varphi}\alpha = 1$, para toda a valoração (E,α) de tipo L, pelo que φ é universalmente válida.

Grupo II

1.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \quad \cancel{p_1}^{(3)}}{p_0 \wedge p_1}\wedge I \qquad \dfrac{\cancel{\neg(p_0\wedge p_1)\wedge p_2}^{(1)}}{\neg(p_0\wedge p_1)}\wedge_1 E}{\perp}\neg E}{\neg p_1}\neg I^{(3)}}{p_0\to\neg p_1}\to I^{(2)}}{(\neg(p_0\wedge p_1)\wedge p_2)\to(p\to\neg p_1)}\to I^{(1)}$$

é uma demonstração de $\varphi\to\psi$ em DNP

b) Como corolário do Teorema da Correção, sabemos que se $\not\models \psi\to\varphi$ então $\nvdash \psi\to\varphi$.

Ora, se v é uma valoração tal que $v(p_0)=1$, $v(p_1)=0$ e $v(p_2)=0$, então $v(\psi)=1$ e $v(\varphi)=0$. Assim, $v(\psi\to\varphi)=0$, pelo que $\psi\to\varphi$ não é tautologia.

Logo, $\nvdash \psi\to\varphi$.

2. Admitamos que $\Gamma,\varphi\vdash\psi$ e que $\models\psi\to\sigma$. Pelo Teorema da Completude sabemos que $\vdash\psi\to\sigma$. Assim, existe uma derivação D_1 de ψ a partir de $\Gamma\cup\{\varphi\}$ e existe uma demonstração D_2 de $\psi\to\sigma$. Logo,

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}^{(1)}\\ D_1\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \psi\to\sigma\end{matrix}}{\sigma}\to E}{\varphi\to\sigma}\to I^{(1)}$$

é uma derivação de $\varphi\to\sigma$ cujas hipóteses não canceladas são exatamente as de D_1 exceto as iguais a φ. Logo, as hipóteses não canceladas desta derivação são elementos de T'. Portanto, $T' \vdash \varphi \to \sigma$.

[Em alternativa, admitamos que $T', \varphi \vdash \psi$ e que $\models \psi \to \sigma$. Pelo Teorema da Correção, $T', \varphi \models \psi$. Mostremos que $T' \models \varphi \to \sigma$. Para tal, consideremos uma valoração v tal que v sat. T'. Pretendemos mostrar que $v(\varphi \to \sigma) = 1$. Como $\models \psi \to \sigma$, sabemos que $v(\psi \to \sigma) = 1$. Temos dois casos possíveis:

(a) CASO $v(\varphi) = 1$
(b) CASO $v(\varphi) = 0$

(a) CASO $v(\varphi) = 1$:

Se $v(\varphi) = 1$, como v sat. T', então v sat. $T' \cup \{\varphi\}$. De $T', \varphi \models \psi$, segue-se que $v(\psi) = 1$. Atendendo a que $v(\psi \to \sigma) = 1$, podemos concluir que $v(\sigma) = 1$. Assim, $v(\varphi) = v(\sigma) = 1$ e, por conseguinte, $v(\varphi \to \sigma) = 1$.

(b) CASO $v(\varphi) = 0$.

Neste caso é imediato que $v(\varphi \to \sigma) = 1$.

Provámos, em ambos os casos, que $v(\varphi \to \sigma) = 1$. Logo, se v sat. T' então $v(\varphi \to \sigma) = 1$, para toda a valoração v. Portanto, $T' \models \varphi \to \sigma$.

Pelo Teorema da Completude segue-se que $T' \vdash \varphi \to \sigma$.]

Grupo III

1. Obs: $\mathcal{T}_L$ é definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}_L)^*$ por:

i) $x_i \in \mathcal{T}_L$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$,
ii) $1 \in \mathcal{T}_L$
iii) $t \in \mathcal{T}_L \Rightarrow d(t) \in \mathcal{T}_L$, para todo $t \in (\mathcal{A}_L)^*$
iii) $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L \Rightarrow t_1 \times t_2 \in \mathcal{T}_L$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_L)^*$

Um possível exemplo pode ser $d(d(1))$

2. $(d(x_6) \times 1)[t/x_6] = d(t) \times 1$

Assim, para x_1 e x_2 ocorrerem em $d(t) \times 1$, x_1 e x_2 têm de ocorrer em t.

Consideremos, por exemplo, $t = x_1 \times x_2$.

3. $f : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural sobre T_L, do seguinte modo:

(i) $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
(ii) $f(1) = 0$;
(iii) $f(d(t)) = 1 + f(t)$, para todo $t \in T_L$;
(iv) $f(t_1 \times t_2) = 1 + f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

4.

$$\overline{d(d(x_1) \times x_2)}\,\alpha = \bar{d}\left(\bar{\times}\left(\bar{d}(\alpha(x_1)), \alpha(x_2)\right)\right)$$

$$= 2 \times ((2 \times 3) \times 6) = 72.$$

$\alpha(x_1) = 3$
$\alpha(x_2) = 6$

5.

$\overline{\varphi}\,\alpha = 1$ sse $\overline{P(x_1 \times x_2)}\,\alpha = 0$

sse $\overline{x_1 \times x_2}\,\alpha \notin \overline{P}$

sse $\alpha(x_1) \times \alpha(x_2)$ não é par

sse $5 \times \alpha(x_2)$ não é par

sse $\alpha(x_2)$ não é par

Logo, uma condição que α tem de satisfazer é: $\alpha(x_2)$ é ímpar.

6.

(a) Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}$

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(d(x_1) > x_1 \times x_1)}\,\alpha\binom{d}{x_1} = 1$

sse Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n > n^2$, o que é verdade (basta considerar $n = 1$)

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 1$, para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$. Assim, φ é verdadeira em $\mathcal{E}$.

(b) Seja $\mathcal{E}' = (\mathbb{N}, \sim)$ uma estrutura que difira de $\mathcal{E}$ apenas na interpretação de d.

Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}'$

$\overline{\varphi}\alpha = 0$ sse Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{d}(n) \not> n^2$.

Consideremos, por exemplo, $\tilde{d} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto n$.

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^2$, segue-se que $\overline{\varphi}\alpha = 0$.