Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Soluções da Folha 3

1.

	$E[X]$	$Var[X]$	σ_X	$\chi_{0.25}$	$\chi_{0.5}$	$\chi_{0.75}$
1(a) i.	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	1
1(a) ii.	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	1
1(a) iii.	$\frac{161}{36}$	$\frac{2555}{1296}$	$\sqrt{\frac{2555}{1296}}$	3	5	6
1(a) iv.	$\frac{91}{36}$	$\frac{2555}{1296}$	$\sqrt{\frac{2555}{1296}}$	1	2	3
1(a) v.	$\frac{70}{36}$	$\frac{2660}{1296}$	$\sqrt{\frac{2660}{1296}}$	1	2	3
1(a) vi.	7	$\frac{210}{36}$	$\sqrt{\frac{210}{36}}$	5	7	9
1(a) vii.	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{36}$	$\sqrt{\frac{10}{36}}$	0	0	1
3.	$\frac{7}{2}$	$\frac{37}{12}$	$\sqrt{\frac{37}{12}}$	2	4	5

; Primeiro decil: 2; 0.8

2. (a) Sim; (b) Sim
3. (a) 10; 4.4; (b) 10.1; (c) -3; 14.3
4. (a) 25 (valor médio) e 28.75 (variância);
   (b) $N = 11$ é o menor
5. (a) 4×0.6^9; 4.6×0.6^9; 0.4^{10};
   (b) 45×0.5^{10}, $1 - 11 \times 0.5^{10}$;
   (c) igual a (b)
   (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$; $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; 0 no caso de extracção sem reposição

Exercícios Suplementares à Folha 3

1.

	$E[X]$	$Var[X]$	σ_X	$\chi_{0.25}$	$\chi_{0.5}$	$\chi_{0.75}$
1.	3.15	2.1275	$\sqrt{2.1275}$	2	3	4
2.	$\frac{13}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{\sqrt{11}}{6}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$
3.	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

; Nono decil: 5; $\sqrt{8.2}$; $1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$

2. (a) $F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ c^3(4-3c) & se \quad 0 \le c \le 1 \\ 1 & se \quad c > 1 \end{cases}$; $E[X] = \frac{3}{5}$; $Var[X] = \frac{1}{25}$
   (b) i. $L : \begin{cases} 8 & 13 & 18 \\ \frac{3}{27} & \frac{13}{27} & \frac{11}{27} \end{cases}$; ii. $\frac{391}{27}$
   (c) $Y \sim Bin(5, \frac{1}{9})$; $Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ (\frac{8}{9})^5 & 5 \times \frac{8^4}{9^5} & 10 \times \frac{8^3}{9^5} & 10 \times \frac{8^2}{9^5} & 5 \times \frac{8}{9^5} & (\frac{1}{9})^5 \end{cases}$
3. (a) $X : \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$; $Y : \begin{cases} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{cases}$; $E[X] = 2$; $Var[X] = \frac{2}{3}$; $E[Y] = \frac{8}{3}$; $Var[Y] = \frac{2}{9}$
   (b) $\frac{1}{4}$ e 0; X e Y não são independentes
   (c) i. $S : \begin{cases} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{cases}$; $T : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{cases}$; ii. $\frac{14}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{5}{9}$
4. (a) — (b) $N \sim Exp(n\lambda)$

1. (a) $\lambda = 1$;
   (b) i. $\frac{1}{2}e^{-1}$; ii. $\frac{5}{2}e^{-1}$; iii. $1 - \frac{5}{2}e^{-1}$; iv. $1 - 2e^{-1}$; v. $\frac{5}{3} \times \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$;
   (c) $45 \times (e^{-1})^2(1 - e^{-1})^8$
2. (a) —
   (b) $X \sim U([2, 12])$;
   (c) i. 0.6; ii. igual a i.; iii. $10 \times 0.4^3 \times 0.6^2 + 5 \times 0.4^4 \times 0.6 + 0.4^5$;
   (d) $\chi_p = 2 + 10 \times p$
3. (a) $\lambda = \frac{1}{10}$;
   (b) $1 - e^{-0.8}$; $1 - e^{-1}$;
   (c) $1 - e^{-1}$
4. (d) e (e) são verdadeiras
5. 1.96; −1.96; 1.645; 2.575; 1.645
   (respetivamente, o quantil de ordem 0.975, 0.025, 0.95, 0.995 e 0.95 da distribuição $N(0, 1)$).
6. (a) $N(270, 67)$; (b) 0.0336
7. $\overline{X}_{10} \sim N\left(3.2, \frac{1.8^2}{10}\right)$; (b) $P(\overline{X}_{10} \geq 3.5) = 0.2981$
8. (a) $1 - 11 \times 0.5^{10}$; (b) $P(|\overline{X}_{10} - 12| > 1.5) = 0.2040$
9. (a) $E[\psi_i] = 0$; $E[X_i] = m$; $Var[\psi_i] = \frac{1}{3} = Var[X_i],\ i \in \{1, \ldots, n\}$;
   (b) Formulação: Dada uma amostra aleatória, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, proveniente de uma v.a. com distribuição $N(m, \frac{1}{3})$, pretende-se determinar n tal que $P\left(|\overline{X}_n - m| > \frac{1}{5}\right) < 0.05$.
   Solução: $n \geq 32.013$, $n = 33$ é o menor
10. Formulação: Dada uma amostra aleatória, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, proveniente de uma v.a. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, pretende-se determinar n tal que $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.25\sigma) \geq 0.95$.
    Solução: $n \geq 61.467$, $n = 62$ é o menor.

Exercícios Suplementares à Folha 4

1. (a) $e^{-0.6}$;
   (b) $20 \times (e^{-0.6})^3 \times (1 - e^{-0.6})^3$;
   (c) $P(Z = k) = \frac{(0.6p)^k}{k!}e^{-0.6p}$, $k \in \mathbb{N}_0$;
   (d) $Z \sim Poisson(\lambda p)$;
   (e) i. 60 (valor médio) e 6000 (variância); ii. 300 (valor médio) e 30000 (variância)
2. (a) $\frac{5}{20}$;
   (b) igual a (a);
   (c) $\frac{16}{20}$
3. (a) 0.6826;
   (b) 0.9544;
   (c) 0.9974
4. (a) 20×0.5^6;
   (b) i. $D \sim N(5, \frac{1044}{16})$; ii. $P(D \geq 0) = 0.7324$