Lógica LEI

Exame de recurso
17 junho '22

Grupo I

1. $$(p_0 \vee p_1)[\varphi / p_1] = p_0 \vee \varphi$$

$$var\big((p_0 \vee p_1)[\varphi/p_1]\big) = var(p_0 \vee \varphi) = \{p_0\} \cup var(\varphi)$$

Seja $\varphi = \perp$. $var(p_0 \vee \perp) = \{p_0\}$.

2. $v \models T$ sse $v(p_1) = 1$ e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$ e $v(p_2 \leftrightarrow \neg p_3) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} v(p_1) = 1 \\ v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(p_2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} v(p_2) = 0 \\ v(p_2 \leftrightarrow \neg p_3) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(p_3) = 1.$$

Seja $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ definida por $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$,

para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

3. $v(\varphi \wedge (p_0 \to \neg p_1)) = 0$, para toda a valoração v sse

$(v(\varphi) = 0$ ou $v(p_0 \to \neg p_1) = 0)$, para toda a valoração v sse

$(v(\varphi) = 0$ ou $(v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 1))$, para toda a valoração v

Consideremos $\varphi = p_0 \wedge p_1$.

4. $$p_0 \wedge (p_1 \to \neg p_0) \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \vee \neg(p_1 \to \neg p_0))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \vee \neg(\neg p_1 \vee \neg p_0))$$

Seja $\psi = \neg(\neg p_0 \vee \neg(\neg p_1 \vee \neg p_0))$.

5. $f(c, x_1)[a]_E = \bar{f}(\bar{c}, a(x_1))$

$$= 2 \times a(x_1)$$

$$g(c)[a]_E = \bar{g}(\bar{c}) = -2$$

$2 \times a(x_1) = -2 \Leftrightarrow a(x_1) = -1$. Consideremos

$$a : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x_i \longmapsto -i$$

6. $\forall x_1 \; R(x_1, g(x_1), f(c, x_1))$.

7. $E = (\{0\}, -)$ onde $\bar{c} \in \{0\}$
$\bar{P} \subseteq \{0\}$
$\bar{Q} \subseteq \{0\} \times \{0\} = \{(0,0)\}$

Existem $4 = 1 \times 2^1 \times 2^1$ L-estruturas cujo domínio é $\{0\}$.

8. $\psi = \forall x_1 \exists x_2 \; \neg(x_0 \times x_1 < x_2)$

x_0 tem uma ocorrência livre em ψ que está no alcance de $\forall x_1$ e $\exists x_2$.

Logo, x_0 não está livre para t em ψ se $x_1 \in VAR(t)$ ou $x_2 \in VAR(t)$.

Considere-se $t = x_1$.

Grupo II

1. $f(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 0 \\ 1 & \text{se } i = 0 \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

$f(\perp) = 0$;

$f(\neg\varphi) = f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$f(\varphi \square \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Seja $\mathcal{P}(\varphi)$ o predicado $f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(\varphi)$ sobre $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

(I) $\varphi = \perp$

$f(\perp[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(\perp)$. Logo, $\mathcal{P}(\varphi)$

(II) $\varphi = p_0$ $f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(p_0[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(p_0 \wedge p_1) =$

$= 1 = f(p_0) = f(\varphi)$. Portanto, $\mathcal{P}(\varphi)$

(III) $\varphi = p_i$, com $i \in \mathbb{N}$

$f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(p_i[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(p_i) = f(\varphi)$.

Logo, $\mathcal{P}(\varphi)$.

(IV) Admitamos que $\varphi = \neg\varphi_1$, para algum $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\mathcal{P}(\varphi_1)$. (HI)

Temos que $f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f((\neg\varphi_1)[p_0 \wedge p_1/p_0]) =$

$= f(\neg\varphi_1[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(\varphi_1[p_0 \wedge p_1/p_0]) \underset{HI}{=} f(\varphi_1) =$

$= f(\neg\varphi_1) = f(\varphi)$. Logo, $\mathcal{P}(\varphi)$

(V) Admitamos que $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$, para algum $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e alguns $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\mathcal{P}(\varphi_1)$ e $\mathcal{P}(\varphi_2)$ (HI).

Assim, $f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f((\varphi_1 \square \varphi_2)[p_0 \wedge p_1/p_0]) =$

$$= f\,(\varphi_1[p_0\wedge p_1/p_0] \,\square\, \varphi_2[p_0\wedge p_1/p_0])$$

$$= f\,(\varphi_1[p_0\wedge p_1/p_0]) + f\,(\varphi_2[p_0\wedge p_1/p_0]) =$$

$$\underset{HI}{=} f(\varphi_1) + f(\varphi_2) = f(\varphi_1 \,\square\, \varphi_2) = f(\varphi).$$

Portanto, $\mathcal{P}(\varphi)$.

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \quad p_1\to p_0}{p_0}{\to}E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \quad p_0\to\bot}{\bot}{\to}E}{\neg p_0}\neg I^{(2)}}{\bot}\neg E}{\neg p_1}\neg I^{(1)}$$

é uma derivação em DNP de conclusão $\neg p_1$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{p_1\to p_0,\ p_0\to\bot\}$. Logo,

$$p_0\to\bot,\ p_1\to p_0 \vdash \neg p_1.$$

(ou: Seja v uma valoração tal que $v(p_0\to\bot)=1$ e $v(p_1\to p_0)=1$. Então, $v(p_0)=0$ e, portanto, $v(p_1)=0$. Assim, $v(\neg p_1)=1$. Logo, se v é tal que $v\models\{p_0\to\bot,\ p_1\to p_0\}$ então $v(\neg p_1)=1$. Portanto, $p_0\to\bot,\ p_1\to p_0 \models \neg p_1$).

3. $(p_0\leftrightarrow p_1)\vee(p_1\wedge p_2) \Leftrightarrow ((p_0\to p_1)\wedge(p_1\to p_0)) \vee$
$\vee\ (p_1\wedge p_2) \Leftrightarrow ((\neg p_0\vee p_1)\wedge(\neg p_1\vee p_0)) \vee (p_1\wedge p_2)$
$\Leftrightarrow ((\neg p_0\vee p_1)\vee(p_1\wedge p_2)) \wedge ((\neg p_1\vee p_0)\vee(p_1\wedge p_2))$
$\Leftrightarrow (\neg p_0\vee p_1\vee p_1)\wedge(\neg p_0\vee p_1\vee p_2)\wedge(\neg p_1\vee p_0\vee p_1)\wedge(\neg p_1\vee p_0\vee p_2)$, que é uma FNC.

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(2)} \qquad \cancel{p_2}^{(3)}}{p_1 \wedge p_2}\wedge I \qquad \dfrac{\cancel{p_0 \wedge \neg(p_1 \wedge p_2)}^{(1)}}{\neg(p_1 \wedge p_2)}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg p_2}\neg I^{(3)}}{p_1 \to \neg p_2}\to I^{(2)}}{(p_0 \wedge \neg(p_1 \wedge p_2)) \to (p_1 \to \neg p_2)}\to I^{(1)}$$

é uma derivação em DNP de conclusão

$$\varphi = (p_0 \wedge \neg(p_1 \wedge p_2)) \to (p_1 \to \neg p_2)$$

sem hipóteses não canceladas

Logo, é uma demonstração em DNP de φ.

5. $\varphi = \forall x_1 \, (R(f(x_1, x_1), c, g(c)) \to R(x_1, c, g(c)))$

Seja a uma atribuição em E.

Temos que $E \models \varphi[a]$ sse $\varphi[a] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $R(f(x_1,x_1), c, g(c))[a\binom{x_1}{d}] = 1$

então $R(x_1, c, g(c))[a\binom{x_1}{d}] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d^2 - 2 = -2$ então $d - 2 = -2$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d^2 = 0$ então $d = 0$, o que é verdade.

Portanto, $E \models \varphi[a]$.

Assim, $E \models \varphi[a]$, para toda a atribuição a em E e φ é válido em E.

6.

Note-se que

$$\neg\exists x(\psi\wedge\neg\varphi) \underset{x\notin liv(\varphi)}{\iff} \neg(\exists x\psi\wedge\neg\varphi) \iff \neg\exists x\psi\vee\varphi$$

Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que $E\models\neg\exists x(\psi\wedge\neg\varphi)[a]$ e $E\models\exists x\psi[a]$.

Então, $E\models\neg\exists x\psi\vee\varphi[a]$ e $E\models\exists x\psi[a]$.

Logo, $\neg\exists x\psi\vee\varphi[a]_E=1$ e $\exists x\psi[a]_E=1$, donde $\varphi[a]_E=1$. Portanto, $E\models\varphi[a]$

Provámos, assim, que $\neg\exists x(\psi\wedge\neg\varphi), \exists x\psi\models\varphi$.

7.

$$\dfrac{\dfrac{P(c)\wedge Q(c)}{Q(c)}\,{\scriptstyle\wedge_2E} \qquad \dfrac{\dfrac{P(c)\wedge Q(c)}{P(c)}\,{\scriptstyle\wedge_1E} \quad \dfrac{\forall x_0(P(x_0)\to\neg Q(x_0))}{P(c)\to\neg Q(c)}\,{\scriptstyle\forall E\ (*)}}{\neg Q(c)}\,{\scriptstyle\to E}}{\bot}\,{\scriptstyle\neg E}$$

* x_0 está livre para c em $P(x_0)\to\neg Q(x_0)$

é uma derivação de conclusão $\bot$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é T.

Logo, $T\vdash\bot$ e T é sintaticamente inconsistente.