Universidade do Minho

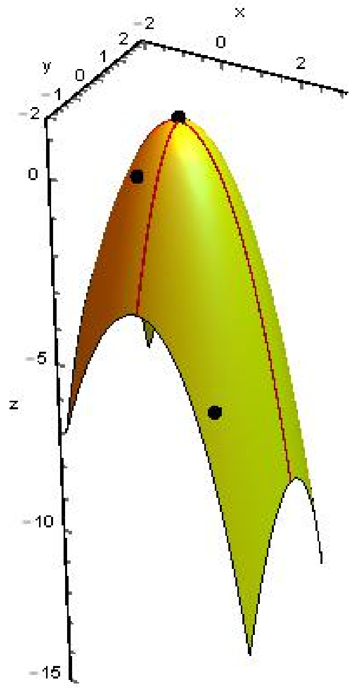
MIE Informática

Departamento de Matemática e Aplicações

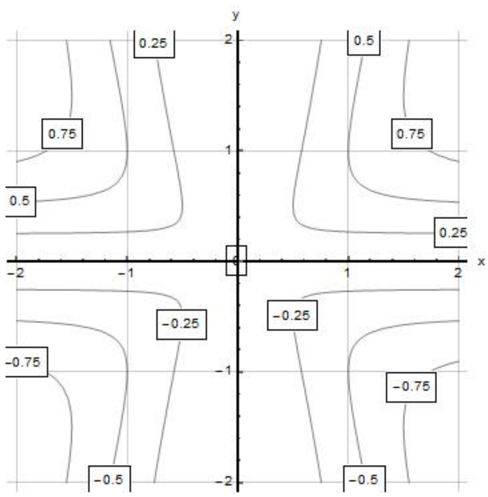
Análise

FOLHA 3 — 2018'19

Funções definidas em $\mathbb{R}^n$: Derivadas (Parciais, Direcionais,Globais & de ordem superior



1. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, representada graficamente pela figura anexa, indique o sinal de cada uma das derivadas parciais de f, para cada um dos três pontos assinalados da superfície.



2. Atente no diagrama de nível, de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, anexo. Indique o sinal de $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_x(-1,1)$, $f_y(-1,1)$, $f_x(-1,-1)$,$f_y(-1,-1)$, $f_x(1,-1)$ e $f_y(1,-1)$.

3. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy^2 + x$, calcule, usando a definição:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)$ (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

4. Calcule as derivadas parciais de 1.ª ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

   (a) $f(x,y) = y^2 e^{3x}$

   (b) $g(x,y) = (3xy + 2x)^5$

   (c) $f(x,y) = e^{x+3y}\,\mathrm{sen}(xy)$

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^3}{z}$

   (e) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

   (f) $\rho(\phi,\theta) = \phi\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$

   (g) $f(x,y) = \mathrm{arctg}(x^2y^3)$

   (h) $g(x,y,z) = \ln(e^x + z^y)$

   (i) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^3+e^z}{x^3y-e^z}$

5. Para cada uma das funções seguintes, calcule, se existirem, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \pi & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. Mostre que

(a) $u(x,y) = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$ (com A, B e $C \in \mathbb{R}$) satisfaz a equação $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4u$

(b) se $P(T,V) = k\dfrac{T}{V}$ (com $k \in \mathbb{R}$), então $\quad V\dfrac{\partial P}{\partial V} = -P \quad$ e $\quad T\dfrac{\partial P}{\partial T} = P$

(c) se $h(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, então $\quad h_x + h_y + h_z = 1$

7. Encontre o vetor gradiente das seguintes funções (e no ponto assinalado, se for esse o caso):

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x-y}$, em $(3,1)$

(b) $f(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$

(c) $f(x,y) = y\ln x + xy^2$, em $(1,2)$

(d) $f(x,y,z) = e^{-x}\operatorname{sen}(z+2y)$, em $\left(0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

(e) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1}$

(f) $f(x,y,z) = (x-y)\cos(\pi z)$

8. Determine a derivada direcional de cada uma das funções, no ponto P e segundo o vetor $\vec{v}$ indicados.

(a) $f(x,y) = 4 - x^2 - \dfrac{1}{4}y^2$, $P = (1,2)$ e $\vec{v} = \cos\dfrac{\pi}{3}\,\vec{e_1} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\,\vec{e_2}$

(b) $f(x,y) = x^2\operatorname{sen}(2y)$, $P = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\vec{v} = (3,-4)$

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Verifique que f possui derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

(b) Verifique que f não é contínua na origem e conclua que f não é diferenciável na origem.

(c) Mostre que existe $Df\big((0,0);(\alpha,\beta)\big)$ com $\alpha\beta = 0$, mas não existe $Df\big((0,0);(\alpha,\beta)\big)$ com $\alpha\beta \neq 0$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Mostre que existe $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$

(b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\, \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0,0)$.

(c) Verifique que f é diferenciável em $(0,0)$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Mostre que:

(a) f é contínua;

(b) $Df\big((0,0);(a,b)\big) = f(a,b),\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

13. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

(a) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (x,y)$;

(b) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$;

(c) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y) = (xye^{xy}, x\ \text{sen}\, y, 5xy^2)$;

(d) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x-y, y+z)$;

(e) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.

14. Considere as funções f e g tais que

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x-y+z, x^2yz, xyz) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4, \\ & (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = (xy, yz, 2x, xyz) \end{array}$$

(a) Calcule $D\boldsymbol{f}\big((-1,0,-1);(2,3,-1)\big)$ e $D\boldsymbol{g}\big((-1,0,-1);(2,3,-1)\big)$.

(b) Calcule $D\boldsymbol{f}(-1,0,1)$ e $D\boldsymbol{g}(-1,0,1)$.

15. Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (2x^2, 3y, 2xy)$

(a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$.

(b) Justifique que a função $\boldsymbol{f}$ é derivável e calcule a derivada da função f no ponto $(1,1)$.

(c) Determine $D\boldsymbol{f}(1,1)(2,3)$.

16. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

(a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

(b) $f(x,y) = \cos(xy^2)$;

(c) $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

17. Mostre que a função $g(x,t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen} x$, satisfaz a equação do calor $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

18. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

(a) $f_x(x,y) = 2x^3, \qquad f_y(x,y) = yx^2 + x\,;$

(b) $f_x(x,y) = x \operatorname{sen} y, \qquad f_y(x,y) = y \operatorname{sen} x\,.$

19. Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} v: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ & (x,y) & \longmapsto & \operatorname{sen}(xy) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} w: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ & (x,y) & \longmapsto & e^x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2y + y^2z \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,. \\ & (x,y) & \longmapsto & f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \end{array}$$

Determine $\nabla h(x,y)$.

20. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2y - xz$ e $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $Df(1,0,0)(1,2,2)$.

(b) Determine a de modo que a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(at^2, at, t^3)$ tenha derivada nula.

21. Calcule:

(a) $\dfrac{du}{dt}$, onde $u = \ln\left(\operatorname{sen} \frac{x}{y}\right)$ e $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1+t^2}$;

(b) $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial q}$, onde $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2$, $s = p^2 \operatorname{sen} q$;

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, onde $z = x^2 \operatorname{sen} y$ e $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$.