2.7 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$.
b) $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.
c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$.
d) $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

2.8 Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula φ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a φ.

2.9 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

2.10 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$.
b) $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.
c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.
d) $(p_1 \to \perp)$.
e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$.
f) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

2.11 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

2.12 Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário $\diamond$ é determinado pela sua função de verdade $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

a) Quantos conetivos binários existem?
b) Para cada $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva $v_\diamond$ como uma tabela de verdade e traduza essa tabela de verdade como uma FND.
c) Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

2.13 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \to \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.
b) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \wedge \perp)\}$.
c) $\mathcal{F}^{CP}$.
d) $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

2.14 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.
b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.
c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.
d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

2.15 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.
b) $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.
c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$.
d) para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi, \psi \to \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

2.16 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$.
b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.
c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.
d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

2.17 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?
b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?
e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

3.1 **a)** Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique uma derivação em DNP com conclusão $(p_0 \wedge p_1) \to p_1$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \to p_2$ e cujas hipóteses não canceladas sejam $p_0 \to p_1$ e $p_1 \to p_2$.

d) Indique duas derivações distintas em DNP com conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

e) Indique as subderivações de cada uma das derivações apresentadas nas alíneas anteriores.

3.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$.

b) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

c) $\varphi \to \varphi$.

d) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.

f) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.

h) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

3.3 Mostre que:

a) $p_0 \leftrightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

3.4 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

b) $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$.

d) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

3.5 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

3.6 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)