L-estruturas

Definição

Uma *L-estrutura* é um par $E = (D, \overline{})$ onde:

1. D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio* de E e notado por $dom(E)$;
2. $\overline{}$ é uma função de domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamada a *função interpretação* de E, tal que:
   - a cada constante $c \in \mathcal{F}$ de L, $\overline{}$ faz corresponder um elemento $\overline{c}$ pertencente a D;
   - a cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ de L de aridade $n \geq 1$ $\overline{}$ faz corresponder uma função n-ária $\overline{f} : D^n \longrightarrow D$;
   - a cada símbolo de relação $R \in \mathcal{R}$ de L de aridade $n \geq 1$ $\overline{}$ faz corresponder uma relação n-ária $\overline{R} \subseteq D^n$.

Para cada símbolo $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, $\overline{s}$ chama-se a *interpretação* de s em E.

Exemplo 1

Recorde-se o tipo de linguagem $L_{Arit} = (\{0, s, +, *\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(*) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*;
- $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ é a função de *sucessor* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \mathbb{N}_0^2 & \to & \mathbb{N}_0 \\ (n, m) & \mapsto & n+m \end{array}$ é a função de *adição* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{*} : \mathbb{N}_0^2 & \to & \mathbb{N}_0 \\ (n, m) & \mapsto & n \times m \end{array}$ é a função de *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{=}$ é a relação de igualdade $\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n < m\}$, de *menor* em $\mathbb{N}_0$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura.

Exemplo 2

É também uma L_{Arit}-estrutura o par $(\{0,1\}, \overline{})$, em que:

- $\overline{0} = 0$;
- $$\begin{array}{rcl} \overline{s} : \{0,1\} & \rightarrow & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array} ;$$
- $$\begin{array}{rcl} \overline{+} : \{0,1\}^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array} ;$$
- $$\begin{array}{rcl} \overline{*} : \{0,1\}^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \end{array} ;$$
- $\overline{=}$ é a relação $\{(0,0),(1,1)\}$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(0,1)\}$.

Atribuições

Definição

Seja $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura. Uma *atribuição em E* é uma função

$$a : \mathcal{V} \longrightarrow D,$$

que a cada variável de $\mathcal{V}$ faz corresponder um elemento do domínio D da L-estrutura E.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$$

é uma atribuição na L_{Arit}-estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$.

Valores de L-termos

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e seja $t \in \mathcal{T}_L$ um L-termo.

O *valor de t para a atribuição a*, denotado por $t[a]_E$ ou simplesmente por $t[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento de D definido, por recursão estrutural em t, como:

1. para cada $x \in \mathcal{V}$, $x[a] = a(x)$;
2. para cada $c \in \mathcal{C}$, $c[a] = \overline{c}$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer termos $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$f(t_1, \ldots, t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], \ldots, t_n[a]).$$

Exemplo

Considere-se o L_{Arit}-termo $t = x_2 * (0 + s(x_3))$ e a atribuição

$$a^{ind} : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$$

na L_{Arit}-estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$. Então,

$$\begin{aligned}
(x_2 * (0 + s(x_3)))[a^{ind}] &= x_2[a^{ind}] \,\overline{*}\, (0 + s(x_3))[a^{ind}] \\
&= a^{ind}(x_2) \,\overline{*}\, (0[a^{ind}] \,\overline{+}\, s(x_3)[a^{ind}]) \\
&= 2 \,\overline{*}\, (\overline{0} \,\overline{+}\, \overline{s}(x_3[a^{ind}])) \\
&= 2 \,\overline{*}\, (\overline{0} \,\overline{+}\, \overline{s}(a^{ind}(x_3))) \\
&= 2 \,\overline{*}\, (\overline{0} \,\overline{+}\, \overline{s}(3)) \\
&= 2 \times (0 + 4) \\
&= 8 \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Proposição

Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{VAR}(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Demonstração: Por indução estrutural em t.
Suponhamos que $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{VAR}(t)$.

1. Caso $t = x_i \in \mathcal{V}$. Então, $x_i \in \mathrm{VAR}(t)$ e, por hipótese, $a_1(x_i) = a_2(x_i)$. Assim,
$$t[a_1] = x_i[a_1] = a_1(x_i) = a_2(x_i) = x_i[a_2] = t[a_2]$$
2. Caso $t = c \in \mathcal{C}$. Então, $t[a_1] = c[a_1] = \overline{c} = c[a_2] = t[a_2]$.
3. Caso $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f \in \mathcal{F}_L$, $\mathcal{N}(f) = n \geq 1$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então $\mathrm{VAR}(t_i) \subseteq \mathrm{VAR}(t)$ pelo que, por hipótese de indução, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, vem que
$$\begin{array}{rcll} t[a_1] & = & f(t_1, \ldots, t_n)[a_1] & \\ & = & \overline{f}(t_1[a_1], \ldots, t_n[a_1]) & \\ & = & \overline{f}(t_1[a_2], \ldots, t_n[a_2]) & \text{por H.I., pois } \mathrm{VAR}(t_i) \subseteq \mathrm{VAR}(t) \\ & = & f(t_1, \ldots, t_n)[a_2] & \\ & = & t[a_2]. & \end{array}$$

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$, seja x_i uma variável e seja $d \in D$. Denotamos por $a\binom{x_i}{d}$ a atribuição

$$\begin{array}{rcl} a\binom{x_i}{d} : \mathcal{V} & \to & D \\ x_j & \mapsto & \begin{cases} d & \text{se } i = j \\ a(x_j) & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{array}$$

Proposição

Sejam t e u dois L-termos, x uma variável e a uma atribuição numa L-estrutura. Então $t[u/x][a] = t[a\binom{x}{u[a]}]$.

Demonstração: Fazer como exercício usando indução estrutural em t.

Valores lógicos de L-fórmulas

Definição

Sejam a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula.

O *valor lógico de φ para a atribuição a*, denotado por $\varphi[a]_E$ ou simplesmente por $\varphi[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o valor lógico do conjunto $\{0, 1\}$ definido, por recursão estrutural em L-fórmulas, por:

(a) $\perp[a] = 0$;

(b) Para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$R(t_1, \ldots, t_n)[a] = 1 \text{ sse } (t_1[a], \ldots, t_n[a]) \in \overline{R};$$

(c) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, $(\neg\psi)[a] = 1 - \psi[a]$;

(continua)

Valores lógicos de L-fórmulas

Definição (Continuação)

(d) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \wedge \sigma)[a] = min\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

(e) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \vee \sigma)[a] = max\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

(f) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,

$$(\psi \rightarrow \sigma)[a] = 0 \quad \text{sse} \quad \psi[a] = 1 \text{ e } \sigma[a] = 0;$$

(g) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \leftrightarrow \sigma)[a] = 1 \quad \text{sse} \quad \psi[a] = \sigma[a]$;

(h) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,

$$(\exists_x \psi)[a] = 1 \quad \text{sse} \quad \text{existe } d \in D \;\; \psi[a\binom{x}{d}] = 1$$
$$\text{sse} \quad max\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\} = 1;$$

(i) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,

$$(\forall_x \psi)[a] = 1 \quad \text{sse} \quad \text{para todo o } d \in D \;\; \psi[a\binom{x}{d}] = 1$$
$$\text{sse} \quad min\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\} = 1.$$

Exemplo

$\forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}] = 1$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0 (x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] = 1$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $(x_1 = x_0)[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] = 1$ ou $(\exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] = 1$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $x_1[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] = x_0[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}]$ ou

existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$tal que $(x_1 = s(x_2))[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = 1$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $n_1 = a^{ind}(x_0)$ ou

existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $x_1[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = s(x_2)[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}]$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $n_1 = 0$ ou existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $n_1 = \overline{s}(x_2[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}])$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0 n_1 = 0$ou existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$tal que $n_1 = \overline{s}(n_2)$

sse para todo $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $n_1 = 0$ ou existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $n_1 = n_2 + 1$.

Como esta última afirmação é verdadeira, então

$$\forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}] = 1.$$

Satisfação de L-fórmulas

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula. Diz-se que:

- *E satisfaz φ para a atribuição a*, e escreve-se $E \models \varphi[a]$, se o valor lógico de φ em E para a é 1, i.e., se $\varphi[a]_E = 1$.
- *E não satisfaz φ para a atribuição a*, e escreve-se $E \not\models \varphi[a]$, se $\varphi[a]_E = 0$.

Exemplo

$$E_{Arit} \models \forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}].$$

pois $\forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a^{ind}] = 1.$

Lema

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Então,

(i) $E \models (\exists_x \varphi)[a]$ se e só se existe $d \in D$ tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

(ii) $E \models (\forall_x \varphi)[a]$ se e só se para todo $d \in D$ $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

(iii) $E \not\models (\exists_x \varphi)[a]$ se e só se para todo $d \in D$ $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

(iv) $E \not\models (\forall_x \varphi)[a]$ se e só se existe $d \in D$ tal que $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

Demonstração:

(i)
$$\begin{array}{lll} E \models (\exists_x \varphi)[a] & \text{sse} & (\exists_x \varphi)[a]_E = 1 \\ & \text{sse} & \text{existe } d \in D \text{ tal que } \varphi[a\binom{x}{d}]_E = 1 \\ & \text{sse} & \text{existe } d \in D \text{ tal que } E \models \varphi[a\binom{x}{d}]. \end{array}$$

(i)-(iv) Exercício.

Exemplo

$E_{Arit} \models \exists_{x_1} \forall_{x_0} (s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind}]$

sse existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $E_{Arit} \models \forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind} \binom{x_1}{n_1}]$

sse existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}_0$
$E_{Arit} \models (s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind} \binom{x_1}{n_1} \binom{x_0}{n_0}]$

sse existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}_0$
$(s(x_0){=}x_0{+}x_1)[a^{ind} \binom{x_1}{n_1} \binom{x_0}{n_0}] = 1.$

sse existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}_0$ $n_0 + 1 = n_0 + n_1$

Esta afirmação é verdadeira (basta tomar $n_1 = 1$).
Conclui-se então que $E_{Arit} \models \exists_{x_1} \forall_{x_0} (s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind}]$.

Teorema

Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$.

1. Se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$
2. Se x é uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad \text{para todo } d \in D\ E \models \varphi[a_1\binom{x}{d}].$$
3. Se φ é uma L-sentença, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$

Demonstração:

(1) Por indução estrutural em φ (Exercício).

(2)-(3) Imediatas por (1).

Teorema

Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a\binom{x}{t[a]}].$$

Demonstração:
Se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$. Logo,

$$\begin{aligned} E \models \varphi[t/x][a] \quad & \text{sse} \quad E \models \varphi[a] \\ & \text{sse} \quad E \models \varphi[a\binom{x}{t[a]}] \quad \text{pelo teorema anterior.} \end{aligned}$$

No caso de $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, a demonstração é feita por indução estrutural em φ (Exercício).

Validade de L-fórmulas

Definição

Sejam φ uma L-fórmula e E uma L-estrutura.

- Diz-se que *φ é válida em E*, e escreve-se $E \models \varphi$, se $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a em E.
- Caso contrário, ou seja, se existe alguma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$, diz-se que *φ não é válida em E*, e escreve-se $E \not\models \varphi$.

Validade de L-fórmulas

Definição

Seja φ uma L-fórmula. Diz-se que:

- *φ é (universalmente) válida* , e escreve-se $\models \varphi$, se φ é válida em todas as L-estruturas, ou seja, se $E \models \varphi$ para toda a L-estrutura E;
- *φ não é (universalmente) válida*, e escreve-se $\not\models \varphi$ caso contrário.

Exemplo

A L_{Arit}-fórmula

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 = s(x_1)),$$

não é válida na L_{Arit}-estrutura E_{Arit} pois, por exemplo,

$$E_{Arit} \not\models \varphi[a^{ind}].$$

Consequentemente, φ *não é (universalmente) válida*.

No entanto φ *é válida* em algumas L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, φ é válida numa L_{Arit}-estrutura de domínio D que interprete o símbolo de relação $=$ como sendo a relação D^2 (ou seja, a relação universal em D).

Equivalência lógica

Definição

Sejam φ e ψ L-fórmulas. Diz-se que *φ é logicamente equivalente a ψ*, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Lema

A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.

Demonstração: Exercício.

Teorema

Sejam φ e ψ duas L-fórmulas e sejam x e y duas variáveis. As seguintes afirmações são válidas:

(i) $\neg\forall_x\varphi \Leftrightarrow \exists_x\neg\varphi$

(i') $\neg\exists_x\varphi \Leftrightarrow \forall_x\neg\varphi$

(ii) $\forall_x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall_x\varphi \wedge \forall_x\psi$

(ii') $\models \exists_x(\varphi \wedge \psi)\rightarrow(\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$
$\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)\rightarrow\exists_x(\varphi \wedge \psi)$

(iii) $\models (\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi)\rightarrow\forall_x(\varphi \vee \psi)$
$\not\models \forall_x(\varphi \vee \psi)\rightarrow(\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi)$

(iii') $\exists_x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists_x\varphi \vee \exists_x\psi$

(iv) $\forall_x\forall_y\varphi \Leftrightarrow \forall_y\forall_x\varphi$

(iv') $\exists_x\exists_y\varphi \Leftrightarrow \exists_y\exists_x\varphi$

(v) $\models \exists_x\forall_y\varphi\rightarrow\forall_y\exists_x\varphi$

(v') $\not\models \forall_x\exists_y\varphi\rightarrow\exists_y\forall_x\varphi$

(vi) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$

(vi') $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$

(vii) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \forall_y\varphi[y/x]$ se (*)

(vii') $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \exists_y\varphi[y/x]$ se (*)

(*) $y \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ e x é substituível por y em φ

Demonstração:

(i) Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E, arbitrárias. Queremos provar que

$$E \models (\neg\forall_x\varphi)[a] \quad \text{se e só se} \quad E \models (\exists_x\neg\varphi)[a].$$

$$\begin{array}{lll}
 & E \models (\neg\forall_x\varphi)[a] & \\
\text{sse} & (\neg\forall_x\varphi)[a]_E = 1 & \text{por def. de satisfação} \\
\text{sse} & (\forall_x\varphi)[a]_E = 0 & \text{por def. de valor lógico} \\
\text{sse} & E \not\models (\forall_x\varphi)[a] & \text{por def. de satisfação} \\
\text{sse} & \text{existe } d \in D \text{ tal que } E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}] & \text{por um lema anterior} \\
\text{sse} & \text{existe } d \in D \text{ tal que } E \models (\neg\varphi)[a\binom{x}{d}] & \\
\text{sse} & E \models (\exists_x\neg\varphi)[a] & \text{pelo lema já referido.}
\end{array}$$

Assim, a prova de i) está concluída.

(ii)-(vii) e (i')-(vii') Exercício.

Instâncias de fórmulas do Cálculo Proposicional

Definição

Sejam ψ uma L-fórmula e φ uma fórmula do Cálculo Proposicional. Diz-se que ψ é uma *instância* de φ, se $VAR(\varphi) = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$, existem n L-fórmulas, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, e ψ é a L-fórmula obtida de φ substituindo, em simultâneo, cada p_{i_j} por ψ_j ($j = 1, \ldots, n$). Em caso afirmativo, escreve-se

$$\psi = \varphi[\psi_1/p_{i_1}; \ldots; \psi_n/p_{i_n}].$$

Exemplo

Seja ψ a seguinte L_{Arit}-fórmula:
$(\forall_{x_1}(s(x_1) = x_1+0) \to (x_1 = x_2)) \leftrightarrow (\neg(x_1 = x_2) \to \neg\forall_{x_1}(s(x_1) = x_1+0))$.

ψ é uma instância da fórmula do Cálculo Proposicional

$$\varphi = (p_1 \to p_3) \leftrightarrow (\neg p_3 \to \neg p_1).$$

De facto,

$$\psi = \varphi[\forall_{x_1}(s(x_1) = x_1+0)/p_1; (x_1 = x_2)/p_3].$$

Teorema

Uma instância de uma tautologia é válida em qualquer L-estrutura.

Exemplo

A fórmula

$$(p_1 \to p_3) \leftrightarrow (\neg p_3 \to \neg p_1)$$

é uma tautologia, logo, a L_{Arit}-fórmula,

$$(\forall_{x_1}(s(x_1) = x_1 + 0) \to (x_1 = x_2)) \leftrightarrow (\neg(x_1 = x_2) \to \neg\forall_{x_1}(s(x_1) = x_1 + 0))$$

é válida em qualquer L-estrutura, pois é uma instância de uma tautologia.

Observação

Note-se que existem L-fórmulas válidas que não são instâncias de tautologias do Cálculo Proposicional.

Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$\psi = \exists_{x_0}((s(x_0) = x_0) \vee \neg(s(x_0) = x_0))$$

é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. No entanto, as únicas fórmulas do Cálculo Proposicional das quais ψ é uma instância são as variáveis proposicionais, que não são tautologias.

Consistência semântica

Definição

Seja Γ um conjunto de L-fórmulas e seja (E, a) um par tal que E é uma L-estrutura e a é uma atribuição em E. Diz-se que *(E, a) é uma realização de Γ*, se $E \models \varphi[a]$ para qualquer $\varphi \in \Gamma$.

Exemplo

O par (E_{Arit}, a^{ind}) é uma realização do conjunto

$$\{\forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + s(0)),\ \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 < x_1)\}$$

de L_{Arit}-fórmulas, mas não é uma realização do conjunto

$$\{\forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + s(0)),\ \exists_{x_1}\forall_{x_0}(x_0 < x_1)\}$$

de L_{Arit}-fórmulas.

Consistência semântica

Definição

Um conjunto Γ de L-fórmulas diz-se *semanticamente consistente* ou *realizável*, se existe uma realização de Γ.
Caso contrário, Γ diz-se *semanticamente inconsistente*.

Exemplos

1. O conjunto

$$\{\forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + s(0)), \ \ \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 < x_1)\}$$

   de L_{Arit}-fórmulas é *semanticamente consistente*.

2. O conjunto

$$\{\forall_{x_0}\neg(s(x_0) = x_0), \ \ s(0) = 0\}$$

   de L_{Arit}-fórmulas é *semanticamente inconsistente*.

Modelos de conjuntos de L-fórmulas

Definição

Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas. Diz-se que E é um *modelo* de Γ se (E, a) realiza Γ para toda a atribuição a em E, ou seja, se toda a L-fórmula de Γ é válida em E.

Teorema

Sejam Γ um conjunto de L-sentenças, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então, E é um modelo de Γ se e só se (E, a) é uma realização de Γ.

Demonstração: Exercício.

Exemplo

A L_{Arit}-estrutura E_{Arit} é um modelo do conjunto formado pelas seguintes L_{Arit}-sentenças:

$$\forall_{x_0} \neg(0 = s(x_0));$$
$$\forall_{x_0} \forall_{x_1} ((s(x_0) = s(x_1)) \to (x_0 = x_1));$$
$$\forall_{x_0} \neg(s(x_0) < 0);$$
$$\forall_{x_0} \forall_{x_1} ((x_0 < s(x_1)) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))));$$
$$\forall_{x_0} (x_0 + 0 = x_0);$$
$$\forall_{x_0} \forall_{x_1} (s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1));$$
$$\forall_{x_0} (x_0 * 0 = 0);$$
$$\forall_{x_0} \forall_{x_1} (s(x_0) * x_1 = (x_0 * x_1) + x_1).$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída por estas fórmulas e por um princípio de indução sobre os números naturais.

Consequência semântica

Definição

Sejam φ uma L-fórmula e Γ um conjunto de L-fórmulas. Diz-se que φ *é uma consequência semântica de* Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, se $E \models \varphi[a]$ para toda a realização (E, a) de Γ.

Exemplo

A L_{Arit}-fórmula

$$0 < s(0)$$

é uma consequência semântica do conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\Gamma = \{\forall_{x_1}(x_1 < s(x_1))\}.$$

pois se (E, a) é uma realização de Γ, então

$$\text{para todo } n_1 \in D\ (n_1, \overline{s}(n_1)) \in \overline{<}$$

donde, $(\overline{0}, \overline{s}(\overline{0})) \in \overline{<}$ e $E \models (0 < s(0))[a]$.

Teorema

Seja Γ um conjunto de L-fórmulas, sejam φ e ψ duas L-fórmulas, sejam x e y duas variáveis e seja t um L-termo.

1. Se $\Gamma \models \forall_x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.
2. Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin \mathrm{LIV}(\Gamma)$ (*i.e.*, $\forall_{\gamma \in \Gamma}\ x \notin \mathrm{LIV}(\gamma)$), então $\Gamma \models \forall_x \varphi$.
3. Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \exists_x \varphi$.
4. Se $\Gamma \models \exists_x \varphi$ e $\Gamma, \varphi[y/x] \models \psi$ e $y \notin \mathrm{LIV}(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração:

(1) Seja (E, a) uma realizaçao de Γ. Queremos provar que $E \models \varphi[t/x][a]$. Como por hipótese, $\Gamma \models \forall_x \varphi$, $E \models \forall_x \varphi[a]$ e então, para todo $d \in dom(E)$, $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$. Em particular, $E \models \varphi[a\binom{x}{t[a]}]$ pois $t[a] \in dom(E)$. Dado que por hipótese x é substituível por t em φ, deduzimos que $E \models \varphi[t/x][a]$.

(2)-(4) Exercício.