Ficha 5:

46. Mostre que, para qualquer inteiro n, $n^3 - n = 3k$, para certo inteiro k.

46 Podemos fazer por indução (1) ou de acordo com as propriedades de congruências (2).

(2) Restos possíveis $\{0, 1, 2\}$

caso $n=0$

$n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow n^3 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^3 - n \equiv 0 \pmod 3 \longrightarrow 3 \mid n^3 - n$

caso $n=1$

$n \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow n^3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^3 - n \equiv 1 - 1 \pmod 3 \Rightarrow n^3 - n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

caso $n=2$ $n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow n^3 \equiv 8 \pmod 3 \Rightarrow \Rightarrow$

$\Rightarrow n^3 - n \equiv 6 \pmod 3 \Rightarrow n^3 - n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

Logo, não importa o resto, $n^3 - n$ é da forma $3k$.

47. Prove que

(a) dado um inteiro a, o dígito das unidades de a^2 é $0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6$ ou 9.

(b) qualquer um dos inteiros $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ pode ser o dígito das unidades de a^3, para algum inteiro a;

(c) dado um inteiro a, o dígito das unidades de a^4 é $0,\ 1,\ 5$ ou 6.

47)

a)

$0 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 0^2 \equiv 0 \pmod{10} \to$ resto 0

$1 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 1^2 \equiv 1 \pmod{10} \to$ resto 1

$2 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 4 \equiv 4 \pmod{10} \to$ resto 4

$3 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 9 \equiv 9 \pmod{10} \to$ resto 9

$4 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 16 \equiv 6 \pmod{10} \to$ resto 6

$5 \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow 25 \equiv 5 \pmod{10} \to$ resto 5

$6 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 36 \equiv 6 \pmod{10} \to$ resto 6

$7 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 49 \equiv 9 \pmod{10} \to$ resto 9

$8 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 64 \equiv 4 \pmod{10} \to$ resto 4

$9 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 81 \equiv 1 \pmod{10} \to$ resto 1

Ou seja, o algarismo das unidades de n^2 só pode ser

0, 1, 4, 5, 6, 9   c.q. —

b) $0 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 0^3 \equiv 0 \pmod{10}$

$1 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 1^3 \equiv 1 \pmod{10}$

$2 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$

$3 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$

$4 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 4^3 \equiv 4 \pmod{10}$

$5 \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow 5^3 \equiv 5 \pmod{10}$

$6 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^3 \equiv 6 \pmod{10}$

$7 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$

$8 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 8^3 \equiv 2 \pmod{10}$

$9 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 9^3 \equiv 9 \pmod{10}$

Logo, os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 podem ser o algarismo das unidades de qualquer inteiro a^3.

c) $0 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 0^4 \equiv 0 \pmod{10}$

c)

$0 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 0^4 \equiv 0 \pmod{10}$

$1^4 \equiv 1 \pmod{10}$ $\quad$ $4^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad$ $5^4 \equiv 5 \pmod{10}$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ $\quad$ $6^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$8^4 \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad$ $9^4 \equiv 1 \pmod{10}$

Logo, os algarismos das unidades de qualquer inteiro a^4 só poderão ser 0, 1, 5 ou 6.

48. Determine os algarismos x, y de modo que o inteiro $\overline{3x5y}$ seja simultaneamente divisível por 4 e por 9.

$x, y \in \{0, \dots, 9\}$

$$\begin{cases} \overline{3x5y} \equiv 0 \pmod 9 \\ \overline{3x5y} \equiv 0 \pmod 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + x + 5 + y \equiv 0 \pmod 9 \\ 5 \times 2 + y \equiv 0 \pmod 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y \equiv -8 \pmod 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \equiv 1 \pmod 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \equiv -8 \pmod 9 \\ y \equiv -10 \pmod{\ } \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \equiv 1 \pmod 9 \\ y \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$y = 6$ ou $y = 2$.

<u>caso $y=2$</u>

$$x+2 \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv -1 \pmod 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 8 \pmod 9 \Leftrightarrow x = 8 \qquad n = 3852$$

<u>caso $y=6$</u>

$$x+6 \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv -5 \pmod 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 9 \Leftrightarrow x = 4 \qquad n = 3456$$

49. Determine os dígitos x e y tais que o número $\overline{34xx58y}$ é simultaneamente divisível por 9 e por 11.

$$\begin{cases} \overline{34xx58y} \equiv 0 \pmod 9 \\ \overline{34 \quad\; 8y} \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4+2x+5+8+y \equiv 0 \pmod 9 \\ 3+x+5+y-8-4-x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{34xx58y} \equiv 0 \pmod{11} \\ \overline{} \end{cases} \qquad 3+x+5+y-8-4-x \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \equiv -20 \pmod 9 \\ y \equiv 4 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \equiv 7 \pmod 9 \\ y \equiv 4 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \equiv 7 \pmod 9 \\ \underline{} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 9 \\ \underline{} \end{cases}$$

$$2x - 3 = 9n \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{9n+3}{2} \Leftrightarrow x = 4n+1 + \frac{n+1}{2}$$

Se $n=1$, $x = 5+1$, $x=6$

$x=6$ e $y=4$

$\boxed{\text{n.º: } 3466584}$

50. Determine os algarismos a e b tais que o número $\overline{56a21b}$ é simultaneamente divisível por 2 e por 11.

b tem de ser par

$b: \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$$\begin{cases} \overline{56a21b} \equiv 0 \pmod 2 \\ \overline{56a21b} \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \pmod 2 \\ \cancel{6}+2+b-\cancel{5}-1-a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

$\overline{56a21b} \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow \cancel{6}+2+b-\cancel{5}-1-a \equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow b-a \equiv -2 \pmod{11} \Leftrightarrow b-a \equiv 9 \pmod{11}$

se $b=0$, $-a \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv -9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{11}$

$a=2$

562210

se $b=2$, $2-a \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv -7 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 4 \pmod{11}$

$a=4$

564212

se $b=4$, $4-a \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 6 \pmod{11}$ $a=6$ 566214

se $b=6$, $6-a \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 8 \pmod{11}$ $a=8$ 568216

se $b=8$ $8-a \equiv 9 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 10 \pmod{11} \rightarrow$ impossível, pois $a \in \{0, \ldots, 9\}$

51. Resolva as seguintes congruências lineares:

(a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$;

(b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$;

(c) $140x \equiv 133 \pmod{301}$;

m.d.c $(25, 29) = 1$

$1 \mid 15$ ✓

51)

a) $25x \equiv 15 \pmod{29} \Rightarrow 29y = 25x - 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{29y + 15}{25} \Rightarrow x = y + \frac{4y + 15}{25}$ se $y = 15$,

$\Rightarrow x = 15 + \frac{75}{25} \Rightarrow x = 15 + 3 \Rightarrow x = 18$

Só uma solução, pois

m.d.c $(25, 29) = 1$

$\boxed{x = 18}$

m.d.c $(26, 5) = 1$

$5x - 2 = 26y \Rightarrow x = \frac{26y + 2}{5} \Rightarrow$

b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5y + \frac{y + 2}{5}$ se $y = 3$,

$\boxed{x = 15 + 1 = 16}$

uma única solução novamente.

uma única solução novamente.

c) $140x \equiv 133 \pmod{301}$

m.d.c$(301, 140) = 7$ Possível

7×43

$133 \,\underline{|\,7}$
19

$140x = 301y + 133 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = 43y + 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2y + \frac{3y + 19}{20}$

Como m.d.c $= 7$,
há 7 soluções do tipo $x_0 = 16 + 43t \times n$
$t \in [0, 6], \in \mathbb{Z}$

Se $y = 7$,
$x = 14 + 2 = 16$ — ... menor solução

$sol: \{16, 59, 102, 145, 188, 231, 274\}$

52. Diga, justificando, quais das congruências seguintes são solúveis e, para essas, indique a menor solução não negativa:

(a) $12x \equiv 6 \pmod{16}$;
(b) $12x \equiv 7 \pmod{35}$;
(c) $12x \equiv 24 \pmod{35}$;
(d) $10x \equiv 14 \pmod{16}$;
(e) $60x \equiv -30 \pmod{165}$;

52)

52)

a) $m.d.c(16,12) = 4$ $\quad 4 \nmid 6$

$11y + 7 = 12z \Rightarrow y = z + \frac{z-7}{11}$ se $z = 18$, $y = 19$

b) $m.d.c(35,12) = 1$ solúvel

$12x - 7 = 35y \Rightarrow x = \frac{35y + 7}{12} \Rightarrow x = 2y + \frac{11y + 7}{12}$

sol: $56 + 35t$ $\quad$ se $t = -1$, $x = 21$

c) $m.d.c(35,12) = 1$

$x = \frac{35y + 24}{12} \Rightarrow x = 2y + 2 + \frac{11y}{12}$ $\quad$ se $y = 12$,

$x = 24 + 2 + 11 = 37$

$444 \,\lfloor 35$
$-420 \quad 12$
24

sol: $37 + 35t$ $\quad$ se $t = -1$

$x = 2$

d) $10x \equiv 14 \pmod{16}$ $\quad m.d.c(16,10) = 2$ $\quad 2 \mid 14$

se $t = 1$

$10x - 14 = 16y \Leftrightarrow 5x - 7 = 8y \Leftrightarrow x = y + 1 + \frac{3y+2}{5}$ σ.

$\Rightarrow x = 2 + 1 = 3$

sol: 3

e) $60x \equiv -30 \pmod{165}$ m.d.c$(60, 165) = 15$

$15 \mid 30$

$\Rightarrow 60x + 30 = 165y \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 4x + 2 = 11y \Leftrightarrow x = \frac{11y - 2}{4} \Leftrightarrow x = 2y + \frac{3y-2}{4}$ Se $y = 2$,

$\Rightarrow x = 4 + 1 = 5$

sol: $5 + 11t$ 5 é a menor solução positiva.

53. Diga, justificando, se a congruência linear $14x \equiv 18 \pmod{60}$ tem soluções pares.

53) m.d.c$(60, 14) = 2$ $2 \mid 18$

$14x - 18 = 60y \Leftrightarrow 7x - 9 = 30y$

Se $y =$,

$\boxed{x = -3}$

sol: $-3 + 30t = \boxed{27 + 30t}$

σ

V...

Vai ser sempre ímpar, então, não.

54. Relativamente à congruência $13x \equiv 17 \pmod{42}$, determine, caso existam,

(a) as soluções negativas superiores a -100;

(b) uma solução par.

54) m.d.c $(42, 13) = 1$ Possível

a) $13x = 42y + 17 \Leftrightarrow x = 3y + 1 + \frac{3y + 4}{13} \rightarrow$ se $y = 16$

$\Leftrightarrow x = 48 + 1 + 4 = 53$

$x = 53 + 42t$

se $t = -2$, $x = -31$

se $t = -3$, $x = -73$

b) impossível, pq estamos a somar um nº ímpar com múltiplos pares.

55. Considere a congruência linear $18x \equiv 9 \pmod{21}$.

(a) Verifique que a congruência linear dada admite solução.

(b) Quantas soluções tem a congruência linear $18x \equiv 9 \pmod{21}$ no intervalo inteiro $\boxed{]-1, 80]?}$ Calcule-as.

55)

a) $m.d.c(18, 21) = 3 \qquad 3 \mid 9$ Admite solução.

b) $18x - 9 = 21y \iff 6x - 3 = 7y \Rightarrow x = y + \frac{y+3}{6}$

Se $y = 3$, $x = 3 + 1 = 4$ $\qquad t = -1, x = -3 \notin]-1, 80]$

$x = 4 + 7t \qquad t = 0, x = 4 \qquad t = 1, x = 11$

$t = 2, x = 18 \qquad t = 3, x = 25 \qquad t = 4, x = 32 \qquad t = 5, x = 39$

$t = 6, x = 46 \qquad t = 7, x = 53 \qquad t = 8, x = 60 \qquad t = 9, x = 67$

$t = 10, x = 74 \qquad t = 11, x = 81 \notin]-1, 80]$

Sol: $\{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 60, 67, 74\}$