LÓGICA

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática
Univ. Minho

2º semestre de 2023/2024

Definições

- Chamaremos alfabeto a um conjunto de símbolos e letras aos seus elementos.
- Dado um alfabeto A, chamaremos palavra sobre A a uma sequência finita de letras: ε representa a palavra vazia e $e_1 e_2 \cdots e_n$ uma palavra de comprimento $n \in \mathbb{N}$, para $e_1, \ldots, e_n \in A$.

  O conjunto de todas as palavras sobre A representa-se por A^*.
- Um subconjunto de A^* diz-se uma linguagem.
- Se u e v são palavras então uv é a sequência resultante da concatenação das sequências u e v.

Por definição indutiva de um conjunto I entende-se uma coleção de regras que permite descrever I, indicando um processo de construir os seus elementos. As regras podem ser de vários tipos:

- regras básicas, que indicam que certos objetos pertencem ao conjunto;
- regras indutivas, que permitem construir elementos de I a partir de outros elementos de I já conhecidos;
- regra de fecho, regra única em cada definição, que estabelece que os elementos de I são os construídos a partir da utilização das regras básicas e das indutivas um número finito de vezes.

regra básica $\longmapsto$ $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\qquad \dfrac{}{s \in I}\, b_s$

regra indutiva $\longmapsto$ se $\underbrace{s_1, \ldots, s_n \in I}_{\text{premissas}}$, então $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\qquad \dfrac{s_1 \in I \ldots s_n \in I}{s \in I}\, i$

Conjuntos definidos indutivamente

Vamos considerar um exemplo. Sejam $A = \{a, b\}$ e L o subconjunto das palavras sobre A definido por:

1. a sequência vazia ε é um elemento de L;
2. se $w \in L$, então $awb \in L$;
3. se $w \in L$, então $bwa \in L$;
4. se $u, w \in L$, então $uw \in L$.

A esta definição corresponde o seguinte conjunto de regras:

$(b_\varepsilon)\quad \dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$

$(i_1)\quad \dfrac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \quad \rightsquigarrow \quad f_1 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & awb \end{array}$

$(i_2)\quad \dfrac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \quad \rightsquigarrow \quad f_2 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & bwa \end{array}$

$(i_3)\quad \dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3 \quad \rightsquigarrow \quad f_3 : \begin{array}{ccc} L \times L & \to & L \\ (u, w) & \mapsto & uw \end{array}$

Conjuntos definidos indutivamente

$$\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \dfrac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \dfrac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in S}\,i_3$$

i.	$\varepsilon \in L$	(por b_ε)
ii.	$ab \in L$	(por i_1, ou seja, $f_1(\varepsilon)$)
iii.	$baba \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(ab)$)
iv.	$b^2aba^2 \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(baba)$)

A conclusão é que $b^2aba^2 \in L$. A sequência $(\varepsilon,\ ab,\ baba,\ b^2aba^2)$ diz-se uma sequência de formação de b^2aba^2.

Alternativamente, podemos elaborar a seguinte árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\,i_1}{baba \in L}\,i_2}{bbabaa \in L}\,i_2$$

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

i.	$\varepsilon \in L$	(por b_ε)
ii.	$ba \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(\varepsilon)$)
iii.	$baba \in L$	(por i_3, ou seja, $f_3(ba, ba)$)
iv.	$b^2aba^2 \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(baba)$)

A conclusão é novamente que $b^2aba^2 \in L$ e $(\varepsilon,\ ba,\ baba,\ b^2aba^2)$ é (outra) sequência e formação de b^2aba^2.

A árvore correspondente é:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \qquad \cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Índice | Indução estrutural | Cálculo Proposicional | Cálculo de Predicados de Primeira Ordem
Conjuntos definidos indutivamente

Definições

Considere-se uma definição indutiva de um conjunto L e $x \in L$.

1. Sequência de formação de x é uma sequência de elementos de L em que o último elemento é x e cada elemento
   - é obtido por uma regra básica,
   - ou é o resultado de aplicar a elementos anteriores na sequência uma regra indutiva.
2. Árvore de formação de x é uma árvore construída a partir da aplicação das regras e em que:
   - cada nodo é uma afirmação do tipo $s \in L$;
   - as folhas resultam da aplicação de regras básicas;
   - os restantes nodos resultam da aplicação de regras indutivas;
   - cada aresta representa a relação entre uma premissa e a conclusão de uma regra;
   - a raiz da árvore é $x \in L$.

Proposição

Seja L um conjunto definido indutivamente e x um elemento de um universo que contém L. Então, teremos que $x \in L$ se e só se x admite uma árvore (alternativamente, uma sequência) de formação.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Será que $b^2ab \in L$?

Definição

Sejam L um conjunto definido indutivamente e $x \in L$. Os elementos de L que ocorrem nos nodos de uma árvore de formação de x designam-se sub-objetos de x .

Na linguagem L do exemplo anterior, a palavra b^2aba^2 admite duas árvores de formação:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \quad \cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\,i_1}{baba \in L}\,i_2}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Definição

Chama-se definição indutiva determinista de um conjunto L a uma definição indutiva de L tal que se existirem duas instâncias de regras com igual conclusão, então a regra usada é a mesma e, caso seja uma regra indutiva, as premissas da regra também são as mesmas.

Proposição

Uma definição indutiva de um conjunto L é determinista se e só se cada elemento de L admite uma única árvore de formação.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Seja P a propriedade relativa a palavras sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$:
´o número de ocorrências de a é igual ao número de ocorrências de b'.

É verdadeira ou falsa a afirmação $P(bbabaa)$?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Se u e v forem palavras tal que $P(u)$ e $P(v)$ (são verdadeiras), o que pode dizer sobre $P(aub)$? Sobre $P(bua)$? E sobre $P(uv)$?

Será que pode tirar conclusões sobre todas as palavras de L?

Princípio de Indução Estrutural para linguagens

Considere-se uma definição indutiva de um conjunto L sobre um alfabeto X e P uma propriedade relativa aos elementos de X^*.

Se

1. para cada regra básica $\dfrac{}{s \in L}\,b_s$, $P(s)$ é verdadeira;
2. para cada regra indutiva $\dfrac{s_1 \in L \ldots s_n \in L}{f(s_1, \ldots, s_n) \in L}\,i$, se $P(s_1), \ldots P(s_n)$ são verdadeiras, então $P(f(s_1, \ldots, s_n))$ é verdadeira;

então $P(s)$ é verdadeira, para todo o $s \in L$.

Retomemos o exemplo da linguagem que temos vindo a estudar.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Princípio de Indução Estrutural para L

Considere-se P uma propriedade relativa aos elementos de A^*.

Se

1. $P(\varepsilon)$ é verdadeira;
2. se $P(w)$ é verdadeira, então $P(awb)$ é verdadeira;
3. se $P(w)$ é verdadeira, então $P(bwa)$ é verdadeira;
4. se $P(u)$ e $P(w)$ são verdadeiras, então $P(uw)$ é verdadeira;

então $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in L$.

Considere P a propriedade:
´o número de ocorrências de a é igual ao número de ocorrências de b'

Prove que $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in L$.

Considere-se os exemplos de definições seguintes:

$$\begin{aligned} &fat : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N} \\ &fat(0) = 1 \\ &fat(n) = n \times fat(n-1), \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &fib : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ &fib(1) = 1 \\ &fib(2) = 1 \\ &fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1), \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ &s(1) = 2 \\ &s(n+1) = \tfrac{2}{s(n)}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Teorema da Recursão Estrutural

Considere-se um conjunto L caraterizado por uma definição indutiva **determinista** e Y um conjunto. Para cada regra indutiva de L com n hipóteses, seja $\overline{f}$ uma função de $Y^n \to Y$. Então, existe e é única a função $g : L \to Y$ tal que:

1. para cada regra básica do tipo $\dfrac{}{s \in L}\, b_s$,
$$g(s) = y_s \in Y;$$

2. para cada regra indutiva do tipo $\dfrac{s_1 \in L \ldots s_n \in L}{f(s_1, \ldots, s_n) \in L}\, i$,
$$g(f(s_1, \ldots, s_n)) = \overline{f}(g(s_1), \ldots, g(s_n)).$$

Definição

A definição de uma função $\mathfrak{g}$ por aplicação do teorema anterior diz-se uma definição recursiva da função g.