Análise

Cálculo Integral em $\mathbb{R}^2$: Integrais Duplos

Maria Elfrida Ralha & Maria Isabel Caiado

Departamento de Matemática e Aplicações
(Universidade do Minho)

MIE: Informática

Integrais Duplos

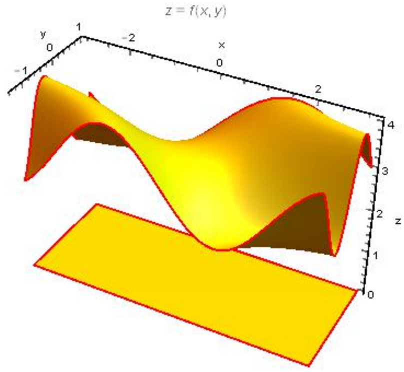
Obs: Nesta secção, a função $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, $|f(x,y)| < M, \qquad$ para algum $M \in \mathbb{R}$.

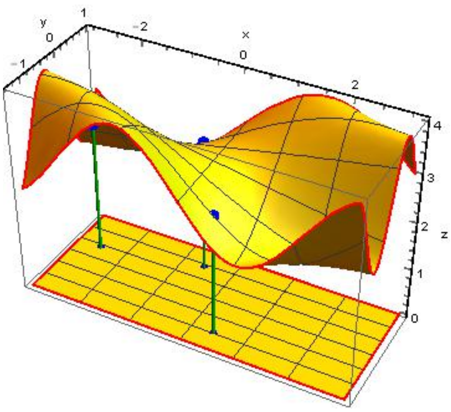
O Cálculo de Volume(s)

- [Problema] Determinar o volume de um sólido.

Seja $\mathscr{R}$ o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : \mathscr{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0$$





Procura-se o volume do sólido (de $\Re^3$) construído por

- o retângulo (definido por) $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^2$,
- a superfície (definida por) $z = f(x, y)$ e
- os planos (definidos por)
  $x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$

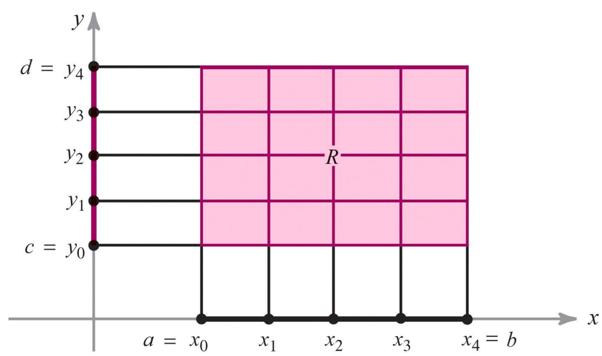
Partição de um Retângulo

A. Seja $\mathscr{R} = [a, b] \times [c, d]$ e $f : \mathscr{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Particione-se $\mathscr{R}$:

1. Considera-se uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos
   $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
2. Considera-se uma partição $[c, d]$ em m subintervalos
   $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$
3. As partições anteriores estabelecem uma partição do retângulo $\mathscr{R}$ em $n \times m$ subretângulos

$$\mathscr{R}_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$



.

- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$
- A área do subretângulo $\mathscr{R}_{ij}$ é, então, $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$

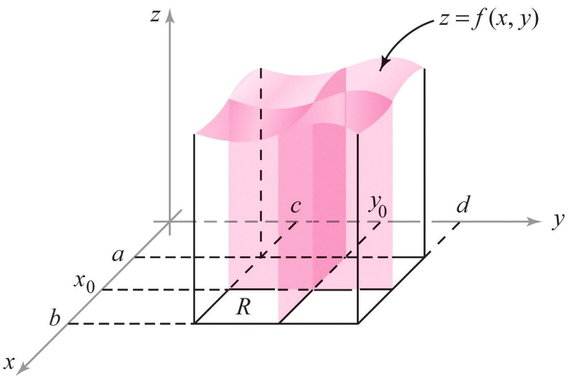
B. Em cada subretângulo $\mathscr{R}_{ij}$ escolha-se um ponto $({x^*}_i, {y^*}_j)$ e calcule-se $f({x^*}_i, {y^*}_j)$

- O volume do paralelipípedo de base $\mathscr{R}_{ij}$ e altura $f({x^*}_i, {y^*}_j)$ é

$$f({x^*}_i, {y^*}_j)\,\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por $\mathscr{R}$ e pelo gráfico de f (e lateralmente pelos planos definidos por
$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$)
pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f({x^*}_i, {y^*}_j)\,\Delta A_{ij}$$



Integral Duplo: definição

- A soma de Riemann de f relativa à partição de $\mathscr{R}$ é o número

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f({x^*}_i, {y^*}_j)\,\Delta A_{ij}$$

Definição: Quando $n, m \longrightarrow +\infty$ (isto é, quando Δx_i e Δy_j tendem para 0), o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em $\mathscr{R}$ e denota-se por[1]

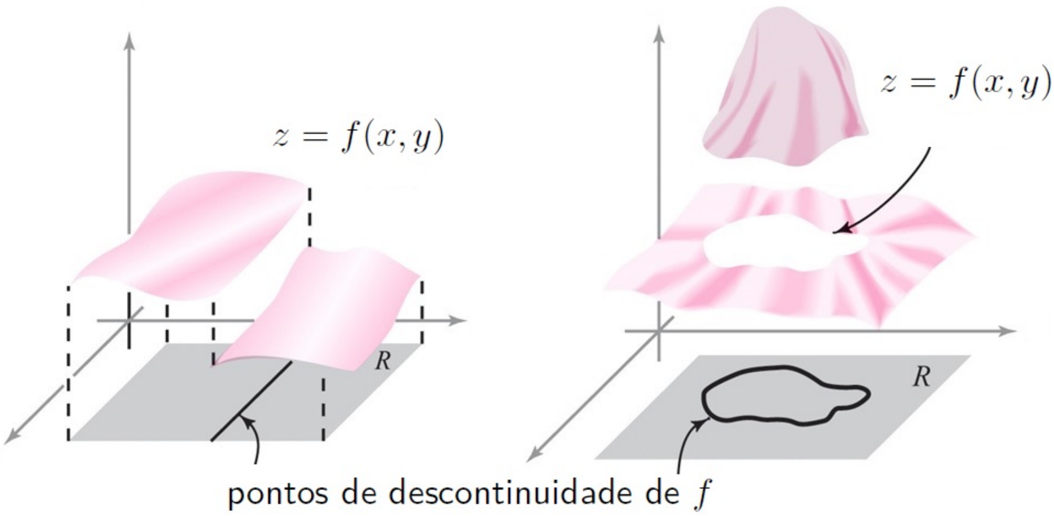
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\, dA$$

- Se existir o integral duplo de f em $\mathscr{R}$, diz-se que f é integrável em $\mathscr{R}$.

[1] Também se escreve $\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\, d(x,\, y)$, ou $\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy\, dx$ ou ...

Funções integráveis

1. Qualquer função definida num retângulo fechado é integrável.
2. Seja $f : \mathscr{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $\mathscr{R}$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então f também é integrável.



Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f, g : \mathscr{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no retângulo $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$. Então:

1. $\iint_{\mathscr{R}} [f(x, y) \pm g(x, y)] \; dA = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA \pm \iint_{\mathscr{R}} g(x, y) \, dA$;
2. $\iint_{\mathscr{R}} \lambda \; f(x, y) \, dA = \lambda \; \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA = \iint_{\mathscr{R}_1} f(x, y) \, dA + \iint_{\mathscr{R}_2} f(x, y) \, dA$;
4. $f \geq g \Longrightarrow \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA \geq \iint_{\mathscr{R}} g(x, y) \, dA$;
   - $f \geq 0 \Longrightarrow \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA \geq 0$;
5. $\left| \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dA \right| \leq \iint_{\mathscr{R}} |f(x, y)| \; dA$.

Como calcular um integral duplo?

- [Teorema 1 (de Fubini)]

  Seja f uma função contínua no retângulo $\mathscr{R} = [a, b] \times [c, d]$. Então

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\, dA = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral duplo, onde $\mathscr{R}$ é o retângulo $[0, 1] \times [1, 2]$,

$$\iint_{\mathscr{R}} (x^3 + y^2)\, d(x, y).$$

- [Teorema 2 (de Fubini)]

  Seja f uma função limitada no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas.

  Se $\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy$ existe para cada $x \in [a, b]$ então o integral duplo

$$\int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right] dx \quad \text{existe e} \quad \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right] dx = \iint_{R} f(x, y)\, dA.$$

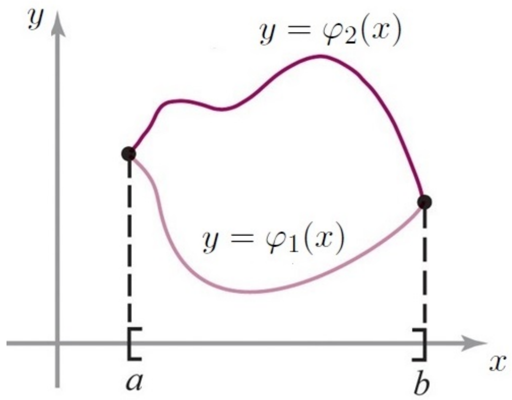
  De modo análogo, se $\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx$ existe para cada $y \in [c, d]$ então o integral duplo

$$\int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right] dy \quad \text{existe e} \quad \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right] dy = \iint_{R} f(x, y)\, dA.$$

  Se as condições se verificam em simultâneo

$$\int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right] dy = \iint_{R} f(x, y)\, dA.$$

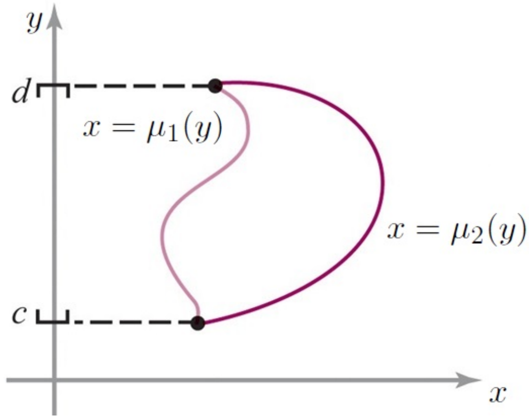
Integração em quaisquer regiões Planas



Região I: "Verticalmente simples"

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

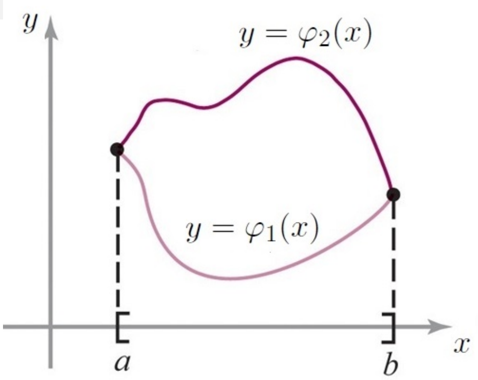
Região II: "Horizontalmente simples"



$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$

Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região I]



$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

- $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, quando existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^1(]a, b[)$ tais que

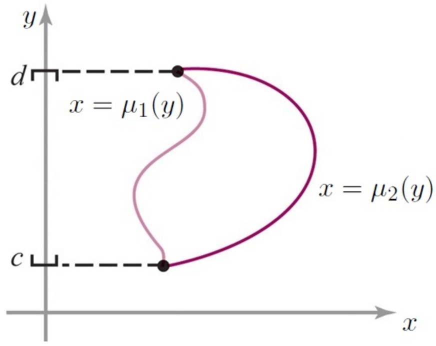
$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- [Região II]

$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, quando existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- [Região III] $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região III de $\mathbb{R}^2$ quando for, simultaneamente, uma região I e II.

Exercício

- Calcular

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\, dx\, dy$$

quando $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

1. Usando uma região verticalmente simples.
2. Usando uma região horizontalmente simples.

Mudança na ordem de Integração

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{OU} \qquad \iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dy\,dx$$

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer-se um esboço da região de integração.
- **A ordem de integração é muito importante!**
  - $\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy \neq \iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dy\,dx$
  - $dx\,dy$ corresponde a uma subdivisão "vertical"da região, enquanto que em $dy\,dx$ a subdivisão é "horizontal".
  - A alteração da ordem de integração pode, em particular, permitir o cálculo de um integral que, de outra forma, não seria possível; por exemplo: para determinar
    - $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy.$

Volumes e áreas

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e $\mathscr{S}$ é a região do espaço definida por

$$\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

  define-se o volume de $\mathscr{S}$ por

$$\operatorname{vol}(\mathscr{S}) = \iint_B f(x,y)\,dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x,y) = 1$ a área de B, é dada por

$$\text{área}(\mathscr{S}) = \iint_B 1\,dA$$

Exercícios

1. Calcular a área da região definida pelo conjunto

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x^2\}$$

2. Sejam
   - $\mathscr{D}$ o círculo unitário de centro na origem;
   - $\mathscr{R}$ a região de $\mathscr{D}$ em que $x \geq 0$;
   - $\mathscr{B}$ a região de $\mathscr{D}$ na qual $y \leq 0$

   Em cada uma das alíneas indique, justificando sem efetuar cálculos e nos casos em que for possível, se o valor do integral é positivo, negativo ou nulo.

   1. $\iint_{\mathscr{R}} dA$;
   2. $\iint_{\mathscr{B}} 5x\, dA$;
   3. $\iint_{\mathscr{D}} 5x\, dA$;
   4. $\iint_{\mathscr{D}} \operatorname{sen} y\, dA$.

Mudança de variáveis: *Jacobianos*

Relembre-se como (e para quê) se mudava de variável no caso do integral definido de uma função de 1 variável real...

E no caso da integração dupla?

Teorema

Sejam $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$, regiões nos planos XY e UV, relacionadas por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, de tal modo que cada ponto de $\mathscr{R}$ é imagem de um único ponto de $\mathscr{S}$.

*Se f é contínua em $\mathscr{R}$, g e h tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\mathscr{S}$ e o **Jacobiano**[a] $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ for não nulo em $\mathscr{S}$, então*

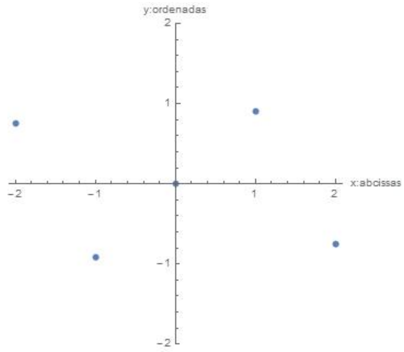
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\, d(x, y) = \iint_{\mathscr{S}} f\left(g(u, v), h(u, v)\right) . \left|\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}\right| d(u, v)$$

[a] Se $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, o **Jacobiano** de x e y em relação a u e v denota-se por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ e é igual a $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$, isto é, o determinante de uma matriz quadrada cujos elementos são...

Mudança de coordenadas

- [CARTESIANAS] Representar pontos/curvas em um plano *XOY*

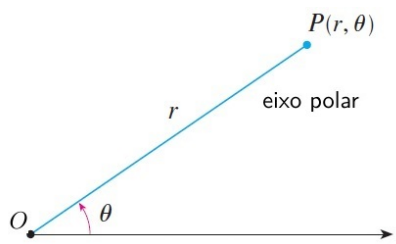
Em um sistema de coordenadas, no plano, ditas CARTESIANAS (ou retangulares) há um par de eixos concorrentes (e, normalmente, ortogonais e normados) a partir dos quais se representa cada ponto –**P**– como par ordenado –$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (de dois números reais), a que chamamos, respetivamente *abcissa* e *ordenada*– cuja primeira coordenada é a distância ou o simétrico da distância desse ponto ao eixo das ordenadas e cuja segunda coordenada é a distância ou o simétrico da distância do ponto ao eixo das abcissas.
Nestas condições tem-se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ ...



Mudança de coordenadas

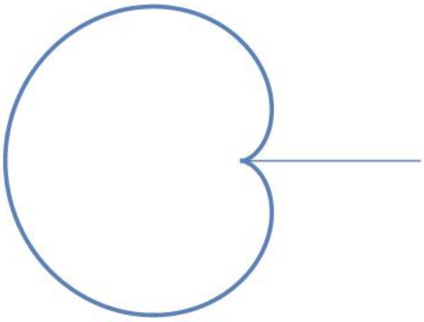
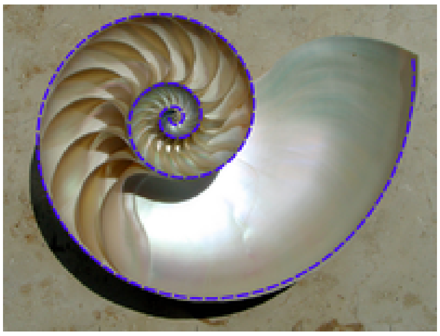
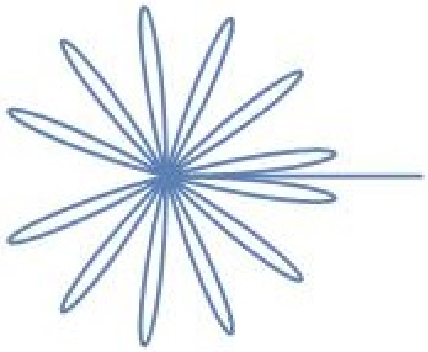
- [POLARES] Representar pontos/curvas em um plano "polar"

Em um sistema de coordenadas, igualmente no plano, ditas POLARES há um (semi)eixo (que se diz "polar"e cuja origem se denomina *pólo*) a partir do qual se representa um ponto –**P**– como par ordenado –$(\mathbf{r}, \theta)$ (de dois números reais), a que chamamos, *raio polar* e *ângulo polar*– e que se definem, respetivamente, como a distância de **P** ao "pólo"e a medida do ângulo formado pelo semieixo polar e o segmento que une o pólo a **P**.
Nestas condições tem-se $r \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ ...



Curvas em coordenadas polares

- [Curvas POLARES] Cardióides, Espirais, Lemniscatas, Rosáceas,...

Mudança de coordenadas: Cartesianas *vs.* Polares

Polares para Cartesianas	Cartesianas para Polares
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$

Exercícios

1. Exprima-se em coordenadas polares e cartesianas
   - Uma circunferência de centro na origem e raio R.
   - Uma reta que passe pela origem.
2. Esboce
   - a curva polar $\mathscr{C}$ definida por $r = \theta$
   - Exprima $\mathscr{C}$ em coordenadas cartesianas.
3. Qual o **Jacobiano**, associado à mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares?
4. Use um integral duplo (em coordenadas polares) para calcular a área da figura limitada por uma rosácea de 3 pétalas, definda por $r = \operatorname{sen} 3\theta$.