Lógica LEI

1.º teste

26 março 2022

Grupo I

(1.)

$$\text{subf}(\varphi \to (p_0 \vee p_1)) = \{\varphi \to (p_0 \vee p_1)\} \cup \text{subf}(\varphi) \cup \{p_0, p_1, p_0 \vee p_1\}$$

Para que $\varphi \to (p_0 \vee p_1)$ tenha exatamente 4 subfórmulas, é necessário que $\text{subf}(\varphi)$ seja um subconjunto de $\{p_0, p_1, p_0 \vee p_1\}$.

Podemos escolher φ como p_0 ou como p_1 ou como $p_0 \vee p_1$.

(2.)

$$(p_0 \to \neg\varphi)[\psi/p_0] = \psi \to \neg\varphi[\psi/p_0]$$

Assim, $\psi = p_1 \vee p_2$ e $\varphi = p_0 \wedge p_1$ é uma possível resposta ao que é pedido. Poderíamos, ainda, escolher $\varphi = (p_1 \vee p_2) \wedge p_1$.

(3.)

Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_0, p_1 \leftrightarrow p_0, p_1\}$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \wedge \neg p_0$	$p_1 \leftrightarrow p_0$	p_1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0

As fórmulas $p_1 \wedge \neg p_0$ e $p_1 \leftrightarrow p_0$ não podem ser simultaneamente verdadeiras. Logo, $\{p_1 \wedge \neg p_0, p_1 \leftrightarrow p_0\}$ não é consistente.

Os subconjuntos de Γ consistentes com 2 elementos são, então,

$$\{p_1 \wedge \neg p_0,\ p_1\} \ \text{e}\ \{p_1 \leftrightarrow p_0,\ p_1\}.$$

(4.)

$v \models \Gamma$ se e só se $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \Gamma$.

Em particular, $v(p_i)=1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ tal que i é par. Mais ainda, $v(\neg p_1 \vee \neg p_0)=1$ e $v(p_2 \to p_3)=1$.

Portanto, $v(p_1)=0$ e $v(p_3)=1$.

Consideremos, por exemplo, a valoração v tal que

$$v(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p_1 \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_1\} \end{cases}.$$

(5.)

$$\begin{aligned} \varphi = p_1 \to (p_2 \vee \bot) &\Leftrightarrow p_1 \to p_2 \\ &\Leftrightarrow \neg\neg(p_1 \to p_2) \\ &\Leftrightarrow \neg(p_1 \wedge \neg p_2) \end{aligned}$$

$\psi = \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$.

(6.) Sejam $\varphi = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3$

e $\psi = \neg p_4$.

Temos que φ é uma FND, ψ é uma FNC, mas

$\varphi \wedge \psi = ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge \neg p_4$ não é uma FNC.

(7.) Consideremos, por exemplo, $\varphi = p_0 \wedge p_1$. Temos que $(p_0 \wedge p_1) \to p_0$ é uma tautologia, mas $p_0 \to (p_0 \wedge p_1)$ não é uma tautologia.

Consideremos, como outro exemplo, $\varphi = p_0 \vee p_1$. Aqui, é $p_0 \to \varphi$ que é tautologia, ao passo que $\varphi \to p_0$ não é tautologia.

(8.)

Seja $\varphi = \neg p_1 \vee p_2$. Se v é uma valoração tal que $v(\varphi)=1$ e $v(p_1)=1$, então $v(p_2)=1$. Logo, $\varphi, p_1 \models p_2$.

(OBS: $p_1 \vee p_2, p_1 \not\models p_2$ e $\neg p_2 \vee p_1, p_1 \not\models p_2$)

Grupo II

(1.) $f: \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida recursivamente por:

(i) $f(p_i) = 0$, para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$;
(ii) $f(\perp) = 0$;
(iii) $f(\neg\varphi) = f(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
(iv) $f(\varphi \wedge \psi) = 1 + f(\varphi) + f(\psi)$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
(v) $f(\varphi \square \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e qualquer $\square \in \{\vee, \to, \leftrightarrow\}$.

(2).

Seja $P(\varphi)$ a condição $var(\varphi[\psi/p]) \subseteq var(\varphi) \cup var(\psi)$.

(i) Seja $i \in \mathbb{N}_0$.

Se $p_i = p$, então $\varphi[\psi/p] = \psi$ e, obviamente, $var(\varphi[\psi/p]) = var(\psi) \subseteq var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Se $p_i \neq p$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$ e

$var(\varphi[\psi/p]) = var(\varphi) \subseteq var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Assim, $\mathcal{P}(p_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Sendo $var(\perp[\psi/p]) = var(\perp) = \emptyset$, é claro que $var(\perp[\psi/p]) \subseteq var(\perp) \cup var(\psi)$. Logo, $\mathcal{P}(\perp)$.

(iii) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\mathcal{P}(\varphi)$, ou seja,

$var(\varphi[\psi/p]) \subseteq var(\varphi) \cup var(\psi)$. (HI)

Temos que

$$var((\neg\varphi)[\psi/p]) = var(\neg\,\varphi[\psi/p]) =$$

$$= var(\varphi[\psi/p]) \underset{HI}{\subseteq} var(\varphi) \cup var(\psi)$$

$$= var(\neg\varphi) \cup var(\psi).$$

Assim, $\mathcal{P}(\neg\varphi)$.

(iv) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\mathcal{P}(\varphi_1)$ e $\mathcal{P}(\varphi_2)$, i.e.,

$var(\varphi_1[\psi/p]) \subseteq var(\varphi_1) \cup var(\psi)$ e

$var(\varphi_2[\psi/p]) \subseteq var(\varphi_2) \cup var(\psi)$ (HI). Seja $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Temos que $var((\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p]) = var(\varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]) =$

$$= var(\varphi_1[\psi/p]) \cup var(\varphi_2[\psi/p]) \underset{HI}{\subseteq} var(\varphi_1) \cup var(\psi) \cup$$

$$\cup\, var(\varphi_2) \cup var(\psi)$$

$= var(\varphi_1) \cup var(\varphi_2) \cup var(\psi)$
$= var(\varphi_1 \square \varphi_2) \cup var(\psi)$.

Portanto, $var((\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p]) \subseteq var(\varphi_1 \square \varphi_2) \cup var(\psi)$,

i.e. $\mathcal{P}(\varphi_1 \square \varphi_2)$.

Por (i)-(iv), pelo Princípio de Indução Estrutural, $\mathcal{P}(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

(3.) $\varphi = (\neg p_0 \wedge p_1) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \bot)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \wedge p_1) \vee \neg(p_1 \rightarrow p_2)$

$\Leftrightarrow p_0 \vee p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$, que é uma FND.

Assim, $p_0 \vee p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$ é uma FND logicamente equivalente a φ.

(4.) Seja v uma valoração tal que $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$ e $v(p_2 \leftrightarrow p_3) = 1$. Temos dois casos possíveis:

CASO 1: $v(p_1) = 0$.

Neste caso, $v(p_1 \rightarrow p_3) = 1$.

CASO 2: $v(p_1) = 1$.

Neste caso, como $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue-se que $v(p_2) = 1$. Dado que $v(p_2 \leftrightarrow p_3) = 1$, segue-se que $v(p_3) = 1$ e, portanto, $v(p_1 \rightarrow p_3) = 1$.

Assim, em ambos os casos, $v(p_1 \to p_3) = 1$.

Logo, se v é uma valoração que satisfaz $\{\neg p_1 \vee p_2, p_2 \leftrightarrow p_3\}$, então v satisfaz $p_1 \to p_3$. Portanto,

$$\neg p_1 \vee p_2 \,,\, p_2 \leftrightarrow p_3 \models p_1 \to p_3 .$$

(5.) Admitamos que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente e que $\Gamma \models \neg\psi \to \neg\varphi$. Então, existe pelo menos uma valoração v tal que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Logo, $v \models \Gamma$ e $v(\varphi) = 1$. De $\Gamma \models \neg\psi \to \neg\varphi$ e de $v \models \Gamma$, sabemos que $v(\neg\psi \to \neg\varphi) = 1$. Como $v(\varphi) = 1$, segue-se que $v(\neg\psi) = 0$ e, portanto, $v(\psi) = 1$. Assim, $v \models \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ e, por isso, $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ é consistente.

(6.)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{p_1 \wedge (p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3))}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_1 E$}
\UnaryInfC{p_1}
\AxiomC{$\cancel{p_1 \wedge (p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3))}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_1 E$}
\UnaryInfC{p_1}
\AxiomC{$\cancel{p_1 \wedge (p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3))}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_2 E$}
\UnaryInfC{$p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$p_2 \wedge \neg p_3$}
\RightLabel{$\wedge_1 E$}
\UnaryInfC{p_2}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$p_1 \wedge p_2$}
\RightLabel{$\to I^{(1)}$}
\UnaryInfC{$(p_1 \wedge (p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3))) \to (p_1 \wedge p_2)$}
\end{prooftree}
$$

é uma demonstração em DNP da fórmula dada.