Análise

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$: Extremos Livres

Maria Elfrida Ralha & Maria Isabel Caiado

Departamento de Matemática e Aplicações
(Universidade do Minho)

MIE: Informática

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$: Extremos livres

Conceitos: Definições

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- f tem um minimizante local em $\mathbf{a} \in U$ quando existir uma vizinhança $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}), \qquad \forall \mathbf{x} \in (B(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap U)$$

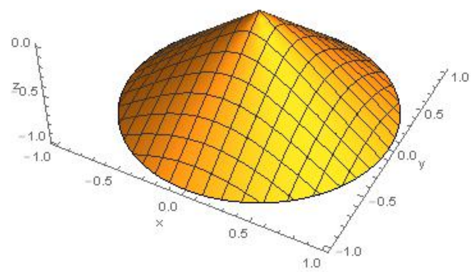
- f tem um maximizante local em $\mathbf{a} \in U$ quando existir uma vizinhança $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ de a tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \qquad \forall \mathbf{x} \in (B(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap U)$$

- f tem um extremante local em $\mathbf{a} \in U$ quando tiver um minimizante ou um maximizante local em $\mathbf{a}$.

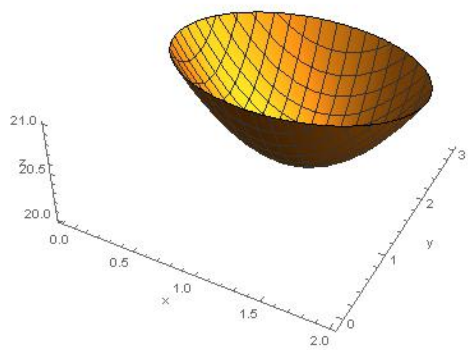
Exercícios: Extremos, via definição

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$



1. Conjeture sobre os extremantes de g.
2. Verifique que $(0, 0)$ é maximizante de g.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$



1. Conjeture sobre os extremantes de f.
2. Verifique que $(1, 2)$ é minimizante de f.

Teste das 1.^{as} derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$.

- $\mathbf{a} \in U$ é um ponto crítico de f quando, simultaneamente,
  1. $\mathbf{a} \in \operatorname{int} U$ (isto é, $\mathbf{a}$ é um ponto interior do domínio de f) e
  2. $\nabla f(\mathbf{a})$ não existe (não pode ser definido) ou $\nabla f(\mathbf{a}) = \vec{\mathbf{0}}$

- [Teste das 1as derivadas] Se $\mathbf{a} \in U$ é um extremante local de f, então é um ponto crítico de f.

- $\mathbf{a} \in U$ diz-se um ponto de sela de f quando $\mathbf{a}$ é ponto crítico mas não é extremante local de f.

Observação

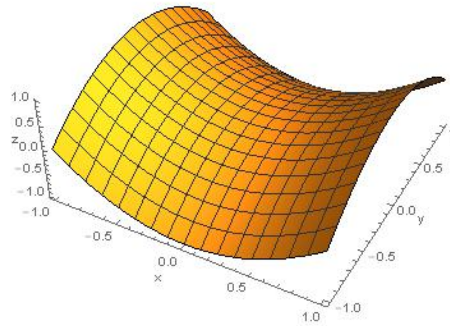
- O teorema/teste das 1.^{as} derivadas estabelece que os extremantes só ocorrem nos pontos críticos de uma função[1].

- Como fazer?
  1. Identificar os pontos críticos, usando o Teste/Teorema;
  2. Classificar os pontos críticos.

[1] Contudo, nem todo o ponto críticoscorresponde a um extremante.

Exercício: Extremos, via teste das 1.^{as} derivadas

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$



1. Identifique os pontos críticos de f.
2. Verifique que $(0, 0)$ é ponto de sela de f.

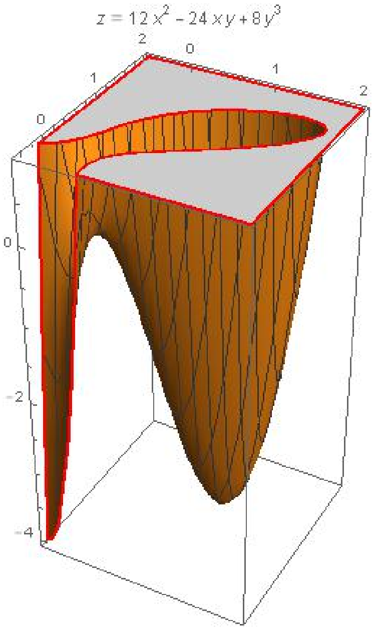
Obs: Atente-se, também, num diagrama de nível que represente curvas em torno da origem...

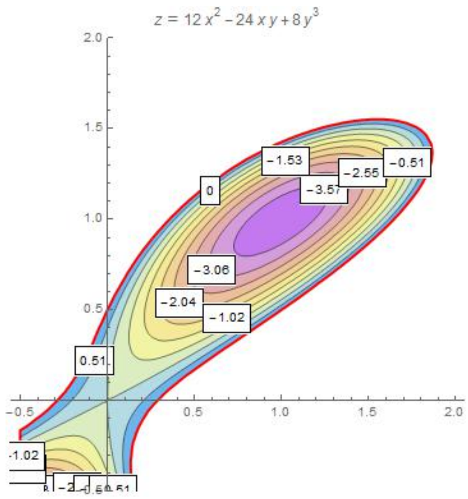
Extremos & curvas de nível

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$

a) Identifique os pontos críticos.

b) Classifique os pontos críticos, partindo de um diagrama de nível conveniente.





Funções quadráticas da forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função (de classe $\mathscr{C}^3$ em $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$) definida por $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$; onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- Identifiquem-se e classifiquem-se os pontos críticos de f.
  1. f tem um único ponto crítico em $(0,0)$.
  2. Analise-se a forma do gráfico de f, sabendo que $f(0,0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}xy + \tfrac{c}{a}y^2\right) \\ &= \cdots \\ &= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right)y^2\right] \end{aligned}$$

- A forma do gráfico depende do *discriminante* $\Delta := 4ac - b^2$ ser positivo, negativo ou zero.
- Exercício: Classifique-se, então, o ponto crítico...
  - Quando $\Delta > 0$...
  - Quando $\Delta < 0$...
  - Quando $\Delta = 0$...

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ em $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$, tal que $\nabla f(0,0) = \vec{\mathbf{0}}$.

- O **polinómio de Taylor**, quadrático, em torno de $(0,0)$, para a função f é
  - $$\begin{aligned} f(x,y) \approx\ & f(0,0) + \\ & + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \\ & + \tfrac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \tfrac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2 \end{aligned}$$
  - Ou seja

$$f(x,y) - f(0,0) \approx + \tfrac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \tfrac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2$$

A forma do gráfico depende do *discriminante* $\Delta = 4ac - b^2$ ser positivo, negativo ou zero.

- O *discriminante* $\Delta = 4ac - b^2$ é, agora,

$$\Delta = f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2$$

que é o DETERMINANTE de uma matriz quadrada (de ordem 2) cujos elementos são as derivadas de 2.ª ordem.

- [Determinante de uma Matriz, de 2.^{as} Derivadas]

  Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ numa vizinhança de $(x_0, y_0) \in U$.
  Considere-se uma matriz $\mathscr{H} f(x_0, y_0)$ tal que

  $$\det \mathscr{H} f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

  Suponha-se que $(x_0, y_0) \in U$ é um ponto crítico de f. Assim,

  - Se $\det \mathscr{H} f(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é um extremante local de f. Além disso,
    - se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então f tem um minimizante local em (x_0, y_0);
    - se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então f tem um maximizante local em (x_0, y_0);
  - Se $\det \mathscr{H} f(x_0, y_0) < 0$ então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0);
  - Se $\det \mathscr{H} f(x_0, y_0)) = 0$ nada se pode concluir.

Observação/Exercício

- No resultado anterior "se $\det \mathscr{H} f(x_0, y_0) < 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0)". Porquê?

- Pode traduzir-se esse mesmo resultado em termos de "*menores principais*"da matriz $\mathscr{H}$:

  - $M_2 < 0$ e M_1?

  - Se $M_2 = \det \mathscr{H} f(x_0, y_0) < 0$, então os 2 valores próprios de $\mathscr{H} f(x_0, y_0)$ têm sinais opostos pelo que $\mathscr{H} f(x_0, y_0)$ é uma matriz indefinida e (x_0, y_0) é um ponto de sela de f.

Exercício

1. Identifique e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 12x^2 + 8y^3 - 24xy$.

    1. Determinar P tal que $\nabla f(P) = \vec{\mathbf{0}}$;
    2. Estudar o sinal de $\det \mathscr{H} f(P)$.

Matriz Hessiana

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ em $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$.

- Define-se a matriz Hessiana de f em $\mathbf{a}$ por

$$\mathscr{H} f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & \ldots & f_{x_nx_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

- $\mathscr{H} f$ é uma matriz
    - quadrada de dimensão n;
    - simétrica porque, pelo Teorema de Schwarz, $f_{x_ix_j}(\mathbf{a}) = f_{x_jx_i}(\mathbf{a})$

- [Teste das 2.^{as} derivadas] (para extremantes locais)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^3$ e $\mathbf{a} \in U$ um ponto crítico de f. Nestas condições,

  - [Critério dos menores principais]
    - se todos os menores principais de $\mathscr{H}_f(\mathbf{a})$ são positivos f tem um minimizante local em $\mathbf{a}$;
    - se os menores principais de ordem par de $\mathscr{H}_f(\mathbf{a})$ são positivos e os de ordem ímpar negativos f tem um maximizante local em $\mathbf{a}$;
    - se todos os menores principais de $\mathscr{H}_f(\mathbf{a})$ são não nulos mas a matriz não é definida positiva ou definida negativa f tem um ponto de sela em $\mathbf{a}$;
    - se algum dos menores principais for nulo nada se pode concluir sobre a natureza de $\mathbf{a}$.

Exercício

Identifique e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$$