Universidade do Minho — MiEInf

Dep. Matemática — 2020/2021

Lógica EI

Teste — 28 de maio de 2021 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que $subf(\varphi)$ tem quatro elementos e $var(\varphi) = \{p_0\}$.

   Resposta:

2. Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_0, p_2 \to p_0\}$. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que φ não é contradição e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto inconsistente.

   Resposta:

3. Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_0, p_2 \to p_0\}$. Dê exemplo de uma valoração v tal que v satisfaz Γ.

   Resposta:

4. Considere a fórmula $\varphi = p_0 \to \neg(p_1 \vee \neg p_2)$. Dê exemplo de uma fórmula ψ do Cálculo Proposicional tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e cujos conetivos estão no conjunto $\{\neg, \wedge\}$.

   Resposta:

Nas restantes questões deste grupo, considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{N}, \overline{})$ tal que:

$$\begin{array}{ll} \overline{\mathsf{c}} = 1 & \overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(m,n) = m + 2n \\ \overline{\mathsf{s}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n) = n + 1 & \overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\} \end{array}$$

5. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 2i$. Indique o valor de: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_1, \mathsf{c}), \mathsf{s}(x_2))\ [a]_E$.

   Resposta:

6. Indique uma fórmula de tipo L válida em E que represente a afirmação: Para qualquer número par o seu sucessor é um número ímpar.

   Resposta:

7. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_0, x_1)) \to \forall x_1\, \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$. Calcule $\varphi[s(x_1)/x_0]$.

   Resposta:

8. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_0, x_1)) \to \forall x_1\, \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$. Indique um L-termo t tal que x_1 não está livre para t em φ.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 6 questões deste grupo na folha de exame, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Seja ψ uma fórmula proposicional tal que $var(\psi) = \{p_0\}$. Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\varphi) = var(\varphi[\psi/p_0])$.

2. Indique uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_3 \vee \bot)$. (Justifique.)

3. Diga se: $p_1 \wedge (p_2 \vee p_3), p_1 \to \neg p_2 \models p_3$. (Justifique.)

4. Seja $\varphi = p_0 \to (p_1 \to p_2)$.

   (a) Construa uma demonstração em DNP da fórmula $\varphi \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$.

   (b) Mostre que $\{\varphi, p_0, p_1 \wedge \neg p_2\}$ é sintaticamente inconsistente.

5. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{N}, \bar{\ })$ do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\mathsf{P}(x_1) \to \forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$.

   (a) Prove que φ é válida em E.

   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.

6. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\varphi)$. Prove que: $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \models \forall x \psi$.

Cotações	II (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	1,75+1,75+1,75+3,25+2,5+1

Lógica EI
teste 28/maio/2021

Grupo I

1. $\varphi = \neg(p_0 \wedge \neg p_0)$

$var(\varphi) = \{p_0\}$ e $subf(\varphi) = \{p_0, \neg p_0, p_0 \wedge \neg p_0, \neg(p_0 \wedge \neg p_0)\}$
Note-se que $subf(\varphi)$ tem quatro elementos.

2. $\Gamma = \{ p_1 \wedge \neg p_0, \ p_2 \to p_0 \}$

Se v é uma valoração que satisfaz Γ, então

$$v(p_1 \wedge \neg p_0) = 1 \quad (*)$$

e

$$v(p_2 \to p_0) = 1. \quad (**)$$

De $(*)$ segue-se que $v(p_1) = 1$ e $v(p_0) = 0$. Assim, como $v(p_0) = 0$, de $(**)$, podemos afirmar que $v(p_2) = 0$.

Sabemos, então, que se v é uma valoração que satisfaz Γ, então $v(p_1) = 1$ e $v(p_0) = v(p_2) = 0$.

Basta-nos, assim, tomar uma fórmula que tome valor lógico 0 para tais valorações. Por exemplo,

$\varphi = \neg p_1$.

3. Na pergunta anterior vimos que se v é uma valoração que satisfaz T, então $v(p_1)=1$ e $v(p_0) = v(p_2)=0$. Para definir uma valoração v, basta-nos definir $v(p_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Consideremos, por exemplo, v dada por

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } i=1 \\ 0 \text{ se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\} \end{cases}.$$

4. $$\varphi = p_0 \to \neg(p_1 \vee \neg p_2)$$

$$\Leftrightarrow \neg p_0 \vee \neg(p_1 \vee \neg p_2)$$

$$\Leftrightarrow \neg p_0 \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\neg(p_0 \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_2))}_{\psi}$$

5. $$a(x_i) = 2i \quad (i \in \mathbb{N}_0)$$

$$\bar{c} = 1 \qquad \bar{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \qquad \bar{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\bar{f}(m,n) = m+2n \qquad \bar{s}(n) = n+1$$

$$f(f(x_1,c), s(x_2))[a]_E =$$

$$= \bar{f}(\bar{f}(a(x_1), \bar{c}), \bar{s}(a(x_2))) =$$

$$= \bar{f}\left(\bar{f}(2,1), \bar{s}(4)\right) = \bar{f}\left(2+2\times 1,\ 5\right)$$

$$= \bar{f}\ (4,5) = 4+2\times 5 = 14.$$

6. $$\forall x_0 \ \left(P(x_0) \to \neg P(s(x_0))\right)$$

7. $$\varphi: \quad \forall x_0 \ P\left(f(\underbrace{x_0}_{\text{ocorrência ligada}},x_1)\right) \to \forall x_1 \ \neg P\left(f(x_1,\underbrace{x_0}_{\text{ocorrência livre}})\right)$$

$\varphi\,[s(x_1)/x_0]$ é a fórmula obtida de φ substituindo as ocorrências livres de x_0 por $s(x_1)$.

Assim,

$$\varphi\,[s(x_1)/x_0] = \forall x_0 \ P\left(f(x_0,x_1)\right) \to \forall x_1 \neg P\left(f(x_1,s(x_1))\right)$$

8. $$\forall x_0 \ P\left(f(x_0,\underbrace{x_1}_{\text{ocorrência livre}})\right) \to \forall x_1 \neg P\left(f(\underbrace{x_1}_{\text{ocorrência ligada}},x_0)\right)$$

Há uma ocorrência livre de x_1 em φ que está no alcance de uma ocorrência do quantificador $\forall x_0$.

Se $x_0 \in VAR(t)$, então x_1 não está livre para t em φ. Tomemos, por exemplo $t = s(x_0)$.

Grupo II

1. $var(\psi) = \{p_0\}$.

Seja $\mathcal{P}(\varphi)$ o predicado $var(\varphi) = var(\varphi[\psi/p_0])$, sobre as fórmulas φ do CP.

(i) $\varphi = \perp$

Neste caso, $var(\varphi) = var(\perp) = \emptyset$ e

$var(\varphi[\psi/p_0]) = var(\perp[\psi/p_0]) = var(\perp) = \emptyset$.

Portanto, $\mathcal{P}(\varphi)$.

(ii) $\varphi \in \mathcal{V}^{CP}$

Se $\varphi = p_0$, $var(\varphi) = \{p_0\}$. Por outro lado,

$\varphi[\psi/p_0] = p_0[\psi/p_0] = \psi$. É dado que

$var(\psi) = \{p_0\}$. Logo, $var(\varphi[\psi/p_0]) = \{p_0\}$.

Portanto, $\mathcal{P}(\varphi)$.

Se $\varphi \neq p_0$, então $\varphi[\psi/p_0] = \varphi$. Logo, é evidente que $var(\varphi[\psi/p_0]) = var(\varphi)$, donde $\mathcal{P}(\varphi)$.

(iii) Admitamos que $\varphi = \neg\varphi_1$, para algum $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\mathcal{P}(\varphi_1)$, ou seja,

$$var(\varphi_1) = var(\varphi_1[\psi/p_0]) \quad (HI).$$

Temos que

$$\begin{aligned} var(\varphi) = var(\neg\varphi_1) &\underset{\text{def } var}{=} var(\varphi_1) \\ &\underset{HI}{=} var(\varphi_1[\psi/p_0]) \\ &\underset{\text{def } var}{=} var(\neg\varphi_1[\psi/p_0]) \\ &\underset{\text{def } \_[\psi/p_0]}{=} var((\neg\varphi_1)[\psi/p_0]) \\ &= var(\varphi[\psi/p_0]) \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{P}(\varphi)$.

(iv) Suponhamos que $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e que $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$, para alguns $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\mathcal{P}(\varphi_1)$ e $\mathcal{P}(\varphi_2)$, isto é,

$$\mathrm{var}(\varphi_1) = \mathrm{var}(\varphi_1[\psi/p_0])$$

e

$$\mathrm{var}(\varphi_2) = \mathrm{var}(\varphi_2[\psi/p_0]) \qquad \text{(HI)}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\varphi[\psi/p_0] &= (\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_0] \\ &= \varphi_1[\psi/p_0] \square \varphi_2[\psi/p_0].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\varphi[\psi/p_0]) &= \mathrm{var}(\varphi_1[\psi/p_0] \square \varphi_2[\psi/p_0]) \\ &= \mathrm{var}(\varphi_1[\psi/p_0]) \cup \mathrm{var}(\varphi_2[\psi/p_0]) \\ &\underset{\mathrm{HI}}{=} \mathrm{var}(\varphi_1) \cup \mathrm{var}(\varphi_2) \\ &= \mathrm{var}(\varphi_1 \square \varphi_2) \\ &= \mathrm{var}(\varphi).\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{P}(\varphi)$.

Por (i) – (iv), pelo Princípio de Indução Estrutural para fórmulas do CP, $\mathcal{P}(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

2. $\varphi = (p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_3 \vee \bot)$

$\underset{\bot \text{ el. neutro } \vee}{\Leftrightarrow} (p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow p_3 \Leftrightarrow ((p_1 \to \neg p_2) \to p_3) \wedge$

$\wedge (p_3 \to (p_1 \to \neg p_2)) \Leftrightarrow$

$\sigma \Leftrightarrow \tau \Leftrightarrow (\sigma \to \tau) \wedge (\tau \to \sigma)$

$$\Leftrightarrow \big(\neg(p_1 \to \neg p_2) \vee p_3\big) \wedge \big(\neg p_3 \vee (p_1 \to \neg p_2)\big)$$

$$\Leftrightarrow \big((p_1 \wedge p_2) \vee p_3\big) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2)$$

$\sigma \to \tau \Leftrightarrow \neg\sigma \vee \tau$; dupla negação

$$\Leftrightarrow \underbrace{(p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2)}_{\text{FNC}}$$

distributividade de . em relação a

3. Seja v uma valoração tal que

$$v(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)) = 1 \quad (*)$$

e

$$v(p_1 \to \neg p_2) = 1. \quad (**)$$

Então, $v(p_1) = 1$ e $v(p_2 \vee p_3) = 1$ por $(*)$

Assim, como $v(p_1) = 1$, de $(**)$ podemos concluir que $v(\neg p_2) = 1$, ou seja, $v(p_2) = 0$.

Como $v(p_2 \vee p_3) = 1$ e $v(p_2) = 0$, segue-se que $v(p_3) = 1$.

Provámos, deste modo, que ~~n~~ v é uma valoração que satisfaz $\{p_1 \wedge (p_2 \vee p_3), p_1 \to \neg p_2\}$ então v satisfaz p_3. Portanto,

$$p_1 \wedge (p_2 \vee p_3), p_1 \to \neg p_2 \models p_3.$$

4. $\varphi = p_0 \to (p_1 \to p_2)$

(a)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_1}\,\wedge_2 E
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_0}\,\wedge_1 E
      \qquad
      \cancel{p_0 \to (p_1 \to p_2)}^{\,(1)}
    }{p_1 \to p_2}\,\to E
  }{
    \dfrac{p_2}{(p_0 \wedge p_1) \to p_2}\,\to I
  }\,\to E
}{\varphi \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)}\,\to I^{(1)}
$$

é uma demonstração em DNP da fórmula $\varphi \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$.

(b)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{p_1 \wedge \neg p_2}{p_1}\,\wedge_1 E
    \qquad
    \dfrac{p_0 \qquad \varphi}{p_1 \to p_2}\,\to E
  }{p_2}\,\to E
  \qquad
  \dfrac{p_1 \wedge \neg p_2}{\neg p_2}\,\wedge_2 E
}{\bot}\,\neg E
$$

é uma derivação de $\bot$ a partir de $\Gamma = \{\varphi, p_0, p_1 \wedge \neg p_2\}$, o que mostra que $\Gamma \vdash \bot$, i.e., que Γ é sintaticamente inconsistente.

Em alternativa, podia mostrar-se que não existe v valoração tal que $v \models \Gamma$.

(b) Consideremos a estrutura E' igual a E exceto na interpretação $\bar{f}$ que é $\bar{f}: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\bar{f}(m,n) = m+n$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Seja $a: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}$ a atribuição tal que $a(x_1) = 2$.

Temos que

$\varphi[a]_{E'} = 0$ sse $a(x_1)$ é par e existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $a(x_1)+d$ é ímpar, o que é verdade já que basta tomar $d=1$.

Portanto, $\varphi[a]_{E'} = 0$ e φ não é universalmente válida.

6. Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que

$$E \models \forall x\, (\varphi \vee \psi)\, [a]$$

e

$$E \models \neg\varphi\, [a].$$

Seja $E = (D, \bar{\ })$. Temos que

$E \models \forall x\, (\varphi \vee \psi)\, [a]$

sse Para todo $d \in D$, $(\varphi\vee\psi)\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$

sse Para todo $d \in D$, $\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1\right)$

(*)

De $E \models \neg\varphi[a]$, sabemos que $\varphi[a]_E = 0$.

Dado que $x \notin Liv(\varphi)$,

$$\varphi[a]_E = \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E \text{, para}$$

qualquer $d \in D$ (uma vez que $a(y) = a\binom{x}{d}(y)$, para todo $y \in Liv(\varphi)$).

Logo, $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 0$, para todo $d \in D$.

Portanto, de ⊛ podemos afirmar que

$$\text{Para todo } d \in D, \quad \psi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1,$$

ou seja $\quad \forall x\, \psi[a]_E = 1$,

pelo que $\quad E \models \forall x\, \psi[a]$.

Provámos, deste modo, que $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \models \forall x\, \psi$.