5. Semântica do Cálculo de Predicados

5.1 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e a estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ (a estrutura usual de tipo L). Sejam a_1 e a_2 atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$ e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada um dos termos t de tipo L que se seguem, determine $t[a_1]$ e $t[a_2]$.

i) 0. **ii)** x_5.

iii) $s(0) + x_5$. **iv)** $(s(0) + x_5) \times s(x_1 + x_2)$.

b) Para cada uma das fórmulas φ de tipo L que se seguem, calcule $\varphi[a_1]$ e $\varphi[a_2]$.

i) $x_1 = x_2$. **ii)** $\neg(x_1 = x_2)$.

iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. **iv)** $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, determine

$(\forall x_1 \varphi)[a_1]$ e $(\exists x_1 \varphi)[a_1]$.

d) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida na estrutura E_{Arit}.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é universalmente válida.

5.2 Repita o exercício anterior, considerando a estrutura $E = (D, \overline{})$, de tipo L, com $D = \{d_1, d_2\}$, e as atribuições a_1 e a_2 em E a seguir definidas:

$\overline{0} = d_1$		$\overline{=} \subseteq D^2$	$\overline{=} = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$
$\overline{s} : D \to D$	$\overline{s}(x) = x$	$\overline{<} \subseteq D^2$	$\overline{<} = \{(d_1, d_2)\}$
$\overline{+} : D^2 \to D$	$\overline{+}(x, y) = d_2$	$a_1 : \mathcal{V} \to D$	$a_1(x) = d_2$
$\overline{\times} : D^2 \to D$	$\overline{\times}(x, y) = d_1$ sse $x = y$	$a_2 : \mathcal{V} \to D$	$a_2(x_i) = d_2$ sse i é par.

5.3 Seja $L = L_{Arit}$.

a) Quantas estruturas de tipo L existem com domínio $\{0\}$? E domínio $\{0, 1, 2\}$?

b) Defina uma estrutura de tipo L com domínio $\{0, 1, 2\}$.

5.4 Seja L um tipo de linguagem e sejam x, y variáveis e φ, ψ fórmulas de tipo L. Mostre que:

a) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$.

b) $\not\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$.

c) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$.

d) $\not\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

e) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.

f) $\not\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$.

5.5 Sejam L um tipo de linguagem, φ, ψ fórmulas de tipo L, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\Box \in \{\vee, \wedge\}$. Mostre que: se $x \notin LIV(\psi)$, então $(Qx\varphi)\Box\psi \Leftrightarrow Qx(\varphi\Box\psi)$.

5.6 Seja L um tipo de linguagem.

a) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ tais que $x \notin LIV(\psi)$, se tem:

i) $\models \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \to \psi)$.

ii) $\models \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \to \psi)$.

b) Mostre que, na alínea anterior, a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária.

c) Conclua que, para toda a fórmula φ de tipo L, $\models \exists x(\varphi \to \forall x\varphi)$.
(Como curiosidade, pense no caso particular de φ representar a condição "x é aprovado a Lógica".)

5.7 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e considere as seguintes fórmulas de tipo L: $\varphi_1 = (x_1 < x_0)$; $\varphi_2 = \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_3 = \exists x_1 \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_4 = \forall x_1 \neg(x_1 < x_0)$. Indique quais dos seguintes conjuntos são consistentes:

a) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.
b) $\{\varphi_1, \varphi_3\}$.
c) $\{\varphi_1, \varphi_4\}$.
d) $\{\varphi_3, \varphi_4\}$.

5.8 Suponha que L tem um símbolo de relação binário R. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x_0\, R(x_0, x_0) \\
\varphi_2 &= \forall x_0 \forall x_1\, (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0)) \\
\varphi_3 &= \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2\, (\,(R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2)\,)
\end{aligned}$$

a) Seja $E = (D, \overline{\ \ })$ uma L-estrutura tal que $\overline{R}$ é uma relação de equivalência em D. Verifique que E é modelo de Γ.

b) Suponha que L tem também duas constantes c_1 e c_2. Mostre que existem modelos quer de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$, quer de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.

5.9 Seja L um tipo de linguagem. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras para todos φ, ψ e σ fórmulas de tipo L e todo $x \in \mathcal{V}$.

(Curiosidade: estas afirmações correspondem a alguns silogismos aristotélicos, cujos nomes medievais estão indicados.)

a) Barbara $\quad \forall x(\psi \to \varphi), \forall x(\sigma \to \psi) \models \forall x(\sigma \to \varphi)$.

b) Darii $\quad \forall x(\psi \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\sigma \wedge \varphi)$.

c) Cesare $\quad \forall x(\psi \to \neg\varphi), \forall x(\sigma \to \varphi) \models \forall x(\sigma \to \neg\psi)$.

d) Festino $\quad \forall x(\psi \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \varphi) \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$.