O João é um ser humano.
Os seres humanos são mortais.
Logo o João é mortal.

Os quadrados de números reais são números positivos ou nulos.
4 é um quadrado.
Logo 4 é positivo ou nulo.

2 é um inteiro par.
Existe pelo menos um número inteiro par.

Como representar cada grupo de frase acima através de fórmulas do Cálculo Proposicional?

Os raciocínios expressos são válidos?

No Cálculo Proposicional analisávamos proposições complexas que se descreviam como sendo o resultado da articulação entre proposições elementares recorrendo ao uso de conetivos.

Pretende-se agora analisar raciocínios dependentes da estrutura interna das frases, para o que é necessário ter uma linguagem que permita expressar propriedades de objetos de um dado universo.

$\longrightarrow$ um universo - conjunto a que pertencem os objetos

$\longrightarrow$ transformações dos objetos - funções

$\longrightarrow$ propriedades dos objetos - relações

$\longrightarrow$ variáveis relativas aos elementos do universo

Na Lógica de primeira ordem teremos um único universo e as varáveis tomam valores nesse universo.

$$\underbrace{\text{Os quadrados de números reais}}_{Q}\ \underbrace{\text{são números positivos ou nulos}}_{P} \quad Q(x) \to P(x)$$

4 é um quadrado. $\qquad Q(4)$

Logo 4 é positivo ou nulo. $\qquad P(4)$

Na frase *"Os quadrados de números reais são números positivos ou nulos"* a que objetos nos referimos?

A qualquer um número do conjunto $\mathbb{R}$.

Assim, o universo é $\mathbb{R}$ e as variáveis representam números reais.

Na representação simbólica da frase acima, a variável x designa um número real qualquer, pelo que se deve entender que:

para todo o valor de x, $Q(x) \to P(x)$.

Definição

Um *tipo* L é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, em que:

1. $\mathcal{F}$ é um conjunto contável de símbolos chamados *símbolos de função*;
2. $\mathcal{R}$ é um conjunto contável e não vazio de símbolos chamados *símbolos de relação* ou *de predicado*, tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{R} = \emptyset$;
3. $\begin{array}{rccc} \mathcal{N}: & \mathcal{F} \cup \mathcal{R} & \to & \mathbb{N}_0 \\ & g & \mapsto & \mathcal{N}(g) \end{array}$ é uma função, dita função aridade, sendo $\mathcal{N}(g)$ designado *aridade* de g.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes* e o seu conjunto é vulgarmente representado por $\mathcal{C}$.
Os símbolos de relação têm aridade maior do que 0.

Para cada tipo L teremos um alfabeto e uma linguagem de Cálculo de Predicados.

Nota: Um conjunto C é contável se existe uma bijeção entre C e um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Exemplo

$$L_{Arit} = (\{0, s, +, *\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$$

onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(*) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem.

O que poderá ser uma palavra da linguagem associada a este tipo?

$$s(1) * s(s(0)) \ ? \qquad s(s(0)) < s(s(s(0))) \ ?$$

Qual será o alfabeto que permite escrever todas as palavras de uma tal linguagem?

Definição

O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$, do Cálculo de Predicados, de um tipo de linguagem L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

1. símbolos de função e símbolos de predicado de L;
2. os conetivos proposicionais $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$;
3. $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável representado por $\mathcal{V}$;
4. $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;
5. "(", ")" e ",".

Definição

O conjunto $\mathcal{T}_L$ dos *L-termos* (ou termos de tipo L) é o subconjunto de $\mathcal{A}_L^+$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

1. para cada $x_i \in \mathcal{V}$, $x_i \in \mathcal{T}_L$;
2. para cada $c \in \mathcal{C}$, $c \in \mathcal{T}_L$;
3. para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, se $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_L$.

Definição

Chamaremos *subtermos* aos sub-objetos de um L-termo

Notação: Quando f é um símbolo de função de aridade 2 e t_1 e t_2 são L-termos, a expressão $t_1 f t_2$ representa o L-termo $f(t_1, t_2)$

Exemplo

Em L_{Arit} o conjunto dos subtermos de $0 + s(x_2)$ é

$$\left\{0 + s(x_2), 0, s(x_2), x_2\right\}.$$

A sequência de objetos $x_2,\ s(x_2),\ 0,\ 0 + s(x_2)$ é uma sequência de formação de $0 + s(x_2)$.

$0 + s(x_2) \ \leftrightsquigarrow \ +(0, s(x_2))$

Nota : Nos L-termos não ocorrem símbolos de relação. Por exemplo, $x_2 = s(0)$ não é um L_{Arit}-termo.

Sendo o conjunto de L-termos um conjunto definido através de uma definição indutiva determinista, existem um teorema de indução estrutural e um teorema de recursão estrutural para L-termos:

Teorema de Indução Estrutural em L-Termos

Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t.
Se:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$\text{se } P(t_1), \ldots, \text{ e } P(t_n), \text{ então } P\big(f(t_1, ..., t_n)\big);$$

então, para todo o L-termo t, $P(t)$.

Sendo o conjunto de L-termos um conjunto definido através de uma definição indutiva determinista, existem um teorema de indução estrutural e um teorema de recursão estrutural para L-termos:

Teorema de Recursão Estrutural para L-Termos

Sejam X um conjunto, $g_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to X$ e $g_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to X$ funções e seja, para cada símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, $g_f : X^n \to X$ uma função. Então, existe uma e uma só função $g : \mathcal{T}_L \to X$ tal que:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $g(x) = g_{\mathcal{V}}(x)$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $g(c) = g_{\mathcal{C}}(c)$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$g\big(f(t_1, ..., t_n)\big) = g_f(g(t_1), ..., G(t_n)).$$

Definição

O conjunto $\mathrm{VAR}(t)$, das *variáveis que ocorrem* num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em t, como:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $\mathrm{VAR}(x) = \{x\}$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $\mathrm{VAR}(c) = \emptyset$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$\mathrm{VAR}(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(t_i).$$

Exemplo

O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é
$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}(x_2 + s(x_1)) &= \mathrm{VAR}(x_2) \cup \mathrm{VAR}(s(x_1)) \\ &= \{x_2\} \cup \mathrm{VAR}(x_1) = \{x_2, x_1\}. \end{aligned}$$

Definição

O L-termo que resulta da *substituição*, num L-termo t_0, de uma variável x por um L-termo t, que notaremos por $t_0[t/x]$, é definido, por recursão estrutural em t_0, como:

1. para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}_0$, $\quad x_i[t/x_j] = \begin{cases} t & \text{se } i = j \\ x_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $\quad c[t/x] = c$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x]).$$

Exemplo

O resultado da substituição de x_1 por $s(0)$ em $x_2 + s(x_1)$ é

$$\begin{aligned} (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] &= x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ &= x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ &= x_2 + s(s(0)). \end{aligned}$$

Definição

Uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_L$, da forma

$$R(t_1, \ldots, t_n)$$

onde $R \in \mathcal{R}$, $\mathcal{N}(R) = n$ e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$, é chamada uma *L-fórmula atómica*.

O conjunto das L-fórmulas atómicas representa-se por At_L.

Exemplo

As palavras $< (x_0, s(0))$ e $= (x_0, x_1)$, sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, são L_{Arit}-fórmulas atómicas.

Notação: Quando R é um símbolo de relação de aridade 2 e t_1 e t_2 são L-termos,

$t_1 \, R \, t_2$ representa a L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$

Por exemplo, $\quad x_0 < s(0) \;\leadsto\; < (x_0, s(0))$.

Definição

O conjunto das *L-fórmulas*, que notamos por $\mathcal{F}_L$, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$, pelas regras:

1. $\perp \in \mathcal{F}_L$;
2. $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para qualquer *L*-fórmula atómica φ;
3. $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$;
4. $(\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}_L$ para quaisquer $\varphi, \ \psi \in \mathcal{F}_L$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
5. $(\exists_x \varphi) \in \mathcal{F}_L$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$;
6. $(\forall_x \varphi) \in \mathcal{F}_L$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo

Considere a palavra

$$\varphi = (\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \to (x_0 = x_1)))).$$

Será φ uma L_{Arit}-fórmula?

Notação : Os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos.
Por exemplo,

$$\varphi \rightsquigarrow \forall_{x_0}\exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \to (x_0 = x_1)).$$

Definição

Aos sub-objetos de uma L-fórmula φ chamaremos *subfórmulas* de φ.

O conjunto das L-fórmulas encontra-se definido através de uma definição indutiva determinista. Como tal, existem os respetivos teoremas de indução estrutural e de recursão.

Teorema de Indução Estrutural em L-Fórmulas

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ.
Se:

1. $P(\perp)$;
2. para qualquer $\psi \in \mathrm{At}_L$, $P(\psi)$;
3. para qualquer $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$, então $P(\neg\psi)$;
4. para quaisquer $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ e $P(\sigma)$ então $P(\psi \Box \sigma)$;
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$, então $P(Q_x\psi)$;

então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

O conjunto das L-fórmulas encontra-se definido através de uma definição indutiva determinista. Como tal, existem os respetivos teoremas de indução estrutural e de recursão.

Teorema de Recursão Estrutural em L-fórmulas

Sejam X um conjunto e $x \in X$ e sejam $g : \mathrm{At}_L \to X$, $g_\neg : X \to X$, $g_\square : X \times X \to X$ (para cada $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$) e $g_Q : X \to X$ (para cada $Q \in \{\exists, \forall\}$) funções. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{F}_L \to X$ tal que:

1. $G(\bot) = x$;
2. para qualquer $\varphi \in \mathrm{At}_L$, $\quad G(\varphi) = g(\varphi)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\quad G(\neg\varphi) = g_\neg(G(\varphi))$;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(\varphi \square \psi) = g_\square(G(\varphi), G(\psi))$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(Q_x\varphi) = g_Q(G(\varphi)).$$

Definição

Dada uma subfórmula de uma L-fórmula φ da forma $Q_x\psi$, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $x \in \mathcal{V}$, o *alcance* desta ocorrência do quantificador Q_x em φ é a L-fórmula ψ.

Exemplo

Em $\forall_{x_0}(\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists_{x_1}(x_1 < x_0)))$,

1. o alcance de $\forall_{x_0}$ é $\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists_{x_1}(x_1 < x_0))$;
2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_1 < x_0$.

Definição

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência numa subfórmula atómica de φ de uma variável x diz-se *livre* quando essa ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador Q_x (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

$\mathrm{LIV}(\varphi) \rightsquigarrow$ {variáveis que têm ocorrências livres em φ};
$\mathrm{LIG}(\varphi) \rightsquigarrow$ {variáveis que têm ocorrências ligadas em φ}.

Exemplo

$$\varphi = \exists_{x_1}(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \to \forall_{x_0}(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(c)}))$$

A ocorrência:

- (a) de x_0 é livre,
- (b) de x_0 é ligada, por se encontrar no alcance do quantificador $\forall_{x_0}$,
- (c) de x_1 é ligada, pois encontra-se no alcance do quantificador $\exists_{x_1}$.

Assim, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \{x_0\}$ e $\mathrm{LIG}(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Definição

A L-fórmula resultante da *substituição* numa L-fórmula φ de todas as ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t será notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em φ, por:

1. $\perp[t/x] = \perp$;
2. para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{R}$ tal que $\mathcal{N}(R) = n$, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]);$$
3. para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $\quad (\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$,
$$(\psi_1 \square \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \square \psi_2[t/x];$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$,
$$(Q_y\psi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\psi & \text{se } \; y = x \\ Q_y\psi[t/x] & \text{se } \; y \neq x \; . \end{cases}$$

Exemplo

Seja $\varphi = \exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \to \forall_{x_0}(x_0 = x_1))$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists_{x_1}(\neg(s(x_1) < s(0)) \to \forall_{x_0}(x_0 = x_1)).$$

Definição

Uma variável x diz-se *substituível por* (ou *livre para*) um L-termo t numa L-fórmula φ quando não existem ocorrências livres de x no alcance de Q_y, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $y \in \mathrm{VAR}(t)$,

ou, equivalentemente,

quando, para toda a ocorrência livre de x em φ, se essa ocorrência está no alcance de Q_y, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, então $y \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Exemplo

Seja $\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$.

- x_0 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres em φ.
- x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, uma vez que a única ocorrência livre de x_1 em φ não se encontra no alcance de qualquer quantificador.
- x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 ocorre livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$ e $x_1 \in \mathrm{VAR}(x_1 + s(x_2))$.

  Diz-se que existe captura da variável x_1 na substituição.
- Em φ há duas ocorrências livres de x_2:
  - uma está no alcance de um único quantificador, $\forall_{x_1}$;
  - a outra não está no alcance de qualquer quantificador.

  Logo, x_2 é substituível por um L-termo t em φ se e só se $x_1 \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Observe que mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituicão de x por t em φ encontra-se definida. Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ na fórmula

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)),$$

no entanto, a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em $\forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2))$ encontra-se definida e é igual a

$$\forall_{x_1}(x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))).$$

Contudo, note que a primeira ocorrência da variável x_2 em φ, que era livre, foi substituída pelo termo $x_1 + s(x_2)$, cuja ocorrência de x_1 passou a estar ligada ao quantificador $\forall_{x_1}$.

Caso nada seja dito em contrário, sempre que escrevermos $\varphi[t/x]$, assumimos que a variável x é substituível pelo L-termo t na L-fórmula φ.

Proposição

Dados uma L-fórmula φ, uma variável x e um L-termo t,

$$\text{se } x \notin \mathrm{LIV}(\varphi), \text{ então } \varphi[t/x] = \varphi.$$

Demonstração:

- Caso $\varphi = \bot$, então, $\varphi[t/x] = \bot[t/x] = \bot = \varphi$.
- Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, $\mathcal{N}(R) = n$, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$, $x \notin \mathrm{VAR}(t_i)$, para quaisquer $1 \leq i \leq n$, (se não teríamos $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$). Consequentemente, $t_i[t/x] = t_i$, para quaisquer $1 \leq i \leq n$. Assim,
$$\begin{aligned} \varphi[t/x] &= R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] && = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x]) \\ &= R(t_1, \ldots, t_n) && = \varphi. \end{aligned}$$
- Caso $\varphi = Q_y \varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$, por hipótese de indução, admitimos que, se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi_1)$, então $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$
  - (i) Se $x = y$, então $\varphi[t/x] = (Q_y \varphi_1)[t/y] = Q_y \varphi_1 = \varphi$.
  - (ii) Se $x \neq y$, então $x \notin LIV(\varphi_1)$ e
$$\begin{aligned} \varphi[t/x] &= (Q_y \varphi_1)[t/x] = Q_y(\varphi_1[t/x]) \\ &=_{h.i.} Q_y \varphi_1 = \varphi. \end{aligned}$$
- $\cdots$ Os restantes casos são deixados como exercício.

Definição

Uma L-fórmula φ diz-se uma *L-sentença*, ou uma *L-fórmula fechada*, quando não tem ocorrências livres de variáveis, *i.e.*, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \emptyset$.

Proposição

Sejam φ uma L-sentença, x uma variável e t um L-termo. Então, $\varphi[t/x] = \varphi$.