Cap 4– Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

Abril 2019

4.1 Integrais duplos e volumes

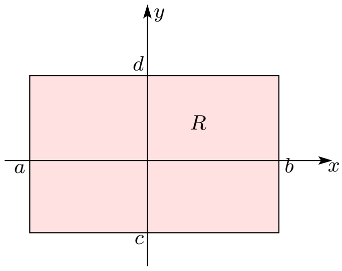
Nesta secção a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada:

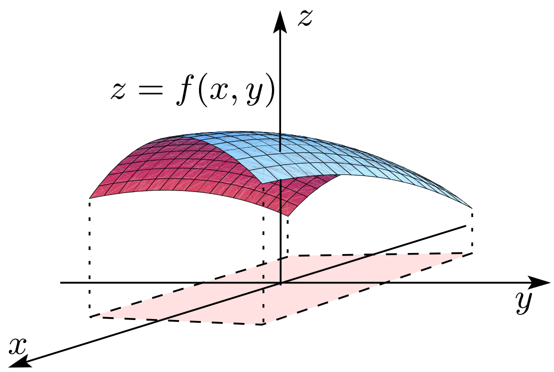
$$|f(x, y)| < M, \qquad \text{para algum } M \in \mathbb{R}.$$

Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

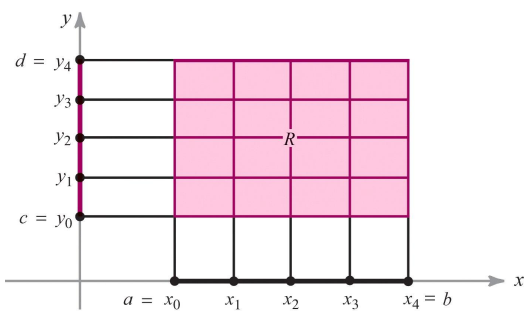
formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

- [Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.

Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Considere-se uma subdivisão $[c, d]$ em k subintervalos $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores corresponde uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



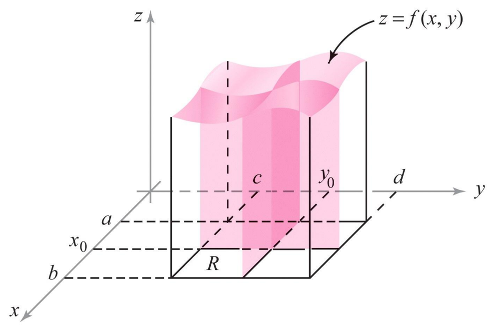
- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$;
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolha-se um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$;

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\,\Delta A_{ij}.$$



- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\,\Delta A_{ij}$$

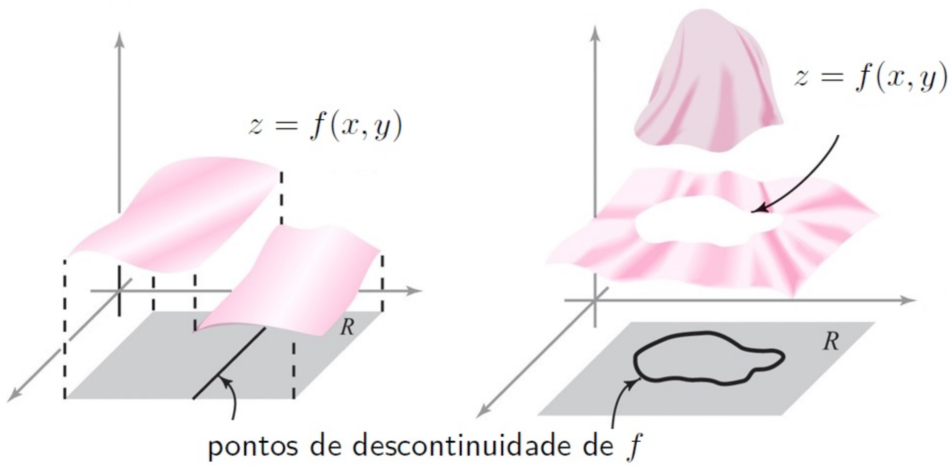
[Definição] Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em R e denota-se

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\,d(x,y).$$

- Se existir o integral duplo de f em R, diz-se que f é integrável em R.

Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.
2. Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada no retângulo R e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então f é integrável.



Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no retângulo R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$
2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA,\ R = R_1 \cup R_2;$
4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA;$
   - $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0;$
5. $\displaystyle\left|\iint_R f(x,y)\, dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\, dA.$

Como calcular um integral duplo?

- [Teorema de Fubini 1]

  Seja f uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
  Então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral, onde R é o retângulo $[0, 1] \times [1, 2]$,

$$\iint_R (x^3 + y^2)\,d(x,y).$$

- [Teorema de Fubini 2]

  Seja f uma função limitada no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas.

  Se $\int_c^d f(x, y)\, dy$ existe para cada $x \in [a, b]$ então o integral duplo

  $$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx \quad \text{existe e} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

  De modo análogo, se $\int_a^b f(x, y)\, dx$ existe para cada $y \in [c, d]$ então o integral duplo

  $$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy \quad \text{existe e} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

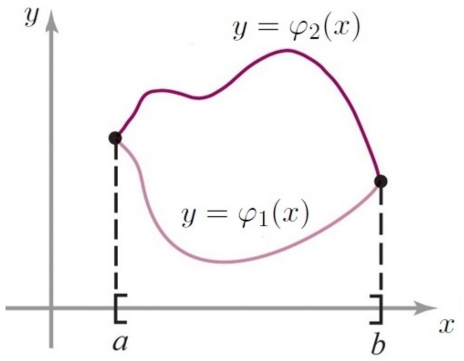
  Se todas as condições se verificam em simultâneo

  $$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Exercícios:: 1 [Folha 5]

1. Seja R o retângulo $[0, 1] \times [1, 3]$. Calcule
   (a) $\displaystyle\iint_R y\, e^{xy}\, dA$

Integração em regiões gerais de $\mathbb{R}^2$



Região do tipo I

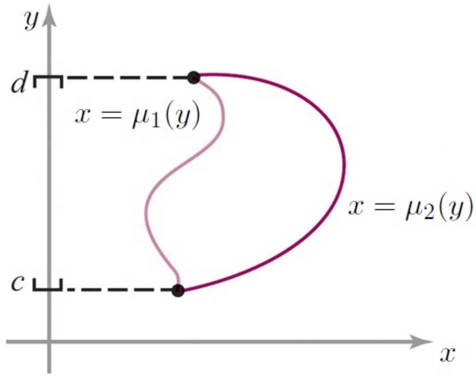
$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

Região do tipo II

$c \leq y \leq d$

$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$

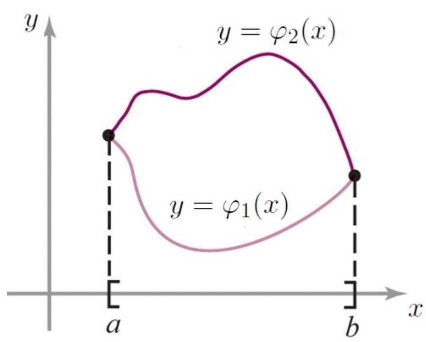


Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

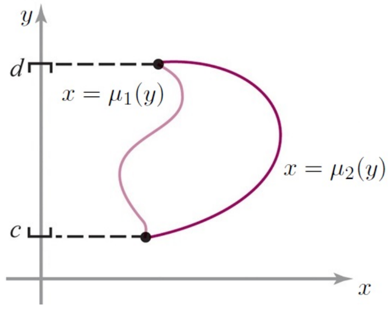
$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}^1(]a, b[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

▶ [Região do tipo II]



$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{C}^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

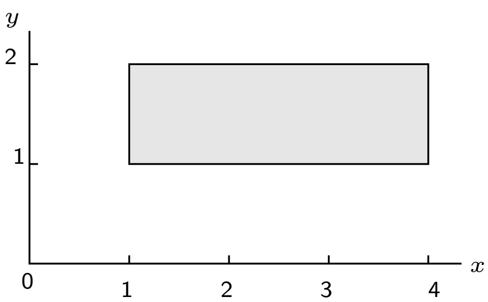
- Neste caso,

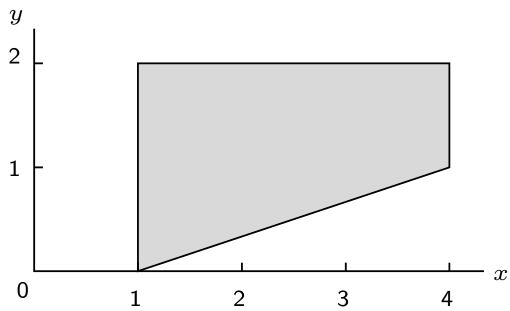
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

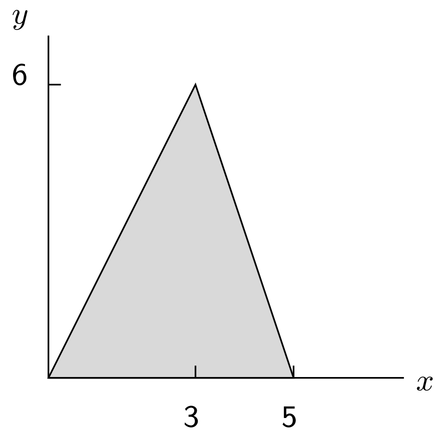
▶ [Região do tipo III] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo III.

Exemplo

1. Para cada uma das seguintes regiões D escreva $\iint_D f\, dA$ na forma de dois integrais iterados







Exemplo

- Calcular
$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$$
quando
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le x^2\}.$$
  a) Usando uma região verticalmente simples.
  b) Usando uma região horizontalmente simples.

Observação

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

- A ordem de integração $dx\,dy$ corresponde a uma subdivisão "vertical"da região de integração, enquanto que a ordem $dy\,dx$ corresponde a uma subdivisão é "horizontal".

- A alteração da ordem de integração pode permitir calcular um integral que de outra forma não era possível:
  - $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy.$

Exercícios:: 2 [Folha 5]

1. Calcule os seguintes integrais esboçando as regiões de integração

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^y} (x+y)\ dx\,dy$;

2. Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração em cada um dos seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_0^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy$

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (x,y) \in B,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

define-se o volume de S por

$$\text{vol}(S) = \iint_B f(x,y)\,dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x,y) = 1$ a área de B é dada por

$$\text{área}(S) = \iint_B 1\,dA$$

Exemplo [Folha 5]

1. Represente graficamente o conjunto e calcule a sua área

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2 \,\wedge\, x \leq y \leq x^2\}$$

Exercícios:: 3 [Folha 5]

1. Determine a área limitada pelas curvas definidas por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = 0$.
2. Calcule o volume do sólidos limitado pelo parabolóide definido por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano definido por $z = 0$.