> Linguagem L $L = (\{\text{função}\}, \{\text{relação}\}, N)$

> Termo T_L
a) $x_i \in V^{CP} \rightarrow x_i \in T_L$
b) $t_1 \dots t_n \in T^{CP}$, f é função tq $N f = n \rightarrow f(t_1 \dots t_n) \in T_L$

> Formula atomica At_L
$t_1 \dots t_n \in T_L$, R é relação em L tq: $N R = n$
$R(t_1 \dots t_n) \in At_L$

> L-Formula F_L
a) $\forall \varphi \in At_L$, $\varphi \in F_L$
b) $\bot \in F_L$
c) $\varphi \in F_L \rightarrow \neg\varphi \in F_L$
d) $\varphi, \psi \in F_L$, $\varphi \square \psi \in F_L$
e) $\varphi \in F_L \rightarrow Q_x \varphi \in F_L$

> Livre
x está livre em $\varphi \Leftrightarrow x \in Liv\,\varphi$ se x ocorre em φ e não está ao alcance de um Q_x, ligada caso ocorra e não seja livre.

x livre para t em φ se para todas as ocorr. livres de x em φ x não está ao alcance de um quantificador Q_y tq: $y \in Var(t)$

$x \notin Liv\,\varphi \Rightarrow x$ está livre para t, $\forall t \in T_L$

> Satisfação de formula
$E \models \varphi[a]$ se $\varphi[a]_E = 1$
$E \not\models \varphi[a]$ se $\varphi[a]_E = 0$

Se φ é sentença
$\exists a: E \models \varphi[a] \Rightarrow \forall a: E \models \varphi[a]$

> Validade E valida φ se $\forall a$, $E \models \varphi[a]$, escreve-se $E \models \varphi$

φ é universalmente válida se $\forall (E, a)$ $E \models \varphi[a]$
escreve-se $\models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ é tautologia

> Satisfação de conjunto
E satisfaz Γ para a $E \models \Gamma[a]$ se $\forall \varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$

Γ é sem. consistente se $\exists (E, a)$, $E \models \Gamma[a]$

> Modelo E é modelo de Γ se $\forall a$ $E \models \Gamma[a]$ escreve-se $E \models \Gamma$

> Estrutura $E = (D, \overline{\ })$
$D \neq \emptyset$, $\overline{\ }$ função interpretação

> Atribuição $a: V \rightarrow dom\, E$
$\varphi[a]_E$ ou $\varphi[a]$ $x_i \mapsto a(x_i)$

$$a\binom{x}{d}(x_i) = \begin{cases} d & \text{se } x_i = x \\ a(x_i) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\varphi[a]$: $x[a] = a(x)$, $x \in V$

φ é termo
$c[a] = \bar{c}$, $c \in \mathcal{C}$ ← constantes
$f(t_1 \dots t_n)[a] = \bar{f}(t_1[a] \dots t_n[a])$
$t_0[t_1/x][a] = t_0[a\binom{x}{t_1[a]}]$

$\varphi[a]_E$
$\varphi \in F_L$
$\bot[a] = 0$
$R(t_1 \dots t_n) = 1$ se $(t_1[a] \dots t_n[a]) \in \bar{R}$
$(\neg\varphi)[a] = f_\neg(\varphi[a])$
$(\varphi \square \psi)[a] = f_\square(\varphi[a], \psi[a])$
$Q_x \varphi[a] = 1 \Leftrightarrow Q_d \in D, \varphi[a\binom{x}{d}] = 1$

> Equivalências lógicas
a) $\neg\forall_x \varphi \Leftrightarrow \exists_x \neg\varphi$
b) $\neg\exists_x \varphi \Leftrightarrow \forall_x \neg\varphi$
c) $\forall_x \varphi \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg\varphi$
d) $\exists_x \varphi \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg\varphi$
e) $\forall_x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall_x \varphi \wedge \forall_x \psi$
f) $\exists_x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists_x \varphi \vee \exists_x \psi$
g) $\models (\forall_x \varphi \vee \forall_x \psi) \rightarrow \forall_x(\varphi \vee \psi)$
h) $\models \exists_x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \exists_x \varphi \wedge \exists_x \psi$
i) $\forall_x \forall_y \varphi \Leftrightarrow \forall_y \forall_x \varphi$
j) $\exists_x \exists_y \varphi \Leftrightarrow \exists_y \exists_x \varphi$
k) $\models \exists_x \forall_y \varphi \rightarrow \forall_y \exists_x \varphi$
l) $x \notin Liv\,\varphi \Rightarrow Q_x \varphi \Leftrightarrow \varphi$
m) $y \notin Liv\,\varphi$, x livre para y
$Q_x \varphi \Leftrightarrow Q_y \varphi[y/x]$
n) $x \in Liv\,\psi$ $\square \in \{\vee, \wedge\}$
$Q_x(\varphi \square \psi) \Leftrightarrow Q_x \varphi \square \psi$

> Consequência semântica
$\Gamma \models \varphi$ se $\forall E, a$: $E \models \Gamma[a] \Rightarrow E \models \varphi[a]$

\> Propriedades da consequência semântica

a) $\Gamma \vDash \forall x \varphi$, x está livre para t $\Rightarrow \Gamma \vDash \varphi[t/x]$

b) $\Gamma \vDash \varphi$ e $x \notin Liv\, \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash \forall x \varphi$

c) $\Gamma \vDash \varphi[t/x]$ e x está livre para t $\Rightarrow \Gamma \vDash \exists x \varphi$

d) $\Gamma \vDash \exists x \varphi$ e $\Gamma, \varphi \vDash \psi$ e $x \notin Liv(\Gamma \cup \psi) \Rightarrow \Gamma \vDash \psi$

Dedução Natural

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ \to I \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\ \to E \qquad \frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg \varphi}\ \neg I \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \neg \varphi\end{matrix}}{\bot}\ \neg E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \leftrightarrow I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\begin{matrix} & \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ \bot E \qquad \frac{\begin{matrix}\cancel{\neg \varphi} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ RAA$$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\forall x \varphi}\ \forall I$$

e na derivação x não tem ocorrências livres nas folhas não canceladas

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \forall x \varphi\end{matrix}}{\varphi[t/x]}\ \forall E$$

e x está livre para t

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi[t/x]\end{matrix}}{\exists x \varphi}\ \exists I$$

x está livre para t

$$\frac{\begin{matrix} & \cancel{\varphi} \\ & \vdots \\ \exists x \varphi & \psi\end{matrix}}{\psi}\ \exists E$$

1. x não $\notin Liv\, \psi$
2. na derivação da segunda premissa x ñ tem ocor. livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ