Folha 5

1)

a) A afirmação é falsa, pois a soma de duas probabilidade diferente de zero nunca pode ser igual a zero.

b) A afirmação é falsa, visto que a soma dessa duas probabilidade é maior que 1.

c) A afirmação é falsa, uma vez que $a \neq 0$.

d) A afirmação é verdadeira.

2)

a) $P(Z \leq 0,975)$ $\quad 0,975 - 0,5 = 0,475$

R: O valor de c é 1,96.

b) $P(Z \leq c) = 0,025$ $\quad 0,5 - 0,025 = 0,475$

R: O valor de c é -1,96.

c) $P(Z > c) = 0,05 \Leftrightarrow$ $\quad 0,95 - 0,5 = 0,45$

$\Leftrightarrow 1 - P(Z < c) = 0,05 \Leftrightarrow$ R: O valor de c é 1,645

$\Leftrightarrow P(Z < c) = 0,95$

d) $P(|Z| \geq c) = 0,1$ $\quad \frac{0,1}{2} = 0,05$

R: O valor de c é 1,645.

3)

a) P = v.a que representa o peso de um produto

$P \sim N(10, 0,25)$

C = v.a que representa o peso de uma caixa

$C \sim N(150, 64)$

X: v.a que representa o peso de uma caixa com o produto

$X \sim N(150 + 120, 64 + 3) = N(270, 67)$

b) $P(X > 285) = P\left(Z > \dfrac{285 - 270}{\sqrt{67}}\right) = P(Z > 1{,}83)$

R: A probabilidade de a caixa pesar mais de 285 gramas é de 0,0336.

5a) $E[X_i] = Var[X_i] = 0{,}02$

$X_i \sim N(0{,}02; 0{,}02)$ $\quad S_{100} \sim N(2, 2)$

$P(S_{100} > 2) = P\left(Z > \dfrac{2-2}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 0) = 0{,}5$

R: O valor de $P(S_{100} > 2)$ é 0,5.

4a) P_i = v.a que representa o comprimento das petalas

$P_i \sim N(3{,}2 ; 3{,}24)$

$\overline{P}_{10} = \dfrac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} P_i = \dfrac{1}{10} P \sim N(32, 32{,}4) = N \sim (3{,}2; 0{,}324)$

$P(X > 3{,}5) = P\left(Z > \dfrac{3{,}5 - 3{,}2}{\sqrt{0{,}324}}\right) = P(Z > 0{,}527) = 1 - P(Z < 0{,}527)$

$= 1 - 0{,}20 - 0{,}5 = 0{,}3$

R: A probabilidade dos comprimentos das petalas ser superior a 3,5 cm é de 0,3.

6) $X_i \sim N(20, 350^2)$

$$\bar{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_1 = N(20, 3,5)$$

$$P(\bar{X}_{100} > 18) = P\left(Z > \frac{18-20}{\sqrt{3,5}}\right) = P(Z > -1,069) =$$

$$P(Z < 1,069) = 0,5 + 0,3577 = 0,8577$$

R. A probabilidade de $P(\bar{X}_{100} > 18)$ é de 0,8577.

7) B_i = v.a que representa o tempo de vida de uma bactéria

$B_i \sim N(3, 9)$ 30 meses = 2,5 anos

$$\overline{B_{100}} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} B_i = N(3, 0,09)$$

$$P(\overline{B_{100}} > 2,5) = P\left(Z > \frac{2,5-3}{\sqrt{0,09}}\right) = P(Z > -1,667) =$$

$$= P(Z < 1,667) = 0,5 + 0,4525 = 0,9525$$

R. A probabilidade de a bactéria viver mais de 30 meses é de 0,9525.

8) A_i = v.a que representa a altura de uma arvore $A \sim N(4; 1,44)$

$$\overline{A_{70}} = \frac{1}{70} \sum_{i=1}^{70} A_i = N(4; 0,0206) \qquad \frac{1,2}{12} = 0,1$$

$$P(|\bar{A}_{70}| < 4,1) = P(\bar{A}_{70} < 4,1) - 0,5 + P(\bar{A}_{70} > 3,9) - 0,5 =$$

$$= P\left(Z < \frac{4,1-4}{\sqrt{0,0206}}\right) + P\left(Z > \frac{3,9-4}{\sqrt{0,0206}}\right) - 1 =$$

$$= P(Z < 0,697) + P(Z > -0,697) - 1 = 2 \times 0,758 - 1 = 0,516$$

R. A probabilidade de a altura da arvore não se afastar mais do que $\frac{1}{1.2}$ do desvio padrão é de 0,516.

9)

i) $Y_i \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases}$ $E[Y_i] = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 = 3,5$

$3,5 \times 100 = 350 = E[Y]$

$E[Y_i^2] = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$

$Var[Y_i] = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$ $\frac{35}{12} \times 100 = \frac{875}{3}$

$Y \sim N\left(\frac{91}{6}, \frac{875}{3}\right)$

$P(Y > 300) = P\left(Z > \frac{300 - 350}{\sqrt{\frac{875}{3}}}\right) = P(Z > -2,928) =$

$= P(Z < 2,928) = 0,5 + 0,4983 = 0,9983$

R. O valor de $P(Y > 300)$ é 0,9983.

ii) $X \sim Bin\left(100, \frac{1}{6}\right)$ $E[X] = 100 \times \frac{1}{6} = 16,67$

$Var[X] = \frac{100}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 13,89$

$X \sim N(16,67, 13,89)$

$P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30 - 16,67}{\sqrt{13,89}}\right) = P(Z \leq 3,576) = 0,9998$

R: O valor de $P(X \leq 30)$ é 0,9998

iii) X_{100} = v.a que representa o acontecimento sair 100 vezes a face 6

Y_{100} = v.a que representa o acontecimento a soma das face é 600

$$P(X_{100}) = {}^{100}C_{100} \left(\frac{1}{6}\right)^{100} \left(\frac{5}{6}\right)^{0} = \left(\frac{1}{6}\right)^{100}$$

$$P(X_{100} | Y_{100}) = 1 \neq \left(\frac{1}{6}\right)^{100}$$

R: Fica desta forma demonstrado que os acontecimentos X e Y não são independentes.

10)

a) S = v.a que representa o peso de um saco de café

$S \sim N(1, 0{,}000625)$

$$P(S < 0{,}950) = P\left(Z < \frac{0{,}950 - 1}{\sqrt{0{,}000625}}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) =$$

$$1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}4772 - 0{,}5 = 0{,}0228$$

$$P(S > 1{,}075) = P\left(Z > \frac{1{,}075 - 1}{\sqrt{0{,}000625}}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) = 0{,}0013$$

$$0{,}0288 + 0{,}0013 = 0{,}0241$$

R: A probabilidade de um saco ser rejeitado é de 0,0241.

b)

$S \sim Bin(100, 0{,}0228)$

$E[S] = 100 \times 0{,}0228 = 2{,}28$

$Var[S] = 2,28(1 - 0,0228) = 2,228$

$S \sim N(2,28\ ;\ 2,228)$

$P(S < 6) = P\left(Z < \dfrac{6 - 2,28}{\sqrt{2,228}}\right) = P(Z < 2,492) = 0,9936$

R: O valor aproximado de $P(S < 6)$ é 0,9936.

11) X = v.a que representa o número de ocorrencia do 7

$X \sim Bin\left(10000, \dfrac{1}{10}\right)$ $E[X] = 1000$

$Var[X] = 1000\left(1 - \dfrac{1}{10}\right) = 900$

$Y \sim N(1000, 900)$

$P(Y < 968) = P\left(Z < \left(\dfrac{968 - 1000}{\sqrt{900}}\right)\right) = P(Z < -1,067) =$

$P(Z > 1,067) = 1 - P(Z < 1,067) = 0,1401$

R: A probabilidade de o 7 aparecer no máximo 968 vezes é de 0,1401.

12) X = v.a que representa um numeros de faces 1 obtidas

$X \sim Bin\left(12000, \dfrac{1}{6}\right)$ $E[X] = 2000$

$Var[X] = 1666,67$

$Y \sim N(2000, 1666,67)$

$P(1950 < Y < 2100) = P(Y < 2100) - P(Y < 1950) =$

$= P\left(Z < \dfrac{2100 - 2000}{\sqrt{1666,67}}\right) - P\left(K < \dfrac{1950 - 2000}{\sqrt{1666,67}}\right) =$

$P(Z < 2{,}449) - P(Y < -1{,}225) =$

$= P(Z < 2{,}446) - (1 - P(Y < 1{,}225) =$

$= 0{,}9929 - 1 + 0{,}8907 = 0{,}8836$

R: A probabilidade de o número de ases estar contido entre 1950 e 2100 é de 0,8836