Universidade do Minho
Dep. Matemática

MiEInf
2018/2019

Lógica EI

2º Teste — 29 de maio de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de relação unário P. Se $LIV(\mathsf{P}(t)) = \emptyset$ para algum termo t de tipo L, então L tem pelo menos uma constante.	☐	☐
2.	$(\forall x_0\ x_0 < x_1)[x_1/x_0] = \forall x_0\ x_1 < x_1$.	☐	☐
3.	Seja L um tipo de linguagem formado apenas por duas constantes. Existe um conjunto D tal que o número de estruturas de tipo L com domínio D é 144.	☐	☐
4.	Para todo o tipo de linguagem L e toda a fórmula φ de tipo L, se φ é universalmente válida, então o conjunto $\{\neg\varphi\}$ é inconsistente.	☐	☐
5.	Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q, não existem modelos de $\{\forall x_0(\mathsf{R}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0)), \exists x_1(\neg\mathsf{R}(x_1) \wedge \neg\mathsf{Q}(x_1))\}$.	☐	☐
6.	Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \vee \psi, \psi \vee \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$	☐	☐

Grupo II

Responda a cada uma das questões deste grupo no espaço disponibilizado a seguir à questão, sem apresentar justificações.

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{s}, +\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{0}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$ $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a estrutura de tipo L tal que:

$$\overline{\mathsf{0}} = 0 \qquad \overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$$
$$\overline{\mathsf{s}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(z) = -z \qquad \overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}$$
$$\overline{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{+}(z_1, z_2) = z_1 + z_2$$

1. Dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente 3 subtermos.

Resposta:

2. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i + 2$. Indique $\mathsf{s}(x_1+\mathsf{s}(x_3+\mathsf{0}))\ [a]$.

   Resposta:

3. Indique uma fórmula de tipo L válida em E que represente a afirmação: A soma de um número qualquer com o seu simétrico é nula.

   Resposta:

4. Seja φ a fórmula $(\neg\exists x_1\, \mathsf{s}(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2\, \mathsf{P}(x_2))$ de tipo L. Indique uma fórmula de tipo L que seja logicamente equivalente a φ e esteja em forma normal prenexa.

   Resposta:

Grupo III

1. Construa uma derivação que mostre que $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ é um teorema de DNP.
2. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, então Γ é sintaticamente inconsistente.
3. Considere o tipo de linguagem L do Grupo II. Seja ψ a fórmula $\mathsf{P}(x_2) \to \forall x_1\, \mathsf{P}(x_1 + x_2)$ de tipo L.
   (a) Mostre que x_2 está livre para $\mathsf{s}(0)$ em ψ.
   (b) Indique, justificando, quais são as variáveis que estão livres para $x_1 + x_2$ em ψ.
4. Considere de novo o tipo de linguagem L e a estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{\ \ })$ de tipo L do Grupo II. Seja φ a fórmula $\forall x_0\, (\neg\mathsf{P}(x_0) \to (x_0 = 0 \vee \mathsf{P}(\mathsf{s}(x_0))))$ de tipo L.
   (a) Prove que φ é válida em E.
   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.
5. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\varphi)$. Prove que $\forall x(\varphi \vee \psi) \models (\varphi \vee \forall x\, \psi)$.

Cotações	I	II	III
	6	1+1+1+1	2+1,5+1,5+3,5+1,5

Lógica EI
2º teste
29. maio. 2019

Grupo I

1. $Liv(P(t)) = \emptyset$ — isso implica que $VAR(t) = \emptyset$, uma vez que na L-fórmula $P(t)$ não há ocorrências de quantificadores, para todo o L-termo t.

$VAR(t) = \emptyset$ — podemos concluir que há pelo menos uma ocorrência de uma constante em t.

Portanto, L tem pelo menos uma constante.

A afirmação é V.

2. $(\forall x_0 \ x_0 < x_1) [x_1/x_0] = \forall x_0 \ x_0 < x_1$, uma vez que a ocorrência de x_0 em $\forall x_0 \ x_0 < x_1$ é ligada. A afirmação é F.

3. Uma L-estrutura com domínio D e função interpretação — é tal que a interpretação de cada uma das constantes é um elemento de D.

Assim, para a interpretação de cada uma das constantes escolhemos um elemento de D. Se D for um conjunto com n elementos, teremos n escolhas possíveis para a interpretação de cada constante. Existirão, portanto, n^2 L-estruturas com esse domínio D. Ora, se $n=12$, $n^2=144$.

Bastará assim considerar $D = \{1,2,3,4,\ldots,12\}$.

A afirmação é V.

4.

Admitamos que L é um tipo de linguagem e φ é uma L-fórmula universalmente válida.

Suponhamos que $\{\neg\varphi\}$ é consistente. Então, existem uma L-estrutura E e uma atribuição a em E tais que $E \models \neg\varphi[a]$, ou seja, tal que $\neg\varphi[a]_E = 1$. Assim, $\varphi[a]_E = 0$, o que contraria o facto de φ ser universalmente válida. Portanto, $\{\neg\varphi\}$ é inconsistente e a afirmação é V.

5.

Sejam $E = (D, \bar{\ })$ uma L-estrutura (onde L é um tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q) e a uma atribuição em E.

Se $E \models \forall x_0 (R(x_0) \vee Q(x_0))[a]$, então, para todo $d \in D$, $d \in \bar{R}$ ou $d \in \bar{Q}$.

Se $E \models \exists x_1 (\neg R(x_1) \wedge \neg Q(x_1))[a]$, então existe pelo menos um $d' \in D$ t.q. $d' \notin \bar{R}$ e $d' \notin \bar{Q}$.

Claramente não podemos ter, simultaneamente,

$$E \models \forall x_0 (R(x_0) \vee Q(x_0))[a]$$

e

$$E \models \exists x_1 (\neg R(x_1) \wedge \neg Q(x_1))[a].$$

Portanto, a afirmação é V.

6.

Sejam $\varphi = p_0$, $\psi = p_1$ e $\sigma = p_2$. Temos que

$$p_0 \vee p_1,\ p_1 \vee p_2 \not\models p_0 \vee p_2$$

De facto, para $v : \mathcal{V}^{CP} \to \{0,1\}$ dada por $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ par} \end{cases}$, temos que $v(p_0 \vee p_1) = v(p_1 \vee p_2) = 1$ mas $v(p_0 \vee p_2) = 0$.

Pelo Teorema da Correção, $p_0 \vee p_1, p_1 \vee p_2 \nvdash p_0 \vee p_2$.

A afirmação é F.

Grupo II

1.

$$t = s(s(0))$$

$$subt(t) = \{0, s(0), s(s(0))\}$$

2.

$$a(x_i) = i+2$$
$$\bar{0} = 0$$
$$\bar{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \bar{s}(z) = -z$$
$$\bar{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \qquad \bar{+}(z_1, z_2) = z_1 + z_2$$

$$\begin{aligned} s(x_1 + s(x_3 + 0))[a] &= \bar{s}\left(\bar{+}\left(a(x_1), \bar{s}\left(\bar{+}(a(x_3), \bar{0})\right)\right)\right) \\ &= \bar{s}\left(a(x_1) + \bar{s}\left(a(x_3) + 0\right)\right) \\ &= \bar{s}\left(a(x_1) + \bar{s}\left(a(x_3)\right)\right) \\ &= \bar{s}\left(3 + \bar{s}(5)\right) \\ &= \bar{s}(3 - 5) = \bar{s}(-2) = 2 \end{aligned}$$

3.

$$\forall x_0 \, (x_0 + s(x_0) = 0)$$

4.

$$(\neg \exists_1 \, s(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2 \, P(x_2))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_1 \, \neg s(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2 \, P(x_2))$$

$$\underset{x_1 \notin Liv(\exists x_2 P(x_2))}{\Longleftrightarrow} \forall x_1 \, (\neg s(x_1) = 0 \wedge \exists x_2 \, P(x_2))$$

$$\underset{x_2 \notin Liv(\neg s(x_1)=0)}{\Leftrightarrow} \forall x_1 \exists x_2 \, (\neg s(x_1) = 0 \wedge P(x_2))$$, que está em forma normal prenexa

Grupo III

1.

D:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{p_2}^{(2)}$}
\RightLabel{$\vee_1 I$}
\UnaryInfC{$p_2 \vee p_1$}
\AxiomC{$\cancel{p_2 \vee p_1}^{(2)}$}
\AxiomC{$\cancel{p_2}^{(3)}$}
\AxiomC{$\cancel{p_1}^{(3)}$}
\AxiomC{$\cancel{\neg p_1}^{(1)}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\perp E$}
\UnaryInfC{p_2}
\RightLabel{$\vee E^{(3)}$}
\TrinaryInfC{p_2}
\RightLabel{$\leftrightarrow I^{(2)}$}
\BinaryInfC{$p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1)$}
\RightLabel{$\to I^{(1)}$}
\UnaryInfC{$\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$}
\end{prooftree}
$$

D é uma derivação em DNP de conclusão $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ t.q. $\mathcal{H}(D) = \emptyset$, o que mostra que $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ é um teorema de DNP.

2. Admitamos que $\Gamma \vdash \varphi$ e que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Então, existem uma derivação D_1 de conclusão φ tal que $\mathcal{H}(D_1) \subseteq \Gamma$ e uma derivação D_2 de conclusão $\neg\varphi$ tal que $\mathcal{H}(D_2) \subseteq \Gamma$.

Assim,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{D_1}
\noLine
\UnaryInfC{φ}
\AxiomC{D_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\end{prooftree}
$$

é uma derivação de conclusão $\perp$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\mathcal{H}(D_1) \cup \mathcal{H}(D_2)$, que é um subconjunto de Γ, o que mostra que $\Gamma \vdash \perp$. Logo, Γ é sintaticamente inconsistente.

3. $\varphi: \; P(x_2) \to \forall x_1 \; P(x_1 + x_2)$

(a) x_2 tem duas ocorrências livres em φ. Apenas a segunda está no alcance de um quantificador, que é $\forall x_1$. Como $x_1 \notin VAR(s(0))$, x_2 está livre para $s(0)$ em φ.

(b) A única variável que tem ocorrências livres em ψ é x_2.

Portanto, toda a variável $x \in \mathcal{V} \setminus \{x_2\}$ está livre para $x_1 + x_2$ em ψ.

A segunda ocorrência livre de x_2 em ψ está no alcance de $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + x_2)$. Portanto, x_2 não está livre para $x_1 + x_2$ em ψ.

Logo, as variáveis que estão livres para $x_1 + x_2$ em ψ são as variáveis x_i, com $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\}$.

4.

(a) $\varphi = \forall x_0 \left(\neg P(x_0) \to (x_0 = 0 \vee P(s(x_0)))\right)$

Seja a uma atribuição em E.

$\varphi[a]_E = 1$ sse para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $\neg P(x_0)\, [a\binom{x_0}{d}]_E = 1$ então $(x_0 = 0 \vee P(s(x_0)))\, [a\binom{x_0}{d}]_E = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \notin \overline{P}$, então $d = 0$ ou $-d \in \overline{P}$

sse para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \leq 0$, então $d = 0$ ou $-d > 0$, o que é verdade.

Logo, $\varphi[a]_E = 1$

Assim, φ é válida em E.

(b) Consideremos a L-estrutura $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ exatamente igual a E exceto na interpretação de s que é $\tilde{s}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \mapsto m+1$.

Dada uma atribuição a em E, temos que

$$\varphi[a]_{E'} = 1$$

sse para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \leq 0$, então $d = 0$ ou $d + 1 > 0$, o que é falso. Portanto, $\varphi[a]_{E'} = 0$ e φ não é universalmente válida.

5.

Admitamos que E é uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que $E \vDash \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$.

Sabemos que

$$\forall x (\varphi \vee \psi) \underset{\vee \text{ comutativa}}{\Leftrightarrow} \forall x (\psi \vee \varphi)$$

$$\underset{x \notin Liv(\varphi)}{\Leftrightarrow} (\forall x \psi) \vee \varphi$$

$$\underset{\vee \text{ comutativa}}{\Leftrightarrow} \varphi \vee (\forall x \psi)$$

Logo, $E \vDash \varphi \vee (\forall x \psi) [a]$.

Podemos, então, concluir que $\forall x (\varphi \vee \psi) \vDash \varphi \vee \forall x \psi$