Universidade do Minho MIE Informática

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

FOLHA 4 — 2018'19

Funções definidas em $\mathbb{R}^n$: Planos Tangentes e Retas Normais

1. Para cada uma das superfícies (i. a iv),

(a) encontre um vetor perpendicular/normal e um vetor tangente (à superfície), no ponto cujas coordenadas se indicam.

(b) encontre equações que definam o plano tangente e a reta normal (à superfície), no ponto cujas coordenadas se indicam.

i. $x^2 + xy + y^2 = 3; \quad (-1, -1)$

ii. $(y - x)^2 = 2x; \quad (2, 4)$

iii. $xyz^2 = 1; \quad (1, 1, 1)$

iv. $z = x^2 + 3y^3 + \text{sen}(xy); \quad (1, 0, 1)$

2. Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0, 0)$.

3. A intersecção das superfícies definidas por $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ e $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ é uma curva que passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1, 2)$.

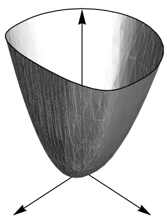
Defina os respetivos planos tangentes às superfícies, nesse ponto.

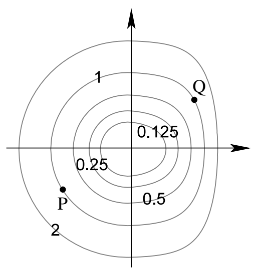
4. Considere a função $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$.

(a) Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$ com o eixo dos zz.

(b) Usando uma aproximação linear de f em $(1, 1)$, calcular uma estimativa para $f(1.02, 0.90)$.

5. Na figura estão representados o gráfico e um diagrama de nível de uma função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Indique quais os sinais de $\nabla f(P) \cdot \vec{e}_1$ e $\nabla f(Q) \cdot \vec{e}_2$





6. Considere a superfície de nível $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.

(a) Determine equações para a reta normal e o plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto de coordenadas $(2, 2, 1)$.

(b) Verifique se a reta encontrada na alínea anterior interseta o eixo das cotas (Oz).

7. Determine os planos tangentes à esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que contêm a reta definida por

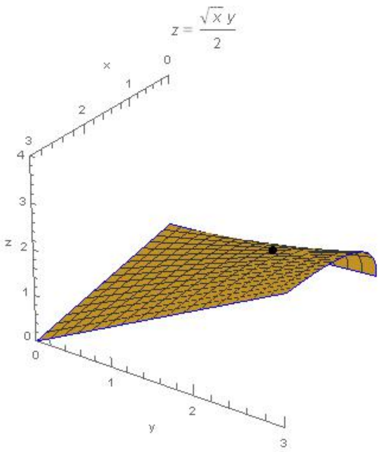
$$\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}$$

8. Determine o ângulo de inclinação do plano tangente ao elipsoide definido por

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$$

no ponto de coordenadas $(2,2,1)$.

9. Na figura, relativa ao gráfico da função, real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y)=\frac{1}{2}y\sqrt{x}$, destaca-se o ponto de coordenadas $(1,2,f(1,2))$.



(a) Use o gráfico, para representar, uma sua conjetura sobre o vetor gradiente de f em $(1,2)$, recordando que este apontráa na direção e no sentido do máximo crescimento da função no ponto dado.

(b) Determine o vetor gradiente e compare-o com a sua conjetura da alínea anterior.

(c) Em que direção e sentido a função f diminuiria mais, no ponto $(1,2)$?

10. A figura representa a curva de nível 2 da função, $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

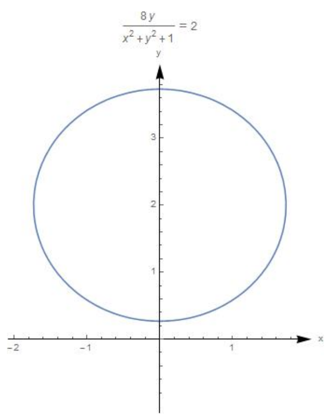
$$f(x,y)=\frac{8y}{1+x^2+y^2}$$

.

(a) Verifique, analiticamente, que a curva é uma circunferência.

(b) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3},2)$ da curva de nível, esboce o vetor gradiente.

(c) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3},2)$ da curva de nível, esboce o cuja derivada direcional é zero.



Funções definidas em $\mathbb{R}^n$: Extremos Livres e Condicionados

11. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

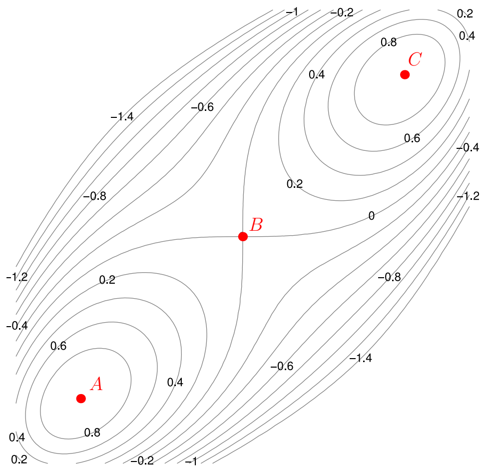
(a) $f(x,y)=x^2+y^4$;

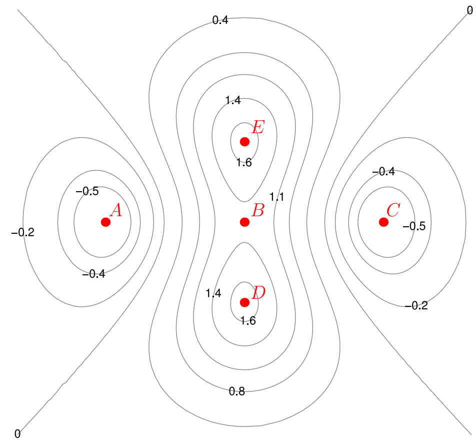
(b) $f(x,y)=2-x-y^2$;

(c) $f(x,y)=xy$;

(d) $f(x,y)=x^2y^2$.

12. Em cada uma das figuras são apresentadas curvas de nível de uma função, relativamente à qual os pontos assinalados são pontos críticos. Conjeture sobre a natureza de cada um desses pontos críticos.





13. Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto de sela:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$;

(c) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$;

(d) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

(e) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$;

(f) $f(x,y) = y + x \operatorname{sen} y$;

(g) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

(h) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$;

(i) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

(j) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ (analise apenas os pontos críticos $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e $(0, \sqrt{\pi})$);

14. Para cada uma das funções f que verificam as condições enunciadas, classifique o ponto crítico (x_0, y_0) ou refira se as informações prestadas são insuficientes para essa classificação:

(a) $f_{xx}(x_0,y_0) = 9$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 4$ e $f_{xy}(x_0,y_0) = 6$;

(b) $f_{xx}(x_0,y_0) = -3$, $f_{yy}(x_0,y_0) = -8$ e $f_{xy}(x_0,y_0) = 2$;

(c) $f_{xx}(x_0,y_0) = -9$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 6$ e $f_{xy}(x_0,y_0) = 10$;

(d) $f_{xx}(x_0,y_0) = 25$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 8$ e $f_{xy}(x_0,y_0) = 10$.

15. Determine os extremos das funções f definidas a seguir, vinculados pelas condições indicadas:

(a) $f(x,y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;

(c) $f(x,y) = xy$ e $x^2 + y^2 = 4$;

(d) $f(x,y) = xy$ e $x + y = 1$;

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3$ e $x^2 + y^2 = 1$;

(f) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$;

(g) $f(x,y) = 2x + y$ e $x^2 + 4y^2 = 1$;

(h) $f(x,y) = xy$ e $9x^2 + y^2 = 4$;

(i) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ e $2x + 3y + 4z = 12$;

(j) $f(x,y,z) = z$ e $x^2 + y^2 = 5 - z$, $x + y + z = 1$;

(k) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(l) $f(x,y,z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$;

(m) $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$, $x + y - z = 0$ e $x^2 + 2z^2 = 1$.

16. Determine o mínimo e o máximo valor absoluto da função f tal que $f(x, y) = \text{sen}\, x + \cos y$ no retângulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

17. Encontre o mínimo e o máximo valor absoluto da função f no disco definido pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$, sendo f definida por:

   (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$;

   (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

18. Determine os três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

19. Determine os três números positivos cujo produto é 8 e cuja soma é mínima.

20. Determine três números positivos cuja soma é 13 e tais que a soma dos seus quadrados é mínima.

21. Determine o ponto do plano definido pela equação $2x - y + z = 1$ mais próximo do ponto de coordenadas $(-4, 1, 3)$.

22. Considere a elipse definida pela equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$. Determine os pontos de ordenada mínima e de ordenada máxima na elipse.

23. Determine a distância do ponto de coordenadas $(1, 2, 0)$ ao cone definido pela equação $z^2 = x^2 + y^2$.

24. Determine o ponto pertencente ao plano definido pela equação $2x - y + 2z = 20$ que se encontra mais próximo da origem.

25. Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.

26. Mostre que um paralelepípedo de superfície 24 unidades quadradas, possui volume mínimo se for um cubo.