Cap. IV: Distribuições de Probabilidade Mais Utilizadas na Prática

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Licenciatura em Engenharia Informática
e
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Ano Letivo 2023/2024

Conteúdo

Neste capítulo pretende-se apresentar algumas distribuições de probabilidade mais conhecidas e mais utilizadas na prática, em problemas de modelação estocástica e/ou de inferência estatística.

Exemplos de algumas dessas distribuições são:

- Binomial (e Bernoulli, como um caso particular)
- Poisson
- Geométrica
- Uniforme
- Exponencial
- Normal ou Gaussiana

IV. 1. Distribuição Binomial, com parâmetros n e p

Definição

Considere que, numa experiência aleatória, ξ, um acontecimento S ocorre com probabilidade p, com $p \in]0,1[$.

Considere agora uma v.a., X, que representa o número de vezes que S ocorre em n repetições independentes de ξ. Tem-se que X é uma v.a. discreta, com contradomínio $C_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, e a sua função massa de probabilidade é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nestas condições, diz-se que a v.a. X segue a distribuição (ou lei) Binomial com parâmetros n e p, e abrevia-se por $X \sim Bin(n, p)$.

Nota: O acontecimento S é usualmente designado de “sucesso”.

Observações:

1) Se $X \sim Bin(n,p)$, então o valor médio e a variância são

$$E[X] = np \quad \text{e} \quad Var[X] = np(1-p).$$

2) A distribuição $Bin(n,p)$ também é a distribuição de uma v.a., Y, definida nas seguintes condições: *Suponha que numa população existe uma proporção $p \in]0,1[$ de indivíduos que tem uma certa característica A (e uma proporção $1-p$ não tem a característica). Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso, e* ***com reposição****, n indivíduos desta população e seja Y a v.a. que representa o número de indivíduos escolhidos que possuem a característica A.* Nestas condições, $Y \sim Bin(n,p)$.

3) Quando $n = 1$, a distribuição binomial é conhecida por *Bernoulli(p)*. Neste caso, o contradomínio é $C_X = \{0,1\}$ e a f.m.p. é dada por

$$X : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right. .$$

4) Se $X \sim Bin(n,p)$ então $X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$, em que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com lei *Bernoulli(p)*.

Exemplos/Exercícios: Em cada uma das alíneas seguintes, defina uma v.a. com distribuição Binomial que seja relevante para a resolução.

a) Em 10 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de saírem 2 coroas?

Exemplos/Exercícios: Em cada uma das alíneas seguintes, defina uma v.a. com distribuição Binomial que seja relevante para a resolução.

a) Em 10 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de saírem 2 coroas?

Resolução: Considere-se X a v.a. que representa o número de coroas obtidas nos 10 lançamentos da moeda. Tem-se que $X \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ e pretende-se calcular $P(X = 2)$. Temos então:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0.044$$

IV. 1. Distribuição Binomial, com parâmetros n e p

Exemplos/Exercícios: Em cada uma das alíneas seguintes, defina uma v.a. com distribuição Binomial que seja relevante para a resolução.

a) Em 10 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de saírem 2 coroas?

Resolução: Considere-se X a v.a. que representa o número de coroas obtidas nos 10 lançamentos da moeda. Tem-se que $X \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ e pretende-se calcular $P(X=2)$. Temos então:

$$P(X=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0.044$$

Observações:

1) Se o pretendido fosse calcular a probabilidade de saírem 2 coroas e que estas ocorressem nos dois primeiros lançamentos da moeda, o resultado seria apenas $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0.001$.

2) Observe que o resultado seria o mesmo caso a experiência fosse efetuar 10 lançamentos consecutivos de um dado equilibrado e estivessemos interessados em calcular a probabilidade de saírem 2 faces par. [Porquê? (TPC)]

Exemplos/Exercícios:(continuação)

b) Uma urna contém 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Determine a probabilidade de ao extrair, **com reposição**, 3 bolas desta urna, não sair qualquer bola vermelha?

Resolução: Considere-se Y a v.a. que representa o número de bolas vermelhas obtidas nas 3 extrações. Tem-se que

$$Y \sim Bin\left(3, \frac{3}{5}\right)$$

e pretende-se calcular $P(Y=0)$. Temos então:

$$P(Y=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{0}\left(1-\frac{3}{5}\right)^{3-0} = 0.064$$

Observe que, **caso a extração fosse efetuada sem reposição**, a probabilidade pedida seria nula. Note que já não se poderia usar o modelo Binomial para trabalhar este problema. [Porquê? (TPC)]

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Historicamente, a distribuição de Poisson surge como sendo a distribuição limite de uma Binomial, em que os parâmetros n e p satisfazem certas condições. Vejamos então como surgiu esta distribuição.

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Historicamente, a distribuição de Poisson surge como sendo a distribuição limite de uma Binomial, em que os parâmetros n e p satisfazem certas condições. Vejamos então como surgiu esta distribuição.

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.'s tais que $X_n \sim Bin(n, p_n)$ e em que os parâmetros n e p_n satisfazem a seguinte condição

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda,$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Note-se que, nestas condições, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$$

e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p_n^{k-1} (1-p_n)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p_n}{1-p_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{k}.$$

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Historicamente, a distribuição de Poisson surge como sendo a distribuição limite de uma Binomial, em que os parâmetros n e p satisfazem certas condições. Vejamos então como surgiu esta distribuição.

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.'s tais que $X_n \sim Bin(n, p_n)$ e em que os parâmetros n e p_n satisfazem a seguinte condição

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda,$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Note-se que, nestas condições, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$$

e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p_n^{k-1} (1-p_n)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p_n}{1-p_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{k}.$$

Isto permite-nos concluir que, quando n é grande, a função massa de probabilidade da v.a. X_n comporta-se como a de uma v.a. discreta, Y, de contradomínio $\mathbb{N}_0$, e tal que

$$P(Y = k) = \frac{\lambda}{k} P(Y = k-1), \; k \in \mathbb{N}.$$

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Trabalhando esta última igualdade, concluimos que

$$P(Y=k)=\frac{\lambda}{k}P(Y=k-1)=\frac{\lambda^2}{k(k-1)}P(Y=k-2)=\ldots=\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0).$$

Como $C_Y=\mathbb{N}_0$, temos

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)\Leftrightarrow 1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0)\underset{(*)}{\Leftrightarrow}1=P(Y=0)e^{\lambda}\Leftrightarrow P(Y=0)=e^{-\lambda}.$$

Trabalhando esta última igualdade, concluimos que

$$P(Y=k)=\frac{\lambda}{k}P(Y=k-1)=\frac{\lambda^2}{k(k-1)}P(Y=k-2)=\ldots=\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0).$$

Como $C_Y=\mathbb{N}_0$, temos

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)\Leftrightarrow 1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0)\underset{(*)}{\Leftrightarrow}1=P(Y=0)e^{\lambda}\Leftrightarrow P(Y=0)=e^{-\lambda}.$$

Concluimos assim que a função massa de probabilidade de Y é

$$P(Y=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{1}$$

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Trabalhando esta última igualdade, concluimos que

$$P(Y=k)=\frac{\lambda}{k}P(Y=k-1)=\frac{\lambda^2}{k(k-1)}P(Y=k-2)=\ldots=\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0).$$

Como $C_Y=\mathbb{N}_0$, temos

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)\Leftrightarrow 1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0)\underset{(*)}{\Leftrightarrow}1=P(Y=0)e^{\lambda}\Leftrightarrow P(Y=0)=e^{-\lambda}.$$

Concluimos assim que a função massa de probabilidade de Y é

$$P(Y=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Definição

Seja Y uma v.a. discreta e $\lambda\in\mathbb{R}^+$.
Diz-se que Y *segue a distribuição de Poisson com parâmetro* λ, e abrevia-se por $Y\sim Poisson(\lambda)$, se o seu contradomínio é $\mathbb{N}_0$ e a sua função massa de probabilidade é dada por (1).

Observações:

1) Na prática, a distribuição de Poisson é adequada para modelar o número de ocorrências de um fenómeno raro (i.e. um fenómeno que tem baixa probabilidade de ocorrência) quando não limitamos o número de repetições da experiência aleatória.
Em particular, a função massa de probabilidade da distribuição de Poisson é usada para obter um valor aproximado da função massa de probabilidade de uma v.a. $Z \sim Bin(n,p)$ quando n é grande e p é pequeno. O parâmetro λ a utilizar na aproximação será igual a $n \times p$.

2) Se $Y \sim Poisson(\lambda)$ então o valor médio e a variância são

$$E[Y] = \lambda \quad \text{e} \quad Var[Y] = \lambda,$$

respetivamente.

3) Da expansão em série de Taylor da função e^x, em torno de zero, resulta a seguinte igualdada usada em $(*)$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}.$$

IV. 2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Exemplo/Exercício: É editado um manual de probabilidades com uma tiragem de 100000 exemplares. A probabilidade de cada manual ter defeito na encadernação é de 10^{-4}. Calcule a probabilidade de, nesta tiragem de 100000, haver:

i) exatamente 5 manuais com defeito;
ii) no máximo, 2 manuais com defeito;

Indique o valor exacto (recorrendo à Binomial) e o valor aproximado (recorrendo à Poisson) de cada uma das probabilidades pedidas.

Solução: Exato $[X \sim Bin(100000, 10^{-4})]$ e Aproximado $[Y \sim Poisson(10)]$

i) Valor exato: $P(X=5) = \binom{100000}{5}(10^{-4})^5(1-10^{-4})^{100000-5} = 0.03782949$

Valor aproximado: $P(Y=5) = e^{-10}\frac{10^5}{5!} = 0.03783327$

ii) Valor exato:

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(X=k) = \sum_{k=0}^{2} \binom{100000}{k}(10^{-4})^k(1-10^{-4})^{100000-k} = 0.002768488$$

Valor aproximado:

$$P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{2} e^{-10}\frac{10^k}{k!} = 0.002769396$$

Nota: O valor exato foi obtido usando o software estatístico R.

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por "sucesso", ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre "insucesso" com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer "sucesso" pela primeira vez.

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por “sucesso”, ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre “insucesso” com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer “sucesso” pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por "sucesso", ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre "insucesso" com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer "sucesso" pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Para determinar a função massa de probabilidade de T, considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_i:"ocorreu <u>insucesso</u> na i-ésima vez que se efetuou a experiência", $i = 1, 2, \ldots$

Note que $P(A_i) = 1 - p$ e $P(\overline{A_i}) = p$, para todo o i.

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por “sucesso”, ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre “insucesso” com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer “sucesso” pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Para determinar a função massa de probabilidade de T, considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_i:“ocorreu insucesso na i-ésima vez que se efetuou a experiência”, $i = 1, 2, \ldots$

Note que $P(A_i) = 1 - p$ e $P(\overline{A_i}) = p$, para todo o i.
Usando estes acontecimentos, podemos calcular alguns dos valores da função massa de probabilidade de T:
$P(T = 1) = P(\overline{A_1}) = p$;

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por "sucesso", ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre "insucesso" com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer "sucesso" pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Para determinar a função massa de probabilidade de T, considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_i:"ocorreu <u>insucesso</u> na i-ésima vez que se efetuou a experiência", $i = 1, 2, \ldots$

Note que $P(A_i) = 1 - p$ e $P(\overline{A_i}) = p$, para todo o i.

Usando estes acontecimentos, podemos calcular alguns dos valores da função massa de probabilidade de T:

$P(T = 1) = P(\overline{A_1}) = p$;

$P(T = 2) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) \times P(\overline{A_2}) = (1 - p)p$;

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por "sucesso", ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre "insucesso" com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer "sucesso" pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Para determinar a função massa de probabilidade de T, considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_i:"ocorreu <u>insucesso</u> na i-ésima vez que se efetuou a experiência", $i = 1, 2, \ldots$

Note que $P(A_i) = 1 - p$ e $P(\overline{A_i}) = p$, para todo o i.
Usando estes acontecimentos, podemos calcular alguns dos valores da função massa de probabilidade de T:

$P(T = 1) = P(\overline{A_1}) = p$;
$P(T = 2) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) \times P(\overline{A_2}) = (1 - p)p$;
$P(T = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) = (1 - p)^2 p$;
etc.

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

De uma forma geral, obtém-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T = k) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}) = p(1-p)^{k-1}.$$

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

De uma forma geral, obtém-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T = k) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}) = p(1-p)^{k-1}.$$

Definição

Sejam T uma v.a. discreta e $p \in]0,1[$.
Diz-se que T *segue a distribuição Geométrica com parâmetro* p, e abrevia-se por $T \sim Geo(p)$, se o seu contradomínio é $\mathbb{N}$ e a sua função massa de probabibilidade é dada por

$$P(T = k) = p(1-p)^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}.$$

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Observações: Se $T \sim Geo(p)$,
1) Facilmente se verifica que

$$P(T > k) = (1 - p)^k,$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$;

Observações: Se $T \sim Geo(p)$,
1) Facilmente se verifica que

$$P(T > k) = (1 - p)^k,$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$;

2) [TPC] T tem a conhecida propriedade de falta de memória

$$P(T = k + n | T > k) = P(T = n),$$

para todo o $k, n \in \mathbb{N}$;

IV. 3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Observações: Se $T \sim Geo(p)$,
1) Facilmente se verifica que

$$P(T > k) = (1-p)^k,$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$;

2) [TPC] T tem a conhecida propriedade de falta de memória

$$P(T = k + n | T > k) = P(T = n),$$

para todo o $k, n \in \mathbb{N}$;

3) O valor médio e a variância são

$$E[T] = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad Var[T] = \frac{1-p}{p^2},$$

respetivamente.

Exemplo/Exercício: Imagine que um bêbado tem n chaves na sua carteira e que, ao chegar a casa, não consegue identificar a única chave que abre a porta. Como está tão bêbado, de cada vez que ele tenta uma chave que não é a certa, não consegue colocá-la de lado pelo que, na tentativa seguinte, volta a ter n chaves disponíveis para a escolha. Calcule a probabilidade de ele:

i) acertar à primeira;

ii) acertar pela primeira vez na terceira tentativa;

iii) errar as primeiras 5 tentativas;

iv) acertar pela primeira vez na oitava tentativa, sabendo que errou nas primeiras 5.

Sugestão: Identificar uma v.a. relevante para o problema que tenha a distribuição Geométrica, com parâmetro $\frac{1}{n}$.

IV. 4. Distribuição Uniforme no intervalo $[a,\ b]$

Considere uma v.a. contínua, X, cuja função densidade de probabilidade é constante num dado intervalo limitado $[a, b]$ e é nula fora desse intervalo. Nestas condições, a probabilidade de X assumir valores num dado sub-intervalo de $[a, b]$ será a mesma para um qualquer outro sub-intervalo de igual amplitude.

IV. 4. Distribuição Uniforme no intervalo $[a,\, b]$

Considere uma v.a. contínua, X, cuja função densidade de probabilidade é constante num dado intervalo limitado $[a, b]$ e é nula fora desse intervalo. Nestas condições, a probabilidade de X assumir valores num dado sub-intervalo de $[a, b]$ será a mesma para um qualquer outro sub-intervalo de igual amplitude.

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, X, segue a distribuição Uniforme no intervalo $[a,\, b]$, abrevia-se por $X \sim U([a,\, b])$, se a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se \quad a \leq x \leq b \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases} .$$

IV. 4. Distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$

Considere uma v.a. contínua, X, cuja função densidade de probabilidade é constante num dado intervalo limitado $[a, b]$ e é nula fora desse intervalo. Nestas condições, a probabilidade de X assumir valores num dado sub-intervalo de $[a, b]$ será a mesma para um qualquer outro sub-intervalo de igual amplitude.

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, X, segue a distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, abrevia-se por $X \sim U([a, b])$, se a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se \quad a \leq x \leq b \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases} .$$

Observe que, de facto, esta distribuição atribuí igual probabilidade a intervalos com a mesma amplitude e contidos em $[a, b]$: se $]c, d[\subseteq [a, b]$ tem-se que

$$P(X \in]c, d[\,) = \int_c^d f(x)dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{amplitude de }]c, d[}{b-a}.$$

Observações:

1) Se $X \sim U([a, b])$, então a função de distribuição de X é dada por [TPC]

$$F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se & c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & se & a \leq c \leq b \\ 1 & se & c > b. \end{cases} \;;$$

IV. 4. Distribuição Uniforme no intervalo $[a,\, b]$

Observações:

1) Se $X \sim U([a,\, b])$, então a função de distribuição de X é dada por [TPC]

$$F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se & c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & se & a \leq c \leq b \\ 1 & se & c > b. \end{cases} ;$$

2) Se $X \sim U([a,\, b])$, então o valor médio e a variância são [TPC],

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

IV. 4. Distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$

Observações:

1) Se $X \sim U([a, b])$, então a função de distribuição de X é dada por [TPC]

$$F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a \leq c \leq b \\ 1 & se \quad c > b. \end{cases} ;$$

2) Se $X \sim U([a, b])$, então o valor médio e a variância são [TPC],

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3) Existe ainda a distribuição Uniforme discreta que é utilizada quando se escolhe, ao acaso, um elemento de um conjunto **finito** em que os diferentes elementos têm igual probabilidade de serem escolhidos. Temos então a seguinte definição: *Seja U um subconjunto real **finito**, com n elementos. Diz-se que Z segue a distribuição Uniforme no conjunto U, abrevia-se por $Z \sim Uniforme(U)$, se a sua f.m.p. é dada por*

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad a \in U \\ 0 & \text{se} \quad \text{c.c.} \end{cases} .$$

Não confundir a Uniforme discreta com a Uniforme contínua!

IV. 5. Distribuição Exponencial, com parâmetro λ

A distribuição Exponencial é muito utilizada em estudos que envolvam tempos de espera até à ocorrência de um determinado acontecimento ou intervalos de tempo entre acontecimentos. Tem um papel muito importante no estudo de certos processos estocásticos, com destaque nas *Filas de Espera Markovianas*.

IV. 5. Distribuição Exponencial, com parâmetro λ

A distribuição Exponencial é muito utilizada em estudos que envolvam tempos de espera até à ocorrência de um determinado acontecimento ou intervalos de tempo entre acontecimentos. Tem um papel muito importante no estudo de certos processos estocásticos, com destaque nas *Filas de Espera Markovianas*.

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, T, segue a distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$, se a função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

IV. 5. Distribuição Exponencial, com parâmetro λ

Observações: Se $T \sim Exp(\lambda)$ então [TPC]:

1) a função de distribuição de T é dada por

$$F(c) = P(T \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases} \; ;$$

IV. 5. Distribuição Exponencial, com parâmetro λ

Observações: Se $T \sim Exp(\lambda)$ então [TPC]:

1) a função de distribuição de T é dada por

$$F(c) = P(T \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases} ;$$

2) T tem a conhecida propriedade de falta de memória, i.e.,

$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x),$$

para quaisquer $t > 0$, $x > 0$;

IV. 5. Distribuição Exponencial, com parâmetro λ

Observações: Se $T \sim Exp(\lambda)$ então [TPC]:

1) a função de distribuição de T é dada por

$$F(c) = P(T \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases} \; ;$$

2) T tem a conhecida propriedade de falta de memória, i.e.,

$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x),$$

para quaisquer $t > 0$, $x > 0$;

3) o valor médio e a variância são

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var[T] = \frac{1}{\lambda^2},$$

respetivamente.

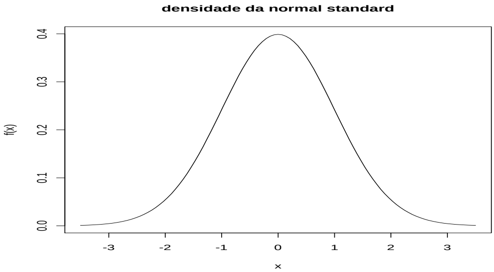
Nota: Provar 1) e 2) consta da Folha Prática 2. Provar 3) é simples, mas exige integração por partes.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é a mais importante das distribuições contínuas pois tem várias aplicações, com especial destaque para a inferência estatística.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é a mais importante das distribuições contínuas pois tem várias aplicações, com especial destaque para a inferência estatística.
O gráfico da função densidade de probabilidade de uma v.a. com esta distribuição tem a forma de sino e a função é simétrica relativamente ao parâmetro μ.
A título de exemplo, apresenta-se abaixo uma figura onde se pode ver o gráfico da função densidade de probabilidade da Normal, com parâmetros 0 e 1, também conhecida por *Normal standard*.



IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, X, segue a distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, abrevia-se por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Como já foi referido, no caso em que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, falamos em distribuição *Normal standard* ou distribuição *Normal centrada e reduzida* ou ainda distribuição *Normal padrão*.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, X, segue a distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, abrevia-se por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \; x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Como já foi referido, no caso em que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, falamos em distribuição *Normal standard* ou distribuição *Normal centrada e reduzida* ou ainda distribuição *Normal padrão*.

Note-se que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, a função descrita em (2) satisfaz

$$f(\mu + a) = f(\mu - a)$$

mostrando-se assim que é simétrica relativamente ao parâmetro μ. Em particular, a função densidade de probabilidade da Normal standard é uma função par (i.e., é simétrica relativamente à origem).

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Observações/Propriedades:

1) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então o valor médio e a variância são, respectivamente,

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad Var[X] = \sigma^2.$$

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Observações/Propriedades:

1) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então o valor médio e a variância são, respectivamente,

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad Var[X] = \sigma^2.$$

2) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Nota: A esta transformação que se efetuou à v.a. X chama-se *centrar e reduzir a variável*.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Observações/Propriedades:

1) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então o valor médio e a variância são, respectivamente,

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad Var[X] = \sigma^2.$$

2) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Nota: A esta transformação que se efetuou à v.a. X chama-se *centrar e reduzir a variável*.

3) Se $Z \sim N(0, 1)$ então, quaisquer que sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, tem-se

$$\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Observações/Propriedades: (continuação)

4) A função de distribuição de uma $N(\mu, \sigma^2)$ é, naturalmente, dada por

$$c \in \mathbb{R},\; F(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx.$$

Apesar da existência do integral, não é possível obter a expressão exata desta função. É, no entanto, possível obter aproximações numéricas! Para a Normal standard, tais aproximações estão disponíveis em variadas tabelas como, por exemplo, a que se encontra na página seguinte.

Há que fazer uma leitura atenta das tabelas que proliferam nos livros das mais variadas áreas, pois podem representar quantidades diferentes. Em particular, na tabela que vamos utilizar (na página seguinte), está disponível a

$P(0 < Z \leq c)$ para $c \in \mathbb{R}_0^+$, quando $Z \sim N(0,1)$.

A simetria da função densidade de probabilidade de Z permite depois facilmente obter a função de distribuição de Z para qualquer valor $c \in \mathbb{R}^-$.

Finalmente, para obter a função de distribuição de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ basta recorrer à propriedade 2) anterior, isto é, basta centrar e reduzir X.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Tabela da Distribuição Normal Reduzida

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Observações/Propriedades: (continuação)

5) Devido à simetria da função densidade de probabilidade da $N(0,1)$ é possível concluir que a respetiva função de distribuição, aqui denotada por $F_{N(0,1)}$, satisfaz a seguinte igualdade:

$$F_{N(0,1)}(-c) = 1 - F_{N(0,1)}(c), \ c \in \mathbb{R}.$$

Em particular, isto implica que é válida a seguinte relação entre o quantil de ordem p e o quantil de ordem $1-p$ da distribuição Normal standard: para todo o $0 < p < 1$, tem-se

$$\chi_p = -\chi_{1-p}.$$

Observações/Propriedades: (continuação)

5) Devido à simetria da função densidade de probabilidade da $N(0,1)$ é possível concluir que a respetiva função de distribuição, aqui denotada por $F_{N(0,1)}$, satisfaz a seguinte igualdade:

$$F_{N(0,1)}(-c) = 1 - F_{N(0,1)}(c), \ c \in \mathbb{R}.$$

Em particular, isto implica que é válida a seguinte relação entre o quantil de ordem p e o quantil de ordem $1-p$ da distribuição Normal standard: para todo o $0 < p < 1$, tem-se

$$\chi_p = -\chi_{1-p}.$$

6) A tabela aqui utilizada e a simetria da função densidade de probabilidade de uma v.a. $Z \sim N(0,1)$ permitem facilmente calcular $P(|Z| \leq b)$, $b \in \mathbb{R}^+$. Note que, neste caso,

$$P(|Z| \leq b) = 2P(0 < Z \leq b).$$

Este tipo de cálculos surge frequentemente em problemas de inferência estatística, nomeadamente na dedução de intervalos de confiança e de testes de hipóteses paramétricos.

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Observações/Propriedades: (continuação)

A distribuição normal tem ainda propriedades muito interessantes relativas a transformações lineares e à soma de v.a.'s independentes.

7) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, quaisquer que sejam as contantes reais $a \neq 0$ e b,

$$aX + b \sim N(a\mu + b\,,\, a^2\sigma^2).$$

Observações/Propriedades: (continuação)

A distribuição normal tem ainda propriedades muito interessantes relativas a transformações lineares e à soma de v.a.'s independentes.

7) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, quaisquer que sejam as contantes reais $a \neq 0$ e b,

$$aX + b \sim N(a\mu + b\,,\, a^2\sigma^2).$$

8) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes e tais que

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right),\ i = 1, \ldots, n.$$

Então:

i) A v.a. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ segue uma distribuição Normal, i.e.,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

ii) Quaisquer que sejam as constantes reais $a_1, \ldots, a_n$, não todas nulas, a v.a. $Y = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ segue uma distribuição Normal, i.e.,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2\right).$$

IV. 6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Nota: O uso destas últimas propriedades, permite-nos deduzir o seguinte resultado e que é muito útil em inferência estatística:

Resultado

Dada uma **amostra aleatória** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **proveniente da uma v.a.** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (i.e., $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e têm todas a mesma distribuição que X), a v.a. habitualmente designada por **média amostral**, i.e.,

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

é tal que

$$\overline{X}_n \sim N\left(\mu\,,\, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Este resultado é utilizado, por exemplo, na dedução de intervalos de confiança ou de testes de hipóteses que envolvam a estimação da média de uma população, relativamente à qual se assume que segue uma distribuição normal (com o parâmetro μ desconhecido).

Exercícios/Exemplos:

I) Um evento vai ser patrocinado por três entidades privadas. Cada um dos financiamentos é uma v.a. com distribuição Normal, respectivamente, $N(250, 2500)$, e $N(350, 3600)$, e os três financiamentos são independentes. Qual á a distribuição da v.a. X que representa o valor do patrocínio total privado?

Como o evento é de interesse público, o estado contribuí com metade do patrocínio privado. Qual é a distribuição do patrocínio estatal, E, a e do patrocínio total, T?

Exercícios/Exemplos:

I) Um evento vai ser patrocinado por três entidades privadas. Cada um dos financiamentos é uma v.a. com distribuição Normal, respectivamente, $N(250, 2500)$, e $N(350, 3600)$, e os três financiamentos são independentes. Qual á a distribuição da v.a. X que representa o valor do patrocínio total privado?

Como o evento é de interesse público, o estado contribuí com metade do patrocínio privado. Qual é a distribuição do patrocínio estatal, E, a e do patrocínio total, T?

Resolução: Observe que $X = F_1+F_2+F_3$, em que F_i é a v.a. que representa o financiamento da i-ésima entidade privada. Como F_1, F_2 e F_3 são independentes e todas seguem uma distribuição Normal, usando a propriedade **8)** anterior, tem-se que

$$X \sim N(250 + 300 + 350\,,\ 2500 + 2500 + 3600) = N(900\,,\ 8600).$$

Sobre E e T: observe que $E = \frac{1}{2}X$ e que $T = E + X = \frac{3}{2}X$. Usando a propriedade **7)** anterior, tem-se que

$$E \sim N\left(\frac{900}{2}, \frac{8600}{4}\right) = N(450, 2150) \text{ e } T \sim N\left(\frac{3 \times 900}{2}, \frac{9 \times 8600}{4}\right) = N(1350, 19350).$$

Exercícios/Exemplos: (cont.)

II) Uma empresa tem dois vendedores, A e B, cujos montantes diários de vendas são v.a.'s independentes e que seguem uma distribuição Normal, com parâmetros, respectivamente, $\mu_A = 100$ e $\sigma_A = 10$, $\mu_B = 80$ e $\sigma_B = 3$. Qual a probabilidade do vendedor B vender mais do que o A?

Exercícios/Exemplos: (cont.)

II) Uma empresa tem dois vendedores, A e B, cujos montantes diários de vendas são v.a.'s independentes e que seguem uma distribuição Normal, com parâmetros, respectivamente, $\mu_A = 100$ e $\sigma_A = 10$, $\mu_B = 80$ e $\sigma_B = 3$. Qual a probabilidade do vendedor B vender mais do que o A?

Resolução: Temos duas v.a.'s,

$$A \sim N(100, 100) \text{ e } B \sim N(80, 9),$$

que são independentes e pretende-se determinar $P(B > A)$, ou seja, determinar $P(B - A > 0)$. Pela propriedade **8)** anterior, tem-se

$$B - A \sim N(80 - 100, 9 + 100) = N(-20, 109).$$

Recorrendo às propriedades **2)** e **4)** e à tabela da distribuição normal standard (disponível atrás), tem-se:

$$\begin{aligned} P(B - A > 0) &= 1 - P(B - A \leq 0) = 1 - P\left(\frac{B - A - (-20)}{\sqrt{109}} \leq \frac{0 - (-20)}{\sqrt{109}}\right) \\ &= 1 - F_{N(0,1)}(1.92) \\ &= 1 - (0.5 + 0.4726) = 0.0274 \end{aligned}$$