

4. Sintaxe do Cálculo de Predicados

4.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

- a) Explícite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo L .
- b) Indique quais das seguintes seqüências de símbolos constituem termos de tipo L :
 - i) 0 . ii) $f(0)$. iii) $f(1)$.
 - iv) $g(f(x_1, x_0), x_0)$. v) $g(x_0, f(x_1))$. vi) $R(x_0, x_1)$.
- c) Explícite a definição por recursão estrutural em termos de tipo L da função VAR (que a cada termo de tipo L faz corresponder o conjunto de variáveis que nele ocorrem).
- d) Para cada um dos termos t que se seguem, calcule $\text{VAR}(t)$.
 - i) 0 . ii) $g(x_1, f(x_1))$.
 - iii) $g(x_1, x_2)$. iv) $g(x_1, g(x_2, x_3))$.
- e) Para cada um dos termos t da alínea anterior, calcule $\text{subt}(t)$.
- f) Para cada um dos termos t da alínea d), calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.
- g) Dê exemplos de termos t , t_1 e t_2 de tipo L tais que:
 - i) $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] = (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$. ii) $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] \neq (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$.
- h) Sejam t_1 e t_2 termos de tipo L tais que $x_1 \notin \text{VAR}(t_2)$ e $x_2 \notin \text{VAR}(t_1)$. Mostre que, para todo o termo t de tipo L , $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] = (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$.

4.2 Seja $L = (\{0, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

- a) Dê exemplos de termos de tipo L . Justifique.
- b) Dê exemplos de fórmulas atômicas de tipo L . Justifique.
- c) Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma fórmula de tipo L .
 - i) $x_2 - 0 < x_1$.
 - ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.
 - iii) $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$.
 - iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$.
- d) Para cada fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.
- e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).
- f) A proposição “Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\text{LIV}(\varphi) \cap \text{LIG}(\varphi) = \emptyset$ ” é verdadeira?

4.3 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 4.2 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

4.4 Considere o tipo de linguagem L do exercício 4.2. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

- a) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $x_1 < x_2$.
- b) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.
- c) A variável x_1 está livre para o termo 0 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.
- d) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\forall x_1 \exists x_2(x_1 < x_2)$.
- e) A variável x_2 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.
- f) A variável x_1 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.
- g) A variável x_2 está livre para o termo x_1 em $\exists x_2(x_1 < x_2) \vee \exists x_1(x_1 < x_2)$.
- h) Toda a variável está livre para o termo $x_1 - x_3$ em $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

4.5 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

- a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.
- b) Quem quer vai, quem não quer manda.
- c) Nem todos os pássaros voam.
- d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.
- e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.
- f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.
- g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.
- h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.
- i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.