



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise Matemática para Engenharia

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

2023/2024



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

1. Noções Topológicas em \mathbb{R}^n

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

1.1 O ESPAÇO \mathbb{R}^n

Relembre que:

$$\blacktriangleright \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

é o conjunto dos n -uplos ordenados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, onde x_1, x_2, \cdots, x_n são números reais.

\blacktriangleright O conjunto \mathbb{R}^n munido das operações $+$ (adição),

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

e $*$ (multiplicação por um escalar),¹

$$\alpha * \mathbf{x} = \alpha * (x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

é um **espaço vetorial real**.

¹Por simplificação, usaremos $\alpha \mathbf{x}$ para denotar $\alpha * \mathbf{x}$.

1.2 PRODUTO INTERNO, NORMA E DISTÂNCIA

Definição Uma função $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se um **produto interno** se para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x > 0$;
2. $x \cdot y = y \cdot x$;
3. $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$;
4. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Exemplo: Produto interno canónico.

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Definição Uma função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **norma** se para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$;
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Exemplo: Norma euclidiana.

Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Definição Uma função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **distância** se para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exemplo:

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, a função

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

é uma distância.

Se nada for dito em contrário, iremos considerar sempre em \mathbb{R}^n a norma euclidiana e a distância associada a esta norma.

1.3 NOÇÕES TOPOLÓGICAS

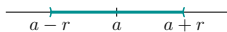
Definição Sejam $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **bola centrada em \mathbf{a} de raio r** ao conjunto

$$B(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r \right\}.$$

Exemplo:

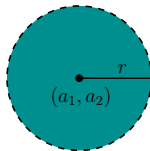
► Se $n = 1$, então

$$B(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r \right\}.$$



► Se $n = 2$ e $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, então

$$B(\mathbf{a}, r) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2 \right\}.$$



Definição Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que a é:

- ▶ **ponto interior** de U se $\exists \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \subseteq U$
- ▶ **ponto aderente** de U se $\forall \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$
- ▶ **ponto de fronteira** de U se for ponto aderente de U e de $\mathbb{R}^n \setminus U$, isto é, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset$$

- ▶ **ponto de acumulação** de U se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap U \neq \emptyset$$

- ▶ **ponto isolado** de U se pertencer a U e não for ponto de acumulação de U , isto é, se

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U = \{a\}$$

- ▶ Ao conjunto dos pontos **interiores** de U chama-se **interior** de U e representa-se por $\text{int } U$ ou $\overset{\circ}{U}$.
- ▶ Ao conjunto dos pontos **aderentes** de U chama-se **aderência** de U e representa-se por $\text{ad } U$ ou \overline{U} .
- ▶ Ao conjunto dos pontos de **fronteira** de U chama-se **fronteira** de U e representa-se por $\text{fr } U$ ou ∂U .
- ▶ Ao conjunto dos pontos de **acumulação** de U chama-se **derivado** de U e representa-se por U' .

Definição Um subconjunto U de \mathbb{R}^n diz-se:

- ▶ **aberto** se for igual ao seu interior;
- ▶ **fechado** se for igual à sua aderência;
- ▶ **limitado** se estiver contido em alguma bola.

Exemplo: Determine o interior, a aderência, a fronteira e o derivado de

$$A = [0, 1[\times [0, 1] \cup \{(1, \frac{6}{5})\}$$

$$\overset{\circ}{A} =]0, 1[\times]0, 1[$$

$$\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1] \cup \{(1, \frac{6}{5})\}$$

$$\partial A = [0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times [0, 1] \cup \{(1, \frac{6}{5})\}$$

$$A' = [0, 1] \times [0, 1]$$

