Lógica EI

Exame de Recurso — 26 de junho de 2018 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,5 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é tautologia, então $\varphi \vee \psi$ é tautologia.	□	□
2.	$p_0 \to \neg p_1, \neg p_0 \to p_1 \models p_0 \leftrightarrow \neg p_1$.	□	□
3.	Para quaisquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é semanticamente consistente e $\varphi \to \psi \in \Gamma$, então $\varphi \notin \Gamma$ ou $\neg\psi \notin \Gamma$.	□	□
4.	A fórmula $s(x_0) + x_1 < x_0 + x_1$ de tipo Arit é satisfazível.	□	□
5.	Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário Q, a fórmula $(\forall x_0\ \mathsf{Q}(x_0)) \to (\exists x_1\ \mathsf{Q}(x_1))$ é universalmente válida.	□	□

Grupo II

1. Considere o conjunto $X \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (1) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $p_i \in X$;

   (2) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\neg p_i \in X$;

   (3) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \in X$ e $\psi \in X$, então $\varphi \wedge \psi \in X$.

   (a) Sem justificar, dê exemplo de uma fórmula de X com pelo menos três ocorrências de conetivos.

   (b) Prove, por indução estrutural em X, que nenhum elemento de X é tautologia.

2. Indique, justificando, uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $\neg((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \perp) \to p_2))$.

3. Construa uma derivação em DNP que mostre que $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \vdash ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$.

4. Prove que, para quaisquer fórmulas φ, ψ e σ do Cálculo Proposicional e qualquer conjunto de fórmulas Γ do Cálculo Proposicional, se $\varphi \vee \sigma$ é um teorema de DNP e $\Gamma, \varphi \models \psi$, então $\Gamma \vdash \sigma \vee \psi$.

Grupo III

(Nas seguintes questões, exceto na 6(a), apresente cada resposta no espaço disponibilizado para o efeito.)

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{x}\}, \{\mathsf{Q}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{0}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{x}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$. Seja $E = (\mathbb{R}, \overline{})$ a estrutura de tipo L tal que:

$\overline{\mathsf{0}}$ é o número zero	$\overline{\mathsf{Q}}$ é o predicado "é racional" em $\mathbb{R}$
$\overline{\mathsf{x}}$ é a multiplicação em $\mathbb{R}$	$\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{R}$

1. Sem justificar, dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente duas ocorrências do símbolo x e quatro subtermos.

2. Sem justificar, dê exemplo de um termo t de tipo L tal que $x_1 \in VAR(t)$ e $\overline{t}_\alpha$ não depende da atribuição α em E.

3. Defina, por recursão estrutural, a função $f : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo t faz corresponder o número de ocorrências de constantes em t.

4. Seja α a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(x_i) = i - 2$. Indique, sem justificar, $\overline{((x_1 \mathsf{x} x_3) \mathsf{x} x_1)}_\alpha$.

5. Sem justificar, apresente uma fórmula de tipo L, verdadeira em E, que represente a seguinte afirmação: O produto de dois racionais positivos é um racional positivo.

6. Seja φ a fórmula $\forall x_0 \, \neg(x_0 \mathsf{x} x_0 < \mathsf{0})$.
   (a) Prove que φ é verdadeira em E.
   (b) Indique, sem justificar, uma estrutura E' de tipo L que seja diferente de E apenas na interpretação de algum dos símbolos de função de L e tal que φ não seja verdadeira em E'.

Cotações

I	II	III
5	4,5+2,5+2+1,5	0,5+0,5+1+0,5+0,5+1,5

Lógica EI

Exame de recurso 2017/2018 26/junho

Grupo I

1. F

Consideremos $\varphi = \psi = \bot$. Temos que $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ mas $\not\models \varphi \vee \psi$.

2. V

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \to \neg p_1$	$\neg p_0 \to p_1$	$p_0 \leftrightarrow \neg p_1$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Pela tabela sabemos que se v é uma valoração tal que $v(p_0 \to \neg p_1) = v(\neg p_0 \to p_1) = 1$, então $v(p_0 \leftrightarrow \neg p_1) = 1$ (2ª e 3ª linhas).

Logo, $p_0 \to \neg p_1, \neg p_0 \to p_1 \models p_0 \leftrightarrow \neg p_1$.

3. V

Admitamos que Γ, φ e ψ são tais que Γ é consistente e $\varphi \to \psi \in \Gamma$. Então, existe pelo menos uma valoração v tal que v sat. Γ, ou seja, tal que $v(\sigma) = 1$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Se $\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$, teríamos $v(\varphi \to \psi) = 1$, $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$, o que é impossível. Como não podemos ter $(\varphi \in \Gamma \wedge \neg\psi \in \Gamma)$, segue-se que $\neg\varphi \notin \Gamma$ ou $\neg\psi \notin \Gamma$.

4. V

Consideremos a estrutura $E = (\mathbb{N}_0, \tilde{\ })$ exatamente igual a NATS exceto na interpretação do símbolo de relação $<$, que é interpretado como

$$\tilde{<} = \text{relação "maior do que"}.$$

Seja $\alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_0$ a atribuição em E dada por $\alpha(x_i) = i$ $(i \in \mathbb{N}_0)$. Então,

$$\overline{s(x_0) + x_1 < x_0 + x_1}\,[\alpha] = 1 \text{ se e só se } \left(\overline{s(x_0)+x_1}\,[\alpha], \overline{x_0 + x_1}\,[\alpha]\right) \in \tilde{<}$$

se e só se $\alpha(x_0)+1+\alpha(x_1)$ é maior do que $\alpha(x_0)+\alpha(x_1)$, o que é verdade.

Assim, $\overline{s(x_0)+x_1 < x_0+x_1}\,\alpha = 1$. Logo, (E,α) sat. $s(x_0)+x_1<x_0+x_1$ e, portanto, $s(x_0)+x_1 < x_0+x_1$ é satisfazível.

5. V

Sejam $E = (D, \overline{\ })$ uma estrutura de tipo L e α uma atribuição em E. Temos que

$\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ sse $\overline{\forall x_0\, Q(x_0)}\,\alpha = 0$ ou $\overline{\exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ sse Existe $d \in D$ t.q. $\overline{Q(x_0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 0$ ou Existe $d \in D$ t.q. $\overline{Q(x_1)}\,\alpha\binom{d}{x_1} = 1$ sse Existe $d \in D$ t.q. $d \notin \overline{Q}$ ou Existe $d \in D$ t.q. $d \in \overline{Q}$, o que é obviamente verdade. Portanto, $\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$.

Assim, $\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ para toda a atribuição α em E, donde $\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)$ é verdadeira em E. Sendo E uma estrutura de tipo L arbitrária, a fórmula dada é universalmente válida.

Grupo II.

1. (a) $(p_0 \wedge \neg p_1) \wedge p_2 \in X$ e tem três ocorrências de conectivos

(b) Seja $P(\varphi)$ a propriedade "φ não é tautologia" sobre os elementos φ de X.

(i) É óbvio que p_i não é uma tautologia, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. De facto, se considerarmos a valoração v que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais, segue-se que $v(p_i) = 0$ e p_i não é tautologia. Logo,

$$P(p_i), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Sejam $i \in \mathbb{N}_0$ e v' a valoração que atribui o valor lógico 1 a todas as variáveis proposicionais. Temos que $v'(\neg p_i) = 0$, pelo que $\neg p_i$ não é uma tautologia. Logo, $P(\neg p_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sejam $\varphi, \psi \in X$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$. Então, φ não é uma tautologia e ψ não é tautologia. Existe, pois, uma valoração v'' tal que $v''(\varphi) = 0$. Note-se que $v''(\varphi \wedge \psi) = 0$, pelo que $\varphi \wedge \psi$ não é uma tautologia, ou seja, $P(\varphi \wedge \psi)$.

Por (i), (ii) e (iii), pelo Princípio de Indução Estrutural para X, $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in X$.

2.

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_1 \to \bot$	$(p_1 \to \bot) \to p_2$	$(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \bot) \to p_2)$	$\neg ((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \bot) \to p_2))$	
1	1	1	0	1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	1	1	0	1	←
1	0	0	0	0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	0	1	1	0	
0	1	0	1	1	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	1	1	0	
0	0	0	1	1	1	0	0	1	←

Seja $\varphi = \neg((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \bot) \to p_2))$. Temos que

$\varphi \Leftrightarrow (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$, sendo esta fórmula uma FND.

4. Admitamos que $\vdash \varphi \vee \sigma$ e que $T, \varphi \vDash \psi$. Pelo Teorema da Completude, $T, \varphi \vdash \psi$. Sabemos, então, que existe uma derivação D_1 em DNP de conclusão $\varphi \vee \sigma$ sem hipóteses não canceladas e uma derivação D_2 em DNP de conclusão ψ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \subseteq T \cup \{\varphi\}$.

Assim,

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi \vee \sigma\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(1)}\\ D_2\\ \psi\end{array}}{\sigma \vee \psi} \qquad \dfrac{\cancel{\sigma}^{(1)}}{\sigma \vee \psi}}{\sigma \vee \psi}\ \vee E^{(1)}$$

é uma derivação de conclusão $\sigma \vee \psi$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \setminus \{\varphi\}$. Logo, é uma derivação de $\sigma \vee \psi$ a partir de T. Portanto,

$$T \vdash \sigma \vee \psi.$$

[RESOLUÇÃO ALTERNATIVA : Admitamos que $\vdash \varphi \vee \sigma$ e que $T, \varphi \vDash \psi$. Pelo Teorema da Correção, $\vDash \varphi \vee \sigma$. Vejamos que $T \vdash \sigma \vee \psi$.
Seja v uma valoração tal que v sat. T. Temos dois casos possíveis:

(a) $v(\varphi) = 1$
(b) $v(\varphi) = 0$

CASO (a) : Se $v(\varphi) = 1$, como v sat. T, segue-se que v sat. $T \cup \{\varphi\}$.

Dado que $T, \varphi \vDash \psi$, temos que $v(\psi) = 1$ e, por conseguinte $v(\sigma \vee \psi) = 1$.

CASO (b) : Se $v(\varphi) = 0$, então, porque $\vDash \varphi \vee \sigma$, temos que $v(\varphi \vee \sigma) = 1$ e, por isso, $v(\sigma) = 1$. Logo, $v(\sigma \vee \psi) = 1$.

Assim, em ambos os casos, $v(\sigma \vee \psi) = 1$. Portanto, se v é uma valoração tal que v sat. T, então $v(\sigma \vee \psi) = 1$, pelo que $T \vDash \sigma \vee \psi$ e, pelo Teorema da Completude, $T \vdash \sigma \vee \psi$.

Grupo III

1. $(x_0 \times x_1) \times x_0$

(subtermos: x_0, x_1, $x_0 \times x_1$, $(x_0 \times x_1) \times x_0$)

2. Seja $t = x_1 \times 0$.

$x_1 \in VAR(t) = \{x_1\}$ e, para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$,

$$\overline{x_1 \times 0}\,\alpha = \alpha(x_1)\,\overline{\times}\,\overline{0} = \alpha(x_1) \times 0 = 0.$$

3. $f : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

(1) $f(0) = 1$
(2) $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$
(3) $f(t_1 \times t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

4. $\alpha(x_1) = 1-2 = -1$
$\alpha(x_3) = 3-2 = 1$

$$\overline{((x_1 \times x_3) \times x_1)}\,\alpha = (-1) \times 1 \times (-1) = 1.$$

5. $$\forall x_1 \forall x_2 \left(\left(\left(\left(Q(x_1) \wedge Q(x_2) \right) \wedge 0 < x_1 \right) \wedge 0 < x_2 \right) \to \left(Q(x_1 \times x_2) \wedge 0 < x_1 \times x_2 \right) \right).$$

6.
(a) Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}$. Temos que

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse $\overline{\forall x_0 \neg (x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha = 1$
sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $\overline{\neg (x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $\overline{(x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 0$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $(d^2, 0) \notin \overline{<}$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $d^2 \geq 0$, o que é verdade.

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 1$. Assim, $\overline{\varphi}\alpha = 1$ para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$, pelo que φ é verdadeira em $\mathcal{E}$.

(b) Consideremos $\mathcal{E}' = (\mathbb{R}, \tilde{\ })$ igual a $\mathcal{E}$ exceto na interpretação de 0 que é $\tilde{0}$: o número 10.

Dada uma atribuição α em $\mathcal{E}'$,

$$\overline{\varphi}\alpha = 1 \text{ sse Para todo } d \in \mathbb{R} \quad (d^2, 10) \notin \tilde{<}$$
$$\text{sse Para todo } d \in \mathbb{R} \quad d^2 \geq 10,$$ o que não é verdade.

De facto, $d = 2 \in \mathbb{R}$ e $d^2 = 4 \not\geq 10$.

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 0$ e φ não é verdadeira em $\mathcal{E}'$.