LÓGICA

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática
Univ. Minho

2º semestre de 2023/2024

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) símbolos designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto numerável $\mathcal{V}^{CP}$;
- os símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ e $\perp$, designados conetivos (proposicionais);
- dois símbolos auxiliares (e).

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o subconjunto de $(\mathcal{A}^{CP})^*$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

- $p_j \in \mathcal{F}^{CP}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}_0$;
- $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;
- se $\varphi,\ \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- se $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ designam-se fórmulas proposicionais ou fórmulas do Cálculo Proposicional.

As regras que definem $\mathcal{F}^{CP}$ poderiam ser representadas pelas seguintes árvores:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\,p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\,\perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\vee$; $\quad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\wedge$;
  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\rightarrow$; $\quad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\leftrightarrow$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\neg$.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$ e $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((p_2(\neg\wedge)\bot) \to (\neg p_4)) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem apenas para clarificar a leitura, mas para simplificar a escrita retiram-se os parêntesis exteriores e, interpretando os conetivos como operações em $\mathcal{F}^{CP}$, convenciona-se que a prioridade de aplicação dos conetivos a fórmulas é a seguinte:

1. $\neg$,
2. $\vee$ e $\wedge$,
3. $\to$ e $\leftrightarrow$.

Então $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4))$.
E o que representa $\neg p_2 \wedge \bot \to \neg p_4$?

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja P uma propriedade relativa aos elementos de $\mathcal{F}^{CP}$.
Se

1. para qualquer $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p)$,
2. $P(\bot)$,
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \to \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$,
   e) $P(\neg\varphi)$,

então $P(\varphi)$, para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ apresentada anteriormente é determinista.

Demonstração

A demonstração efetua-se mostrando que cada fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação, o que requer a utilização do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$.

Definição

Uma subfórmula de uma fórmula φ é um sub-objeto de φ.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência numerável de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ operações de aridade 2 e $\overline{f_\neg}$ uma operação de aridade 1 em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \to Y$ tal que:

1. para $i \geq 0$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$ e
   e) $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi))$.

Exemplo

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula proposicional ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que a função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é tal que :

1. para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p) = \{p\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$ e
   - e) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$.

Tal definição é uma definição da função *var* por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Definição

Sejam $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$. A função

$$\begin{array}{rccc} \_[\psi/p_i] : & \mathcal{F}^{CP} & \rightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ é a fórmula obtida de φ pela substituição de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por:

1. Para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se} \quad n = i \\ p_n & \text{se} \quad n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $(\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \Box \varphi_2 [\psi/p_i]).$$

Exemplo

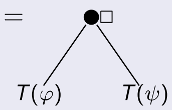
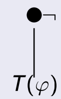
Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = \neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp)$ é a fórmula

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp))[\psi/p_1] \\
&= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \perp)[\psi/p_1] \\
&= \neg p_2[\psi/p_1] \wedge (p_1[\psi/p_1] \vee \perp[\psi/p_1]) \\
&= \neg p_2 \wedge (\psi \vee \perp) \\
&= \neg p_2 \wedge ((p_0 \to p_2) \vee \perp).
\end{aligned}$$

Exercício: Defina por recursão estrutural a função que a cada fórmula proposicional associa o conjunto das suas subfórmulas.

Exemplo

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p) = \bullet p$;
2. $T(\perp) = \bullet\perp$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$,
   $T(\varphi \square \psi) =$  ;
4. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $T(\neg\varphi) =$  .

Valores lógicos

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conetivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto:

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conetivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Valorações

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por recursão estrutural por: para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. $v(\perp) = 0$;
2. $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
3. $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
4. $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
5. $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
6. $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Observação
Na definição anterior de valoração v, a condição 2, relativa ao conetivo $\neg$, pode ser representada pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

As condições 3-6, relativas aos conetivos $\vee, \wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$, respetivamente, poderiam ser representadas pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi\rightarrow\psi)$	$v(\varphi\leftrightarrow\psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \rightarrow \{0,1\}$ uma função. Então, existe uma única valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração
Pelo Teorema de Recursão Estrutural, $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0,1\}$ é a única função tal que:

1. para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $v(p_i) = g(p_i)$;
2. $v(\perp) = 0$ por definição de valoração;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$;
   - $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sse $v(\varphi)=1$ e $v(\psi)=0$;
   - $v(\varphi \leftrightarrow \psi)=1$ sse $v(\varphi)=v(\psi)$.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula proposicional. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para quaisquer $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração Por indução estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo

Seja v a única valoração tal que $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Consideremos a fórmula $\psi = \neg p_4 \leftrightarrow (p_4 \vee p_1)$. Calculemos $v(\psi)$.

Tem-se

$$v(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\neg p_4) = v(p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v(\neg p_4) = 1 - v(p_4) = 1 - 1 = 0$, enquanto que

$$v(p_4 \vee p_1) = max\{v(p_4), v(p_1)\} = max\{1, 0\} = 1.$$

Assim, conclui-se que $v(\psi) = 0$.

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$. Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0.$$

Logo, $v_1(\varphi) = 1$.

Considere uma valoração v_2 tal que $v_2(p_i) = 1$ se $i < 6$ e $v_2(p_i) = 0$ caso contrário.

Calcule $v_2(\varphi)$.

Tautologias

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma

- tautologia se $v(\varphi)=1$ para toda a valoração v (em tal caso escreve-se $\models \varphi$);
- contradição se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ (do exemplo anterior) é uma tautologia. De facto, para qualquer valoração v, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $v(\varphi) = 1$.

Exercício: Mostre que $\neg(p_0 \wedge p_2) \to (p_0 \vee p_2)$ não é uma tautologia.

Tabela de verdade de uma fórmula

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa tabela, designada tabela de verdade. Tal tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Equivalência lógica

Definição

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ diz-se logicamente equivalente a uma fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

Tem-se $p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$ pois, como vimos

$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$

é uma tautologia. Mais geralmente,

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$

para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Observação

Esta equivalência lógica fundamenta as "demonstrações por contrarrecíproco (ou contraposição)" . Ou seja, provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ" é o mesmo que provar que "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Exemplo

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia.

Lema

Em $\mathcal{F}^{CP}$, a relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência.

Teorema

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

(i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

(ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

(iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

(iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

(v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

(vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, .. (leis de De Morgan)

(vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respetivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas.

O resultado seguinte mostra que uma implicação ou uma equivalência é logicamente equivalente a uma disjunção ou a uma conjunção e vice-versa. Informalmente, diríamos que "se podem definir alguns conetivos à custa de outros".

Teorema

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então,

(i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

(ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

(iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

(iv) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

(v) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

(vi) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

Resulta daqui que é possível retirar alguns dos conetivos de $\mathcal{A}^{CP}$ e obter uma linguagem com a mesma capacidade expressiva.

Substituição de variáveis por fórmulas

Teorema (Generalização)

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida por:

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Prova-se que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$ (fazer como exercício).

Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$ e, consequentemente, $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.

Assim, conclui-se que qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$, ou seja, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia.

Teorema (Substituição)

Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e seja $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$. Então

$$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2 \quad \text{sse} \quad \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i], \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}.$$

Demonstração

I) Suponhamos que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. Sendo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, considere-se $P(\varphi)$ a afirmação

$$\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Vamos fazer a demonstração de $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, usando o Princípio de Indução Estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

- $P(p_j)$ é verdadeira porque:
  (i) se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$, e por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$;
  (ii) se $j \neq i$,então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$.
- $P(\perp)$ é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$.
- Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ em que, por h.i., $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar $P(\neg\varphi)$.
  Para qualquer v valoração v verifica-se

$$\begin{aligned} v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) &= v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i]) \\ &\overset{h.i.}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]). \end{aligned}$$

Teorema (Substituição)

Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e seja $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$. Então

$$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2 \quad \text{sse} \quad \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i], \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}.$$

Demonstração(continuação)

- Seja $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  Sejam $\psi,\ \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi = \psi \square \sigma$. Por h.i., suponhamos que $P(\psi)$ e $P(\sigma)$, ou seja,

$$\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i] \quad \text{e} \quad \sigma[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \sigma[\psi_2/p_i].$$

  Pretende-se provar que $P(\varphi \square \sigma)$ (fazer como exercício).

II) Reciprocamente, suponhamos que $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$ para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
Então, em particular, para $\varphi = p_i$, $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$.

Com base no Teorema da Substituição podemos concluir que “numa fórmula proposicional, se substituir uma subfórmula por uma fórmula equivalente, o resultado global que se obtém é uma fórmula proposicional equivalente à inicial”.

Exemplo

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então,

$$\begin{array}{lll} \neg(\varphi \to \psi) & \Leftrightarrow \ \neg(\neg\varphi \vee \psi) & \text{pois } \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi \text{ e portanto} \\ & & \text{pelo Teorema da Substituição} \\ & & (\neg p_i)[\varphi \to \psi/p_i] \Leftrightarrow (\neg p_i)[\neg\varphi \vee \psi/p_i] \\ & \Leftrightarrow \ \neg\neg\varphi \wedge \neg\psi & \text{por uma das leis de De Morgan} \\ & \Leftrightarrow \ \varphi \wedge \neg\psi & \text{pelo Teorema da Substituição pois,} \\ & & \text{pela lei da dupla negação, } \neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi. \end{array}$$

Conjunto completo de conetivos

Usando o Teorema da Substituição e as equivalências lógicas já referidas atrás, é possível usar apenas um subconjunto do conjunto dos conetivos do alfabeto do Cálculo Proposicional, no sentido em que qualquer fórmula do Cálculo Proposicionalé logicamente equivalente a outra em que apenas ocorrem conetivos desse subconjunto.

Definição

Um conjunto A de conetivos diz-se completo se
para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$
e todos os conetivos que ocorrem em ψ pertencem a A.

Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os seguintes conjuntos de conetivos são completos:

$$\{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \to\} \quad \text{e} \quad \{\bot, \to\}.$$

- $\{\neg, \vee\}$ é completo.

Demonstração

Seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p) = p$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   (a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, (b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   (c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$, (d) $f(\varphi \to \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   (e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

A demonstração conclui-se com a prova de que para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

- $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$;
- todos os conetivos que ocorrem em $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$.

(Sugestão: provar estas duas propriedades para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ usando indução estrutural e recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.)

Índice Indução estrutural **Cálculo Proposicional** Cálculo de Predicados de Pr
Semântica do Cálculo proposicional

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned} .$$

Alternativamente, pelo Teorema da Substituição, deduz-se que:

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \perp \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, são lógicamente equivalentes duas a duas as fórmulas:

$$\varphi, \quad p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \quad \text{e} \quad \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) .$$

M. Lurdes Teixeira Dep. Matemática Univ. Minho LÓGICA

Formas normais

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) literais.
- Fórmulas do tipo
  - i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$
  - ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respetivamente, formas normais conjuntivas (FNC) e formas normais disjuntivas (FND).

Índice Indução estrutural Cálculo Proposicional Cálculo de Predicados de Pr
Semântica do Cálculo proposicional

Exemplos

1. Um literal ℓ é simultaneamente uma FNC e uma FND com $n = m_n = 1$, em ambos os casos.
2. A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).
3. A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, literais, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.
4. A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas não é uma FND.
5. A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ não é uma FNC nem uma FND.

M. Lurdes Teixeira Dep. Matemática Univ. Minho LÓGICA

Teorema

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Demonstração

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conetivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas:
$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp & \Leftrightarrow & p_0 \wedge \neg p_0. \end{array}$$
2. Transformar negações de conjunções ou de disjunções, respetivamente, em disjunções ou conjunções de negações, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Exemplo

Consideremos $\varphi = p_2 \vee (\perp \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_0))$. Pretende-se calcular uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a φ.

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \Leftrightarrow & p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0). \end{array}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma FND logicamente equivalente a φ.

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0). \end{array}$$

Assim, $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma FNC logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. A tabela de verdade de φ é

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$\cdots$	φ	
$i = 1 \to$	1	1	1	0	0	$\cdots$	1	$\beta_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
$i = 2 \to$	1	1	0	0	0	$\cdots$	1	$\beta_2 = p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
	1	0	1	0	0	$\cdots$	0	
	1	0	0	0	0	$\cdots$	0	
	0	1	1	0	1	$\cdots$	0	
$i = 6 \to$	0	1	0	0	1	$\cdots$	1	$\beta_6 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
	0	0	1	0	1	$\cdots$	0	
	0	0	0	0	1	$\cdots$	0	

Uma FND logicamente equivalente a φ é

$$\varphi^d = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Exercício: Recorrendo à tabela de verdade de φ e determine uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ.

Em geral, para cada fórmula φ, podemos obter uma FND, φ^d, tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$, a partir da tabela de verdade de φ, aplicando os passos seguintes.

- Se φ é uma contradição, escolhe-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Caso contrário, suponhamos que $var(\varphi) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e que a tabela de verdade de φ é:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ	
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1	
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
linha $i \to$	$a_{i\,1}$	$a_{i\,2}$	$\cdots$	$a_{i\,n-1}$	$a_{i\,n}$	b_i	$\to$ define-se β_i se $b_i = 1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}	

Para cada linha i da tabela tal que $b_i = 1$, e cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, definem-se

$$\alpha_{i\,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i\,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i\,j} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_i = \alpha_{i\,1} \wedge \alpha_{i\,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i\,n}.$$

Então, sendo $b_i = 1$ sse $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$,

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \beta_{i_k}.$$

Satisfação de fórmulas

Definição

Se v é uma valoração e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, diz-se que:

- v satisfaz Γ se $v(\varphi) = 1$ para toda a fórmula $\varphi \in \Gamma$. Em tal caso escreve-se $v \models \Gamma$.
- v não satisfaz Γ se existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $v(\varphi) = 0$. Em tal caso escreve-se $v \not\models \Gamma$.

Exemplos

1. Sejam v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$, $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$.
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\perp \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.
2. $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Consistência semântica

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- (semanticamente) consistente se existe pelo menos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$.
- (semanticamente) inconsistente se não é consistente, *i.e.*, se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$ é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.
3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \perp, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente, pois, para qualquer valoração v, se $v(p_4 \to \perp) = 1$, então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Assim, $v \not\models \Gamma_3$ para qualquer valoração v.

Lema

Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica.

Consequência semântica

Definição

Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que φ é uma consequência semântica de Γ (ou que Γ é um modelo de φ), se $v \models \Gamma$ implica $v \models \varphi$ para toda a valoração v. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \models \varphi$,

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, por simplificação, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$;

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$;

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Exemplos

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
De facto, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ para cada valoração v.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
Notar que, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$ para qualquer valoração v.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.
(Escrever a justificação como exercício.)

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.
(Escrever a justificação como exercício.)

Teorema

Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Demonstração

"$\Longrightarrow$" Se φ é uma tautologia, então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v, e, em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Se $\emptyset \models \varphi$, então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v, ou seja, φ é uma tautologia.

Teorema

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

(i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

(ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

(iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

(iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.
Em particular, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

(v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Fazer como exercício.

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}^{CP}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$;

(ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$;

(iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração

A equivalência entre (i) e (ii) pode ser demonstrada por indução matemática sobre n (exercício).

A equivalência entre (ii) e (iii) é um caso particular da alínea iv) do teorema anterior.

Teorema (Redução ao Absurdo)

Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então,

$$\Gamma \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ é semanticamente inconsistente.}$$

Demonstração

"$\Longrightarrow$" Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Se v é uma valoração tal que $v \models \Gamma$, então, $v(\varphi) = 1$, ou seja, $v(\neg\varphi) = 0$. Logo, não existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, pelo que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente e se v é uma valoração que satisfaz Γ, então $v(\neg\varphi) = 0$. Em tal caso, $v(\varphi) = 1$.