2º Teste de Lógica

Licenciatura/Mestrado Integrado em Engenharia Informática

21 de maio de 2024 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº __________ Curso __________

.. Considere o tipo de linguagem $L = (\{z, u, f, +\}, \{=, \equiv\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}(u) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, e $\mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\equiv) = 2$.

Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ uma L-estrutura em que: $\overline{z} = 0$, $\overline{u} = 1$, $\overline{f}(t) = t^2$, $\overline{+}$ é a adição usual nos inteiros, $\overline{=}$ é a relação de igualdade usual em $\mathbb{Z}$, e $\overline{\equiv} = \Big\{(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid t_1 \text{ é par se e só se } t_2 \text{ é par}\Big\}$.

Na estrutura E, considere a atribuição

$$\begin{aligned} a : \mathcal{V} &\to \mathbb{Z} \\ x_i &\mapsto \begin{cases} -2i & \text{se } i \text{ é par} \\ i & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}.$$

Responda a cada uma das seguintes 5 questões, sem apresentar justificação.

(a) Indique o valor de $\Big(f\big(f(x_3)\big) + f(u)\Big)[a]_E$.

82

(b) Indique o alcance do quantificador $\exists_{x_1}$ na L-fórmula $\forall_{x_0}\big(\exists_{x_1} f(x_0) \equiv x_1 \vee f(x_0) \equiv (x_1 + u)\big)$.

$f(x_0) \equiv x_1$

(c) Indique o valor de $\big(\exists_{x_1}\big(x_2 \equiv (x_1 + u)\big) \to \neg(x_2 \equiv x_1)\big)[a]_E$.

1

(d) Indique, caso exista, uma realização (E', a') do conjunto de L-fórmulas $\Gamma = \Big\{\exists_{x_0}\ x_1 = (f(x_1) + x_0),\ f(x_1) \equiv z\Big\}$.

$E' = E$ e

$a' : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x_1 \longmapsto 2$

$x_i \longmapsto 0$ para qualquer $i \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$

NOTA: Várias respostas possíveis.

(e) Sejam $\varphi_1 = (\exists_{x_1}\forall_{x_0}\ x_1 \equiv f(x_0))$ e $\varphi_2 = (x_1 \equiv x_0)$. Diga se existe um conjunto Γ de L-fórmulas tal que (E, a) é uma realização de Γ, mas não é uma realização de $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ nem de $\Gamma \cup \{\varphi_2\}$. Em caso afirmativo, dê um exemplo de um conjunto Γ nestas condições.

NOTA: várias respostas possíveis.

$\Gamma = \{x_2 \equiv f(x_2)\}$

Cada resposta certa vale **1** *; cada resposta em branco ou errada vale* **0**.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{f\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$ em que a funçãon aridade $\mathcal{N}$ é definida por: $\mathcal{N}(f) = 2$, $\mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\leq) = 2$.

Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura definida por:

- $\overline{f}(n_1, n_2) = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, para quaisquer números inteiros n_1, n_2;
- $\overline{=}$ é a relação igualdade de números inteiros;
- $\overline{\leq}$ é a relação "menor ou igual" entre números inteiros.

Sem justificar, diga se é verdadeira (V) ou se é falsa (F) cada uma das seguintes afirmações:

(a) O conjunto $\{f(f(x_0, x_1), x_2), f(x_1, x_2) = x_0\}$ é um conjunto de L-termos. F

(b) Sendo φ a L- fórmula $\forall_{x_0} (x_0 = f(x_1, x_2) \to \exists_{x_1} x_0 \leq x_1)$, tem-se $\text{LIG}(\varphi) = \{x_0, x_1\}$ e $\text{LIV}(\varphi) = \{x_2\}$. F

(c) O conjunto $\{f(x_1, x_2) \leq f(x_0, x_1), \neg x_0 = x_1\}$ é um conjunto de L-fórmulas atómicas. F

(d) A variável x_1 está livre para o L-termo $f(x_0, x_2)$ na L-fórmula

$$\exists_{x_1} \forall_{x_0} x_1 \leq x_0 \to x_0 = f(x_0, x_1).$$

V

(e) $(\forall_{x_0} \neg x_0 \leq x_1 \to x_1 \leq x_0)\,[f(x_1, x_2)/x_0] = \forall_{x_0} \neg x_0 \leq x_1 \to x_1 \leq f(x_1, x_2)$. V

(f) A L- fórmula seguinte é uma instância de uma tautologia:

$$(\neg \forall_{x_0} x_0 = f(x_0, x_1) \wedge x_0 \leq x_1) \vee (x_0 \leq x_1 \to \neg \forall_{x_0} x_0 = f(x_0, x_1)).$$

F

(g) Sendo $a : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ tal que $a(x_i) = i$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$,

$$f(f(x_0, x_1), x_2) \left[a \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_E = f(x_0, x_2)\,[a]_E.$$

V

(h) Sendo $a : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ tal que $a(x_i) = i$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$,

$$(\exists_{x_0} x_1 \leq x_0 \to x_1 = f(x_0, x_1))\,[a]_E = 1.$$

V

(i) $E \models \forall_{x_0} \forall_{x_1} \forall_{x_2} (x_0 \leq x_1 \to x_0 \leq f(x_1, x_2))$. V

(j) $\models \forall_{x_0} \forall_{x_1} (x_0 \leq x_1 \to x_0 = f(x_0, x_1))$ F

Cada resposta certa vale **0.5** *; cada resposta errada vale* **-0.2***; cada resposta em branco vale* **0**.

3. Considere o tipo de linguagem $L_{Arit} = (\{0, s, +, *\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(*) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$. Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, a L_{Arit}-estrutura em que:

- $\overline{0}$ é o número inteiro zero;
- $\overline{s} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$; $n \mapsto n+1$
- $\overline{+} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$; $(n,m) \mapsto n+m$
- $\overline{*} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$; $(n,m) \mapsto n \times m$
- $\overline{=}$ é a relação de igualdade $\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n < m\}$, de menor em $\mathbb{N}_0$.

Justificando cuidadosamente, responda às seguintes questões.

(a) Encontre uma atribuição a em E_{Arit} tal que $E_{Arit} \models (\exists_{x_1}\, x_0 = s(s(0)) * x_1 \wedge x_0 < x_0 * x_0)[a]$.

Sendo a uma atribuição qualquer em E_{Arit}.

$(\exists x_1\ x_0 = s(s(0)) * x_1 \wedge x_0 < x_0 * x_0)\ [a] = 1$ sse

existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $x_0 = s(s(0)) * x_1\ [a\binom{x_1}{d}] = 1$ e $x_0 < x_0 * x_0\ [a] = 1$, i.e.,

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $a(x_0) = ((\overline{0}+1)+1) \times d$ e $a(x_0) < a(x_0) \times a(x_0)$, i.e.,

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $a(x_0) = 2d$ e $a(x_0) < a(x_0)^2$.

Para que esta última afirmação seja verdadeira $a(x_0)$ deve ser par e um número não nulo. Estas são condições suficientes.

Assim
$$\begin{aligned} a : V &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x_0 &\longmapsto 2 \\ x_i &\longmapsto 0 \quad \text{para } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$
é uma atribuição nas condições requeridas.

(b) Verifique se é válida em E_{Arit} a L_{Arit}-fórmula:

$$\forall_{x_1}\Big((s(x_1) * x_2 = s(x_1 * x_2)) \vee (x_2 * 0 < x_2)\Big) \to (x_2 * 0 < x_2) \vee \forall_{x_1}(s(x_1) * x_2 = s(x_1 * x_2)).$$

Sejam $\varphi = (s(x_1) * x_2 = s(x_1 * x_2))$ e $\psi = (x_2 * 0 < x_2)$. A fórmula do enunciado é $\forall x_1(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \forall x_1 \varphi)$. Como x_1 não ocorre livre em ψ uma fórmula desta forma é, mesmo, universalmente válida (como se prova de seguida), logo é válida em E_{Arit}. Vamos então provar que é universalmente válida.

Seja E uma estrutura de tipo L qualquer e a uma atribuição.

$\forall x_1 (\varphi \vee \psi)\ [a]_E = 1$ sse para todo $d \in dom(E)$ $(\varphi \vee \psi)\ [a\binom{x_1}{d}]_E = 1$, i.e.,

sse para todo $d \in dom(E)$ $\max\{\varphi[a\binom{x_1}{d}]_E, \psi[a\binom{x_1}{d}]_E\} = 1$.

Como $x_1 \notin LIV(\psi)$, então $\psi[a\binom{x_1}{d}]_E = \psi[a]_E$ e

$\max\{\varphi[a\binom{x_1}{d}]_E, \psi[a\binom{x_1}{d}]\} = 1$ sse $\varphi[a\binom{x_1}{d}]_E = 1$ ou $\psi[a]_E = 1$.

Logo $\forall x_1(\varphi \vee \psi)[a]_E = 1$ implica que para todo $d \in dom\, E$ $\varphi[a\binom{x_1}{d}]_E = 1$ ou $\psi[a] = 1$, ou seja, que $(\forall x_1\, \varphi \vee \psi)[a]_E = 1$. Assim $\models \forall x_1(\varphi \vee \psi) \to (\forall x_1 \varphi \vee \psi)$ e

$\forall x_1(\varphi \vee \psi) \to (\forall x_1 \varphi \vee \psi) \iff \forall x_1(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \forall x_1 \varphi)$.

1. Sejam L um tipo de linguagem, $x \in \mathcal{V}$, $t \in \mathcal{T}_L$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$.
Justifique detalhadamente as respostas às seguintes questões.

(a) Mostre que, se $\models \varphi$, então $\models \forall_x \varphi$.

Por hipótese suponhamos que $\models \varphi$, ou seja, que para qualquer L-estrutura E e qualquer atribuição a em E $\varphi[a]_E = 1$.
Seja $E' = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura e $a' : V \to D$ uma atribuição.
$\forall x \varphi [a']_{E'} = 1$ sse para todo o $d \in D$ $\varphi[a'\binom{x}{d}]_{E'} = 1$. Qualquer que seja $d \in D$, $a'\binom{x}{d}$ é uma atribuição em E'. Então, pela hipótese conclui-se que $\varphi[a'\binom{x}{d}]_{E'} = 1$, para qualquer $d \in D$. Logo $\models \forall x \varphi$.

(b) Mostre que, se x é substituível por t em φ, então $\models \forall_x \varphi \to \varphi[t/x]$.

$\models \forall x \varphi \to \varphi[t/x]$ significa que, para qualquer L-estrutura E e para qualquer atribuição a em E, $\forall x \varphi \to \varphi[t/x]\ [a]_E = 1$.
Seja $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura e $a : V \to D$ uma atribuição.
$\forall x \varphi \to \varphi[t/x]\ [a]_E = 1$ sse $\forall x \varphi [a]_E = 0$ ou $\varphi[t/x][a]_E = 1$.
Se $\forall x \varphi [a]_E = 0$ a disjunção é verdadeira. Senão, então $\forall x \varphi [a]_E = 1$ e pretende-se provar que $\varphi[t/x][a]_E = 1$.
Como x é substituível por t em φ, $\varphi[t/x][a]_E = \varphi[a\binom{x}{t[a]_E}]_E$
Se $\forall x \varphi [a]_E = 1$, então, para todo $d \in D$ $\varphi[a\binom{x}{d}]_E = 1$, pelo que no caso particular de $d = t[a]_E$ se verifica $\varphi[a\binom{x}{t[a]_E}]_E = 1$.
Logo $\varphi[t/x][a]_E = 1$.
Verifica-se então que, em ambos os casos, $\forall x \varphi \to \varphi[t/x]\ [a]_E = 1$.

COTAÇÃO: *cada um dos quatro grupos vale 5 valores* .