Folha 5

2. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $v = (1,1)$.

Queremos determinar os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\nabla f(x,y)$ é um múltiplo não nulo de v.

Note que se $\lambda > 0$ então $\nabla f(x,y)$ tem a mesma direção e sentido de v

se $\lambda < 0$ então $\nabla f(x,y)$ tem a mesma direção e o sentido oposto de v.

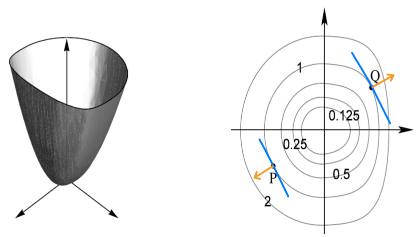
$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x-2, 2y-4)$. $\quad \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,2)$

$\nabla f(x,y) = \lambda(1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 = \lambda \\ 2y-4 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\lambda}{2} \\ y = 2 + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$. Fazendo $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ temos:

Os pontos para os quais ∇f tem a direção e sentido de v são os pontos: $(1+\alpha, 2+\alpha)$ $\alpha > 0$

os pontos para os quais ∇f tem a direção e sentido oposto a v são os pontos: $(1+\alpha, 2+\alpha)$ $\alpha < 0$

3. Na figura estão representados o gráfico e um diagrama de nível de uma função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Indique quais os sinais de $\nabla f(P) \cdot \vec{e}_1$ e $\nabla f(Q) \cdot \vec{e}_2$



Sabemos que o vetor gradiente de uma função f num ponto A é normal à estrutura de nível que incide em A e que tem a direção e o sentido de crescimento máximo de f. [observe a figura]

Portanto, podemos conjeturar que $\nabla f(P) \cdot \vec{e_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(P) < 0$

$\nabla f(Q) \cdot \vec{e_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(Q) > 0$.

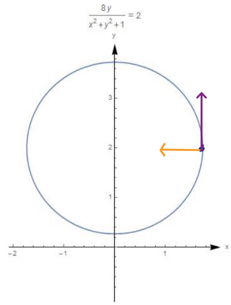
5. A figura representa a curva de nível 2 da função $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}.$$

(a) Verifique, analiticamente, que a curva é uma circunferência.

(b) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3}, 2)$ da curva de nível, esboce o vetor gradiente.

(c) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3}, 2)$ da curva de nível, esboce um vetor cuja derivada direcional seja zero.



$v = (0,1)$

$\nabla f(\sqrt{3}, 2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

a. $f(x,y) = 2 \iff \dfrac{8y}{1+x^2+y^2} = 2 \iff 8y = 2(1+x^2+y^2) \iff x^2+y^2-4y+1 = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 - 4+1 = 0$

$\iff x^2 + (y-2)^2 = 3$. Portanto, a curva de nível 2 da função f é a circunferência de centro $(0,2)$ e raio $\sqrt{3}$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-8y(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{-16xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{3},2) = \dfrac{-32\sqrt{3}}{8^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{8(1+x^2+y^2) - 8y(2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{8(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{3},2) = 0$

Portanto, $\nabla f(\sqrt{3},2) = (-4\sqrt{3}, 0)$. Para o esboço veja a figura do enunciado.

c. Basta tomar $v = (0,1)$, pois como vimos na alínea anterior $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{3},2) = 0$.

8. A interseção das superfícies definidas por $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ e $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ é uma curva que passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1, 2)$.

Determine os respetivos planos tangentes às superfícies, nesse ponto.

$S_1: \; x^2y^2+2x+z^3=16$

S_1 é superfície de nível 16 da função $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2y^2+2x+z^3$

$\nabla f(x,y,z) = (2xy^2+2, \; 2x^2y, \; 3z^2)$, $\nabla f(2,1,2) = (6,8,12)$

O plano tangente a S_1 no ponto $(2,1,2)$ tem equação cartesiana:

$\nabla f(2,1,2) \cdot (x-2, y-1, z-2) = 0 \iff 6(x-2)+8(y-1)+12(z-2)=0 \iff 3x+4y+6z=22.$

$S_2: \; 3x^2+y^2-2z=9$

S_2 é superfície de nível 9 da função $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z)=3x^2+y^2-2z$

$\nabla g(x,y,z) = (6x, 2y, -2)$, $\nabla g(2,1,2) = (12, 2, -2).$

O plano tangente a S_2 no ponto $(2,1,2)$ tem equação cartesiana:

$\nabla g(2,1,2) \cdot (x-2, y-1, z-2) = 0 \iff 12(x-2)+2(y-1)-2(z-2)=0 \iff 6x+y-z=11.$