O **alfabeto do Cálculo Proposicional**, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) símbolos designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto numerável $\mathcal{V}^{CP}$;
- os símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ e $\perp$, designados conetivos (propo- sicionais);
- dois símbolos auxiliares (e).

A **linguagem do Cálculo Proposicional**, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o subconjunto de $(\mathcal{A}^{CP})^*$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

(i) $p_j \in \mathcal{F}^{CP}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}_0$;

(ii) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

(iii) se $\varphi,\ \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;

(iv) se $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ designam-se fórmulas proposicionais ou fórmulas do Cálculo Proposicional.

As regras que definem $\mathcal{F}^{CP}$ podem ser representadas pelas seguintes árvores:

(i) $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;

(ii) $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;

(iii)

$$\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\vee \ ; \qquad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\wedge \ ;$$

$$;$$

$$\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\rightarrow \ ; \qquad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\leftrightarrow$$

(iv) $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\neg$.

1. Sintaxe do Cálculo Proposicional

1.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg (p_1 \vee p_2))$. **b)** $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$.

c) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

e) $p_1 \wedge p_2 \vee p_3$. **f)** $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$.

1.2 Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea **c)** $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

c) $b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$.

d) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$, onde $\varphi[\perp /p_7]$ representa o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$.

1.3 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$. **b)** $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp /p_7])$.

c) $b(\varphi) = b(\varphi[\perp /p_7])$. **d)** se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$.

1.4 Para cada uma das seguintes fórmulas φ do Cálculo Proposicional:
i) p_{2023}. **ii)** $\neg \perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$:

a) Calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2024}/p_{2023}]$.

b) Indique o conjunto das suas subfórmulas (sub-objetos).

1.5 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O *tamanho* de φ, denotado por $|\varphi|$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional p; (ii) $|\perp| = 1$; (iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$;
(iv) $|\varphi\Box\psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$, para cada conetivo binário $\Box$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

b) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$.

c) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

1.6 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A *complexidade lógica* de φ, denotada por $cl(\varphi)$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $cl(p) = 0$, para cada variável proposicional p; (ii) $cl(\perp) = 0$; (iii) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$;
(iv) $cl(\varphi\Box\psi) = 1 + max(cl(\varphi), cl(\psi))$, para cada conetivo binário $\Box$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior complexidade lógica?

b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $cl(\varphi) < |\varphi|$.