Atividade 7

$f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, $(2,1)$

$f(x,y) = \sqrt{x+e^{4y}}$, $(3,0)$

a) derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{1\cdot(x+y) - x\cdot(1+0)}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$ p/ $x+y \neq 0$ no domínio.

Regra do Quociente: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$ no domínio.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right) = x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)^{-1}\right] = x\cdot(-1)(x+y)^{-2}\cdot(0+1) = \frac{-x}{(x+y)^2}$$ p/ $x+y \neq 0$ no domínio

Regra da cadeia: $\dfrac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x+e^{4y}}\right) = \frac{1}{2}(x+e^{4y})^{-1/2}\cdot(1+0) = \frac{1}{2\sqrt{x+e^{4y}}}$$ p/ $x+e^{4y} \geq 0$ no domínio.

Regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+e^{4y}}\right) = \frac{1}{2}(x+e^{4y})^{-1/2}\cdot\left(0+\frac{\partial}{\partial y}(e^{4y})\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+e^{4y}}}\cdot(e^{4y}\cdot 4) = \frac{2e^{4y}}{\sqrt{x+e^{4y}}}$$

Regra da cadeia   Regra da cadeia   p/ $x+e^{4y} \geq 0$ no domínio.

b) equação do plano tg à superfície no ponto especificado.

Como já temos as derivadas parciais, $\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right|_{(2,1)} = \dfrac{1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{16}$;

$\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right|_{(2,1)} = \dfrac{-2}{(2+1)^2} = -\dfrac{1}{8}$; $\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x+e^{4y}}\right)\right|_{(3,0)} = \dfrac{1}{2\sqrt{3+e^{4\cdot 0}}} = \dfrac{1}{4}$;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+e^{4y}}\right)\Big|_{(3,0)} = \frac{2e^{4\cdot 0}}{\sqrt{3+e^{4\cdot 0}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Por fim, como a fórmula geral do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) é: $z - z_0 = \frac{\partial}{\partial x}[f(x_0,y_0)](x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}[f(x_0,y_0)](y-y_0)$;

Logo:

$$\begin{cases} z - f(2,1) = \frac{1}{16}(x-2) + \left(\frac{-1}{8}\right)\cdot(y-1) \Leftrightarrow z = \frac{1}{16}(x-2) - \frac{1}{8}(y-1) + \frac{2}{2+1} \\ z - f(3,0) = \frac{1}{4}(x-3) + 1\cdot(y-0) \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}(x-3) + y + \sqrt{3+e^{4\cdot 0}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{16}(x-2) - \frac{1}{8}(y-1) + \frac{2}{3} & \text{Para } f(x,y) = \frac{x}{x+y},\ (2,1) \\ z = \frac{1}{4}(x-3) + y + 2 & \text{Para } f(x,y) = \sqrt{x+e^{4y}},\ (3,0) \end{cases}$$

c) $L(x,y)$ da função naquele ponto.

$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial}{\partial x}[f(a,b)](x-a) + \frac{\partial}{\partial y}[f(a,b)](y-b)$ para função f no ponto (a,b)

Logo, como tudo já foi calculado anteriormente

$$\begin{cases} L(x,y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{16}(x-2) - \frac{1}{8}(y-1) \\ L(x,y) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) + y \end{cases}$$