Intervalos de confiança

tradução do Jay Davore

índice

1. Intervalos baseados em amostragem simples
   - Intervalos de confiança
   - Propriedades dos intervalos de confiança
   - Tamanho amostral
2. IC para a média e proporção de uma população
   - IC para a média
   - IC para a p ao nível $100(1-\alpha)\%$
   - Intervalos baseados na distribuição populacional normal
   - a distribuição t
   - IC para a variância e do DP de uma população normal

definição

- Um enfoque alternativo ao de fornecer apenas um valor para o parâmetro sendo estimado consiste no cálculo de um intervalo de valores plausíveis: o intervalo de confiança.
- o nível de confiança é uma medida do grau de confiabilidade do intervalo

IC 95%

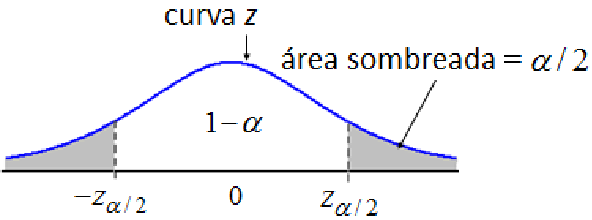
- Suponha que queiramos estimar a média μ de uma população qualquer.
- Se após observar $X_1 = x_1, ..., X_n = x_n$, calcularmos a média da amostra observada $\bar{x}$,
- Pelo TLC, $e = (\bar{X} - \mu) \sim N(0, \sigma^2_{\bar{X}})$ com $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
- então um IC de 95% para μ pode ser construido:

$$P(|e| < 1,96\sigma_{\bar{X}}) = 0,95$$
$$P(-1,96\sigma_{\bar{X}} < \bar{X} - \mu < 1,96\sigma_{\bar{X}}) = 0,95$$

- de onde:

$$\left(\bar{x} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Outros niveis de confiança



$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Figura: nível de confiança

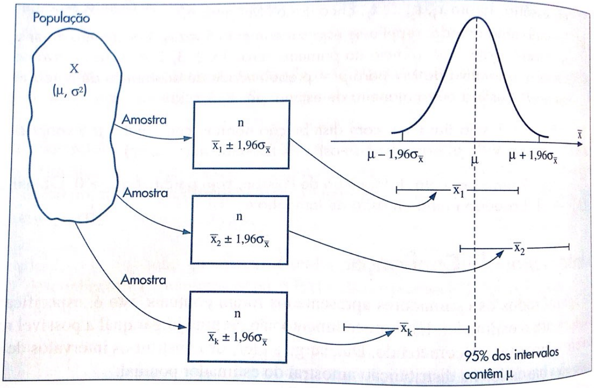
outros niveis de confiança

Um IC de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para a média μ de uma população normal, quando o valor de α é conhecido, é dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

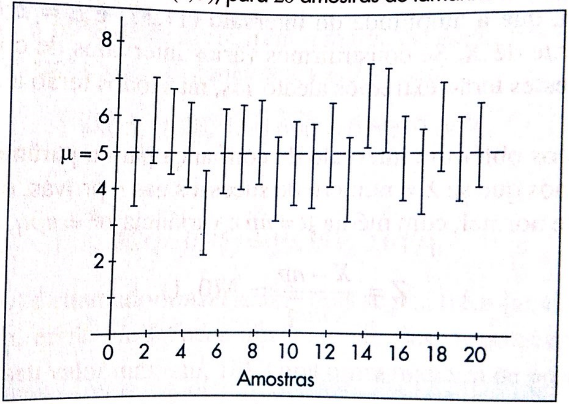
Representação de um IC para μ com $\gamma = 0,95$ e σ^2 conhecido

Figura 11.3: Significado de um IC para μ, com $\gamma = 0,95$ e σ^2 conhecido.



Intervalos de Confiança

Figura 11.4: Intervalos de confiança para a média de uma N(5, 9), para 20 amostras de tamanho n = 25.



Exemplo

Uma maquina enche pacotes de café com variância igual a 100 g^2. Ela estava regulada para encher os pacotes com 500 g. em média. Se a máquina se desregulou, queremos saber a nova média μ. Uma amostra de $n = 25$ apresentou $\bar{X} = 485$g. Podemos então construir um IC para μ de 95% de confiança.

Sabemos que $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/5 = 2$g.

$$IC(\mu; 0,95) = 485 \pm 1,96 \times 2$$

Exemplo

Uma maquina enche pacotes de café com variância igual a 100 g^2. Ela estava regulada para encher os pacotes com 500 g. em média. Se a máquina se desregulou, queremos saber a nova média μ. Uma amostra de $n = 25$ apresentou $\bar{X} = 485$g. Podemos então construir um IC para μ de 95% de confiança.
Sabemos que $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/5 = 2$g.

$$IC(\mu; 0,95) = 485 \pm 1,96 \times 2$$

tamanho amostral

A forma geral para o tamanho da amostra n necessária para ter um intervalo com amplitude ω é:

$$n = \left(2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\omega}\right)^2$$

como criar um IC

Seja T um estimador de um parâmetro θ, e seja também conhecida a distribuição amostral de T, é possível achar dois valores t_1 e t_2 tais que

$$P(t_1 < \theta < t_2) = \gamma$$

onde $0 < \gamma < 1$ é um valor fixo.
Neste caso, IC($\theta; \gamma$)=$[t_1, t_2]$.

como criar um IC

Seja T um estimador de um parâmetro θ, e seja também conhecida a distribuição amostral de T, é possível achar dois valores t_1 e t_2 tais que

$$P(t_1 < \theta < t_2) = \gamma$$

onde $0 < \gamma < 1$ é um valor fixo.
Neste caso, IC($\theta; \gamma$)=$[t_1, t_2]$.

Como criar um IC

- Se σ^2 não for conhecida, podemos substituir $\sigma_{\bar{X}}$ por $S/\sqrt{n}$.
- Para n não muito grande, a distribuição normal não pode ser usada e terá de ser substituida pela distribuição t de student.
- No caso de n grande, com coeficiente de confiança γ, $P(-z(\gamma) < Z < z(\gamma)) = \gamma$, com $Z \sim N(0,1)$ O intervalo fica:

$$IC(\mu;\gamma) = [\bar{X} - z(\gamma)\sigma_{\bar{X}}; \bar{X} + z(\gamma)\sigma_{\bar{X}}]$$

- A amplitude do intervalo fica

$$L = 2z(\gamma)\sigma/\sqrt{n}$$

que não depende de $\bar{X}$

como criar um IC

Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. no qual o IC para o parâmetro θ estará baseado. Suponha também uma v.a. que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1. A variável depende funcionalmente de ambos: $X_1, ..., X_n$ e de θ.
- 2. A a f.d.p (f.m.p) não depende de θ ou algum parâmetro desconhecido.

Como criar um IC

Seja $h(X_1, ..., X_n; \theta)$ esta v.a.
Em geral, a forma de h é usualmente sugerida ao examinar uma distribuição apropriada de $\hat{\theta}$.
Para qualquer α entre 0 e 1, constantes a e b podem ser encontradas tal que:

$$P(a < h(X_1, ..., X_n; \theta) < b) = 1 - \alpha$$

$$P(l(X_1, ..., X_n)) < \theta < u(X_1, ..., X : n))$$

Como criar um IC

Agora suponha que as desigualdades podem ser manipuladas de forma a isolar θ:

$$P(l(X_1, ..., X_n)) < \theta < u(X_1, ..., X : n))$$

$l(X_1, ..., X_n)$ é o limite inferior de confiança e $u(X_1, ..., X : n)$ o limite superior, para um IC de $100(1-\alpha)\%$

IC para a média (amostras grandes)

Se n é suficientemente grande, a variável padronizada:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem aproximadamente uma distribuição normal padrão. Isto implica que

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

é um IC para μ ao nivel $100(1-\alpha)\%$.

IC para a p de uma binomial(n,p)

É conhecido que X=número de sucessos em n ensaios, então $X \sim bin(n,p)$, onde $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$, com $q = 1-p$. Temos então:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

ou

$$Z = \frac{X/n - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{pq}} \sim N(0,1)$$

IC para a p de uma binomial(n,p)

Se $\gamma = 0,95$, temos que

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$$

ou seja,

$$P\left\{-1,96 \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{pq}} \leq 1,96\right\} = 0,95$$

Desta maneira, com probabilidade $0,95$,

$$-1,96\sqrt{pq/n} \leq (\hat{p}-p) \leq 1,96\sqrt{pq/n}$$

o que resulta em:

$$\hat{p} - 1,96\sqrt{pq/n} \leq -p \leq \hat{p} + 1,96\sqrt{pq/n}$$

IC para a p de uma binomial(n,p)

Sendo p desconhecido, procedemos de duas maneiras:

- 1. usamos o fato que $pq \leq 1/4$ de forma que $\sqrt{pq/n} \leq 1/\sqrt{4n}$, obtendo

$$\hat{p} - \frac{1,96}{\sqrt{4n}} \leq p \leq \hat{p} + \frac{1,96}{\sqrt{4n}}$$

- 2. para um γ qualquer, $(0 < \gamma < 1)$, o intervalo fica:

$$\hat{p} - \frac{z(\gamma)}{\sqrt{4n}} \leq p \leq \hat{p} + \frac{z(\gamma)}{\sqrt{4n}}$$

exemplo

numa pesquisa de mercado, $n = 400$ pessoas foram entrevistadas sobre determinado produto e 60% delas preferiram a marca A. $\hat{p} = 0,6$ e um IC para p com coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$ será:

$$0,6 \pm (1,96)1/\sqrt{1600} = 0,6 \pm 0,049$$

i.e,

$$IC(p; 0,95) =]0,551; 0,649[$$

Este intervalo é conservador, pois se p não for igual a $1/2$, e estiver proximo de zero ou um, então o intervalo fornecido é desnecessariamente maior.
uma outra maneira de proceder é substituir pq por $\hat{p}\hat{q}$ e o intervalo fica:

$$\hat{p} - z(\gamma)\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \leq p \leq \hat{p} + z(\gamma)\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$$

IC para a proporção

Limites inferior (-) e superior (+):

$$= \frac{\hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \mp z_{(\alpha/2)} \sqrt{\left(\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2} \right)}}{1 + \left(z_{\alpha/2}^2 \right) / n}$$

Limites de confiança para μ (amostras grandes)

Limite de confiança superior:

$$\mu < \bar{x} + z_{\alpha} . \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Limite de confiança inferior:

$$\mu > \bar{x} - z_{\alpha} . \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Por notação:

$$z(\gamma) = z_{\alpha}$$

Distribuição normal

A população de interés é normal, desta maneira, $X_1, ..., X_n$ constitui uma a.a. de uma normal com ambos parâmetros μ e σ desconhecidos.

t

Quando $\bar{X}$ é a média de uma a.a. de tamanho n de uma distribuição normal com média μ, a v.a.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem uma distribuição de probabilidade chamada de t com $n-1$ graus de liberdade (g.l)

propriedades da distribuição t

Seja t_ν a curva da função densidade para ν graus de liberdade(g.l):

- 1. Cada curva t_ν tem forma de um sino centrado em 0.
- 2. Cada curva t_ν é mais "espalhada" do que a curva z da normal padrão
- 3. Conforme ν cresce, a dispersão (espalhamento) da curva correspondente a t_ν diminui.
- 4. conforme $\nu \to \infty$, a sequência de t_ν se aproxima da curva normal padrão (a curva z é chamada de curva t com g.l$=\infty$).

Valor crítico t

Seja $t_{\alpha,\nu}$ =o número no eixo para a qual a área abaixo da curva t com ν g.l. à direita de $t_{\alpha,\nu}$ é α:
$t_{\alpha,\nu}$ é chamado de valor crítico t.

representação gráfica de $t_{\alpha,\nu}$

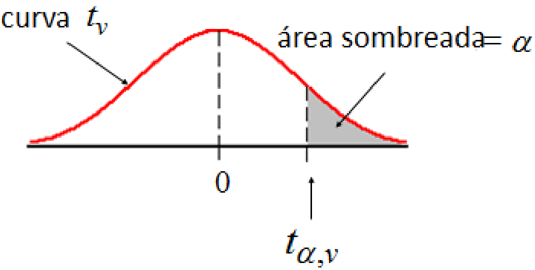
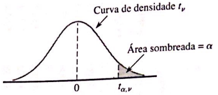


Figura: curva $t_{\alpha,\nu}$

Tabela A.5 Valores Críticos para as Distribuições t



ν \ α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767

Intervalo de confiança

Sejam $\bar{x}$ e s a média amostral e o desvio padrão calculados de uma a.a. de uma população normal com média μ. O IC de $100(1-\alpha)\%$ é:

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalo de previsão

Em algumas situações pode se desejar prever um único valor de uma variável a ser observado futuramente. Temos a seguinte configuração: Dispomos de uma a.a. $(X_1, ..., X_n)$ de uma distribuição normal e queremos prever o valor de X_{n+1}.
Um previsor pontual de X_{n+1} é $\bar{X}$ e o erro de previsão resultante seria $\bar{X} - X_{n+1}$. O valor esperado do erro de previsão será:

$$E(\bar{X} - X_{n+1}) = E(\bar{X}) - E(X_{n+1}) = \mu - \mu = 0$$

Sabendo que X_{n+1} é independente de toda a sequência $X_1, ..., X_n$, a variância do erro será:

$$var(\bar{X} - X_{n+1}) = var(\bar{X}) + var(X_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \sigma^2(1 + \frac{1}{n})$$

Intervalo de previsão

O Erro de previsão linear é uma C.L de v.a. Independentes normalmente distribuidas, de modo que:

$$Z = \frac{(\bar{X} - X_{n+1}) - 0}{\sqrt{\sigma^2(1 + \frac{1}{n})}} \sim N(0,1)$$

É possível mostrar substituindo σ pelo desvio padrão amostral S que

$$T = \frac{(\bar{X} - X_{n+1}) - 0}{s \times \sqrt{(1 + \frac{1}{n})}} \sim t_{n-1} \quad \text{gl}$$

Intervalo de previsão

Um intervalo de previsão (IP) para uma observação particular a ser selecionada de uma população com distribuição normal é:

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}.s.\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

o nível de previsão é $100(1-\alpha)\%$

Intervalo de tolerância

Seja k um número entre 0 e 100. Um intervalo de tolerância para capturar no mínimo $k\%$ dos valores em uma população com distribuição normal, com nível de confiança de 95% tem a forma:

$$\bar{x} \pm \text{valor crítico de tolerância}.s$$

População normal

Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de uma distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. Então a v.a.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

tem ma distribuição de probabilidade χ^2 com $n-1$ graus de liberdade (g.l)

Valor crítico Qui-quadrado

Seja $\chi^2_{\alpha,\nu}$ um valor crítico Qui-quadrado, denotará o número no eixo tal que α de área abaixo da curva Qui-quadrado com ν g.l. está à direita de $\chi^2_{\alpha,\nu}$

Representação gráfica de $\chi^2_{\alpha,\nu}$

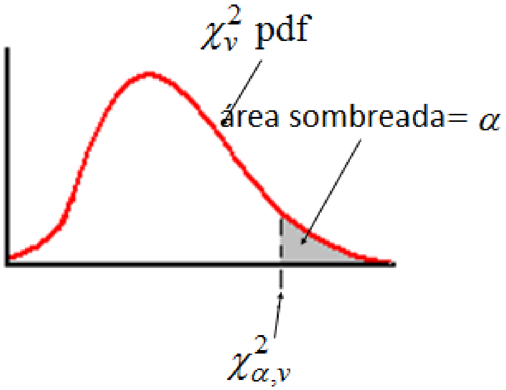
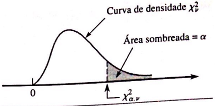


Figura: curva $\chi^2_{\alpha,\nu}$

Tabela A.7 Valores Críticos para Distribuições Qui-Quadrado



ν \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,843	5,025	6,637	7,882
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,992	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,344	12,837
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,832	15,085	16,748
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,440	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,012	18,474	20,276
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,534	20,090	21,954
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,022	21,665	23,587
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,724	26,755
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	19,812	22,362	24,735	27,687	29,817
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,600	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,577	32,799
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,407	7,564	8,682	10,085	24,769	27,587	30,190	33,408	35,716
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,843	7,632	8,906	10,117	11,651	27,203	30,143	32,852	36,190	38,580
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,033	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,670	35,478	38,930	41,399
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,042	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,195	11,688	13,090	14,848	32,007	35,172	38,075	41,637	44,179
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,519	11,523	13,120	14,611	16,473	34,381	37,652	40,646	44,313	46,925

Intervalo de confiança

Um IC de $100(1-\alpha)\%$ para a variância σ^2 de uma população normal tem:
Limite Inferior:

$$(n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2,n-1}$$

Limite Superior:

$$(n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

para um IC para σ, tome a raiz quadrada de cada limite acima.