DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

August 30, 2023

Axiomas e Regras de Inferência

Relembrando...

- Na lógica de predicados, as fbfs são formadas de predicados, quantificadores, conectivos lógicos e símbolos de grupamento.
- Neste sistema, uma fbf "verdadeira" significa uma fbf válida - uma fbf que seja válida em qualquer interpretação possível.

Axiomas e Regras de Inferência

fbfs predicativas que têm a mesma forma lógica que tautologias são válidas.

$$P(x) \longrightarrow [Q(x) \longrightarrow P(x)]$$

Possui a forma $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$ no cálculo proposicional.

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

P,Q e R representam fbfs predicativas:

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
4. $(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \longrightarrow [(\forall x)P(x) \longrightarrow (\forall x)Q(x)]$
5. $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$ ou $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$ onde a é uma constante.
6. $(\exists x)P(x) \longrightarrow P(t)$ onde t é uma constante ou o nome de uma variável ainda não usada no decorrer da demonstração.
7. $P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ ou $P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$ onde a é uma constante e x não ocorre em $P(a)$
8. $[(\exists x)P(x)]' \longleftrightarrow (\forall x)[P(x)]'$

Axiomas e Regras de Inferência

Axiomas para a Lógica de Predicados

A notação $P(x)$ indica que x ocorre na fbf, mas outras variáveis também podem ocorrer. Portanto,

$$(\forall x)(\exists y)S(x,y) \longrightarrow (\exists y)S(a,y)$$

onde a é uma constante, é uma instância do Axioma 5 (tome $P(x)$ como sendo $(\exists y)S(x,y)$)

Lógica de Predicados

Regras de Inferência para a Lógica de Predicados

1. **Modus ponens**: Q pode ser inferida de P e $P \longrightarrow Q$
2. **Generalização**: $[(\forall x)Q]$ pode ser inferida de Q desde que:
   - a: Q não tenha sido deduzida de qualquer hipótese na qual x seja uma variável livre e
   - b: Q não tenha sido deduzida pelo uso do Axioma 6 de uma fbf da forma $(\exists y)Q(y)$ na qual x seja uma variável livre.

Lógica de Predicados

Regras de Inferência para a Lógica de Predicados

1. **Modus ponens**: Q pode ser inferida de P e $P \longrightarrow Q$
2. **Generalização**: $[(\forall x)Q]$ pode ser inferida de Q desde que:
   - a: Q não tenha sido deduzida de qualquer hipótese na qual x seja uma variável livre e
   - b: Q não tenha sido deduzida pelo uso do Axioma 6 de uma fbf da forma $(\exists y)Q(y)$ na qual x seja uma variável livre.

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exemplo

Com o uso da lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$ (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow A$, mp)
4. $Q(x)$ (2, taut $A \wedge B \longrightarrow B$, mp)
5. $(\forall x)P(x)$ (3, generalização)
6. $(\forall x)Q(x)$ (4, generalização)
7. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$ (5, 6, $A \wedge B$ pode ser deduzida de A e B)

Lógica de Predicados

Exercício

Use a lógica de predicados para provar o teorema:

$$(\forall x)P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$$

Lógica de Predicados

Exemplo

A fbf a seguir é um teorema da lógica de predicados?

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \rightarrow Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \rightarrow B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \rightarrow B \rightarrow A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \to Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \to B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \to (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \to (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \to B \to A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \rightarrow Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \rightarrow B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \rightarrow B \rightarrow A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \rightarrow Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \rightarrow B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \rightarrow B \rightarrow A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \rightarrow Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \rightarrow B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \rightarrow B \rightarrow A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ (hipótese)
2. $(\forall x)([P(x)]' \rightarrow Q(x))$ $(A \vee B \Leftrightarrow A' \rightarrow B)$
3. $(\forall x)[P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x))$ (2, A4, mp)
4. $(\forall x)[P(x)]' \leftrightarrow [(\exists x)P(x)]'$ (A8)
5. $[(\exists x)P(x)]' \rightarrow (\forall x)Q(x)$ (substituição de 4 em 3)
6. $[(\exists x)P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$ (5, taut $A' \rightarrow B \rightarrow A \vee B$, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo

A fbf é um teorema?

$$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$$

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exemplo

$[P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)] \longrightarrow (\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$

1. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (hip.)
2. $P(x)$ (hip. temp)
3. $(\forall y)Q(x,y)$ (1, 2, mp)
4. $Q(x,y)$ (3, A5, mp)
5. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (4 deduzido de 2)
6. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (5, generaliz)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:

$$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$$

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exercício

Usando a lógica de predicados, prove o teorema:
$(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)] \longrightarrow [P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)]$

1. $(\forall y)[P(x) \longrightarrow Q(x,y)]$ (hipótese)
2. $P(x) \longrightarrow Q(x,y)$ (1, A5, mp)
3. $P(x)$ (Hip. temp)
4. $Q(x,y)$ (2, 3, mp)
5. $(\forall y)Q(x,y)$ (4, gener.)
6. $P(x) \longrightarrow (\forall y)Q(x,y)$ (5 ded de 3)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

Mostre que o argumento a seguir é válido: "Todo microcomputador tem uma porta serial. Alguns microcomputadores têm porta paralela. Portanto alguns computadores têm ambas as portas serial e paralela". Usando:

- $M(x)$: x é um microcomputador.
- $S(x)$: x tem porta serial.
- $P(x)$: x tem porta paralela.

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

Mostre que o argumento a seguir é válido: "Todo microcomputador tem uma porta serial. Alguns microcomputadores têm porta paralela. Portanto alguns computadores têm ambas as portas serial e paralela". Usando:

- $M(x)$: x é um microcomputador.
- $S(x)$: x tem porta serial.
- $P(x)$: x tem porta paralela.

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \land (\exists x)[M(x) \land P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \land S(x) \land P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \land P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \land P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \land P(a) \land S(a)$ (3, 6, $A \land B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \land S(a) \land P(a)$ ($A \land B \Longleftrightarrow B \land A$)
9. $(\exists x)[M(x) \land S(x) \land P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ ($A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$)
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \land (\exists x)[M(x) \land P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \land S(x) \land P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \land P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \land P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \land P(a) \land S(a)$ (3, 6, $A \land B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \land S(a) \land P(a)$ ($A \land B \Longleftrightarrow B \land A$)
9. $(\exists x)[M(x) \land S(x) \land P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ ($A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$)
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ ($A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$)
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ $(A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A)$
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ $(A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A)$
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ $(A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A)$
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exemplo - Argumentos Válidos

$$(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)] \wedge (\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \longrightarrow (\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$$

1. $(\forall x)[M(x) \longrightarrow S(x)]$ (hipótese)
2. $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)]$ (hipótese)
3. $M(a) \wedge P(a)$ (2, A 6, mp)
4. $M(a) \longrightarrow S(a)$ (1, A 5, mp)
5. $M(a)$ (3, taut., mp)
6. $S(a)$ (4, 5, mp)
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ (3, 6, $A \wedge B$ deduzida de A e B)
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ ($A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$)
9. $(\exists x)[M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)]$ (8, A 7, mp)

Lógica de Predicados

Exercício - Argumentos Válidos

Mostre que o argumento a seguir é válido: "Todas as músicas de rock são barulhentas. Existem algumas músicas de rock, logo existem algumas músicas barulhentas." Use os predicados R(x) e B(x).