16 - 9 = 7

1) $P(0,0,-3)$, $Q(4,2,0)$, $R(3,3,1)$

a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R.

Com esses pontos, podemos encontrar os vetores $\vec{PQ} = \langle 4,2,3\rangle$ e $\vec{PR} = \langle 3,3,4\rangle$. O produto vetorial entre esses dois vetores nos dá um vetor ortogonal aos três pontos.

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\vec{i} - \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\vec{k} = -1\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k} = \underline{(-1,-7,6)}$$

b) Calcule a área do triângulo PQR

O cosseno entre $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{PR}}{|\vec{PQ}|\cdot|\vec{PR}|} = \frac{4\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4}{\left(\sqrt{4^2+2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{3^2+3^2+4^2}\right)} = \frac{30}{\sqrt{29}\sqrt{34}}$$

Tomando $\vec{PR}$ como a base, a altura "h" pode ser dada como:

$$h = |\vec{PQ}|\cdot \operatorname{sen}\theta = \sqrt{29}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{30}{\sqrt{29}\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{86}{34}}$$

∴ A área do triângulo pode ser dada por

$$A_T = \frac{|\vec{PR}|\cdot h}{2} = A_T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{\frac{86}{34}} = \frac{\sqrt{86}}{2}$$

2) Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS

$P(3,0,1)$, $Q(-1,2,5)$, $R(5,1,-1)$, $S(0,4,2)$

- $\vec{PQ} = \langle -4,2,4\rangle$
- $\vec{PR} = \langle 2,1,-2\rangle$
- $\vec{PS} = \langle -3,4,1\rangle$

O volume do paralelepípedo, determinado pelos três vetores encontrados, é dado por:

$V = |\vec{PQ}\cdot(\vec{PR}\times\vec{PS})|$ (módulo do produto misto)

$$\vec{PQ}\cdot(\vec{PR}\times\vec{PS}) = \det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}a_1 - \det\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}a_2 + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}a_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}(-4) - \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}2 + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot(4) =$$

$$= -36 + 8 + 44 = \underline{16}$$

3) Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $u = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $v = 3\vec{i} - \vec{j}$ e $w = 5\vec{i} + 9\vec{j} - 4\vec{k}$ são coplanares.

- $\vec{u} = \langle 1,5,-2\rangle$
- $\vec{v} = \langle 3,-1,0\rangle$
- $\vec{w} = \langle 5,9,-4\rangle$

Produto misto:

$$(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}\cdot u_1 - \det\begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}u_2 + \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}u_3 =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}1 - \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot 5 + \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}(-2) = 4 + 60 - 64 = \underline{0}$$

O produto misto resultando 0 indica que os vetores são coplanares.