ACH2011 - Cálculo I

Sistema de Informação - EACH

Lista 4: Limite e Derivadas[1]

1. Uma bola é atirada no ar com velocidade de $10m/s$. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$.

   (a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ e dura
   (i) $0,5s$, (ii) $0,1s$, (iii) $0,05s$, (iv) $0,01s$.

   (b) Estime a velocidade instantánea quando $t = 1,5$.

2. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \quad e \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

   Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

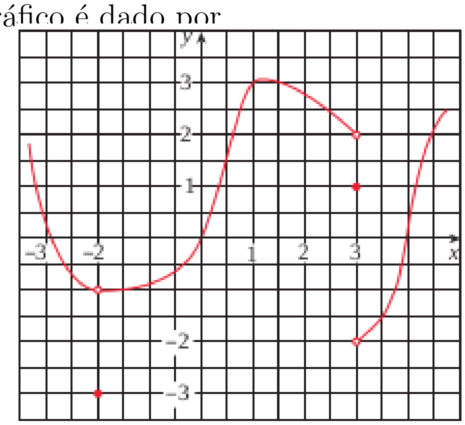
   é possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

4. Explique o significado de cada uma das equações a seguir.

   (a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$,

   (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$.

5. Para a função g cujo gráfico é dado por



   Determine o valor solicitado, se existir. Se não existir, explique por que.
   (a) $\lim_{x \to -2^-} g(x)$, (b) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$, (c) $\lim_{x \to -2} g(x)$, (d) $\lim_{x \to 3^-} g(x)$,
   (e) $\lim_{x \to 3^+} g(x)$, (f) $\lim_{x \to 3} g(x)$, (g) $g(3)$, (h) $\lim_{x \to 0} g(x)$.

[1]Exercícios do livro Cálculo de James Stewart

6. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfação todas as condições dadas.

   (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$.

   (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 0$, $f(0)$ não esta definida.

7. Determine o limite infinito.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$.

8. Dado que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ e $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$. Encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quão.

   (a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$,

   (b) $\lim_{x\to 2}(g(x))^3$,

   (c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$,

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$,

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)}$,

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$.

9. Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

   (a) $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$,

   (b) $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$,

   (c) $\lim_{x\to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$,

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1-3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$.

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3.$$

    (b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 3$$

    está correta.

11. Calcule o limite, se existir.

   (a) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$,

   (c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{x}$.

12. Se $4-x \leq f(x) \leq x^2-5x+4$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

13. Se $2x \leq g(x) \leq x^4-x^2+2$ para todo x, encontre $\lim_{x\to 1} g(x)$.

14. Seja $g(x) = \begin{cases} x & se \quad x<1 \\ 3 & se \quad x=1 \\ 2-x^2 & se \quad 1<x\leq 2 \\ x-3 & se \quad x>2 \end{cases}$

   (a) Calcule, se existirem, os limites.

      i. $\lim_{x\to 1^-} g(x)$,

      ii. $\lim_{x\to 1} g(x)$,

      iii. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$,

      iv. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$,

      v. $\lim_{x\to 2} g(x)$,

      vi. $g(1)$.

   (b) Esboce o gráfico de g.

15. Se p for um polinômio, mostre que $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$.

16. Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites:

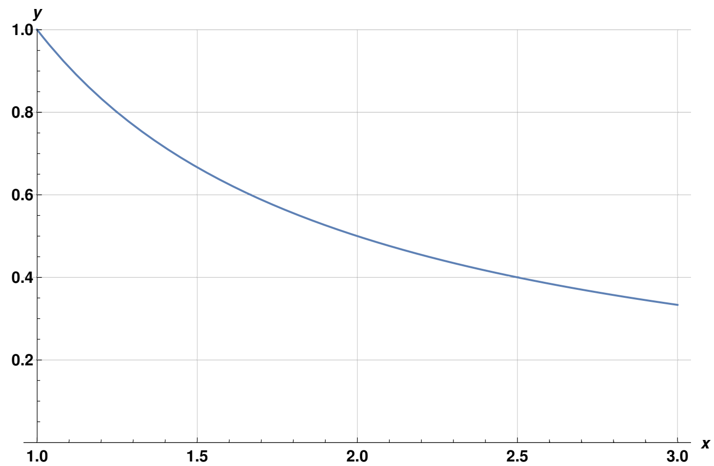
   (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x}$.

17. Mostre por meio de um exemplo que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existam.

18. Mostre por meio de um exemplo que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existam.

19. Use o gráfico dado de $f(x) = 1/x$ para encontrar um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$ então $|\frac{1}{x} - 0.5| < 0.2$.



20. (a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \epsilon$, onde $\epsilon = 0,1$.
    (b) Repita a parte (a) com $\epsilon = 0,01$.

21. Demonstre cada afirmação usando a definição ϵ, δ de limite.
    (a) $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$,
    (b) $\lim\limits_{x \to -2}(\frac{1}{2}x + 3) = 2$,
    (c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$,
    (d) $\lim\limits_{x \to a} x = a$,
    (e) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$,
    (f) $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

22. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \epsilon} - 3$.

23. Demonstre que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$.

24. Se a função f for definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$

    Demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

25. Escreva uma equação que expresse o fato de uma função f contínua no número 4.

26. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

27. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda parte, exceto em $x = 3$ e contínua á esquerda em 3.

28. Se f e g forem funçoes contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$. Encontre $g(3)$.

29. Use a continuidade para calcular o limite.

    (a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$,

    (b) $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

30. Use o Teorema do Valor Intermediario para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

    (a) $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$,

    (b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$,

    (c) $f(x) = \cos x = x$, $(0, 1)$.

31. Demostre que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

32. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda parte.

    (b) Demostre que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também o é.

    (c) A reciproca da afirmação (b) também é verdadera? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue f também é? Se for assim, demostre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

33. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir:

    (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$,

    (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

34. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.

    (b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

35. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

    (a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, f é ímpar.

    (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

36. Encontre o limite.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+3}$,

(b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}$.

37. Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

(a) $y = \dfrac{x}{x+4}$,

(b) $y = \dfrac{2e^x}{e^x-5}$.

38. Sejam P e Q polinômios. Encontre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

39. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$;

(b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(1, \frac{1}{2})$.

40. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de $10m/s$, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1,86t^2$.

(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

(c) Quando a pedra atinge a superfície?

(d) Com que velocidade da pedra atinge a superfície?

41. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

42. Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$,

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$,

(c) $f(x) = x + \sqrt{x}$,

(d) $f(x) = \sqrt{1+2x}$,

(e) $f(x) = \dfrac{3+x}{1-3x}$,

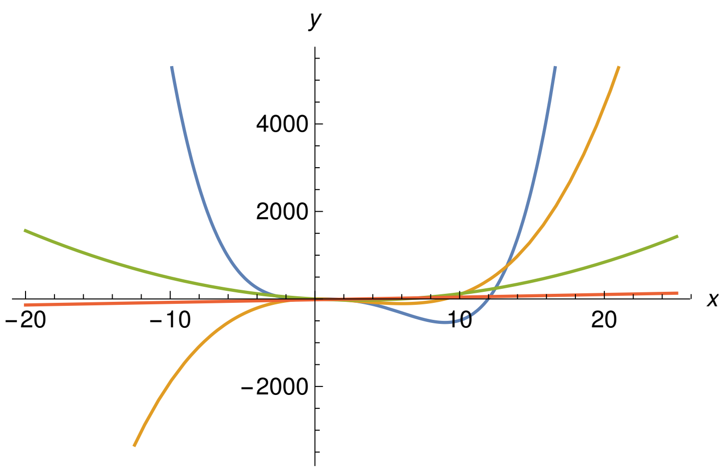
(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

43. Lembre-se de que a função f é chamada par se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir:

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função impar é uma função par.

44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique casa curva e explique suas escolhas.