— Regra de L'Hôpital;
— Valores máximos e mínimos de uma função:
- — Definição;
- — Teorema do valor extremos;
- — Teorema de Fermat;
- — O método do Intervalo Fechado.

Roteiro de estudos:

1) Alguns comentários dos conteúdos:

Regra de l'Hôspital Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Potências Indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0,

3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞ .

Potências Indeterminadas

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

seja $y = f(x)^{g(x)}$, então $\ln y = g(x) \ln f(x)$,

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

Em qualquer método, somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

2) Assistir ao vídeo em > Regra de L'Hôpital para estudar mais um calculo de limite indeterminado onde pode ser usada a Regra de L'Hôpital.

3) Assistir também aos vídeos em > 'Valores Máximos e Mínimos'.

4) Um resumo dos conteúdos estudados:

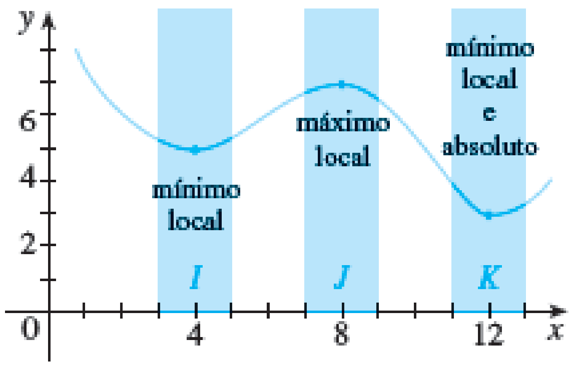
Primeiro as definições de máximo e mínimo global ou absoluto e máximo e mínimo local ou relativo:

1 Definição Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

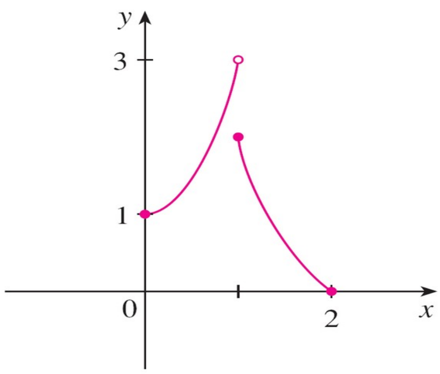
- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

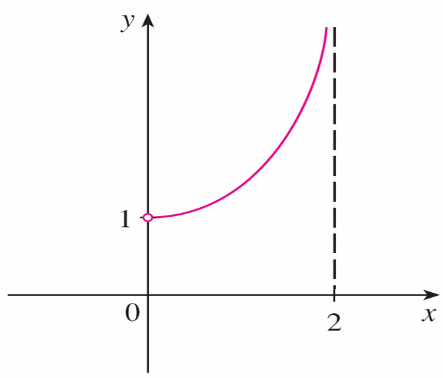
2 Definição O número $f(c)$ é um

- valor **máximo local** de f se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x está próximo de c.



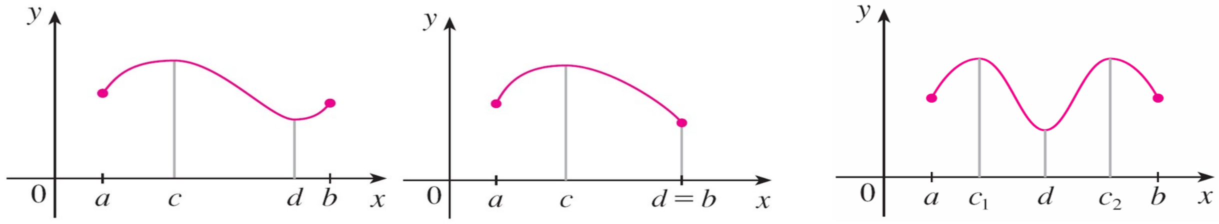
Observando a figura vemos que a função tem um mínimo local em *x=4* e em *x=12*, e um máximo local em *x=8*. *f (4) = 5* é um valor mínimo local, pois é o menor valor de *f* no intervalo *I*. Analogamente, *f (8) = 7* é um valor máximo local, pois é o maior valor de *f* no intervalo *K*. Além disso em *x=12* a função tem o mínimo valor absoluto.





Na primeira figura podemos observar que a função tem um valor mínimo absoluto em *x=2*, mas ela não possui máximo absoluto, a segunda função não tem nem máximo absoluto nem mínimo absoluto, pois a função não está definida nem em *x=0* nem em *x=2*. Portanto funções podem ou não apresentar máximos e mínimos absolutos. O seguinte teorema dá as condições para que uma função tenha valores extremos (máximos e mínimos absolutos).

3 O Teorema do Valor Extremo Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.



Estes são alguns exemplos de funções que atingem os valores extremos, são funções contínuas definidas em um intervalo fechado.

O Teorema do Valor Extremo me dá as condições que precisa satisfazer *f* para ter os valores extremos, mas não me diz como fazer para achar esses valores.

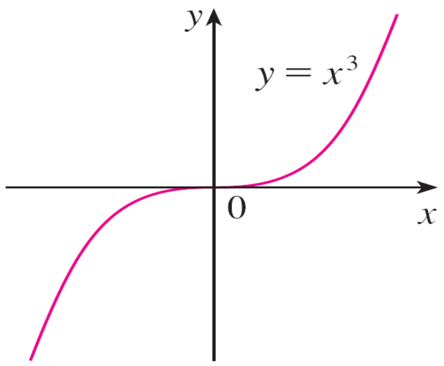
Para começar a construir um método que nos permita achar os valores extremos de uma função, vamos observar novamente às três últimas figuras. Nessas figuras vemos que em cada máximo e mínimo local, a reta tangente ao gráfico da curva é horizontal, paralela ao eixo *x*, isso significa que o coeficiente angular dessas retas é *0*, portanto a derivada nesses pontos é igual a zero.

O seguinte teorema, chamado de teorema de Fermat confirma que nossa observação é sempre verdadeira:

4 Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

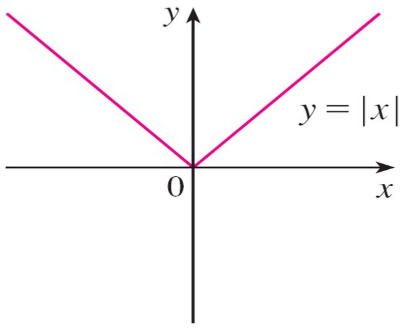
Algumas observações:

1. O Teorema me diz que se a função possui um máximo ou mínimo local em *c* e é derivável em *c*, então a derivada é zero, mas o fato da derivada ser zero em *c* não garante que seja um ponto de máximo ou mínimo local, por exemplo:



A derivada em zero é zero mas esta função não tem nem máximo nem mínimo local em *x=0.*

2.



A função $f(x)=|x|$ tem um valor mínimo em $x=0$, é um mínimo local e absoluto, mas a função não é derivável em zero.

Portanto, precisamos tomar muito cuidado ao usar o Teorema de Fermat e lembrar que a recíproca do Teorema de Fermat não é verdadeira. Porém, o Teorema de Fermat me indica quais são nossos 'candidatos' a máximos e mínimos locais. Chamaremos a esses números de números criticos.

> **6** **Definição** Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que a $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existem.

Por que os números criticos são meus candidatos a máximo e mínimos locais? Pois, o Teorema de Fermat me garante que se c é um ponto de máximo ou mínimo local, então c é um número critico.

Depois de tudo o apresentado, verificamos que os máximos e mínimos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado acontece nos extremos dos intervalos ou nos pontos de máximo e mínimo local. Veja o Método do Intervalo Fechado:

> **O Método do Intervalo Fechado** Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:
>
> **1.** Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
>
> **2.** Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
>
> **3.** O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

5) Fazer os exercícios das listas correspondentes a estes assuntos.

Lembrando que vocês podem tirar dúvidas, da teoria e dos exercícios, com a professora ou no fórum.

Bons estudos!

Professora Claudia

Os enunciados que aparecem em destaque e gráficos foram extraídos do livro de aula Cálculo Volume 1 de James Stewart.