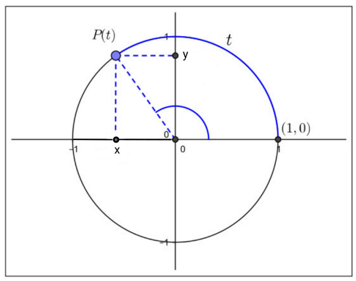
Funções Trigonométricas[1]

Definições e propriedades

Consideremos um ponto P na circunferência C de raio 1 centrada no ponto $(0,0)$. O ponto P queda determinado pelas suas coordenadas cartesianas (x, y). Por outro lado, se consideramos o arco de circunferência entre o ponto $(1,0)$ e (x, y), en sentido anti-horário, P também fica determinado pela longitude do arco. Para cada número real t (longitude de arco)

Figura 1: P depende de t

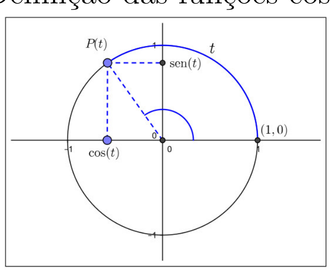


definimos um ponto $P(t)$ na circunferência unitária com coordenadas (x, y). Estas coordenadas dependem do valor de t, portanto escrevemos o ponto

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

As coordenadas podem ser vistas como funciones de t, pois, para cada número t, temos um único ponto (x, y) na circunferência unitária. Estas funções recebem o nome de cosseno e seno:

Figura 2: Definição das funções cosseno e seno



[1]Parte deste foi traduzido do 'Ingreso FAMAF: Material de Estudo - Universidad de Córdoba' , mas adaptado para nosso curso, portanto contém varias modificações. Algumas figuras foram tiradas de 'Ingreso FAMAF: Material de Estudo - Universidad de Córdoba'.

$$x(t) = \cos(t)$$
$$y(t) = \mathrm{sen}(t)$$

Por exemplo em sala de aula calculamos que $P(\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, portanto

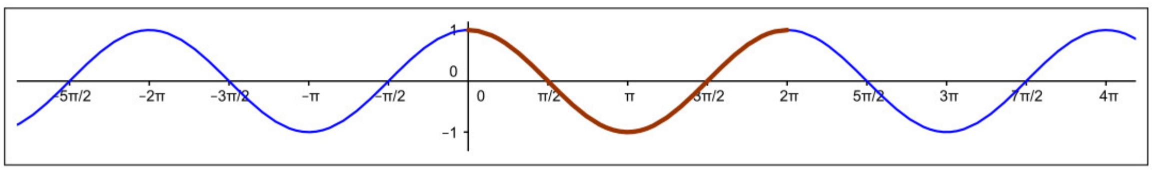
$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

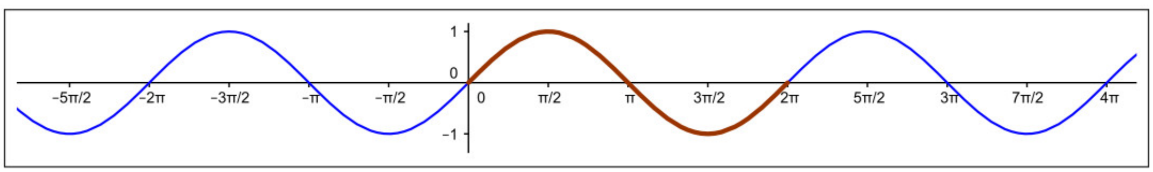
Além disso sabemos que qualquer ponto da circunferência (x, y) satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$, em particular como o ponto $P(t) = (x(t), y(t)) = (cos(t), sen(t))$ é um ponto da circunferência, então

$$\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1.$$

Figura 3: Funções cosseno e seno



(a) Função Cosseno



(b) Função Seno

Observações:

1. O domínio da função seno e cosseno é todo $\mathbb{R}$, pois, definimos o ponto $P(t)$, na circunferência unitária, para todos os números reais t.

2. Como $P(t) = (cos(t), sen(t))$ é um ponto da circunferência unitária, então

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1$$

e

$$-1 \leq \mathrm{sen}(t) \leq 1,$$

isto é, a imagem do seno e do cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.

3. Como o perímetro da circunferência unitária é 2π, vimos em sala de aula que $P(t) = P(t+2\pi) = P(t+4\pi)$. Em geral, podemos observar que $P(t) = P(t+2k\pi)$ onde k é um número inteiro. Portanto

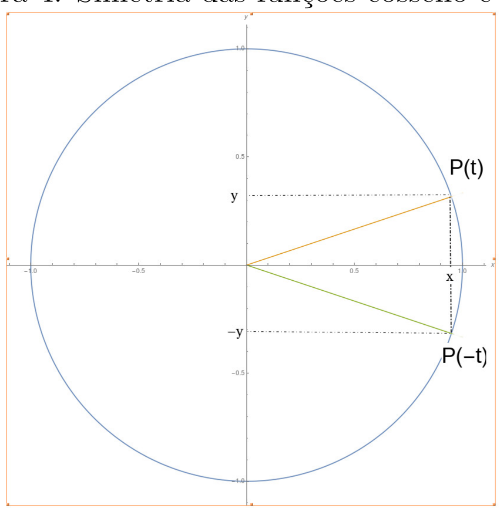
$$cos(t + 2k\pi) = cos(t)$$
$$sen(t + 2k\pi) = sen(t)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Dizemos que seno e cosseno são funções periódicas com período 2π.

Definição: Uma função $f(x)$ é periódica se existe um número positivo P tal que $f(x+P) = f(x)$ para qualquer valor x no domínio. O menor valor possível de P é chamado o período de f.

4. Observe as coordenadas do ponto $P(-t)$ na Figura 4

Figura 4: Simetria das funções cosseno e seno



$$P(t) = (x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$$

Portanto $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$. Como $P(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$ e tem coordenadas $(x, -y)$, então

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

e

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}(t)$$

para todo número real t. Portanto a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

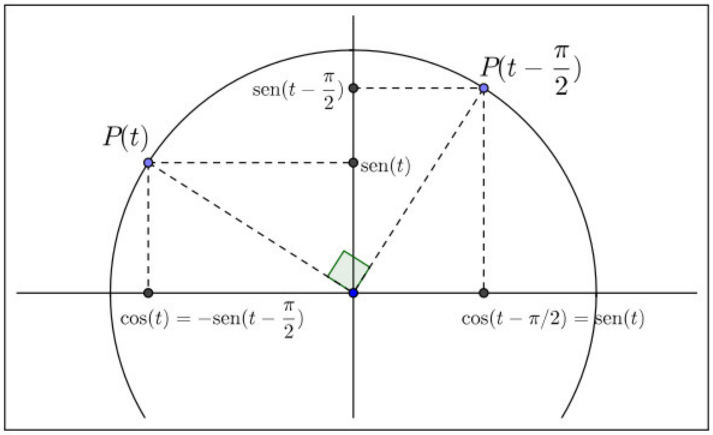
5. Analisando a circunferência unitária na Figura 5, podemos observa que sendo $P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ e $P(t - \frac{\pi}{2}) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \text{sen}(t - \frac{\pi}{2}))$, podemos concluir que:

$$\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(t)$$

e

$$\text{sen}(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t)$$

Figura 5: Ponto $P(t)$ e $P(t - \frac{\pi}{2})$



6. Analisando a circunferência unitária podemos observando que $P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ e $P(t+\pi) = (\cos(t+\pi), \text{sen}(t+\pi))$ estão em quadrantes opostos em relação à origem, isto é, as primeiras coordenadas e as segundas coordenadas tem sinais opostos (veja Figura 6). Portanto

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

e

$$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}(t)$$

7. Para qualquer s e t em $\mathbb{R}$ são verdadeiras as seguintes identidades para o cosseno da soma e da subtração:

$$\cos(t + s) = \cos(t)\cos(s) - \text{sen}(t)\text{sen}(s)$$

$$\cos(t - s) = \cos(t)\cos(s) + \text{sen}(t)\text{sen}(s).$$

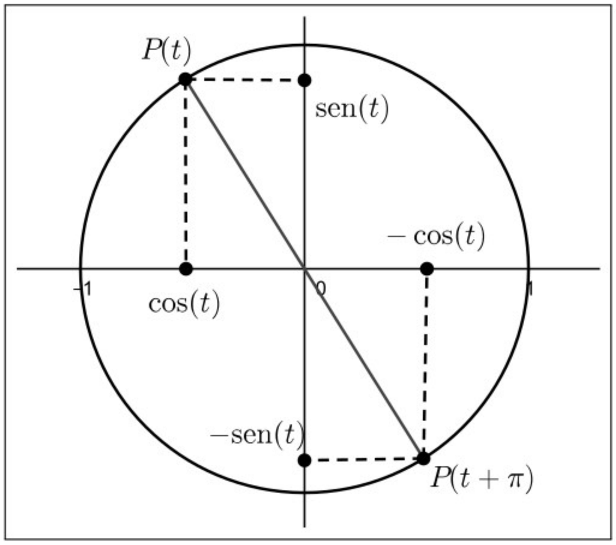
Se $t = s$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t), \tag{1}$$

e lembrando que $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$ temos que $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, temos

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

Figura 6: Ponto $P(t)$ e $P(t+\pi)$



ou

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}.$$

Da mesma forma como $\cos^2(t) = 1 - \operatorname{sen}^2(t)$ obtemos

$$\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

8. Para qualquer s e t em $\mathbb{R}$ são verdadeiras as seguintes identidades para o cosseno da soma e da subtração:

$$\operatorname{sen}(t+s) = \operatorname{sen}(t)\cos(s) + \operatorname{sen}(s)\cos(t)$$

$$\operatorname{sen}(t-s) = \operatorname{sen}(t)\cos(s) - \operatorname{sen}(s)\cos(t).$$

Se $t = s$,

$$\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t).$$

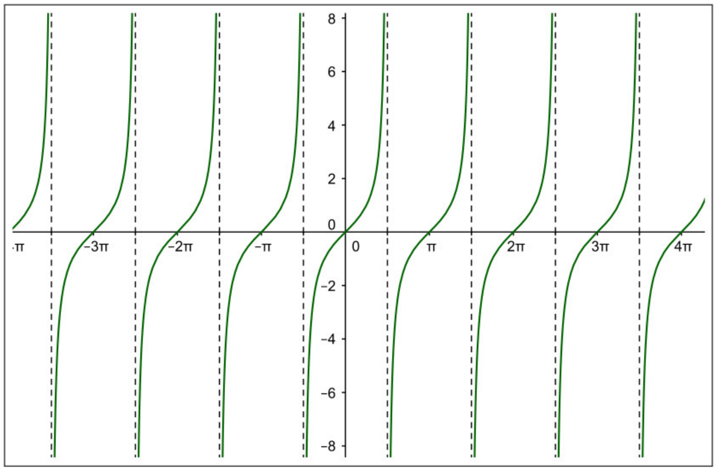
Outras funções trigonométricas:

Além do seno e o cosseno, temos mais 4 funções trigonométricas:

1. Tangente: é o quociente entre o seno e o cosseno, isto é,

$$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}.$$

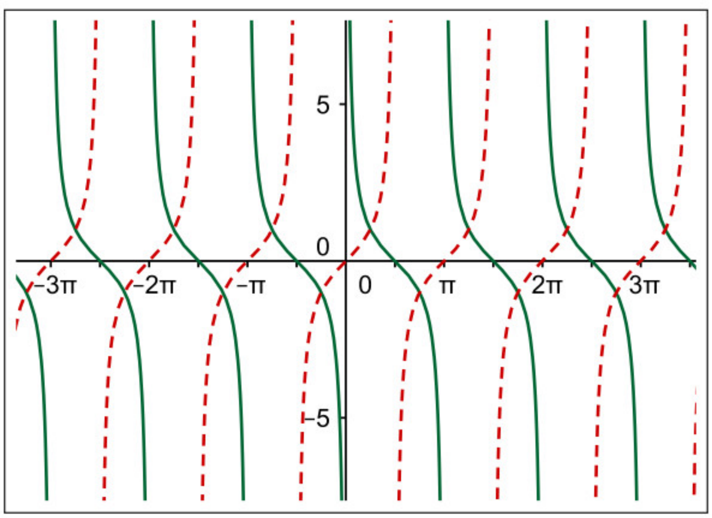
Figura 7: Função Tangente



2. Cotangente: é o quociente entre o cosseno e o seno, isto é,

$$\text{cotg}(t) = \frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)}.$$

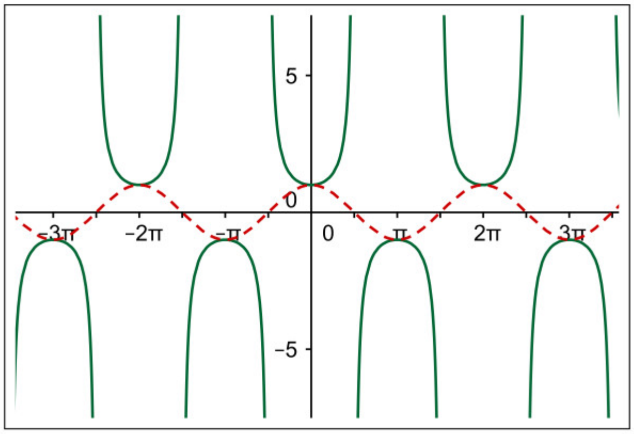
Figura 8: Função Cotangente versus Função Tangente



3. Secante: é definida como 1 dividido o cosseno, isto é,

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}.$$

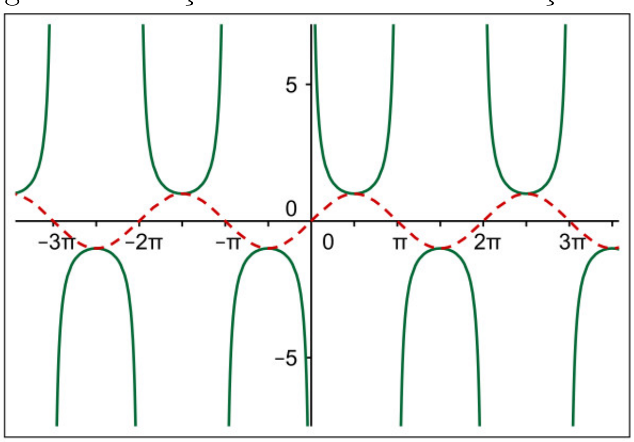
Figura 9: Função Secante versus Função Cosseno



4. Cossecante: é definida como 1 dividido o seno, isto é,

$$\text{cossec}(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)}.$$

Figura 10: Função Cossecante versus Função Seno



Se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $cos(t) \neq 0$, dividindo a equação $\text{sen}^2(t)+\cos^2(t) = 1$ por $cos^2(t)$, obtemos

$$\frac{\text{sen}^2(t)}{cos^2(t)} + \frac{cos^2(t)}{cos^2(t)} = \frac{1}{cos^2(t)},$$

isto é,

$$\text{tg}^2(t) + 1 = \sec^2(t)$$

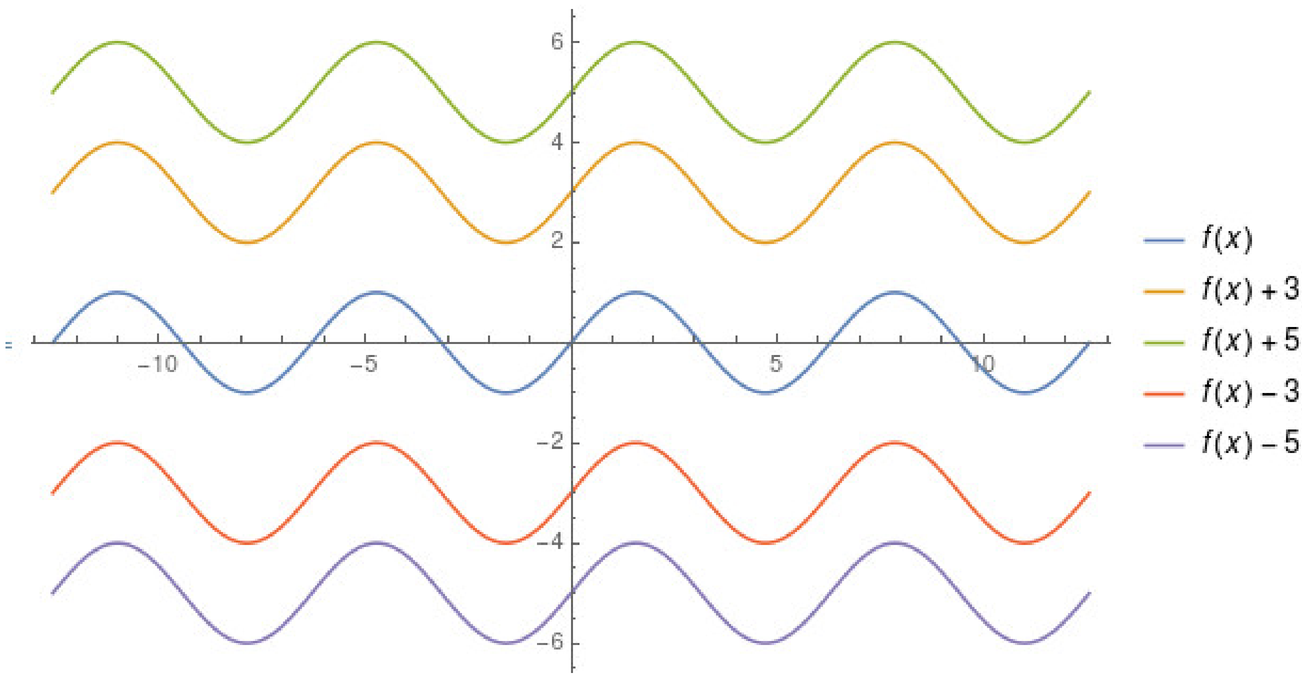
ou

$$\text{tg}^2(t) = \sec^2(t) - 1.$$

Gráficos e Transformações no plano

Seja $y = f(x) = sen(x)$, veja na Figura 11 como se transforma o gráfico quando somamos uma constante à função.

Figura 11: Deslocando o gráfico na vertical



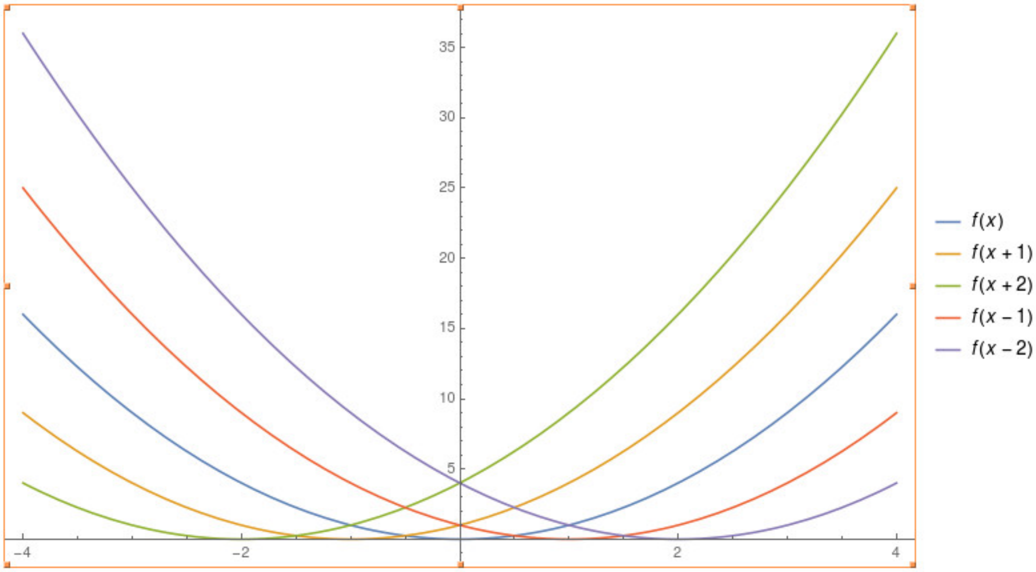
Generalizando, se $y = f(x) + a$ onde $a \in \mathbb{R}$, então

- Se $a > 0$ o gráfico se desloca verticalmente para cima.
- Se $a < 0$ o gráfico se desloca verticalmente para baixo.

Seja $y = f(x) = x^2$, observe na Figura 12 como se transforma o gráfico quando somamos uma constante à variável independente.

Generalizando, se $y = f(x + b)$ onde $b \in \mathbb{R}$, então

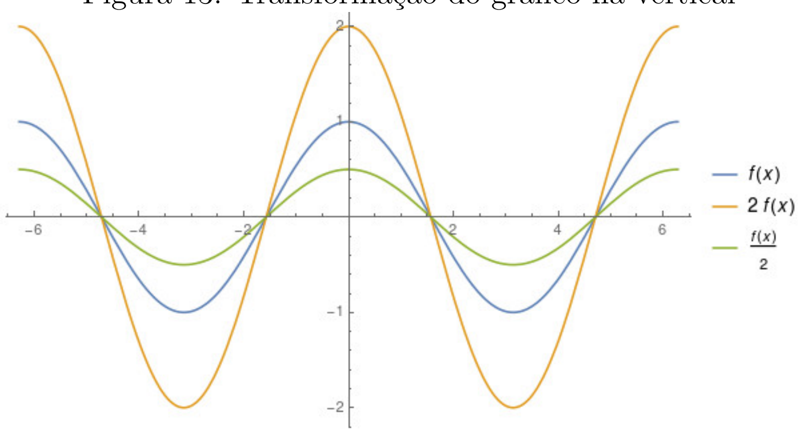
Figura 12: Deslocando o gráfico na horizontal



- Se $b > 0$ o gráfico se desloca horizontalmente para esquerda.
- Se $b < 0$ o gráfico se desloca horizontalmente para direita.

Seja $y = f(x) = cos(x)$ na Figura 13 podemos observar como se transforma o gráfico quando multiplicamos uma função por uma constante.

Figura 13: Transformação do gráfico na vertical



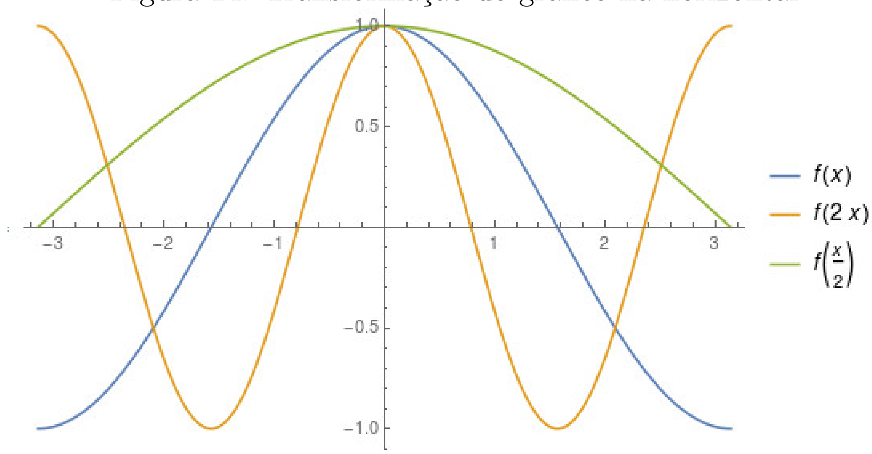
Generalizando, se $y = c \cdot f(x)$ onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, então

- Se $c > 1$ esticamos o gráfico da função verticalmente.

- Se $c < 1$ comprimimos o gráfico da função verticalmente.

Seja $y = f(x) = \cos(x)$, veja na Figura 14 como se transforma o gráfico quando multiplicamos a variável independente por uma constante.

Figura 14: Transformação do gráfico na horizontal



Generalizando, se $y = f(d \cdot x)$ onde $d \in \mathbb{R}$ e $d > 0$, então

- Se $d > 1$ o gráfico se comprime na horizontal.
- Se $d < 1$ o gráfico se estica na horizontal.