DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF$^{\mathrm{a}}$.: Karla Lima

EACH-USP

August 14, 2023

Programação do curso

- Objetivo do Curso:
  - Desenvolver o raciocínio lógico matemático;
  - Desenvolver habilidades de prova e demonstração;
  - Prover o fundamento sobre as estruturas discretas;

Programação do curso

Bibliografia principal: Judith. L. Gerstin: Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação;

- Lógica Formal
  - Sentenças, Representação Simbólica e Tautologias
  - Quantificadores, Predicados e Validade
  - Lógica Proposicional
  - Lógica de Predicados
- Técnicas de Demonstração
  - Direta
  - Contraposição
  - Contradição
  - Indução

Programação do curso

- Conjuntos e Combinatória
  - Conjuntos
  - Contagem
  - Princípio de Inclusão e Exclusão
- Relações, Funções e Matrizes
- Grafos

Um pouco de história...

- Em 1882, o alemão Friedrich Frege originou a lógica formal, adaptando o raciocínio abstrato humano à rigidez matemática para investigar a validade e verdade das cadeias de pensamento.
- No inicio do século XX, o matemático inglês George Boole, criou as chamadas tabelas de verdade e regras de inferência para analisar as fórmulas adaptadas a partir da língua corrente.

Sentenças, Representação Simbólica e Tautologias

Definição: Uma sentença (ou proposição) é uma frase que pode ser apenas verdadeira ou falsa.

Exemplo:

a. Dez é menor do que sete.
b. Como vai você?
c. Ela é muito talentosa.
d. Existem formas de vida em outros planetas do universo.

Conectivos e Valores-Verdade

Para enriquecermos nossas conversas não nos limitamos ao uso de simples sentenças. Ao contrário, as combinamos com o uso de conectivos a fim de criarmos sentenças compostas, cujo valor-verdade depende dos valores-verdade de cada sentença que o compõe e dos conectivos usados.

Exemplos de conectivos:

- e, mas, também: tem o mesmo valor nas expressões ($\wedge$);
- ou ($\vee$);

Notação

- Na lógica, usamos o símbolo $\wedge$ ou $\vee$ para denotar o conectivo lógico e as letras maiúsculas para denotar as sentenças;
- Valores-verdade são atribuídos aos símbolos proposicionais.

Conectivos e Valores-Verdade

Exercício

a. Se A é verdadeira e B é falsa, que valor você atribuiria a $A \wedge B$?
b. Se A é falsa e B é verdadeira, que valor você atribuiria a $A \wedge B$?
c. Se A e B são ambas falsas, que valor você atribuiria a $A \wedge B$?

Conceitos

A expressão $A \wedge B$ é chamada a conjunção de A e B; e A e B são chamados os fatores da expressão.

Conectivos e Valores-Verdade

Notação

- Outro conectivo é a palavra *ou*, denotada pelo símbolo $\vee$.
- A expressão $A \vee B$ (leia-se "A ou B") é chamada disjunção de A e B e A e B são chamados de parcelas da expressão.

Conectivos e Valores-Verdade

Table: Valores-Verdade

A	B	$A \wedge B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

A	B	$A \vee B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Conectivos e Valores-Verdade

Table: Valores-Verdade

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, **então** sentença 2".

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, **então** sentença 2".
- Se A denota a sentença 1 e B denota a sentença 2, a sentença composta deve ser denotada por $A \longrightarrow B$;

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, então sentença 2".
- Se A denota a sentença 1 e B denota a sentença 2, a sentença composta deve ser denotada por $A \longrightarrow B$;
- "A é condição suficiente para B".

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, então sentença 2".
- Se A denota a sentença 1 e B denota a sentença 2, a sentença composta deve ser denotada por $A \longrightarrow B$;
- "A é condição suficiente para B".
- "A somente se B"

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, então sentença 2".
- Se A denota a sentença 1 e B denota a sentença 2, a sentença composta deve ser denotada por $A \longrightarrow B$;
- "A é condição suficiente para B".
- "A somente se B"
- "B é consequência de A"

Conectivos e Valores-Verdade

Conceitos e Notação

- As sentenças podem ainda ser combinadas na forma "se sentença 1, então sentença 2".
- Se A denota a sentença 1 e B denota a sentença 2, a sentença composta deve ser denotada por $A \longrightarrow B$;
- "A é condição suficiente para B".
- "A somente se B"
- "B é consequência de A"
- Na expressão $A \longrightarrow B$, A constitui a sentença **antecedente** e B a sentença **consequente**.

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

A sentença "Fogo é uma condição necessária para fumaça" pode ser reformulada como "Se há fumaça, então há fogo". O antecedente é "há fumaça", e o consequente é "há fogo".

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Indique o antecedente e o consequente em cada uma das seguintes sentenças.

- Se a chuva continuar, o rio vai transbordar.
- Uma condição suficiente para a falha de uma rede é que a chave geral pare de funcionar.
- Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios.
- Uma boa alimentação é uma condição necessária para uma pessoa saudável.

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

"Se eu me formar nesta primavera, vou tirar férias na Flórida."

- Quando $A \longrightarrow B$ é verdadeira?
- Quando $A \longrightarrow B$ é falsa?

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

"Se eu me formar nesta primavera, vou tirar férias na Flórida."

- Quando $A \longrightarrow B$ é verdadeira?
- Quando $A \longrightarrow B$ é falsa?
- "B é uma condição necessária para A"

- Se ele, de fato, se formar na primavera e tirar suas férias na Flórida, a sentença foi verdadeira.
- Se ele formar e não tirar as férias na Flórida, seu comentário consistiu em uma sentença falsa.
- Se ele não se formou?

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- O conectivo de equivalência é denotado pelo símbolo $\longleftrightarrow$.
- $A \longleftrightarrow B$ é a abreviação de $A \longrightarrow B \wedge B \longrightarrow A$.
- A expressão $A \longleftrightarrow B$ é normalmente lida como "A se, e somente se, B".

Conectivos e Valores-Verdade

Table: Valores-Verdade de conectivos binários

A	B	$A \longrightarrow B$	$A \longleftarrow B$	$A \longrightarrow B \wedge B \longrightarrow A$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Conectivos e Valores-Verdade

Table: Valores-Verdade de conectivos bináriose

A	B	$A \longrightarrow B$	$A \longleftarrow B$	$A \longrightarrow B \wedge B \longrightarrow A$
V	V	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Conectivos e Valores-Verdade

Table: Valores-Verdade de conectivos binários

A	B	$A \longrightarrow B$	$A \longleftarrow B$	$A \longrightarrow B \wedge B \longrightarrow A$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- Os conectivos que vimos até agora são chamados de conectivos binários;
- Vamos agora considerar um conectivo unário, isto é, um conectivo que atua em uma única expressão para produzir uma outra.
- A negação é um conectivo unário.
- A negação de A, A' é lida como "não A", "A é falsa" ou "A não é verdade";

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- Os conectivos que vimos até agora são chamados de conectivos binários;
- Vamos agora considerar um conectivo unário, isto é, um conectivo que atua em uma única expressão para produzir uma outra.
- A negação é um conectivo unário.
- A negação de A, A' é lida como "não A", "A é falsa" ou "A não é verdade";

Isto não quer dizer que A' sempre tenha um valor-verdade falso, mas que o valor-verdade de A' é o contrário do de A.

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se A é a sentença "Vai chover amanhã", a sentença A' é "Não é verdade que vai chover amanhã", que pode ser reescrita como "Não vai chover amanhã".

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "Peter é alto e magro", como ficará P'?

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "Peter é alto e magro", como ficará P'?

- "É falso que Peter seja alto e magro"

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "Peter é alto e magro", como ficará P'?

- "É falso que Peter seja alto e magro"
- "Peter não é alto ou não é magro"

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "Peter é alto e magro", como ficará P'?

- "É falso que Peter seja alto e magro"
- "Peter não é alto ou não é magro"
- ~~"Peter é baixo e gordo"~~

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "O rio é raso ou poluído", como ficará P'?

- "É falso que o rio seja raso ou poluído"

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "O rio é raso ou poluído", como ficará P'?

- "É falso que o rio seja raso ou poluído"
- "O rio nem é raso nem é poluído"

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "O rio é raso ou poluído", como ficará P'?

- "É falso que o rio seja raso ou poluído"
- "O rio nem é raso nem é poluído"
- "O rio é profundo e despoluído"

Conectivos e Valores-Verdade

Exemplo

Se P for a sentença "O rio é raso ou poluído", como ficará P'?

- "É falso que o rio seja raso ou poluído"
- "O rio nem é raso nem é poluído"
- "O rio é profundo e despoluído"
- ~~"O rio não é raso ou não é poluído"~~

Conectivos e Valores-Verdade

Exercício

Qual das frases a seguir representa A' se A é a sentença "Julie adora manteiga mas detesta nata"?

- "Julie detesta manteiga e nata".
- "Julie não gosta de manteiga ou nata".
- "Julie não gosta de manteiga mas adora nata".
- "Julie detesta manteiga ou adora nata".

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

Podemos encadear sentenças, seus conectivos e os parênteses (ou colchetes) para obtermos novas expressões, tal como em

$$(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$$

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

Podemos encadear sentenças, seus conectivos e os parênteses (ou colchetes) para obtermos novas expressões, tal como em

$$(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$$

- A $\longrightarrow$ B $\wedge$ B $\longrightarrow$ A é uma cadeia válida.
- $\wedge\wedge \longrightarrow BC$ não é uma cadeia válida.

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

Podemos encadear sentenças, seus conectivos e os parênteses (ou colchetes) para obtermos novas expressões, tal como em

$$(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$$

- A $\longrightarrow$ B $\wedge$ B $\longrightarrow$ A é uma cadeia válida.
- $\wedge\wedge \longrightarrow BC$ não é uma cadeia válida.

Expressões que formam cadeias válidas são chamadas de fórmulas bem-formuladas ou wffs (de well-formed formulas).

Conectivos e Valores-Verdade

Ordem de Precedência dos Conectivos

1. Conectivos dentro de parênteses, dos mais internos para os mais externos;
2. $'$ (negação)
3. $\wedge$, $\vee$;
4. $\longrightarrow$,
5. $\longleftrightarrow$;

Conectivos e Valores-Verdade

Ordem de Precedência dos Conectivos

1. Conectivos dentro de parênteses, dos mais internos para os mais externos;
2. $'$
3. $\wedge$, $\vee$;
4. $\longrightarrow$,
5. $\longleftrightarrow$;

1. Exemplos: $A \vee B'$, $A \vee B \longrightarrow C$.

Conectivos e Valores-Verdade

Ordem de Precedência dos Conectivos

1. Conectivos dentro de parênteses, dos mais internos para os mais externos;
2. $'$
3. $\wedge$, $\vee$;
4. $\longrightarrow$,
5. $\longleftrightarrow$;

1. A expressão $A \vee B'$ significa $A \vee (B')$ e não $(A \vee B)'$.

Conectivos e Valores-Verdade

Ordem de Precedência dos Conectivos

1. Conectivos dentro de parênteses, dos mais internos para os mais externos;
2. $'$
3. $\wedge$, $\vee$;
4. $\longrightarrow$,
5. $\longleftrightarrow$;

- A expressão $A \vee B'$ significa $A \vee (B')$ e não $(A \vee B)'$.
- A expressão $A \vee B \longrightarrow C$ significa $(A \vee B) \longrightarrow C$ e não $A \vee (B \longrightarrow C)$

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$
V	V	F				
V	F	V				
F	V	F				
F	F	V				

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	A ∨ B'	A ∨ B	(A ∨ B)'	A ∨ B' ⟶ (A ∨ B)'
V	V	F	V			
V	F	V	V			
F	V	F	F			
F	F	V	V			

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V		
V	F	V	V	V		
F	V	F	F	V		
F	F	V	V	F		

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	
V	F	V	V	V	F	
F	V	F	F	V	F	
F	F	V	V	F	V	

Conectivos e Valores-Verdade

Como ficaria a tabela verdade para a seguinte wff $A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$

Table: Exemplo

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \longrightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Conectivos e Valores-Verdade

Se estivermos montando uma tabela-verdade para uma wff que contenha n símbolos proposicionais diferentes, quantas linhas terá a tabela?

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- Uma wff cujos valores-verdade são sempre verdadeiros é chamada uma **tautologia** (representado por 1).

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- Uma wff cujos valores-verdade são sempre verdadeiros é chamada uma **tautologia** (representado por 1).

Notação e Conceitos

- Uma wff cujos valores-verdade são sempre falsos, é chamada uma **contradição** (representado por 0).

Conectivos e Valores-Verdade

Notação e Conceitos

- Uma wff cujos valores-verdade são sempre verdadeiros é chamada uma **tautologia** (representado por 1).

Notação e Conceitos

- Uma wff cujos valores-verdade são sempre falsos, é chamada uma **contradição** (representado por 0).

Notação e Conceitos

- Se $P \longleftrightarrow Q$ é uma tautologia então P e Q são **wffs equivalentes** e denotadas por $P \Longleftrightarrow Q$ ($P \Longleftrightarrow Q$ significa que $P \longleftrightarrow Q$ é tautologia).

Conectivos e Valores-Verdade

Algumas equivalências Tautológicas

1a. $A \vee B \iff B \vee A$ Comutativa

1b. $A \wedge B \iff B \wedge A$ Comutativa

2a. $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$ Associativa

2b. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$ Associativa

3a. $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ Distributiva

3b. $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Distributiva

4a. $A \vee 0 \iff A$ Identidade

4b. $A \wedge 1 \iff A$ Identidade

5a. $A \vee A' \iff 1$ Complementativas

5b. $A \wedge A' \iff 0$ Complementativas

Conectivos e Valores-Verdade

Algumas equivalências Tautológicas

6a. $(A \vee B)' \Longleftrightarrow A' \wedge B'$ Lei De Morgan

6b. $(A \wedge B)' \Longleftrightarrow A' \vee B'$ Lei De Morgan

7a. $A \vee A \Longleftrightarrow A$ Idempotente

7b. $A \wedge A \Longleftrightarrow A$ Idempotente

8 $(A')' \Longleftrightarrow A$ Dupla Negativa

9 $(A \longrightarrow B) \Longleftrightarrow A' \vee B$ Reescrevendo a implicação

10. $(A \longrightarrow B) \Longleftrightarrow (B' \longrightarrow A')$ Contraposição

11. $A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \longrightarrow C$ Prova Condicional

Conectivos e Valores-Verdade

Exercício

Construa as tabelas-verdade para as seguintes wffs.

1. $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (B \longrightarrow A)$
2. $(A \vee A') \longrightarrow (B \wedge B')$
3. $[(A \wedge B') \longrightarrow C']'$
4. $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (B' \longrightarrow A')$