1

Funções e Modelos

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

1.6

Funções Inversas e Logaritmos

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

Funções Inversas e Logaritmos

A Tabela 1 fornece os dados de uma experiência na qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de uma hora.

O número *N* de bactérias é uma função do tempo *t*: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude seu ponto de vista e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ela está pensando em *t* como uma função de *N*.

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

N como uma função de *t*

Tabela 1

Funções Inversas e Logaritmos

Essa função, chamada de *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f." Logo, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N.

Os valores de f^{-1} podem ser encontrados na Tabela 1 ao contrário ou consultando a Tabela 2.

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

t como uma função de N

Tabela 2

Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

Nem todas as funções possuem inversas.

Funções Inversas e Logaritmos

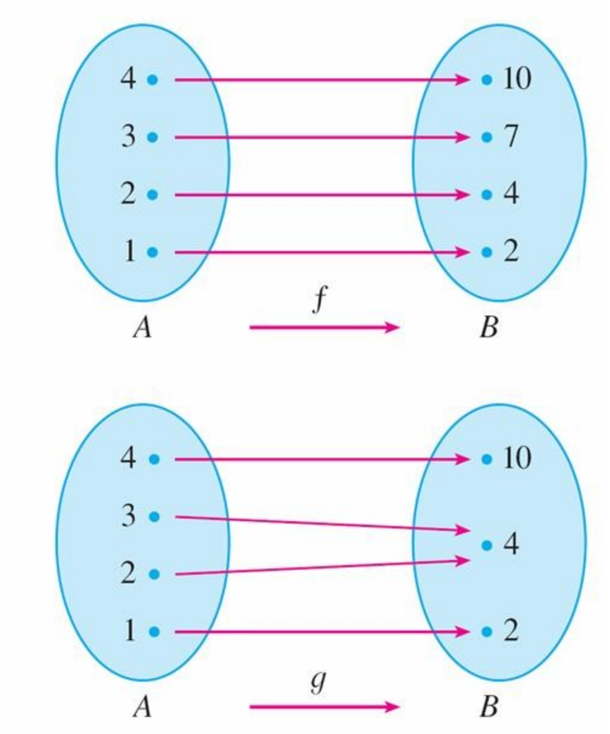
Vamos comparas as funções *f* e *g* cujo diagrama de flechas está na Figura 1.

Observe que *f* nunca assume duas vezes o mesmo valor (duas entradas quaisquer em *A* têm saídas diferentes), enquanto assume o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm a mesma saída, 4)

Em símbolos,

$g(2) = g(3)$

mas $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$



f é injetora; *g* não é

Figura 1

Funções Inversas e Logaritmos

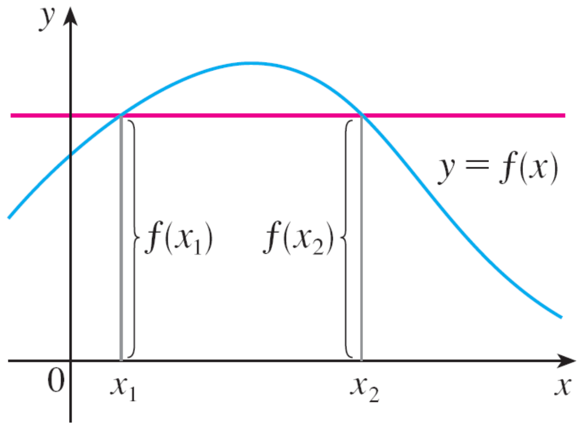
Funções que compartilham essa última propriedade com *f* são chamadas *funções injetoras.*

1 **Definição** Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2.$$

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de *f* em mais de um ponto, então vemos na Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Isso significa que *f* não é uma função injetora.



Esta função não é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

Figura 2

Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é injetora.

> **Teste da Reta Horizontal** Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

Exemplo 1

A função $f(x) = x^3$ é injetora?

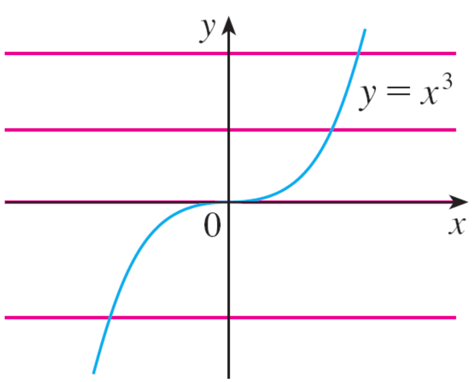
Solução 1:

Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é injetora.

Solução 2:

Da Figura 3 vemos que nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em mais de um ponto.

Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é injetora.



$f(x) = x^3$ é injetora

Figura 3

Funções Inversas e Logaritmos

As funções injetoras são importantes, pois são precisamente as que possuem funções inversas, de acordo com a seguinte definição:

2 Definição Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.

Esta definição diz que se *f* mapeia *x* em *y*, então f^{-1} mapeia *y* de volta para *x*. (Se *f* não for injetora, então f^{-1} não seria exclusivamente definido.)

Funções Inversas e Logaritmos

O diagrama de setas na Figura 5 indica que f^{-1} reserva o efeito de f.

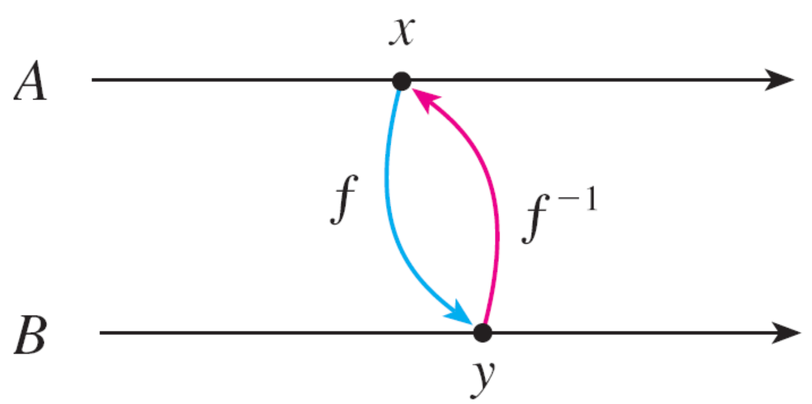


Figura 5

Note que

$$\text{domínio de } f^{-1} = \text{imagem de } f$$

$$\text{imagem de } f^{-1} = \text{domínio de } f$$

Funções Inversas e Logaritmos

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque, se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

Atenção

Não confunda o -1 em f^{-1} com um exponente. Assim,

$$f^{-1}(x) \textit{ não } \text{significa que } \frac{1}{f(x)}$$

Assim, $1/f(x)$ poderia, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

Exemplo 3

Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$, e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

Solução:

Da definição de f^{-1} temos

$f^{-1}(7) = 3$ porque $f(3) = 7$

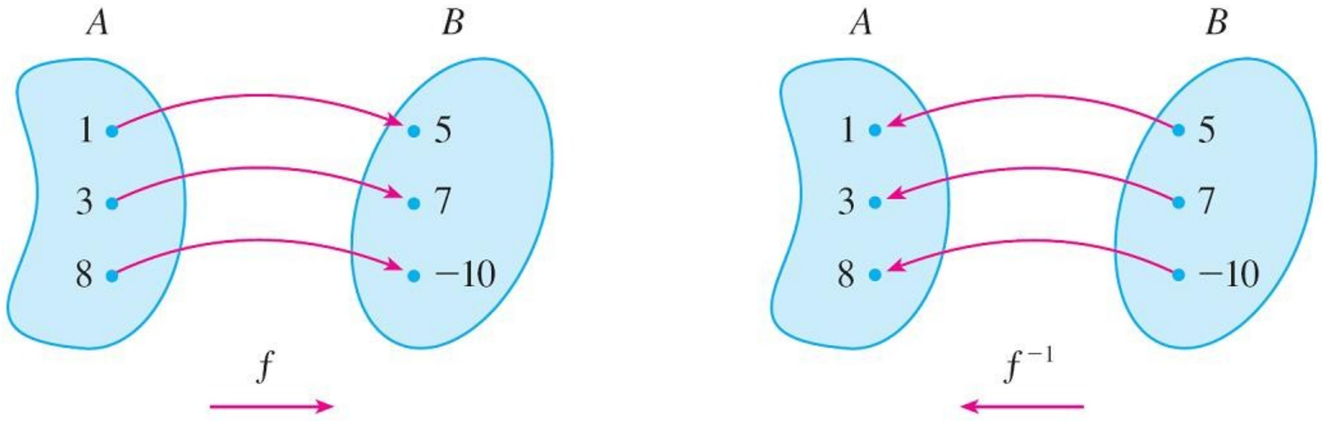
$f^{-1}(5) = 1$ porque $f(1) = 5$

$f^{-1}(-10) = 8$ porque $f(8) = -10$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesses casos.



A função inversa reverte entradas e saídas

Figura 6

Funções Inversas e Logaritmos

A letra *x* é usada tradicionalmente como a variável independente, logo, quando nos concentramos em f^{-1} em vez de *f*, geralmente revertemos os papéis de *x* e *y* na Definição 2 e escreveremos

3

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Substituindo *y* na Definição 2 e *x* em 3 obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } B$$

Funções Inversas e Logaritmos

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos com *x*, aplicarmos *f* e, em seguida, obteremos de volta o *x*, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7).

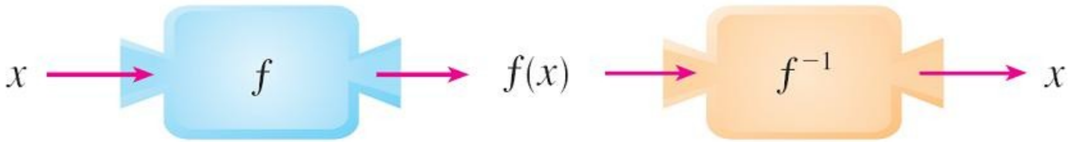


Figura 7

Assim, f^{-1} desfaz o que *f* faz. A segunda equação diz que *f* desfaz o que f^{-1} faz.

Funções Inversas e Logaritmos

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ as equações de cancelamento ficam

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se uma à outra quando aplicadas sucessivamente.

Funções Inversas e Logaritmos

Vamos ver agora como calcular as funções inversas.

Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de resolver essa equação para x em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$.

Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 Como Achar a Função Inversa de uma Função f Injetora

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.

Passo 2 Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível).

Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

Funções Inversas e Logaritmos

O princípio de trocar x e y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver no gráfico de f^{-1}.

Porém, obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$.
(Veja a Figura 8.)

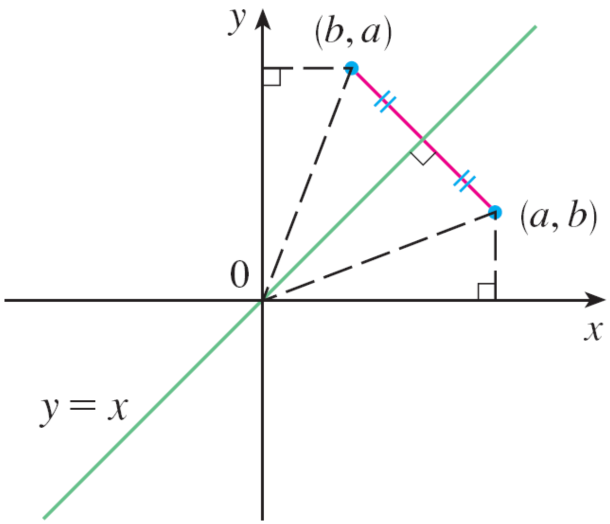


Figura 8

Funções Inversas e Logaritmos

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

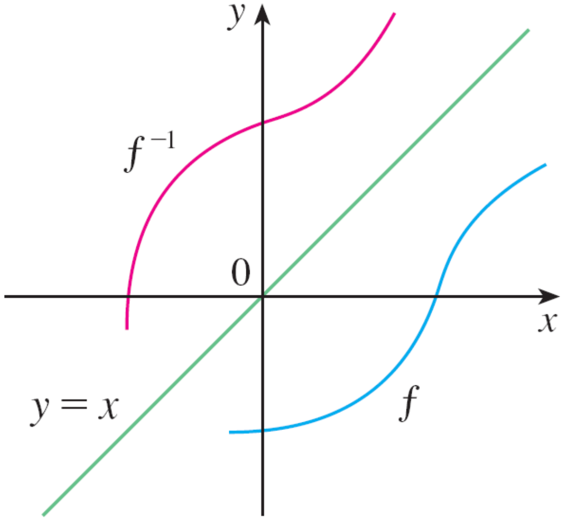


Figura 9