4 Aplicações de Derivação

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

O Que f' Diz sobre f ?

O Que f' Diz sobre f ?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1.

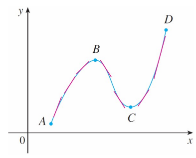


Figura 1

Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$.

O Que f' Diz sobre f ?

Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Exemplo 1

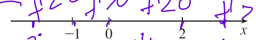
Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

Solução:

Começamos derivando f: >0 >0 >0

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$ = 0

Para usarmos o Teste C/D, devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Para resolver essas inequações, primeiro encontramos onde $f'(x) = 0$, ou seja, em $x = 0$, 2 e –1. Esses são os números críticos de f e eles dividem o domínio em quatro intervalos (veja a reta numérica abaixo).



decr f'<0 f'>0 f'<0 f'>0 cresc. decr. cresc.

Dentro de cada intervalo, $f'(x)$ precisa ser sempre positiva ou sempre negativa.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Podemos determinar qual é o caso em cada intervalo a partir dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, ou seja, 12x, x – 2 e x + 1, como mostrado na tabela a seguir.

Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que *f* é decrescente em (0, 2). (Também seria verdade dizer que *f* é decrescente no intervalo fechado [0, 2].)

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

O gráfico de *f* mostrado na Figura 2 confirma a informação dada na tabela.

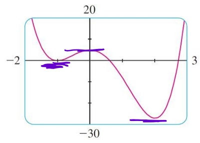


Figura 2

Valores Extremos Locais

Valores Extremos Locais

Você pode ver a partir da Figura 2 que *f* (0) = 5 é um valor máximo local de *f*, pois *f* cresce em (–1, 0) e decresce em (0, 2). Ou, em termos derivados, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

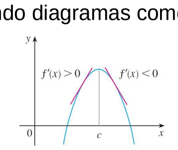
(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' é positiva à esquerda e a direita de c, ou negativa à esquerda e à direita de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

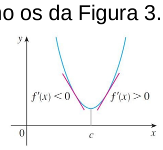
Valores Extremos Locais

O Teste da Primeira Derivada é uma consequência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em *c*, *f* é crescente à esquerda de *c* decrescente à direita de *c*. A consequência é que *f* tem um máximo local em *c*.

É fácil memorizar o Teste da Primeira Derivada visualizando diagramas como os da Figura 3.

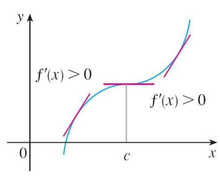


Máximo local
Figura 3(a)

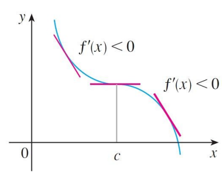


Mínimo local
Figura 3(b)

O Que *f´* Diz sobre *f* ?



Nem máximo, nem mínimo
Figura 3(c)



Nem máximo, nem mínimo
Figura 3(d)

Exemplo 3

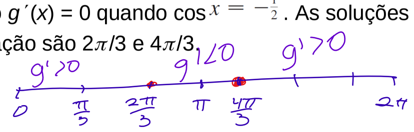
Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função

$g(x) = x + 2 \text{ sen } x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$

Solução: Começamos encontrando os números críticos. A derivada é:

$g'(x) = 1 + 2 \cos x.$

Logo $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$. As soluções desta equação são $2\pi/3$ e $4\pi/3$.



Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Como g é derivável em toda parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$ e, portanto, analisamos g na tabela a seguir.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83.$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$, muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, então

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

O gráfico de g na Figura 4 confirma nossa conclusão.

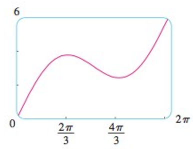


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \text{ sen } x$

O que f'' Nos Diz sobre f ?

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

A Figura 5 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois se inclinam em direções diferentes.

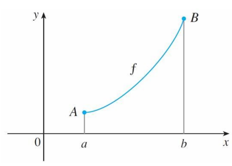


Figura 5(a)

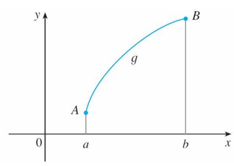
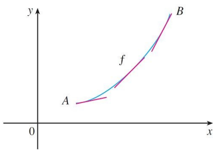


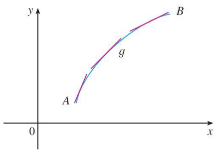
Figura 5(b)

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Na Figura 6, as tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a), a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b), a curva está abaixo das tangentes g e é chamada *côncava para baixo* em (a, b).



Côncava para cima
Figura 6(a)



Côncava para baixo
Figura 6(b)

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

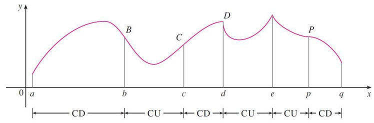
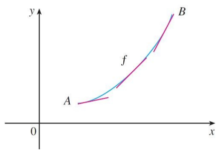


Figura 7

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Vamos observar como a segunda derivada nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), você pode ver que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce.

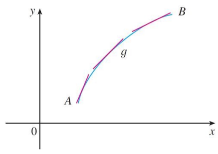


Côncava para cima

Figura 6(a)

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e, consequentemente, sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo, f' decresce e, portanto, f'' é negativa.



Côncava para baixo

Figura 6(b)

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

O que f'' Nos Diz Sobre f?

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.