DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

August 28, 2023

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Os sistemas da lógica formal manipulam fórmulas e atribuem um significado preciso à palavra teorema.

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Os sistemas da lógica formal manipulam fórmulas e atribuem um significado preciso à palavra teorema.

- fbfs específicas são aceitas como axiomas-fbfs que não precisam ser provadas.

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Os sistemas da lógica formal manipulam fórmulas e atribuem um significado preciso à palavra teorema.

- fbfs específicas são aceitas como axiomas-fbfs que não precisam ser provadas.
- Um axioma deve, portanto, ser uma fbf cuja "verdade" seja evidente.

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Os sistemas da lógica formal manipulam fórmulas e atribuem um significado preciso à palavra teorema.

- fbfs específicas são aceitas como axiomas-fbfs que não precisam ser provadas.
- Um axioma deve, portanto, ser uma fbf cuja "verdade" seja evidente.
- um axioma deve ser uma tautologia ou, se envolve predicados, uma fbf válida.

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Além dos axiomas, sistemas formais contêm regras de inferência.

- Uma **regra de inferência** é uma convenção que permite a uma nova fbf de uma certa forma ser inferida, ou deduzida, de uma a duas outras fbfs de uma certa forma.

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

Além dos axiomas, sistemas formais contêm regras de inferência.

- Uma **regra de inferência** é uma convenção que permite a uma nova fbf de uma certa forma ser inferida, ou deduzida, de uma a duas outras fbfs de uma certa forma.
- Uma sequência de fbfs na qual cada fbf seja ou um axioma ou o resultado da aplicação de uma das regras de inferência às fbfs anteriores na sequência é chamada de **sequência de prova**.

Lógica Proposicional

Regras de Inferência

- Das fbfs P e $P \longrightarrow Q$, podemos inferir a fbf Q;
- Das $P \longrightarrow Q$ e Q', podemos inferir a fbf P'

A primeira regra de inferência é conhecida pelo seu nome latino de modus ponens, que significa "método de afirmação".
A segunda regra de inferência é conhecida como modus tollens que significa "método de negação"

Lógica Proposicional

Sistemas Formais

O esboço a seguir é uma prova típica de um teorema

fbf1 (Um axioma)
fbf2 (Um axioma)
fbf3 (Inferida da fbf1 e da fbf2 por uma regra de inferência)
fbf4 (Um axioma)
fbf5 (Inferida da fbf4 por uma regra de inferência)
fbf6 (Inferida da fbf3 e fbf5 por uma regra de inferência)

Lógica Proposicional

Axiomas

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$

Lógica Proposicional

Exemplo

P, Q e R podem ser fbfs compostas;

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow [(C \wedge D) \longrightarrow (A \longrightarrow B)]$$

Lógica Proposicional

Formas de Axiomas

1. $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$
2. $[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$
3. $(Q' \longrightarrow P') \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$

Lógica Proposicional

Notações

Os axiomas que escolhemos envolvem apenas implicação e negação. Para fbfs que contenham os conectivos de disjunção e conjunção, usamos as equivalências:

$$A \vee B \Longleftrightarrow A' \longrightarrow B$$

$$A \wedge B \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B')'$$

Lógica Proposicional

Definição

1. Uma **dedução** de Q a partir de P é uma sequência de fbfs terminando em Q onde cada fbf é um axioma ou é a fbf P ou ainda é derivada das fbfs anteriores através das regras de inferência.
2. A técnica para demonstrar teoremas da forma $P \longrightarrow Q$ é, portanto, incluir a hipótese como uma das fbfs na sequência e concluir a sequência com Q (como ficaria $(P \longrightarrow P)$?).

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (hipótese)

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (hipótese)
2. $[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow [(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)]$ (Axioma 2)

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (hipótese)
2. $[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow [(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)]$ (Axioma 2)
3. $(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (1, 2, modus ponens)

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (hipótese)
2. $[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow [(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)]$ (Axioma 2)
3. $(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (1, 2, modus ponens)
4. $P \longrightarrow P$ (Exemplo)

Lógica Proposicional

Exemplo

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (hipótese)
2. $[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow [(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)]$ (Axioma 2)
3. $(P \longrightarrow P) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ (1, 2, modus ponens)
4. $P \longrightarrow P$ (Exemplo)
5. $P \longrightarrow Q$ (3, 4, modus ponens)

Lógica Proposicional

Exercício

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$P' \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

Lógica Proposicional

Dedução

O método de dedução permite as seguintes abordagens:

1. Para provar o teorema $P \longrightarrow Q$, deduzimos Q a partir de P.

Lógica Proposicional

Dedução

O método de dedução permite as seguintes abordagens:

1. Para provar o teorema $P \longrightarrow Q$, deduzimos Q a partir de P.
2. Para provar o teorema $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \longrightarrow Q$, deduzimos Q a partir de $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.

Lógica Proposicional

Dedução

O método de dedução permite as seguintes abordagens:

1. Para provar o teorema $P \longrightarrow Q$, deduzimos Q a partir de P.
2. Para provar o teorema $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \longrightarrow Q$, deduzimos Q a partir de $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.
3. Para provar o teorema $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \longrightarrow (R \longrightarrow S)$, deduzimos S de $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ e R.

Lógica Proposicional

Exercícios

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$(P' \longrightarrow Q') \wedge (P \longrightarrow S) \longrightarrow (Q \longrightarrow S)$$

- Encontre uma demonstração mais curta para o seguinte teorema

$$[P \longrightarrow (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$$

- Usando a lógica proposicional, prove o teorema

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)] \longrightarrow (P \longrightarrow R)$$

Lógica Proposicional

Argumentos Válidos

O argumento a seguir é válido? "Meu cliente é canhoto, mas o diário não desapareceu, então meu cliente não é canhoto; portanto, o diário desapareceu."

- C: Meu cliente é canhoto.
- D: O diário desapareceu.

Lógica Proposicional

Argumentos Válidos

O argumento a seguir é válido? "Meu cliente é canhoto, mas se o diário não desapareceu, então meu cliente não é canhoto; portanto, o diário desapareceu."

- C: Meu cliente é canhoto.
- D: O diário desapareceu.

$$[C \wedge (D' \longrightarrow C')] \longrightarrow D$$

Lógica Proposicional

Argumentos Válidos - Exemplo

Como qualquer tautologia também é um teorema na lógica proposicional, podemos inserir uma tautologia em qualquer passo de uma demonstração.

1. $P \wedge Q$ (hipótese)
2. $P \wedge Q \longrightarrow Q$ (tautologia)
3. Q (1, 2, modus ponens)

Lógica Proposicional

Argumentos Válidos - Exemplo

Poderíamos escrever:

1. $P \wedge Q$ (hipótese)
2. Q (1, tautologia $A \wedge B \longrightarrow B$, modus ponens)

Lógica Proposicional

Exercício

Considere o argumento "Se a taxa para importação diminuir, o comércio interno aumentará. Ou a taxa federal de desconto diminuirá ou o comércio interno não irá aumentar. A taxa para importação vai diminuir. Portanto a taxa federal de desconto vai diminuir". Usando:

- I: A taxa para importação vai diminuir.
- M: O mercado interno vai aumentar.
- F: A taxa federal de desconto vai diminuir.

Lógica Proposicional

Exercício

Considere o argumento "Se a taxa para importação diminuir, o comércio interno aumentará. Ou a taxa federal de desconto diminuirá ou o comércio interno não irá aumentar. A taxa para importação vai diminuir. Portanto a taxa federal de desconto vai diminuir". Usando:

- I: A taxa para importação vai diminuir.
- M: O mercado interno vai aumentar.
- F: A taxa federal de desconto vai diminuir.

$$[(I \longrightarrow M) \wedge (F \vee M') \wedge I] \longrightarrow F$$

Lógica Proposicional

Exercício

Mostre que o seguinte argumento é válido "Se usamos a linguagem assembly, então o programa será executado mais rapidamente. Se usamos a linguagem assembly, o programa terá mais linhas de código. Portanto, se usamos a linguagem assembly, então o programa será executado mais rapidamente e terá mais linhas de código." Usando:

- A: Usamos a linguagem assembly.
- R: O programa será executado mais rapidamente.
- L: O programa terá mais linhas de código.

Lógica Proposicional

Exercício

Mostre que o seguinte argumento é válido "Se usamos a linguagem assembly, então o programa será executado mais rapidamente. Se usamos a linguagem assembly, o programa terá mais linhas de código. Portanto, se usamos a linguagem assembly, então o programa será executado mais rapidamente e terá mais linhas de código." Usando:

- A: Usamos a linguagem assembly.
- R: O programa será executado mais rapidamente.
- L: O programa terá mais linhas de código.

$$[(A \longrightarrow R) \wedge (A \longrightarrow L) \longrightarrow [A \longrightarrow (R \wedge L)]$$

Lógica Proposicional

Exercício

Mostre que o argumento a seguir é válido usando as letras P, M e C: "Se o produto for confiável, a parcela do mercado irá aumentar. Ou o produto é confiável ou os custos irão subir. A parcela de mercado não irá aumentar. Portanto os custos irão subir."

Lógica Proposicional

Table: Regras de Inferência para Lógica Proposicional

De	Podemos inferir	Nome
P e $P \longrightarrow Q$	Q	Modus ponens
$P \longrightarrow Q$ e Q'	P'	Modus tollens
$P \vee Q$ e Q'	P	Silogismo disjuntivo
$P \longrightarrow Q$ e $Q \longrightarrow R$	$P \longrightarrow R$	Silogismo hipotético
P e Q	P	Simplificação conjuntiva
P	$P \vee Q$	Amplicação disjuntiva