

1

Funções e Modelos

1.5

Funções Exponenciais

Funções Exponenciais

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial*, pois a variável, x , é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa. Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Funções Exponenciais

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

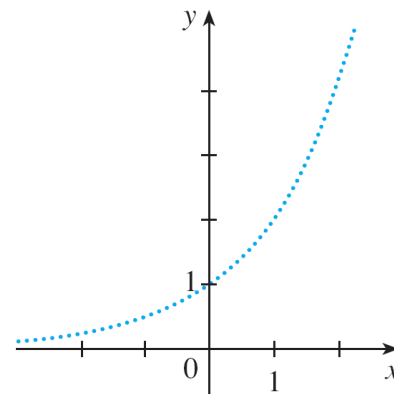
$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas qual o significado de a^x se x for um número irracional?
Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^π ?

Funções Exponenciais

Para ajudá-lo a responder a essa questão, olhemos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, nos pontos em que x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos aumentar o domínio de para incluir tanto os números racionais quanto os irracionais.

Existem buracos no gráfico na Figura 1, correspondendo os valores irracionais de x .



Representação de $y = 2^x$, x racional

Figura 1

Queremos preencher os buracos com a definição de $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$ de modo f que seja uma função crescente.

Funções Exponenciais

Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

devemos ter

$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$$

e sabemos que $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$ significam, pois 1,7 e 1,8 são números racionais.

Funções Exponenciais

Analogicamente, usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$.

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \quad \Rightarrow \quad 2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \quad \Rightarrow \quad 2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733}$$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \quad \Rightarrow \quad 2^{1,7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321}$$

$$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206 \quad \Rightarrow \quad 2^{1,73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Funções Exponenciais

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1,7}, 2^{1,73}, 2^{1,732}, 2^{1,7320}, 2^{1,73205}, \dots$$

e menor que todos os números

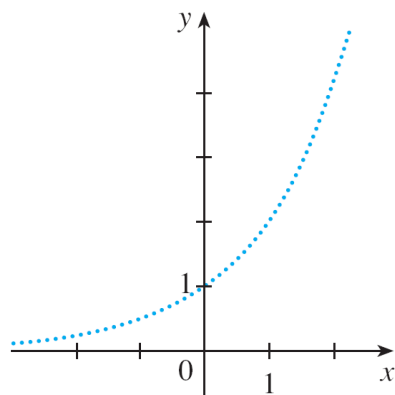
$$2^{1,8}, 2^{1,74}, 2^{1,733}, 2^{1,7321}, 2^{1,73206}, \dots$$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ que será esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos calculá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3,321997.$$

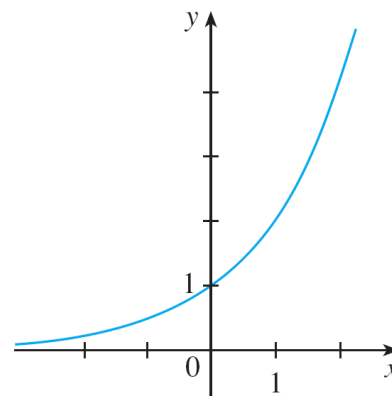
Funções Exponenciais

Analogamente, podemos definir 2^x (ou a^x , se $a > 0$), onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como todos os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.



Representação de $y = 2^x$, x racional

Figura 1



$y = 2^x$, x real

Figura 2

Funções Exponenciais

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a .

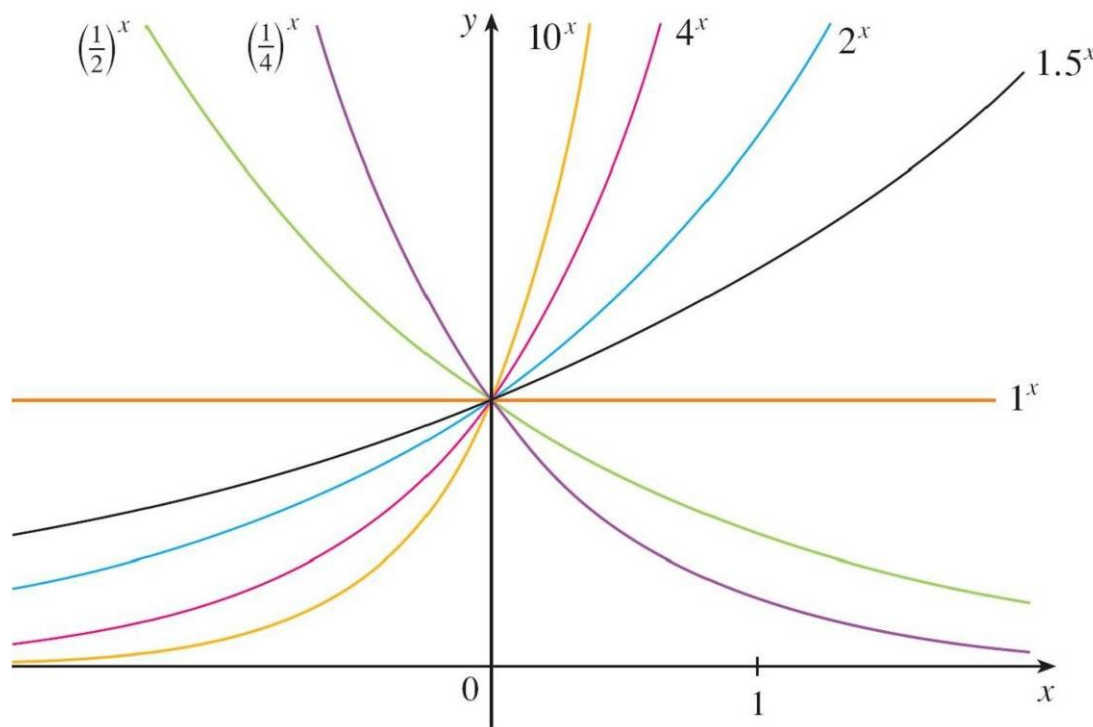


Figura 3

Funções Exponenciais

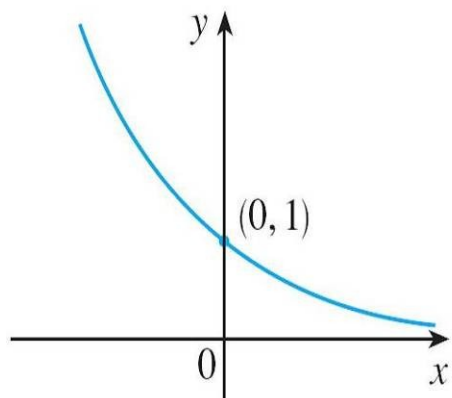
Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ for $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).

Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$.

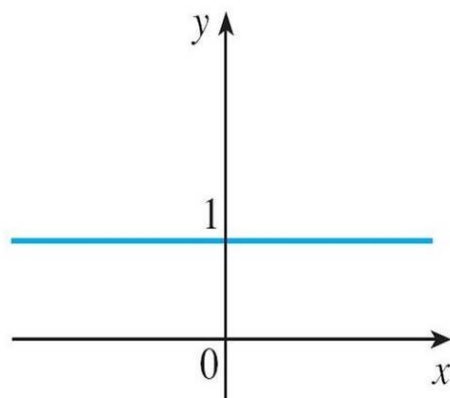
Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce.

Funções Exponenciais

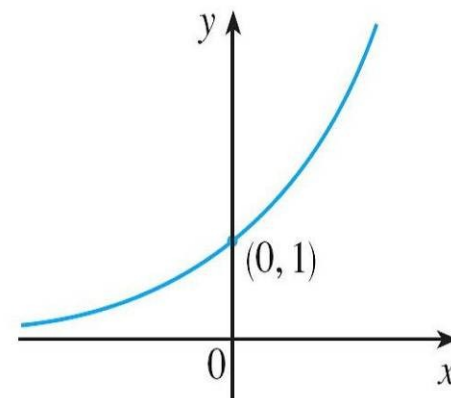
Esses três casos estão ilustrados na Figura 4.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$



(b) $y = 1^x$



(c) $y = a^x$, $a > 1$

Figura 4

Funções Exponenciais

Observe que $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem domínio \mathbb{R} e a imagem $(0, \infty)$.

Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y .

Funções Exponenciais

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y .

Propriedades dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y , quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

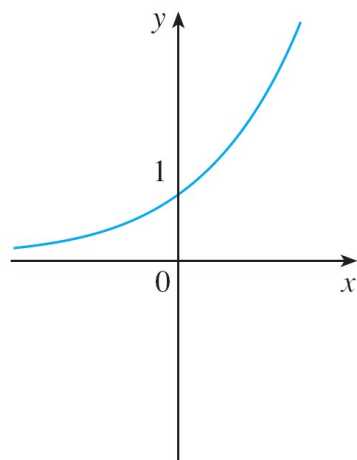
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Exemplo 1

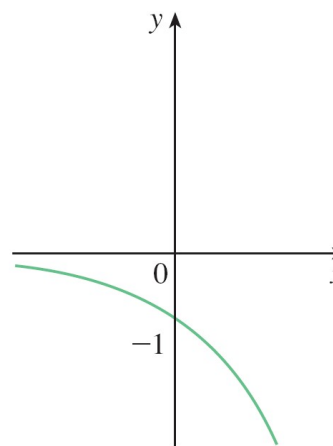
Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Solução:

Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ [mostrado na Figura 2 e 5(a)] em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b).



(a) $y = 2^x$



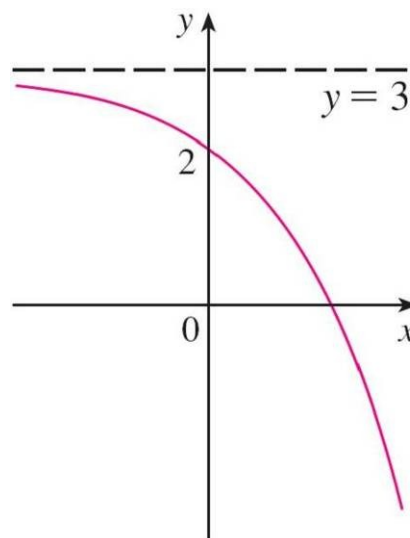
(b) $y = -2^x$

Figura 5

Exemplo 1 – Solução

continuação

A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ em 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c).



(c) $y = 3 - 2^x$

Figura 5

O domínio é \mathbb{R} e a imagem é $(-\infty, 3)$.



O Número e

O Número e

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. A escolha de uma base a é influenciada pela maneira que o gráfico de $y = a^x$ cruza o eixo y . As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$.

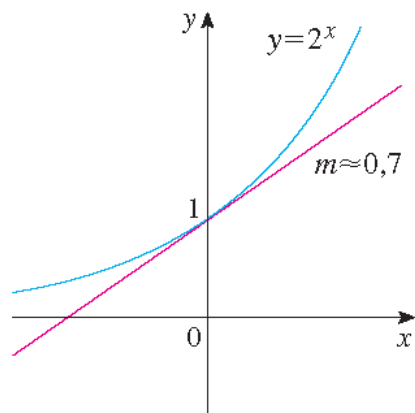


Figura 10

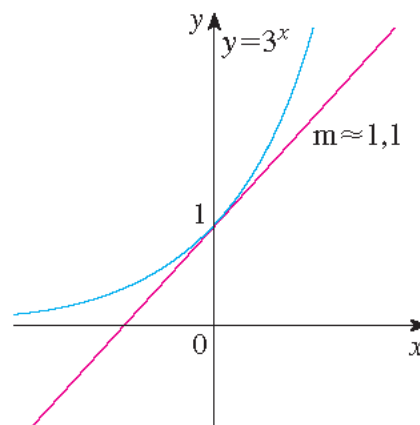


Figura 11

O Número e

(Para as finalidades presentes, você pode pensar na reta tangente para um gráfico exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico somente naquele ponto.)

Se medirmos os declives dessas retas tangentes em $(0, 1)$, descobrimos que $m \approx 0,7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1,1$ para $y = 3^x$.

O Número e

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base a aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1. (Veja a Figura 12.)

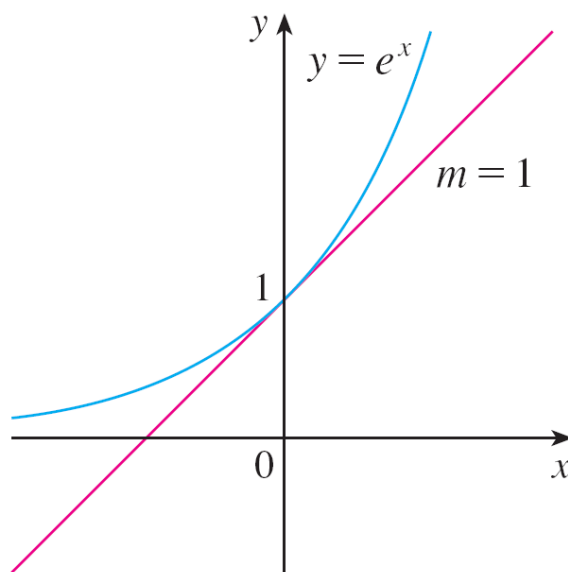


Figura 12

A função natural exponencial atravessa o eixo y com uma inclinação de 1.

O Número e

De fato, *existe* um número e é denotado pelo caractere e .
(Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra *exponencial*.)

O Número e

Na visualização das Figuras 10 e 11, não surpreende que o número e está entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$ esteja entre os gráficos $y = 2^x$ e $y = 3^x$. (Veja a Figura 13.)

Veremos que o valor de e , correto até a quinta casa decimal, é

$$e \approx 2,71828$$

Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**.

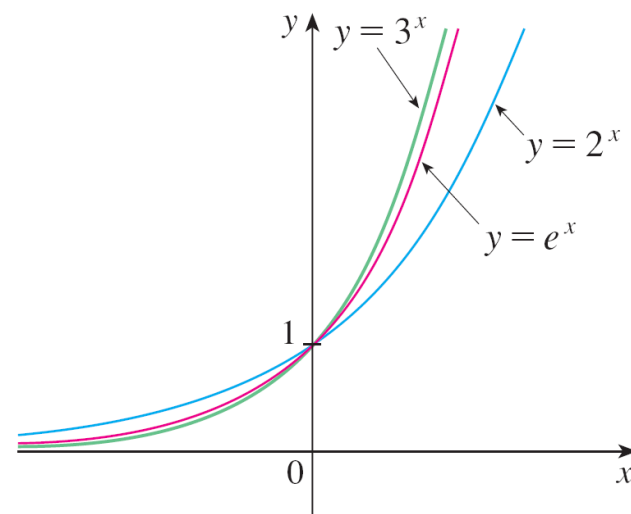


Figura 13