Ex: Prove que $2^n >= n^2$ para todo n >= 4

Base da indução: $2^4 >= 4^2$ => 16 >= 16 => OK, provado

Hipótese: assuma que vale para um k qualquer, ou seja, $2^k >= k^2$

Passo da indução: usando a hipótese de indução quero provar que $2^{k+1} >= (k+1)^2$

lembrando que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ => quero provar que $2^{k+1} >= k^2 + 2k + 1$

Prova do passo:

$2^k * 2 >= 2k^2$
$2^{k+1} >= 2k^2 >= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, para todo k >= 4, que é o enunciado
Logo, $2^{k+1} >= (k+1)^2$, como queríamos demonstrar (CQD)
****

★ Queremos provar que $3n^2 + 7n \leq cn^2$ para todo n suficientemente grande. Critique a seguinte prova: "Se $3n^2 + 7n \leq cn^2$ então

$3n + 7 \leq cn$, supondo $n > 0$. Logo, $c \geq 3 + 7/n$. Logo, $c \geq 3 + 7$ é suficiente. Logo, $c \geq 10$ e $n > 0$. Fim da prova."

Se n = 1, c = 10 => 3*1 + 7 < = 10*1 => 10 <= 10, OK!

E se n = 0.1, c = 10 => 3*0,1 + 7 <= 10*0.1 => 7,3 <= 1 , ABSURDO!!!

A prova correta deveria mencionar c = 10 e $n_0 = 1$ (e não $n > n_0 = 0$)

****

E no caso de o (o pequeno)

Ex: quero provar que $1000n^2 = o(n^3)$

1) Escrevo a definição:
Para toda constante positiva c, existe um n_0 positivo tal que
$|1000n^2| < |cn^3|$ para todo $n >= n_0$

2) Para qual n valeria a igualdade?
$|1000n^2| = |cn^3|$ => $1000 = |cn|$ => $n = 1000/c$

3) Então n_0 que faz valer a desigualdade do passo 1 precisa ser maior, por ex:
$n_0 = 1000/c + 1$