Produto Vetorial e Produto Misto

Exercício 1.

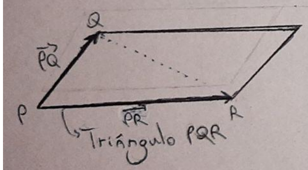
Exercicio 1

a) O vetor $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ é perpendicular a $\vec{PQ}$ e a $\vec{PR}$ e, portanto, é ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R.

$\vec{PQ} = \langle 4-0, 2-0, 0-(-3) \rangle = \langle 4, 2, 3 \rangle$; $\vec{PR} = \langle 3-0, 3-0, 1-(-3) \rangle = \langle 3, 3, 4 \rangle$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = (2.4-3.3)\vec{i} - (4.4-3.3)\vec{j} + (4.3-3.2)\vec{k} = -\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k} = \langle -1, -7, 6 \rangle$$

b) $A_{PQR} = \dfrac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{2}$



$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \langle -1, -7, 6 \rangle$

$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+49+36} = \sqrt{86}$

A área do triângulo PQR é de $\frac{\sqrt{86}}{2}$

Exercício 2.

Exercicio 2

O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ e $\vec{PS}$ é o módulo do produto misto: $V = |\vec{PQ} \cdot (\vec{PR} \times \vec{PS})|$

$\vec{PQ} = \langle -1-3, 2-0, 5-1 \rangle = \langle -4, 2, 4 \rangle$ $\quad \vec{PR} = \langle 5-3, 1-0, -1-1 \rangle = \langle 2, 1, -2 \rangle$ $\quad \vec{PS} = \langle 0-3, 4-0, 2-1 \rangle = \langle -3, 4, 1 \rangle$

$$\vec{PQ} \cdot (\vec{PR} \times \vec{PS}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4(1.1-(-2.4)) - 2(2.1-(-3.(-2))) + 4(2.4-(-3.1)) =$$

$-4.9 - 2.(-4) + 4.11 = -36 + 8 + 44 = 16$

Portanto, o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS é <u>16</u>.

Exercício 3.

Exercicio 3

Três vetores são coplanares se o volume do paralelepípedo determinado por eles for zero (ou seja, o produto misto é zero)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -3(5.(-4) - (9.(-2))) - 1.(1.(-4) - (5.(-2))) =$$

$-3(-20+18) - 1.(-4+10) = -3.(-2) - 1.(6) = 6 - 6 = 0$

O produto misto é zero, então, de fato, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.