Nesta semana estudaremos assuntos muito importantes:

— Continuidade
- — Definição de continuidade em um número *a;*
- — Definição de continuidade à direita e à esquerda*;*
- — Propriedades;
- — Teorema do Valor Intermediário.

— Limite no infinito; Assintota Horizontais;

Roteiro de estudos:

1) Fazer as seguintes recomendações no Khan Academy e retornar para estas notas:

Introdução à continuidade
Exemplo resolvido: continuidade em um ponto (gráfico)
Continuidade em um ponto (gráfico)

2) Nos vídeos anteriores aprendemos duas definições muito importantes:

1 Definição Uma função *f* é **contínua em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

2 Definição Uma função *f* é **contínua à direita em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e *f* é **contínua à esquerda em *a*** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Um exemplo interessante é a função parte inteira de x (*f(x)*=[|x|]), esta função é continua à direita, mas não é continua à esquerda. Verifique.

Se *f* está definida próximo de *a*, dizemos que *f* é descontinua em *a*, se *f* não for contínua em *a* .

Veja só seguintes exemplos:

Exemplo: Onde cada uma das seguintes funções são descontinua?

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$,

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

4. $p(x) = [|x|]$ parte inteira de x.

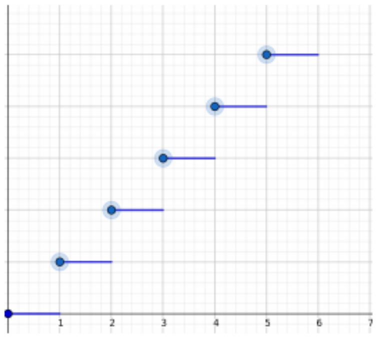
Tente responder a essa questão, e verifique sua resposta na próxima pagina

1. Como a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ não está definida em $x = 2$ então é descontínua em $x = 2$.

2. A função $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ está definida em $x = 0$, mas $\lim_{x\to 0} g(x)$ não existe como número real, portanto a função é descontinua em $x = 0$.

3. Modificamos a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ do item (2) para que esteja definida em $x = 2$. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ está definida em $x = 2$, o domínio da função é o conjunto dos número reais, mas vocês podem verificar que $\lim_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$. Portanto a função não é contínua em $x = 2$.

4. $p(x) = [|x|]$ parte inteira de x. Observe o gráfico da função



É simples provar que $\lim_{x\to n^-} p(x) \neq \lim_{x\to n^+} p(x)$ para todo n número inteiro diferente de zero, isto é, $\lim_{x\to n} p(x)$ não existe, portanto a função é descontinua em n.

Vamos estender a definição de continuidade em um ponto para continuidade em um intervalo:

3 Definição Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

Por exemplo, a função *f(x)*= $1 + \sqrt{1 - x^2}$ é contínua em [-1,1]. Verifique.

Sabendo que as funções *f* e *g* são contínuas e usando as propriedades do limite é fácil provar o seguinte teorema:

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

5 Teorema

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

Polinômios e funções racionais não são as únicas funções elementares que são contínuas em todo o domínio de definição. Veja o seguinte teorema:

7 Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

O teorema anterior é muito importante pois nos permite calcular limite de funções que antes não conseguíamos calcular.

Exemplo: Onde a função $f(x)=\dfrac{\ln(x)+\tan^{-1}(x)}{x^2-1}$ é continua?

Pelo teorema anterior $y=\ln(x)$ é contínua para todo $x>0$, e $y=\tan^{-1}(x)$ é contínua para todo número real x. Portanto a função $y=\ln(x)+\tan^{-1}(x)$ é contínua para todo número real $x>0$. Como $y=x^2-1$ é um polinômio é contínuo em todo o conjunto dos números reais, mas como o polinômio esta no denominador, precisamos considerar os zeros do polinômio que são 1 e -1.

Portanto, a função $f(x)=\dfrac{\ln(x)+\tan^{-1}(x)}{x^2-1}$ é contínua nos intervalos (0,1) e (1,+∞).

Lembrando a definição de função contínua, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sen(x)}{2+\cos(x)}.$$

Um teorema muito importante é o seguinte:

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Observe que a função g não é necessariamente contínua em a, mas precisa existir o limite de g quando x tende para a, chamamos a esse limite de b. Porem a função f precisa **sim** ser contínua em b. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 1} arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Observe que $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ não está definida em $x=1$, isto é, a função não é contínua em $x=1$, mas o limite $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ existe.

Prove que $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{2}$.

A função *acsen(x)* é a inversa da função seno, ou seja, é uma inversa trigonométrica. Pelo teorema 7, sabemos que as inversa trigonométrica são contínuas no domínio. Como ½ pertence ao domínio da inversa do seno e abusando da notação, poderíamos escrever o seguinte

$$\lim_{x \to 1} arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = arcsen\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Esse teorema é muito importante e sera muito usado durante o curso.

Uma consequência natural do teorema 8 é que composição de funções contínuas é contínua.

9 **Teorema** Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

2) Limite no infinito: Veja o seguinte exemplo, vamos estudar o comportamento da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

para valores de x grande em módulo.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

A tabela a seguir fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de *f* feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

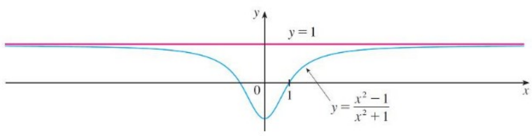


Figura 1

Quanto maior é o valor de $|x|$, mais próximo *f(x)* está de 1. Podemos denotar esse fato da seguinte forma:

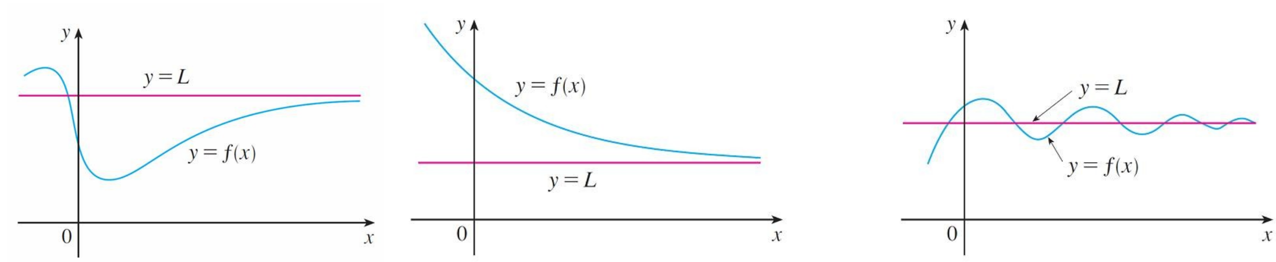
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

1 Definição Intuitiva de Limite no Infinito Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

É importante perceber que esse limite nos indica que a função se aproxima do valor *L* para *x* cada vez maiores, mas não indica de que forma a função se aproxima do valor *L*. Veja os seguintes exemplos:



Da mesma forma definimos limite de *f(x)* quando x tende para menos infinito:

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

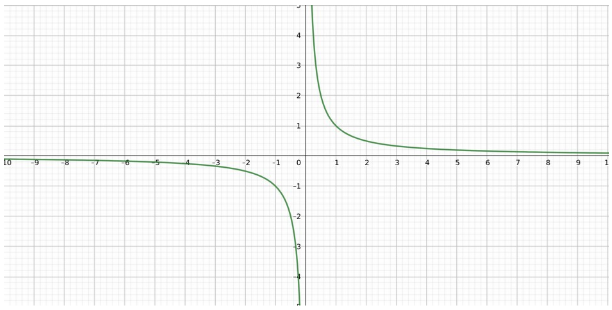
Observando os gráficos anteriores, podemos verificar que o gráfico de *y=f(x)* se aproxima da reta *y=L* para *x* cada vez maiores. A reta *y=L* é chamada assintota horizontal:

3 Definição A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo: Encontre o limite de $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

x	f(x)
1	1
10	0,1
100	0,01
500	0,002
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,0001
100000	0,00001
1000000	0,000001



x	f(x)
-1	-1
-10	-0,1
-100	-0,01
-500	-0,002
-1000	-0,001
-5000	-0,0002
-10000	-0,0001
-100000	-0,00001
-1000000	-0,000001

Observando as tabelas percebemos que o valor de *f(x)* se aproxima cada vez mais de 0 para valores de $|x|$ cada vez maiores. Portanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.$$

O seguinte teorema generaliza esse limite:

5 Teorema Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r} = 0.$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r} = 0.$$

Esse resultado é muito usado para calcular limites no infinito. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo: Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Para resolver este problema, procuramos a maior potencia de x no denominador. Neste caso, a maior potencia de x no denominador é 2. Agora dividimos numerado e denominador por x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}}$$

Distribuímos, tanto no denominador como no numerador $1/x^2$ e

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Lembrando que como *x* toma valores muito grandes, *x* é diferente de 0 e portanto, podemos dividir por x^2.

Todas as propriedade de limite são válidas no caso de limite no infinito. Portanto, aplicando as propriedades e usando o teorema anterior, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

Exemplo: Determine as assintotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Primeiro calcularemos as assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Para isso vamos usar o seguinte fato. Como x tende para $+\infty$, x é maior que zero, logo $x = \sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}}$$

Ao tentar calcular o limite de x tendendo para $-\infty$, precisamos tomar cuidado porque agora $x < 0$ então $x = -\sqrt{x^2}$. Assim

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2}}{3}.$$

Portanto as retas $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = \frac{-\sqrt{2}}{3}$ são assintotas horizontais de gráfico de f.

Agora, uma assintota vertical deve ocorrer num ponto de descontinuidade de $y = f(x)$, neste caso nosso único problema é o denominador ser igual a zero pois $2x^2+1$ é sempre maior que zero.

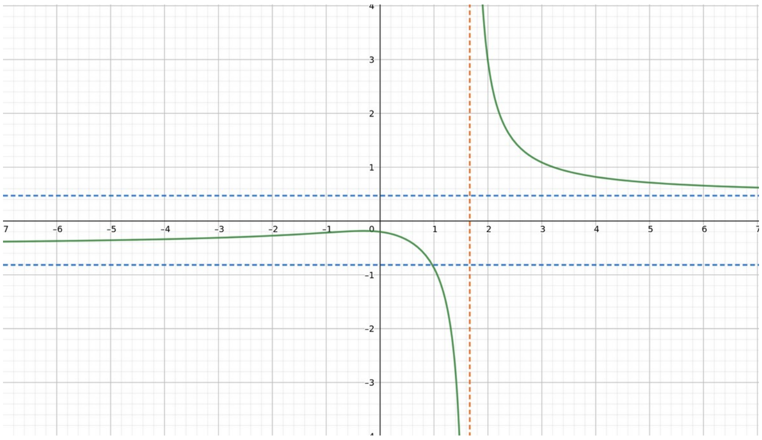
$3x - 5 = 0$ se $x = \frac{5}{3}$. Estudando os limites podemos provar (deixo para vocês) que

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

Veja o gráfico da função:



3) Fazer as seguintes atividades no Khan Academy. No final retornar para estas notas.

[Introdução aos limites infinitos](#)
[Limites no infinito de funções racionais com raízes quadradas (potência par)](#)
[Limites no infinito de funções racionais](#)
[Limites no infinito de funções racionais com raízes quadradas](#)
[Limites e continuidade: 5 teste](#)

4) Agora podemos continuar com as recomendações do Khan Academy, entre os assuntos que serão tratados, primeiro uma revisão dos temas expostos neste documento, além da apresentação de um teorema sumamente importante, chamado Teorema do Valor Intermediário, cujo enunciado podemos ver a continuação:

> **10** **Teorema do Valor Intermediário** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

E o teste de toda a unidade de limite e continuidade:

[Limites e continuidade: teste da unidade](#)

Lembrando que vocês devem tirar dúvidas através do fórum e por e-mail.

Bons estudos!

Professora Claudia

As definições e teoremas que aparecem em destaque foram extraídos do livro de aula Cálculo de James Stewart Volume 1.
Os gráficos foram construídos usando o GeoGebra