ACH2011 - Cálculo I

Sistema de Informação - EACH

Lista 7: Polinômio de Taylor

Aproximação de segundo grau

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$ porque $f(x)$ e $L(x)$ têm o mesmo valor e a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte(Do livro Cálculo de James Stewart):

(i) $P(a) = f(a)$, (P e f devem ter o mesmo valor em a).
(ii) $P'(a) = f'(a)$, (P' e f' devem ter o mesmo valor em a).
(iii) $P''(a) = f''(a)$, (P'' e f'' devem ter o mesmo valor em a).

Exercícios:

(1) Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos(x)$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$[1].

(2) Para aproximar uma função f por uma funçao quadrática P próxima a um número a, é melhor escrever P na forma[1]

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2.$$

Mostre que a funçao quadrática satisfaz as condiçoes (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Polinômio de Taylor[1]

Em vez de ficarmos satisfeitos com a aproximação lineares ou quadráticas para $f(x)$ próximo a $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que P_n e suas primeiras n derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ que f e suas primeiras n derivadas. Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, prova-se que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$, $c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$ e em geral ,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

[1]Exercício do livro Cálculo de James Stewart

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.**

Exercícios:

(3) Encontre um polinômio que satisfaça:
  (a) $P(0) = 7$, $P'(0) = 3$, $P''(0) = 8$, $P'''(0) = 54$;
  (b) $P(1) = 1$, $P'(1) = 5$, $P''(1) = 32$, $P'''(1) = 42$;
  (c) $P(-2) = 2$, $P'(-2) = 4$, $P''(-2) = 8$, $P'''(-2) = 66$.

(4) Em cada caso encontre os polinômios de Taylor de grau um, dois, três e quatro no ponto a indicado.
  (a) $f(x) = e^x$ em $a = 0$
  (b) $f(x) = \cos x$ em $a = 0$
  (c) $f(x) = \text{sen}x$ em $a = \pi/6$
  (d) $f(x) = \tan x$ em $a = \pi/3$
  (e) $f(x) = \ln x$ em $a = 1$

Resto de Lagrange:[2]

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Temos, entao, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, isto é,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \quad (1)$$

Para os valores de x nos quais $R_n(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_n(x)$ chama-se **resto**. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_n(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

Proposição (Fórmula de Taylor): Seja $f : [a, b] \to I\!R$ uma função definida num intervalo $[a, b]$. Suponhamos que as derivadas f', f'', ..., $f^{(n)}$ existem e sejam continuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Seja c um ponto qualquer em $[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad (2)$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.
Observando as fórmulas (1) e (2), vemos que, na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

[2]Extraído do livro Cálculo A de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves

Essa forma para o resto é chamada Forma de Lagrange do Resto. Existem outras formas para o resto, como a forma integral.

Exemplo: No exercício 4(b) Calculamos o polinômio de Taylor de grau 4 de $\cos(x)$ centrado em $a = 0$:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Usando o polinômio $P_4(x)$ vamos determinar um valor aproximado de $\cos(\frac{\pi}{6})$. Pela fórmula de Taylor, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = P_4(\frac{\pi}{6}) + R_4(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{(5)!}(\frac{\pi}{6})^5,$$

onde z é um número entre 0 e $\frac{\pi}{6}$. Como $f^{(5)}(x) = -\mathrm{sen}(x)$ e $|\mathrm{sen}(x)| \leq 1$ para qualquer valor de x, podemos afirmar que o resto $R_4(\frac{\pi}{6})$ satisfaz

$$|R_4(\frac{\pi}{6})| = \frac{|\mathrm{sen}(z)|}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \leq \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \approx 0,000327953.$$

Logo, quando calculamos o valor de $\cos(\frac{\pi}{6})$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 \approx 0,8660653883$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a $0,000327$.

(Obs: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025404$).

Exercícios:

(5) Calcular $f(x) = \sqrt{1+x}$ usando um polinômio de Taylor e calcular uma estimativa para o erro dependendo de n (o grau do polinômio) e de x. Calcular $\sqrt{1.1}$ com erro menor que 10^{-4} .

(6) Calcular $\frac{1}{e}$ com erro menor que 0.01 usando o polinômio de Taylor da função $f(x) = e^x$ centrado em a = 0.

(7) Calcular $\ln(0.9)$ com erro menor que 0.5×10^{-4} usando o polinômio de Taylor da função $f(x) = \ln(1+x)$ centrado em $a = 0$.