

ACH2011 - Cálculo I

Sistema de Informação - EACH

Funções Trigonométricas - Continuação

Definições e propriedades ¹

Na última aula, definimos para cada número real t um ponto $P(t)$ na circunferência unitária com coordenadas (x, y) . Estas coordenadas dependem do valor de t , portanto escrevemos o ponto

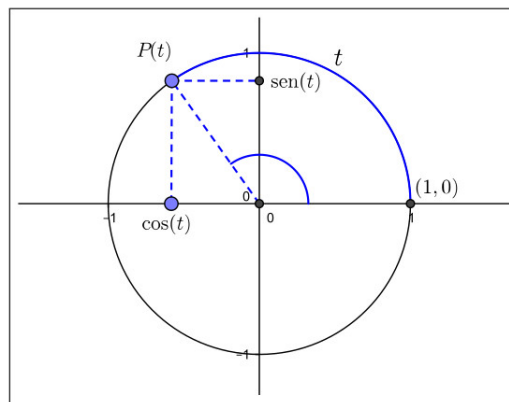
$$P(t) = (x(t), y(t))$$

As coordenadas podem ser vistas como funções de t , pois, para cada número t , temos um único ponto (x, y) na circunferência unitária. Estas funções recebem o nome de cosseno e seno:

$$x(t) = \cos(t)$$

$$y(t) = \sin(t)$$

Figura 1: Definição das funções cosseno e seno



Por exemplo em sala de aula calculamos que $P(\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, portanto

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

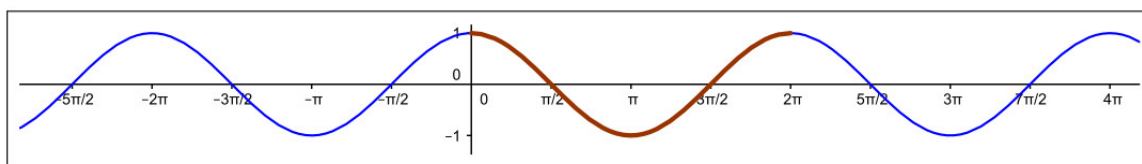
¹Parte deste foi traduzido do 'Ingreso FAMAF: Material de Estudio - Universidad de Córdoba', mas adaptado para nosso curso, portanto contém varias modificações.

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

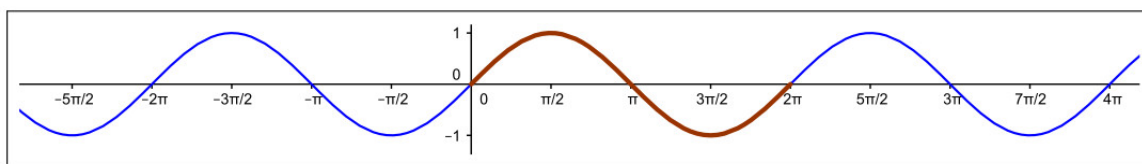
Além disso sabemos que qualquer ponto da circunferência (x, y) satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$, em particular como o ponto $P(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ é um ponto da circunferência, então

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

Figura 2: Funções cosseno e seno



(a) Função Cosseno



(b) Função Seno

Observações:

1. O domínio da função seno e cosseno é todo \mathbb{R} , pois, definimos o ponto $P(t)$, na circunferência unitária, para todos os números reais t .
2. Como $P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ é um ponto da circunferência unitária, então

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1$$

e

$$-1 \leq \operatorname{sen}(t) \leq 1,$$

isto é, a imagem do seno e do cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.

3. Como o perímetro da circunferência unitária é 2π , vimos em sala de aula que $P(t) = P(t + 2\pi) = P(t + 4\pi)$. Em geral, podemos observar que $P(t) = P(t + 2k\pi)$ onde k é um número inteiro. Portanto

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$$

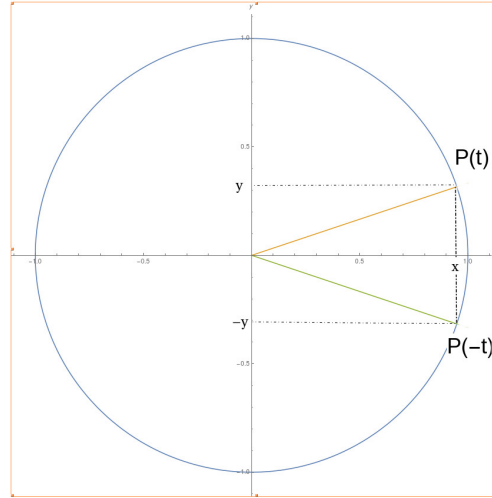
$$\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Dizemos que seno e cosseno são funções periódicas com período 2π .

Definição: Uma função $f(x)$ é periódica se existe um número positivo P tal que $f(x + P) = f(x)$ para qualquer valor x no domínio. O menor valor possível de P é chamado o período de f .

4. Observe as coordenadas do ponto $P(-t)$ na figura 3

Figura 3: Simetria das funções cosseno e seno



$$P(t) = (x, y) = (\cos(t), \sin(t))$$

Portanto $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$. Como $P(-t) = (\cos(-t), \sin(-t))$ e tem coordenadas $(x, -y)$, então

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

e

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

para todo número real t . Portanto a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

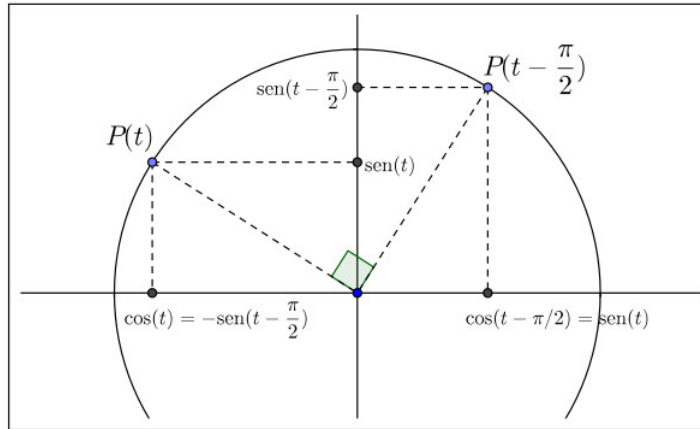
5. Analisando a circunferência unitária na figura 4, podemos observar que sendo $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $P(t - \frac{\pi}{2}) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(t - \frac{\pi}{2}))$, podemos concluir que:

$$\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t)$$

e

$$\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t)$$

Figura 4: Ponto $P(t)$ e $P(t - \frac{\pi}{2})$



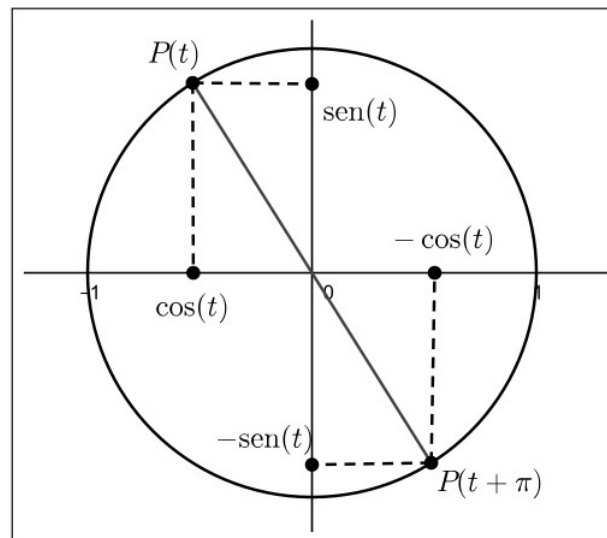
6. Analisando a circunferência unitária podemos observando que $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $P(t + \pi) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi))$ estão em quadrantes opostos em relação à origem, isto é, as primeiras coordenadas e as segundas coordenadas tem sinais opostos (veja figura 5). Portanto

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

e

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

Figura 5: Ponto $P(t)$ e $P(t + \pi)$



7. Para qualquer s e t em \mathbb{R} são verdadeiras as seguintes identidades para o cosseno da soma e da subtração:

$$\cos(t + s) = \cos(t) \cos(s) - \sin(t) \sin(s)$$

$$\cos(t - s) = \cos(t) \cos(s) + \sin(t) \sin(s).$$

Se $t = s$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t), \quad (1)$$

e lembrando que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ temos que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, isto é,

$$-\sin^2(x) = \cos^2(x) - 1. \quad (2)$$

Usando a equação 2 na equação 1 obtemos:

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) + \cos^2(x) - 1 = 2 \cos^2(t) - 1$$

Isto é,

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$$

ou

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

Da mesma forma como $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ obtemos

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

8. Para qualquer s e t em \mathbb{R} são verdadeiras as seguintes identidades para o cosseno da soma e da subtração:

$$\sin(t + s) = \sin(t) \cos(s) + \sin(s) \cos(t)$$

$$\sin(t - s) = \sin(t) \cos(s) - \sin(s) \cos(t).$$

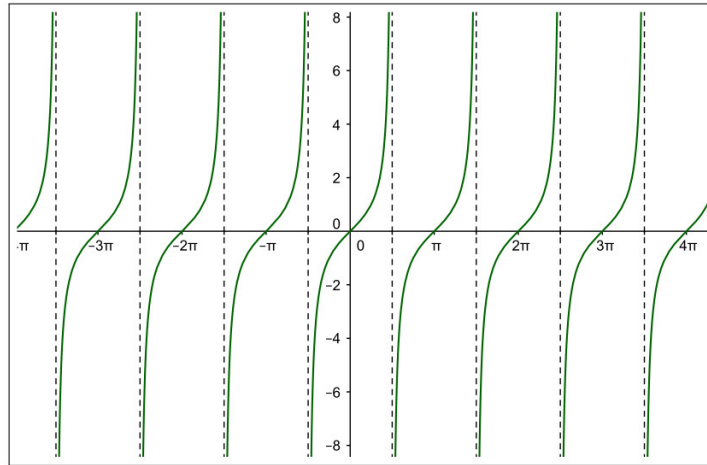
Se $t = s$,

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t).$$

Outras funções trigonométricas:

Além do seno e o cosseno, temos mais 4 funções trigonométricas:

Figura 6: Função Tangente



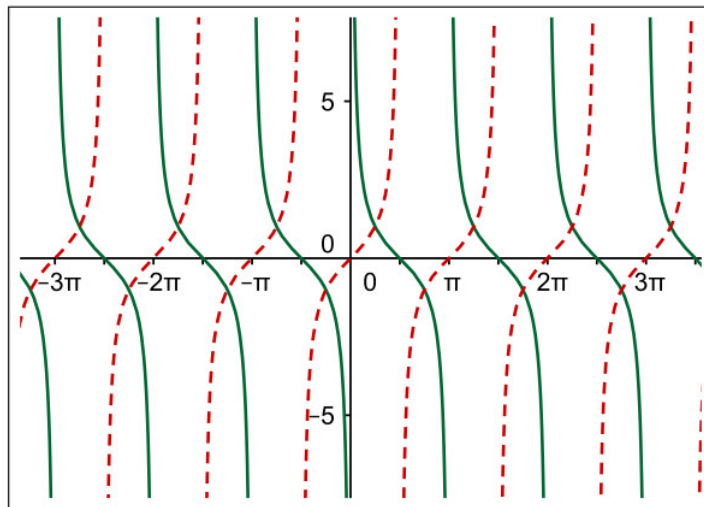
1. Tangente: é o quociente entre o seno e o cosseno, isto é,

$$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\text{cos}(t)}.$$

2. Cotangente: é o quociente entre o cosseno e o seno, isto é,

$$\text{cotg}(t) = \frac{\text{cos}(t)}{\text{sen}(t)}.$$

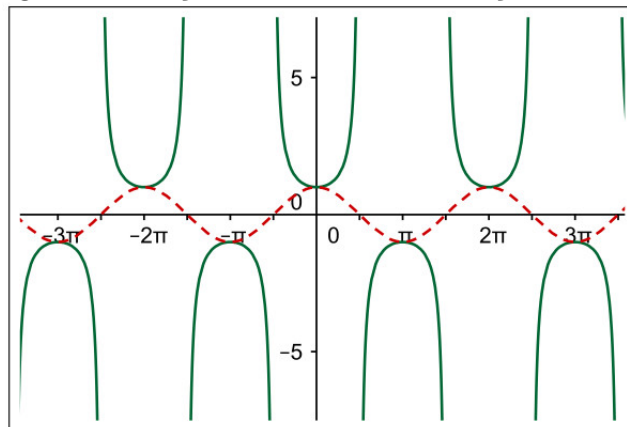
Figura 7: Função Cotangente versus Função Tangente



3. Secante: é definida como 1 dividido o cosseno, isto é,

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}.$$

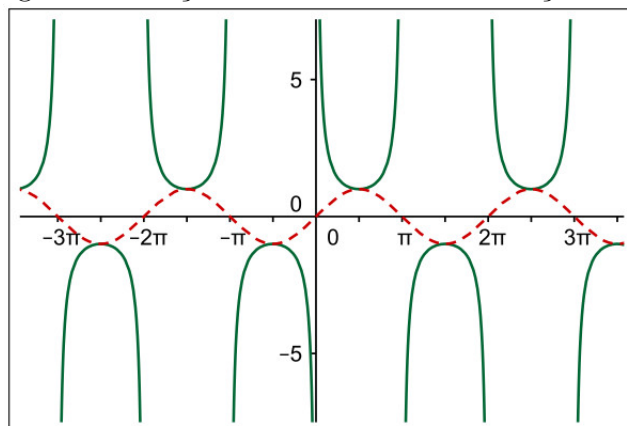
Figura 8: Função Secante versus Função Cosseno



4. Cossecante: é definida como 1 dividido o seno, isto é,

$$\operatorname{cosec}(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}.$$

Figura 9: Função Cossecante versus Função Seno



Se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $\cos(t) \neq 0$, dividindo a equação $\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$ por $\cos^2(t)$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^2(t)} + \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)},$$

isto é,

$$\operatorname{tg}^2(t) + 1 = \sec^2(t)$$

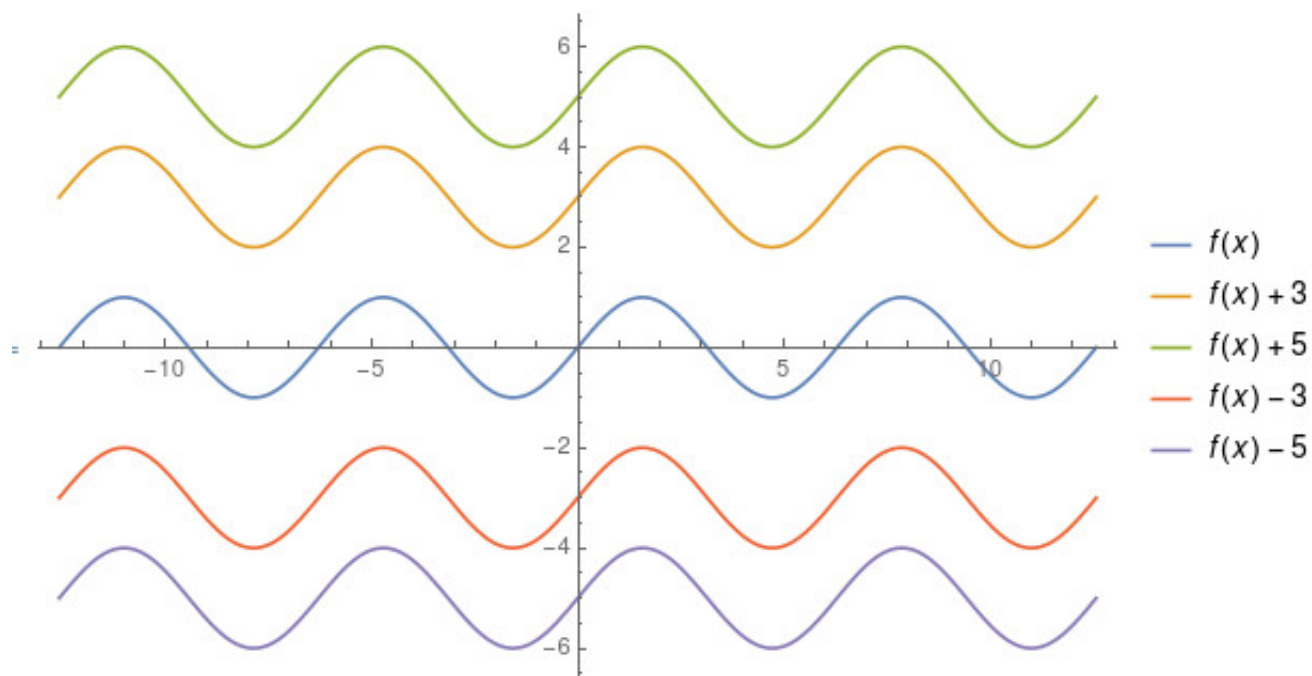
ou

$$\operatorname{tg}^2(t) = \sec^2(t) - 1.$$

Gráficos e Transformações no plano

Seja $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, veja na figura 10 como se transforma o gráfico quando somamos uma constante à função.

Figura 10: Deslocando o gráfico na vertical



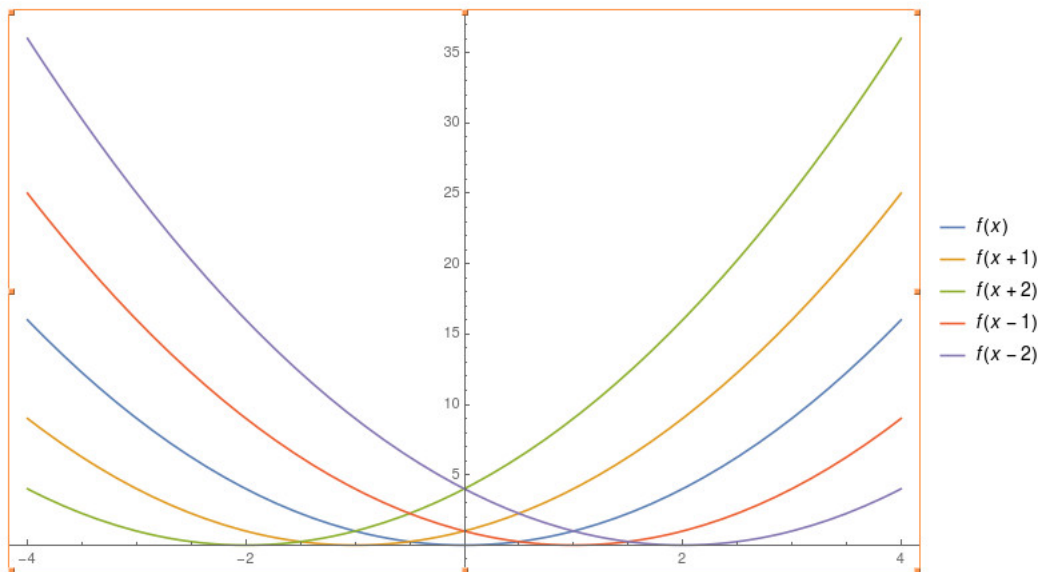
Generalizando, se $y = f(x) + a$ onde $a \in \mathbb{R}$, então

- Se $a > 0$ o gráfico se desloca verticalmente para cima.
- Se $a < 0$ o gráfico se desloca verticalmente para baixo.

Seja $y = f(x) = x^2$, observe na figura 11 como se transforma o gráfico quando somamos uma constante à variável independente.

Generalizando, se $y = f(x + b)$ onde $b \in \mathbb{R}$, então

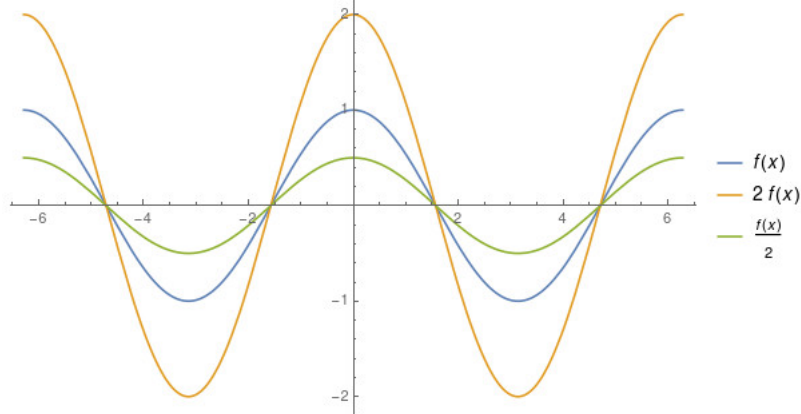
Figura 11: Deslocando o gráfico na horizontal



- Se $b > 0$ o gráfico se desloca horizontalmente para esquerda.
- Se $b < 0$ o gráfico se desloca horizontalmente para direita.

Seja $y = f(x) = \cos(x)$ na figura 12 podemos observar como se transforma o gráfico quando multiplicamos uma função por uma constante.

Figura 12: Transformação do gráfico na vertical

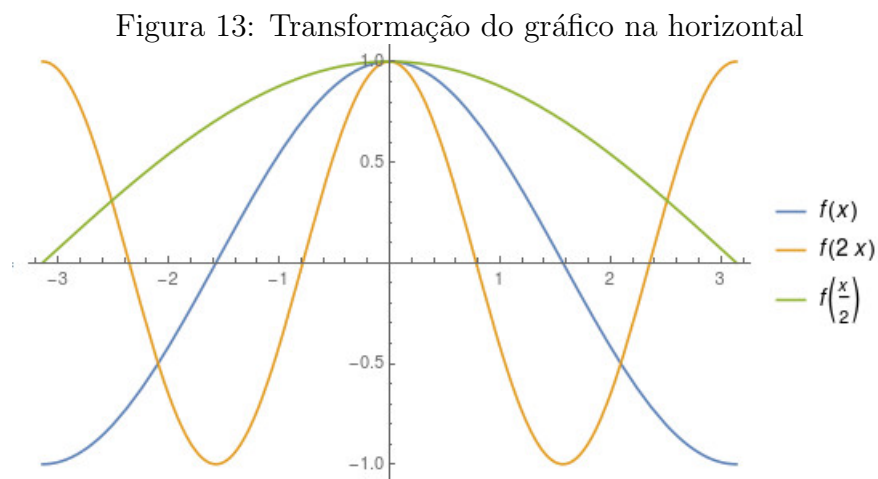


Generalizando, se $y = c \cdot f(x)$ onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, então

- Se $c > 1$ esticamos o gráfico da função verticalmente.

- Se $c < 1$ comprimimos o gráfico da função verticalmente.

Seja $y = f(x) = \cos(x)$, veja na figura 13 como se transforma o gráfico quando multiplicamos a variável independente por uma constante.



Generalizando, se $y = f(d \cdot x)$ onde $d \in \mathbb{R}$ e $d > 0$, então

- Se $d > 1$ o gráfico se comprime na horizontal.
- Se $d < 1$ o gráfico se estica na horizontal.