Estudaremos assuntos muito importantes:

— Derivadas e taxa de variação.
— Derivada como uma função;
— Derivadas das funções constantes;
— Derivadas das funções potências;
— Derivadas das multiplicação de uma função por constante;
— Derivadas da soma de funções;
— Derivadas das funções exponenciais;
— Derivadas do produto de funções.

Roteiro de estudos:

1) Assistir os vídeos do professor Cláudio Possani :

https://youtu.be/6v0SMTZ8hkU

Continuar em https://youtu.be/IRTnTIdJFgM até o minuto 10 e voltar para estas notas

2) Um resumo de alguns assuntos tratados no vídeo:

Definição de reta tangente:

1 Definição A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Velocidade média é instantânea:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definimos a velocidade instantânea em um ponto *a* como *v(a)* definida assim:

3

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Taxa de variação: Definimos a taxa de variação média como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sendo assim, definimos taxa de variação instantânea:

6

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Podemos observar que nos três casos anteriores o coeficiente angular da reta tangente, a velocidade instantânea e a taxa de variação instantânea, são calculadas pelo mesmo limite. Esse limite tao especial é denotado por *f'(a) e* chamado de derivada da função *f* em *a*.

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Portanto, podemos redefinir a reta tangente como:

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Além disso, podemos observar que:

A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

Vamos resumir a seção 8 do capitulo 2 do livro de aula Cálculo I de James Stewart:

<u>Definição da função derivada:</u>

Se para cada *x* calculamos a derivada, podemos definir uma funçao tal que a cada *x* faz corresponder a derivada de *f* em *x:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

outras notações para a derivada de uma função são:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

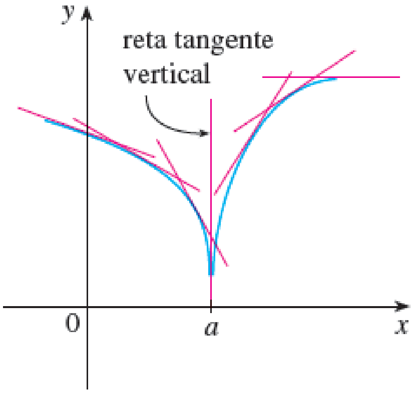
<u>Definição de função derivável ou diferenciável:</u>

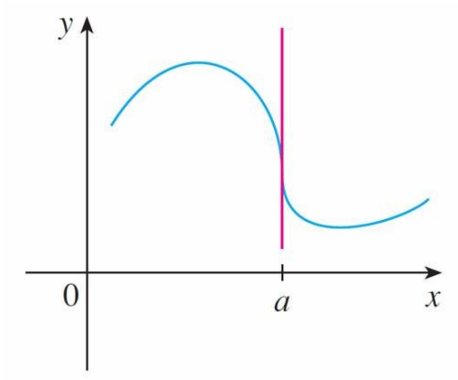
3 Definição Uma função f é derivável ou **diferenciável em** $\boldsymbol{a}$, se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

O Teorema 4 diz que uma função derivável em a é continua em a, mas a reciproca não é verdadeira:

4 Teorema Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

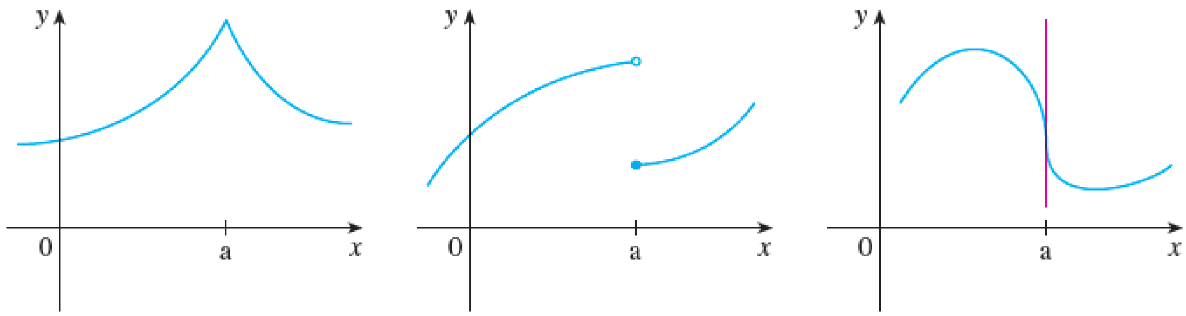
O fato da função ser continua, não significa que ela seja diferenciável. Veja os seguintes gráficos de funções continuas:





Nos dois casos a derivada não está definida em x=a. Por quê?

Na seguinte figura podemos observar os três casos em que a derivada não está definidas



(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

nos três gráficos a derivada da função não está definida em x=a.

Veja a demonstração do Teorema 4 em

> Teorema 4

<u>Derivadas de ordem superior:</u>

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** de f pois é a derivada de ordem dois de f. Notação:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}}\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primeira derivada}}=\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

O processo pode continuar e definir a derivada terceira, derivada da derivada segunda, a derivada quarta, que é a derivada da derivada terceira e assim sucessivamente.

Veja também:

Derivada de ordem superior

3) Para entender um pouco melhor o fato da derivada ser uma função e que função seria, sugiro brincar um pouco com estes exemplos do GeoGebra. Se você mexe em x ele desenha, para cada ponto (x,f(x)), o ponto (x, f'(x)) onde f'(x) é o coeficiente angular da reta tangente, isto é, ele vai desenhar a função derivada.

https://www.geogebra.org/m/YpqytNph#material/ezKv36tC
https://www.geogebra.org/m/YpqytNph#material/s8Qu7sng
https://www.geogebra.org/m/YpqytNph#material/DSEBMEyM
https://www.geogebra.org/m/YpqytNph#material/Nd9qTNAf

4) > Exemplos do Khan Academy
vocês tem vários vídeos com a resolução de alguns exercícios do Khan Academy.

6) Fazer os exercícios das listas correspondentes a estes assuntos.

Lembrando que vocês podem tirar dúvidas, da teoria e dos exercícios, com a professora e através do fórum.

Bons estudos!

Professora Claudia

As definições, enunciados e gráficos que aparecem em destaque foram extraídos do livro de aula Cálculo Volume 1 de James Stewart.

Alguns gráficos foram construídos usando o GeoGebra.