Estudaremos assuntos muito importantes:

— Continuidade
- — Definição de continuidade em um número *a;*
- — Definição de continuidade à direita e à esquerda*;*
- — Propriedades;
- — Teorema do Valor Intermediário.

— Limite no infinito; Assintota Horizontais;

Roteiro de estudos:

1) Fazer as seguintes recomendações no Khan Academy e retornar para estas notas:

Introdução à continuidade
Exemplo resolvido: continuidade em um ponto (gráfico)
Continuidade em um ponto (gráfico)

2) Nos vídeos anteriores aprendemos duas definições muito importantes:

1 Definição Uma função f é **contínua em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

2 Definição Uma função f é **contínua à direita em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em *a*** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Um exemplo interessante é a função parte inteira de x (*f(x)*=[|x|]), esta função é continua à direita, mas não é continua à esquerda. Verifique.

Se *f* está definida próximo de *a*, dizemos que *f* é descontinua em *a*, se *f* não for contínua em *a* .

Veja só seguintes exemplos:

Exemplo: Onde cada uma das seguintes funções são descontinua?

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$,

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

4. $p(x) = [|x|]$ parte inteira de x.

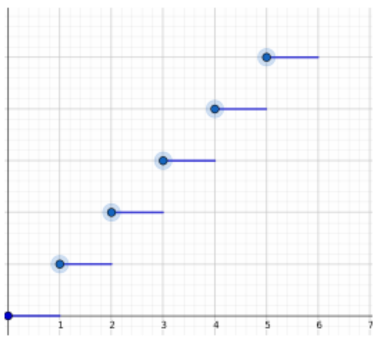
Tente responder a essa questão, e verifique sua resposta na próxima pagina

1. Como a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ não está definida em $x = 2$ então é descontínua em $x = 2$.

2. A função $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ está definida em $x = 0$, mas $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe como número real, portanto a função é descontinua em $x = 0$.

3. Modificamos a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ do item (2) para que esteja definida em $x = 2$.
$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ está definida em $x = 2$, o domínio da função é o conjunto dos número reais, mas vocês podem verificar que $\lim\limits_{x \to 2} h(x) \neq h(2)$. Portanto a função não é contínua em $x = 2$.

4. $p(x) = [|x|]$ parte inteira de x. Observe o gráfico da função



É simples provar que $\lim\limits_{x \to n^-} p(x) \neq \lim\limits_{x \to n^+} p(x)$ para todo n número inteiro diferente de zero, isto é, $\lim\limits_{x \to n} p(x)$ não existe, portanto a função é descontinua em n.

Vamos estender a definição de continuidade em um ponto para continuidade em um intervalo:

3 Definição Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

Por exemplo, a função *f(x)*= $1 + \sqrt{1 - x^2}$ é contínua em [-1,1]. Verifique.

Sabendo que as funções *f* e *g* são contínuas e usando as propriedades do limite é fácil provar o seguinte teorema:

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

5 Teorema

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

Polinômios e funções racionais não são as únicas funções elementares que são contínuas em todo o domínio de definição. Veja o seguinte teorema:

7 Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

O teorema anterior é muito importante pois nos permite calcular limite de funções que antes não conseguíamos calcular.

Exemplo: Onde a função $f(x) = \frac{\ln(x) + \tan^{-1}(x)}{x^2 - 1}$ é continua?

Pelo teorema anterior $y = \ln(x)$ é contínua para todo $x>0$, e $y = \tan^{-1}(x)$ é contínua para todo número real x. Portanto a função $y = \ln(x) + \tan^{-1}(x)$ é contínua para todo número real $x>0$. Como $y = x^2 - 1$ é um polinômio é contínuo em todo o conjunto dos números reais, mas como o polinômio esta no denominador, precisamos considerar os zeros do polinômio que são 1 e -1.

Portanto, a função $f(x) = \frac{\ln(x) + \tan^{-1}(x)}{x^2 - 1}$ é contínua nos intervalos (0,1) e (1,+∞).

Lembrando a definição de função contínua, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sen(x)}{2 + \cos(x)}.$$

Um teorema muito importante é o seguinte:

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Observe que a função g não é necessariamente contínua em a, mas precisa existir o limite de g quando x tende para a, chamamos a esse limite de b. Porem a função f precisa **sim** ser contínua em b. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo: Calcule $\lim_{x\to 1} arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Observe que $y=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ não está definida em $x=1$, isto é, a função não é contínua em $x=1$, mas o limite $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ existe.

Prove que $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{1}{2}$.

A função *acsen(x)* é a inversa da função seno, ou seja, é uma inversa trigonométrica. Pelo teorema 7, sabemos que as inversa trigonométrica são contínuas no domínio. Como ½ pertence ao domínio da inversa do seno e abusando da notação, poderíamos escrever o seguinte

$$\lim_{x\to 1} arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)=arcsen\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)=arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Esse teorema é muito importante e sera muito usado durante o curso.

Uma consequência natural do teorema 8 é que composição de funções contínuas é contínua.

9 Teorema Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ é contínua em a.

3) Limite no infinito: Veja o seguinte exemplo, vamos estudar o comportamento da função

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

para valores de x grande em módulo.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

A tabela a seguir fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de *f* feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

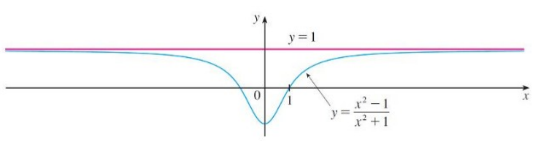


Figura 1

Quanto maior é o valor de $|x|$, mais próximo *f(x)* está de 1. Podemos denotar esse fato da seguinte forma:

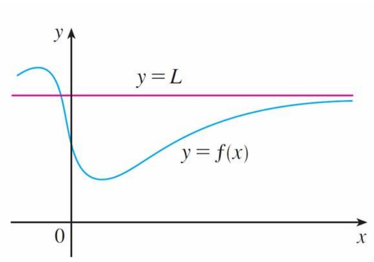
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

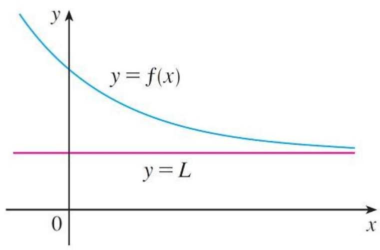
1 Definição Intuitiva de Limite no Infinito Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

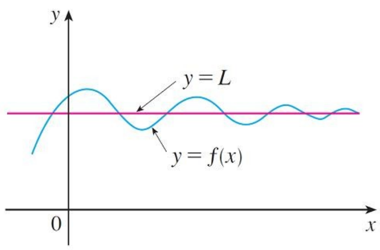
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

É importante perceber que esse limite nos indica que a função se aproxima do valor L para x cada vez maiores, mas não indica de que forma a função se aproxima do valor L. Veja os seguintes exemplos:







Da mesma forma definimos limite de *f(x)* quando x tende para menos infinito:

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

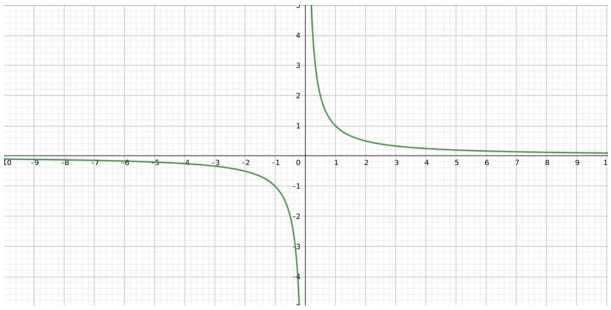
Observando os gráficos anteriores, podemos verificar que o gráfico de $y=f(x)$ se aproxima da reta $y=L$ para x cada vez maiores. A reta $y=L$ é chamada assintota horizontal:

3 Definição A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Exemplo: Encontre o limite de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

x	f(x)
1	1
10	0,1
100	0,01
500	0,002
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,0001
100000	0,00001
1000000	0,000001



x	f(x)
-1	-1
-10	-0,1
-100	-0,01
-500	-0,002
-1000	-0,001
-5000	-0,0002
-10000	-0,0001
-100000	-0,00001
-1000000	-0,000001

Observando as tabelas percebemos que o valor de *f(x)* se aproxima cada vez mais de 0 para valores de |*x*| cada vez maiores. Portanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.$$

O seguinte teorema generaliza esse limite:

5 Teorema Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r} = 0.$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r} = 0.$$

Esse resultado é muito usado para calcular limites no infinito. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo: Calcular $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Para resolver este problema, procuramos a maior potencia de *x* no denominador. Neste caso, a maior potencia de *x* no denominador é 2. Agora dividimos numerado e denominador por x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}}$$

Distribuímos, tanto no denominador como no numerador $1/x^2$ e

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Lembrando que como x toma valores muito grandes, x é diferente de 0 e portanto, podemos dividir por x^2.

Todas as propriedade de limite são válidas no caso de limite no infinito. Portanto, aplicando as propriedades e usando o teorema anterior, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

Exemplo: Determine as assintotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Primeiro calcularemos as assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Para isso vamos usar o seguinte fato. Como x tende para $+\infty$, x é maior que zero, logo $x = \sqrt{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x-5}{x}} \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} &= \frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Ao tentar calcular o limite de x tendendo para $-\infty$, precisamos tomar cuidado porque agora $x < 0$ então $x = -\sqrt{x^2}$. Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x-5}{x}} \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} &= \frac{-\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto as retas $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = \frac{-\sqrt{2}}{3}$ são assintotas horizontais de gráfico de f.

Agora, uma assintota vertical deve ocorrer num ponto de descontinuidade de $y = f(x)$, neste caso nosso único problema é o denominador ser igual a zero pois $2x^2+1$ é sempre maior que zero.

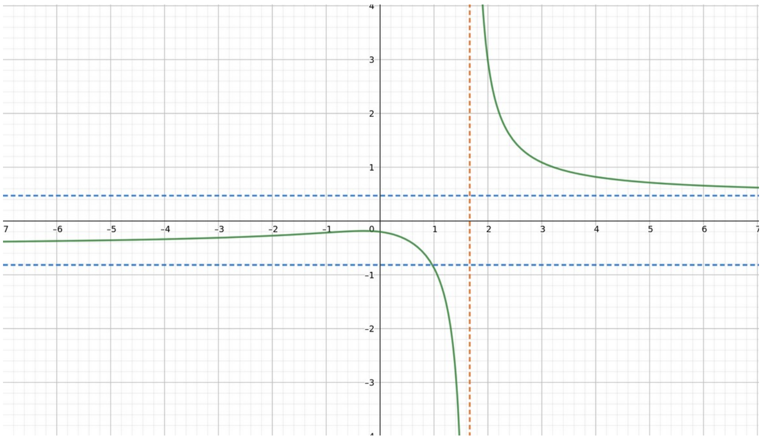
$3x - 5 = 0$ se $x = \frac{5}{3}$. Estudando os limites podemos provar (deixo para vocês) que

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

Veja o gráfico da função:



3) Entre alguns assuntos que serão tratados nesta seção está um teorema sumamente importante, chamado Teorema do Valor Intermediário, cujo enunciado podemos ver a continuação:

> $\boxed{10}$ **Teorema do Valor Intermediário** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

Lembrando que vocês devem tirar dúvidas através do fórum ou com a professora.

Bons estudos!

Professora Claudia

As definições e teoremas que aparecem em destaque foram extraídos do livro de aula Cálculo de James Stewart Volume 1.
Os gráficos foram construídos usando o GeoGebra