

## Resto de Lagrange: Algumas considerações

Primeiro vamos relembrar alguns assuntos: Aproximação linear, aproximação quadrática e polinômio de Taylor.

### Aproximação linear e de segundo grau

A aproximação pela reta tangente  $L(x)$  é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para  $f(x)$  próximo de  $x = a$  porque  $f(x)$  e  $L(x)$  têm o mesmo valor e a mesma taxa de variação (derivada) em  $a$ . Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática)  $P(x)$ . Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte (Do livro Cálculo de James Stewart):

- (i)  $P(a) = f(a)$ , ( $P$  e  $f$  devem ter o mesmo valor em  $a$ ).
- (ii)  $P'(a) = f'(a)$ , ( $P'$  e  $f'$  devem ter o mesmo valor em  $a$ ).
- (iii)  $P''(a) = f''(a)$ , ( $P''$  e  $f''$  devem ter o mesmo valor em  $a$ ).

### Polinômio de Taylor<sup>1</sup>

Imagina que queremos melhorar nossa aproximação quadrática para  $f(x)$  próximo a  $x = a$ , vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau  $n$

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que  $P_n$  e suas primeiras  $n$  derivadas tenham os mesmos valores em  $x = a$  que  $f$  e suas primeiras  $n$  derivadas. Derivando repetidamente e fazendo  $x = a$ , prova-se que essas condições estão satisfeitas se  $c_0 = f(a)$ ,  $c_1 = f'(a)$ ,  $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$ ,  $c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$  e em geral ,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ . O polinômio resultante

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau  $n$  de  $f$  centrado em  $a$** .

### Resto de Lagrange:<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Extraído do livro Cálculo A de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves

Dado o polinômio de Taylor de grau  $n$  de uma função  $f(x)$ , denotamos por  $R_{n,a}(x)$  a diferença entre  $f(x)$  e  $P_n(x)$ , isto é,  $R_{n,a}(x) = f(x) - P_n(x)$ . Temos, então,  $f(x) = P_n(x) + R_{n,a}(x)$ , isto é,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x). \quad (1)$$

Para os valores de  $x$  nos quais  $R_{n,a}(x)$  é "pequeno", o polinômio  $P_n(x)$  dá uma boa aproximação de  $f(x)$ . Por isso,  $R_{n,a}(x)$  chama-se **resto**. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para  $R_{n,a}(x)$  de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

**Proposição (Fórmula de Taylor):** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Suponhamos que as derivadas  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  existem e sejam contínuas em  $[a, b]$  e que  $f^{(n+1)}$  exista em  $(a, b)$ . Seja  $c$  um ponto qualquer em  $[a, b]$ . Então, para cada  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq c$ , existe um ponto  $z$  entre  $c$  e  $x$  tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad (2)$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.

Observando as fórmulas (1) e (2), vemos que, na Fórmula de Taylor apresentada, o resto  $R_n(x)$  é dado por

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \quad (3)$$

Essa forma para o resto é chamada Forma de Lagrange do Resto. Existem outras formas para o resto, como a forma integral.

Como o  $z$  da fórmula (3) e algum valor entre  $c$  e  $x$ , ele é desconhecido, portanto não sabemos qual é o valor exato do resto. Para estimar esse valor usamos a seguinte desigualdade.

**Desigualdade de Taylor:** Se  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  para  $|x-a| \leq d$ , então o resto  $R_{n,a}(x)$  do polinômio de Taylor de grau  $n$  satisfaz a desigualdade:

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

### Observações:

1. Todos os números reais  $x$  tal que  $|x-a| \leq d$ , formam um intervalo fechado ao redor de  $x=a$ . Se  $f^{(n+1)}(x)$  é contínua nesse intervalo fechado, então o problema de achar  $M$  tal que  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  para  $|x-a| \leq d$  se reduz ao problema de achar o valor extremo de uma função contínua em um intervalo fechado.
2. Observando o resultado da Desigualdade de Taylor, podemos concluir que a precisão da aproximação da função pelo polinômio de Taylor, vai depender da distância de  $x$  a  $a$  e do grau do polinômio. Quanto mais próximo  $x$  esteja de  $a$  e quanto maior seja o grau do polinômio, melhor será a aproximação.

### Exemplo:

1. Calcular o polinômio de Taylor de grau 4 de  $f(x) = \cos(x)$  centrado em  $a=0$ :  
Para isso precisamos calcular as derivadas do cosseno até a ordem 4 em  $a=0$ .

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos(x) & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin(x) & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos(x) & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin(x) & f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos(x) & f^{(4)}(0) = 1
\end{array}$$

Portanto o polinômio de Taylor da função de grau 4 de  $f(x) = \cos(x)$  centrado em  $a = 0$  é

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

2. Usando o polinômio  $P_4(x)$ , determinar um valor aproximado de  $\cos(\frac{\pi}{6})$ .

Pela fórmula de Taylor, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = P_4(\frac{\pi}{6}) + R_4(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{(5)!}(\frac{\pi}{6})^5,$$

onde  $z$  é um número entre 0 e  $\frac{\pi}{6}$ . Como  $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$  e  $|\sin(x)| \leq 1$  para qualquer valor de  $x$ , usando a Desigualdade de Taylor, podemos afirmar que o resto  $R_4(\frac{\pi}{6})$  satisfaz

$$|R_4(\frac{\pi}{6})| = \frac{|\sin(z)|}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \leq \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \approx 0,000327953.$$

Logo, quando calculamos o valor de  $\cos(\frac{\pi}{6})$  pelo polinômio  $P_4(x)$ , temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 \approx 0,8660653883$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a 0,000327.

(Obs:  $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025404$ ).

Nos vídeos do Khan Academy as vezes, denomina o resto de erro, faz sentido pois o resto é a diferença entre o valor da função e sua aproximação pelo polinômio de Taylor.

Fazer os exercícios das listas correspondentes a este assunto.

Lembrando que vocês podem tirar dúvidas, da teoria e dos exercícios, através do fórum.

Bons estudos!

Professora Claudia