Introdução às Probabilidades

tradução do Jay Davore

índice

Definição de variáveis aleatórias contínuas

- Uma v.a. X é contínua se o seu conjunto de valores possíveis é um intervalo de números (Se $A < B$, então qualquer número x entre A e B é um valor possível)

Distribuições de probabilidade

- Seja X uma v.a. continua. Então a distribuição de probabilidade ou função densidade de probabilidade (f.d.p.) de X é uma função $f(x)$ tal que para dois números a e b quaisquer,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

O grafo de f é a curva de densidade.

função densidade de probabilidade (fdp)

Para $f(x)$ ser uma f.d.p:

- 1. $f(x) > 0$ para todos os valores de x
- 2. a área da região entre o grafo de f e o eixo x é igual a 1.

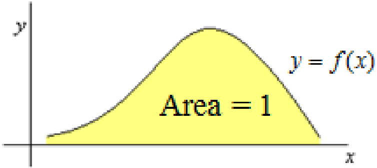


Figura: Representação de uma f.d.p.

f.d.p.

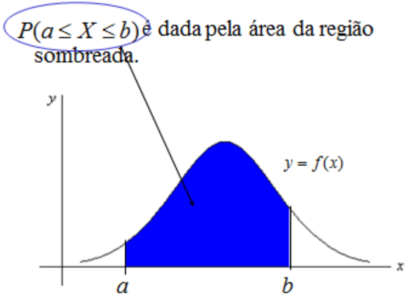


Figura: função densidade de probabilidade de uma variável contínua

v.a.Uniforme

- uma v.a. contínua X é dita ter uma distribuição uniforme no intervalo $[A, B]$ se a f.d.p de X é:

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Probabilidade para uma v.a.contínua

Se X é uma v.a. contínua, então para qualquer número c,

- $P(X = c) = 0$.
- Para dois números a e b com $a < b$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq B) &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

F.D.A

A função de distribuição acumulada (F.D.A) para uma v.a. X é definida para cada número x por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

Para cada x, $F(x)$ é a área abaixo da curva de densidade à esquerda de x

Utilizando $F(x)$ para calcular probabilidades

Seja X uma v.a. contínua com f.d.p $f(x)$ e F.D.A. $F(x)$. Então, para qualquer número a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

e para dois números qualquer a e b com $a < b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Obtendo $f(x)$ a partir de $F(x)$

Se X é uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$ e F.D.A. $F(x)$, então em cada número x para a qual a derivada $F'(x)$ existe,

$$F'(x) = f(x)$$

cálculo dos percentís para v.a. contínuas

Seja p um número entre 0 e 1. O $(100p)$-ésimo percentíl da distribuição de uma v.a. contínua X denotada por $\eta(p)$, é definida por:

$$p = F(\eta(p)) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(y)\,dy$$

Mediana

A mediana de uma distribuição contínua, denotada por $\tilde{\mu}$, é o 50-ésimo percentil. Assim, $\tilde{\mu}$ satisfaz:

$$0,5 = F(\tilde{\mu})$$

Isto é, metade da área abaixo da curva de densidade está ao lado esquerdo de $\tilde{\mu}$

O valor esperado

A média ou valor esperado de uma v.a. contínua X com $f.d.p.$ $f(x)$ é :

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

O estatístico inconsciente

Se X é uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$ e $h(x)$ é qualquer função de X, então:

$$E\left[h(x)\right] = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

Variância e desvio padrão de uma v.a. contínua

A variância de uma v.a. contínua X com f.d.p. $f(x)$ e média μ é:

$$\sigma_X^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

O desvio padrão é $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

forma curta de cálculo da variância

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

A f.d.p. normal

Uma v.a. contínua X é dita ter uma distribuição normal com parâmetros μ e σ, onde

- $-\infty < \mu < \infty$ e
- $\sigma > 0$

se a f.d.p. de X é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

para $-\infty < x < \infty$

f.d.p. de uma normal padrão

A distribuição normal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é chamado de distribuição normal padrão. Esta v.a. é denotada por Z.
A f.d.p. é:

$$f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

A F.D.A é:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(y;0,1)dy$$

Area da F.D.A de uma normal

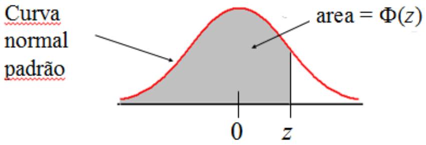


Figura: area e uma F.D.A. de uma normal padrão

Exemplos

Seja Z uma v.a. normal padrão, encontre da tabela

- 1. $P(Z \leq 0,85)$
  Area à esquerda de $0,85 = 0,8023$
- 2. $P(Z > 1,32)$
  $1 - P(Z \leq 1,32) = 0,0934$
- 3. $P(-2,1 \leq Z \leq 1,78)$
  Encontramos a area à esquerda de $1,78$ e subtraemos a area à esquerda de $-2,1$

$$\begin{aligned} P(-2,1 \leq \leq 1,78) &= P(Z \leq 1,78) - P(Z \leq -2,1) \\ &= 0,9625 - 0,0179 \\ &= 0,9446 \end{aligned}$$

Tabela normal padrão (exemplo)

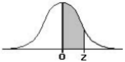


TABLA II

DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA *N*(0 , 1)

La tabla proporciona el área que queda comprendida entre **0** y **z**.

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'00000	0'00399	0'00798	0'01197	0'01595	0'01994	0'02392	0'02790	0'03188	0'03586
0'1	0'03983	0'04380	0'04766	0'05172	0'05567	0'05962	0'06356	0'06749	0'07142	0'07535
0'2	0'07926	0'08317	0'08706	0'09095	0'09483	0'09871	0'10257	0'10642	0'11026	0'11409
0'3	0'11791	0'12172	0'12552	0'12930	0'13307	0'13683	0'14058	0'14431	0'14803	0'15173
0'4	0'15554	0'15910	0'16276	0'16640	0'17003	0'17364	0'17724	0'18082	0'18439	0'18793
0'5	0'19146	0'19497	0'19847	0'20194	0'20450	0'20884	0'21226	0'21566	0'21904	0'22240
0'6	0'22575	0'22907	0'23237	0'23565	0'23891	0'24215	0'24537	0'24857	0'25175	0'25490
0'7	0'25804	0'26115	0'26424	0'26730	0'27035	0'27337	0'27637	0'27935	0'28230	0'28524
0'8	0'28814	0'29103	0'29389	0'29673	0'29955	0'30234	0'30511	0'30785	0'31075	0'31327
0'9	0'31594	0'31859	0'32121	0'32381	0'32639	0'32894	0'33147	0'33398	0'33646	0'33891
1'0	0'34134	0'34375	0'34614	0'34850	0'35083	0'35313	0'35543	0'35769	0'35993	0'36214
1'1	0'36433	0'36650	0'36864	0'37076	0'37286	0'37493	0'37698	0'37900	0'38100	0'38298
1'2	0'38493	0'38686	0'38877	0'39065	0'39251	0'39435	0'39617	0'39796	0'39973	0'40147
1'3	0'40320	0'40490	0'40658	0'40824	0'40988	0'41149	0'41308	0'41466	0'41621	0'41774
1'4	0'41924	0'42073	0'42220	0'42364	0'42507	0'42647	0'42786	0'42922	0'43056	0'43189
1'5	0'43319	0'43448	0'43574	0'43699	0'43822	0'43943	0'44062	0'44179	0'44295	0'44408
1'6	0'44520	0'44630	0'44738	0'44845	0'44950	0'45053	0'45154	0'45254	0'45352	0'45449
1'7	0'45543	0'45637	0'45728	0'45818	0'45907	0'45994	0'46080	0'46164	0'46246	0'46327
1'8	0'46407	0'46485	0'46562	0'46638	0'46712	0'46784	0'46856	0'46926	0'46995	0'47062

Figura: Como observar os valores na tabela (depende do tipo de tabela)

Tabela normal padrão (exemplo)

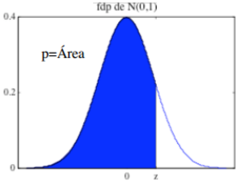
Distribución normal estándar

Z~N(0,1)

Tabla de la función de distribución:

P(Z≤z) = p

En la tabla figuran los valores de probabilidad acumulada p en función de z.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

Notação Z_α (Exemplo)

Se quisermos calcular $P(Z \geq z) = \alpha$, Z_α denotará o valor no eixo para o qual a área abaixo da curva z fica à direita de z_α.

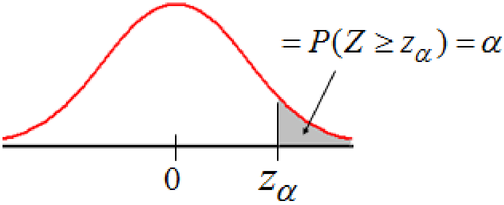


Figura: Como observar o valor Z_α

Exemplo

Seja Z uma v.a. normal padrão. Encontre z se:

- a. $P(Z < z) = 0,9278$
  Observando na tabela na entrada $= 0,9278$ encontraremos que $z = 1,46$
- b. $P(-z < Z < z) = 0,8132$

$$\begin{aligned} P(-z < Z < z) &= 2 \times P(0 < Z < z) \\ &= 2 \times \left[P(Z < z) - \frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \times P(Z < z) - 1 = 0,8132 \\ P(Z < z) &= 0,9066 \qquad \text{portanto} \\ z &= 1,32 \end{aligned}$$

Padronização de v.a.normais

Se X tem uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tem distribuição normal padrão.
Notação : $Z \sim N(0,1)$

Curva Normal, regra empírica

Porcentagens aproximados de area para desvios padrões dados (regra empírica)

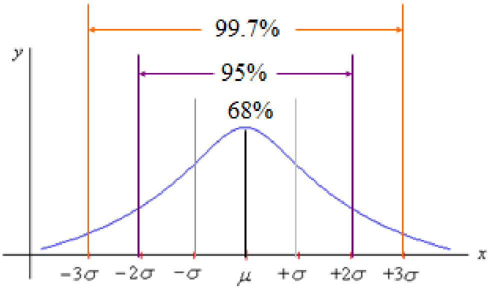


Figura: Probabilidades na curva normal- regra empírica

Exemplo

Seja X uma v.a. normal com média $\mu = 80$ e desvio padrão $\sigma = 20$, encontre $P(X \leq 65)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 65) &= P(Z \leq \frac{65 - 80}{20} \\ &= P(Z \leq -0,75) \\ &= 0,2266 \end{aligned}$$

Exemplo

Em uma escola elemental tem-se estudado o tempo para desaparecer uma erupção cutânea. Se encontrou que o tempo entre o início e o fim da erupção é uma v.a. normal com média $\mu = 6$ dias e desvio padrão $\sigma = 1,5$ dias. Encontre a probabilidade que para um estudante selecionado ao acaso, a erupção demorará em desaparecer entre $3,75$ e 9 dias.
Seja X a v.a. tempo de duração da erupção, então:

$$\begin{aligned} P(3,75 \leq X \leq 9) &= P(\frac{3,75-6}{1,5} \leq Z \leq \frac{9-6}{1,5} \\ &= P(-1,5 \leq Z \leq 2) \\ &= 0,9772 - 0,0668 \\ &= 0,9104 \end{aligned}$$

Aproximação para uma binomial

Seja X uma v.a binomial baseada em n ensaios, cada um com probabilidade de sucesso p. Se o histograma da binomial não é muito assimétrica, X pode ser aproximada por uma distribuição normal com parâmetros:

$$\mu = np, \qquad e$$
$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Exemplo

Numa escola a taxa de aprovação da disciplina de estatística é de 72%. Se 500 alunos estão matriculados no atual semestre, determine a probabilidade que no máximo 375 aprovarão a disciplina.
Considerando a aproximação da normal, teremos:

$$\mu = np = 500 \times (0,72) = 360$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0,72 \times 0,28} \approx 10$$

$$P(X \leq 375) \approx \Phi\left(\frac{375,5 - 360}{10}\right) = \Phi(1,55) = 0,9394$$

A função Gamma, definição

Para $\alpha > 0$ a função gamma $\Gamma(\alpha)$ é definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}$$

definição da distribuição Gamma

Uma v.a.contínua X tem uma distribuição Gamma, se sua f.d.p. é:

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde os parâmetros satisfazem: $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

A distribuição Gamma padrão tem $\beta = 1$

Média e Variância de uma Gamma

A média e variância de uma v.a. X com distribuição Gamma $f(x; \alpha, \beta)$ são:

$$E(X) = \mu = \frac{\alpha}{\beta}$$
$$V(X) = \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Se na definição da distribuição for considerando o expoente $e^{-x/\beta}$, e $\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$, então o valor esperado e a variância serão:

$$E(X) = \mu = \alpha\beta$$
$$V(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Probabilidades de uma distribuição Gamma

Seja X uma v.a. com distribuição Gamma com parâmetros α e β. Então, para qualquer $x > 0$, a F.D.A. de X é dado por:

$$P(X \leq x) = F(x; \alpha, \beta) = F(\frac{x}{\beta}; \alpha)$$

onde

$$F(x; \alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy$$

Definição da exponencial

Uma v.a. contínua X tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ, se sua f.d.p. é:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

média e variância de uma exponencial

A média e variância de uma v.a. X com distribuição exponencial é:

$$\mu = \alpha\beta = \frac{1}{\lambda}$$
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Probabilidades de uma função exponencial

Seja X uma v.a. com distribuição exponencial. Então a F.D.A. de X é dada por:

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Aplicações de uma distribuição exponencial

Suponha que o número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo de tamanho t têm uma distribuição de Poisson com parâmetro αt e que o número de ocorrências em intervalos não superpostos são independentes um dos outros. Então, a distribuição do tempo transcorrido entre ocorrências de dois eventos consecutivos é exponencial com parâmetro $\lambda = \alpha$.

Definição

Seja ν um inteiro possitivo. Então a v.a. X é dita ter uma distribuição Qui-quadrado com parâmetro ν se a f.d.p. de X é uma f.d.p. Gamma com parâmetros $\alpha = \frac{\nu}{2}$ e $\beta = 2$. A f.d.p. de X é:

$$f(x:\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

A distribuição Qui-quadrado

O parâmetro ν é chamado de número de graus de liberdade (g.l) de X. O símbolo χ^2 é usado em lugar de *Qui-quadrado*

Definição

Uma v.a. contínua X tem distribuição de Weibull se sua f.d.p. é :

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

onde os parâmetros satisfazem: $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

Média e variância

A média e a variância de uma v.a. X com distribuição Weibull são:

$$\mu = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\sigma^2 = \beta^2 \left\{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \left[\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})\right]^2\right\}$$

F.D.A de uma Weibull

A F.D.A de uma v.a. X com distribuição Weibull com parâmetros α e β é:

$$F(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Definição

Uma v.a. não negativa X tem uma distribuição lognormal se a v.a. $Y = ln(X)$ tem distribuição normal.
A f.d.p. tem parâmetros μ e σ e é:

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha x} e^{-[ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Média e Variância de uma lognormal

A média e variância de uma v.a. X com distribuição lognormal são:

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$$
$$V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

F.D.A de uma lognormal

A F.D.A. de uma lognormal é dada por:

$$
\begin{aligned}
F(x;\mu,\alpha) = P(X \leq x) &= P[ln(X) \leq ln(x)] \\
&= P\left(Z \leq \frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Definição

Uma v.a. X é dita ter uma distribuição Beta com parâmetro $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua f.d.p de X é

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)*\Gamma(\beta)}\,(x)^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

Média e Variância

A média e variância de uma v.a. X com distribuição Beta, são:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Percentil amostral

- Ordene as n observações amostrais de menor a maior.
- A i-ésima menor observação na lista é tomada como o $[100(i - 0,5)/n]$-ésimo percentil amostral

Grafo de probabilidade (Probability plot)

$$\underset{\text{da distribuição}}{[100(i-0,5)/n]-\text{ésimo percentil,}} \qquad \underset{\text{observação amostral}}{i-\text{ésima}}$$

Se os percentis amostrais são proximos aos percentis correspondentes de distribuição populacional, o primeiro número pode ser muito proximo do segundo.

Grafo de probabilidade da normal(Normal Probability plot)

Um plot de pares:

$$[100(i-0,5)/n]-\text{z percentil}, \qquad i-\text{ésima menor observação}$$

Em um sistema bi-dimensional de coordenadas cartesianas, é chamado de plot de probabilidades da normal. Se os dados foram extraídos de uma normal, os pontos deverão ficar proximos a uma linha com inclinação σ e intercepto μ.

Além da normal

Considere uma família de distribuições de probabilidade envolvendo dois parâmetros θ_1 e θ_2. Seja $F(x; \theta_1, \theta_2)$ a F.D.A correspondente. Os parâmetros θ_1 e θ_2 são ditos parâmetros de localização e escala se: $F(x; \theta_1, \theta_2)$ é uma função de $\frac{x-\theta_1}{\theta_2}$