DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

August 15, 2023

Quantificadores e Predicados

"Para todo x, $x > 0$"

Não pode ser simbolizada adequadamente através de símbolos proposicionais, parênteses e conectivos lógicos.

Quantificadores e Predicados

"Para todo x, $x > 0$"

- Os quantificadores são frases como "para todo", "para cada" ou "para algum", que indicam de alguma forma quantos objetos têm uma determinada propriedade.
- O quantificador universal é simbolizado por um $\forall$, e é lido "para todo", "para todos", "para cada" ou "para qualquer".

Quantificadores e Predicados

"Para todo x, x > 0"

- Os quantificadores são frases como "para todo", "para cada" ou "para algum", que indicam de alguma forma **quantos objetos têm uma determinada propriedade**.
- O quantificador universal é simbolizado por um $\forall$, e é lido "para todo", "para todos", "para cada" ou "para qualquer".

$$(\forall x),\ (x > 0)$$

Quantificadores e Predicados

$$(\forall x),\ (x > 0)$$

- Um quantificador e sua variável são sempre colocados entre parênteses.
- A frase "$x > 0$" descreve a propriedade da variável x, que é ser positiva.
- Uma propriedade também é chamada de **predicado**.
- O valor-verdade da expressão depende do domínio (coleção de objetos dos quais x pode ser escolhido.).

Quantificadores e Predicados

$$(\forall x),\ P(x)$$

Exemplo

- Suponha que o domínio consiste em todos os livros em sua biblioteca local.
- P(x) é a propriedade de que x deve ter capa vermelha.
- Qual a interpretação?
- Qual o valor-verdade desta expressão?

Quantificadores e Predicados

Qual o valor verdade da expressão $(\forall x),\ P(x)$ em cada uma das seguintes interpretações?

Exercício

- P(x) é a propriedade de que x seja amarelo e o domínio de interpretação é o conjunto de todos os canários-da- terra.
- P(x) é a propriedade de que x seja amarelo e o domínio de interpretação é o conjunto de todos os pássaros.
- P(x) é a propriedade de que x seja uma ave e o domínio de interpretação é o conjunto de todos os pássaros.

Quantificadores e Predicados

O quantificador existencial é simbolizado por um E espelhado "∃", e é lido como "existe um", "para pelo menos um" ou "para algum".

$$(\exists x)(x > 0)$$

Como deve ser lida a expressão?

Quantificadores e Predicados

$$(\exists x),\ P(x)$$

Exemplo

- Suponha que o domínio consiste em todos os livros em sua biblioteca local.
- P(x) é a propriedade de que x deve ter capa vermelha.
- Qual a interpretação?
- Qual o valor verdade desta expressão?

Quantificadores e Predicados

Desafio

- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ seja verdadeiro e $(\exists x),\ P(x)$ seja falso?

Quantificadores e Predicados

Desafio

- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ seja verdadeiro e $(\exists x),\ P(x)$ seja falso?
- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ quanto $(\exists x),\ P(x)$ seja verdadeiro?

Quantificadores e Predicados

Desafio

- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ seja verdadeiro e $(\exists x),\ P(x)$ seja falso?
- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ quanto $(\exists x),\ P(x)$ seja verdadeiro?
- Construa uma interpretação (i.e., dê o domínio e o significado de P(x)) na qual $(\forall x), P(x)$ tenha o valor verdadeiro.

Quantificadores e Predicados

Desafio

- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ seja verdadeiro e $(\exists x),\ P(x)$ seja falso?
- É possível achar uma interpretação na qual tanto $(\forall x),\ P(x)$ quanto $(\exists x),\ P(x)$ seja verdadeiro?
- Construa uma interpretação (i.e., dê o domínio e o significado de P(x)) na qual $(\forall x), P(x)$ tenha o valor verdadeiro.
- Construa uma interpretação na qual $(\forall x), P(x)$ tenha o valor falso.

Quantificadores e Predicados

Os predicados podem ser:

- unários, P(x), Q(x);
- binários, Q(x,y);
- n-ários, $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Como é lida a expressão $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$?

- Domínio: Consiste em inteiros;
- Propriedade: $x < y$
- Qual o valor-verdade?

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Como é lida a expressão $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$?

- Domínio: Consiste em inteiros;
- Propriedade: $x < y$
- Qual o valor-verdade?

Quantificadores e Predicados

Exemplo: Como é lida a expressão $(\forall x)Q(x, a)$?

- Domínio: Consiste em inteiros;
- Um símbolo de constante (a, b, c, etc.) é interpretado como um objeto específico no domínio.
- Propriedade: $x < a$
- Qual o valor-verdade?

Quantificadores e Predicados

Definição: **Interpretação**

Uma interpretação de uma expressão envolvendo predicados consiste em:

- um conjunto de objetos chamados o **domínio** da interpretação, que deve conter pelo menos um elemento;
- a atribuição de uma propriedade dos objetos do domínio para cada predicado na expressão;
- a atribuição de um objeto particular no domínio a cada símbolo constante na expressão.

Quantificadores e Predicados

As expressões podem ser obtidas da combinação de predicados, quantificadores, símbolos de agrupamento (parênteses ou colchetes) e dos conectivos lógicos.

Exemplos de fórmulas bem-formuladas

$P(x) \vee Q(y)$
$(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)]$
$(\forall x)((\exists y)[P(x, y) \wedge Q(x, y)] \longrightarrow R(x))$
$(\exists x)S(x) \vee (\forall y)T(y)$

Qual é o escopo do quantificador?

Quantificadores e Predicados

Exemplo

$$(\forall x)(\exists y)[P(x, y) \wedge Q(x, y)]$$

- Domínio: Inteiros positivos;
- $P(x, y) : x \leq y$
- $Q(x, y) : x$ divide y

Quantificadores e Predicados

Exemplo

$$(\forall x)[(\exists y)P(x,y) \wedge Q(x,y)]$$

- Domínio: Inteiros positivos;
- $P(x,y) : x \leq y$
- $Q(x,y) : x$ divide y

Quantificadores e Predicados

Exercício

Qual o valor-verdade da wff

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)[B(x,y) \longrightarrow C(y)])$$

- Domínio: Inteiros;
- $A(x) : x > 0$;
- $B(x,y) : x > y$;
- $C(y) : y \leq 0$;

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- todo papagaio é feio;
- Fazendo P(x) denotar "x é um papagaio" e U(x) denotar "x é feio", como ficaria a wff

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- todo papagaio é feio;
- Fazendo P(x) denotar "x é um papagaio" e U(x) denotar "x é feio", como ficaria a wff
- $(\forall x)[P(x) \longrightarrow U(x)]$;

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- todo papagaio é feio;
- Fazendo P(x) denotar "x é um papagaio" e U(x) denotar "x é feio", como ficaria a wff
- $(\forall x)[P(x) \longrightarrow U(x)]$;
- "Qualquer papagaio é feio" e "Cada papagaio é feio"

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- Existe um papagaio feio;
- Fazendo $P(x)$ denotar "x é um papagaio" e $U(x)$ denotar "x é feio", como ficaria a wff

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- Existe um papagaio feio;
- Fazendo P(x) denotar "x é um papagaio" e U(x) denotar "x é feio", como ficaria a wff
- $(\exists x)[P(x) \wedge U(x)]$;

Quantificadores e Predicados

Mais informações

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores.

- Existe um papagaio feio;
- Fazendo P(x) denotar "x é um papagaio" e U(x) denotar "x é feio", como ficaria a wff
- $(\exists x)[P(x) \wedge U(x)]$;
- "Alguns papagaios são feios" e "Existem papagaios feios".

Quantificadores e Predicados

Exercício

Usando os símbolos predicados S(x), I(x) e M(x), escreva wffs que expressem o pedido. (O domínio é a coleção de todas as pessoas.)

- Todos os estudantes são inteligentes.
- Alguns estudantes inteligentes gostam de música.
- Todos que gostam de música são estudantes estúpidos.

Quantificadores e Predicados

A negação da sentença "Tudo é bonito" é "Não é verdade que tudo é bonito" ou "Algo não é bonito". Simbolicamente,

$$[(\forall x)A(x)]' \Leftrightarrow (\exists x)[A(x)]'$$

é válido.
A negação de "Algo é bonito" é "Nada é bonito" ou "Tudo não é bonito". Simbolicamente,

$$[(\exists x)A(x)]' \Leftrightarrow (\forall x)[A(x)]'$$

é válido.

Validade

- **wffs proposicionais** - contêm apenas símbolos proposicionais e conectivos lógicos;

Validade

- **wffs proposicionais** - contêm apenas símbolos proposicionais e conectivos lógicos;
    - Sempre tem valor-verdade;
    - Depende dos valores-verdade atribuídos aos símbolos proposicionais;

Validade

- **wffs proposicionais** - contêm apenas símbolos proposicionais e conectivos lógicos;
  - Sempre tem valor-verdade;
  - Depende dos valores-verdade atribuídos aos símbolos proposicionais;
- **wffs predicativas** -contêm predicados e variáveis;

Validade

- **wffs proposicionais** - contêm apenas símbolos proposicionais e conectivos lógicos;
  - Sempre tem valor-verdade;
  - Depende dos valores-verdade atribuídos aos símbolos proposicionais;
- **wffs predicativas** -contêm predicados e variáveis;
  - Pode não ter valor-verdade;
  - O valor-verdade (ou falta dele) de uma wff predicativa depende da interpretação;

Validade

Algumas definições

- Uma tautologia é uma wff proposicional que é verdadeira em todas as linhas da tabela-verdade.

Validade

Algumas definições

- Uma tautologia é uma wff proposicional que é verdadeira em todas as linhas da tabela-verdade.
- O análogo à tautologia para as wffs predicativas é a validade.

Validade

Algumas definições

- Uma tautologia é uma wff proposicional que é verdadeira em todas as linhas da tabela-verdade.
- O análogo à tautologia para as wffs predicativas é a validade.
- Uma wff predicativa é válida se for verdadeira para qualquer interpretação possível.

Validade

Algumas definições

- Uma tautologia é uma wff proposicional que é verdadeira em todas as linhas da tabela-verdade.
- O análogo à tautologia para as wffs predicativas é a validade.
- Uma wff predicativa é válida se for verdadeira para qualquer interpretação possível.
- O valor-verdade (ou falta dele) de uma wff predicativa depende da interpretação;

Validade

Exemplo de tautologia

- $(\forall x)P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$.

Validade

Exemplo de tautologia

- $(\forall x)P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$.
- $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$.

Validade

Exemplo de tautologia

- $(\forall x)P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$.
- $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$.
- $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$.

Validade

Exemplo de tautologia

- $(\forall x)P(x) \longrightarrow (\exists x)P(x)$.
- $(\forall x)P(x) \longrightarrow P(a)$.
- $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$.
- $P(x) \longrightarrow [Q(x) \longrightarrow P(x)]$.

Validade

Exercício

A seguinte wff é válida ou inválida:

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \longrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$