2 Limites e Derivadas

2.4 A Definição Precisa de um Limite

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "*x* está próximo de 2" e "*f*(*x*) aproxima-se cada vez mais de *L*" são vagas.

Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000} \right) = 0.0001 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

A Definição Precisa de um Limite

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando *x* está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então *f*(*x*) está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como *f*(*x*) varia quando *x* está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:
Quão próximo de 3 deverá estar *x* para que *f*(*x*) difira de 5 por menos que 0,1?

A Definição Precisa de um Limite

A distância de *x* a 3 é $|x - 3|$ e a distância de *f*(*x*) a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$, portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

A Definição Precisa de um Limite

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$$

isto é,

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}05.$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se *x* estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então *f*(*x*) estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

A Definição Precisa de um Limite

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

De forma análoga,

$$|f(x) - 5| < 0{,}001 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}0005$$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001 anteriormente considerados, são *tolerâncias de erro* que podemos admitir.

A Definição Precisa de um Limite

Para que o número 5 seja precisamente o limite de $f(x)$ quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre $f(x)$ e o 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de torná-la menor que *qualquer* número positivo.

E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε (a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

$$\boxed{1} \quad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

A Definição Precisa de um Limite

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois $\boxed{1}$ diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 restringindo os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).

Observe que $\boxed{1}$ pode ser reescrita como: se

$$3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3)$$

então

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

e isso é ilustrado na Figura 1.

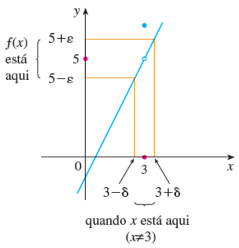

Figura 1

A Definição Precisa de um Limite

Somando os valores de x ($\neq 3$) estão no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando $\boxed{1}$ como modelo, temos uma definição precisa de um limite.

$\boxed{2}$ **Definição precisa de limite** Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

A Definição Precisa de um Limite

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena ao se exigir que a distância de x a a seja suficientemente pequena (mas não igual a 0).

A Definição Precisa de um Limite

Alternativamente,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

A Definição Precisa de um Limite

Podemos também reformular a Definição 2 em termos de intervalos, observando que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Além disso, $0 < |x - a|$ é válida se, e somente se, $x - a \neq 0$, isto é, $x \neq a$.

A Definição Precisa de um Limite

Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a Definição 2 pode ser enunciada desta maneira:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

A Definição Precisa de um Limite

Podemos interpretar geometricamente essa definição, representando a função por um diagrama de flechas, como na Figura 2, onde f leva um subconjunto de $\mathbb{R}$ em outro subconjunto de $\mathbb{R}$.

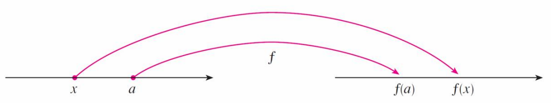

Figura 2

A Definição Precisa de um Limite

A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que f leve todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)

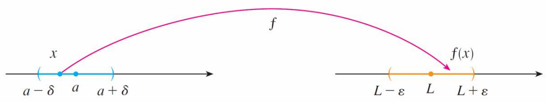

Figura 3

A Definição Precisa de um Limite

Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então trocamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e o gráfico de f. (Veja a Figura 4.)

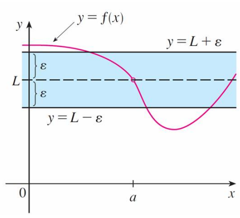

Figura 4

A Definição Precisa de um Limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e deixarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (Veja a Figura 5.) Você pode ver que, se um destes δ tiver sido encontrado, então qualquer outro δ menor também servirá.

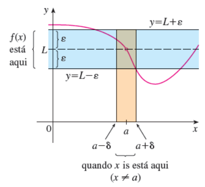

Figura 5

A Definição Precisa de um Limite

É importante compreender que o processo ilustrado nas Figuras 4 e 5 deve funcionar para *todo* número positivo ε, independentemente de quão pequeno ele seja. A Figura 6 mostra que se um ε menor for escolhido, então será necessário um δ menor.

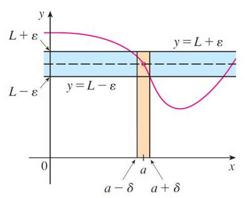

Figura 6

Exemplo 1

Como $f(x) = x^3 - 5x + 6$ é uma função polinomial, sabemos da Propriedade de Substituição Direta que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1^3 - 5(1) + 6 = 2.$$

Use um gráfico para encontrar um número tal que se x está a menos de de 1, então y f(x) está a menos de 0,2 de 2, isto é,

se $|x - 1| < \delta$ então $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$

Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0{,}2$ na definição de um limite para a função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.

Exemplo 1 – *Solução*

Um gráfico de f é mostrado na Figura 7, e estamos interessados na região próxima do ponto (1, 2).

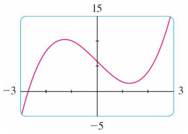

Figura 7

Observe que podemos reescrever a desigualdade

$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$ como $-0{,}2 < (x^3 - 5x + 6) - 2 < 0{,}2$

ou equivalentemente $1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$

Exemplo 1 – *Solução* continuação

Então, precisamos determinar os valores de x para os quais a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre as retas horizontais $y = 1{,}8$ e $y = 2{,}2$. Portanto, traçamos o gráfico das curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1{,}8$ e $y = 2{,}2$ próximo ao ponto (1,2) na Figura 8.

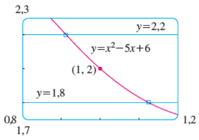

Figura 8

Exemplo 1 – *Solução* continuação

Então, usamos o cursor para estimar que a coordenada x do ponto de intersecção da reta $y = 2{,}2$ com a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está em torno de 0,911.

Alogamente, $y = x^3 - 5x + 6$ intersepta a reta $y = 1{,}8$ quando $x \approx 1{,}124$. Logo, arredondando-se em direção a 1, a favor da segurança, podemos afirmar que

se $0{,}92 < x < 1{,}12$ então $1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$

Este intervalo (0,92; 1,12) não é simétrico em tono de $x = 1$. A distância de $x = 1$ até a extremidade esquerda é $1 - 0{,}92 = 0{,}08$ e a distância até a extremidade direita, 0,12.

Exemplo 1 – *Solução* continuação

Podemos escolher δ como o menor desses números, isto é, $\delta = 0{,}08$. Então podemos reescrever nossas desigualdades em termos de distâncias da seguinte forma:

Se $|x - 1| < 0{,}08$, então $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$

Isso somente nos diz que, mantendo x dentro de uma distância de 0,08 de 1, podemos manter $f(x)$ dentro de uma distância de 0,2 de 2.

Embora tenhamos escolhido $\delta = 0{,}08$, qualquer valor menor positivo de δ também funcionaria.

Exemplo 2

Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

Solução:

1. *Uma análise preliminar do problema* (*conjecturando um valor para* δ). Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Porém $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Portanto, queremos δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é, se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

2. *Demonstração* (*mostrando que este* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

de modo que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon.$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este exemplo está ilustrado na Figura 9.

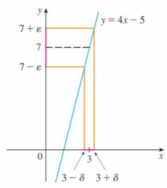

Figura 9

A Definição Precisa de um Limite

As definições intuitivas de limites laterais podem ser reformuladas com mais precisão da seguinte forma.

3 Definição de Limite à Esquerda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a - \delta < x < a \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A Definição Precisa de um Limite

4 Definição de Limite à Direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a < x < a + \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 3

Use a Definição 4 para provar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Exemplo 3 – *Solução*

1. *Conjecturando um valor para* δ*.* Seja ε um número positivo dado. Aqui $a = 0$ e $L = 0$, logo queremos achar um número δ tal que

se $0 < x < \delta$ então $| \quad - 0| < \varepsilon$

isto é,

se $0 < x < \delta$ então $\sqrt{x}$ ε <

ou, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtemos

se $0 < x < \delta$ então $x < \varepsilon^2$.

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon^2$.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

2. *Mostrando que este* δ *funciona.* Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$.
Se $0 < x < \delta$, então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

logo $| \sqrt{x} - 0| < \varepsilon$

Consequentemente, pela Definição 4, isso mostra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

A Definição Precisa de um Limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ existem, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Limites Infinitos

Limites Infinitos

Os limites infinitos podem também ser definidos de maneira precisa.

6 Definição Precisa de Limite Infinito Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que, para todo número positivo M, há um número positivo δ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > M$

Limites Infinitos

Isso diz que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M) tornando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ, em que δ depende de M, mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na Figura 10.

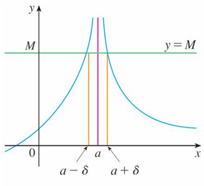

Figura 10

Limites Infinitos

Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$. Você pode ver que se um M maior for escolhido, então um δ menor poderá ser necessário.

Exemplo 5

Use a Definição 6 para demonstrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Solução:

Seja M um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

se $\quad 0 < |x| < \delta \quad$ então $\quad 1/x^2 > M.$

Mas $\dfrac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \dfrac{1}{M} \iff |x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

Assim, se escolhermos $\delta = 1/\sqrt{M}$ e se $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, então $1/x^2 > M$. Isso mostra que $1/x^2 \to \infty$ quando $x \to 0$.

Limites Infinitos

$\boxed{7}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N há um número positivo δ tal que,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad f(x) < N$$