ACH2011 - Cálculo I

Sistema de Informação - EACH

Lista 1: Definição axiomática dos números reais.

O conjunto dos números reais é um conjunto não vazio, denotado por $\mathbb{R}$, junto com duas operações binárias internas

adição $(+) : \varphi(a,b) = a + b \in \mathbb{R}$, multiplicação $(\cdot) : \psi(a,b) = a \cdot b \in \mathbb{R}$

e uma relação de ordem "$\leq$" (lê-se "menor ou igual") que satisfazem os seguintes axiomas.

Axiomas de adição

A.1. Lei comutativa: para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a + b = b + a$;

A.2. Lei associativa: para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $(a + b) + c = a + (b + c)$;

A.3. Existência do elemento neutro aditivo: existe um valor único em $\mathbb{R}$, denotado por "0" (0, lê-se zero) tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $a + 0 = a = 0 + a$;

A.4. Existência do elemento simétrico aditivo: para todo $a \in \mathbb{R}$, existe um valor denotado por $-a$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

Axiomas da multiplicação

M.1. Lei comutativa: para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a \cdot b = b \cdot a$;

M.2. Lei associativa: para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

M.3. Existência do elemento unidade: existe um valor único em $\mathbb{R}$, denotado por "1" e diferente do 0 (1, lê-se um) tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$;

M.4. Existência do elemento inverso: para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existe um valor denotado por a^{-1} ou $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

Axioma da lei distributiva em relação à adição

D.1. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Axiomas de ordem

O.1. Reflexiva: para todo $a \in \mathbb{R}$, temos $a \leq a$;

O.2. Simétrica: se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;

O.3. Transitiva: se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;

O.4. Lei de dicotomia: se $a, b \in \mathbb{R}$, então $a \leq b$ ou $b \leq a$;

O.5. se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$ par todo $c \in \mathbb{R}$;

O.6. se $a \leq b$ e c é tal que $0 \leq c$ e $c \neq 0$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Axiomas do supremo

S.1. Todo conjunto S de números reais no vazio acotado superiormente, possui uma menor cota superior, chamado supremo de S.

Definição. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito majorante, limite superior ou cota superior de S se $x \leq a$ para todo $x \in S$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito supremo de S, se for o menor dos majorantes. Por exemplo, o supremo de $(-\infty, 1)$ é 1.
Os números racionais não satisfazem o axioma do supremo. Por exemplo, o conjunto

$$S = \{p \in \mathbb{Q} \text{ tal que } p^2 \leq 2\}$$

é limitado superiormente por 2, porém não possui supremo em $\mathbb{Q}$: Se $q \in \mathbb{Q}$ satisfaz $x \leq q$ para todo $x \in S$, então $\sqrt{2} < q$. Podemos agora considerar outro número racional p tal que $\sqrt{2} < p < q$. Temos que $p \in \mathbb{Q}$ é também uma cota superior de S e menor do que q.

Exercícios

1. Provar, usando somente os axiomas da definição dos números reais, as seguintes propriedades:

   (a) O inverso multiplicativo é único.

   (b) $-(-x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Se $x + x = x$, então $x = 0$.

   (d) $0 \cdot x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (e) $(-1) \cdot x = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (f) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (Leis de cancelamento). Sejam x, y, $z \in \mathbb{R}$, prove que:

   (a) Se $x + z = y + z$ então $x = y$;

   (b) Se $z \neq 0$ e $x \cdot z = y \cdot z$ então $x = y$.

3. Sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$, provar as seguintes propriedades:

   (a) Se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

   (b) Se $x + y = x$ então $y = 0$;

   (c) Se $x \neq 0$ e $x \cdot y = x$ então $y = 1$;

   (d) Se $x + y = 0$ e $x + z = 0$ então $y = z$;

   (e) Se $x \cdot y = 1$ e $x \cdot z = 1$ então $y = z$.

   (f) Se $x, y \in \mathbb{R}$ são números diferente de zero, então $x \cdot y \neq 0$.

4. Dados dois números reais x e y dizemos que x é menor do que y, e escrevemos $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$, provar as seguintes propriedades:

   (a) Se $0 < x$, então $-x < 0$.

   (b) Se $x < y$ e $z < 0$, então $y \cdot z < x \cdot z$.

   (c) Denotaremos $x \cdot x$ por x^2. Se $x \in \mathbb{R}$ é diferente de zero, então $0 < x^2$.