Nesta semana estudaremos: Resto de Lagrange

Primeiro vamos relembrar alguns assuntos: Aproximação linear, aproximação quadrática e polinômio de Taylor.

Aproximação linear e de de segundo grau

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$ porque $f(x)$ e $L(x)$ têm o mesmo valor e a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte (Do livro Cálculo de James Stewart):

(i) $P(a) = f(a)$, (P e f devem ter o mesmo valor em a).

(ii) $P'(a) = f'(a)$, (P' e f' devem ter o mesmo valor em a).

(iii) $P''(a) = f''(a)$, (P'' e f'' devem ter o mesmo valor em a).

Polinômio de Taylor[1]

Imagina que queremos melhorar nossa aproximação quadrática para $f(x)$ próximo a $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

tal que P_n e suas primeiras n derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ que f e suas primeiras n derivadas. Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, prova-se que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$, $c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$ e em geral ,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.**

Resto de Lagrange:[1]

[1] Extraído do livro Cálculo A de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_{n,a}(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_{n,a}(x) = f(x) - P_n(x)$. Temos, então, $f(x) = P_n(x) + R_{n,a}(x)$, isto é,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x). \quad (1)$$

Para os valores de x nos quais $R_{n,a}(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_{n,a}(x)$ chama-se **resto**. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_{n,a}(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

Proposição (Fórmula de Taylor): Seja $f : [a,b] \to I\!R$ uma função definida num intervalo $[a,b]$. Suponhamos que as derivadas f', f'', ..., $f^{(n)}$ existem e sejam continuas em $[a,b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a,b). Seja c um ponto qualquer em $[a,b]$. Então, para cada $x \in [a,b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad (2)$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.
Observando as fórmulas (1) e (2), vemos que, na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \quad (3)$$

Essa forma para o resto é chamada Forma de Lagrange do Resto. Existem outras formas para o resto, como a forma integral.
Como o z da fórmula (3) e algum valor entre c e x, ele é desconhecido, portanto não sabemos qual é o valor exato do resto. Para estimar esse valor usamos a seguinte desigualdade.

Desigualdade de Taylor: Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_{n,a}(x)$ do polinômio de Taylor de grau n satisfaz a desigualdade:

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Observações:

1. Todos os números reais x tal que $|x-a| \leq d$, formam um intervalo fechado ao redor de $x = a$. Se $f^{(n+1)}(x)$ é contínua nesse intervalo fechado, então o problema de achar M tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$ se reduz ao problema de achar o valor extremo de uma função contínua em um intervalo fechado.

2. Observando o resultado da Desigualdade de Taylor, podemos concluir que a precisão da aproximação da função pelo polinômio de Taylor, vai depender da distância de x a a e do grau do polinômio. Quanto mais próximo x esteja de a e quanto maior seja o grau do polinômio, melhor será a aproximação.

Exemplo:

1. Calcular o polinômio de Taylor de grau 4 de $f(x) = \cos(x)$ centrado em $a = 0$:

   Para isso precisamos calcular as derivadas do cosseno até a ordem 4 em $a = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Portanto o polinômio de Taylor da função de grau 4 de $f(x) = \cos(x)$ centrado em $a = 0$ é

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

2. Usando o polinômio $P_4(x)$, determinar um valor aproximado de $\cos(\frac{\pi}{6})$.

   Pela fórmula de Taylor, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = P_4(\frac{\pi}{6}) + R_4(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{(5)!}(\frac{\pi}{6})^5,$$

   onde z é um número entre 0 e $\frac{\pi}{6}$. Como $f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para qualquer valor de x, usando a Desigualdade de Taylor, podemos afirmar que o resto $R_4(\frac{\pi}{6})$ satisfaz

$$|R_4(\frac{\pi}{6})| = \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \leq \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \approx 0{,}000327953.$$

   Logo, quando calculamos o valor de $\cos(\frac{\pi}{6})$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos:

$$\cos(\frac{\pi}{6}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{24}(\frac{\pi}{6})^4 \approx 0{,}8660653883$$

   e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a $0{,}000327$.
   (Obs: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025404$).

Nos vídeos do Khan Academy as vezes, denomina o resto de erro, faz sentido pois o resto é a diferença entre o valor da função e sua aproximação pelo polinômio de Taylor.

Fazer os exercícios das listas correspondentes a este assunto.

Lembrando que vocês podem tirar dúvidas, da teoria e dos exercícios, através do fórum.

Bons estudos!

Professora Claudia