Lista de Exercícios - Introdução à Estatística

1. Sorteando um número de 1 a 30, qual a probabilidade de que ele seja par ou múltiplo de 5?

2. Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, qual a probabilidade de que suas faces superiores exibam a soma igual a 7 ou 9?

3. Numa pesquisa feita com 600 pessoas de uma comunidade, verificou-se que 200 lêem o jornal A, 300 lêem o jornal B e 150 lêem os jornais A e B. Qual a probabilidade de, sorteando-se uma pessoa, ela ser leitora do jornal A ou do jornal B?

4. Extrai-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta extraída ser valete ou carta de paus? Obs: um baralho possui 4 valetes e 13 cartas de paus. Só existe 1 valete de paus.

5. Numa urna há 40 bolas brancas, 25 bolas pretas e 15 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de que ela seja preta ou vermelha.

6. Considere um experimento aleatório e os eventos X e Y associados, tais que P(X)=1/2, P(Y)1/3 e P($X \cap Y$)=1/4. Calcule P($X \cup Y$).

7. Quatro universidades–1,2,3 e 4– estão participando de um torneio de basquete. Na primeira etapa, 1 jogará com 2 e 3 com 4. Os dois vencedores disputarão o campeonato e os dois perdedores também jogarão. Um resultado possível pode ser representado por 1324 (1 ganha de 2 e 3 ganha de 4 nos jogos da primeira *etapa* e 1 ganha de 3 e 2 ganha de 4).

   (a) Relacione todos os resultados de s

   (b) Represente por A o evento em que 1 ganha o torneio. Relacione os resultados de A.

   (c) Represente por B o evento em que 2 seja um dos finalistas do campeonato. Relacione os resultados de B.

   (d) Quais são os resultados de $A \cup B$ e de $A \cap B$? Quais são os resultados de A'?

8. Selecione aleatoriamente um estudante em uma determinada universidade e represente por A o evento de ele possuir um cartão de crédito Visa e por B o evento análogo para um MasterCard. Suponha que $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$ e $P(A \cap B) = 0.25$

(a) Calcule a probabilidade de que o indivíduo selecionado tenha pelo menos um dos dois tipos de cartão (ou seja, a probabilidade do evento $A \cup B$).

(b) Qual é a probabilidade de o indivíduo selecionado não ter nenhum dos tipos de cartão?

(c) Descreva, em termos de A e B, o evento em que o estudante selecionado possui um cartão Visa, mas não um MasterCard. Calcule a probabilidade deste evento.

9. A rota usada por um motorista que vai ao trabalho contém dois cruzamentos com semáforos. A probabilidade de que ele tenha de parar no primeiro semáforo é 0.4, a probabilidade análoga para o segundo semáforo é 0.5 e a probabilidade de que ele tenha de parar em pelo menos um dos dois semáforos é 0.6. Qual a probabilidade de ele ter de parar:

   (a) Nos dois semáforos?

   (b) No primeiro semáforo mas não no segundo?

   (c) Em exatamente um semáforo?

10. O conselho de estudantes de engenharia de certa faculdade possui um aluno representante de cada uma das áreas de engenharia (civil, elétrica, produçao de matériais e mecânica). De quantas formas é possível:

   (a) Selecionar um presidente e um vice-presidente?

   (b) Selecionar um presidente, um vice-presidente e um secretário?

11. Três moléculas do tipo A, três do tipo B, três do tipo C e três do tipo D serão vinculadas uma à outra para formar uma cadeia molecular. Uma molécula deste tipo é $ABCDABCDABCD$ e outra é $BCDDAAABDBCC$.

   (a) Quantas moléculas deste tipo podem ser formadas? (Sugestão: se as três moléculas A forem diferentes uma da outra $-A_1, A_2, A_3-$ assim como as B, C e D, quantas moléculas haverá? Como esse número será reduzido se nao houver distinção entre as moléculas A?)

   (b) Supornha que uma molécula composta do tipo descrito seja selecionada aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que todas as moléculas de cada tipo estejam juntas (como em BBBAAADDD-CCC)?

12. Certa loja faz reparos em componentes de áudio e vídeo. Represente por A o evento em que o próximo componente trazido para conserto seja de áudio e por B o evento em que o próximo componente seja um CD-player (de forma que o evento B está contido em A). Suponha que $P(A) = 0.6$ e $P(B) = 0.05$. Qual é $P(B|A)$?

13. Uma caixa contem seis bolas vermelhas e três verdes e uma segunda caixa contém sete bolas vermelhas e três verdes. Uma bola é retirada da primeira caixa e colocada na segunda. Então uma bola é retirada da segunda caixa e colocada na primeira.

    (a) Qual é a probabilidade de uma bola vermelha ser selecionada na primeira caixa e outra bola vermelha na segunda?

14. Suponha que as proporções de fenótipos sanguineos em uma população sejam as seguintes:

A	B	AB	O
0.42	0.10	0.04	0.44

    Assumindo que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam independentes um do outro, qual é a probabilidade de que ambos os fenótipos sejam **O**? Qual é a probabilidade de que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam iguais?

15. Seja X = número de dígitos não-nulos de um código CEP selecionado aleatoriamente. Quais são os valores possíveis de X? Forneça três resultados possiveis e seus valores associados X.

16. A fmp de X = o número de defeitos graves em um eletrodomésitco selecionado aleatoriamente é

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.08	0.15	0.45	0.27	0.05

    Calcule os dados a seguir:

    (a) $E(X)$

    (b) O desvio padrão de X

    (c) $V(X)$

17. Calcule as seguintes probabilidades binomiais diretamente definida pela fórmula de $b(n, p)$:

    (a) $b(8, 0.6)$ $P(X = 3)$

    (b) $b(8, 0.6)$ $P(X = 5)$

    (c) $P(X \geq 1)$ quando $n = 12$ e $p = 0.1$.

18. Suponha que 90% de todas as pilhas de certo fabricante tenham voltagens aceitáveis. Um determinado tipo de lanterna necessita de duas pilhas tipo D, e ela só funciona se as duas pilhas tiverem voltagem aceitável. Entre 10 lanternas selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de pelo menos nove funcionarem?

19. Um instrutor que lecionou estatística para engenheiros para duas turmas no semestre passado, a primeira com 20 alunos e a segunda com 30, decidiu pedir aos alunos um projeto semestral. Após a entrega de todos os projetos, o instrutor os organizou aleatoriamente antes de corrigi-los. Considere os primeiros 15 projetos a serem corrigidos.

    (a) Qual é a probabilidade de exatamente 10 projetos serem da segunda turma?

    (b) Qual é a probabilidade de pelo menos 10 projetos serem da segunda turma?

    (c) Qual é a probabilidade de ao menos 10 projetos serem da mesma turma?

20. Um professor apresenta para seus alunos 10 problemas, afirmando que a prova final consistirá de uma seleção aleatória de 5 delas. Se um estudante sabe resolver 7 dos problemas, qual é a probabilidade que responda

    (a) Todos os 5 problemas

    (b) pelo menos 4 dos problemas.

21. Para encontrar informação através da internet um usuário escolhe três buscadores. $(-)$10% das vezes escolhe o buscador A, neste caso de cada 5 vezes não encontra a informação. $(-)$30% das vezes o usuário escolhe o buscador B, nesse caso a probabilidade de que ache a informação é de 0.75.$(-)$60% das vezes escolhe o buscador C e a chance de encontrar a informação desejada é de 0.95

(a) Qual a probabilidade de que o usuário encontre a informação?

(b) Se o usuário encontrou a informação, com qual destes três buscadores é mais provável que tenha conseguido?

22. A proporção de componentes eletrônicos defeituosos em certos lotes, é uma variável aleatória discreta X cuja distribuição acumulada tenha a seguinte forma: $F(0.01) - F(0.01^{(-)}) = 0.5, F(0.1) - F(0.1^{(-)}) = 0.25$, e $F(0.15) - F(0.15^{(-)}) = 0.25$. Tem-se uma grande quantidade de lotes deste tipo.

    (a) Determine a função de probabilidade de X

    (b) Qual é a média(valor esperado) do número de componentes defeituosos por lote?

    (c) Construa o gráfico da FDA.

23. Num estudo de desempenho de uma central de computação, o acesso à CPU é descrito por uma variável Poisson com média de 4 requisições por segundo. Essas requisições podem ser de várias naturezas, tais como: imprimir um arquivo, efetuar um cálculo, enviar uma mensagem, entre outras.

    (a) Escolhendo-se ao acaso um intervalo de 1 segundo, qual é a probabilidade de haver dois ou mais acessos à CPU?

    (b) Considerando-se agora o intervalo de 10 segundos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 acessos?

24. Um robô é programado para operar mediante microprocessadores, e pode falhar em um determinado período (turno de 8 horas) independente dos outros turnos com probrabilidade de 0.2. Quando um robô falha pela segunda vez, ele é mandado para a manutenção geral. Determinar

    (a) a probrabilidade de que o robô seja enviado para manutenção no máximo no quinto turno.

    (b) o número esperado de turnos até ser enviado à manutenção.

25. Suponha que A e B são eventos mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0.3$ e $P(B) = 0.5$. Qual a probabilidade de

    (a) Ambos A ou B ocorram.

    (b) A ocorra mas B não ocorra.

(c) Ambos A e B ocorram.

26. Prove: se X é uma variável aleatória com média μ então a variância de X definida por $Var(X) = E[(x-\mu)^2]$ pode ser escrita como $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

27. Mostre que se Ae B são independentes, também Ae B^C são independentes.

28. Um sistema é composto por componentes c_1, c_2 e c_3 de modo que funciona se e somente se, pelo menos dois destes três componentes funcionam. Dados os eventos F_i : o componente funciona, $i = 1, 2, 3$ e conhecendo-se as seguintes probabilidades: $P(F_1 \cap F_2) = 0.55, P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0.3$, $P(F_1 \cap F_2^C \cap F_3) = 0.2$ e $P(F_1^C \cap F_2 \cap F_3) = 0.1$. Determine a confiabilidade do sistema.

29. No canal de comunicação binário, um sinal só pode tomar dois valores (0 ou 1). No entanto, devido a ruído, um sinal com 0 pode ser recebido como 1 ou um sinal com 1 pode ser recebido como 0. A probabilidade de que um sinal que se transmite como 0 e chegue como 0 é de 0.99. Se o sinal foi transmitido como 1, a probabilidade de que se receba como 1 é de 0.95. Sabe-se que a probabilidade de que se transmita um 0 é de 0.75.

    (a) Determine a probabilidade de se transmitir e receber o sinal 1.

    (b) Determine a probabilidade de transmitir o sinal 0 e receber o sinal 1.

    (c) Qual a probabilidade de receber o sinal igual a 1?

    (d) Foi recebido o sinal igual a 1, qual a probabilidade de que o sinal 1 foi o sinal transmitido?

30. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 10 \\ 0.2, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 0.5, & \text{se } 12 \leq x < 13 \\ 0.9, & \text{se } 13 \leq x < 25 \\ 1, & \text{se } x \geq 25 \end{cases}$$

    (a) Determine a função de probabilidade de X,

    (b) $P(X = 12)$

    (c) $P(12 \leq X \leq 20)$

(d) Calcule $E[X]$

31. Numa central telefonica, o número de ligações recebidas por minuto é descrita por uma variável Poisson com média de 4 ligações por minuto.

    (a) Escolhendo-se ao acaso o intervalo de 1 minuto, qual a probabilidade de haver duas ou mais ligações?

    (b) Considerando agora o intervalo de 10 minutos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 ligações?

32. Se $E[X] = 1$ e $Var(X) = 5$, encontre:

    - $E[(2+X)^2]$
    - $Var(4+3X)$

33. Em uma prova de múltipla escolha, há três respostas possíveis para cada uma das 5 questões.

    (a) Qual é a probabilidade de que um estudante responda 4 ou mais questoes "adivinhando"?

    (b) Qual é o número esperado de respostas corretas?

34. A duração (em anos) de um componente eletrônico pode ser considerada como uma variável aleatória X com função de densidade $f(x) = 0.1 \exp^{-0.1x}, x > 0$.

    (a) Se a garantia for de um ano para qualquer componente, que porcentagem dos componentes serão trocadas?

    (b) Calcule a média de duração dos componentes.

    (c) Calcule a Função de Distribuição acumulada da variável aleatória X.

    (d) Considere a seguinte função de utilidade para os componentes:

    $$g(x) = \begin{cases} -100, & \text{se } X \leq 1, \\ 200, & \text{se } X > 1; \end{cases}$$

    qual seria a utilidade esperada do fabricante?

    (e) Mostre que $P(X > t + h/X > t) = P(X > h), \forall h > 0, \forall t > 0$ (falta de memória)

35. A voltagem suministrada por uma fonte geradora no instante t é dado por $X_t = a\cos(wt+\Theta)$, com a e w constantes e Θ uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-\pi, \pi]$. Calcule o valor esperado desta voltagem.

36. A distribuição da resistência de resistores de um tipo específico é normal, 10% dos equipamentos apresentam resistência maior que 10.256 ohms e 5% menor que 9.671 ohms. Quais são os valores da média e do desvio padrão das resistências?

37. Seja a população formada por $\{2, 4, 4, 6\}$. Considere todas as amostras (com reposição) de tamanho 2.

    (a) Encontre a distribuição de $\bar{x}$.

    (b) Verifique se $\bar{x}$ é ou não um estimador viesado de μ.

    (c) Verifique que $S^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ é um estimador não viesado de σ^2.

38. Um sistema em série está integrado por dois componentes: o tempo de vida (em anos) do primeiro é X e do segundo é Y. A função de densidade conjunta de X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp^{-2y}, & 0 < x < 2y, \\ 0, & c.c \end{cases}$$

    (a) Calcule a confiabilidade do sistema para o período de um ano.

    (b) Encontre a densidade marginal de X.

    (c) Encontre a densidade condicional de Y dado X.

39. Um canal de comunicação para qual o sinal (transmitido-recebido) pode tomar quatro valores, 0,1,2 ou 3. No entanto, devido ao ruído, um sinal transmitido pode se receber com outro valor. Suponha que para um canal deste tipo, a distribuição da probabilidade conjunta de X (valor do sinal transmitido) e Y (valor do sinal recebido), está dada por:

x y	0	1	2	3
0	0.28	0.04	0.04	0.04
1	0.03	0.21	0.03	0.03
2	0.02	0.04	0.12	0.02
3	0.03	0.02	0.01	0.04

(a) Determine a probabilidade de transmitir e receber o mesmo valor do sinal.

(b) Determine a probabilidade de receber um 0.

(c) Foi recebido um valor 0. Determine a distribuição dos valores transmitidos.

(d) Encontre as distribuições marginais de X e Y.

(e) Encontre a distribuição da soma $X + Y$.

(f) Calcule a covariância de X, Y.

40. A poupança dos moradores de uma cidade (medidas em milhares de reais) é considerada uma variável aleatória contínua X, cujo modelo probabilístico está determinado pela regra $f(x) = x^2/9, 0 \leq x \leq 3$.

    (a) Qual a porcentagem de habitantes desta cidade que poupam mais de mil reais?

    (b) Qual é a poupança média dos habitantes?

    (c) Segundo as autoridades, o consumo dos habitantes da cidade em relação a poupança está dado por $Y = 1 + 4X$. Determine a densidade de Y.

41. Se $P(A \cap C/B) = 0.1, P(A \cap C^C/B) = 0.2$, encontre $P(A/B)$.

42. Um sistema de proteção contra-incêndios tem dois componentes básicos, um de detecção e outro de extinção. O primeiro envia um aviso ao segundo componente quando detecta algum sinal de incêndio (fumaça ou possível aumento na temperatura). O segundo, apenas quando o primeiro dá o aviso, ativa os alarmes e os extintores. Por experiência, sabe-se que existe uma probabilidade de 0.1 de apresentar-se algum sinal de incêndio e, neste caso, os componentes sempre atuam. No entanto, quando não apresentam estes sinais, existe uma probabilidade de 0.01 de que o componente de detecção envie um aviso ao componente de extinção que, neste caso, ativa os alarmes e os extintores com uma probabilidade de 0.05. Encontre a probabilidade de que o sistema de proteção contra incêndios responda incidentalmente, i.e, na ausência dos sinais de incêndio.

43. Se $P(A \cap B^C \cap C) = 0.8$ e $P(A \cap B^C \cap C \cap D^C) = 0.5$

    (a) Encontre $P(A \cap B^C \cap C \cap D)$

    (b) Encontre $P(A^C \cup B \cup C^C \cup D^C)$

44. O tempo de resposta (em segundos) de um procedimento (tempo que temora para o procedimento realizar um pedido) é uma variável aleatória X com uma função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{57}{40} - \dfrac{51(x-1)^2}{10}; 0.5 < x < 1.5 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Determine a probabilidade de que o tempo de resposta esteja entre 0.8s e 1s.
   (b) Encontre a média e o desvio padrão do tempo de resposta do processo.
   (c) Determine $P(|X - \mu_X| < 2\sigma_X)$.

45. A ocorrência de certo evento catastrófico para a economia ocorre de acordo a um processo Poisson com uma taxa de um a cada 5 anos.

   (a) Determine a probabilidade de que num período de 10 anos não ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.
   (b) Encontre a probabilidade de que num período de 5 anos, ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.
   (c) Um projeto deve executar durante um período de dez anos. Se este evento não se apresenta durante o período de execução do projeto, o custo é de 200 unidades monetárias (u.m); Em outro caso este custo incrementa-se em 100 u.m. por cada unidade de tempo faltante até terminar a execução do projeto. Determine o valor esperado do custo de execução do projeto.
   (d) Qual é a probabilidade de que passem mais de 20 anos até que ocorra três vezes o dito evento?

46. Para a variável X com distribuição exponencial de parâmetro λ mostre que $P(X > t + h/X > t) = P(X > h), \forall h > 0, \forall t > 0$ (falta de memória).

47. Se o comprimento da rosca de um parafuso tem distribuição normal com media 5cm e a empresa considera como aceitáveis os parafusos que cuja medida não estão mais do que 45% ao redor da media. Quais são então os limites para os tamanhos aceitáveis?

48. Sejam $P.Q$ e R probabilidades tais que para cada evento A de Ω : $Q(A) = P(A/B)$ e $R(A) = Q(A/C)$. Demonstre que para cada evento $A : R(A) = P(A/B \cap C)$.

49. Para converter dois sinais digitais em analógicos, para sua transmissão, usa-se um de três modems disponíveis: m_1, m_2 e m_3. Por experiência, sabe-se que a probabilidade de usar m_1 é de 0.2 e de 0.45 a de usar m_2. Também sabe-se as seguintes probabilidades: 0.01, a de usar m_1 e de efetuar mal a conversão, 0.1 a de usar m_2 e realizar bem a conversão e 0.3 a de usar m_3 e efetuar mal a conversão. Qual a probabilidade de efetuar mal a conversão?

50. Admite-se que cada pneu dianteiro de um determinado tipo de veículo deve ter pressão de 26psi. Suponha que a pressão real seja uma variável aleatória X para o pneu direito e Y para o pneu esquerdo, com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x^2+y^2), & 20 \leq x \leq 30, \qquad 20 \leq y \leq 30, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

    (a) Qual é o valor de K?
    (b) Qual é a probabilidade de dois pneus estarem com valores inferior a ideal?
    (c) Determine a distribuição marginal da pressão de ar do pneu direito.
    (d) São X e Y independentes?

51. Suponha que o tempo de espera de um ônibus no período da manhã é uniformemente distribuído entre $[0, 5]$, o tempo de espera deste ônibus à tarde é uniformemente distribuído $[0, 10]$ e independente do período da manhã.

    (a) Se você pegar o ônibus cada manhã e tarde durante uma semana, qual o tempo total de espera? [defina as variáveis aleatórias $X_1, ..., X_5$ para manhãs e $X_6, ..., X_{10}$ para tardes]
    (b) Qual a variância do tempo total de espera?

52. A corporação MNM tomará aos seus empregados um teste de aptidão. Os scores do teste são normalmente distribuídos com média 75 e desvio padrão 15. Uma amostra de 25 indivíduos é tomada de uma populaçao de 500.

    (a) Qual é o valor esperado e o desvio padrão de $\bar{x}$?
    (b) Qual a probabilidade de que o score médio do teste aplicado na amostra esteja entre 70.14 e 82.14?

(c) Encontre o valor de C tal que $P(\bar{x} \geq C) = 0.015$

53. Seja a população formada por $\{1, 3, 4, 5\}$. Considere todas as amostras (com repetição) de tamanho 2.

    (a) Encontre a distribuição de $\bar{x}$

    (b) Verifique se $\bar{x}$ é ou não um estimador viesado de μ.

54. Dois componentes de um microcomputador tem a seguinte fdp conjunta para seus tempos de vida útil X e Y:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \exp^{-x(1+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & c, c. \end{cases}$$

    (a) Qual é a probabilidade de que o tempo de vida X do primeiro componente seja maior que 3?

    (b) Encontre as fdp marginais de X e Y. São independentes? (explique).

    (c) Qual a probabilidade de que o tempo de vida de pelo menos um dos componentes seja maior que 3?

55. Bastien Inc. é uma fábrica de pequenos automóveis cujo consumo médio é de 50 milhas por galão de gasolina em estradas. A fábrica desenvolveu um motor mais eficiente para seus automóveis e agora anuncia que o novo automóvel consome menos, i.e, um galão rende mais que 50 milhas em estradas.Um teste independente provou 36 destes automóveis e o consumo médio foi de 51.5 milhas por galão, com desvio padrão de 6 milhas por galão.

    (a) Com significância de 0.05, estabeleça as hipóteses e teste a veracidade da propaganda.

56. Abby e Bianca marcaram para lanchar entre o meio-dia e as 13h. Denotando o tempo de chegada de Abby por X e o tempo de chegada de Bianca por Y, supondo que X e Y são independentes com fdp $f_X(x)$ e $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq X \leq 1, \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq Y \leq 1, \\ 0, & c.c \end{cases}$$

(a) Determine o tempo médio de espera (o tempo que um indivíduo espera pelo outro em média ou valor esperado). [dica: $h(X, Y) = |x - y|$, considere isto também para o domínio da variação.]