1 Funções e Modelos

1.6 Funções Inversas e Logaritmos

Funções Inversas e Logaritmos

A Tabela 1 fornece os dados de uma experiência na qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de uma hora.

O número N de bactérias é uma função do tempo t: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude seu ponto de vista e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ela está pensando em t como uma função de N.

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

N como uma função de *t*

Tabela 1

Funções Inversas e Logaritmos

Essa função, chamada de *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f." Logo, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N.

Os valores de f^{-1} podem ser encontrados na Tabela 1 ao contrário ou consultando a Tabela 2.

Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

Nem todas as funções possuem inversas.

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

t como uma função de N

Tabela 2

Funções Inversas e Logaritmos

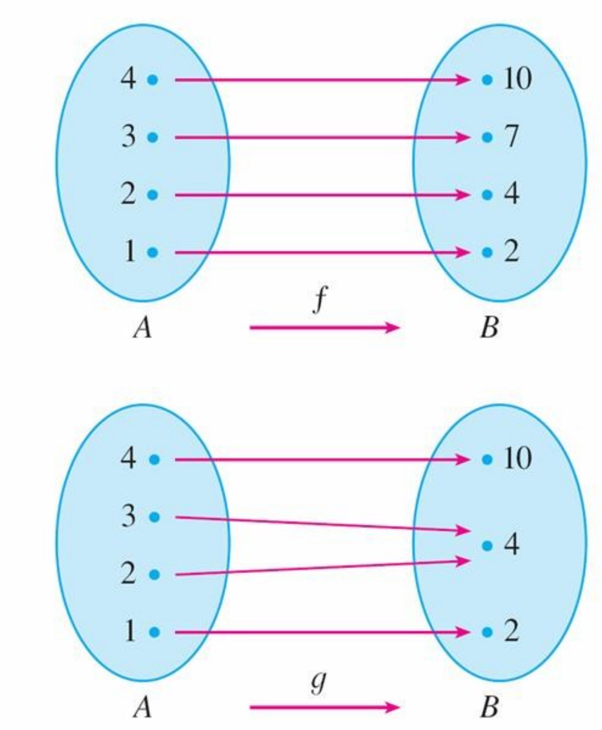
Vamos comparas as funções *f* e *g* cujo diagrama de flechas está na Figura 1.

Observe que *f* nunca assume duas vezes o mesmo valor (duas entradas quaisquer em *A* têm saídas diferentes), enquanto assume o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm a mesma saída, 4)

Em símbolos,

$g(2) = g(3)$

mas $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$



f é injetora; *g* não é

Figura 1

Funções Inversas e Logaritmos

Funções que compartilham essa última propriedade com *f* são chamadas *funções injetoras.*

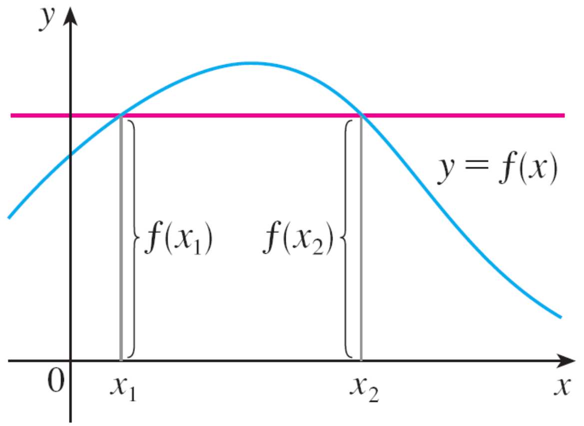
1 Definição Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2.$$

Funções Inversas e Logaritmos

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de *f* em mais de um ponto, então vemos na Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Isso significa que *f* não é uma função injetora.



Esta função não é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

Figura 2

Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é injetora.

> **Teste da Reta Horizontal** Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

Exemplo 1

A função $f(x) = x^3$ é injetora?

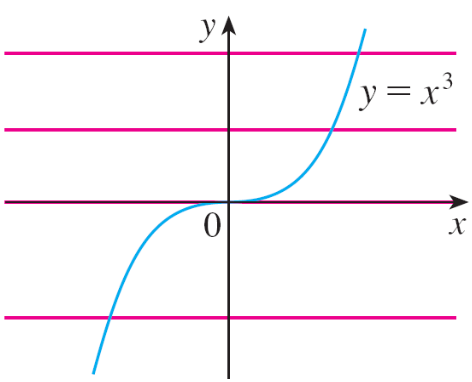
Solução 1:

Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é injetora.

Solução 2:

Da Figura 3 vemos que nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em mais de um ponto.

Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é injetora.



$f(x) = x^3$ é injetora

Figura 3

Funções Inversas e Logaritmos

As funções injetoras são importantes, pois são precisamente as que possuem funções inversas, de acordo com a seguinte definição:

2 Definição Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.

Esta definição diz que se f mapeia x em y, então f^{-1} mapeia y de volta para x. (Se f não for injetora, então f^{-1} não seria exclusivamente definido.)

Funções Inversas e Logaritmos

O diagrama de setas na Figura 5 indica que f^{-1} reserva o efeito de *f*.

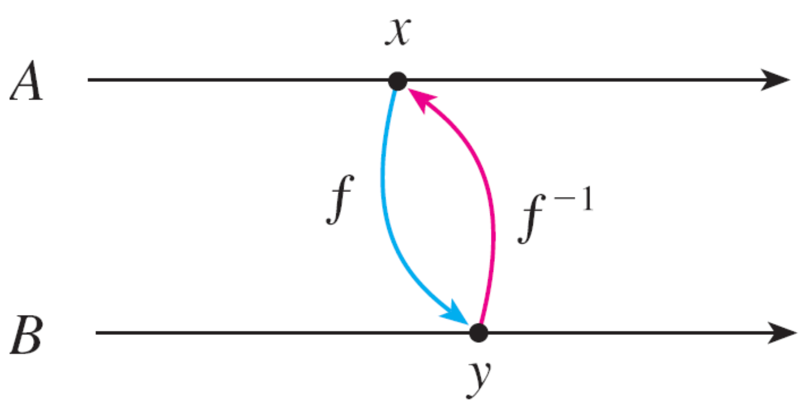


Figura 5

Note que

$$\text{domínio de } f^{-1} = \text{imagem de } f$$

$$\text{imagem de } f^{-1} = \text{domínio de } f$$

Funções Inversas e Logaritmos

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque, se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

Atenção

Não confunda o –1 em f^{-1} com um exponente. Assim,

$$f^{-1}(x) \textit{ não } \text{significa que } \frac{1}{f(x)}$$

Assim, $1/f(x)$ poderia, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

Exemplo 3

Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$, e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

Solução:

Da definição de f^{-1} temos

$f^{-1}(7) = 3$ porque $f(3) = 7$

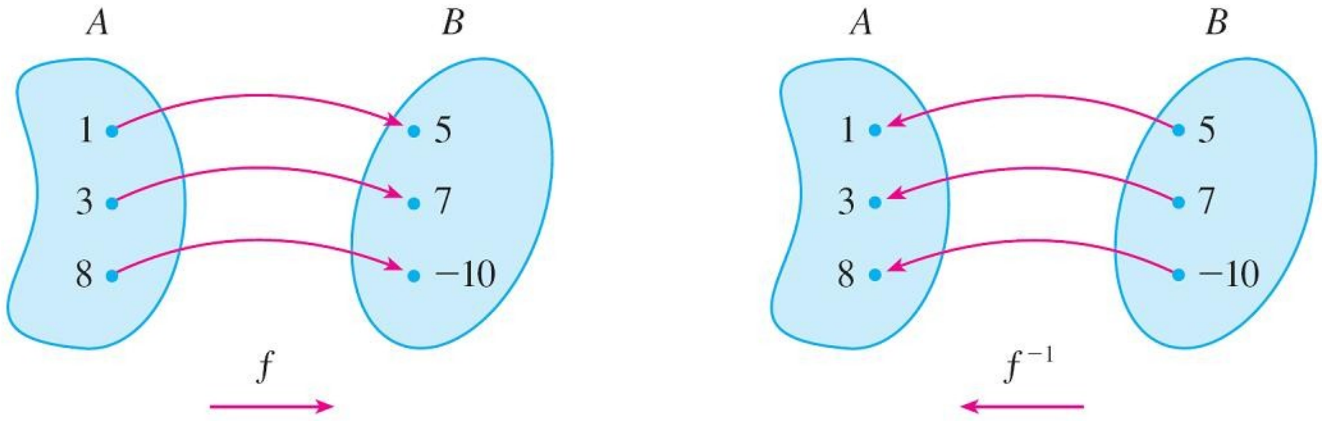
$f^{-1}(5) = 1$ porque $f(1) = 5$

$f^{-1}(-10) = 8$ porque $f(8) = -10$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesses casos.



A função inversa reverte entradas e saídas

Figura 6

Funções Inversas e Logaritmos

A letra *x* é usada tradicionalmente como a variável independente, logo, quando nos concentramos em f^{-1} em vez de *f*, geralmente revertemos os papéis de *x* e *y* na Definição 2 e escreveremos

3

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Substituindo *y* na Definição 2 e *x* em 3 obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } B$$

Funções Inversas e Logaritmos

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos com *x*, aplicarmos *f* e, em seguida, obteremos de volta o *x*, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7).

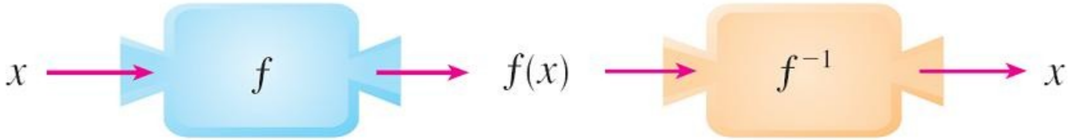


Figura 7

Assim, f^{-1} desfaz o que *f* faz. A segunda equação diz que *f* desfaz o que f^{-1} faz.

Funções Inversas e Logaritmos

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ as equações de cancelamento ficam

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se uma à outra quando aplicadas sucessivamente.

Funções Inversas e Logaritmos

Vamos ver agora como calcular as funções inversas.

Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de resolver essa equação para x em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$.

Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 Como Achar a Função Inversa de uma Função f Injetora

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.

Passo 2 Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível).

Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

Funções Inversas e Logaritmos

O princípio de trocar x e y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver no gráfico de f^{-1}.

Porém, obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$.
(Veja a Figura 8.)

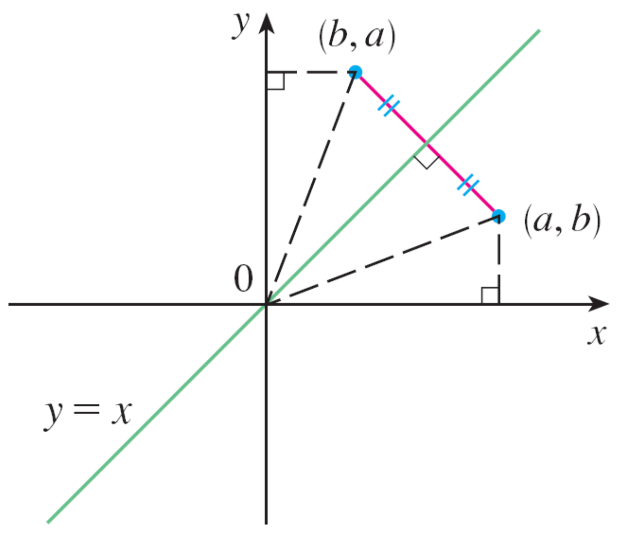


Figura 8

Funções Inversas e Logaritmos

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

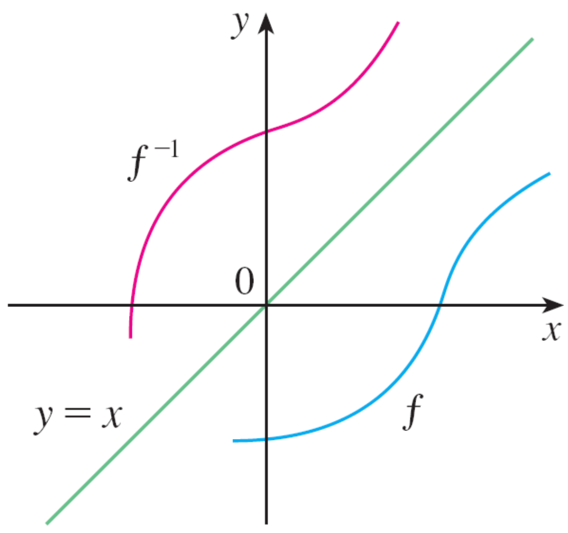


Figura 9

Funções Logarítmicas

Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, injetora pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por $\boxed{3}$

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

teremos

6

$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Funções Logarítmicas

Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_a x$ é o exponente ao qual deve se elevar a base a para se obter x.

Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$, pois $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento $\boxed{4}$, quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim

$\boxed{7}$

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x \quad \text{para todo } x > 0 \end{aligned}}$$

Funções Logarítmicas

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.)

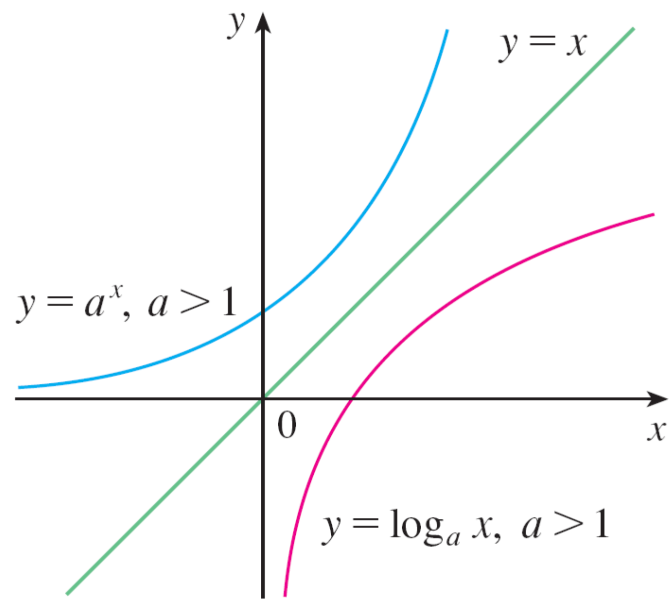


Figura 11

O fato de $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

Funções Logarítmicas

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base $a > 1$. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto (1, 0).

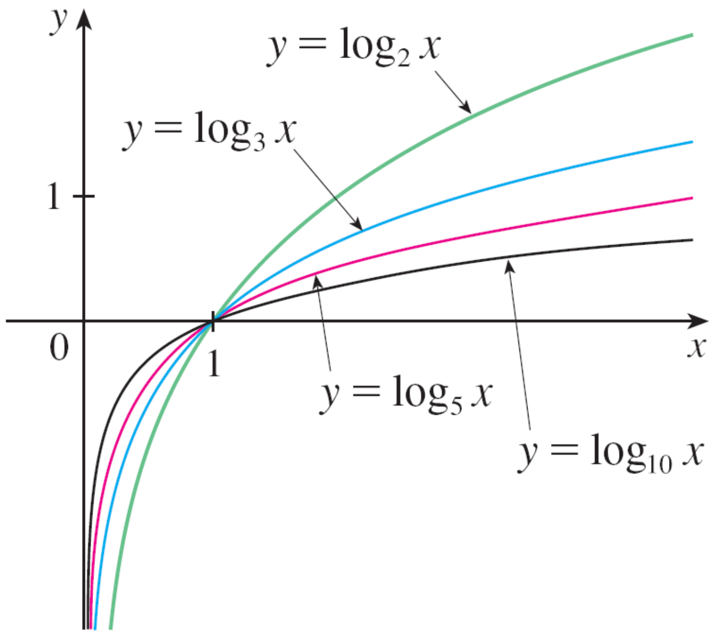


Figura 12

Funções Logarítmicas

As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais.

Propriedades de Logaritmos Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

Exemplo 6

Use as propriedades dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

Solução:

Usando a Propriedade 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

pois $2^4 = 16$.

Logaritmos Naturais

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases *a* para os logaritmos, veremos no Capítulo 3 que a escolha mais conveniente para uma base é *e.*

O logaritmo na base *e* é chamado **logaritmo natural** e tem uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos *a* = *e* e substituirmos $\log_e$ por “ln” em $\boxed{6}$ e $\boxed{7}$, então as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

Logaritmos Naturais

9

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\ln e = 1$$

Exemplo 7

Encontre x se $\ln x = 5$.

Solução 1:

De $\boxed{8}$, vemos que

$$\ln x = 5 \quad \text{significa} \quad e^5 = x$$

Portanto, $x = e^5$.

(Se você tiver problemas com a notação “ln”, substitua-a por $\log_e$. Então a equação torna-se $\log_e x = 5$; portanto, pela definição de logaritmo, $e^5 = x$.)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Solução 2:

Comece com a equação

$$\ln x = 5$$

e então aplique a função exponencial a ambos os lados da equação:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Mas a segunda equação do cancelamento $\boxed{9}$ afirma que $e^{\ln x} = x$. Portanto, $x = e^5$.

Logaritmos Naturais

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos de logaritmos naturais.

10 **Fórmula de Mudança de Base** Para todo número positivo a $(a \neq 1)$, temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Exemplo 10

Calcule $\log_8 5$ correto até a sexta casa decimal.

Solução:

A Fórmula 10 nos dá

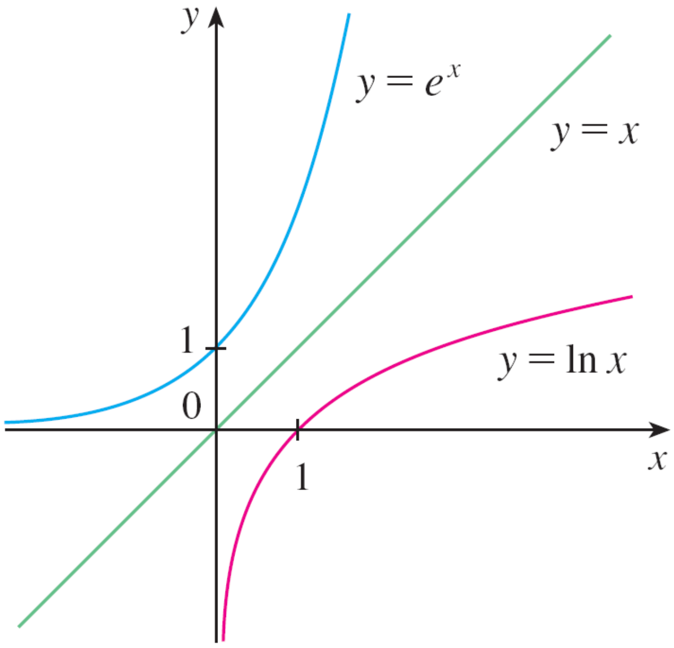
$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976$$

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função inversa, a função logaritmo natural, são indicados na Figura 13.

Em razão de a curva $y = e^x$ cruzar o eixo y com uma inclinação de 1, segue a curva refletida $y = \ln x$ cruza o eixo x com uma inclinação de 1.



O gráfico de $y = \ln x$ é a reflexão do gráfico de $y = e^x$ em torno da reta $y = x$

Figura 13

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo *y* como assíntota vertical.

(Ou seja, os valores de ln *x* se tornam números negativos muito grandes *x* tende a 0.)

Exemplo 11

Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

Solução:

Iniciaremos com o gráfico de $y = \ln x$ conforme dado na Figura 13.

Deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então deslocamos uma unidade para cima para obter ao gráfico de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Veja a Figura 14.)

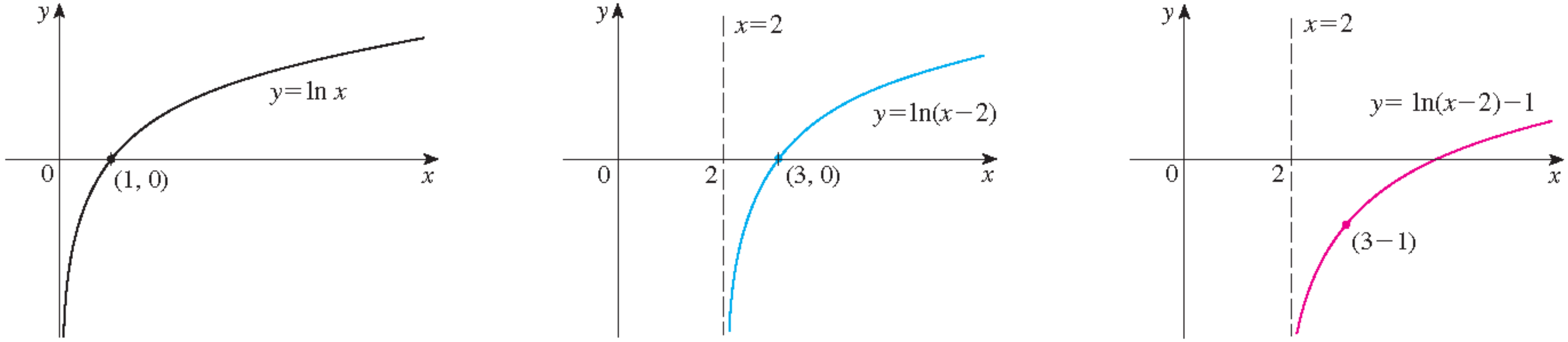


Figura 14

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

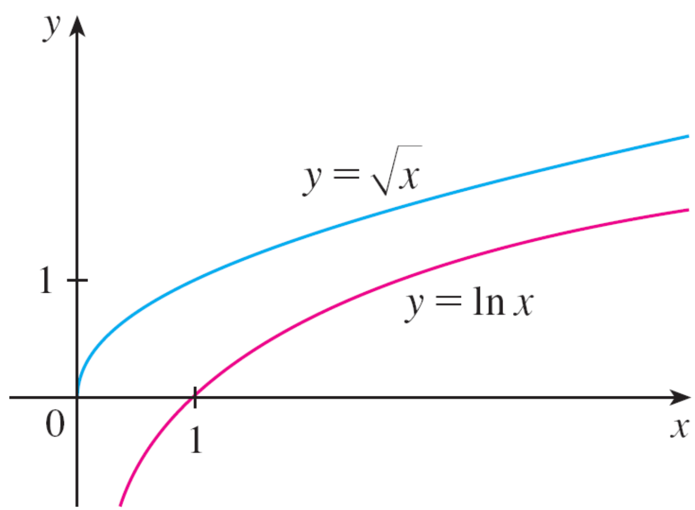
Embora ln x seja uma função crescente, seu crescimento é muito lento quando $x > 1$. De fato, ln x cresce mais vagarosamente do que qualquer força positiva de x.

Para ilustrar este fato, comparamos os valores aproximados das funções $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ na tabela a seguir.

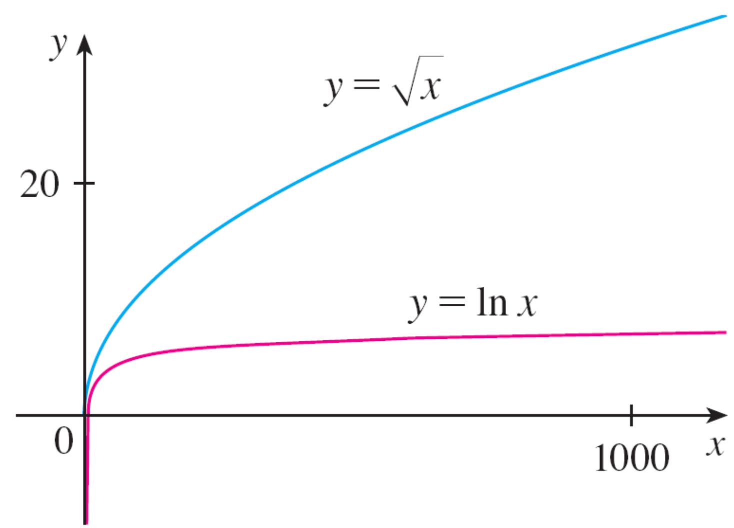
x	1	2	5	10	50	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Fazemos os gráficos nas Figuras 15 e 16.



Figuras 15



Figuras 16

Podemos ver que inicialmente os gráficos de y = $\sqrt{x}$ e
y = ln x crescem a taxas comparáveis, mas eventualmente a função raiz ultrapassa o logaritmo.