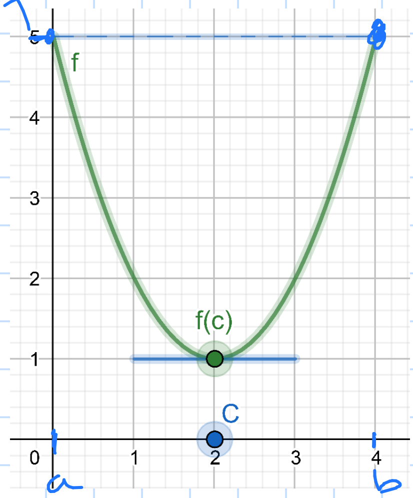
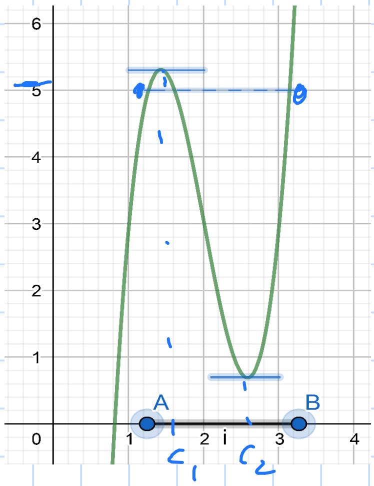
Teorema de Rolle

$f(a)=f(b)$



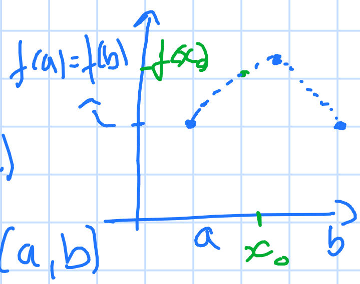
$f(a)=f(b)$



Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a)=f(b)$, então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Prova: 1) Se $f(x)=c$ constante em $[a,b]$, então $f'(c)=0$ $\forall c\in(a,b)$.

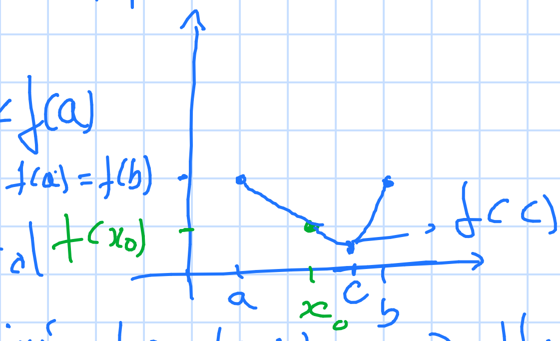
2) Suponha que f não é constante em $[a,b]$, então $\exists\ x_0\in(a,b)$ tq $f(x_0)\neq f(a)=f(b)$.



a) Suponha que $f(x_0)>f(a)$

Pelo TVI, f tem um máximo valor c em (a,b) e como f é derivável em (a,b), pelo Teorema de Fermat $f'(c)=0$.

b) Suponha $f(x_0)<f(a)$



Pelo TVI f tem um mínimo local em algum $c\in(a,b)$, como f é derivável em (a,b) $\Longrightarrow f'(c)=0$ //

Exemplo: Demonstre que a equação $x^3+x-1=0$ tem uma única solução real.

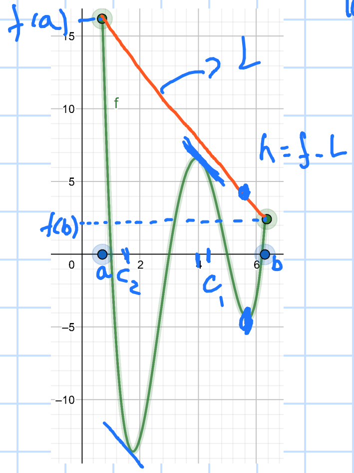
Prova: 1) Provaremos que existe pelo menos uma raiz.

Para isso usaremos o TVI. Seja $f(x)=x^3+x-1$, f é um polinômio, portanto é contínuo e derivável $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0 \Rightarrow$ como $f(0)<\overset{M}{0}<f(1)$, pelo TVI, então existe $c\in(0,1)$ tal que $\underline{f(c)=0}$. Portanto c é uma raiz de f e uma solução da equação:

2) Provaremos que a raiz é única: Suponha que não, isto é, que existe $d\in\mathbb{R}$ tal que $f(d)=0$ e $d\neq c$. Então $f(c)=0=f(d)$, como f é contínua e derivável em todo $\mathbb{R}$, em particular é contínua e derivável no intervalo determinado por c e d. Pelo Teorema de Rolle, existe x_0 no intervalo determinado por c e d tal que $f'(x_0)=0$, mas se $f(x)=x^3+x-1$, então $f'(x)=3x^2+1 \underset{\text{Abs}}{\neq} 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Logo a raiz é única.

Teorema do Valor Médio



Teorema do Valor Médio: Seja f uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

1) f contínua em $[a,b]$,
2) f derivável em (a,b).

Então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

ou equivalentemente

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Prova: Seja $h(x) = f(x) - L(x)$ onde $L(x)$ é a reta secante entre $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Então

$$L(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

$(a, f(a))$
$(b, f(b))$

$L(a) = f(a)$ $\qquad$ $L(b) = f(b)$

$$h(x) = f(x) - L(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) - f(a)$$

h é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

Além disso,

$h(a) = 0$ $\qquad = \qquad$ $h(b) = 0$

$$h(a) = h(b)$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$h'(c) = 0$$

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a)$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$0 = h'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema: Se $f'(x)=0$ para todo x em um intervalo (a,b), então f é constante em (a,b).

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois números qualquer em (a,b), sendo $x_1 < x_2$. Como f é derivável em (a,b), f é contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2). Aplicando o TVM, existe $c \in (x_1,x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{=0}(x_2-x_1) = 0, \text{ isto é,}$$

$$f(x_2)-f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b)$$

Logo f é constante em (a,b).

Corolario: Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo (a,b), então $f-g$ é constante em (a,b), isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

Prova: Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow F(x) = c \text{, constante em } (a,b)$$

$$f(x) - g(x) = c \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = g(x) + c}} \;//$$