3 Regras de Derivação

3.5 Derivação Implícita

Derivação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra – por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \quad \text{ou} \quad y = x \operatorname{sen} x$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

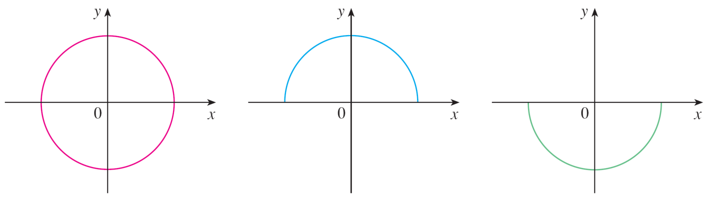
ou

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Derivação Implícita

Em alguns casos é possível resolver tal equação isolando *y* como uma função explícita (ou diversas funções) de *x*.

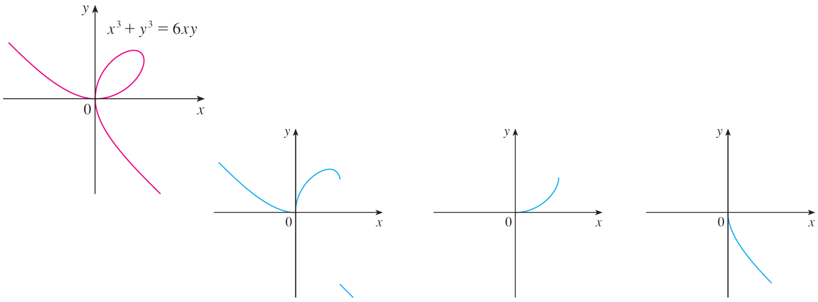
Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 para *y*, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$; logo, duas das funções determinadas pela Equação 1 implícita são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$..



(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Diferenciação Implícita

Não é fácil resolver a Eq. 2 e escrever *y* explicitamente como uma função de *x* à mão. Contudo, 2 é a equação de uma curva chamada **fólio de Descartes**, Figura 2, implicitamente define *y* como diversas funções de *x*.



O folium of Descartes

Figura 2

Derivação Implícita

Quando dizemos que *f* é uma função implicitamente definida pela Equação 2, queremos dizer que a equação

$$x^3 + [f(x)^3] = 6xf(x)$$

é verdadeira para todos os valores de *x* no domínio de *f*.

Felizmente, não precisamos resolver uma equação para *y* em termos de *x* para encontrar a derivada de *y*. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**.

Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a *x* e, então, na resolução da equação para *y*´.

Nos exemplos e exercícios desta seção, suponha sempre que a equação dada determine *y* implicitamente como uma função derivável de *x* de forma que o método da derivação implícita possa ser aplicado.

Exemplo 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4).

Solução 1:

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Logo,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = -x/y$$

Agora isole *dy*/*dx nessa esquação*:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) No ponto (3, 4), temos $x = 3$ e $y = 4$, logo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3, 4) é, portanto,

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \quad \text{ou} \quad 3x + 4y = 25$$

$$y - 4 = -\frac{3x}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + \frac{9}{4} + 4$$

$$= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Solução 2:

(b) Resolva a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto (3, 4) está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Derivando *f*, usando a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Então

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e, como na Solução 1, uma equação da reta tangente é $3x + 4y = 25$.

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}y^3 = 6\frac{d}{dx}xy$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 6\left(\frac{dx}{dx} \cdot y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$$