ACH2012 - Cálculo II

Sistema de Informação - EACH

Lista 2: Vetores e Geometria do Espaço [1]

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distancia de três unidades para abaixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos (0,5,2), (4,0,-1), (2,4,6) e (1,-1,2) em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xy: $P(6,2,3)$, $Q(-5,-1,4)$ ou $R(0,3,8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

5. Qual a representação de $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$? e em $\mathbb{R}^3$? Faça um esboço delas.

6. Qual a representação de $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que s $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2,4,0)$, $Q(1,2,-1)$ e $R(-1,1,2)$ é um triângulo equilátero.

8. Determine se os pontos estão alinhados. $A(5,1,3)$, $B(7,9,-1)$ e $C(1,-15,11)$.

9. Determine a esfera de raio 5 e centro em $(1,-4,3)$. Qual é a intersecção com o plano xz?

10. Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z = 28$

    (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

11. Determine a equação da maior esfera com centro em $\langle 5,4,9 \rangle$ contida no primeiro octante.

12. Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

    (a) $y = -4$

[1] Exercícios do livro Cálculo de James Stewart

(b) $x > 3$

(c) $0 \leq z \leq 6$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

(e) $xyz = 0$

13. Qual a relação existente entre o ponto $(4, 5)$ e o vetor $(4, 5)$? Faça um esboço ilustrativo.

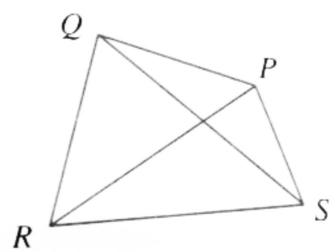
14. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

(a) $\vec{PQ} + \vec{QR}$

(b) $\vec{QS} - \vec{PS}$

(c) $\vec{RP} + \vec{PS}$

(d) $\vec{RS} + \vec{SP} + \vec{PQ}$



15. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\vec{u} + \vec{v}$

(b) $\vec{v} + \vec{w}$

(c) $\vec{u} - \vec{v}$

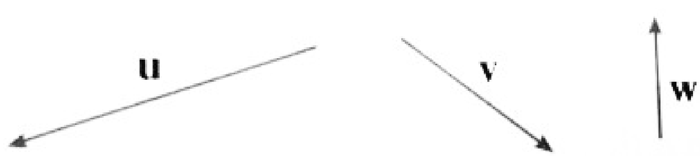
(d) $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$

(e) $2\vec{v}$

(f) $2\vec{v} + \vec{w}$

(g) $-\frac{1}{2}\vec{u}$

(h) $\vec{w} - 3\vec{v}$



16. Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

   (a) $\langle 3, -1 \rangle,\ \langle -2, 4 \rangle$
   (b) $\langle 0, 1, 2 \rangle,\ \langle 0, 0, -3 \rangle$
   (c) $\langle -1, 0, 2 \rangle,\ \langle 0, 4, 0 \rangle$

17. Determine $|\vec{a}|$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, e $3\vec{a} + 4\vec{b}$.

   (a) $\vec{a} = \langle -4, 3 \rangle,\ \vec{b} = \langle 6, 2 \rangle$
   (b) $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath},\ \vec{b} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$
   (c) $\vec{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle,\ \vec{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$
   (d) $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

18. Ache um vetor que possui a mesma direção que $\langle -2, 4, 2 \rangle$, mas tem comprimento 6.

19. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.

20. Determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

   (a) $\vec{a} = \langle -4, 3 \rangle,\ \vec{b} = \langle 6, 2 \rangle$
   (b) $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath},\ \vec{b} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$
   (c) $\vec{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle,\ \vec{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$
   (d) $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{\jmath} + 2\hat{k}$
   (e) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 15,\ \textit{o ângulo entre } \vec{a} \text{ e } \vec{b} \textit{ é } \pi/6$
   (f) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 10,\ \textit{o ângulo entre } \vec{a} \text{ e } \vec{b} \textit{ é } 120^{\circ}$

21. Determine o ângulo entre os vetores.

   (a) $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle,\ \vec{b} = \langle 5, 12 \rangle$
   (b) $\vec{a} = \hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$
   (c) $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle,\ \vec{b} = \langle 4, 0, -1 \rangle$
   (d) $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

22. Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

   (a) $\vec{u} = \langle -5, 3, 7 \rangle,\ \vec{v} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
   (b) $\vec{u} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k},\ \vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$

(c) $\vec{u} = \langle 4, 6 \rangle,\ \vec{v} = \langle -3, 2 \rangle$

(d) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 4\hat{k},\ \vec{v} = -3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 6\hat{k}$

(e) $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle,\ \vec{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

23. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

24. Para que valores de b sãos os vetores $\langle -6, b, 2 \rangle$ e $\langle b, b^2, b \rangle$ ortogonais?

25. Determine um vetor unitário ortogonal a $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ e $\hat{\imath} + \hat{k}$.

26. Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor:

(a) $\langle 3, 4, 5 \rangle$

(b) $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

27. Determine o vetor projeção e a projeção escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

(a) $\vec{a} = \langle 3, -4 \rangle,\ \vec{b} = \langle 5, 0 \rangle$

(b) $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{k},\ \hat{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}$

(c) $\vec{a} = \langle 4, 2, 0 \rangle,\ \vec{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

(d) $\hat{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

28. Mostre que $b - \vec{proj}_a b$ é ortogonal a $\vec{a}$.

29. Suponha que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sejam vetores não-nulos.

(a) Sob quais circunstâncias $comp_b a = comp_a b$?

(b) Sob quais circunstâncias $\vec{proj}_b a = \vec{proj}_a b$?

30. Determine o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ e verifique que ele é ortogonal $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle,\ \vec{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$

(b) $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k},\ \vec{b} = \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

(c) $\vec{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle,\ \vec{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

(d) $\vec{a} = \hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + e^{-t}\hat{k},\ \vec{b} = 2\vec{\imath} + e^t\hat{\jmath} - e^{-t}\hat{k}$

31. Se $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{\jmath} + \hat{k}$, determine $\vec{a} \times \vec{b}$. Esboce $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$ como vetores com inicio na origem.

32. Se $\vec{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\vec{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$.

33. Se $\vec{a} = \langle 3, 2, 1\rangle$, $\vec{b} = \langle -1, 1, 0\rangle$ e $\vec{c} = \langle 0, 0, -4\rangle$, mostre que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

34. Determine dois vetores unitários que sejam perpendiculares tanto a $\langle 1, -1, 1\rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4\rangle$.

35. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ e $S(6, 2, 8)$ pertencem ao mesmo plano.

36. Suponha que $\vec{a} \neq \vec{0}$.

    (a) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, é verdade que $\vec{b} = \vec{c}$?

    (b) Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, é verdade que $\vec{b} = \vec{c}$?

    (c) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ e $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, é verdade que $\vec{b} = \vec{c}$?

37. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

    (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.

    (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.

    (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.

    (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelas.

    (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

    (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

    (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.

    (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelas.

    (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.

    (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelos.

    (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

    (l) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelas.

38. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

    (a) A reta que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e é paralela ao vetor $2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$.

    (b) A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8\rangle$.

    (c) A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$.

39. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

    (a) A reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$.

    (b) A reta que passa pelos pontos $(1, 3, 2)$ e $(-4, 3, 0)$.

(c) A reta que passa por $(1, -1, 1)$e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$.

(d) A reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

40. Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

   (a) $L_1 : x = -6t,\ y = 1 + 9t,\ z = -3t$ e $L_2 : x = 1 + 2s,\ y = 4 - 3s,\ z = s$.

   (b) $L_1 : x = 1 + 2t,\ y = 3t,\ z = 2 - t$ e $L_2 : x = -1 + s,\ y = 4 + s,\ z = 1 + 3s$.

41. Determine a equação do plano.

   (a) O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$.

   (b) O plano que passa pelo ponto $(4, 0, 3)$ e cujo vetor normal é $\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

   (c) O plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular a reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$.

   (d) O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$.

   (e) O plano que contém a reta a $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$.

   (f) O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

42. Determine o ponto dado pela intersecção da reta $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 5t$ com o plano $x - y + 2z = 9$.

43. Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

   (a) $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$.

   (b) $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1$.

   (c) $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$.

   (d) $4y - 2z = x, \quad 8y = 1 + 2x + 4z$.

   (e) $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - 2y + 2z = 1$.

44. Determine a equação na forma simétrica da reta de intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $3x - 4y + 5z = 6$. Determine o ângulo entre os planos.

45. Determine a equação paramétrica da reta obtida pela intersecção dos planos $z = x + y$ e $2x - 5y - z = 1$.

46. (a) Determine a distancia do ponto $(2, 8, 5)$ ao plano $x - 2y - 2z = 1$.

   (b) Determine a distancia entre os planos paralelos $z = x + 2y + 1$, $3x + 6y - 3z = 4$.