Assuntos que estudaremos:

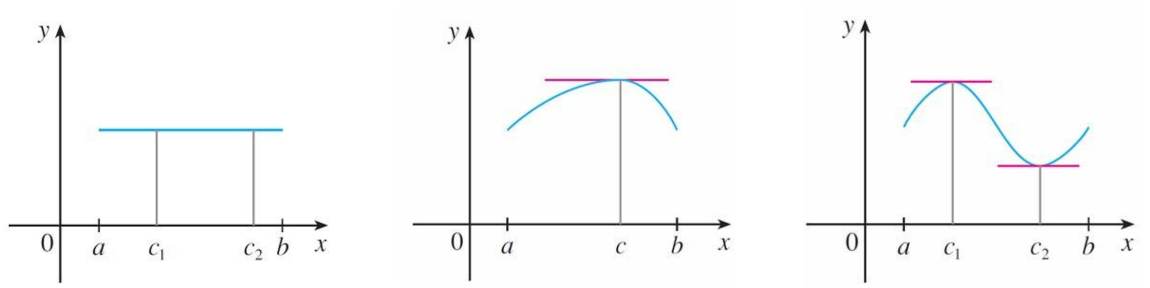
— Teorema do Valor Médio,
— Como as derivadas afetam a forma de um gráfico:
    — Teste crescente/decrescente;
    — Teste da Primeira Derivada;
    — Teste de Concavidade.
— Como as derivadas afetam a forma de um gráfico:
    — Teste da Segunda Derivada;
    — Resumo de esboço de curva,

Roteiro de estudos:

1) Começaremos nossos estudo assistindo aos vídeos , preparados por mim em
> ‘Teorema do Valor Médio’
> ‘Derivadas e gráfico de funções’.

2) Um resumo dos conteúdos estudados:

<u>Teorema do Valor Médio</u>



Estes são gráficos de funções, definidas em um intervalo [a,b], contínuas e deriváveis. Nos três casos *f(a)=f(b),* e existem um o mais pontos c no intervalo [a,b], tal que a reta tangente a *y=f(x)* no ponto *(c,f(c))* é paralela ao eixo x, isto é, *f’(c)=0.*

Este fato não acontece só nestes três exemplos. Para saber sob que condições isso é verdadeiro, vamos estudar o Teorema de Rolle.

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Este teorema tem muitas aplicações, entre elas a demonstração de um teorema muito importante, chamado Teorema do Valor Médio ou Teorema de Lagrange:

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

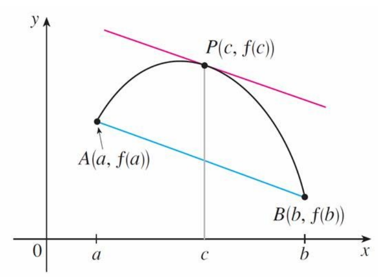
Então, existe um número c em (a, b) tal que

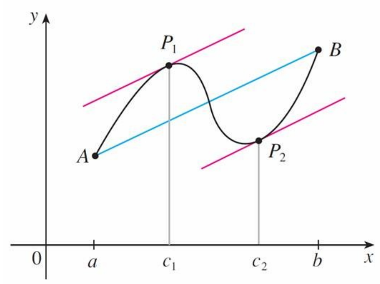
$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Basicamente, o teorema me diz que se f satisfaz certas condições num intervalo $[a,b]$, então existe pelo menos um número c em (a,b), tal que a inclinação da reta secante que passa por $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ é igual a inclinação da reta tangente ao gráfico da curva em $(c,f(c))$. Veja alguns gráficos:





Entre as consequências do Teorema do Valor Médio (TVM) temos:

a) Sabemos que a derivada de uma função constante é zero, e ao contrário? Se sabemos que a derivada vale constantemente zero, podemos concluir alguma coisa com respeito a função? Usando o TVM, podemos provar que se a função f é tal que $f'(x)=0$ para todo x em um intervalo I, então $f(x)=C$, para todo x em I, onde C é alguma constante. Porém, precisamos de maiores informações da função para poder determinar o valor exato de C.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

b)Outro resultado sumamente importante é o seguinte:

$\boxed{7}$ **Corolário** Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

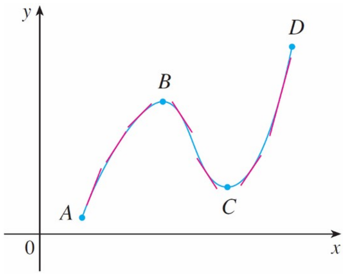
Isto é, se duas funções tem a mesma derivada, significa que elas se diferenciam por uma constante.

Esses dois resultados serão muito utilizados em Cálculo II, a partir da primeira aula.

Derivadas e gráfico de funções

Agora estudaremos que informações, a derivada e a derivada segunda da função, fornecem a respeito dos gráficos de funções.

Dado o gráfico de uma função, a forma que temos para obter alguma informação a respeito da derivada é estudado o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva *y=f(x)*, para diferentes pontos *(c,f(c))*.



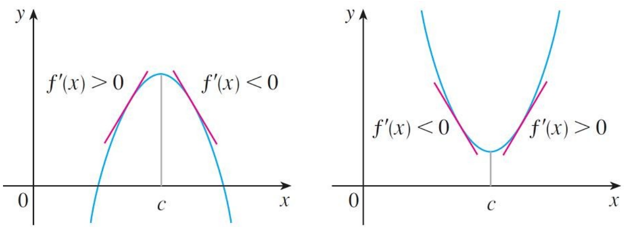
Observe a figura, verificamos que nos intervalos onde a função é crescente, as retas tangente tem coeficiente angular positivo, e portanto a derivada é maior que zero. Nos intervalos onde a função é decrescente, a derivada é negativa. Isso é verdadeiro em geral:

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Podemos usar este teste para determinar se nos pontos criticos, candidatos a máximos e mínimos locais, temos efetivamente um máximo ou mínimo local. Observe os seguintes gráficos:



Se *c* é um ponto onde a função alcança um máximo local, para *x* menores que *c* a função cresce até chegar em *f(c)* e começa a decrescer. No caso de ser um ponto de mínimo local, a função decresce até chegar no ponto de mínimo e depois começa a crescer. Estas observações mais o Teste Crescente/Decrescente justificam o Teste da primeira derivada:

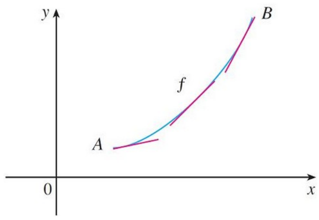
Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

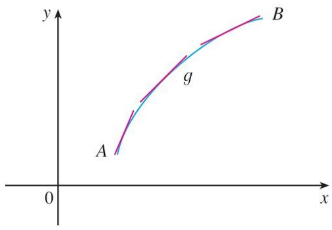
(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' é positiva à esquerda e a direita de c, ou negativa à esquerda e à direita de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.



Neste caso a função é concava para cima, se observamos as retas tangentes, o coeficiente angular cresce para *x* cada vez maiores. Isto significa que a derivada é uma função crescente, portanto a derivada da derivada é maior que zero, isto é, a derivada segunda da função é maior que zero.



Neste caso a função é concava para baixo, e o coeficiente angular das retas tangentes, diminuí quando aumentamos *x*, portanto a derivada é decrescente, isto significa que a derivada da derivada da função é menor que zero. Portanto a derivada segunda da função é menor que zero.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Por último, vamos definir os pontos de inflexão:

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

3) Fazer os exercícios das listas correspondentes a estes assuntos.

Lembrando que vocês podem tirar dúvidas, da teoria e dos exercícios, através do fórum.

Bons estudos!

Professora Claudia

As definições, enunciados e gráficos foram extraídos do livro de aula Cálculo Volume 1 de James Stewart.