

**ACH2011 - Cálculo I**  
**Sistema de Informação - EACH**

**Lista 2: Números Reais.**

1. Se  $2 < x < 6$  quais das seguintes afirmações sobre  $x$  são necessariamente verdadeiras e quais não são necessariamente verdadeiras?  
(a)  $0 < x < 4$     (b)  $1 < \frac{6}{x} < 3$     (c)  $0 < x - 2 < 4$   
(d)  $1 < \frac{x}{2} < 3$     (e)  $-6 < -x < 2$     (f)  $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$   
(g)  $|x - 4| < 2$     (h)  $-6 < -x < -2$ .
2. Resolva as desigualdades e mostre os conjuntos solução na reta real.  
(a)  $-2x > 4$     (b)  $5x - 3 \leq 7 - 3x$     (c)  $2x - \frac{1}{2} \geq 7x - \frac{7}{6}$   
(d)  $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$ .
3. Resolva as seguintes equações:  
(a)  $|y| = 3$     (b)  $|2t + 5| = 4$     (c)  $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$ .
4. Resolva as seguintes desigualdades, expressando o conjunto solução como intervalo ou uniões de intervalos. Além disso, mostre cada conjunto solução na reta real.  
(a)  $|x| < 2$     (b)  $|t - 1| \leq 3$     (c)  $|3y - 7| < 4$   
(d)  $\left| \frac{z}{5} - 1 \right| \leq 1$     (e)  $|1 - x| > 1$     (f)  $|2s| \geq 4$   
(g)  $\left| 3 - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{2}$     (h)  $\left| \frac{r + 1}{2} \right| \geq 1$ .
5. Não caia na armadilha  $|-a| = a$ . Para quais números reais  $a$  essa equação é realmente verdadeira? Para quais números reais ela é falsa?
6. Resolva a equação  $|x - 1| = 1 - x$ .
7. Resolva a inequação e represente o conjunto solução na reta real.  
(a)  $3x - 11 < 4$     (b)  $1 + 5x > 5 - 3x$     (c)  $-1 < 2x - 5 < 7$   
(d)  $4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$     (e)  $(x - 1)(x - 2) > 0$     (f)  $x^2 < 2x + 8$   
(g)  $x^3 + 3x < 4x^2$     (h)  $x^2 + x + 1 > 0$     (i)  $x^3 > x$   
(j)  $1 < |x| < 4$     (k)  $|x - 4| < 1$     (l)  $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$ .
8. Mostre que se  $a < b$ , então  $a < \frac{a + b}{2} < b$ .

9. Resolva a equação para  $x$ .

$$(a) \quad |x + 3| = |2x + 1|, \quad (b) \quad \left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| = 3.$$

10. **Uma prova da desigualdade triangular.** Justifique cada um dos passos enumerados na prova, a seguir.

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 \quad (1)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 \quad (2)$$

$$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \quad (3)$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (4)$$

11. Demonstre que  $|x - y| \geq |x| - |y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

12. Se  $|x - 4| < 0,1$  e  $|y - 7| < 0,2$ , use a Desigualdade Triangular para estimar

$$|(x + y) - 11|.$$

13. Prove que  $|xy| = |x| |y|$  para quaisquer números reais  $x$  e  $y$ .

14. Se  $|x| < 3$  e  $x > -1/2$ , o que você pode dizer a respeito de  $x$ ?

15. Para qualquer número  $a$ , prove que  $|-a| = |a|$ .

16. Seja  $a$  qualquer número positivo. Prove que  $|x| > a$  se e somente se  $x > a$  ou  $x < -a$ .

17. Se  $b$  é qualquer número real diferente de zero, prove que  $|1/b| = 1/|b|$ .

18. Prove que  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$  para quaisquer números  $a$  e  $b \neq 0$ .

19. Resolva as desigualdades. Expresse o conjunto como intervalo ou uniões de intervalos; depois, mostre-os na reta real. Use o resultado  $\sqrt{a^2} = |a|$  conforme necessário.

$$(a) \quad x^2 < 2 \quad (b) \quad 4 < x^2 < 9 \quad (c) \quad (x - 1)^2 < 4$$

$$(d) \quad x^2 - x < 0.$$

20. Mostre que a soma, a diferença e o produto de dois números racionais é racional. E a soma de dois números irracionais é irracional? O produto de dois números irracionais é irracional?

21. Simplificar cada expressão

$$\frac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}, \quad \left( \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

22. Simplifique as expressões:

$$\left(\sqrt{x^3+1} - \frac{3x^3}{2\sqrt{x^3+1}}\right) / (x^3+1), \quad \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}.$$

23. Racionalize o numerador ou denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{12}}, \quad \frac{\sqrt{x+1}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}.$$

24. Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Determine um polinômio  $q(x)$  tal que  $x^5 - a^5 = (x - a)q(x)$ .

25. Resolva as seguintes equações

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \sqrt{2x} = 4 & \text{(b)} \quad \sqrt{18-2x} = \sqrt{x+6} & \text{(c)} \quad x - 2\sqrt{x} = 15 \\ \text{(d)} \quad 5\sqrt{x} = 2(x+1) & \text{(e)} \quad \sqrt{5x+6} = 2 + \sqrt{5x-6}. \end{array}$$

26. Resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

27. Resolva a equação de segundo grau  $4y^2 - 12y + 9 = 0$ .

28. Resolver o sistema de inequações do primeiro grau

$$\begin{cases} 5x - 3 < 8x + 9 \\ 6x + 5 > 9x - 1. \end{cases}$$

29. Resolva a inequação

$$\frac{-2x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 9} < 0.$$

30. Represente graficamente (no plano) a inequação  $x + 2y > 5$ .