Introdução às Probabilidades

EFT

índice

Definição de variáveis aleatórias

- Para um espaço amostral dado (Ω), uma variável aleatéoria é qualquer regra que associa um número com cada resultado em (Ω)
- Escrito de outra maneira: Uma variável aleatória X é uma função que atribui um valor numérico real $x = X(\omega)$ a cada resultado $\omega \in \Omega$. (Lembre que uma função é uma regra para atribuir um valor númerico a cada elemento de um conjunto).

Definição de variáveis aleatórias

- Para um espaço amostral dado (Ω), uma variável aleatéoria é qualquer regra que associa um número com cada resultado em (Ω)
- Escrito de outra maneira: Uma variável aleatória X é uma função que atribui um valor numérico real $x = X(\omega)$ a cada resultado $\omega \in \Omega$. (Lembre que uma função é uma regra para atribuir um valor númerico a cada elemento de um conjunto).
- Formalmente, uma variável aleatória X é uma função real definida no espaço amostral Ω, associado a um experimento aleatório.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Definição de variáveis aleatórias

- Para um espaço amostral dado (Ω), uma variável aleatéoria é qualquer regra que associa um número com cada resultado em (Ω)
- Escrito de outra maneira: Uma variável aleatória X é uma função que atribui um valor numérico real $x = X(\omega)$ a cada resultado $\omega \in \Omega$. (Lembre que uma função é uma regra para atribuir um valor númerico a cada elemento de um conjunto).
- Formalmente, uma variável aleatória X é uma função real definida no espaço amostral Ω, associado a um experimento aleatório.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

V.A

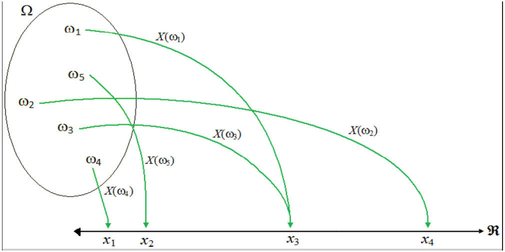

Figura: Representação de uma variávela aleatória

exemplo

Lançamento de moedas: Uma moeda é lançada 10 vezes.
Neste caso, Ω consiste de 2^{10} sequências diferentes de 10 caras e coroas.
Uma variável aleatória (v.a) X poderia ser definida como: O número de caras nos 10 lançamentos.
para cada possível sequência ω que consiste de 10 caras e coroas, esta v.a. teria um número $X(\omega)$ igual ao número de caras na sequência.
Si ω é a sequência: HHTTTHTTTH, então $X(\omega) = 4$

V.A. Bernoulli

- qualquer v.a. que pode tomar apenas 0 e 1 como valores, é chamada de variável aleatória Bernoulli

Tipos de v.a.

- São definidos três tipos de v.a's: Discretas, Contínuas e Mistas.
- Uma v.a discreta é uma v.a. cujos valores possíveis constituem um conjunto finito ou uma sequência infinita enumerável.
- Uma v.a é contínua se seu conjunto de valores possíveis consiste de um intervalor numa reta.
- Uma v.a mista é composta de uma união de v.a's discretas e contínuas.

função massa de probabilidade

- A distribuição de probabilidade ou função massa de probabilidade (ou simplesmente função de probabilidade (f.p.)) de uma v.a. discreta, é definida para cada número x por: $p(x) = P(\forall(\omega \in \Omega) : X(\omega) = x)$

Distribuição de uma v.a

Quando é especificada uma distribuição de probabilidade em um espaço amostral, pode-se determinar a distribuição de probabilidade para todos os possíveis valores da v.a X.

Seja A qualquer subconjunto da reta real, e seja $P(X \in A)$ a probabilidade que o valor de X pertence ao subconjunto A.

Então, $P(X \in A)$ é igual à probabilidade que o resultado ω do experimento será tal que $X(\omega) \in A$

$$P(X \in A) = P(\omega : X(\omega) \in A)$$

Distribuição de uma v.a

Quando é especificada uma distribuição de probabilidade em um espaço amostral, pode-se determinar a distribuição de probabilidade para todos os possíveis valores da v.a X.
Seja A qualquer subconjunto da reta real, e seja $P(X \in A)$ a probabilidade que o valor de X pertence ao subconjunto A.
Então, $P(X \in A)$ é igual à probabilidade que o resultado ω do experimento será tal que $X(\omega) \in A$

$$P(X \in A) = P(\omega : X(\omega) \in A)$$

exemplo

Suponha que uma v.a X tem uma distribuição discreta com f.p. :

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor de c

exemplo

Suponha que uma urna contém 7 bolas vermelhas e 3 bolas azuis. Se 5 bolas são retiradas aleatoriamente, sem substituição, determina a f.p. do número de bolas vermelhas que serão obtidas.

exemplo

Três bolas são selecionadas aleatóriamente e sem reposição de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se apostarmos que pelo menos uma das bolas selecionadas tem um número maior ou igual a 17, qual é a probabilidade de vencermos a aposta?

solução

Defina X : O maior número selecionado.

$x = \{3, 4, ..., 20\}$

solução

Defina X : O maior número selecionado.

$x = \{3, 4, ..., 20\}$

Supomos que cada uma das $\binom{20}{3}$ tem a mesma probabilidade de ocorrer, portanto:

$$P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \quad i = 3, 4, .., 20$$

solução

Defina X : O maior número selecionado.
$x = \{3, 4, ..., 20\}$
Supomos que cada uma das $\binom{20}{3}$ tem a mesma probabilidade de ocorrer, portanto:

$$P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \quad i = 3, 4, .., 20$$

solução

temos então:

$$P(X = 17) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} \approx 0,105$$

e até ....

$$P(X = 20) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = 0,150$$

solução

temos então:

$$P(X = 17) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} \approx 0,105$$

e até ....

$$P(X = 20) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = 0,150$$

O evento de interesse é $\{X \geq 17\}$ que resulta da união de eventos disjuntos, temos que a probabilidade de vencermos a aposta é:

$$P(X \geq 17) \approx 0,105 + 0,119 + 0,134 + 0,150 = 0,508$$

solução

temos então:

$$P(X = 17) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} \approx 0,105$$

e até ....

$$P(X = 20) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = 0,150$$

O evento de interesse é $\{X \geq 17\}$ que resulta da união de eventos disjuntos, temos que a probabilidade de vencermos a aposta é:

$$P(X \geq 17) \approx 0,105 + 0,119 + 0,134 + 0,150 = 0,508$$

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Suponha que você visita uma livraria universitária e observa se a próxima pessoa a comprar um computador, comprará um laptop ou um desktop. Seja a v.a.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se comprar um laptop} \\ 0 & \text{se comprar um desktop} \end{cases}$$

se durante a semana, 20% dos compradores selecionarem um laptop, qual a f.p. de X?

$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{Próximo cliente compra um desktop}) = 0,8$$
$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{Próximo cliente compra um laptop}) = 0,2$$
$$p(x) = P(X = x) = 0 \text{ para } x \neq 0 \ ou \ 1$$

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Suponha que você visita uma livraria universitária e observa se a próxima pessoa a comprar um computador, comprará um laptop ou um desktop. Seja a v.a.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se comprar um laptop} \\ 0 & \text{se comprar um desktop} \end{cases}$$

se durante a semana, 20% dos compradores selecionarem um laptop, qual a f.p. de X?

$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{Próximo cliente compra um desktop}) = 0,8$$
$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{Próximo cliente compra um laptop}) = 0,2$$
$$p(x) = P(X = x) = 0 \text{ para } x \neq 0 \ ou \ 1$$

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Uma descrição equivalente é:

$$p(x) = \begin{cases} 0,8 & \text{se } x = 0 \\ 0,2 & \text{se } x = 1 \\ 0,0 & \text{se } x \neq 0 \ ou \ 1 \end{cases}$$

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Se visitarmos outra livraria, poderia ocorrer que $p(0) = 0,9$ e $p(1) = 0,1$.
De forma mais geral, a f.p. de qualquer v.a. Bernoulli pode ser escrita na forma:

$$p(1) = \begin{cases} p(1) & = \alpha \\ p(0) & = 1 - \alpha \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Se visitarmos outra livraria, poderia ocorrer que $p(0) = 0,9$ e $p(1) = 0,1$. De forma mais geral, a f.p. de qualquer v.a. Bernoulli pode ser escrita na forma:

$$p(1) = \begin{cases} p(1) & = \alpha \\ p(0) & = 1 - \alpha \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$.

De esta forma escrevemos:

$$p(x, \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{se } x = 0 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde cada escolha de α, representa um f.p. diferente

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

Se visitarmos outra livraria, poderia ocorrer que $p(0) = 0,9$ e $p(1) = 0,1$. De forma mais geral, a f.p. de qualquer v.a. Bernoulli pode ser escrita na forma:

$$p(1) = \begin{cases} p(1) & = \alpha \\ p(0) & = 1 - \alpha \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$.
De esta forma escrevemos:

$$p(x, \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{se } x = 0 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde cada escolha de α, representa um f.p. diferente

Parâmetro de uma função de probabilidade-Exemplo

outra forma de escrever a f.p. de uma v.a Bernoulli seria:

$$p(x,\alpha)=\begin{cases}(1-\alpha)^{1-x}\alpha^{x} & \text{se } x=0,1\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Parâmetro de uma função de probabilidade

- suponha que $p(x)$ depende de uma quantidade que pode tomar qualquer valor dentro de um conjunto de valores possíveis, sendo que cada valor diferente determina uma distribuição de probabilidade diferente. Tal quantidade é chamada de parâmetro da distribuição.
- Parâmetro é uma característica numérica da distribuição de probabilidade.
- A atribuição de parâmetros de uma distribuição é um processo de abstração, que flexibiliza o seu uso.
- A coleção de todas as distribuições para todos os diferentes parâmetros é chamada de familia de distribuições, onde cada membro da classe ou de uma família é particularizado pelos valores possíveis dos seus parâmetros.

FDA ou (CDF em inglês)

- A função de distribuição acumulada (FDA) $F(x)$ de uma v.a. discreta X com f.p. $p(x)$ é definida para cada número por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:y \leq x} y$$

- para qualquer número x, $F(x)$ é a probabilidade que o valor observado de X será no máximo x.

exemplo

Se X é uma v.a com f.p. dada por:

$$p(1) = \frac{1}{4} \qquad p(2) = \frac{1}{2} \qquad p(3) = \frac{1}{8} \qquad p(4) = \frac{1}{8}$$

calcule a função de distribuição acumulada.

solução

para cada a podemos escrever:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq a < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq a < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq a < 4 \\ 1 & 4 \leq a \end{cases}$$

Proposição

- Para dois números quaisquer a e b, com $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

onde a^- representa o maior valor possível de X que é estritamente menor que a.

- Note que para números inteiros:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 1)$$

Exemplo de distribuição de probabilidade de uma v.a. X

A distribuição de probabilidade de uma v.a. X:

x	–8	–3	–1	0	1	4	6
$P(X=x)$	0.13	0.15	0.17	0.20	0.15	0.11	0.09

Encontre:

a. $P(X \leq 0)$ $\boxed{0.65}$

b. $P(-3 \leq X \leq 1)$ $\boxed{0.67}$

Figura: Exemplo

Valor esperado de X

- Seja X uma v.a. discreta que assume um conjunto de valores possíveis D e fp $p(x)$. O valor esperado ou a média da v.a. X, denotada por $E(X)$ ou μ_X é:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \times p(x)$$

Exemplo

- Com os dados da tabela, calcular o valor esperado (média) do número de cartões de crédito que os alunos possuem.

x	p(X=x)	$x \times p(x)$
0	0,08	0 * 0,08
1	0,28	1 * 0,28
2	0,38	2 * 0,38
3	0,16	3 * 0,16
4	0,06	4 * 0,06
5	0,03	5 * 0,03
6	0,01	6 * 0,01

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \ldots + x_n p(x_n)$$
$$= 0 * 0,08 + \ldots + 6 * 0,01 = 1,97 \approx 2$$

Exemplo

- Com os dados da tabela, calcular o valor esperado (média) do número de cartões de crédito que os alunos possuem.

x	p(X=x)	$x \times p(x)$
0	0,08	0 * 0,08
1	0,28	1 * 0,28
2	0,38	2 * 0,38
3	0,16	3 * 0,16
4	0,06	4 * 0,06
5	0,03	5 * 0,03
6	0,01	6 * 0,01

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \ldots + x_n p(x_n)$$
$$= 0 * 0,08 + \ldots + 6 * 0,01 = 1,97 \approx 2$$

O estatístico inconsciente

- Se a v.a. X possui um conjunto de valores possíveis D e f.p. $p(x)$, então o valor esperado de qualquer função $h(x)$ denotado por $E[h(X)]$ ou $\mu_{h(X)}$ é

$$E[h(X)] = \mu_{h(X)} = \sum_{D} h(x) * p(x)$$

O estatístico inconsciente

prova:
Seja $y = h(X)$, então queremos encontrar $E(y)$ considerando $g(y)$ como a f.p. de y
pela definição,

$$\begin{aligned} E(y) = \sum_y y * g(y) &= \sum_y yP(h(x) = y) \\ &= \sum_y y \sum_{x:h(x)=y} p(x) \\ &= \sum_y \sum_{x:h(x)=y} h(x)p(x) = \sum_x h(x)p(x) \end{aligned}$$

propriedades do V.E.

$$E(aX + b) = a * E(X) + b$$

isto leva às seguintes propriedades:

- 1. Para qualquer constante a,

$$E(aX) = a * E(X)$$

- 2. Para qualquer constante b

$$E(X + b) = E(X) + b$$

propriedades do V.E.

Seja X uma v.a. que pode tomar apenas os valores $0, 1, 2, \ldots$. Então,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P(X = n)$$

Considere agora o seguinte arranjo triangular:

$$\begin{array}{cccc}
P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\
 & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\
 & & P(X=3) & \ldots \\
 & & & \ldots
\end{array}$$

propriedades do V.E.

Seja X uma v.a. que pode tomar apenas os valores $0, 1, 2, \ldots$. Então,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P(X = n)$$

Considere agora o seguinte arranjo triangular:

$$\begin{array}{cccc} P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\ & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\ & & P(X=3) & \ldots \\ & & & \ldots \end{array}$$

segue que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

propriedades do V.E.

Seja X uma v.a. que pode tomar apenas os valores $0, 1, 2, \ldots$. Então,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P(X = n)$$

Considere agora o seguinte arranjo triangular:

$$\begin{array}{cccc}
P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\
 & P(X=2) & P(X=3) & \ldots \\
 & & P(X=3) & \ldots \\
 & & & \ldots
\end{array}$$

segue que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

Exemplo

Um produto que é vendido sazonalmente resulta em um ganho líquido de b reais para cada unidade vendida e uma perda líquida de l reais para cada unidade que não tenha sido vendida no final da temporada. O número de unidades do produto pedido em uma loja qualquer durante qualquer estação do ano é $p(i), i \geq 0$. Se a loja deve estocar este produto com antecedência, determine o número de unidades que a loja deveria estocar para maximizar seu lucro esperado.

Exemplo

Seja a v.a. X: número de unidades pedidas. Se s unidades são estocadas, então o lucro $P(s)$ pode ser representado como:

$$\begin{aligned} P(s) &= bX - (s - X)l && \text{se } X \leq s \\ &= sb && \text{se } X > s \end{aligned}$$

Exemplo

Desta forma, o lucro esperado é:

$$\begin{aligned} E\left[P(s)\right] &= \sum_{i=0}^{s} \left[bi - (s-i)l\right] * p(i) + \sum_{i=s+1}^{\infty} sb * p(i) \\ &= (b+l)\sum_{i=0}^{s} i * p(i) - sl\sum_{i=0}^{s} p(i) + sb\left[1 - \sum_{i=0}^{s} p(i)\right] \\ &= sb + (b+l)\sum_{i=0}^{s} (i-s) * p(i) \end{aligned}$$

Exemplo

para determinar o valor ótimo de s investigamos o que acontece com o lucro quando estocamos uma unidade a mais $(s+1)$

$$\begin{aligned} E\left[P(s+1)\right] &= b(s+1) + (b+l)\sum_{i=0}^{s+1}(i-s-1)*p(i) \\ &= b(s+1) + (b+l)\sum_{i=0}^{s}(i-s-1)*p(i) \end{aligned}$$

Exemplo

Assim,

$$E\left[P(s+1)\right] - E\left[P(s)\right] = b - (b+l)\sum_{i=0}^{s} p(i)$$

portanto, estocar $s+1$ unidades será melhor do que estocar s sempre que:

$$\sum_{i=0}^{s} p(i) < \frac{b}{b+l}$$

o lado esquerdo aumenta com s e o lado direito é constante. A desigualdade será satisfeita para todos os valores $s \leq s^*$ onde s^* é o maior valor que satisfaz a equação acima.

$$E\left[P(0)\right] < \ldots < E\left[P(s^*)\right] < E\left[P(s^*+1)\right] > E\left[P(s^*+2)\right] > \ldots.$$

Variância e desvio padrão

Seja X uma v.a. com f.p. $p(x)$ e valor esperado μ. Então a variância de X, denotada por $V(X)$ (ou σ_X^2 ou σ^2) é :

$$V(X) = \sum_{D} (x-\mu)^2 * p(x) = E[(x-\mu)^2]$$

O desvio padrão (DP) de X é

$$DP(X) = \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Exemplo

As notas de um Quiz de um aluno são:

$$22, 25, 20, 18, 12, 20, 24, 20, 20, 25, 24, 25, 18$$

Encontre a variância e o desvio padrão destas notas.

Valor	12	18	20	22	24	25
Frequência	1	2	4	1	2	3
Probabilidade	0,08	0,15	0,31	0,08	0,15	0,23

Exemplo

As notas de um Quiz de um aluno são:

$$22, 25, 20, 18, 12, 20, 24, 20, 20, 25, 24, 25, 18$$

Encontre a variância e o desvio padrão destas notas.

Valor	12	18	20	22	24	25
Frequência	1	2	4	1	2	3
Probabilidade	0,08	0,15	0,31	0,08	0,15	0,23

Exemplo

Dos dados temos que $\mu = 21$ portanto:

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2 \\ &= 0,08 * (12-21)^2 + 0,15 * (18-21)^2 + \ldots + 0,23 * (25-21)^2 \\ &= 13,25 \end{aligned}$$

O desvio padrão é então:

$$DP(X) = \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{13,25} \approx 3,64$$

Fórmula alternativa para a variância

$$\begin{aligned} V(X) = \sigma^2 &= \left[\sum_D x^2 * p(x)\right] - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Propriedades da variância

$$V(aX+b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 * \sigma^2_X$$

e $\sigma_{aX+b} = |a| * \sigma_X$
isto leva às seguintes propriedades:

- 1. $\sigma^2_{aX} = a^2 * \sigma^2_X$, que leva a $\sigma_{aX} = |a| * \sigma_X$
- 2. $\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X$

Propriedades da variância

Se $X_1, X_2, ... X_n$ são v.a. independentes, então:

$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$$

prova: Por argumentos indutivos suponha que $n = 2$.
Se $E(X_1) = \mu_1$ e $E(X_2) = \mu_2$, Então $E(X_1 + X_2) = \mu_1 + \mu_2$
portanto:

$$\begin{aligned} Var(X_1 + X_2) &= E\left[(X_1 + X_2 - \mu_1 - \mu_2)^2\right] \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E\left[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right] \end{aligned}$$

Com X_1 e X_2 são independentes,
$E\left[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right] = E(X_1 - \mu_1)E(X_2 - \mu_2) = 0$ e segue o resultado.

Binomial

Um experimento para o qual são satisfeitas as seguintes 4 condições é denominado Experimento binomial

- 1. O experimento consiste de uma sequência de n ensaios, onde n é fixado antes da realização do experimento
- 2. Os ensaios são idênticos e, cada ensaio pode ter dois resultados possíveis, que denotamos por Sucesso (S) ou Fracasso (F)
- 3. Os ensaios são independentes
- 4. A probabilidade de Sucesso é constante de ensaio a ensaio: denotado por p.

experimento binomial

Suponha que cada ensaio de um experimento pode resultar em S ou F, mas a amostragem é sem substituição de uma população de tamanho N. Se o tamanho da amostra n é no máximo 5% do tamanho da população, o experimento pode ser analizado como se fosse um experimento binomial.

variável aleatória binomial

Dado um experimento binomial que consiste de n ensaios, a variável aleatória binomial X associada com este experimento é definida como:
$X=$ o número de S‘s entre os n ensaios

Notação para a f.p. de uma v.a. binomial

Dado que a f.p de uma v.a binomial X depende de dois parâmetros n e p, denotamos a f.p. por $b(x; n, p)$.

cálculo de uma f.p. de uma v.a. binomial:

$$b(x; n, p) = b(n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação para função de distribuição acumulada (f.d.a.)

Para $X \sim Bin(n,p)$ a f.d.a. será denotada por

$$P(X \leq x) = \sum_{y=0}^{x} bin(y;n,p)$$

$x = 0, 1, ..., n$

Média e Variância de uma binomial

Para $X \sim Bin(n, p)$, então

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ V(X) &= np(1-p) = npq \\ \sigma_X &= \sqrt{npq} \end{aligned}$$

onde $q = 1 - p$

Exemplo

Se a probabilidade de um estudante passar um curso é $0,82$, encontre a probabilidade que dado 8 estudantes:

- a) todos os 8 passem:

$$\binom{8}{8} * (0,82)^8 * (0,18)^0 \approx 0,2044$$

- b) nenhum passe:

$$\binom{8}{0} * (0,82)^0 * (0,18)^8 \approx 0,0000011$$

- c) ao menos 6 passem:

$$\binom{8}{6} * (0,82)^6 * (0,18)^2 + \binom{8}{7} * (0,82)^7 * (0,18)^1 + \binom{8}{8} * (0,82)^8 * (0,18)^0$$

Propriedade da Binomial

Se $X_1, ..., X_k$ são v.a. independentes, e se X_i tem distribuição binomial com parâmetros n_i e p $i = 1, ..., k$, então a soma $X_1 + X_2 + ... + X_k$ tem distribuição binomial com parâmetros $n = n_1 + ... + n_k$ e p

Exemplo motivador

Suponha que uma urna contém A bolas vermelhas e B bola azuis. Suponha também que n bolas são extraídas da urna aleatóriamente sem reposição. Seja X a v.a. que indica o número de bolas vermelhas obtidas. Claramente, o valor de X não pode ser maior que n nem maior que A, portanto,

$$X \leq min\{n, A\}$$

Exemplo motivador

Suponha que uma urna contém A bolas vermelhas e B bola azuis. Suponha também que n bolas são extraídas da urna aleatóriamente sem reposição. Seja X a v.a. que indica o número de bolas vermelhas obtidas. Claramente, o valor de X não pode ser maior que n nem maior que A, portanto,

$$X \leq min\{n, A\}$$

Exemplo

De maneira similar, como o número de bolas azuis $n - X$ que são obtidos não podem ser maiores do que B, o valor de X deve ser pelo menos $n - B$. Como X não pode ser menor que 0,

$$X \geq max\{0, n - B\}$$

portanto, o valor de X deve ser um inteiro no intervalo:

$$max\{0, n - B\} \leq X \leq min\{n, A\}$$

Exemplo

De maneira similar, como o número de bolas azuis $n - X$ que são obtidos não podem ser maiores do que B, o valor de X deve ser pelo menos $n - B$. Como X não pode ser menor que 0,

$$X \geq max\{0, n - B\}$$

portanto, o valor de X deve ser um inteiro no intervalo:

$$max\{0, n - B\} \leq X \leq min\{n, A\}$$

exemplo

Seja $p(x)$ a f.p. de X. Então para qualquer inteiro x no intervalo acima, a probabilidade de obter exatamente x bolas vermelhas é

$$p(x|A,B,n) = \begin{cases} \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} & \text{para } max\{0, n-B\} \leq X \leq min\{n, A\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuição Hipergeométrica

Três suposições levam à distribuição hipergeométrica:

- 1. A população ou conjunto amostrado consiste de N individuos, objetos ou elementos (a população é finita)
- 2. Cada indivíduo pode ser caracterizado como um sucesso (S) ou fracasso (F), e a população consta de M sucessos.
- 3. Uma amostra de n individuos é selecionada sem repetição de tal forma que cada subconjunto de tamanho n tem a mesma probabilidade de ser escolhido.

Distribuição Hipergeométrica

Se X é o número de S's em uma amostra aleatória de tamanho n extraídas de uma população aleatória de M S's e $(N - M)$ F's, então a distribuição de probabilidades de X será chamada de distribuição hipergeométrica, e é dada por :

$$P(X = x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

onde

$max(0, n - N + M) \leq x \leq min(n, M)$

Média e Variância da hipergeométrica

$$E(X) = n * \frac{M}{N}$$

$$V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \times n \times \frac{M}{N} \times \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

Binomial Negativa

A v.a. binomial negativa e a distribuição binomial negativa estão baseados num experimentos que satisfaz as seguintes quatro condições:

- 1. O experimento consiste de uma sequência de ensaios independentes
- 2. Cada ensaio resultará em Sucesso (S) ou em Fracasso (F)
- 3. A probabilidade de sucesso é constante de ensaio a ensaio: $P(S$ no ensaio $i) = p$ para $i = 1, 2, ...$
- 4. O experimento continua até que se observe r sucessos, onde r é um inteiro positivo especificado.

f.p. de uma Binomial negativa

A v.a. de interesse é X: número de falhas que precedem o r-ésimo sucesso. Neste caso, o número de tentativas não é fixo, senão aleatório.

A f.p. de uma v.a. binomial negativa com parâmetros $r =$número de S's e $p = P(S)$ é

$$bn(x; r, p) = b^{-}(r, p) = \binom{x + r + 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x$$

onde $x = 0, 1, ...$

f.p. de uma Binomial negativa

A v.a. de interesse é X: número de falhas que precedem o r-ésimo sucesso. Neste caso, o número de tentativas não é fixo, senão aleatório.
A f.p. de uma v.a. binomial negativa com parâmetros $r =$número de S's e $p = P(S)$ é

$$bn(x; r, p) = b^{-}(r, p) = \binom{x + r + 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x$$

onde $x = 0, 1, ...$

Exemplo

Para $n = r, r + 1, \ldots$, seja A_n: o número total de ensaios requeridos para obter exatamente r sucessos é n.

O evento A_n ocorre se e somente se ocorrem exatamente $r - 1$ sucessos entre os primeiros $n - 1$ ensaios e o r-ésimo sucesso é obtido no ensaio n.

Como os ensaios são independentes, segue-se que

$$P(A_n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} p = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Exemplo

Para $n = r, r+1, \ldots$, seja A_n: o número total de ensaios requeridos para obter exatamente r sucessos é n.
O evento A_n ocorre se e somente se ocorrem exatamente $r-1$ sucessos entre os primeiros $n-1$ ensaios e o r-ésimo sucesso é obtido no ensaio n.
Como os ensaios são independentes, segue-se que

$$P(A_n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} p = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

exemplo

O evento que exatamente x falhas são obtidas antes do r-ésimo sucesso $(x = 0, 1, ...)$ é equivalente ao evento que o número de ensaios requeridos para obter r sucessos é $r + x$. Em outras palavras, se X denota o número de falhas antes do r-ésimo sucesso, então $P(X = x) = P(A_{r+x})$.
Segue que

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{x+r+1}{r-1} p^r (1-p)^x & \text{para } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Média e Variância de uma Binomial Negativa

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Propriedade da distribuição geométrica (r=1)

Se X tem distribuição geométrica com parâmetro p, então para inteiros não negativos k e t (quaisquer):

$$P(X = k + t | X \geq k) = P(X = t)$$

Poisson

Uma variável aleatória X é dita ter a distribuição de Poisson com parâmetro λ ($\lambda > 0$), se a f.p. de X é

$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

A distribuição de Poisson como limite

Suponha que numa f.p. binomial (b(x;n,p)), permitimos que

- $n \to \infty$ e
- $p \to 0$, de tal forma que
- $n * p$ se aproxima de um valor $\lambda > 0$.

Então, $b(x; n, p) \to p(x; \lambda)$.

Média e Variância de uma Poisson

Se X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, então:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Processo de Poisson

Este processo tem 3 suposições:

- 1. Existe um parâmetro $\alpha > 0$ tal que para qualquier intervalo de tempo pequeno, de tamanho Δt, a probabilidade que exatamente um evento é recebido é $\alpha \times \Delta t + o(\Delta t)$.
- 2. A probabilidade de mais do que um evento durante Δt é $o(\Delta t)$
- 3. O número de eventos durante o intervalo de tempo Δt é independente do número de eventos ocorridos antes desse intervalo.

Distribuição de Poisson

$P_k(t) = e^{-\alpha t} \times \frac{(\alpha t)^k}{k!}$ tal que o número de eventos durante um intervalo de tamanho t é uma v.a. Poisson com parâmetro $\lambda = \alpha t$.
O número esperado de eventos durante qualquer intervalo de tiempo é αt, tal que o número esperado durante um intervalo de uma unidade de tiempo é α.