Algoritmos e Estruturas de Dados II
Aula 22 – Árvores B

Prof. Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2024

Alocação de Blocos na Memória Secundária

- Leitura, escrita, buscas, etc., são realizadas por blocos.
- Os arquivos não são estáticos, eles crescem e diminuem
- Estratégias de alocação de blocos no disco e organização de registros pelos blocos devem considerar esse fato:
    - Sequencial não ordenado (*heap files*)
    - Sequencial ordenado (*sorted files*)
    - Por listas ligadas
    - Indexado (busca rápida, problemas na inserção e exclusão)
    - Árvores B / B+
    - *Hashing*

Alocação de Blocos na Memória Secundária

- Leitura, escrita, buscas, etc., são realizadas por blocos.
- Os arquivos não são estáticos, eles crescem e diminuem
- Estratégias de alocação de blocos no disco e organização de registros pelos blocos devem considerar esse fato:
  - Sequencial não ordenado (*heap files*)
  - Sequencial ordenado (*sorted files*)
  - Por listas ligadas
  - Indexado (busca rápida, problemas na inserção e exclusão)
  - Árvores B / B+
  - *Hashing*

Alocação de Blocos na Memória Secundária

- Leitura, escrita, buscas, etc., são realizadas por blocos.
- Os arquivos não são estáticos, eles crescem e diminuem
- Estratégias de alocação de blocos no disco e organização de registros pelos blocos devem considerar esse fato:
  - Sequencial não ordenado (*heap files*)
  - Sequencial ordenado (*sorted files*)
  - Por listas ligadas
  - Indexado (busca rápida, problemas na inserção e exclusão)
  - Árvores B / B+
  - *Hashing*

Lembrando de AED I

Lembrando de AED I

- Busca eficiente em dados ordenados sem gastar memória

Lembrando de AED I

- Busca eficiente em dados ordenados sem gastar memória
  - Busca Binária (em um arranjo)

Lembrando de AED I

- Busca eficiente em dados ordenados sem gastar memória
  - Busca Binária (em um arranjo)
  - Mas o problema era justamente inserção / exclusão

Lembrando de AED I

- Busca eficiente em dados ordenados sem gastar memória
  - Busca Binária (em um arranjo)
  - Mas o problema era justamente inserção / exclusão
  - Qual a solução em AED I para continuar fazendo busca binária mas permitir dinamismo de inserção / remoção?

Lembrando de AED I

- Busca eficiente em dados ordenados sem gastar memória
  - Busca Binária (em um arranjo)
  - Mas o problema era justamente inserção / exclusão
  - Qual a solução em AED I para continuar fazendo busca binária mas permitir dinamismo de inserção / remoção?
- Árvores Binárias de Busca!

Lembrando de AED I

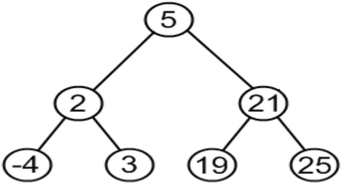
- Busca Binária (em um arranjo):
  -4, 2, 3, 5, 19, 21, 25

Lembrando de AED I

- Busca Binária (em um arranjo):
  -4, 2, 3, 5, 19, 21, 25
- Árvores de Busca Binária:

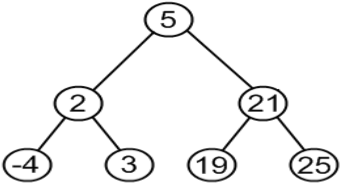
Lembrando de AED I

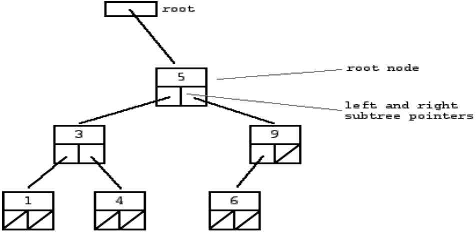
- Busca Binária (em um arranjo):
  -4, 2, 3, 5, 19, 21, 25
- Árvores de Busca Binária:



Lembrando de AED I

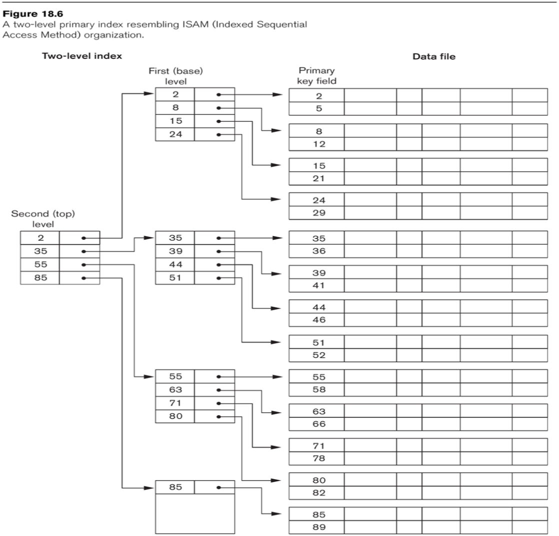
- Busca Binária (em um arranjo):
  -4, 2, 3, 5, 19, 21, 25
- Árvores de Busca Binária:





Árvores B

Podemos pensar em algo semelhante para melhorar o dinamismo dos índices multinível?



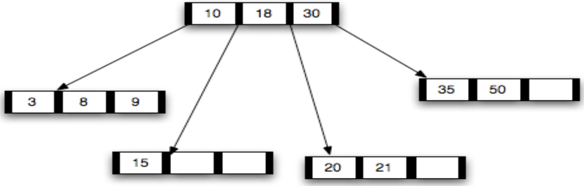
Árvores B

Podemos pensar em algo semelhante para melhorar o dinamismo dos índices multinível?

- Árvores de busca n+1-árias
- N = número de registros representados em um nó da árvore (bloco), cada registro com uma chave k_i
- N+1 ponteiros para nós filhos contendo registros com chaves em cada intervalo
  - O segredo será mantê-las balanceadas

Árvores B

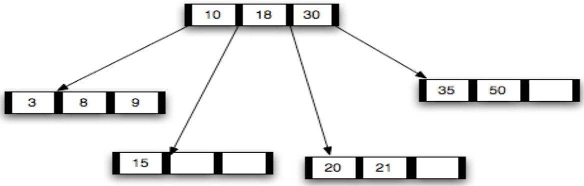
- Registros organizados pela árvore, assim como na árvore binária de busca
- Logo, se os registros possuem uma chave única, não há repetição de valores
- Abaixo é representada só a chave para simplificar a figura, mas na verdade deve conter, para cada chave k_i, o resto do registro (demais dados daquele item) ou um ponteiro p_i para o registro (k_i, p_i)



Árvores B - Definição

- Uma *árvore B* é uma árvore com as seguintes propriedades:

  1. Cada nó x contém os seguintes campos:
     - $n[x]$, o número de chaves atualmente armazenadas no nó x;
     - as $n[x]$ chaves, armazenadas em ordem não decrescente, de modo que $key_1[x] \leq key_2[x] \leq \ldots \leq key_{n[x]}[x]$;
     - $leaf[x]$, um valor booleano indicando se x é uma folha (TRUE) ou um nó interno (FALSE).
     - se x é um nó interno, x contém $n[x] + 1$ ponteiros $c_1[x], c_2[x], \ldots c_{n[x]+1}[x]$ para seus filhos.



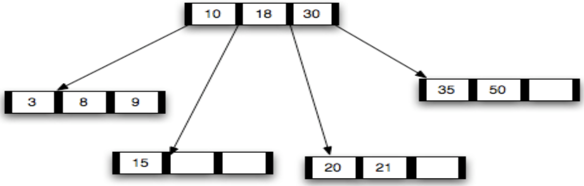
(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Definição

2. As chaves $key_i[x]$ separam as faixas de valores armazenados em cada subárvore: denotando por k_i uma chave qualquer armazenada na subárvore com nó $c_i[x]$, tem-se

$$k_1 \leq key_1[x] \leq k_2 \leq key_2[x] \leq \ldots \leq key_{n[x]}[x] \leq k_{n[x]+1}$$

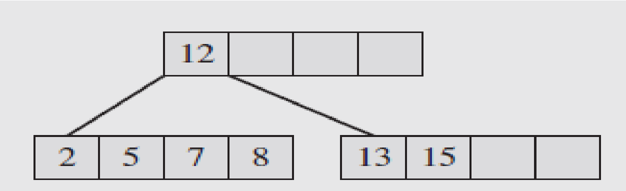
3. Todas as folhas aparecem no mesmo nível, que é a altura da árvore, h.



(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Para Pensar

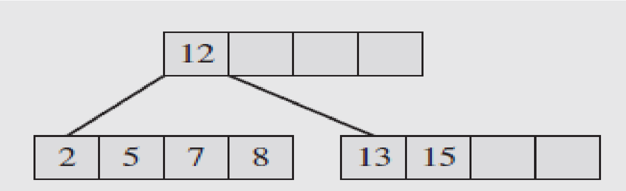
3. Todas as folhas aparecem no mesmo nível, que é a altura da árvore *h*



- Onde seria inserido um registro com chave igual a 1?

Árvores B - Para Pensar

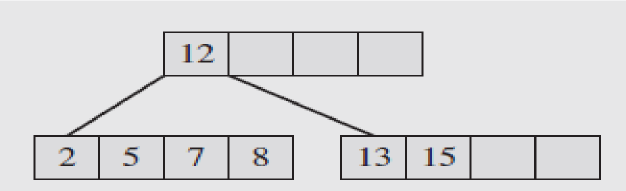
3. Todas as folhas aparecem no mesmo nível, que é a altura da árvore h



- Onde seria inserido um registro com chave igual a 1?
- Poderíamos criar um filho à esquerda de 2?

Árvores B - Para Pensar

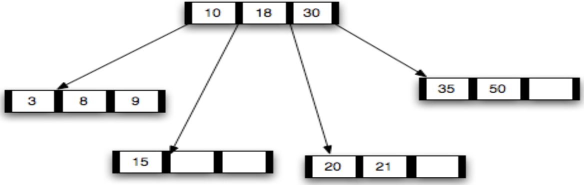
3. Todas as folhas aparecem no mesmo nível, que é a altura da árvore h



- Onde seria inserido um registro com chave igual a 1?
- Poderíamos criar um filho à esquerda de 2?
  - Isso aumentaria a altura da árvore mesmo ela tendo espaço
  - E feriria a definição 3.

Árvores B - Definição

4. Há um limite inferior e superior no número de chaves que um nó pode conter, expressos em termos de um inteiro fixo $t \geq 2$ chamado o *grau mínimo* (ou *ordem*) da árvore.
   - Todo nó que não seja a raiz deve conter pelo menos $t - 1$ chaves. Todo nó interno que não seja a raiz deve conter pelo menos t filhos.
   - Todo nó deve conter no máximo $2t - 1$ chaves (e portanto todo nó interno deve ter no máximo $2t$ filhos). Dizemos que um nó está *cheio* se ele contiver exatamente $2t - 1$ filhos.

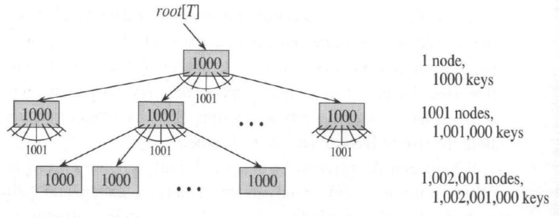


(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Observação

- Número máximo de chaves (e filhos) por nó deve ser proporcional ao tamanho da página. Valores usuais de 50 a 2000. Fatores de ramificação altos reduzem drasticamente o número de acessos ao disco.

  Por exemplo, uma árvore B com fator de ramificação 1001 e altura 2 pode armazenar $\geq 10^9$ chaves. Uma vez que a raiz pode ser mantida permanentemente na memória primária, bastam *dois* acessos ao disco para encontrar qualquer chave na árvore.



(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Altura Máxima

- **Teorema:** Para toda árvore B de grau mínimo $t \geq 2$ contendo n chaves, sua altura h máxima será:

$$h \leq log_t \frac{n+1}{2}$$

Demonstração: Se uma árvore B tem altura h:

- Sua raiz contem pelo menos uma chave e todos os demais nós contêm pelo menos $t-1$ chaves.
- Logo, há pelo menos 2 nós no nível 1, pelo menos $2t$ nós no nível 2, etc, até o nível h, onde haverá pelo menos $2t^{h-1}$ nós.
- Assim, o número n de chaves satisfaz a desigualdade:

$$n \geq 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} = 1 + 2(t-1)\frac{t^h - 1}{t-1} = 2t^h - 1$$

Obs: Usamos acima a igualdade: $\sum_{i=1}^{h} t^{i-1} = \frac{t^h - 1}{t-1}$.

- Logo,

$$t^h \leq (n+1)/2 \Rightarrow h \leq log_t(n+1)/2.$$

(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Estrutura Clássica

```
#define T 2 // Grau Mínimo

typedef int bool;

typedef int TipoChave;

typedef struct {
  TipoChave chave;
  // OUTROS CAMPOS
} Registro;
```

```
typedef struct auxNo{
  int numChaves;
  bool folha;
  Registro regs[2*T-1];
  struct auxNo* filhos[2*T];
} No;

typedef struct{
  No* raiz;
} ArvB;
```

Árvores B - Inicialização

```
B-TREE-CREATE(T)
x ← ALLOCATE-NODE()
leaf[x] ← TRUE
n[x] ← 0
DISK-WRITE(x)
root[T] ← x
```

Árvores B - Inicialização

B-TREE-CREATE(T)

```
x ← ALLOCATE-NODE()
leaf[x] ← TRUE
n[x] ← 0
DISK-WRITE(x)
root[T] ← x
```

```c
void inicializa(ArvB* a){
  No* novo = (No*) malloc(sizeof(No));
  novo->numChaves = 0;
  novo->folha = true;
  a->raiz = novo;
  salvarNoDisco(novo);
}
```

Busca na árvore B

- B-Tree-Search(x, k): tem como parâmetros um ponteiro para a raiz do nó x de uma subárvore e uma chave k a ser procurada na subárvore. Se k está na subárvore, retorna o par ordenado (y, i) composto pelo ponteiro do nó y e o índice i tal que $key_i[y] = k$. Caso contrário, retorna NIL.
- Chamada inicial: B-Tree-Search$(root[T], k)$.

```
B-TREE-SEARCH(x, k)
i ← 1
while i ≤ n[x] and k > key_i[x]
      do i ← i + 1
if i ≤ n[x] and k = key_i[x]
   then return (x, i)
if leaf[x]
   then return NIL
   else DISK-READ(c_i[x])
        return B-TREE-SEARCH(c_i[x], k)
```

Árvores B - Busca

```
bool buscaRegistro(ArvB* a, TipoChave ch, Registro* reg){
  return buscaRegistroAux(a->raiz, ch, reg);
}


bool buscaRegistroAux(No* atual, TipoChave ch, Registro* reg){
  int i = 0;
  while (i < atual->numChaves && ch > atual->regs[i].chave) i++;
  if (i < atual->numChaves && ch == atual->regs[i].chave){
    *reg = atual->regs[i];
    return true;
  }else{
    if(!atual->folha){
      return buscaRegistroAux(atual->filhos[i], ch, reg);
    }
  }
  return false;
}
```

$O(log_t(b))$ *seeks*

Árvores B - Inserção

Árvores B - Inserção

- As inserções ocorrem sempre nas folhas.

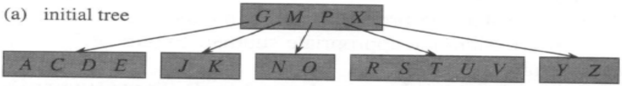
Árvores B - Inserção

- As inserções ocorrem sempre nas folhas.
- Para evitar chegar em uma folha cheia (e precisar, de alguma forma, reorganizar a árvore), sempre que a inserção passar por um nó cheio ela irá subdividi-lo.

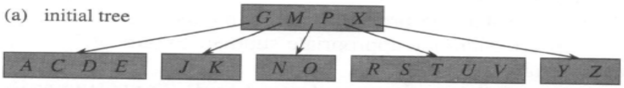
Árvores B - Inserção

- As inserções ocorrem sempre nas folhas.
- Para evitar chegar em uma folha cheia (e precisar, de alguma forma, reorganizar a árvore), sempre que a inserção passar por um nó cheio ela irá subdividi-lo.
    - Veremos a seguir, graficamente, como isso funciona.

Árvores B - Inserção - T=3

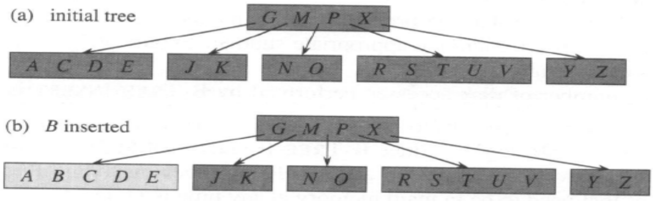


Árvores B - Inserção - T=3



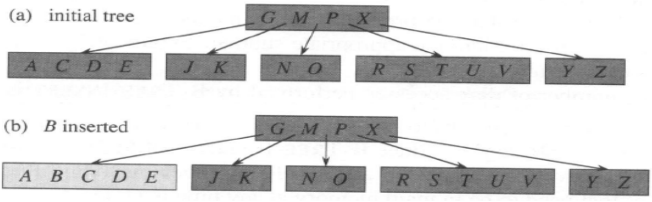
Queremos inserir B

Árvores B - Inserção - T=3



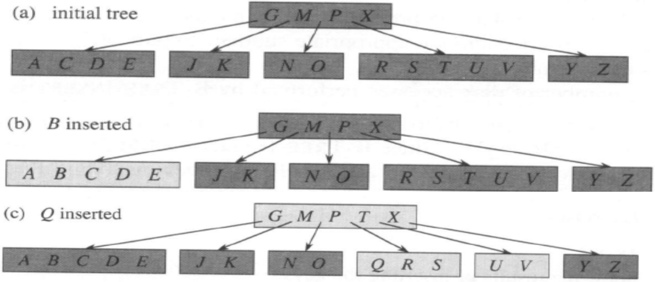
Queremos inserir B

Árvores B - Inserção - T=3



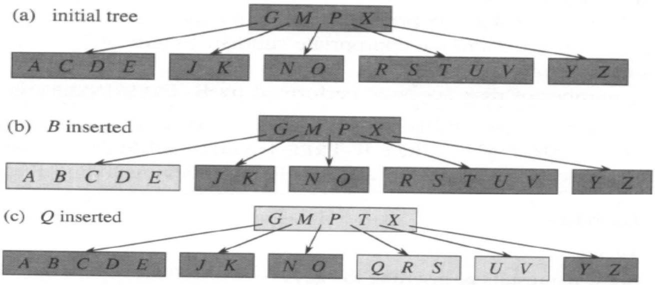
Queremos inserir Q

Árvores B - Inserção - T=3



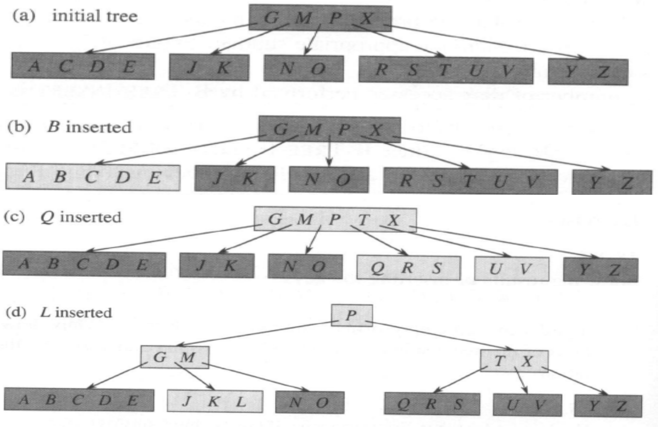
Queremos inserir Q

Árvores B - Inserção - T=3



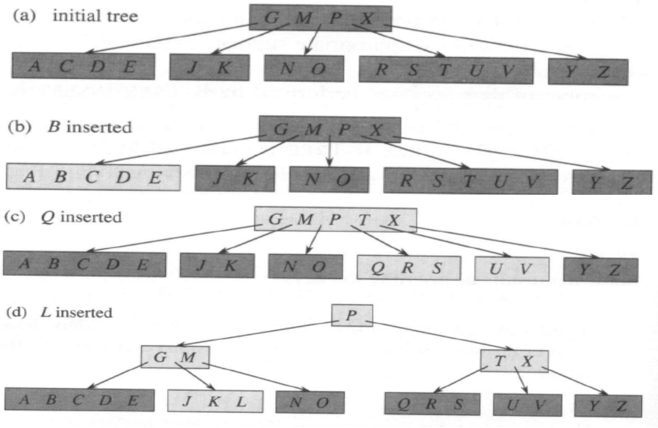
Queremos inserir L

Árvores B - Inserção - T=3



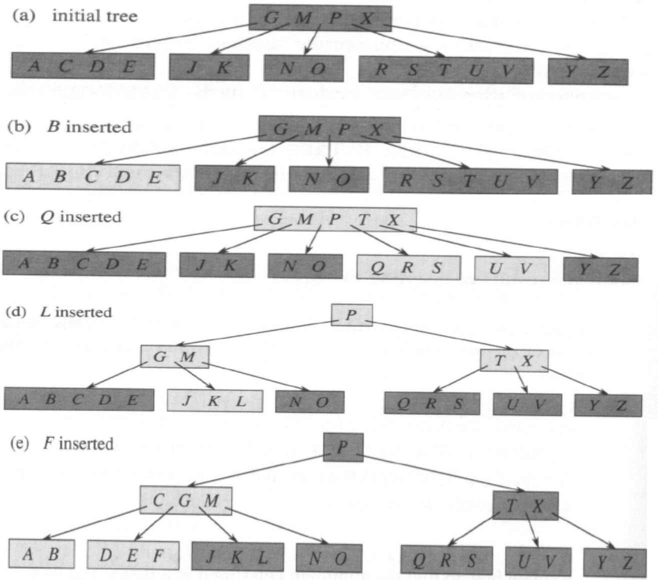
Queremos inserir L

Árvores B - Inserção - T=3



Queremos inserir F

Árvores B - Inserção - T=3

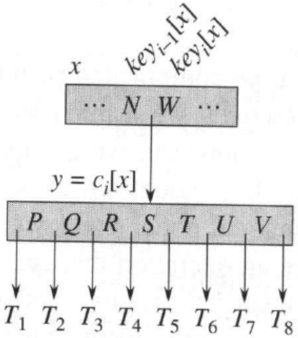


Queremos inserir F

Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Como dividir um nó que está cheio?

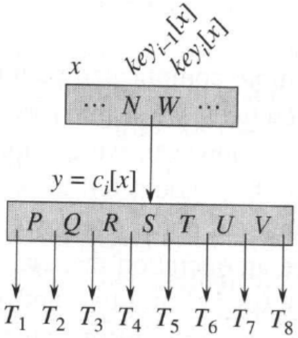
Antes:



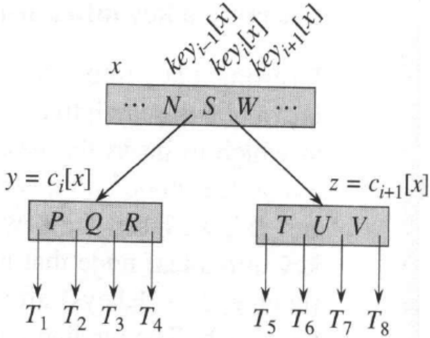
Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Como dividir um nó que está cheio?

Antes:



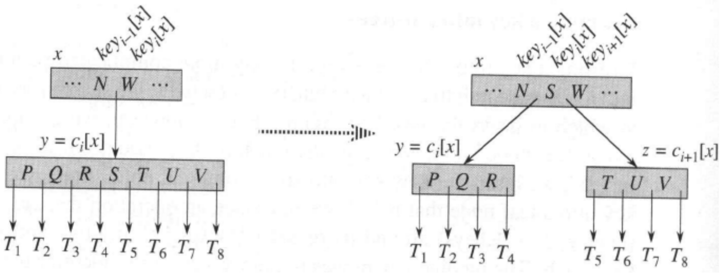
Depois:



Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

- Divisão de um nó na árvore:

  B-Tree-Split-Child(x, i, y): tem como entrada um nó interno x *não cheio*, um índice i e um nó y tal que $y = c_i[x]$ é um filho *cheio* de x. O procedimento divide y em 2 e ajusta x de forma que este terá um filho adicional.



Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Dividir(x, i, y):

- x: nó pai
- i: índice de y no arranjo de filhos de x
- y: nó que será dividido (i-ésimo filho de x)

Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Dividir(x, i, y):

- x: nó pai
- i: índice de y no arranjo de filhos de x
- y: nó que será dividido (i-ésimo filho de x)

1. Alocamos memória para o novo nó *z*

Dividir(x, i, y):

- x: nó pai
- i: índice de y no arranjo de filhos de x
- y: nó que será dividido (i-ésimo filho de x)

1. Alocamos memória para o novo nó z
2. Ajustamos z e y (com $T-1$ elementos em cada)

Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Dividir(x, i, y):

- x: nó pai
- i: índice de y no arranjo de filhos de x
- y: nó que será dividido (i-ésimo filho de x)

1. Alocamos memória para o novo nó z
2. Ajustamos z e y (com $T-1$ elementos em cada)
3. Ajustamos x que receberá a mediana de y (antes dos ajustes)

Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

Dividir(x, i, y):

- x: nó pai
- i: índice de y no arranjo de filhos de x
- y: nó que será dividido (i-ésimo filho de x)

1. Alocamos memória para o novo nó *z*
2. Ajustamos *z* e *y* (com $T - 1$ elementos em cada)
3. Ajustamos *x* que receberá a mediana de *y* (antes dos ajustes)

```
B-TREE-SPLIT-CHILD(x, i, y)
z ← ALLOCATE-NODE()
leaf[z] ← leaf[y]
n[z] ← t − 1
for j ← 1 to t − 1
     do key_j[z] ← key_{j+t}[y]
if not leaf[y]
   then for j ← 1 to t
             do c_j[z] ← c_{j+t}[y]
n[y] ← t − 1
for j ← n[x] + 1 downto i + 1
     do c_{j+1}[x] ← c_j[x]
c_{i+1}[x] ← z
for j ← n[x] downto i
     do key_{j+1}[x] ← key_j[x]
key_i[x] ← key_t[y]
n[x] ← n[x] + 1
DISK-WRITE(y)
DISK-WRITE(z)
DISK-WRITE(x)
```

(CORMEN, LEISERSON & RIVEST, 2009)

Árvores B - Inserção - Divisão de Nós

```
void divideNoFilho(No* x, int i, No* y){
  No* novo = (No*) malloc(sizeof(No));
  novo->folha = y->folha;
  novo->numChaves = T - 1;
  int j;
  for (j=0; j<T-1; j++) novo->regs[j] = y->regs[j+T];
  if (!y->folha)
    for (j=0; j<T; j++) novo->filhos[j] = y->filhos[j+T];
  y->numChaves = T - 1;
  for (j=x->numChaves; j>i; j--) x->filhos[j+1] = x->filhos[j];
  x->filhos[i+1] = novo;
  for (j=x->numChaves-1; j>=i; j--) x->regs[j+1] = x->regs[j];
  x->regs[i] = y->regs[T-1];
  x->numChaves++;
  salvarNoDisco(y);  salvarNoDisco(novo);  salvarNoDisco(x);
}
```

$O(1)$ (3 *seeks*)

Árvores B - Inserção

Continua na próxima aula!

Referência

- Slides baseados no material da profa. Ariane Machado Lima - ACH2024

- CORMEN, H. T.; LEISERSON, C.E.; RIVEST, R.L. Introduction to Algorithms, MIT Press, McGraw-Hill, 2009.

Algoritmos e Estruturas de Dados II
Aula 22 – Árvores B

Prof. Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2024