ACH2011 - Cálculo I

Sistema de Informação - EACH

Lista 6: Aplicações da Derivação[1]

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.

   (a) Que teorema garante a existência de valores máximos e mínimos absolutos para f?

   (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximos e mínimos?

3. Esboce o gráfico de uma função f que seja continua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dados.

   (a) Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimos local em 4.

   (b) Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimos local em 2 e 4.

   f não tem máximo ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

4. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

   (b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja continua, mas não derivável em 2.

   (c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja continua em 2.

5. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

   (b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontinua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

6. Encontre os números críticos da função.

   (a) $f(x) = 5x^2 + 4x$

   (b) $f(x) = |3x - 4|$

   (c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1}$

   (d) $f(\theta) = 2\cos\theta + sen^2\theta$

   (e) $f(x) = x^2 e^{-3x}$

[1]Exercícios do livro Cálculo de James Stewart

(f) $f(x) = x^{-2} \ln x$

7. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado.

   (a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$
   (c) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, $[-1, 2]$
   (d) $f(\theta) = 2\cos\theta + sen\ 2\theta$, $[0, \pi/2]$
   (e) $f(x) = \ln x^2 + x + 1$, $[-1, 1]$
   (f) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$, $[0, 1]$

8. Demonstre que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem nem máximos nem mínimos locais.

9. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

10. Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

    (a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $[0, 4]$
    (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$, $[0, 2]$
    (c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$

11. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

12. Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema do Valor Médio.

    (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $[-1, 1]$
    (b) $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

13. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

14. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

15. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

16. (a) Suponha que f seja derivável em R e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.

    (b) Suponha que f seja duas vezes derivável em R e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.

(c) Você pode generalizar os ítens (a) e (b)?

17. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \leq 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?

18. Suponha que $3 \leq f'(x) \leq 5$ para todo x. Mostre que $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

19. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário da aula para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

20. Um número a é chamado ponto fixo de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

21. Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

    (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

    (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

    (c) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \ sen\ x}$

    (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

    (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

    (f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

    (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-3^x}{x}$

    (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

    (i) $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

    (j) $\lim\limits_{x\to \infty} (x - \sqrt{x^2-1})$

    (k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

22. Demonstre que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$
para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

23. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \infty$$

para todo p positivo. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

24. Se f' for contínua, use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

25. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

.

26. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
    (a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
    (b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou pra baixo?
    (c) Como você localiza os pontos de inflexão?

27. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
    (b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

28. (a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
    (b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.
    (c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
        i. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
        ii. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$
        iii. $f(x) = \cos^2 x - 2\ sen\ x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$
        iv. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$
        v. $f(x) = x^2 \ln x$

29. Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Primeira e Segunda Derivadas. Qual método você prefere?
    (a) $f(x) = x^5 - 5x + 3$
    (b) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
    (c) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

30. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x-1)^3$
    (b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
    (c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

31. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
    (a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que se pode afirmar sobre f'?
    (b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

32. Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.
    (a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, assíntota vertical $x = 1$, $f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$, $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$.
    (b) Se $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$, $f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$, $f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$.
    (c) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

33. (a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.
    (b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
    (c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.
    (d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
    (e) Use a informação das partes $(a) - (d)$ para esboçar o gráfico de f.
        i. $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
        ii. $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$
        iii. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$
        iv. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

34. Use o roteiro da aula para esboçar a curva.
    (a) $f(x) = x^3 + x$
    (b) $f(x) = x^4 + 4x^3$
    (c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
    (d) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$
    (e) $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$
    (f) $f(x) = x\sqrt{5-x}$
    (g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
    (h) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

35. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

36. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?

37. Qual é a distância mínima entre a parábola $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

38. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de $100m$ cuja área seja a maior possível.

39. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com $300m$ de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes cpm cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

40. Um fazendeiro quer cercar uma área de $15000m^2$ em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a uns dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

41. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de $32000cm^3$. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

42. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter $27cm^3$ de água Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade de papel.

43. Um pedaço de fio com $10m$ de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja máxima? E mínima?

44. Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

    (a) $f(x) = x^3$, $a = 1$
    (b) $f(x) = cosx$, $a = \pi/2$
    (c) $f(x) = \ln x$, $a = 1$

45. Calcule Δy s dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$.

    (a) $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $\Delta x = -0,4$.
    (b) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$.
    (c) $y = 2/x$, $x = 4$, $\Delta x = 1$.
    (d) $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0,5$.

46. Use uma aproximação linear para estimar o número dado.

    (a) $(2,001)^5$
    (b) $e^{-0.015}$
    (c) $\sqrt{99,8}$