Nome: Gabriel Monteiro de Souza   nº 14746450

Definições de relações nos conjuntos.

1) Relação binária é a relação entre dois elementos de conjuntos diferentes que compartilham a mesma propriedade. Dessa forma, a relação binária em um conjunto S se dá pelo subconjunto de pares ordenados dos elementos de S.

2) • Relação reflexiva: todo x é relacionado a si mesmo, assim para P a relação binária do conjunto S, tem-se $(\forall x)(x \in S \rightarrow (x,x) \in P)$.

• Relação simétrica: Se x é relacionado a y, então y é relacionado a x, assim tem-se, $(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x,y) \in P \rightarrow (y,x) \in P)$.

• Relação transitiva: Se x é relacionado a y e y é relacionado a z, então x é relacionado a z, assim tem-se, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \land y \in S \land z \in S \land (x,y) \in P \land (y,z) \in P \rightarrow (x,z) \in P)$.

3) A relação antisimétrica pode ser definida como: Se x é relacionado a y e y é relacionado a x, então x, y, assim tem-se $(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x,y) \in P \land (y,x) \in P \rightarrow x = y)$.

4) O fecho de uma relação R é uma relação binária R^* em A que possui a propriedade P e satisfaz:

1. R^* tem a propriedade P
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma relação qualquer que contém R e satisfaz P, então $R^* \subseteq S$.

Os fechos podem ser do tipo reflexivo, simétrico ou transitivo.

5) A ordenação parcial pode ser definida como uma relação binária de um conjunto S que é reflexiva, antisimétrica e transitiva ao mesmo tempo.

6) A relação de equivalência pode ser definida como uma relação binária de um conjunto S que é reflexiva, simétrica e transitiva ao mesmo tempo.

7) A partição de um conjunto S é a coleção de subconjuntos disjuntos e não vazios de S que a união se iguala a S.

8) A congruência módulo n pode ser definida como: Se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 1$ é um inteiro positivo, $x \equiv y \pmod{m}$ se $x - y$ é um múltiplo inteiro de m.

Nome: Gabriel Monteiro de Souza Nº 14746450

Exemplos e exercícios de relações nos conjuntos.

1) • Exemplo: Seja $S = \{1, 12\}$. Então, $S \times S = \{(1,1), (1,12), (12,1), (12,12)\}$. Seja ρ a relação em S dada pela descrição $x \rho y \iff x + y$ é par. Então $(1,1) \in \rho$ e $(12,12) \in \rho$. O par ordenado $(1,12)$ e $(12,1) \in \rho$ porque a soma dos elementos não é par.

• Exercício 1. a) O par $(3,2)$ pertence ao ρ, pois $3 = 2+1$.

b) Os pares $(2,4)$, e $(2,6) \in \rho$, pois 2 divide 4 e 2 divide 6.

c) Os pares $(3,4)$ e $(5,6) \in \rho$, pois 3 e 5 são ímpares.

d) Os pares $(2,1)$ e $(5,2) \in \rho$, pois $2 > 1^2$ e $5 > 2^2$.

2) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3,4\}$. Então $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3) (4,4)\}$ é reflexiva pois todos os pares ordenados respeitam a descrição $x = y$.

• Exemplo 2: Seja $S = \{1,2,3\}$. Então $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)\}$ é simétrica pois todos os pares ordenados seguem a descrição $\forall x,y \in S (R_2(x,y) \to R_2(y,x))$.

• Exemplo 3: Seja $S = \{1,2,3\}$. Então $R_3 = \{(3,2), (3,3), (2,1), (2,2)\}$ é transitiva pois todos os pares ordenados seguem a descrição $\forall x,y \in S (R_3(x,y) \to R_3(y,x))$

3) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$. Então $R = \{(1,2), (2,3)\}$ é anti-simétrica pois todos os pares ordenados seguem a descrição $\forall x, y \in S (R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))$.

• Exercício: Seja $S = \{1,2,3\}$

a) $R = \{(1,1); (2,2), (3,3)\}$, esses pares ordenados pertencem a relação ρ

b) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)\} \in \rho$

c) O par ordenado $(b,a) \in \rho$

d) Tem que ser verdade que $a = b$.

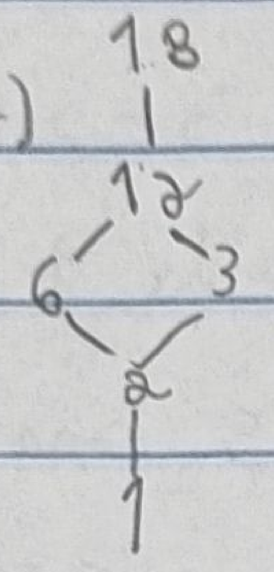
e) não é transitivo, pois precisa de um z para seguir a proposição

4) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$ e $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3)\}$, o fecho da relação a respeito da reflexividade é $\rho^* = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3), (2,2), (3,3)\}$

• Exercício: 6) Sim, faz sentido para garantir que a relação é antissimétrica.

5) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$, então $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$ é a ordenação parcial da relação, pois é classificada como reflexiva, antissimétrica e transitiva.

• Exercício: 9)



6) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$, então $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}$ é a relação de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

7) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$, então $R = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ é um subconjunto de subconjuntos não disjuntos e não vazios de S, classificando a relação, como uma partição do conjunto S.

• Exercício: 14) a) As classes irão conter todas as retas que são paralelas ou coincidentes umas as outras.

b) As classes de equivalência possíveis vão conter um único elemento natural.

c) Nessa relação terá duas classes de equivalência possíveis: a classe de 1, sendo $\{1,2\}$ por ter $(1,2)$ e $(2,1)$ e a classe de 3, sendo $\{3\}$ por ter apenas a $(3,3)$.

8) • Exemplo: Seja $S = \{1,2,3\}$, e $m=2$, tem-se as classes:

1. Classe de congruência de 1: $[1]_2 = \{1,3\}$
2. Classe de congruência de 2: $[2] = \{2\}$

Assim é possível afirmar que têm-se as classes $\{\{1,3\},\{2\}\}$.

• Exercício: 15) Para $m=5$ em $\mathbb{Z}$, obtem-se 5 classes, sendo elas:

$[0]_5=\{\ldots,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}$, $[1]_5=\{\ldots,-9,-4,1,6,\ldots\}$, $[2]_5=\{\ldots,-8,-3,2,7,\ldots\}$, $[3]_5=\{\ldots,-7,-2,3,8,13\ldots\}$, $[4]_5=\{\ldots,-6,-1,4,9,\ldots\}$, assim, cada classe de equivalência contém todos os inteiros que são congruentes entre si módulo 5.