Emil Gedenryd

1.

a) Laplace ger:

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) + 2s Y(s) + Y(s) = 2sU(s) + U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = (2s+1)\, U(s)$$

Svar: $Y(s) = \dfrac{(2s+1)}{(s^3+2s^2+2s+1)}\, U(s)$

b) Undersöker rötter till karaktäristiskt polynom.

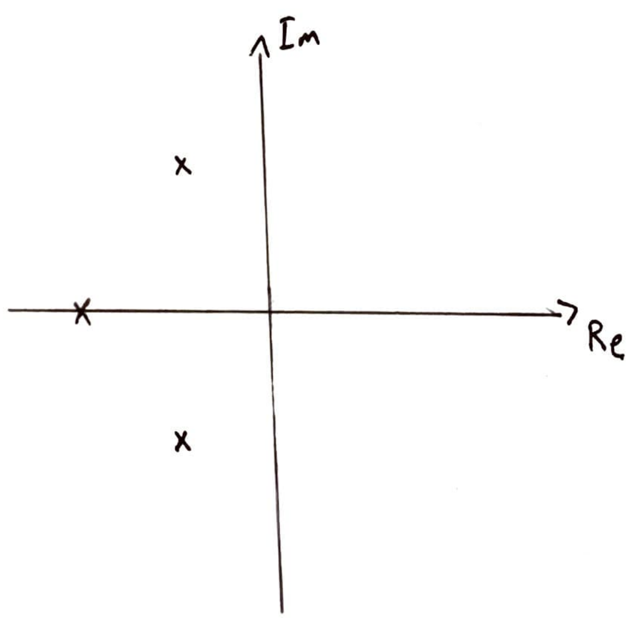
$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

Faktorn $(s+1)$ given:

$$(s+1)(s^2+s+1) = 0$$

Lösning av ekvationen ger rötter (nollställen) i:

-1 och $-0{,}5 \pm 0.87i$



Emil Geberryd

$\boxed{\text{c)}}$

Eftersom alla poler är i vänster halvplan (se figur i förra delupgiften) så är systemet asymptotiskt stabilt.

$\boxed{\text{d)}}$ Eftersom systemet är asymptotiskt stabilt kan vi använda slutvärdes teoremet.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s}$$

$$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(2s+1)}{(s^3+2s^2+2s+1)} = \frac{1}{1}$$

Svar: $\boxed{\text{Stegsvaret är } 1}$

3.5/3.5

Emil Gedenryd

2.

a) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_1 & -x_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1\ 0)\, x$$

b)

$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ (stationärt)

- $\dot{x}_1 = \boxed{x_2 = 0}$

- $\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_1 x_2 + u = -x_1^2 + u$

$\Rightarrow \boxed{x_1^2 = u} \Rightarrow$ oändligt många stationära punkter

$(x_1^0, x_2^0, u^0) = \boxed{(\alpha^2, 0, \alpha)}, \boxed{\alpha > 0}$

c) $x_1^0 = 1$ ger stationär punkt $(1, 0, 1)$

ansätter

$f_1(x_1, x_2, u) = x_2$

$f_2(x_1, x_2, u) = -x_1^2 - x_1 x_2 + u$

$g(x_1, x_2, u) = x_1$

Emil Gedenryd

2 c)

Beräknar partiella derivator

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1 - x_2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

sätter in stationär punkt vilket gör att följande förändringar sker:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2 \quad \& \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

Systemet kan skrivas som:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

2/2.5

Emil Gedenryd

3

a. Bobbys system undersöks med observerbarhets- och styrbarhetsmatriserna.

Obs:

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(W_o) = 0$ innebär att systemet EJ är observerbart.

Styr:

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_s = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(W_s) \neq 0 \Rightarrow$ systemet ÄR styrbart.

Emil Gedenryd

3 $\boxed{b)}$ Bobby har rätt;

Annas tillståndsbeskrivning gäller ett första ordningens system, medan Bobbys beskriver ett andra ordningens system.

Emil Gedenryd

Först är det tydligt att

A och D motsvarar någon av 1 och 2
samt att B och C —"— 3 och 4.
Detta på grund av att 3 och 4
har imaginärdelar, vilket förklarar
översvängningen och den långsammare starten
(andra ordningen).

Av 1 och 2 kommer 2 vara snabbast
eftersom polen är längre ifrån origo,
vilket motsvarar ett lägre T.

Av 3 och 4 kommer 4 ha mest oscillering
eftersom dämpningen är mindre.

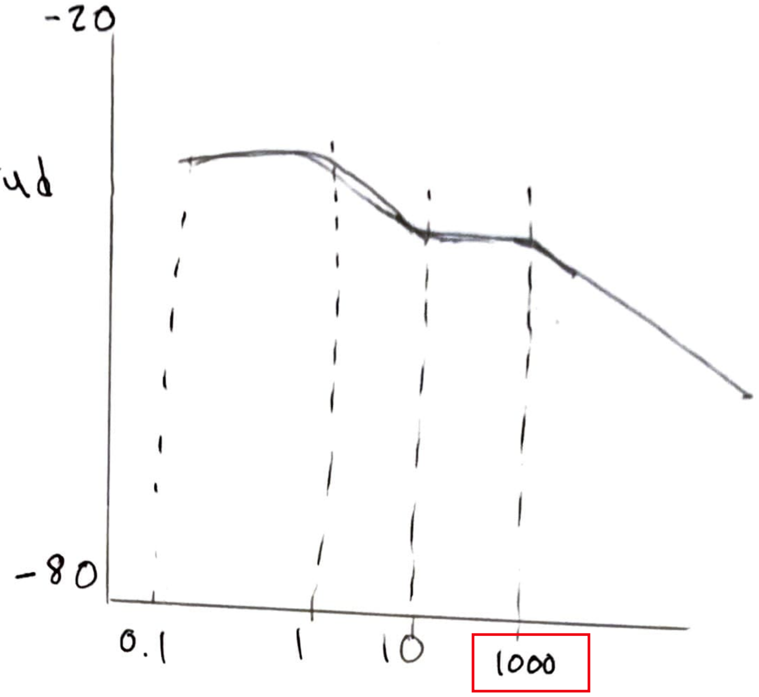
$\zeta = \cos\varphi$

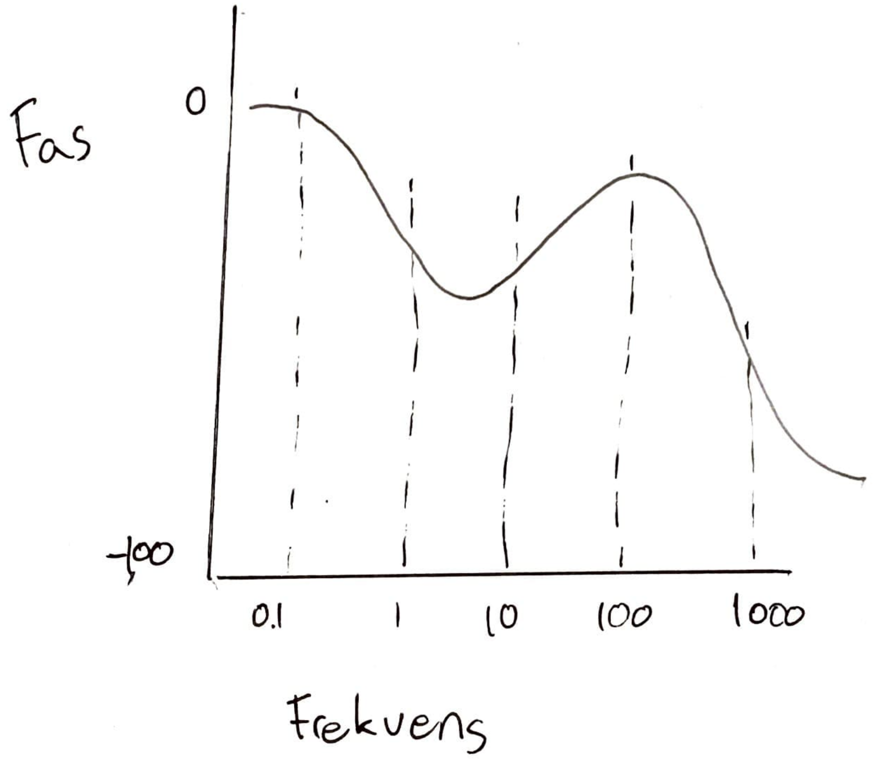
Svar: 1: D 2: A

3: C 4: B

5

Emil Gedenryd





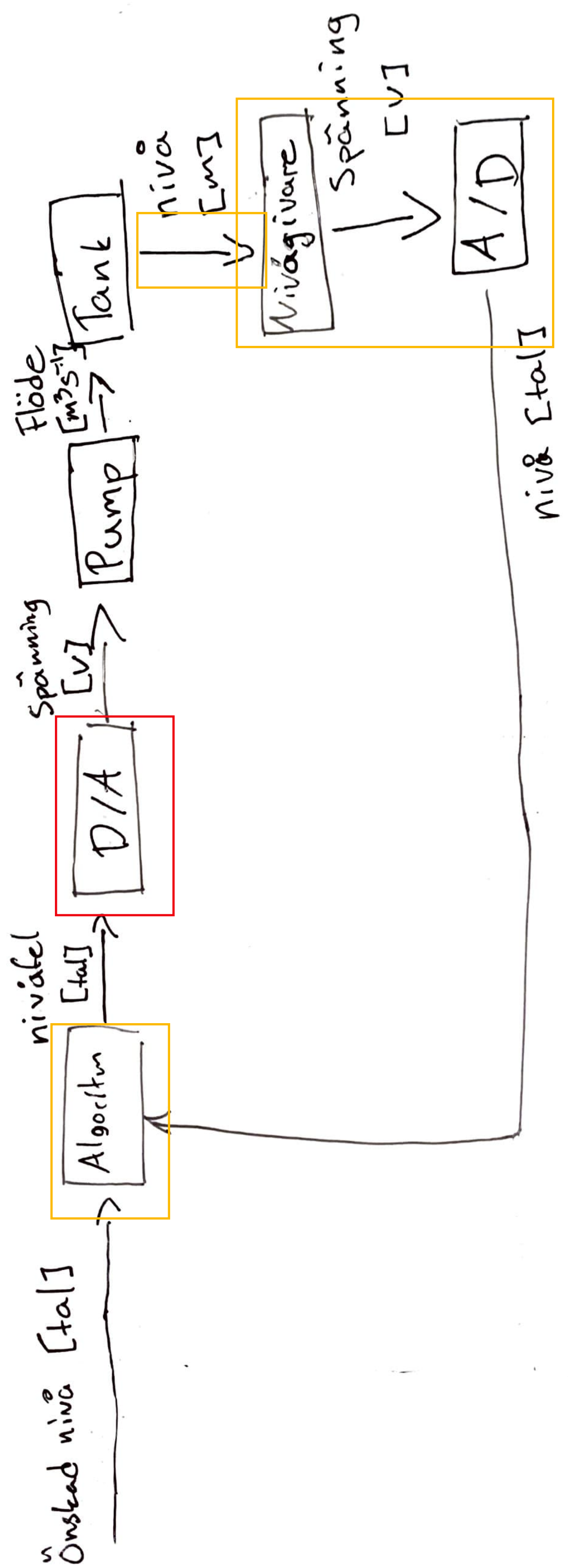
Bode diagram för $G(s) = \dfrac{2(s+10)}{(s+500)(s+1)}$

0/2

Emil Gedenryd

6

a) Block schema system.



6

10/12
Emil Gedenryd

$\boxed{b)}$

$$Y(s) = \frac{G_p(s)\, G_R(s)}{1 + G_p(s)\, G_R(s)} R(s)$$

$$= \frac{\frac{\rho\tau}{\tau s+1} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} e^{-2s}}{1 + \frac{\rho\tau}{\tau s+1} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} e^{-2s}} R(s)$$

$$= \frac{\frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} e^{-2s}}{1 + \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} e^{-2s}} R(s)$$

$\boxed{c)}$

0.5/6

11/12
Emil Gedenryd

7.

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$u = -Lx + l_r r$

Insättning av u

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BLx + Bl_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A-BL)x + Bl_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

Karaktäristiska polynomet ges av

$$\det(sI - (A-BL))$$

$$= \det \begin{pmatrix} 5l_1+s & 0 \\ 0 & 2l_2+s \end{pmatrix} = (5l_1+s)(2l_2+s)$$

Eftersom vi vill ha poler i -5 sätts $l_1 = 1$ och $l_2 = 2,5$

Svar: $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

12/12
Emil Gedenryd

7.b) Eftersom vi vill att hastigheten ska vara 4ggr så stor så sätter vi poler i -20

Karaktäristiska polynomet ges av:

$$\det(sI - A + KC)$$

$$= \det\begin{pmatrix} s+5-2a & 0 \\ 0 & s+2-5 \end{pmatrix}$$

$$= (s+5-2k_1)(s+2-k_2)$$

Eftersom vi vill ha poler i -20 sätter vi $k_1 = -7{,}5$ och $k_2 = -18$

$$\boxed{\text{Svar: } k = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -18 \end{pmatrix}}$$