

Modellierung und Simulation I

Robin Schmidt
Zusammenfassung

December 9, 2018

Contents

1	Statistische Grundlagen	3
1.1	Zufallsereignis und Wahrscheinlichkeit	3
1.2	Verteilungsfunktion und -dichtefunktion	4
1.3	Statistische Größen	4
1.4	Verteilungen	5
1.5	p-Quantil	8
1.6	Statistische Größen von Stichproben	9
1.7	Erzeugung von Zufallsgrößen	9
1.8	Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen	10
1.9	Messobjekte in Simulationen	10
2	Einführung in die Simulationstechnik	11
2.1	Klassifikationen von Simulationsmodellen	11
2.2	Notation	11
2.3	Discrete Event Simulator (DES)	12
3	Aufbereitung von Stichproben	13
3.1	Konfidenzintervalle	13
4	Statistische Auswertung von Simulationen	13
4.1	Absolute Fehler	14
4.2	Relative Fehler	14
4.3	Arten von Simulationen	14
4.4	Methoden zur Bestimmung der transienten Phase	14
4.5	Stichprobentheorie für korrelierte Zeitreihen	15
4.5.1	Batch-Means Verfahren	15
4.5.2	Replicate-DeleteVerfahren	15
4.6	Ensemble-Mittel & ergodische Prozesse	16
4.7	Gleichzeitiges Schätzen mehrerer Konfidenzintervalle	17

5	Stochastische Prozesse	17
5.1	Markov-Prozess	17
5.2	Rekurrenzzeit	17
5.3	Poisson-Prozess	18
6	Discrete-Time Markov Chains (DTMCs)	18
7	Continuous-Time Markov Chains (CTMCs)	18
7.1	Loss model $M/M/3$	19
7.2	Loss System $M/M/n - 0$	19

1 Statistische Grundlagen

1.1 Zufallseignis und Wahrscheinlichkeit

Relative Häufigkeit für A_i : $h(A_i) = \frac{n_i}{n}$
Wahrscheinlichkeit A_i : $P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}$

Hierbei gilt: n Experimente; A_i ausgewähltes Merkmal; n_i Anzahl der Experimente bei denen A_i festgestellt wird.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A_i) = \frac{m_i}{m}$$

Mit m Anzahl aller Alternativen und m_i Anzahl der Alternativen für A_i .

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \quad , \quad \text{d.h.} \quad P(A|B) \geq P(A, B)$$

Simpson Paradoxon

Eigenschaften einer Gesamtmenge stehen mindestens teilweise im Widerspruch zu den Eigenschaften der Teilmengen.

Statistische Unabhängigkeit

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{oder} \quad P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dann gilt: $A \perp B$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten und Bayes

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) \cdot P(A_j)} \end{aligned}$$

Zufallsvariablen

Diskret: $X \in \{2, 3, \dots, 12\}$

Kontinuierlich $X \in (150ms, 700ms]$

1.2 Verteilungsfunktion und -dichtefunktion

Verteilungsfunktion

Sei A eine beliebige Zufallsvariable dann gilt für die Verteilungsfunktion:

$$A(t) = P(A \leq t)$$

$$A(-\infty) = 0$$

$$A(\infty) = 1$$

$$A^c(t) = P(A > t) = 1 - A(t)$$

Verteilungsdichtefunktion

Verteilungsdichtefunktionen sind nur bei kontinuierlichen Zufallsvariablen anwendbar:

$$a(t) = \frac{d}{dt}A(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)dt = 1$$

1.3 Statistische Größen

Erwartungswert

Hierbei sei x_i der Wert mit der Wahrscheinlichkeit p_i und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$:

$$\text{Diskret: } E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$$

$$\text{Kontinuierlich: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Momente

Es sei X eine Zufallsvariable und k eine natürliche Zahl. Dann bezeichnet man als Moment der Ordnung k von X oder kürzer als k -tes Moment von X den Erwartungswert der k -ten Potenz von X :

$$m_k := E(X^k)$$

Hierbei gilt auch wieder die Definition des Erwartungswertes nach Art der Zufallsvariable (diskret, kontinuierlich). Es gibt ebenfalls die zentralen Momente, bei denen die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse um den Erwartungswert $\mu = E(X)$ der Zufallsvariablen X betrachtet wird:

$$\mu_k := E((X - \mu)^k)$$

Über diese zentrale Momente lassen sich weitere statistische Größen darstellen.

Varianz (k=2)

Das zweite zentrale Moment ist die Varianz:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E((X - E(x))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2\end{aligned}$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung besitzt die Einheiten der ursprünglichen Verteilung:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient macht nur für positive X Sinn, denn sonst kann der Mittelwert $E(X)$ null oder negativ werden.

$$c_{var}(X) = \frac{\text{Standardabweichung}(X)}{\text{Erwartungswert}(X)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

1.4 Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen:

$$x(i) = \begin{cases} 1-p & i=0 \quad (\text{Misserfolg}) \\ p & i=1 \quad (\text{Erfolg}) \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_i i \cdot x(i) = p$$

$$E(X^2) = \sum_i i^2 \cdot x(i) = p$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p \cdot (1 - p)}$$

$$c_{var}(X) = \frac{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}{p} = \sqrt{\frac{(1 - p)}{p}}$$

Binomial-Verteilung

n Bernoulli-Versuche:

$$x(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Negative Binomial-Verteilung

Beschreibt die Anzahl der Versuche, die erforderlich sind, um in einem Bernoulli-Prozess eine vorgegebene Anzahl von Erfolgen zu erzielen.

$$p(k) = \binom{s+k-1}{k} \cdot p^s \cdot (1-p)^k = \binom{-s}{k} \cdot p^s \cdot (-(1-p))^k$$

Geometrische Verteilung

Anzahl von Fehlversuchen bei wiederholten Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p bis zum ersten Erfolg:

$$\begin{aligned} x(i) &= (1-p)^i \cdot p \\ E(X) &= \frac{(1-p)}{p} \\ E(X^2) &= \frac{(1-p)^2 + (1-p)}{p^2} \\ Var(X) &= \frac{(1-p)}{p^2} \\ \sigma(X) &= \frac{\sqrt{(1-p)}}{p} \\ c_{var}(X) &= \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{(1-p)}}{p} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \end{aligned}$$

Exponentielle Verteilung

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{VF : F(x)} = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\begin{aligned} E(A) &= \int_0^{\infty} t \cdot a(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt \\ &= [t \cdot (-e^{-\lambda \cdot t})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda \cdot t}) dt = 0 - 0 - \left(\frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda \cdot t}]_0^{\infty} \right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

$$E(A^2) = \int_0^{\infty} t^2 \cdot a(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \dots = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}}$$

$$VAR(A) = E(A^2) - E(A)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

$$c_{var}(A) = \frac{\sigma(A)}{E(A)} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = \boxed{1}$$

Exponentiell verteilte Zwischenankunftszeiten ergeben einen Poisson-Prozess:

Poisson-Verteilung

Anzahl der Ankünfte eines Poisson-Prozesses (= exponentielle Zwischenankunftszeiten) mit Rate λ in einem Intervall der Länge τ und $y = \lambda \cdot \tau$

$$p(k) = \frac{y^k}{k!} \cdot e^{-y}$$

$$E(x) = y$$

$$Var(x) = y$$

$$c_{var}(x) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Erlang-Verteilung

Zufallsvariable ist Summe von k exponentiell verteilten Zufallsvariablen:

$$\text{VDF: } f(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{VF: } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum_{0 \leq i < k} \frac{(\lambda x)^i}{i!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = k/\lambda$$

$$\text{VAR}(X) = k/\lambda^2$$

$$c_{var}(X) = 1/\sqrt{k}$$

1.5 p-Quantil

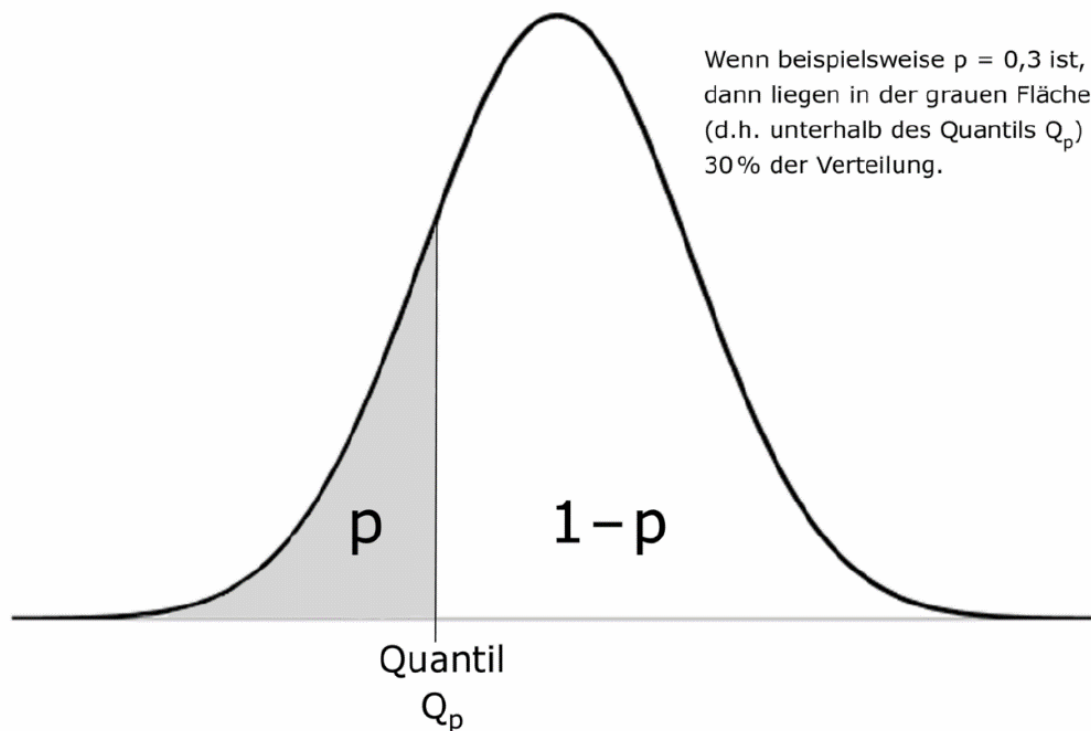


Figure 1: p-Quantil (t_p) oder Q_p

Das 0.5-Quantil heißt Median, dieser kann aussagekräftiger als der Mittelwert sein, wenn dieser durch Ausreißer stark beeinflusst wird. Das 0.25 bzw. das 0.75-Quantil heißt unteres bzw. oberes Quantil.

1.6 Statistische Größen von Stichproben

Allgemeine empirische Momente

$$\overline{X^k} = \begin{cases} \overline{X^k}(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} X_i^k & \text{für zeitdiskreten Prozess} \\ \overline{X^k}(T) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t)^k dt & \text{für zeitkontinuierlichen Prozess} \end{cases}$$

Empirischer Mittelwert

$$\overline{X} = \overline{X^1}$$

Empirische Varianz

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{X^2} - \overline{X^1}^2) \quad \text{für zeitdiskreten Prozess}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - \overline{X})^2 dt = \overline{X^2} - \overline{X^1}^2 \quad \text{für zeitkontinuierlichen Prozess}$$

1.7 Erzeugung von Zufallsgrößen

Inversionsmethode

Transformation von z_i in eine Stichprobe x_i gemäß der Verteilungsfunktion $F(x)$:

$$z_i = F(x_i) \rightarrow x_i = F^{-1}(z_i)$$

Beispiel: Exponentielle Verteilungsfunktion

$$z_i = F(x_i) = 1 - e^{-\lambda \cdot x_i} \rightarrow x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(z_i^*)$$

Accept-Reject-Methode

Erzeuge eine Zufallszahl und generiere eine Stichprobe Y , erzeuge eine weitere Zufallszahl und ermittle dadurch, ob Y als gesuchte Stichprobe X genommen werden kann.

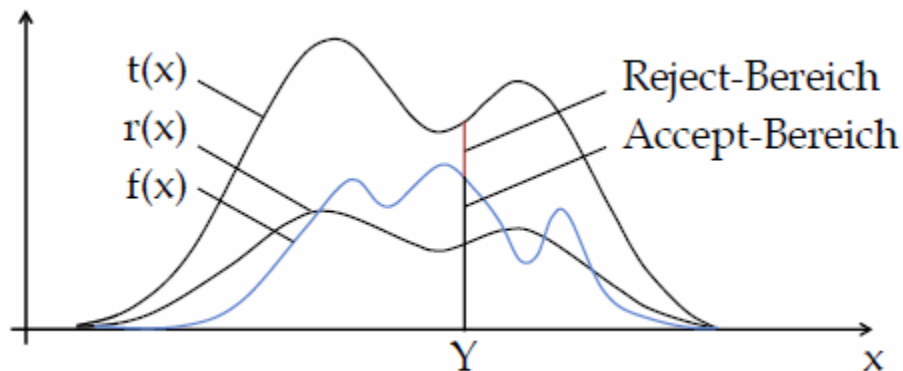


Figure 2: Accept-Reject-Methode

1.8 Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gibt an, ob sich diese tendenziell ähnlich verhalten bezüglich ihrer Abweichungen von ihrem jeweiligen Mittelwert. Die Korrelation ist die normierte Kovarianz. Kovarianzen können für Zufallsvariablen und für geordnete Stichproben (Zeitreihen) berechnet werden. Die Autokovarianz einer Zeitreihe zum Abstand j gibt an, ob sich mit Abstand j aufeinanderfolgende Werte einer Zeitreihe tendenziell ähnlich verhalten. Die normierte Autokovarianz nennt sich Autokorrelation. Sie kann durch Messobjekte gemessen werden.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ \text{Cor}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{VAR}(X) \cdot \text{VAR}(Y)}}\end{aligned}$$

Sind zwei Zufallsvariablen unabhängig voneinander ist die Kovarianz gleich Null, aber nicht umgekehrt!

Empirische Kovarianz und Korrelation zweier Zeitreihen

Für den diskreten Fall ist die Kovarianz gegeben als:

$$\overline{COV}[X, Y] = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{0 \leq i < n} (X_i - \bar{X}(n)) \cdot (Y_i - \bar{Y}(n))$$

Für den kontinuierlichen Fall ist die Kovarianz definiert als:

$$\overline{COV}[X, Y] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (X(t) - \bar{X}) \cdot (Y(t) - \bar{Y}) dt$$

Autokovarianz und Autokorrelation einer Zeitreihe

Die empirische Autokorrelation $\rho_j(n)$ ist definiert als folgende Gleichung, welche die empirische Autokovarianz $\hat{C}_j(n)$ für den diskreten Fall oder $\hat{C}_u(T)$ für den kontinuierlichen Fall enthält:

$$\begin{aligned}\rho_j(n) &= \frac{\hat{C}_j(n)}{S^2(n)} \\ \hat{C}_j(n) &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i < n-j} [X_i - \bar{X}] [X_{i+j} - \bar{X}] \\ \hat{C}_u(T) &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{T-u} (X(t+u) - \bar{X}) \cdot (X(t) - \bar{X}) dt\end{aligned}$$

1.9 Messobjekte in Simulationen

In Simulationsprogrammen werden Statistikobjekte angelegt, denen im Laufe einer Simulation Stichproben mit Zeitstempel zur Auswertung übergeben werden. Es gibt diskrete und zeitkontinuierliche Messwerte.

Discrete Counters

Beispiele: Wartezeiten, Paketgrößen, Zwischenankunftszeiten

$$\text{Datenhaltung: } \sum_{i=0}^N x_i^k$$

Histogramm enthält m Zielintervalle (bins) einer Zählvariable. Bei großen m ist die Form unregelmäßig, während bei kleinen m Informationsverlust auftritt.

Lösung: m Anfangs groß, aggregiere benachbarte bins, so lange bis ein "vernünftiges" Bild eintritt

Continuous Counters

Beispiel: Warteschlange (Mittlere Warteschlangenlänge), Prozessoreinheit (Auslastung)

$$\text{Datenhaltung: } \Sigma^k = \sum_{0 \leq i < n} (X_i)^k \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Außerdem: Beginn der Datenerfassung t_{start} , Zeit der letzten Stichprobenübergabe t_{last} , letzte übergebene Stichprobe X_{last} , Ende der Datenerfassung t_{stop} .

2 Einführung in die Simulationstechnik

2.1 Klassifikationen von Simulationsmodellen

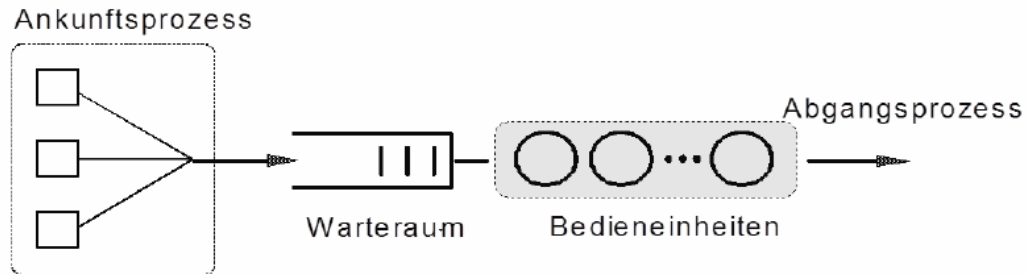
Deterministisch: System enthält keine zufallsabhängigen Komponenten (Differentialgleichungen zur Beschreibung chemischer Reaktion), **Stochastisch:** Systemverhalten wird durch zufällige Ereignisse beeinflusst (Warteschlangen- oder Lagerhaltungssysteme).

Kontinuierlich: Systemzustände ändern sich kontinuierlich (chemische Reaktionen, Differentialgleichungssysteme), **Diskret:** Systemzustände ändern sich an diskreten Zeitpunkten (Lagerhaltungssysteme).

Statisch: System nur an einem Zeitpunkt betrachtet oder Zeit spielt keine Rolle (Monte-Carlo-Simulation, Auswürfeln von Snapshots mit nachfolgender deterministischer Auswertung), **Dynamisch:** Modell repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (Simulation von Warteschlangen).

2.2 Notation

General independent (GI), Deterministisch (D), Markov (M), Erlang-k verteilt (E_k), Hyperexponentiell k-ter Ordnung H_k :



$GI^{[X]}/GI/n-S$ (Kendall-Notation)

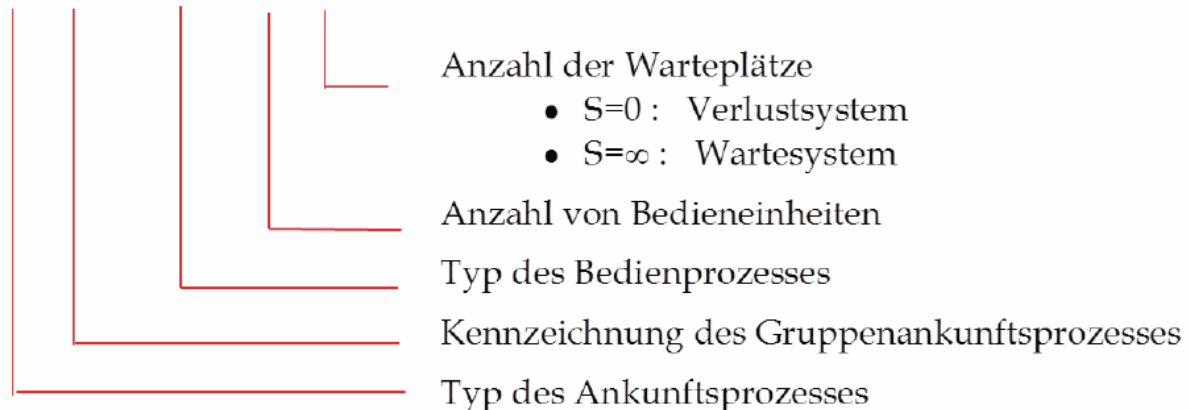


Figure 3: Notation für einstufige Warteschlangenmodelle

2.3 Discrete Event Simulator (DES)

The discrete event simulation (DES) has various components, which work together to successfully simulate discrete events. These components include the simulation clock, events, statistic counters and the main program.

The simulation clock shows the current system time. Here the real time needs to be converted to the corresponding simulation time. Events are associated with a discrete simulation time, at which the event runs his corresponding event routine. An event routine leads to an action in the system which can influence for example the system state. All events are managed in an event chain (event queue). Statistic counters contain information about the system, which can be for example packet sizes or queue lengths.

The first step in the main program is to initialize the system state, containing variables, lists and queues. After everything is initialized the event chain gets executed. During this process the next event in the event chain gets selected, the simulation time gets forwarded to the event time and finally the event routine gets executed. While the event chain is being executed, the size of the chain is always greater than 1 because of the terminating stop event. Once the termination event is reached, the simulation process terminates.

3 Aufbereitung von Stichproben

Konfidenzintervalle geben an, wie genau die Stichprobe den wahren Mittelwert schätzt.

Standardabweichungen und Quantile geben an, wie stark eine Stichprobe streut.

3.1 Konfidenzintervalle

Zentral gilt für Konfidenzintervalle:

$$Z_n \approx \frac{\bar{X}(n) - E[X]}{\sqrt{S^2(n)/n}}$$

Mit zunehmender Stichprobengröße kann das Konfidenzintervall verkleinert werden. Standardabweichung hängt von der Verteilung von $X(a)$ ab und kann nicht verkleinert werden.

Für hinreichend große n gilt, mit einer statistischen Sicherheit (=Wahrscheinlichkeit) von $1 - \alpha$ (Konfidenzniveau) liegt eine Stichprobe Z_n im Konfidenzintervall $[-z_{1-\alpha/2}; +z_{1-\alpha/2}]$. Hierbei ist α das Signifikanzniveau:

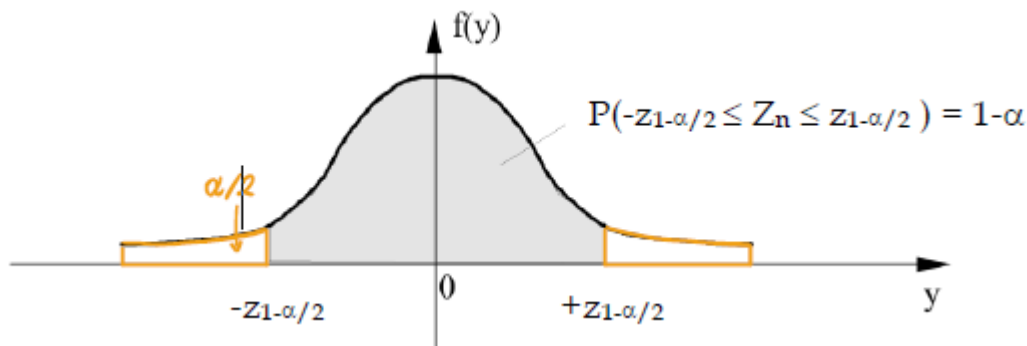


Figure 4: Konfidenzintervall für große n

Für einen kleinen Stichprobenumfang mit n Elementen wird die Student-t Verteilungsfunktion herangezogen mit $n - 1$ Freiheitsgraden. Diese ist etwas flacher als die Standard-Normalverteilung und besitzt eine größere Varianz. Die Verteilungsdichtefunktion der Student-t Verteilung lautet:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

4 Statistische Auswertung von Simulationen

Je kleiner das Konfidenzintervall, desto genauer die Schätzung. Dieser Prozess benötigt viele Stichproben und damit eine lange Simulation, deswegen besteht die Frage, wie lange man simulieren sollte.

4.1 Absolute Fehler

$\bar{X}(n)$ ist der geschätzte und μ der tatsächliche Mittelwert der absolute Fehler ist:

$$|\bar{X}(n) - \mu|$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ gilt, dass der wahre Mittelwert μ im Konfidenzintervall liegt:

$$[\bar{X}(n) - \delta(n, \alpha); \bar{X}(n) + \delta(n, \alpha)]$$

Der absolute Fehler ist kleiner als die Halblänge des Konfidenzintervalls $\delta(n, \alpha)$.

4.2 Relative Fehler

$$\gamma = \frac{|\bar{X}(n) - \mu|}{|\mu|} \cdot 100\%$$

Mit Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \alpha$ gilt:

$$|\bar{X}(n) - \mu| \leq \delta(n, \alpha) \text{ und } |\mu| \geq |\bar{X}(n) - \delta(n, \alpha)|$$

4.3 Arten von Simulationen

Generell wird unterschieden in terminierende Simulationen (begrenzte Simulationsdauer aufgrund des Modells, z.B. 8h Tag, Aussagen über Systemgrößen, Maße auf Simulationsdauer) und nicht terminierende Simulationen (Langzeitverhalten von Fabrikanalgen, Aussagen über Langzeitverhalten von Systemgrößen Durchsatz, Warteschlangengrößen etc.). Bei nicht terminierenden Simulationen ist die Anfangsphase (transiente Phase) nicht relevant, da sie einen untypischen Systemzustand darstellt.

4.4 Methoden zur Bestimmung der transienten Phase

Eine Verteilung Y_i ist stationär, wenn sie der Verteilung Y_k gleicht für alle $k > 1$.

I Naive Methode

Parallele Simulationen erzeugen Ausprägungen Y_i , Erstellung von Histogrammen für alle Y_i . Das statistische Gleichgewicht ist erreicht wenn sich das Histogramm von Y_i nicht von dem Y_{i+1} unterscheidet.

Problem: Hoher Simulationsaufwand

II Graphisches Verfahren von Welch

Messwerte aus n relativ langen Testläufen. Hierbei ist x_i^j der Messwert i im Lauf j :

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n X_i^j}{n}$$

Bestimme Index i ab dem die Messreihe konvergiert, dies beschreibt das Ende der transienten Phase und wird bei "richtigen" Simulationen übersprungen:

$$\bar{X}(m, i) = \frac{\sum_{j=i+1}^m X_j}{m - i}$$

Falls die transiente Phase nicht erkennbar ist wird ein sogenanntes "moving average" verwendet.

4.5 Stichprobentheorie für korrelierte Zeitreihen

Hierbei ist n die Größe der Stichprobe, für positiv korrelierte Zeitreihe gilt $c > 1$, für unabhängige Zeitreihen gilt $c = 1$.

$$E[S^2(n)] = \text{VAR}[X] \cdot \frac{n - c}{n - 1}$$
$$\text{VAR}[\bar{X}(n)] = \frac{\text{VAR}[X]}{n} \cdot c$$

4.5.1 Batch-Means Verfahren

Variante A: Stichproben liegen vor

Entfernung der transienten Phase, Einteilung der Messwerte in n batches (Intervalle) der Größe m , Berechnung der Konfidenzintervalle basierend auf den Mittelwerten der Messwerte in den jeweiligen Batches.

Variante B: Stichproben müssen noch erzeugt werden

Simulation von Stichproben bis Konfidenzintervalle klein genug sind hinsichtlich des relativen oder absoluten Fehlers. Transiente Phase bestimmen, Wahl eines geeigneten m , Simulation so vieler Batches bis Konfidenzintervalle klein genug sind.

4.5.2 Replicate-DeleteVerfahren

Transiente Phase bestimmen, Läufe durchführen (Replicate), Länge: Vielfaches der transienten Phase, Messwerte der transienten Phase abschneiden (Delete). Nachteile sind die korrekte Bestimmung des Endes der transienten Phase hat großen Einfluss auf die Güte der Ergebnisse und hoher Aufwand durch die Simulation vieler ungenutzter transienter Phasen.

4.6 Ensemble-Mittel & ergodische Prozesse

Hierbei sind $X_i(t)$ unterschiedliche Realisierungen des stochastischen Prozesses zum Zeitpunkt t :

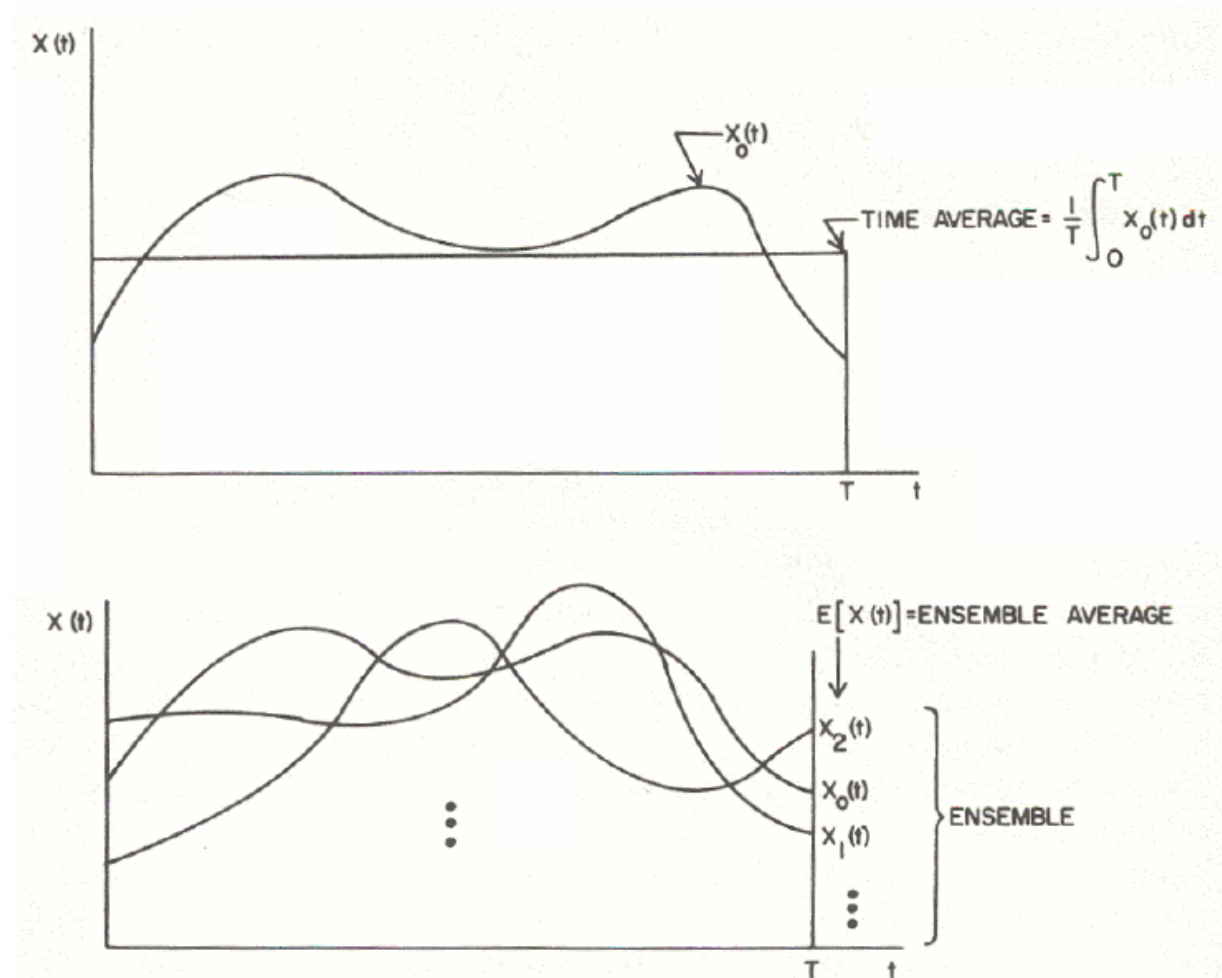


Figure 5: Ensemble-Mittel

Die Formel ergibt sich wie folgt:

$$E[X^k(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{0 \leq i < n} [X_i(t)]^k}{n}$$

Ein stochastischer Prozess ist ergodisch für das k -te Moment, falls gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_k(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{X_T^k} = \overline{X^k}$$

Ein stochastischer Prozess ist ergodisch, falls er für alle Momente ergodisch ist.

Beispiel: nicht ergodische Prozesse

n Quellen von Kunden, Zwischenankunftszeit zwischen Kunden einer Quelle ist konstant:

Wartesysteme ($n \cdot D/D/m - \infty$), Warteverlustsysteme ($n \cdot D/D/m - S$.)

Beispiel: ergodische Prozesse

Zufällige und unabhängige Ankunfts- und Bedienzeiten: Wartesysteme ($GI/GI/n - \infty$), Warteverlustsysteme ($GI/GI/n - S$)

4.7 Gleichzeitiges Schätzen mehrerer Konfidenzintervalle

Beispiel: $n = 4$ und $\alpha_i = 10\%$ ergibt:

$$\prod_{0 \leq i < n} (1 - \alpha_i) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \approx 0.65$$

Bonferroni-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq i < n} (1 - \alpha_i) &\geq \max \left(1 - \sum_{0 \leq i < n} \alpha_i, 0 \right) \\ &= 1 - (0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1) = 0.6 \end{aligned}$$

5 Stochastische Prozesse

Eine Menge $\{t, X_t\}$ ist ein stochastischer Prozess, wenn $t \in \mathcal{T}$ (Indexmenge, Zeit) und $X_t \in \delta$ (Zustandsmenge). Grundsätzlich lässt sich noch unterscheiden in zustandskontinuierliche und zustandsdiskrete stochastische Prozesse, sowie zeitdiskrete und zeitkontinuierliche stochastische Prozesse.

5.1 Markov-Prozess

Markov-Eigenschaft (Gedächtnislosigkeit): das zukünftige Verhalten des Prozesses hängt nur von seinem Zustand ab und insbesondere nicht davon, wie er sich in der Vergangenheit entwickelt hat.

Beispiele für Markov-Prozesse: Ankunftsprozess als Zustandsprozess; Zustandsprozess, der unerledigte Arbeit im System charakterisiert

Prozesse ohne diese Markov-Eigenschaft: Autoregressiver Prozess; Ankunftsprozess ohne Prozesszustand

5.2 Rekurrenzzeit

The inter-arrival time A is the time between arrival instants, the backward recurrence time R_b is the time to the previous arrival instant, the forward recurrence time R_f is the time to the next arrival instant.

For $c_{var}(A) < 1$ the mean recurrence time $E(R)$ is smaller than the mean inter-arrival time $E(A)$ (which is essentially: $E(R) < E(A)$). For a $c_{var}(A) > 1$ the mean recurrence time $E(R)$ is larger than the mean inter-arrival time $E(A)$ (which is essentially: $E(R) > E(A)$).

5.3 Poisson-Prozess

Erneuerungsprozess mit exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten ($A(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$). Wegen des obigen Phänomens bedeutet das, dass beim Poisson-Prozess zu jedem Zeitpunkt die Zeit bis zur nächsten "Ankunft" wieder exponentiell und sogar identisch verteilt ist. Dafür ist es insbesondere egal, wann die letzte Ankunft stattfand. Darum ist der Poisson-Prozess gedächtnislos und besitzt somit die Markov-Eigenschaft.

6 Discrete-Time Markov Chains (DTMCs)

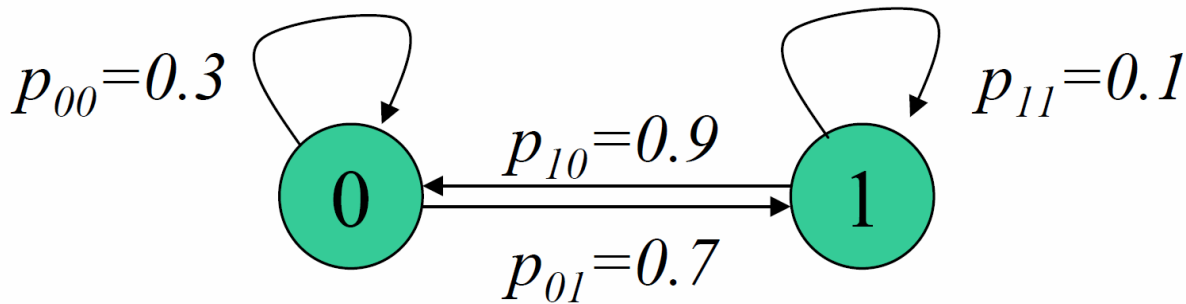


Figure 6: Markov Kette Beispiel

Die Summe über Zeilen der State transition matrix ist 1, da es sich hierbei um eine stochastische Matrix handelt. Um die state distribution nach der transition i herauszufinden wird $x_{i+1} = x_i \cdot P$ verwendet.

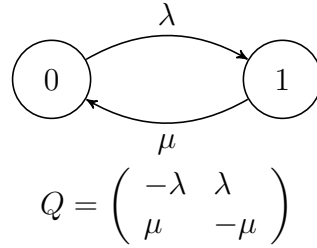
$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (1, 0), x_1 = (0.3, 0.7), x_2 = (0.72, 0.28)$$

Oszillieren innerhalb einer markov Kette tritt auf, wenn alle Zustände eine Periode p haben (Sie können nur nach vielfachen von p wieder erreicht werden). Die Periode p der Markov Kette ist dann der größte gemeinsame Teiler aller Perioden der Zustände.

7 Continuous-Time Markov Chains (CTMCs)

Ankunftszeit: $A(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$ und Bedienzeit: $B(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$



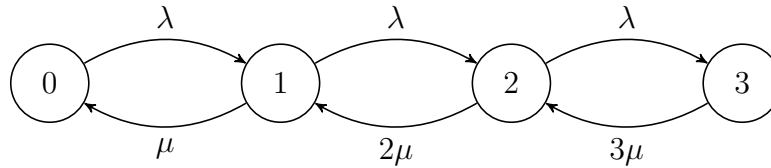
Generell ist die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand i zu einem Zustand j definiert als:

$$\frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{ik}}$$

Ein "Birth-Death Process" ist ein Markov Prozess, welcher oftmals einen eindimensionalen Zustandsraum besitzt. Zustandsübergänge sind nur zwischen benachbarten Zuständen.

7.1 Loss model $M/M/3$

Zustand zeigt die Anzahl der belegten Bedieneinheiten:



7.2 Loss System $M/M/n - 0$

Die Erlang Formel, mit der angebotene Last $a = \frac{\lambda}{\mu}$ (pseudo unit: Erlang (Erl)), zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$x(i) = \frac{\left(\frac{a^i}{i!}\right)}{\sum_{0 \leq k \leq n} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}, i = 0, \dots, n$$

Die Erlang B Formel, folgt der PASTA Regel: "Poisson Arrivals See Time Averages" zur Berechnung der Blocking Wahrscheinlichkeit: $p_B = x(n)$.

Die relative offered load ρ und die utilization ρ_u sind gegeben als:

$$\rho = \frac{a}{n}$$

$$\rho_u = \frac{a \cdot (1 - p_B)}{n}$$