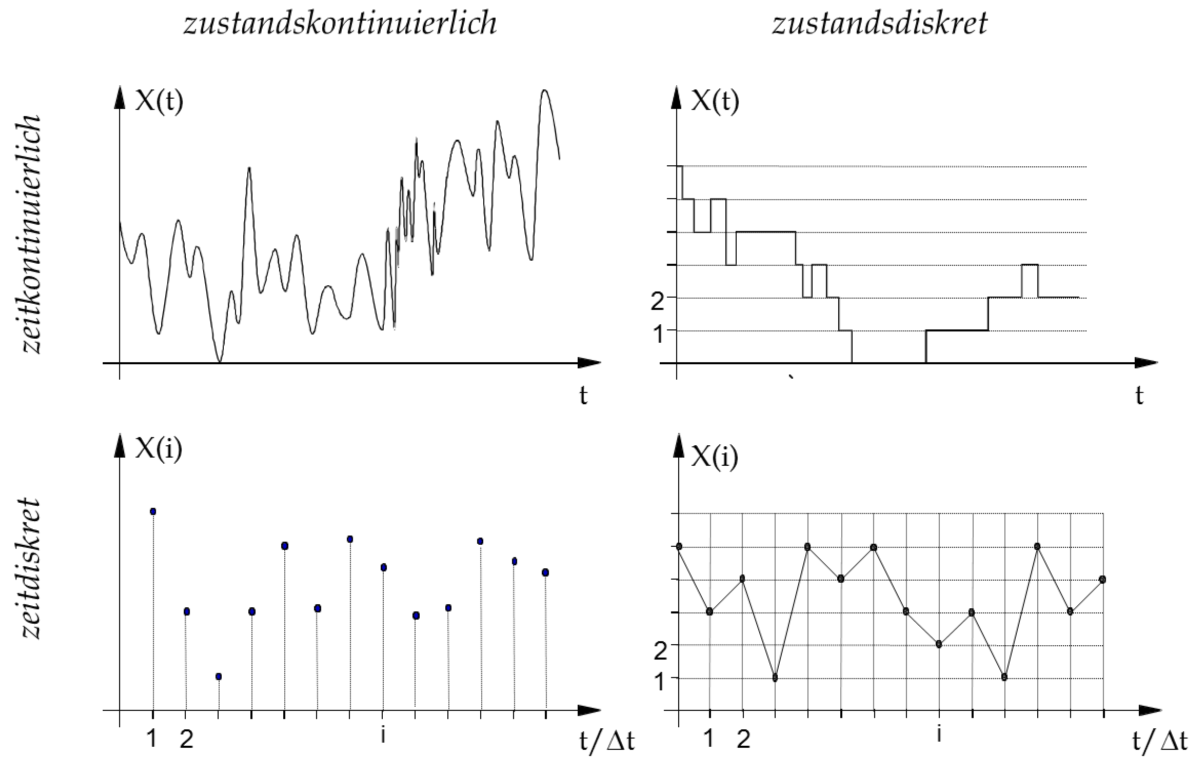
7 Stochastische Prozesse

7.1 Definition

- $\{t, X_t\}$ oder $\{t, X(t)\}$ ist ein stochastischer Prozess, wobei t $\epsilon\, \mathcal{T}$ (Indexmenge (Zeit), i.d.R. $\mathbb{N}_0, \mathbb{R}^+$) und $X(t)\, \epsilon\, \mathcal{S}$ (Zustandsmenge).
  - Beispiel: $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \ldots$ mit $x_i\, \epsilon\, \mathcal{S}$
- Die Indexmenge kann sein
  - zeitkontinuierlich oder zeitdiskret
- Der Zustandsraum kann sein
  - wertkontinuierlich oder wertdiskret
  - endlich oder unendlich
  - ein- oder mehrdimensional
- Das Verhalten des Prozesses kann evtl. durch stochastische Gleichungen beschrieben werden.
- Beispiele



7.2 Beispiele von Prozessen

7.2.1 Autoregressiver Prozess (AR)

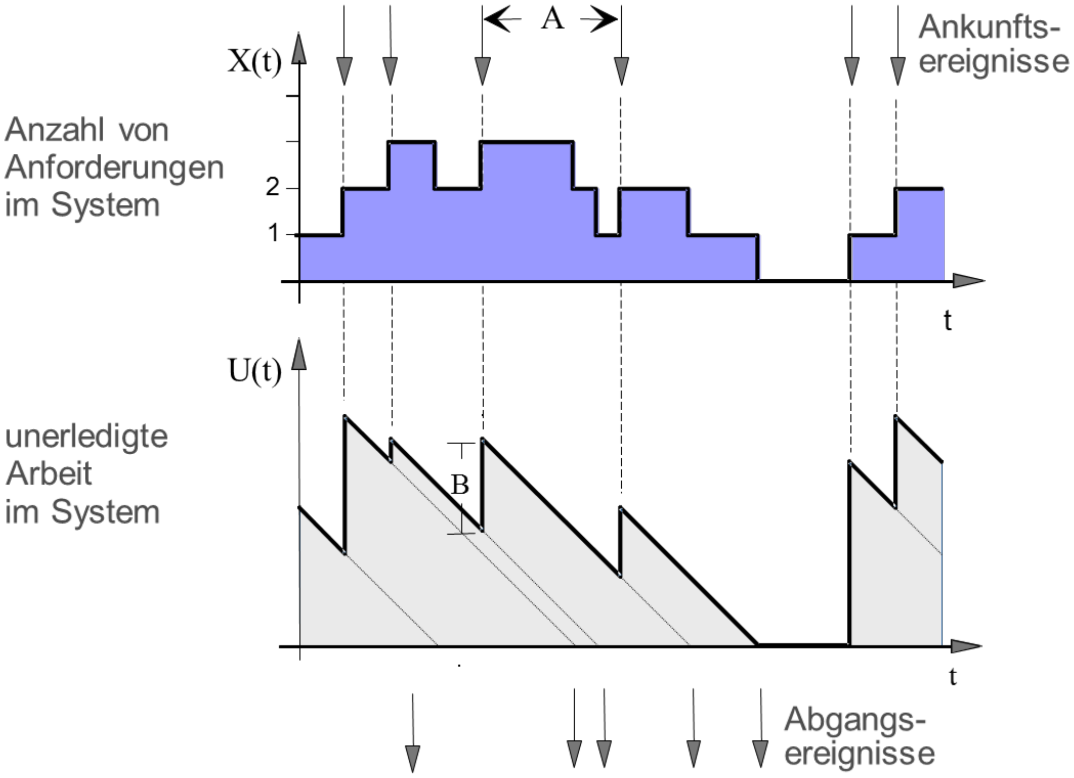
Erzeugungsvorschrift: $X_i = \mu + \left(\sum_{0<k\le p} \phi_k \cdot (X_{i-k} - \mu) \right) + \varepsilon_i$

- p: Ordnung des Prozesses (=Anzahl berücksichtigter Vorgänger-ZVs)
- μ: Mittelwert der X_i
- ε_i: normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0
- ϕ_k: Gewichtungskoeffizienten mit $\sum_{0<k\le p} \phi_k = 1$

Es gibt noch viele andere, ähnliche stochastische Prozesse. Literatur dazu findet man unter dem Stichwort „Zeitreihen" (R. Schlittgen, B. Streitberg: Zeitreihenanalyse, Oldenbourg, 1995)

7.2.2 Zustandsprozess

- Zustand des Prozesses beschreibt Zustand eines realen Systems
- Weitere Entwicklung des Prozesses evtl. vom Systemzustand abhängig
- Oft unterschiedliche Beschreibungen des gleichen Systems mit unterschiedlichen Eigenschaften (siehe Markov-Prozess).



7.2.3 Punktprozess

- Endliche oder abzählbar unendliche Folge von zufälligen Zeitpunkten bzw. Ereignissen auf der reellen Zeitachse
- Abstand zwischen t_i und t_{i+1} ist beschrieben durch $A_i = t_{i+1} - t_i$ (Zwischenankunftszeit)
- A_i müssen nicht durch eine einzige Verteilungsfunktion A(t) beschrieben werden können
- Zeitkontinuierlich
    - Einzelankünfte
- Zeitdiskret
    - Einzelankünfte falls P(A=0)=0
    - Gruppenankünfte falls P(A=0)>0

7.2.4 Erneuerungsprozess

- Spezialfall eines Punktprozesses
- Unabhängig und identisch verteilte Zwischenankunftszeiten (independently and identically distributed, iid)
- Falls P(A=0)>0, dann geometrisch verteilte Gruppengröße; warum?

7.2.5 Ankunftsprozess

- Markiert Zeitpunkte von Ankünften (z.B. Anforderungen in einem System)
- Es kann Einzel- oder auch Gruppenankünfte geben
- Die Größe der Gruppe kann zufällig sein

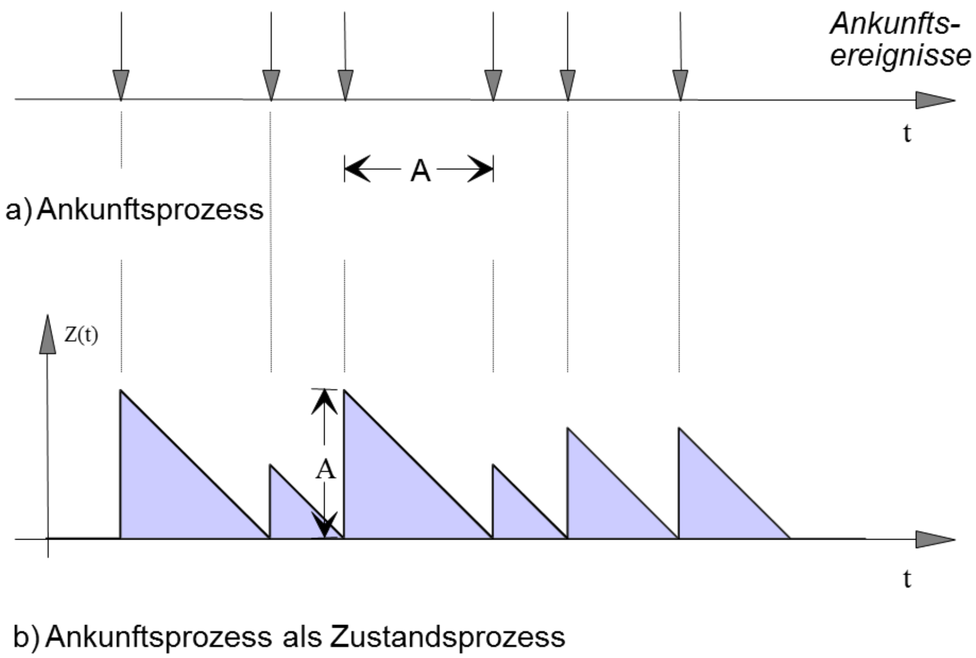
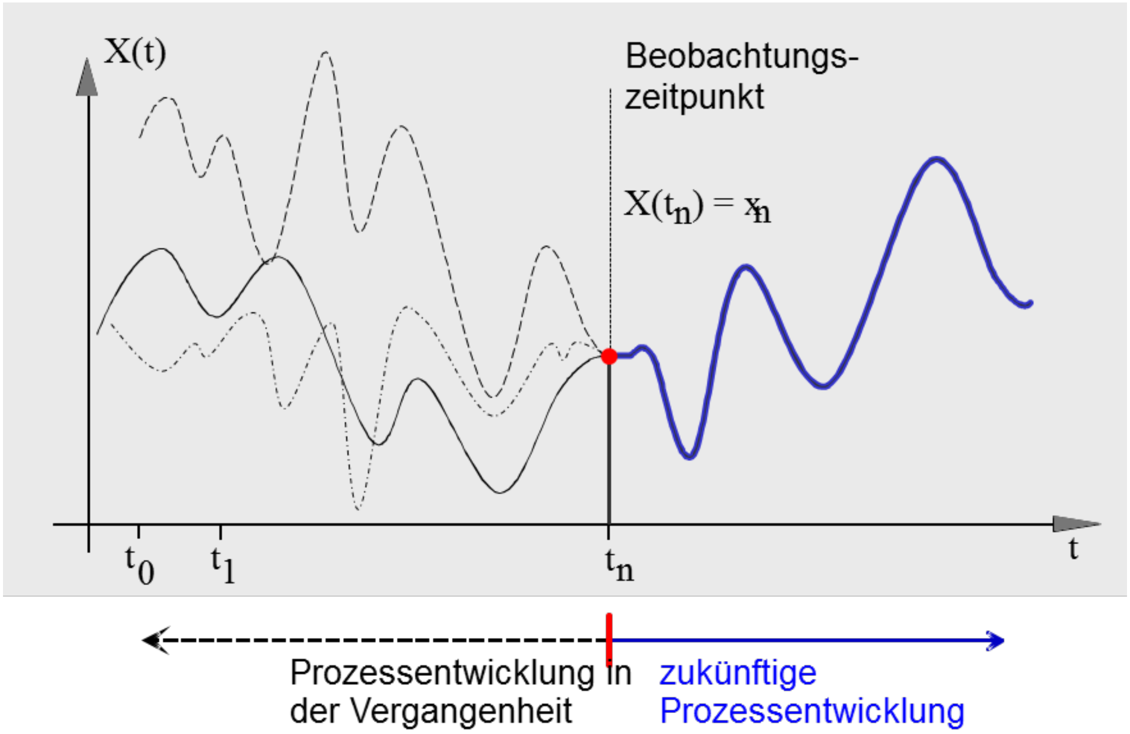


Abbildung 1: Ankunftsprozess als Punktprozess und als Zustandsprozess.

7.2.6 Markov-Prozess

- Markov-Eigenschaft (Gedächtnislosigkeit): das zukünftige Verhalten des Prozesses hängt nur von seinem Zustand ab und insbesondere nicht davon, wie er sich in der Vergangenheit entwickelt hat.
- In Formeln
    - $P(X(t_{n+1}) = s_{n+1} | X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1}, \dots, X(t_0) = s_0) =$
      $P(X(t_{n+1}) = s_{n+1} | X(t_n) = s_n)$ für zeitdiskrete Prozesse oder
    - $P(X(t+\Delta) = s_{t+\Delta} | X(t) = s_t, X(t-\theta) = s_{t-\theta}, \dots) =$
      $P(X(t+\Delta) = s_{t+\Delta} | X(t) = s_t)$ für zeitkontinuierliche Prozesse



- Beispiele für Prozesse ohne Markov-Eigenschaft
    - Autoregressiver Prozess
    - Ankunftsprozess ohne Prozesszustand (Ausnahme: Poisson-Prozess)
    - Zustandsprozess, der nur Anzahl der Anforderungen in einem System charakterisiert; die Restarbeit der Anforderung in der Bedienung als zusätzliche Information (zweidimensionaler Systemzustand!) würde das System wieder gedächtnislos machen.

- Beispiele für Markov-Prozesse
    - Ankunftsprozess als Zustandsprozess
    - Zustandsprozess, der unerledigte Arbeit im System charakterisiert

7.3 Rekurrenzzeit (TR 2.2.2)

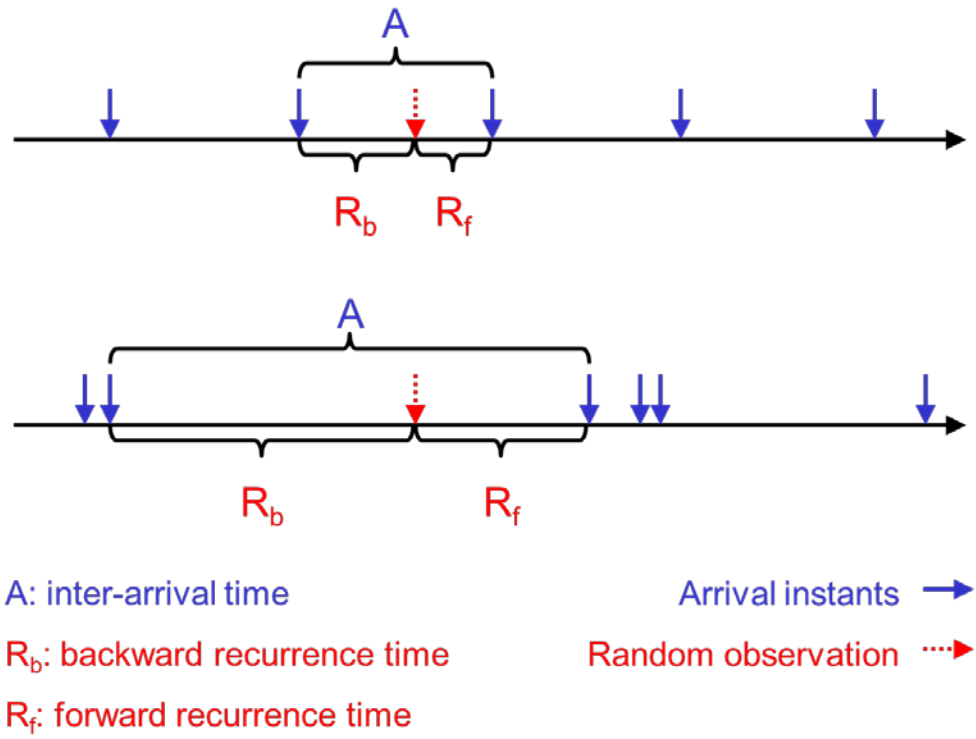


Abbildung 2: Vorwärts- und Rückwärtsrekurrenzzeit für deterministische und Pareto-verteilte Zwischenankunftszeiten

- Betrachte Erneuerungsprozess
- Wähle zufälligen Zeitpunkt (gleichwahrscheinlich auf jeder Position der Zeitachse)
- Vorwärtsrekurrenzzeit R_v: Zeitdauer bis zum Auftreten des nächsten Prozesspunktes
- Rückwärtsrekurrenzzeit R_r: Zeitdauer bis zum Auftreten des vorherigen Prozesspunktes

7.3.1 Rekurrenzzeit für zeitkontinuierliche Erneuerungsprozesse

- Feststellung: Vorwärts- und Rückwärtsrekurrenzzeit haben dieselben statistischen Eigenschaften bei zeitkontinuierlichen Erneuerungsprozessen. Darum sprechen wir nur noch von der Rekurrenzzeit.
- Wahrscheinlichkeitsdichte der Rekurrenzzeit: $r(t) = \frac{1}{E[A]} \cdot \big(1 - A(t)\big)$
- Herleitung
  - Wahrscheinlichkeitsdichte für das Antreffen eines Intervalls der Länge τ: $q(\tau) = \frac{a(\tau)\cdot\tau}{E[A]}$
    - Proportional zur Länge des Intervalls
    - Proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte der Intervalllänge
    - Normierung mit $\frac{1}{E[A]}$, damit $\int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)d\tau = 1$ erfüllt ist
  - Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten der Rückwärtsrekurrenzzeit t unter der Voraussetzung, dass das betrachtete Zwischenankunftsintervall τ lang ist: $r(t|A = \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \le t \le \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$
  - Anwendung des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt:

$$r(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} r(t|A = \tau) \cdot q(\tau)d\tau =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\tau=0}^{t} 0 \cdot \frac{a(\tau)\cdot\tau}{E[A]} d\tau + & \text{für } \tau < t \\ \displaystyle\int_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{\tau} \cdot \frac{a(\tau)\cdot\tau}{E[A]} d\tau & \text{für } \tau \ge t \end{cases} = \frac{1}{E[A]} \cdot \big(1 - A(t)\big)$$

- Momente der Rekurrenzzeit: $E[R^k] = \frac{E[A^{k+1}]}{(k+1)\cdot E[A]}$
- Mittelwert $E[R] = \frac{E[A^2]}{2\cdot E[A]} = \frac{E[A]}{2} \cdot ((c_{var}[A])^2 + 1)$
- Daraus folgt für $\begin{matrix} c_{var}[A] < 1: & E[R] < E[A] \\ c_{var}[A] > 1: & E[R] > E[A] \end{matrix}$
  - Das zweite ist schwer vorstellbar.
  - ABER: weil besonders lange Zwischenankunftsintervalle mit besonders hoher Wahrscheinlichkeit angetroffen werden, bekommt man häufig Rekurrenzzeiten, die größer sind als der Mittelwert der Zwischenankunftszeit.
- Die Exponentialverteilung ist die einzige zeitkontinuierliche Verteilung mit $R(t) = A(t)$: $r(t) = \frac{1}{E[A]} \cdot \big(1 - A(t)\big) = \lambda \cdot \Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda\cdot t}\big)\Big) = \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot t} = a(t)$

7.3.2 Poisson-Prozess

- Erneuerungsprozess mit exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten ($A(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$)
- Erzeugung: $\mathrm{U} \sim \mathrm{U}(0,1), \quad \mathrm{t_i} \leftarrow \mathrm{t_{i-1}} - \ln \mathrm{U}/\lambda$
- Wegen des obigen Phänomens bedeutet das, dass beim Poisson-Prozess zu jedem Zeitpunkt die Zeit bis zur nächsten „Ankunft“ wieder exponentiell und sogar identisch verteilt ist.
    - Dafür ist es insbesondere egal, wann die letzte Ankunft stattfand.
    - Darum ist der Poisson-Prozess gedächtnislos und besitzt somit die Markov-Eigenschaft.
    - Aus diesem Grund wird die exponentielle Verteilung auch oft mit „M“ abgekürzt.
    - Der Poisson-Prozess ist der einzige zeitkontinuierliche Erneuerungsprozess mit der Markov-Eigenschaft.
- Anwendungsbeispiel: zu Simulationsbeginn seien n Server belegt und die Bedienzeiten exponentiell verteilt. Die verbleibende Zeit bis zum jeweiligen Bedienende kann wegen der R=A als volle Bedienzeit initialisiert werden.

7.3.3 Sonderfall: Instationärer Poisson-Prozess (mit zeitabhängiger Rate)

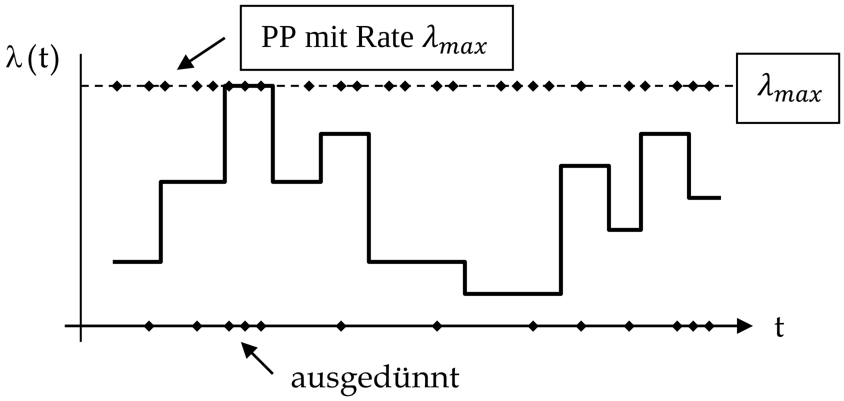
- Der „normale“ Poisson-Prozess wir auch als stationär / homogen bezeichnet.
- Die Rate $\lambda(t)$ der exponentiellen Verteilungen, durch welche die Zwischenankunftszeiten des instationären Poisson-Prozesses erzeugt werden, ist von der Zeit abhängig.

  $\Rightarrow$ die Zwischenankunftszeiten des Prozesses sind nicht iid

  $\Rightarrow$ der Prozess ist kein Erneuerungsprozess

  $\Rightarrow$ der Prozess ist kein Poisson-Prozess im eigentlichen Sinne

- Realisierung durch Accept/Reject Methode
  - Auch „Ausdünnen“ oder Thinning genannt
  - Notwendige Annahme: $\lambda_{max} = \max_t \lambda(t) < \infty$
  - Erzeuge nächsten Ankunftspunkt t mit Rate λ_{max} und akzeptiere ihn mit Wahrscheinlichkeit $\lambda(t)/\lambda_{max}$



  - Algorithmus

$t \leftarrow t_{i-1}$
Repeat
Erzeuge $U_1, U_2 \sim U(0,1)$
$t \leftarrow t - \frac{ln(U_1)}{\lambda_{max}}$
Until $U_2 \leq \frac{\lambda(t)}{\lambda_{max}}$
$t_i \leftarrow t$

  - Der Algorithmus ist wegen der Gedächtnislosigkeit der exponentiellen Verteilung korrekt.
  - Vorteil: einfaches Verfahren
  - Nachteil: ineffizient, falls $\lambda(t)$ deutlich kleiner als λ_{max}

7.3.4 Rekurrenzzeit für zeitdiskrete Erneuerungsprozesse

- Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Prozessen beschränkt man sich hier auf „ganzzahlige" zufällige Zeitpunkte.
- Betrachtung der Rekurrenzzeit
  - Kurz vor möglichen diskreten Zeitpunkten
  - Kurz nach möglichen diskreten Zeitpunkten
- Was ist die Auswirkung auf die Rekurrenzzeit?

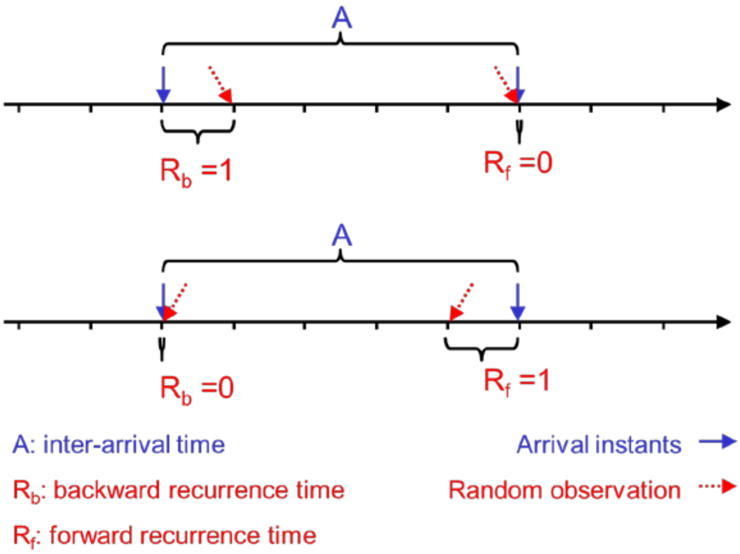


Abbildung 3: Vorwärts- und Rückwärtzrekurrenzzeit für Beobachtungen kurz vor und kurz nach diskreten Zeitpunkten.

- Beobachtung kurz vor möglichen diskreten Zeitpunkten
  - Mittelwerte der Vorwärtsrekurrenzzeit R_v
    $$E[R_v] = \frac{E[A]}{2} \cdot ((c_{var}[A])^2 + 1) - \frac{1}{2}$$
  - Einziger zeitdiskreter Erneuerungsprozess mit Gedächtnislosigkeit $(r_v(k) = a(k))$
    - Zwischenankunftszeiten, die einer nicht verschobenen Geometrischen Verteilung $a(k) = q^k \cdot (1-q), k \geq 0$ folgen
    - P(A=0)>0
    - Gruppenankünfte möglich
- Beobachtung kurz nach möglichen diskreten Zeitpunkten
  - Mittelwerte der Vorwärtsrekurrenzzeit R_v
    $$E[R_v] = \frac{E[A]}{2} \cdot ((c_{var}[A])^2 + 1) + \frac{1}{2}$$
  - Einziger zeitdiskreter Erneuerungsprozess mit Gedächtnislosigkeit $(r_v(k) = a(k))$
    - Zwischenankunftszeiten, die einer um 1 verschobenen Geometrischen Verteilung $a(k) = q^{k-1} \cdot (1-q), k \geq 1$ folgen
    - P(A=0)=0
    - Nur Einzelankünfte