Aufgabe 1

Kapitel 3, 10 16 Punkte

Geben Sie die Formeln für die Verteilung folgender Zufallsvariablen in Abhängigkeit ihrer Parameter an. *(mündliche Anmerkung: bei kontinuierlichen Zufallsvariablen die Formeln für die Verteilungsfunktion)*

1. Bernoulli (p) 1 Punkt

$$x(i) = \begin{cases} 1-p & i = 0 \text{ (Misserfolg)} \\ p & i = 1 \text{ (Erfolg)} \end{cases}$$

2. Nicht verschobene geometrische Verteilung (p) 1 Punkt

$$x(i) = (1-p)^i \cdot p$$

3. Binomial (n, p) 2 Punkte

$$x(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

4. Negative Binomialverteilung (s, p) 3 Punkte

$$p(k) = \binom{-s}{k} \cdot p^s \cdot (-(1-p))^k$$

5. Poisson-Verteilung (y) 2 Punkte
   Poisson(y) mit Rate λ in einem Intervall der Länge τ und $y = \lambda \cdot \tau$.

$$p(k) = \frac{y^k}{k!} \cdot e^{-y}$$

6. ~~Zipf-Verteilung (N, s)~~ 3 Punkte
7. Exponentielle Verteilung (λ) 1 Punkt

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

8. ~~Pareto-Verteilung ($k, x_{\min}$)~~ 3 Punkte

Aufgabe 2

Kapitel 4 12 Punkte

Sowohl Konfidenzintervalle als auch Standardabweichungen können bei der Ergebnisdarstellung als Abweichung von simulierten Mittelwerten angezeigt werden.

1. Wie wird die Varianz einer zeitdiskreten Zufallsvariable berechnet? Geben Sie eine Formel an! 1 Punkt

   Mittels dem zweiten zentralen Moment:

   $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

2. Wie wird im Gegensatz dazu die Varianz einer Stichprobenmenge berechnet? Geben Sie eine Formel an! 1 Punkt

   Mittels dem zweiten empirischen Moment:

   $$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\overline{X^2} - \overline{X^1}^2\right) \quad \text{für zeitdiskreten Prozess}$$
   $$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - \overline{X})^2 dt = \overline{X^2} - \overline{X^1}^2 \quad \text{für zeitkontinuierlichen Prozess}$$

3. Wie wird ein Student-t-Konfidenzintervall berechnet? Geben Sie eine Formel an! 2 Punkte

   $$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

   $$f_{\mathrm{n-1}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{n}-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{n}-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{n}-1}\right)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}}$$

4. Erklären Sie, was dieses Konfidenzintervall aussagt! 2 Punkte

   Konfidenzintervalle geben an, wie genau die Stichprobe den wahren Mittelwert schätzt.

5. Wie wird die Standardabweichung berechnet? 1 Punkt

   $$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

6. Wofür ist sie ein Maß? 1 Punkt

   Standardabweichungen (und Quantile) geben an, wie stark eine Stichprobe streut.

7. Wie wird der Variationskoeffizient berechnet? 1 Punkt

$$c_{\mathrm{var}}(X) = \frac{\text{Standardabweichung } (X)}{\text{Erwartungswert } (X)} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}$$

8. Was muss erfüllt sein, damit seine Benutzung sinnvoll ist? 1 Punkt
   Der Variationskoeffizient macht nur für positive X Sinn, denn sonst kann der Mittelwert $\mathrm{E}(X)$ null oder negativ werden.

9. Wie verhält sich das Konfidenzintervall bei zunehmenden Stichprobenumfang? 1 Punkt
   Mit zunehmender Stichprobengröße kann das Konfidenzintervall verkleinert werden.

10. Wie verhält sich die Standardabweichung bei zunehmenden Stichprobenumfang? 1 Punkt
    Standardabweichung hängt von der Verteilung von $\mathrm{X}(a)$ ab und kann nicht verkleinert werden.

Aufgabe 3

Kapitel 6 12 Punkte

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $X(t), 0 \leq t < \infty$. Einzelne Realisierungen können mit $x_i(t)$ unterschieden werden.

1. Geben Sie die Formel für das Zeit-Mittel $\overline{X_T^k}$ dieses Prozesses $X(t)$ über die Zeit T an! 2 Punkte

$$\overline{X_T^k} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [X_0(t)]^k \, dt$$

2. Geben Sie die Formel für das Ensemble-Mittel $\overline{m_k(t)}$ zum Zeitpunkt t an! 2 Punkte

$$E\left[X^k(t)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{0\leq i<n} [X_i(t)]^k}{n} = m_k(t)$$

3. Was bedeutet Ergodizität für das k-te Moment? Benutzen Sie die korrekten Limesausdrücke! 2 Punkte

$$\lim_{t\to\infty} m_k(t) = \lim_{T\to\infty} \overline{X_T^k} = \overline{X^k}$$

4. Geben Sie ein Beispiel für einen ergodischen Prozess an, gerne ein Warteschlangenmodell in Kendall-Notation! 1 Punkt
   Wartesysteme (GI/GI/n-∞)
   Warteverlustsysteme (GI/GI/n-S)

5. Geben Sie ein Beispiel für einen nicht-ergodischen Prozess an, gerne ein Warteschlangenmodell in Kendall-Notation! 1 Punkt
   Wartesysteme (n·D/D/m-∞)
   Warteverlustsysteme (n·D/D/m-S)

6. Nennen Sie zwei Verfahren zur Erzeugung von Konfidenzintervallen für korrelierte Zeitreihen! 2 Punkte
   Batch-Means und Replicate-Delete

7. Welches dieser Verfahren kann für nicht-ergodische Prozesse verwendet werden? 1 Punkt
   Falls stochastischer Prozess ergodisch: Batch-Means
   Falls stochastischer Prozess nicht-ergodisch: Replicate-Delete

8. Warum kann das andere Verfahren für nicht-ergodische Prozesse nicht verwendet werden? Erklären Sie das anhand Ihres Beispiels für einen nicht-ergodischen Prozess! 1 Punkt
   Würde man bei einem nicht-ergodischen Prozess die Batch-Means Methode verwenden, würden sich die Batches wiederholen (periodisch), da das System deterministisch ist.

Aufgabe 4

Kapitel 7 ? Punkte

Für Erneuerungsprozesse können Rekurrenzzeiten berechnet werden.

1. Erklären Sie, was man unter Rekurrenzzeit versteht! ? Punkte

   The inter-arrival time A is the time between arrival instants, the backward recurrence time R_b is the time to the previous arrival instant, the forward recurrence time R_f is the time to the next arrival instant.

2. Für welche Verteilung eines zeitkontinuierlichen Erneuerungsprozesses weist die Rekurrenzzeit dieselbe Verteilung auf? ? Punkte

   Exponentialverteilung (da $c_{var} = 1$)

3. Wie heißt dieser Prozess und warum nennt man ihn gedächtnislos? ? Punkte

   Poisson-Prozess: Erneuerungsprozess mit exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten

   gedächtnislos: zu jedem Zeitpunkt bei einem Poisson-Prozess ist die Zeit bis zur nächsten „Ankunft“ wieder exponentiell und sogar identisch verteilt

Aufgabe 5

Kapitel ? ? Punkte

?

Aufgabe 6

Kapitel 8 10 Punkte

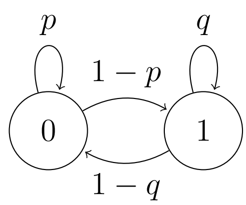
Wir betrachten einen On-Off-Sprachprozess. Wenn die modellierte Datenquelle nach einem möglichen Zustandsübergang im On-Zustand ist, wird ein Sprachpaket erzeugt, ansonsten nicht. Die Quelle bleibt mit Wahrscheinlichkeit p im On-Zustand und mit Wahrscheinlichkeit q im Off-Zustand.

1. Definieren Sie geeignete Zustände, um das System zu modellieren, und erklären Sie deren Semantik. 2 Punkte

   Zustand 0: On-Zustand

   Zustand 1: Off-Zustand

2. Geben Sie das Zustandsübergangsdiagramm incl. Übergangswahrscheinlichkeiten an. 2 Punkte

3. Stellen Sie die Übergangsmatrix für die Markov-Kette auf. 2 Punkte

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

4. Wie lautet der Name der Verteilung, mit der sich die Anzahl von gesendeten Paketen während einer On- bzw. Off-Phase beschreiben lässt? Geben Sie den Mittelwert für diese Verteilung in Abhängigkeit von p und q an! 2 Punkte

   Geometrische Verteilung

$$E_p(X) = \frac{p}{1-p}$$
$$E_q(X) = \frac{q}{1-q}$$

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich die Quelle im On- bzw. Off-Zustand befindet, in Abhängigkeit von p bzw. q! 2 Punkte

   Zustand 0: p

   Zustand 1: q

Aufgabe 7

Kapitel 9 15 Punkte

Gegeben ist ein M/M/n Verlustsystem mit Ankunftsrate λ und Bedienrate μ.

1. Geben Sie eine Formel für die angebotene Last an! 1 Punkt

$$a = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. In welcher Pseudo-Einheit wird sie gemessen? Was ist daran Pseudo? 1 Punkt
   Pseudo-Einheit: Erlang (Erl)
   Ist eine Pseudo-Einheit, da diese nicht „messbar“ ist wie bspw. m, kg, …

3. Geben Sie eine Formel für die relative angebotene Last an! 1 Punkt

$$\rho = \frac{a}{n}$$

4. Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm der zeitkontinuierlichen Markov-Kette, mit der ein M/M/3 Verlustsystem untersucht werden kann, inklusive aller Zustandsübergangsraten! 4 Punkte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2 \cdot \mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3 \cdot \mu"]
\end{tikzcd}$$

5. Was ist die mittlere Bedienzeit in diesem System? 1 Punkt

$$2 \cdot \mu$$

6. Was kann man mit der Erlang-Formel berechnen? 1 Punkt
   Zustandswahrscheinlichkeit

7. Was kann man mit der Erlang-B-Formel berechnen? 1 Punkt
   Blockierwahrscheinlichkeit

8. Eine Telefonvermittlungsstelle hat ein Angebot von 90 Erlang. Erklären Sie, wie man mithilfe des M/M/n-Systems herausfinden kann, wie viele ausgehende Leitungen benötigt werden, damit eine gewünschte Blockierwahrscheinlichkeit p_b erreicht wird! 3 Punkte
   Benötigte Anzahl von Bedieneinheiten n bei einem M/M/n Verlustsystem um eine gewisse Blockierwahrscheinlichkeit p_B bei vorgegebener Last a nicht zu überschrei-

ten. Somit grafisch und durch „ausprobieren“.

9. Erklären Sie den Begriff Bündelungsgewinn in diesem Kontext! 2 Punkte

   Bündelungsgewinn: Ein großes System (100) ist wirtschaftlicher als zwei kleinere Systeme ($2 \cdot 50$).

Aufgabe 8

Kapitel 12 10 Punkte

?