Modellierung und Simulation 1 - Übung 6

Kevin Krumm 3823213
Sven Bizu 3816615

28. November 2017

6.1 Packet arrivals at a network switch

1. Poisson-Prozess:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Die CDF bis zur Ankunft des ersten Pakets ist:

$$P(IAT >= 1) = 1 - e^{-\lambda t}$$

somit gilt unter der Annahme iid:

$$\begin{aligned} P(IAT <= t) &= 1 - P(IAT > t) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^3 \end{aligned}$$

2. Durch die Unabhängigkeit der verschiedenen exponentialtverteilten IATs ist eine Exponentialverteilung bzw. Poisson-Verteilung für die bildung der ZV von Nöten. Für den Switch mit den 3 Interfaces ergibt sich folgende Formel:

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{3}t}$$

3. Nach 3.3.9 im Skript lässt sich die Intervallänge τ mit $\tau = \frac{y}{\lambda}$ beschreiben. Setzt man dies nun in die Formel der Poisson-Verteilung ein, so ergibt sich folgendes:

$$p(k) = \frac{y^k}{k!} \cdot e^{-y} = \frac{(\tau\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-\tau\lambda}$$

Für die Intervallänge Δ ergibt sich somit:

$$p(k) = \frac{(\Delta\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-\Delta\lambda}$$

4. Auch hier eignet sich eine Exponentialverteilung. Aufgrund der Unabhängigkeit (s. Aufgabe 2) der verschiedenen IATs ist die Zeit D_A an sich auch exponentialverteilt. Somit ergibt sich folgende Formel:

$$1 - e^{-\lambda n x}$$

5. Um eine VDF der Erlang-2-Verteilung über Faltung zu erhalten müssen zwei Erlang-1-Verteilungen, also normale Exponentialverteilungen, miteinander gefaltet werden. Führt man nun eine Faltung wie in 1.2.4.1.2 im Skrip beschrieben durch, so ergibt sich für zwei Exponentialverteilungen:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t\end{aligned}$$

Formt man nun die Formel der Erlang-2-Verteilung (3.2.3 im Skript) um, so erhält man folgende Formel:

$$\begin{aligned}k &= 2 \\ f(t) &= \frac{\lambda t^{2-1}}{(2-1)!} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \\ &= \frac{\lambda t}{1!} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \\ &= \lambda t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t\end{aligned}$$

Die dadurch erhaltene Formel entspricht der, welche durch Faltung entsteht.

6. Es gilt:

$$p \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

somit ergibt sich für die Exponentialverteilung:

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{n}x}$$