Universitat Autònoma de Barcelona

# Lower bounds of the success probability in quantum state exclusion for general ensembles


Sergio Castañeiras Morales

Supervisor: Ramón Muñoz Tapia
Co-Supervisor: Santiago Llorens Fernández

# Introducció

# Ensembles i POVMs

## Ensemble

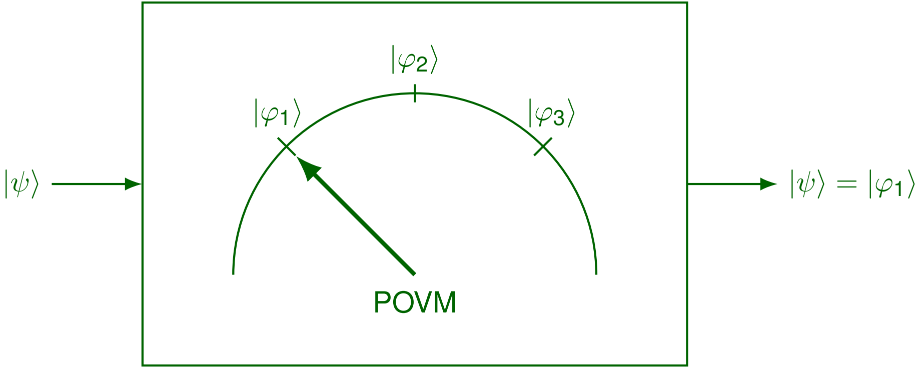
Conjunt d'estats i probabilitats de generació a priori $\{(|\psi_i\rangle, \eta_i)\}_{i=1}^n$.

## POVM

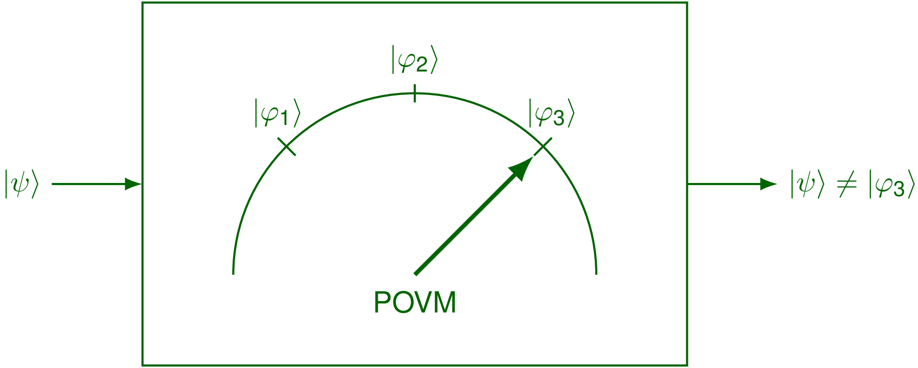
De l'anglès *Positive Operator-Valued Measure* és un conjunt d'operadors $\{\Pi_i\}_{i=1}^n$ tals que,

$$\begin{aligned} \Pi_i &\geq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \\ \sum_{i=1}^n \Pi_i &= \mathbb{I}_d . \end{aligned}$$

# Quantum State Discrimination (QSD)



# Quantum State Exclusion (QSE)




UAB

# Preàmbul

# Formulació matemàtica del problema

Donada una ensemble $\{(|\psi_i\rangle, \eta_i)\}_{i=1}^n$ volem trobar el POVM $\{\Pi_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$P^s = \max_{\{\Pi_i\}} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \eta_i \langle \psi_i | \Pi_i | \psi_i \rangle \right)$$

Naturalment,

$$1 = P^s + P^e.$$

# Protocols estudiats

- Minimum Error (ME)

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i = \mathbb{I}_d, \quad \Pi_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

- Zero Error (ZE)

$$\langle \psi_i | \Pi_i | \psi_i \rangle = 0, \quad \Pi_i \geq 0 \quad \forall i \in 1, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i + \Pi_? = \mathbb{I}_d, \quad \Pi_? \geq 0.$$

# Matriu de Gram

Donada una ensemble $\{(|\psi_i\rangle, \eta_i)\}_{i=1}^{n}$ la matriu de Gram és la matriu $\mathcal{G}$ hermítica semi-definida positiva tal que,

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \sqrt{\eta_1\eta_2}\langle\psi_1|\psi_2\rangle & \cdots & \sqrt{\eta_1\eta_n}\langle\psi_1|\psi_n\rangle \\ \sqrt{\eta_2\eta_1}\langle\psi_2|\psi_1\rangle & \eta_2 & \cdots & \sqrt{\eta_2\eta_n}\langle\psi_2|\psi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\eta_n\eta_1}\langle\psi_n|\psi_1\rangle & \sqrt{\eta_n\eta_2}\langle\psi_n|\psi_2\rangle & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}.$$

# Ensembles generades per un grup

## Ensembles generades per un grup

Sigui $G \subset U(n)$ un grup finit de matrius unitàries, diem que una ensemble està generada per un grup quan és de la forma,

$$\{(U_i \left|\psi\right\rangle, \eta_i) | U_i \in G\},$$

per un cert *seed state* $|\psi\rangle$.

Exemple, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

# Resultats previs

Per ensembles generades per un grup amb probabilitats $\eta_i$ iguals sabem que,[1]

$$P^s_{ME} = \min\left\{1, 1 - \left(\frac{\sqrt{\lambda_{|G|}} - \sum_{i<|G|}\sqrt{\lambda_i}}{|G|}\right)^2\right\},$$

$$P^s_{ZE} = \min\left\{1, 1 - \frac{\sum_{i=1}^{|G|}\sqrt{\lambda_i}\left(\sqrt{\lambda_{|G|}} - \sum_{j<|G|}\sqrt{\lambda_j}\right)}{|G|}\right\}.$$

on $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ són els valors propis de la matriu de Gram ordenats de menor a major.
**Volem veure què és una cota inferior per al cas general!**

[1] A. Diebra, S. Llorens, E. Bagan, G. Sentís, and R. Muñoz-Tapia. Quantum state exclusion for group-generated ensembles of purestates, 2025

# Resultats previs

Podem excloure amb total seguretat en ambdós mètodes quan,

$$\lambda_{|G|} \leq \left( \sum_{i<|G|} \sqrt{\lambda_i} \right)^2 ,$$

aquestes ensembles diem que es troben en la *zona d'exclusió perfecta*.

# Metodologia

# Generació d'ensembles

Fixem els valors propis de la matriu de Gram[2],

$$\mathcal{G} = UDU^\dagger$$

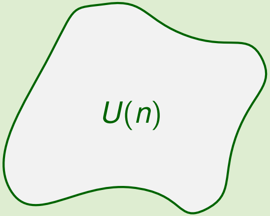
- Si volem una ensemble generada per un grup, $U$ conté la base de Fourier (cas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
- Si volem una ensemble general, $U$ és una matriu aleatoria generada d'acord amb la mesura de Haar.

Analitzem les ensembles via Semi-Definite Programming (SDP).

[2] Un dels valors propis queda determinat per $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tenim $n-1$ graus de llibertat.

## Mesura de Haar

La mesura de Haar és un tipus mesura $\mu$ definida sobre conjunts que, entre altres propietats, és invariant sota translació.
En particular pel cas del conjunt de matrius unitàries de dimensió $n \times n$,



# Resultats i discussió

# Minimum Error i Zero Error per grups

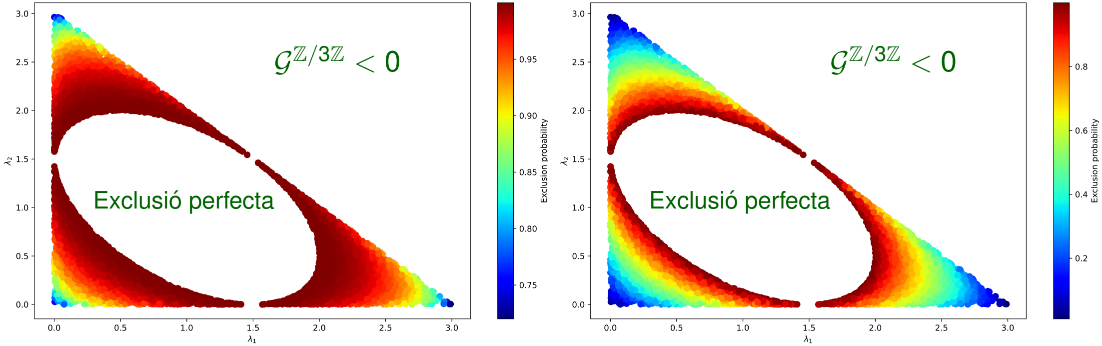



Figura 1: Representació de la probabilitat d'exclusió exitosa en l'espectre de valors propis pels protocols de ME (esquerra) i ZE (dreta) per ensembles generades pel grup $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

# Minimum error genèric

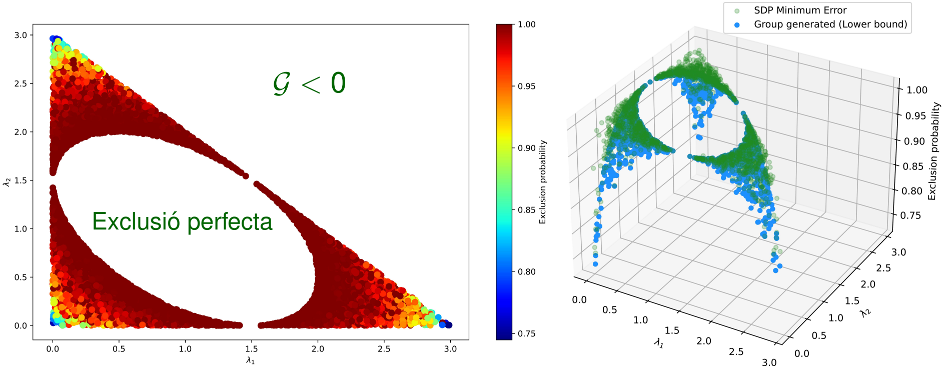



Figura 2: Representació de la probabilitat d'exclusió exitosa en l'espectre de valors propis pel protocol de ME en mapa de calor (esquerra) i 3D (dreta) per ensembles genèriques de 3 estats.

UAB

# Distribució de les les ensembles

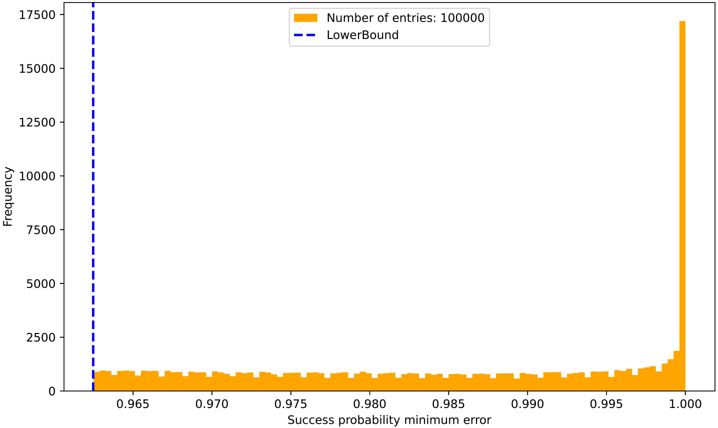



Figura 3: Distribució de les ensembles de 5 estats amb una cota inferior de 0.962 per ME.

# Distribució de les les ensembles

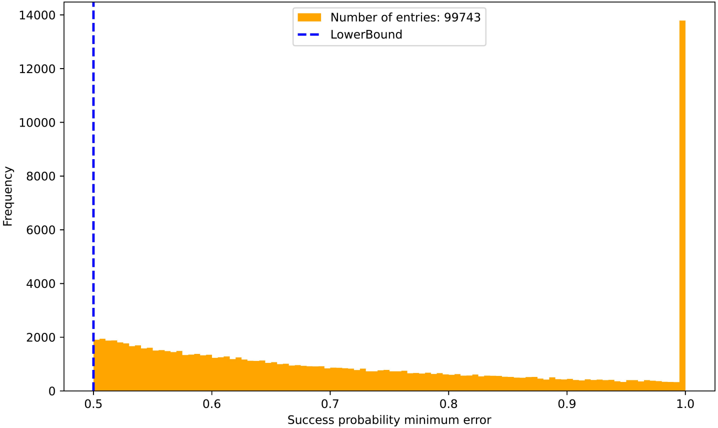
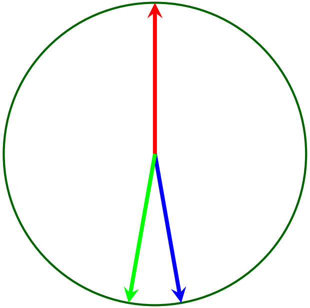
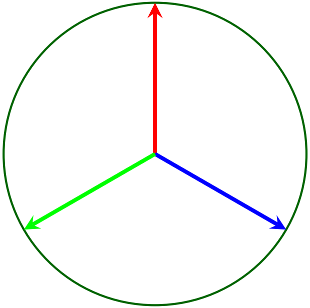



Figura 4: Distribució de les ensembles de 5 estats amb una cota inferior de 0.5 per ZE.

# Intuïció darrere dels resultats



Ensemble no generada per un grup



Ensemble generada per un grup

# Gràcies!

# Diapositives de suport

# Matrius de Gram per ensambles generades per un grup

Taula 1: Taula de Cayley del grup $S_3$.

| $S_3$ | $e$ | $s$ | $s^2$ | $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $s$ | $s^2$ | $p$ | $q$ | $r$ |
| $s^2$ | $s^2$ | $e$ | $s$ | $r$ | $p$ | $q$ |
| $s$ | $s$ | $s^2$ | $e$ | $q$ | $r$ | $p$ |
| $p$ | $p$ | $r$ | $q$ | $e$ | $s^2$ | $s$ |
| $q$ | $q$ | $p$ | $r$ | $s$ | $e$ | $s^2$ |
| $r$ | $r$ | $q$ | $p$ | $s^2$ | $s$ | $e$ |

# Matrius de Gram per ensambles generades per un grup

$$\mathcal{G}_\psi^{S_3} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & \langle s\rangle_\psi & \langle s^2\rangle_\psi & \langle p\rangle_\psi & \langle q\rangle_\psi & \langle r\rangle_\psi \\ \langle s^2\rangle_\psi & 1 & \langle s\rangle_\psi & \langle r\rangle_\psi & \langle p\rangle_\psi & \langle q\rangle_\psi \\ \langle s\rangle_\psi & \langle s^2\rangle_\psi & 1 & \langle q\rangle_\psi & \langle r\rangle_\psi & \langle p\rangle_\psi \\ \langle p\rangle_\psi & \langle r\rangle_\psi & \langle q\rangle_\psi & 1 & \langle s^2\rangle_\psi & \langle s\rangle_\psi \\ \langle q\rangle_\psi & \langle p\rangle_\psi & \langle r\rangle_\psi & \langle s\rangle_\psi & 1 & \langle s^2\rangle_\psi \\ \langle r\rangle_\psi & \langle q\rangle_\psi & \langle p\rangle_\psi & \langle s^2\rangle_\psi & \langle s\rangle_\psi & 1 \end{pmatrix}.$$

# Comparació QSE vs QSD

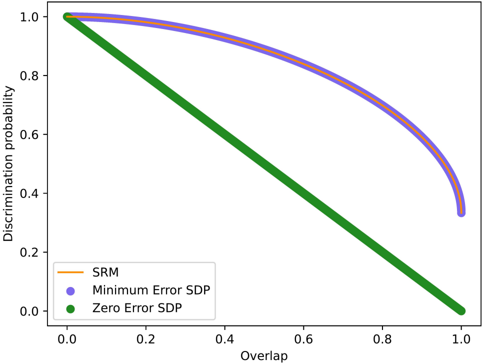



Figura 5: Comparació del resultats per ME, ZE i SRM per una ensamble generada pel grup $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en la tasca de discriminació.

# Comparació QSE vs QSD

Discriminació perfecta $\Rightarrow$ Exclusió perfecta

Discriminació perfecta $\not\Leftarrow$ Exclusió prefecta