MA 8-21

1. Do koule s poloměrem R vepíšeme válec. Zjistěte jaký největší povrch pláště může takový válec mít.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Nádoba tvaru dolní poloviny sféry s poloměrem $R = 5\,\mathrm{cm}$ je naplněna vodou tak, že hladina je $2\,\mathrm{cm}$ pod okrajem nádoby. Jaký je objem vody v nádobě?

4. Nalezněte, pokud existuje, potenciál pole

$$\vec{F} = (y + yz, x + xz + 3z^3, xy + 9yz^2 - 1).$$

5. Pomocí rozvoje funkce $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$ nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(x) = (x - \pi)\cos x$ v bodě $x_0 = \pi$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

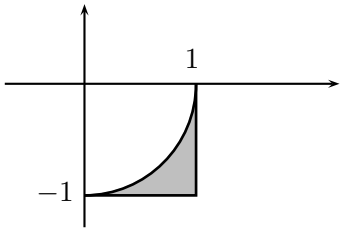
1. Poloměr r a výška h vepsaného válce splňují $r^2 + \frac{1}{4}h^2 = R^2$. Lagrangeova funkce je $L = 2\pi r h - \lambda(r^2 + \frac{1}{4}h^2 - R^2)$. Rovnice pro stacionární body:

$$2\pi h = \lambda 2r, \quad 2\pi r = \lambda \tfrac{1}{2} h, \quad r^2 + \tfrac{1}{4}h^2 = R^2.$$

Řešení je $r = R/\sqrt{2}$ a $h = R\sqrt{2}$. Minimální povrch pláště je $2\pi R^2$.

2. Opačné pořadí je $\int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \int_1^{-1/\sin\varphi} f \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_{-\pi/4}^{0} \int_1^{1/\cos\varphi} f \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Voda tvoří kulový vrchlík umístěný na spodku koule $x^2+y^2+z^2 \leq 25$, $z \in \langle -5, -2 \rangle$. Použijeme cylindrické souřadnice.

$$V = \int_{-5}^{-2} \int_{0}^{\sqrt{25-z^2}} \int_{0}^{2\pi} \varrho \, d\varphi \, d\varrho \, dz = 2\pi \int_{-5}^{-2} \tfrac{1}{2}(25 - z^2) \, dz$$
$$= \pi \Big[25z - \tfrac{1}{3} z^3 \Big]_{-5}^{-2} = 36\pi.$$

4. Potenciál je $f = xy + xyz + 3yz^3 - z + C$.

5. Protože $\cos x = \cos(x - \pi + \pi) = -\cos(x - \pi)$, můžeme psát

$$f(x) = -(x-\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (x-\pi)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n!} (x-\pi)^{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je $R = \infty$.