Matematická analýza 2

Vektorové funkce

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Vektorová funkce

Zobrazení $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá vektorová funkce (n reálných proměnných).

Úmluva

Pokud je funkce zadána předpisem bez explicitního uvedení definičního oboru, budeme pod jejím definičním oborem rozumět největší podmnožinu $\mathbb{R}^n$, pro kterou má předpis smysl.

- D ... definiční obor funkce $\boldsymbol{f}$.
- $\operatorname{ran}(\boldsymbol{f}) := \boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \,|\, \boldsymbol{x} \in D\}$ ... obor hodnot funkce $\boldsymbol{f}$.
- $\operatorname{gr}(\boldsymbol{f}) := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, \boldsymbol{x} \in D\}$ ... graf funkce $\boldsymbol{f}$.
- Je-li $m = n$, pak se $\boldsymbol{f}$ nazývá vektorové pole.
- Je-li $m = 1$, pak se f nazývá reálná funkce (případně skalární funkce).

Vektorová funkce

- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce a $c \in \mathbb{R}$, pak hladina funkce f výšky c (případně vrstevnice funkce f výšky c) je množina

$$\operatorname{lev}(f;c) := f^{-1}(\{c\}) = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}\,.$$

- Je-li $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, potom $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))$, kde $f_1, \dots, f_m$ jsou reálné funkce nazývané složky (nebo také komponenty) vektorové funkce $\boldsymbol{f}$.
- Ať $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, jsou reálné funkce a $D = \bigcap_{i=1}^m D_i$. Potom předpis $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))$ definuje vektorovou funkci $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$.

Několik příkladů reálných funkcí

Příklad (charakteristická funkce)

Charakteristická funkce množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkce

$$\chi_M(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in M; \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases}$$

Příklad

1. $f(t, x) = \sin(2\pi x) \sin(6t)$.
2. $p(T, V) = nR\frac{T}{V}$, $(T, V) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$.

Polynom a racionální funkce

Definice (polynom a racionální funkce)

Polynom (více proměnných) je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je součtem konečně mnoha funkcí tvaru

$$ax_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$ a klademe $x_i^0 = 1$.

Jsou-li $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polynomy a množina $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \neq 0\}$ je neprázdná. Potom se funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})},$$

nazývá racionální funkce.

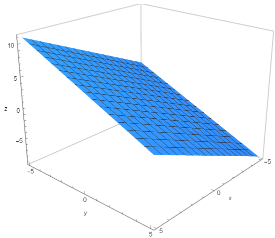
Příklady polynomů

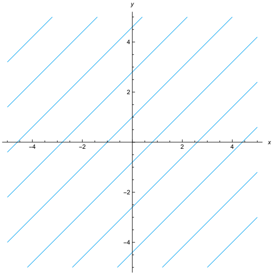
Příklad (afinní funkce)

Afinní funkce je funkce tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b,$$

kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$.
Pro ilustraci uvažme například $f(x, y) = x - y + 1$.





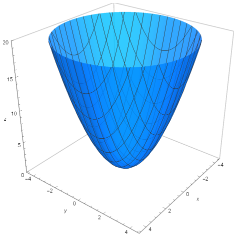
Příklady polynomů

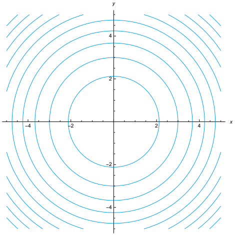
Příklad (kvadratická forma)

Ať $\boldsymbol{Q}$ je reálná symetrická $n \times n$ matice se složkami $q_{ij} \in \mathbb{R}$. Kvadratická forma je funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j .$$

S využitím sloupcového zápisu vektorů lze psát $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$.
Příkladem kvadratické formy je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$.





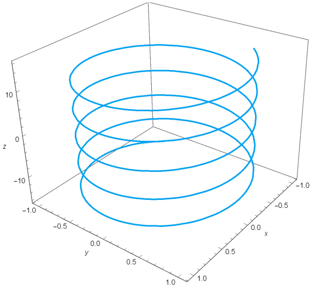
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

je (nekonečná) spirála.



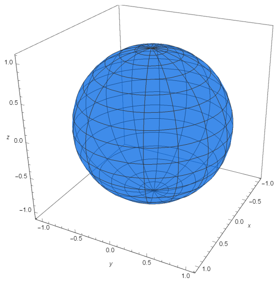
Příklady vektorových funkcí

Příklad

Obor hodnot vektorové funkce

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi].$$

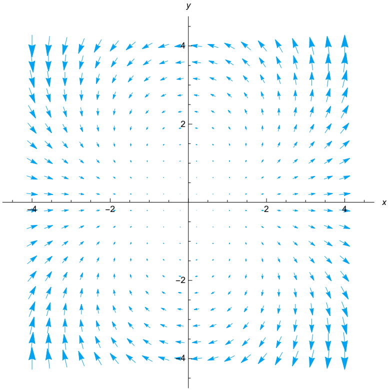
je sféra se středem v počátku a poloměrem 1.

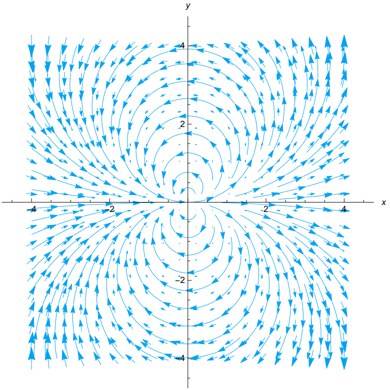


Příklady vektorových funkcí

Příklad

$\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

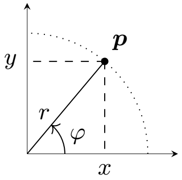




Příklady vektorových funkcí

Příklad (polární souřadnice)

Ať $\boldsymbol{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Potom můžeme psát

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

kde $r \in (0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ jsou jednoznačně určeny. Máme tak definováno prosté zobrazení $\boldsymbol{\Psi} : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\boldsymbol{\Psi}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$