Domácí cvičení 7

(průběh funkce)

7/1) Najděte lokální extrémy a určete maximální intervaly monotonie funkcí

a) $f(x) = e^{-x} - |1 - e^{-x}| + \dfrac{2x}{e}$, b) $f(x) = 3 - \dfrac{|x-1|}{(x-1)^2+9}$,

c) $f(x) = |(x-1)^3 - 27| - 8$, d) $f(x) = (2 - |x-3|)^3 + 4$,

e) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4|x|$.

7/2) Najděte největší a nejmenší hodnotu (tj. globální maximum a minimum) funkce f na množině M:

a) $f(x) = \dfrac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1}$, (i) $M = (0, \infty)$, (ii) $M = (0, e\rangle$, (iii) $M = (\frac{1}{e^2}, e)$,

b) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$, (i) $M = \langle 0, 2\pi\rangle$, (ii) $M = (0, \pi)$, (iii) $M = (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$,

c) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, (i) $M = \langle -1, \frac{27}{8})$, (ii) $M = \langle -\frac{1}{8}, 8)$,

d) $f(x) = |x^2 + x - 2| - |x^2 + 2x - 3|$, $M = \langle -4, 2\rangle$,

e) $f(x) = |x^2 + 2x| + |x^2 + 2x - 3| - 2$, $M = \mathbb{R}$,

f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $M = D(f)$.

(Při hledání nulových bodů derivace v a) použijte rovnost $z^3 + 3z + 4 = (z+1)(z^2 - z + 4)$.)

7/3) Najděte lokální extrémy funkcí z příkladu 7/2) (na celém $D(f)$) a určete maximální intervaly jejich monotonie.

7/4) Najděte intervaly konvexnosti a konkávnosti a body inflexe funkce f:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3$, b) $f(x) = \dfrac{1-2x}{3x^2}$, c) $f(x) = \ln|\ln x|$, d) $f(x) = 2\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$.

7/5) Najděte asymptoty grafu funkce f:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right)$, b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, c) $f(x) = 2\sqrt{x^2 + x - 6} - x$,

d) $f(x) = (x-6)\, e^{-1/x^2}$, e) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{\ln x}$, f) $f(x) = x \ln x$.

7/6) a) Existuje mezi trojúhelníky vepsanými do kruhu o poloměru $r > 0$, jejichž jednou stranou je průměr kruhu, trojúhelník s maximálním obvodem? Pokud ano, jaký bude tento obvod?

b) Jaký největší obsah může mít obdélník vepsaný do elipsy o rovnici $x^2 + 4y^2 = 8$, má-li strany rovnoběžné s osami elipsy?
(Doporučení: Nehledejte maximum obsahu, ale jeho druhé mocniny. Proč si to můžeme dovolit?)

c) Zjistěte, který válec vepsaný do koule o poloměru R má největší objem.

(**Výsledky s návody jsou na dalších stránkách**.)

Výsledky:

7/1) a) f má ostré lokální minimum v bodě $x_0 = 1$, $f(1) = \frac{4}{\mathrm{e}} - 1$, ostré lokální maximum v bodě $x_1 = 0$, $f(0) = 1$, je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle 0, 1\rangle$
$\Big($$f$ spojitá na $\mathbb{R}$; $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - 1 + \frac{2x}{\mathrm{e}}$ pro $x \geq 0$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{\mathrm{e}}$ pro $x \leq 0$; $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}}$ pro $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{\mathrm{e}}$ pro $x < 0$; v x_1 neexistuje derivace; stacionární bod: x_0; $f' > 0$ na $(-\infty, 0)$ a na $(1, \infty)$; $f' < 0$ na $(0, 1)$$\Big)$

b) f má ostrá lokální minima v bodech $x_0 = -2$ a $x_1 = 4$, $f(-2) = f(4) = \frac{17}{6}$, ostré lokální maximum v bodě $x_2 = 1$, $f(1) = 3$, je rostoucí na $\langle -2, 1\rangle$ a na $\langle 4, \infty)$, klesající na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 1, 4\rangle$
$\Big($$f$ spojitá na $\mathbb{R}$; $f(x) = 3 - \dfrac{x-1}{(x-1)^2 + 9}$ pro $x \geq 1$, $f(x) = 3 + \dfrac{x-1}{(x-1)^2+9}$ pro $x \leq 1$;
$f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 9}{((x-1)^2+9)^2}$ pro $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{9 - (x-1)^2}{((x-1)^2+9)^2}$ pro $x < 1$; v x_2 neexistuje derivace; stacionární body: x_0, x_1; $f' > 0$ na $(-2, 1)$ a na $(4, \infty)$; $f' < 0$ na $(-\infty, -2)$ a na $(1, 4)$$\Big)$

c) f má ostré lokální minimum v bodě $x_0 = 4$, $f(4) = -8$, je rostoucí na $\langle 4, \infty)$ a klesající na $(-\infty, 4\rangle$
$\Big($$f$ spojitá na $\mathbb{R}$; $f(x) = (x-1)^3 - 35$ pro $x \geq 4$, $f(x) = 19 - (x-1)^3$ pro $x \leq 4$; $f'(x) = 3(x-1)^2$ pro $x > 4$, $f'(x) = -3(x-1)^2$ pro $x < 4$; v $x_0 = 4$ neexistuje derivace; stacionární bod: $x_1 = 1$; $f' > 0$ na $(4, \infty)$; $f' < 0$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, 4)$$\Big)$

d) f má ostré lokální maximum v bodě $x_0 = 3$, $f(3) = 12$, je rostoucí na $(-\infty, 3\rangle$ a klesající na $\langle 3, \infty)$
$\Big($$f$ spojitá na $\mathbb{R}$; $f(x) = -(x-5)^3 + 4$ pro $x \geq 3$, $f(x) = (x-1)^3 + 4$ pro $x \leq 3$; $f'(x) = -3(x-5)^2$ pro $x > 3$, $f'(x) = 3(x-1)^2$ pro $x < 3$; v x_0 neexistuje derivace; stacionární body: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; $f' > 0$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, 3)$; $f' < 0$ na $(3, 5)$ a na $(5, \infty)$$\Big)$

e) f má ostré lokální maximum $f(x_0)$, kde $x_0 = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{2})$, a ostré lokální minimum $f(x_1) = 0$, kde $x_1 = 0$, f je rostoucí na $\big(-\infty, \frac{2}{3}(1-\sqrt{2})\big\rangle$, na $\langle 0, \infty)$ a klesající na $\big\langle \frac{2}{3}(1-\sqrt{2}), 0\big\rangle$
$\Big($$f$ spojitá na $\mathbb{R}$; $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x$ pro $x \geq 0$, $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 4x$ pro $x \leq 0$; $f'(x) = 9x^2 - 12x + 4$ pro $x > 0$, $f'(x) = 9x^2 - 12x - 4$ pro $x < 0$; v x_1 neexistuje derivace; stacionární body: x_0 a $x_2 = \frac{2}{3}$; $f' > 0$ na $(-\infty, \frac{2}{3}(1-\sqrt{2}))$, na $(0, \frac{2}{3})$ a na $(\frac{2}{3}, \infty)$; $f' < 0$ na $(\frac{2}{3}(1-\sqrt{2}), 0)$$\Big)$

7/2) a) $\left(D(f) = D(f') = (0, \infty);\ f'(x) = \ldots = \dfrac{\frac{1}{x}\,\ln x(\ln^3 x + 3\ln x + 4)}{(\ln^2 x + 1)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\,\ln x(\ln x + 1)(\ln^2 x - \ln x + 4)}{(\ln^2 x + 1)^2} \right)$

(i) maxima ani minima nenabývá
$\big($porovnáváme: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{3}{2}$, $f(1) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$\big)$

(ii) maximum $f(\mathrm{e}) = -\frac{1}{2}$, minima nenabývá
$\big($porovnáváme: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $f(\frac{1}{\mathrm{e}})$, $f(1)$, $f(\mathrm{e}) = -\frac{1}{2}$$\big)$

(iii) maxima nenabývá, minimum $f(1) = -2$
$\big($porovnáváme: $\lim_{x\to \frac{1}{\mathrm{e}^2}^+} f(x) = -2$, $f(\frac{1}{\mathrm{e}})$, $f(1)$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x)$$\big)$

b) $\big(D(f) = D(f') = \mathbb{R};\ f'(x) = \ldots = \cos x(1 - 2\sin x) \big)$

(i) maximum $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, minimum $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$
$\big($porovnáváme: $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$, $f(2\pi) = 1$$\big)$

(ii) maximum $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, minimum $f(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\big($porovnáváme: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$, $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = 1$$\big)$

(iii) maxima nenabývá, minimum $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$
$\big($porovnáváme: $\lim_{x\to \frac{5\pi}{6}^+} f(x) = \frac{5}{4}$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$, $\lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = 1$$\big)$

c) $\left(D(f) = \mathbb{R},\ D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ f'(x) = \ldots = 2\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big) \right)$

(i) maximum $f(0) = 0$, minimum $f(-1) = -5$
$\big($porovnáváme: $f(-1) = -5$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $\lim_{x\to \frac{27}{8}^-} f(x) = 0$$\big)$

(ii) maxima nenabývá, minimum $f(-\frac{1}{8}) = f(1) = -1$
$\big($porovnáváme: $f(-\frac{1}{8}) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $\lim_{x\to 8^-} f(x) = 4$$\big)$

d) maximum $f(-4) = 5$, minimum $f(-2) = -3$
$\Big($porovnáváme: $f(-4) = 5,\ f(-3) = 4,\ f(-2) = -3,\ f(1) = 0,\ f(2) = -1\Big)$
$\Big(\,D(f) = \mathbb{R},\ D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1\};\ f(x) = |(x+2)(x-1)| - |(x+3)(x-1)|;\ f(x) = -x+1$ pro $x \le -3$ a $x \ge 1,\ f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ pro $-3 \le x \le -2,\ f(x) = x - 1$ pro $-2 \le x \le 1;$
$f'(x) = -1$ pro $x < -3$ a $x > 1,\ f'(x) = 4x + 3$ pro $-3 < x < -2,\ f'(x) = 1$ pro $-2 < x < 1\Big)$

e) maxima nenabývá, minimum $1 = f(x)$ pro $x \in \langle -3, -2\,\rangle \cup \langle 0, 1\,\rangle$
$\Big($porovnáváme: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ f(x) = 1$ pro $x \in \langle -3, -2\,\rangle,\ f(-1) = 3,\ f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\Big)$
$\Big(\,D(f) = \mathbb{R},\ D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 1\};\ f(x) = |(x+2)x| + |(x+3)(x-1)| - 2;\ f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ pro $x \le -3$ a $x \ge 1,\ f(x) = 1$ pro $-3 \le x \le -2$ a $0 \le x \le 1,\ f(x) = -2x^2 - 4x + 1$ pro $-2 \le x \le 0;$
$f'(x) = 4(x+1)$ pro $x < -3$ a $x > 1,\ f'(x) = 0$ pro $-3 < x < -2$ a $0 < x < 1,\ f'(x) = -4(x+1)$ pro $-2 < x < 0\Big)$

f) maxima ani minima nenabývá
$\Big($porovnáváme: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-1^-} f(x) = \pi,\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = \pi$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\Big)$
$\Big(\,D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\};\ f'(x) = \ldots = \dfrac{1+x^2}{x^4 - x^2 + 1}\,\Big)$

7/3) (Definiční obory funkcí a jejich derivací, předpisy pro derivace a příp. rozpisy funkcí po intervalech najdete ve výsledcích cvičení 7/2).)

a) f má ostré lokální maximum v bodě $x_1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = -\frac{3}{2}$, ostré lokální minimum v bodě $x_2 = 1$, $f(1) = -2$, je rostoucí na $(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\,\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}, 1\rangle$ $\Big($ stacionární body: $x_1 = \frac{1}{\mathrm{e}},\ x_2 = 1\Big)$

b) f má ostrá lokální minima v bodech $x_{k,1} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a $x_{k,3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ f(x_{k,1}) = -1,\ f(x_{k,3}) = 1;$
ostrá lokální maxima v bodech $x_{k,2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a $x_{k,4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ f(x_{k,2}) = f(x_{k,4}) = \frac{5}{4}$; je rostoucí na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\rangle$ a na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\rangle$, klesající na $\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ a na $\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$
(vždy $k \in \mathbb{Z}$) $\Big($ stacionární body: $x_{k,1},\ x_{k,2},\ x_{k,3},\ x_{k,4},\ k \in \mathbb{Z}\Big)$
(nakreslete si jednotkovou kružnici nebo do jednoho obrázku grafy funkcí $\sin x$ a $\cos x$ a zkoumejte, kde je sinus větší/menší než $\frac{1}{2}$ a zároveň kosinus větší/menší než 0)

c) f má ostré lokální maximum v bodě $x_1 = 0,\ f(0) = 0$, a ostré lokální minimum v bodě $x_2 = 1,\ f(1) = -1;$
je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle 0, 1\rangle$.
$\Big($ stacionární bod: $x_2 = 1$; v bodě $x_1 = 0$ neexistuje derivace, protože $f'_-(0) = +\infty \ne f'_+(0) = -\infty\,\Big)$

d) f má ostré lokální minimum v bodě $x_1 = -2$, $f(-2) = -3$, a ostré lokální maximum v bodě $x_2 = 1$, $f(1) = 0$; je klesající na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, rostoucí na $\langle -2, 1\rangle$.
$\Big($ stacionární body funkce nemá; v bodech $x_1,\ x_2$ a $x_3 = -3$ neexistuje derivace $\Big)$

e) f nemá ostrá lokální minima, neostrá lokální minima má ve všech bodech uzavřených intervalů $\langle -3, -2\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$ (funkční hodnoty jsou rovny 1), má ostré lokální maximum v bodě $x_1 = -1$, $f(-1) = 3$, neostrá lokální maxima má ve všech bodech otevřených intervalů $(-3, -2)$ a $(0, 1)$ (funkční hodnoty jsou rovny 1); je rostoucí na $\langle -2, -1\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesající na $(-\infty, -3\rangle$ a na $\langle -1, 0\rangle$
$\Big($ stacionární bod: $x_1 = -1$; v bodech $x_2 = -3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1$ neexistuje derivace $\Big)$

f) f nemá lokální extrémy; je rostoucí na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, \infty)$

7/4) a) konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$; konkávní na $\langle 0, 2\rangle$; inflexe v $0,\ 2$
$\Big(D(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3 - 12x^2,\ f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)\Big)$

b) konvexní na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \frac{3}{2}\rangle$; konkávní na $\langle \frac{3}{2}, \infty)$; inflexe v $\frac{3}{2}$
$\Big(D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{x-1}{x^3},\ f''(x) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-2x\ +3}{x^4}\Big)$

c) konvexní na $(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\rangle$; konkávní na $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}, 1)$ a na $(1, \infty)$; inflexe v $\frac{1}{\mathrm{e}}$
$\Big(D(f) = (0,1) \cup (1, \infty),\ f'(x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x},\ f''(x) = -\dfrac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}\Big)$

d) konvexní na $(-\infty, -a\rangle$ a na $\langle a, \infty)$; konkávní na $\langle -a, 0)$ a na $(0, a\,\rangle$; inflexe v $-a,\ a$, kde $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
$\Big(D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = -\dfrac{4x}{x^4+1},\ f''(x) = \dfrac{4(3x^4-1)}{(x^4+1)^2}\quad (D(f') = D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – proč?) $\Big)$

7/5) a) svislá: $x = 2$; šikmé: $y = \frac{x}{2}$ v $-\infty$, $y = \frac{x}{2}$ v $+\infty$

b) svislé: $x = -1,\ x = 1$; vodorovné: $y = 1$ v $-\infty$, $y = 1$ v $+\infty$

c) šikmé: $y = -3x - 1$ v $-\infty$, $y = x + 1$ v $+\infty$

d) šikmé: $y = x - 6$ v $-\infty$, $y = x - 6$ v $+\infty$
$\Big($ při hledání q počítejte zvlášť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-6)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\ -1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\ -1}{\frac{1}{x}}$, kde druhou limitu lze spočítat např. pomocí l'H nebo převodem na $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t^2}-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t^2}-1}{t^2}\,t\Big)$

e) vodorovná: $y = \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $\quad (D(f) = (0, \frac{1}{\mathrm{e}}\rangle \cup \langle\,\mathrm{e}, \infty))$

f) žádné nejsou

7/6) a) maximální obvod: $o(\sqrt{2}r) = 2r(1+\sqrt{2})$ (jsou-li $a,\ b,\ 2r$ délky stran trojúhelníka, pak $o(a) = a + \sqrt{4r^2 - a^2} + 2r$)

nebo (příjemněji): trojúhelník je pravoúhlý, označíme-li tedy $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ velikost úhlu proti straně a, pak $a = 2r\sin\alpha,\ b = 2r\cos\alpha$ a $o(\alpha) = 2r + 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha$; $o'(\alpha) = 2r(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ tj. $a = b = 2r\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,r$.

b) maximální obsah: $S(2) = 8$ (odpovídající délky stran jsou $2c = 4$ a $2d = 2$)
(poloosy elipsy jsou $a = 2\sqrt{2},\ b = \sqrt{2}$; jsou-li $[c, d\,]$ souřadnice vrcholu odélníka, který leží v 1. kvadrantu, pak platí $c^2 + 4d^2 = 8$, tj. $S_1(c) = S^2(c) = (4\,c \cdot d)^2 = 16\,c^2\,(2 - \frac{c^2}{4}) = 4(8c^2 - c^4)$, $\ c \in (0, a)$ nebo $\tilde{S}_1(d) = \tilde{S}^2(d) = (4\,c\cdot d)^2 = 16\,(8 - 4d^2)\,d^2 = 64(2d^2 - d^4)$, $\ d \in (0, b)$)

c) Označme r poloměr válce a v jeho výšku. Pak z Pythagorovy věty máme $\dfrac{v}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ (nakreslete si řez koule rovinou, která prochází středem koule a v které leží osa válce), tedy $V = \pi r^2 v = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$. Hledáme tedy globální maximum funkce $V(r)$ na $(0, R)$. Máme (po úpravě) $V'(r) = \frac{\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}}(4R^2 - 6r^2)$. Tedy na $(0, R)$ je $V'(r) = 0$ pouze pro $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R \overset{\text{ozn.}}{=} r_0$, $V(r_0) = \frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$. Přitom $\lim_{r\to 0^+} V(r) = \lim_{r\to R^-} V(r) = 0$, tedy V nabývá svého maxima na $(0, R)$ právě v bodě r_0. Maximální objem má tedy válec s poloměrem podstavy $r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ a výškou $v_0 = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Objem tohoto válce je $\frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$.
Jiný postup s příjemnějším derivováním: Uvědomíme-li si, že funkce $V(r)$ je kladná na $(0, R)$ a druhá mocnina je funkce rostoucí na $(0, \infty)$, dostaneme, že na $(0, R)$ funkce $V(r)$ nabývá svého maxima ve stejném bodě, jako funkce $V_1(r) = (V(r))^2 = 4\pi^2(r^4R^2 - r^6)$. Derivování této funkce už je příjemnější. Snadno dostaneme $V_1'(r) = 4\pi(4R^2r^3 - 6r^5) = 4\pi r^3(4R^2 - 6r^2)$. Jako výše ověříme, že největší hodnoty na $(0, R)$ nabývá funkce V_1 v bodě $r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Nesmíme jen zapomenout, že maximální objem není $V_1(r_0)$, ale $V(r_0)$.
Ještě příjemnější postup: Využijeme toho, že se ve vzorci pro objem válce vyskytuje r pouze v druhé mocnině, a nebudeme proto vyjadřovat v pomocí r, ale r^2 pomocí v. Tím se vyhneme odmocnině, aniž bychom uvažovali místo objemu jeho druhou mocninu. Budeme mít: $r^2 = R^2 - (\frac{v}{2})^2$, $V(v) = \pi(R^2 - (\frac{v}{2})^2)v$, $v \in (0, 2R)$; $V'(v) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}v^2) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ atd.