MA 5-23

1. Mějme plochy $z^2 = xy$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Zjistěte, pod jakým úhlem se tyto plochy protínají.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^3} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Mějme dáno těleso $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2},\ 0 \leq z \leq h\}$ a pole $\vec{F} = (y^2 - x, yz^2, x + z)$. Pomocí Gaussovy věty určete velikost parametru $h > 0$ tak, aby tok pole $\vec{F}$ hranicí tělesa P byl číselně roven objemu tělesa P.

4. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ -1 & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Ve kterých všech bodech se součet Fourierovy řady rovná hodnotám funkce f?

5. (a) Definujte diferenciál funkce $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Vysvětlete, co je diferenciál ve speciálním případě $n = 1$?

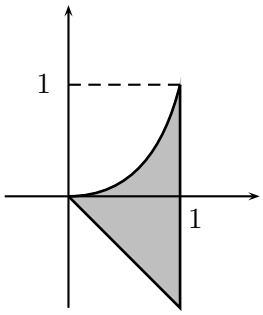
   (b) Dokažte větu: Má-li funkce $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0$ lokální minimum a existuje-li v bodě $\mathbf{x}_0$ diferenciál, pak je nulový. (Využijte analogickou větu pro funkci jedné proměnné.)

Řešení.

1. Úhel mezi plochami je úhel mezi jejich normálovými vektory v bodech průsečíku obou ploch. Určíme normálové vektory k oběma plochám: $\vec{n}_1 = \operatorname{grad}(xy - z^2) = (y, x, -2z)$ a $\vec{n}_2 = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = (2x, 2y, 2z)$. Skalární součin je tak $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4xy - 4z^2 = 0$, protože bod leží na ploše $xy = z^2$. Plochy se ve všech společných bodech protínají pod pravým úhlem.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-y}^{1} f \, dx \, dy + \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{1} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/4}^{0} \int_0^{1/\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{\sin\varphi/\cos^3\varphi}}^{1/\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Podle Gaussovy věty je tok pole hranicí tělesa P roven $\iiint_P \operatorname{div}\vec{F}$. Protože $\operatorname{div}\vec{F} = z^2$ máme v cylindrických souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^h z^2\varrho\,dz\,d\varrho\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi h^3.$$

Těleso P je polovina válce výšky h s poloměrem podstavy 2. Objem je tak $2\pi h$ a hodnota parametru vyjde $h = \sqrt{3}$.

4. Pokud si všimneme, že f je lichá funkce posunutá o konstantu $1/2$, můžeme si ušetřit práci tím, že koeficienty $a_k = 0$ pro $k \geq 1$. Pokud si toho nevšimneme, vypočítáme následující hodnoty:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^0 (-1)\,dx + \int_0^\pi 2\,dx\Big) = 1,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^0 (-1)\cos kx\,dx + \int_0^\pi 2\cos kx\,dx\Big) = 0,\\
b_0 &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^0 (-1)\sin kx\,dx + \int_0^\pi 2\sin kx\,dx\Big) = \frac{3}{\pi k}\,(1-(-1)^k).
\end{aligned}$$

Fourierova řada je:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\,\sin kx = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\Big)$$

Hodnotám funkce f se rovná ve všech bodech kromě $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Diferenciál je lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Pro $n = 1$ je $L(h) = f'(x_0)\cdot h$.

(b) Zvolme libovolný směr $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ a položme $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$. Funkce $\varphi(t)$ má lokální minimum v bodě 0, proto $\varphi'(0) = 0$. Protože

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}\\
&= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}],
\end{aligned}$$

je $df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}] = 0$ pro každé $\mathbf{h}$, a tedy diferenciál je nulový.