MA 1-24

- 1. Mějme funkci $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$. Nalezněte její lokální extrémy. Je funkce f shora omezená? Nebo zdola omezená?
- 2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}(1-x)}^{\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho\,d\varphi$.

3. Uvažujme pole $\vec{F}=(-y^2/2,\alpha x^3)$. Pomocí Greenovy věty zjistěte hodnotu parametru $\alpha\in\mathbb{R}$, aby integrál přes pozitivně orientovanou hranici množiny

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 \le y \le 1 - x, \ x \in (0, 1) \}$$

byl alespoň 1.

4. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π -periodické rozšíření funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ -1 & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Ve kterých všech bodech se součet Fourierovy řady rovná hodnotám funkce f?

- 5. (a) Definujte skalární součin dvou vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} z \mathbb{R}^n pomocí jejich souřadnic. Jak se zjistí úhel mezi dvěma vektory?
 - (b) Dokažte, že má-li funkce $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě \mathbf{x}_0 lokální minimum a diferenciál funkce f existuje v bodě \mathbf{x}_0 , pak je nulový.

Řešení.

1. Rovnice pro stacionární bod jsou

$$6x^2 + y^2 + 10x = 0, \quad 2xy + 2y = 0.$$

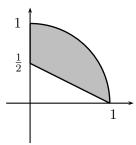
Funkce má stacionární body $A=(0,0),\,B=(-5/3,0),\,C=(-1,2)$ a D=(-1,-2).Hessián

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$$

je v bodě A pozitivně definitní a f má v A lokální minimum. V bodě B je negativně definitní a f má v B lokální maximum. Zbylé body jsou sedlové. Funkce není shora omezená, nebot $f(x,0) \to \infty$ pro $x \to \infty$, ani zdola omezená, nebot $f(x,0) \to -\infty$ pro $x \to -\infty$.

2. Opačné pořadí je $\int_0^{1/2} \int_{1-2y}^{\sqrt{1-y^2}} f\ dx\, dy + \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f\ dx\, dy$ v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/2} \int_{1/(2\sin\varphi + \cos\varphi)}^1 f\varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Podle Greenovy věty je

$$\int_{(\partial D)} \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} 3\alpha x^2 + y \, dy \, dx = \frac{\alpha}{2}.$$

Hledaná hodnota je $\alpha \geq 2$.

4. Pokud si všimneme, že f je lichá funkce posunutá o konstantu 1/2, můžeme si ušetřit práci tím, že koeficienty $a_k=0$ pro $k\geq 1$. Pokud si toho nevšimneme, vypočítáme následující hodnoty:

$$\begin{split} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \, dx + \int_0^\pi 2 \, dx \right) = 1, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cos kx \, dx + \int_0^\pi 2 \cos kx \, dx \right) = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx \, dx + \int_0^\pi 2 \sin kx \, dx \right) = \frac{3}{\pi k} \left(1 - (-1)^k \right). \end{split}$$

Fourierova řada je:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Hodnotám funkce f se rovná ve všech bodech kromě $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. (a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Pro úhel α mezi vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} platí:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

(b) Zvolíme si libovolný směr $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ a položíme $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$. Tato funkce jedné proměnné má v bodě t = 0 lokální minimum. Podle věty pro funkce jedné proměnné je $\varphi'(0) = 0$. Pro funkci f to znamená, že směrová derivace $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = 0$, a tedy $df(\mathbf{x}_0) = 0$.