WIKIPEDIE
Otevřená encyklopedie

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice jsou matematické rovnice, ve kterých jako neznámé vystupují funkce a jejich derivace. Diferenciální rovnice stojí v základech fyziky a jejich aplikace najdeme ve většině oblastí lidského vědění.

Matematická teorie diferenciálních rovnic se zabývá existencí řešení, jednoznačností (čili zda je řešení jen jedno), závislostí řešení na počátečních a okrajových podmínkách a prodlužitelností (maximální interval existence řešení). Ve fyzice a dalších aplikacích je zajímavé zejména získání analytického řešení. V technických aplikacích je zpravidla nalezení analytického řešení nemožné či neúměrně složité a v takovém případě je možné použít numerické řešení diferenciálních rovnic.

Typy diferenciálních rovnic

Základní dělení diferenciálních rovnic je podle typu obsažených derivací.

- Obyčejné diferenciální rovnice (ODR) jsou rovnice, kde hledaná funkce je funkce jedné proměnné a rovnice obsahují derivace funkce jedné proměnné.
- Parciální diferenciální rovnice (PDR) jsou rovnice, kde hledaná funkce je funkce více proměnných a v rovnicích vystupují parciální derivace této funkce.

Pokud je dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí, pak hovoříme o **soustavě diferenciálních rovnic**.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která je v ní obsažená. Za řád soustavy diferenciálních rovnic považujeme hodnotu nejvyšší derivace, která se v soustavě vyskytuje. Podle řádu bývají diferenciální rovnice děleny na *diferenciální rovnice prvního řádu* a *diferenciální rovnice vyšších řádů*.

Diferenciální rovnice, v nichž se hledaná funkce vyskytuje pouze lineárně, přičemž se nikde nevyskytují ani součiny hledané funkce s jejími derivacemi, ani součiny derivací této funkce, označujeme jako lineární diferenciální rovnice. Pokud jedna z uvedených podmínek není splněna, hovoříme o nelineárních diferenciálních rovnicích.

Diferenciální rovnice řádu vyššího než prvního lze transformovat do soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu, ve kterém je počet rovnic roven řádu původní diferenciální rovnice.

Ne každá rovnice obsahující derivace neznámé funkce je diferenciální rovnicí. Například funkcionální rovnice $f'(x) = f(f(x))$ není diferenciální rovnice.

Pořadí derivací v rovnici může být odlišné (formálně není ničím omezeno). Derivace, funkce, nezávislé proměnné a parametry mohou vstupovat do rovnice v různých kombinacích nebo mohou úplně chybět, s výjimkou alespoň jedné derivace.

Řešení rovnice

Za *řešení (integrál) diferenciální rovnice* (v daném oboru) považujeme každou funkci, která má příslušné derivace a vyhovuje dané diferenciální rovnici. Řešením (integrálem) soustavy diferenciálních rovnic je množina funkcí s derivacemi potřebného řádu, které vyhovují všem rovnicím dané soustavy.

Řešení diferenciálních rovnic dělíme na

- **obecné** – Jako obecné řešení označujeme takové řešení diferenciální rovnice, které obsahuje libovolnou integrační konstantu. Přiřadíme-li každé konstantě obecného řešení určitou číselnou hodnotu, získáme řešení partikulární.
- **partikulární (částečné)** – Partikulární (částečné) řešení je řešení diferenciální rovnice, které získáme přiřazením určité číselné hodnoty každé integrační konstantě obecného řešení.
- **singulární (výjimečné)** – Některá řešení nelze získat z obecného řešení. Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech oboru, označujeme jako singulární nebo výjimečná.
- **homogenní**

Partikulární řešení můžeme v případě jednoduchých diferenciálních rovnic vypočítat analyticky. Nicméně ve velkém množství případů je analytické řešení příliš obtížné a diferenciální rovnice se řeší numericky.

Příklad

Stojí-li v místnosti sklenice s horkým čajem (který pro jednoduchost pokládejme za teplotně homogenní), ubývá z ní teplo rychlostí, kterou pro jednoduchost pokládejme za přímo úměrnou rozdílu mezi teplotou čaje T a teplotou v místnosti T_0 (kterou pro jednoduchost pokládejme za konstantní). Koeficient této úměrnosti značme k. Máme tedy diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T_0 - T)$$

a chceme najít všechny funkce $T(t)$ (závislost teploty na čase), které ji splňují.

Tato rovnice je tedy podle výše uvedené klasifikace *obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu*.

Řešení příkladu

$\mathrm{d}T$ lze chápat jako diferenciál, tedy funkci dvou proměnných $\mathrm{d}T(t, \mathrm{d}t) = \mathrm{d}tT'(t)$. Zlomek $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ v tomto významu se rovná derivaci T podle t (proto se derivace takto značí). Díky tomu lze uvedenou rovnici upravit:

$$\mathrm{d}T = -k(T - T_0)\mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_0} = -k\mathrm{d}t$$

Strany rovnice se rovnají, právě když se rovnají jejich neurčité integrály (rozdíl obou integračních konstant označme c).

$$\int \frac{1}{T - T_0}\,\mathrm{d}T = c - \int k\,\mathrm{d}t$$

Vypočtením těchto integrálů obdržíme

$$\ln|T - T_0| = c - kt$$

Strany se rovnají, právě když se rovnají jejich exponenciály. Pro názornost předpokládejme $T > T_0$:

$$e^{\ln(T - T_0)} = e^{c - kt}$$

To lze upravit na

$$T = T_0 \, + \, e^c \, e^{-kt}$$

Tato diferenciální rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení, přičemž různé hodnoty *c* odpovídají různým funkcím *T(t)*, které popisují chladnutí čaje s různou počáteční teplotou.

Software

- ExpressionsinBar
- Maple:[1] dsolve
- SageMath[2]
- Xcas:[3] desolve(y'=k*y,y)

Reference

1. *dsolve* [online]. [cit. 2020-05-12]. Dostupné online (https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=dsolve).
2. Basic Algebra and Calculus — Sage Tutorial v9.0. *doc.sagemath.org* [online]. [cit. 2020-05-12]. Dostupné online (http://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/tour_algebra.html).

3. *Symbolic algebra and Mathematics with Xcas* [online]. [cit. 2020-05-12]. Dostupné online (http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac/cascmd_en.pdf).

Literatura

- KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. Praha: Academia, 1989. 384 s. ISBN 80-200-0088-7.

Související články

- Diferenciální počet
- Integrální rovnice
- Integro-diferenciální rovnice
- Homogenní diferenciální rovnice
- Cauchyho úloha
- Lineární diferenciální rovnice
- Obyčejná diferenciální rovnice
- Parciální diferenciální rovnice
- Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Externí odkazy

- Obrázky, zvuky či videa k tématu **diferenciální rovnice** na Wikimedia Commons

Autoritní data	NKC: ph119444 (https://aleph.nkp.cz/F/?func=find-c&local_base=aut&ccl_term=ica=ph119444) • PSH: 7577 (https://psh.techlib.cz/skos/PSH7577) • BNF: cb133183122 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb133183122) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb133183122) • GND: 4012249-9 (https://d-nb.info/gnd/4012249-9) • LCCN: sh85037890 (https://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85037890) • NDL: 00560651 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00560651) • NLI: 987007553020305171 (http://olduli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007553020305171)