Matematická analýza 1 – B0B01MA1A

ZS 2023/2024

Vzorová zadání písemné části zkoušky

Na začátku každé úlohy v písemné práci bude uveden maximální počet bodů, který je možné za úlohu získat (obvykle to bude 12 bodů za úlohy 1–3 a 8 bodů za úlohy 4–6, někdy budou úlohy 3 a 4 za 10 bodů). Pro započítání bodů z úlohy do celkového hodnocení písemné práce je nutné z ní získat alespoň čtvrtinu maximálního možného počtu bodů zaokrouhlenou dolů na celé body (tj. min. 2 body v případě úlohy hodnocené z 8 bodů nebo 10 bodů a min. 3 body z úlohy hodnocené z 12 bodů). Další informace týkající se hodnocení zkoušky jsou uvedeny v Moodlu předmětu.

Varianta 1

1. (12 bodů) Najděte definiční obor funkce
$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}+3}$$
a vyšetřete její limity (oboustranné i jednostranné, kde to má smysl) v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = +\infty$.
[$D(f) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$; e^2 pro $x \to 0$, $x \to 0^{\pm}$; $+\infty$ pro $x \to +\infty$]

2. (12 bodů)

   a) Převeďte vhodnou substitucí integrál
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2 x \ - 4\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 2\sin x)}\,\mathrm{d}x$$
   na integrál z racionální funkce, výsledek zjednodušte.

   b) Najděte na maximálních intervalech
$$\int \frac{10}{(t+2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$
[a) $\int_{-1}^{1} \frac{1-2t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ $\quad (t = \operatorname{tg} x)$, b) $2\ln|t+2| - \ln(1+t^2) + 4\operatorname{arctg} t + c$ na $(-\infty, -2)$ a na $(-2, \infty)$]

3. (12 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})\,.$$
Zformulujte alespoň jedno z kritérií konvergence, které jste použili.
[řada konverguje podle Leibnizova kritéria, nekonverguje absolutně podle srovnávacího kritéria]

4. (8 bodů) Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce
$$f(x) \;=\; \mathrm{e}^{-2x}(4x^2+1)\,.$$
[funkce má stacionární bod $x = \frac{1}{2}$, lokální extrémy nemá, je klesající na $D(f) = \mathbb{R}$]

5. (8 bodů) Najděte Taylorův polynom řádu 4 funkce f v bodě $-\frac{\pi}{2}$:
$$f(x) = \mathrm{e}^{\pi+2x} \cdot \cos x - 1\,.$$
[$T(x) = -1 + (x+\frac{\pi}{2}) + 2(x+\frac{\pi}{2})^2 + \frac{11}{6}(x+\frac{\pi}{2})^3 + (x+\frac{\pi}{2})^4$]

6. (8 bodů) Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \cosh x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
[$\frac{1}{2}\,(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}})$ $(= \sinh 1)$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Varianta 2

1. (12 bodů) Najděte definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{16x^2+9}-5}{x-1}$$
a vyšetřete její limity (oboustranné i jednostranné, kde to má smysl) v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = +\infty$.

[$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $\frac{16}{5}$ pro $x \to 1$, $x \to 1^{\pm}$; 4 pro $x \to +\infty$]

2. (12 bodů) Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce
$$f(x) = (x+4)\,|x| + 2.$$
[stacionární bod $x_0 = -2$, rostoucí na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, +\infty)$, klesající na $\langle -2, 0\rangle$;
lokální maximum: $f(-2) = 6$, lokální minimum: $f(0) = 2$]

3. (12 bodů) Zjistěte, zda řada
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n - 1}{5^n}$$
konverguje, diverguje nebo osciluje. Zformulujte kritérium konvergence, které jste použili. Pokud součet dané řady existuje, najděte ho.

[řada konverguje (lze použít např. podílové limitní kritérium), její součet je $\frac{15}{4}$ (jde o rozdíl dvou geometrických řad, které konvergují např. podle podílového kritéria)]

4. (8 bodů) Najděte na maximálních možných intervalech
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$
[$-\frac{1+\ln x}{x} + c$ na $(0, \infty)$ (per partes)]

5. (8 bodů) Vypočtěte
$$\int_{-1}^{2} \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right| \mathrm{d}x.$$
[$\frac{6}{\pi}$]

6. (8 bodů) Podle definice najděte derivaci funkce f v bodě $a = 1$. Definici derivace uveďte.
$$f(x) = (x^2-1)(\cosh x + \sinh x).$$
[$f'(1) = 2\,\mathrm{e}$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Některé další typy zkouškových příkladů

Pro úlohy 1 – 5

- Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné, má-li to smysl) funkce f v bodě x_0:
$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} \cdot \Big(\operatorname{cotg}(\pi x)\Big)^2, \quad x_0 = 2.$$
[neexistuje pro $x \to 2$; $+\infty$ pro $x \to 2^-$; $-\infty$ pro $x \to 2^+$]

- Vyšetřete limity posloupností
$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} (-2)^{3n} \cdot \big(\ln|\cos(n\pi)|\big)\,.$$
$$\text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \Big(2^{-3n} + \ln|2+\cos(n\pi)|\Big)\,.$$
[a) 0 (jde o posloupnost samých nul), b) neexistuje]

- Najděte tečnu t grafu funkce $f(x) = x + \sqrt{2\,\mathrm{e}^x + 3}$, která je kolmá na přímku $p:\ x + 2y + 6 = 0$.

[$t:\ 2x - y + 3 - \ln 3 = 0$ $(x_0 = \ln 3)$]

- Vypočtěte

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$$

[$\ln 3 \quad (t = \sqrt{x+1})$]

- Vypočtěte

$$\int_0^2 \arcsin\tfrac{x}{2}\ \mathrm{d}x.$$

[$\pi - 2 \ \ \big(= [x \arcsin\tfrac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}]_0^2 \big)$ (per partes)]

- Vypočtěte

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^4 x}\ \mathrm{d}x$$

[$+\infty \ \ (\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f = \int_{-\pi/2}^{0} f + \int_0^{\pi/2} f; \quad t = \sin x)$]

- Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce

$$f(x) = x^6 - 4x^2 + 4\,\mathrm{arctg}\,(x^2).$$

[stacionární body: $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; rostoucí na $\langle -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0\rangle$ a $\langle \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$ a $\langle 0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$;
lokální maximum: $f(0) = 0$, lokální minima: $f(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = -\frac{11\sqrt{3}}{9} + \frac{2}{3}\pi \ \ \big(f'(x) = \ldots = \frac{2x^5(3x^4-1)}{1+x^4}\big)$]

- Určete intervaly konvexity a konkávity a body inflexe funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)\,.$$

[konvexní na $\langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\rangle$; konkávní na $(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\rangle$ a na $\langle \frac{1}{4}\pi, \pi)$;
inflexe v bodech $-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi$]

- Najděte nejmenší a největší hotnotu funkce f na intervalu $I = \langle 1, \infty)$:

$$f(x) = \frac{\ln(\mathrm{e}\cdot x)}{\sqrt{x}}\,.$$

[největší hodnota f na I: $f(\mathrm{e}) = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; nejmenší hodnoty f na I nenabývá]

- Vyšetřete svislé, vodorovné a šikmé asymptoty grafu funkce f. Uveďte vždy, zda asymptoty daného typu existují, a pokud ano, napište jejich rovnice:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + \mathrm{arctg}\,x.$$

[svislé ani vodorovné asymptoty graf funkce nemá, šikmé asymptoty: $y = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $y = -x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$]

- Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2+4}{n^4+n^2}\,.$$

[řada konverguje absolutně (tedy také konverguje)]

Pro úlohu 6 (úloha 6 je hodnocena z 8 bodů)

- Najděte body lokálních extrémů a maximální intervaly monotonie funkce f. Zformulujte použitou větu.

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sin(\pi t)}{t}\ \mathrm{d}t\,, \qquad x \in (0, 4)\,.$$

[rostoucí na $(0, 1\rangle$ a $\langle 2, 3\rangle$, klesající na $\langle 1, 2\rangle$ a $\langle 3, 4)$; lokální maxima v bodech $1,\ 3$, lokální minimum v bodě 2]

- Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\ \mathrm{d}x\,.$$

Pokud jste použili nějaké kritérium, zformulujte ho.

[integrál konverguje (srovnáme s integrálem z funkce e^{-2x})]

Více typů příkladů najdete ve vzorových testech, domácích cvičeních a v materiálech k přednáškám, které jsou ke stažení v Moodlu předmětu.