MA 8-22

1. Je dáno reálné číslo $p > 0$. Nalezněte kladná reálná čísla x, y, z taková, jejichž součet je roven p a výraz $q = \ln(x^2y^4z^6)$ má největší možnou hodnotu.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte práci při pohybu bodu s hmotností $m = 1$ po obvodu rovnoběžníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$ a $(1, 2)$. Pohyb se děje v kladném smyslu v poli $\vec{F} = (y^2, e^{x-y})$.

4. Určete hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby pole $\vec{F} = (\alpha e^{3x+\alpha y}, e^{3x+\alpha y})$ bylo potenciální a potenciál vypočtěte.

5. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce $f(x) = \pi - x$, $x \in \langle 0, 2\pi)$ a určete, ve kterých bodech řada konverguje k funkci f.

Řešení.

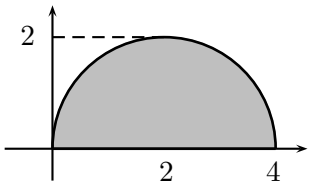
1. Lagrangeova funkce je

$$L = \ln(x^2y^4z^6) + \lambda(x+y+z-p) = 2\ln x + 4\ln y + 6\ln z + \lambda(x+y+z-p).$$

Máme jen jeden stacionární bod $x = \frac{1}{6}p$, $y = \frac{1}{3}p$ a $z = \frac{1}{2}p$. Největší hodnota daného výrazu je $12\ln p - 8\ln 2 - 6\ln 3$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f \, dy \, dx$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{4\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Označíme-li D daný rovnoběžník, pak práce se rovná

$$\begin{aligned} A &= \int_{(\partial D)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x-y} - 2y\, dy\, dx + \int_1^2 \int_{2x-2}^{2} e^{x-y} - 2y\, dy\, dx \\ &= 2e + 2e^{-1} - 8. \end{aligned}$$

4. Pole $\vec{F}$ je potenciální pro hodnoty $\alpha = \pm\sqrt{3}$ a tomu odpovídající potenciály $f = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, e^{3x \pm \sqrt{3}y} + K$.

5. Funkce je lichá, stačí vypočítat jen sinové koeficienty:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin kx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \Big(\Big[-(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos kx}{k}\, dx \Big) = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Fourierova řada má tvar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin kx$, který se rovná původní funkci v bodech $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $x = 2k\pi$ je hodnota 0.