Determinanty

Permutace

Permutace. Uvažme určitou množinu (soubor) předmětů. Uspořádáme-li tyto předměty do řady (např. vedle sebe odleva doprava nebo pod sebou odshora dolů), vznikne tzv. *posloupnost* neboli *permutace* předmětů.

Slovo permutace znamená „změna pořadí“. Použijeme-li termín permutace, poukazujeme tím na skutečnost, že předměty jsou na počátku nějak (standardně) uspořádány, a my toto uspořádání změníme.

Úmluva. Budeme-li nadále mluvit o předmětech, budeme mít na mysli vzájemně rozlišitelné předměty. Tyto předměty budeme označovat přirozenými čísly; půjde-li o n předmětů, označíme je čísly $1, 2, \ldots, n$.

Tvrzení. *Počet permutací n vzájemně rozlišitelných předmětů je $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.*

Zápis permutace.
Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \ldots$$

Interpretace:
předmět 1 zaměníme za předmět 2,

předmět 2 zaměníme za předmět 5,

$\vdots$

Stručnější zápis: 2 5 4 3 1

(Za standardní pořadí považujeme pořadí

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5,$$

zapíšeme přitom pouze změněné pořadí.)

Obecně:

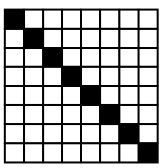
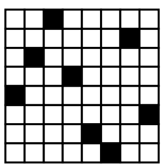
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

kde

$$\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

je vzájemně jednoznačné zobrazení. Mluvíme o permutaci na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ilustrační úloha. Kolika způsoby lze rozmístit na šachovnici osm věží tak, aby žádná z nich neohrožovala žádnou z ostatních?

Věže je potřeba rozmístit tak, aby v každém řádku i sloupci byla právě jedna věž. Na obrázcích jsou znázorněna dvě řešení, tj. přípustná rozmístění věží. První z řešení, kdy věže jsou rozmístěny na hlavní diagonále, lze považovat za standardní. Každé další řešení obdržíme z tohoto standardního řešení permutací řádků (resp. sloupců). Označíme-li řádky přirozenými čísly $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (odshora dolů), pak druhé řešení odpovídá následující permutaci řádků:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Ve skutečnosti procházíme řádky a zapisujeme, na jaké pozici v řádku se nachází věž.)

Podobně označíme-li sloupce přirozenými čísly $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (odleva doprava), pak druhé řešení odpovídá následující permutaci sloupců:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Ve skutečnosti procházíme sloupce a zapisujeme, na jaké pozici ve sloupci se nachází věž.)

Grupa permutací. Označme symbolem S_n množinu všech permutací čísel $1, 2, \ldots, n.$ Víme, že na tyto permutace lze pohlížet jako na vzájemně jednoznačná zobrazení $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$ Permutace lze jakožto zobrazení skládat, tj. provádět za sebou, výsledkem je opět permutace z $S_n.$ *Skládání permutací je tedy binární operace na množině* $S_n.$ Tuto operaci nazveme *součin permutací* a označíme jako obvyklý součin. *Součin permutací* π_1 a π_2 (v tomto pořadí) je tedy definován jako

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$$

(nejprve provedeme $\pi_1,$ a potom π_2). Například, je-li

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

pak

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 \cdot \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Množina S_n je vzhledem k výše definovanému součinu grupou; říkáme ji *symetrická grupa stupně n.* Poznamenejme, že *grupa S_n <u>není komutativní</u>*. Roli jednotkového prvku hraje *identická permutace*.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Tato permutace odpovídá identickému zobrazení a splňuje tudíž identitu $1 \cdot \pi = \pi \cdot 1 = \pi.$ *Inverzní permutace* k permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

je permutace

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Odpovídá inverznímu zobrazení k zobrazení π a splňuje identitu $\pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = 1.$ Například, je-li

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

pak

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Transpozice je speciální permutace spočívající ve „vzájemné výměně dvou předmětů“, tj. permutace

$$\begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}; \text{ např. } \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} & 3 & \underline{4} & 5 \\ 1 & \underline{4} & 3 & \underline{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Inverze. Řekneme, že čísla i_r a i_s tvoří v permutaci $i_1\, i_2 \dots i_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ *inverzi*, jestliže $i_r > i_s$ a přitom $r < s$. Permutace se nazývá *sudá*, má-li sudý počet inverzí; v opačném případě se nazývá *lichá*.

Příklad. Permutace $4\,5\,1\,3\,6\,2$ je sudá (má 8 inverzí), permutace $3\,8\,5\,2\,4\,6\,7\,1$ je lichá (má 15 inverzí).

Znaménko permutace. *Znaménko* $\operatorname{sgn}(\pi)$ permutace $\pi \in S_n$ je definováno následujícím předpisem:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \pi \text{ sudá permutace,} \\ -1, & \text{je-li } \pi \text{ lichá permutace.} \end{cases}$$

Dvě permutace mají tedy stejné znaménko, jsou-li obě sudé nebo obě liché, zatímco sudá a lichá permutace mají různé znaménko.

Tvrzení. *Transpozice mění znaménko permutace*. Jinak řečeno: *Jestliže $\pi \in S_n$ je libovolná permutace a $\tau \in S_n$ je transpozice, pak permutace $\pi \cdot \tau$ a π mají různé znaménko.*

Důkaz. Nejprve se nahlédne, že transpozice dvou sousedních předmětů změní znaménko permutace. Dále se ukáže, že transpozici dvou předmětů, mezi nimiž se nachází právě s jiných předmětů, lze realizovat postupným provedením $2s+1$ transpozic sousedních předmětů. □

Tvrzení. *Od libovolné permutace předmětů lze přejít k libovolné jiné permutaci těchto předmětů postupným provedením několika transpozic (nejvýše $n-1$, kde n je počet předmětů).*

Jinak řečeno: *Každá permutace je součinem transpozic.*

Příklad.

$$\begin{array}{cccccccc}
\underline{1} & 2 & \underline{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
3 & \underline{2} & 1 & 4 & 5 & 6 & \underline{7} & 8 \\
3 & 7 & \underline{1} & 4 & 5 & 6 & \underline{2} & 8 \\
3 & 7 & 2 & 4 & \underline{5} & 6 & \underline{1} & 8 \\
3 & 7 & 2 & 4 & 1 & \underline{6} & 5 & \underline{8} \\
3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6
\end{array}$$

Důsledek.

(*a*) *Sudá permutace je součinem sudého počtu transpozic, nelze ji však vyjádřit jako součin lichého počtu transpozic. Lichá permutace je součinem lichého počtu transpozic, nelze ji však vyjádřit jako součin sudého počtu transpozic.*

(*b*) *Pro každé dvě permutace π_1, π_2 čísel $1, 2, \dots, n$ platí:*

$$\operatorname{sgn}(\pi_1 \cdot \pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_2).$$

To znamená, že součin sudých permutací je sudá permutace, součin lichých permutací je sudá permutace a součin sudé a liché (resp. liché a sudé) permutace je lichá permutace.

(*c*) *Vzájemně inverzní permutace mají stejné znaménko.*

Úloha. Dokažte následující tvrzení:

(a) *Všech* $n!$ *permutací daných* n *předmětů lze uspořádat do řady tak, že každá permutace v této řadě vznikne transpozicí dvou předmětů v předchozí permutaci; začít lze přitom libovolnou permutací.*

Příklad.
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

(b) *Jestliže* $n \geq 2$, *pak počet všech sudých permutací* n *předmětů je stejný jako počet lichých permutací těchto předmětů, totiž* $n!/2$.

Definice determinantu

Determinant. *Determinant* čtvercové matice $A = (a_{ij})_{n\times n}$ je číslo, které označujeme jako $|A|$, případně $\det A$, a definujeme ho předpisem

$$|A| = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)}\, a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)},$$

kde výraz $\sum\limits_{\pi \in S_n}$ představuje součet přes všechny permutace čísel $1, 2, \dots, n$. Používáme též označení

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prvky $a_{1,\pi(1)}, a_{2,\pi(2)}, \dots, a_{n,\pi(n)}$ tvoří tzv. *nezávislou množinu* prvků matice A, tj. takovou množinu, že v každém řádku a každém sloupci matice A leží právě jeden prvek této množiny. (Porovnejte s úlohou o rozmístění věží na šachovnici!)

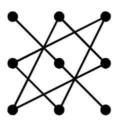
Speciální případy.

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

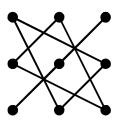
(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$;

Mnemotechnická pomůcka.

$$+ \quad \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$



$$- \quad \begin{pmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$



Příklad 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 4\cdot 3 = -14$$

Příklad 2.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7\cdot 4\cdot 8 + (-2)\cdot 1\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot(-1) - 5\cdot 4\cdot 3 - (-2)\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 1\cdot(-1) = 187$$

Úloha. Uvažme soustavu

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, tj. soustavu s maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že jestliže $|A| \neq 0,$ pak má soustava právě jedno řešení, a to

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Geometrický význam determinantu

Obsah rovnoběžníku. V prostoru $\boldsymbol{R}^2$ uvažme dva lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}.$ Absolutní hodnota determinantu matice, jejíž sloupce (či řádky) jsou tvořeny vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b},$ udává obsah rovnoběžníku určeného těmito vektory. (Jde o rovnoběžník, jehož jedním vrcholem je počátek a zbývajícími vrcholy jsou koncové body vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$ Jednotku obsahu určují jednotky na osách zvoleného kartézského souřadnicového systému.)

Úloha. Dokažte výše uvedené tvrzení.

Návod. Označme $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{b}\|$ velikosti vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}.$ Nechť γ je úhel těchto vektorů, symbolem $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$ označme jejich skalární součin. Konečně obsah rovnoběžníku určeného vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ označme $S.$

Ze školy znáte následující vzorce:

$$S = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \sin\gamma,$$

$$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos\gamma.$$

Odtud již snadno odvodíte dokazované tvrzení (*analytický vzorec pro obsah rovnoběžníku*).

Objem rovnoběžnostěnu. V prostoru $\boldsymbol{R}^3$ uvažme tři lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}.$ Absolutní hodnota determinantu matice, jejíž sloupce (či řádky) jsou tvořeny vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c},$ udává objem rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory. (Jde o rovnoběžnostěn, jehož jedním vrcholem je počátek a zbývajícími vrcholy jsou koncové body vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$ Jednotku objemu určují jednotky na osách zvoleného kartézského souřadnicového systému.)

Úloha. Jaký objem má čtyřstěn určený vektory $\boldsymbol{a} = (3,1,1)^T$, $\boldsymbol{b} = (2,1,1)^T$, $\boldsymbol{c} = (2,3,2)^T$? (Rozumí se čtyřstěn, jehož jedním vrcholem je počátek a zbývajícími vrcholy jsou koncové body vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.)

Výsledek: Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ je roven jedné, objem čtyřstěnu je $1/6$.

Vlastnosti a výpočet determinantů

Tvrzení. *Nechť A je čtvercová matice. Pak* $|A^T| = |A|$.

Tvrzení. *Sestává-li nějaký řádek (resp. sloupec) čtvercové matice A ze samých nul, pak* $|A| = 0$.

Tvrzení. *Nechť A je bloková matice tvaru*

$$\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \quad \textit{resp.} \quad \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & C \end{array}\right),$$

kde B a C jsou čtvercové matice. Pak $|A| = |B| \cdot |C|$.

Speciálně platí, že determinant horní či dolní trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků této matice.

Tvrzení. *Přehodíme-li mezi sebou dva řádky (resp. sloupce) čtvercové matice, bude mít determinant nové matice stejnou hodnotu jako determinant původní matice, avšak s opačným znaménkem.*

Důsledek. *Determinant čtvercové matice, která má dva stejné řádky (resp. sloupce), je roven nule.*

Tvrzení.

(*a*) *Vynásobíme-li libovolný řádek (resp. sloupec) čtvercové matice A číslem λ, bude determinant nové matice λ-násobkem determinantu matice původní.*

[Odtud vyplývá, že *je-li A čtvercová matice řádu n, pak* $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.]

(*b*) *Determinant matice se nezmění, jestliže k libovolnému řádku (resp. sloupci) této matice přičteme násobek nějakého jiného řádku (resp. sloupce).*

Příklad (výpočet determinantu pomocí Gaussova algoritmu). Dle části b) předchozího tvrzení je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-1) = 4$$

Tvrzení. *Čtvercová matice je regulární právě tehdy, má-li nenulový determinant.*

Úloha. Pokuste se dokázat co nejvíce výše uvedených vlastností determinantů. Vystačíte s definicí determinantu a tvrzením, že transpozice mění znaménko permutace (aplikovaným na řádky či sloupce matice).

Věta. *Nechť* A, B *jsou čtvercové matice téhož řádu. Pak* $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Důkaz. Položme $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Je

$$|A| \cdot |B| = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A + A(-E) & 0 + AB \\ \hline -E & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} 0 & AB \\ \hline -E & B \end{array}\right| = (-1)^{n^2} \left|\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline B & -E \end{array}\right| = (-1)^{n^2} \cdot (-1)^n \cdot |AB| = |AB|. \ \square$$

Důsledek. *Je-li* A *regulární čtvercová matice, pak* $|A| \neq 0$ *a* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Rozvoj determinantu podle i - tého řádku či j - tého sloupce. Lehce ověříme, že

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(To je tzv. rozvoj determinantu podle 1. řádku.) Obecně platí:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|,$$

kde A_{ij} je matice, která vznikne z matice A vyškrtnutím jejího i - tého řádku a j - tého sloupce. (To je rozvoj determinantu podle i - tého řádku, resp. j - tého sloupce.)

Příklad 1.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj dle 1. řádku}}{\underset{\downarrow}{=}} 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 187$$

Příklad 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj dle 3. řádku}}{\underset{\downarrow}{=}} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40$$

Příklad 3 (kombinace rozvoje a GEMu).

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & \mathbf{0} & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \mathbf{3} & 7 & -2 \\ 3 & -1 & \mathbf{0} & 5 & -5 \\ 2 & 6 & \mathbf{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -3 & \mathbf{-1} & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{GEM}}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} -2 & 5 & \mathbf{0} & -1 & 3 \\ 1 & -9 & \mathbf{0} & 13 & 7 \\ 3 & -1 & \mathbf{0} & 5 & -5 \\ 2 & 18 & \mathbf{0} & -7 & -10 \\ 0 & -3 & \mathbf{-1} & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj dle 3. sloupce}}{\underset{\downarrow}{=}} (-1) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{-2} & 5 & -1 & 3 \\ \mathbf{1} & -9 & 13 & 7 \\ \mathbf{3} & -1 & 5 & -5 \\ \mathbf{2} & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{GEM}}{\underset{\downarrow}{=}} (-1) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -13 & 25 & 17 \\ \mathbf{1} & -9 & 13 & 7 \\ \mathbf{0} & 26 & -34 & -26 \\ \mathbf{0} & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj dle 1. sloupce}}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -1032$$

Příklad 4 (Laplaceova věta). Určíme hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

a to pomocí simultánního rozvoje podle prvního a třetího sloupce. (To umožňuje tzv. Laplaceova věta.) Dostaneme

$$(-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-8)\cdot(-20) - (-10)\cdot(-62) - 7\cdot 87 = -1069.$$

Příklad 5 (Vandermondův determinant).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j);$$

např.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2), \dots$$

Důkaz. Determinant upravíme nejprve na tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

(Od každého řádku s výjimkou prvního odečteme vždy a_1 - násobek řádku předchozího, postupujeme přitom od posledního řádku směrem nahoru.) Další úpravy vedou k výsledku

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Výše uvedený vzorec pro výpočet Vandermondova determinantu lze tedy odvodit indukcí. □

Inverzní matice a řešení soustav lineárních rovnic

Adjungovaná matice. Nechť $A=(a_{ij})_{n\times n}$ je čtvercová matice řádu $n.$ Výraz

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ij} (v determinantu $|A|$). Označme

$$\hat{A}=(\hat{a}_{ij})_{n\times n}$$

a položme

$$A^* = (\hat{A})^T.$$

Je tedy $A^* = (a^*_{ij}),$ kde $a^*_{ij} = \hat{a}_{ji}.$ Matice A^* se nazývá *adjungovaná matice* k matici $A.$

Tvrzení. $AA^* = A^*A = |A|\cdot E$

Důsledek. *Je-li A čtvercová matice a $|A|\neq 0,$ pak A je regulární. Přitom* $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot A^*.$

Příklad. Nechť

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Pak

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} -7 & 6 & 3\\ -4 & 3 & 2\\ 9 & -7 & -4\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^*=(\hat{A})^T=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9\\ 6 & 3 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Přitom

$$|A| = 6+30+6-3-18-20=1,$$

tedy $A^{-1}=|A|^{-1}A^* = A^*.$

Cramerovo pravidlo. Uvažme soustavu lineárních rovnic $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$ kde A je regulární matice. Tato soustava má právě jediné řešení, totiž

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Použijeme-li pro výpočet matice A^{-1} determinantů, dostaneme

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = |A|^{-1}A^*\boldsymbol{b};$$

rozepsáno

$$x_j = |A|^{-1}\sum_{i=1}^{n} a^*_{ji}b_i = |A|^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_{ij}b_i = |A|^{-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i|A_{ij}|.$$

Položíme-li $d=|A|$ a symbolem d_j označíme determinant matice, která vznikne z matice A tak, že j - tý sloupec matice A nahradíme vektorem $\boldsymbol{b},$ můžeme předchozí výsledek zapsat ve tvaru

$$x_j = \frac{d_j}{d}.$$

To je elegantní tvar analytického předpisu pro výpočet řešení soustavy $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$ nazývaný *Cramerovo pravidlo*.

Úloha 1. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 5 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ 8x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

Výsledek: $d = -6,\ d_x = -6,\ d_y = 18,\ d_z = 0;\ \ x = 1,\ y = -3,\ z = 0$

Úloha 2. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledek: $d = 27,\ d_1 = 81,\ d_2 = -108,\ d_3 = -27,\ d_4 = 27;\ \ x_1 = 3,\ x_2 = -4,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

CVIČENÍ

1. Vypočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Výsledek: 11, 3, 52

2. Jakému číslu je roven determinant permutační matice?

3. Rozhodněte, zda následující determinant je sudým či lichým číslem, aniž byste jej přímo vyčíslili:

$$\begin{vmatrix} 387 & 456 & 589 & 238 \\ 488 & 455 & 677 & 382 \\ 440 & 982 & 654 & 651 \\ 892 & 564 & 786 & 442 \end{vmatrix}.$$

4. Dokažte, že má-li čtvercová matice A řádu n více než $n^2 - n$ nulových prvků, pak $|A| = 0.$

5. Ve čtvercové matici řádu n existuje r řádků a s sloupců takových, že všechny prvky na průsečících těchto řádků a sloupců jsou nulové; přitom $r + s = n + 1$. Jaký má tato matice determinant?

6. Jakou hodnotu má determinant antisymetrické matice lichého řádu?

Řešení. Je-li A antisymetrická matice řádu n, pak $A^T = -A$, a tedy

$$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A|.$$

Pro liché n je tedy $|A| = -|A|$, odkud plyne, že $|A| = 0$.

7. Dokažte, že jsou-li B a C čtvercové matice řádů k a l, pak

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} D & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right| = (-1)^{kl} |B| \cdot |C|.$$

8. V prostoru jsou dány body $A = (3, 1, 1), B = (1, 4, 1), C = (1, 1, 7), D = (3, 4, 9)$. (Body jsou určeny souřadnicemi ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému.) Pomocí determinantů dokažte, že body A, B, C, D neleží v jedné rovině a určete objem čtyřstěnu $ABCD$.

Výsledek: 14

9. Vypočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek: $4a + 1$

10. Vypočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a+x & a & \dots & a \\ a & a+x & \dots & a \\ \vdots & & & \\ a & a & \dots & a+x \end{pmatrix}$$

řádu n.

Výsledek: $(na+x)x^{n-1}$

11. Vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \dots & a \\ a & a+x_2 & \dots & a \\ \vdots & & & \\ a & a & \dots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

Výsledek: $x_1x_2 \dots x_n\left(1+\frac{a}{x_1}+\dots+\frac{a}{x_n}\right)$.

12. Vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Tomuto determinantu se říká *cirkulant*.

Výsledek: $-6^4 \cdot 21$; pro cirkulant řádu n dostaneme $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$.

13. Čtvercová matice řádu n je definována následujícím předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij, & \text{jestliže } i \neq j, \\ ij+1, & \text{jestliže } i = j. \end{cases}$$

Vypočítejte její determinant.

Řešení (pro $n=5$).

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 17 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

kde

$$a = 2 + (2^2+3^2+4^2+5^2) = 1 + (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2).$$

Obecně vyjde:

$$1+(1^2+2^2+\dots+n^2) = 1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14. Nechť

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 100. (Matice má na hlavní diagonále, „pod“ hlavní diagonálou i „nad“ hlavní diagonálou samé jedničky, ostatní prvky jsou nulové.) Vypočítejte její determinant.

Řešení. Označme d_n determinant obdobné matice řádu n. Je $d_1=1,\ d_2=0,\ d_3=-1,$ přitom rozvoj dle 1. řádku v determinantu d_n vede k rekurentní formuli $d_n=d_{n-1}-d_{n-2}$. V posloupnosti $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tedy postupně opakují úseky $1, 0, -1, -1, 0, 1$. Odtud plyne, že $d_{100}=-1$.

15. Nechť

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu n. Vypočítejte její determinant.

Řešení. Jde o obdobu předchozí úlohy. Je $d_1=1,\ d_2=2,\ d_3=3,$ přitom rozvoj dle 1. sloupce či 1. řádku v determinantu d_n vede k rekurentní formuli $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}$.

16. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 5z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Výsledek: $(\frac{13}{28}, \frac{47}{28}, \frac{21}{28})$

17. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x + 3y - 2t &= -4 \\ 2x + z - t &= -1 \\ 2y - z - 3t &= -3 \end{aligned}$$

Řešení. $d=4,\ d_x=4,\ d_y=-4,\ d_z=-8,\ d_t=4;\ \ x=1,\ y=-1,\ z=-2,\ t=1$

18. Pomocí determinantů nalezněte inverzní matice k následujícím maticím:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

19. Pomocí determinantů nalezněte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

20. a) Nechť ke čtvercové racionální matici A existuje reálná inverzní matice A^{-1}. Je matice A^{-1} racionální?

b) Nechť ke čtvercové celočíselné matici A existuje reálná inverzní matice A^{-1}. Stanovte podmínky, kterým musí vyhovovat matice A, aby matice A^{-1} byla celočíselná.