MA 4-21

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $z^2+xy+xz=1$, která je rovnoběžná s rovinou $y+3z=1$.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pro $a>0$ je dán válec

$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le 1\}$$

s hustotou $f(x,y,z)=z$. Pro jakou hodnotu parametru a bude moment setrvačnosti válce P vzhledem k ose z roven jeho objemu?

4. Zjistěte, je-li pole $\vec{F}=\left(\cos y+\dfrac{g(y)}{x},\ 3y^2\ln x - x\sin y\right)$ potenciální pro nějakou funkci $g(y)$ a v kladném případě najděte jeho potenciál.

5. Pomocí rozvoje logaritmu

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(x)=2x\ln(1+3x)$ v bodě $x_0=0$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

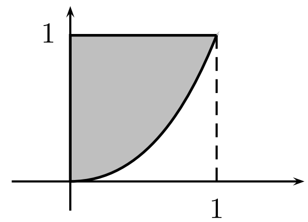
1. Normála k ploše v hledaném bodě je násobek normály k zadané rovině:

$$(y+z,x,2z+x)=\alpha(0,1,3).$$

Odtud $x=z=\alpha=-y$. Dosazením do rovnice plochy dostaneme dva body pro $\alpha=\pm1$. Tečné roviny jsou dvě, $y+3z\pm2=0$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 f \; dy\,dx$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{1/\sin\varphi} f\varrho \; d\varrho d\varphi.$$



3. V cylindrických souřadnicích je moment setrvačnosti
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^1 \varrho^3 z \, dz d\varrho d\varphi = \frac{1}{4} \pi a^4.$$
Porovnání s objemem dává $\frac{1}{4}\pi a^4 = \pi a^2$, tj. $a = 2$.

4. Nutná podmínka $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ je splněna pro funkci $g(y) = y^3 + C$. Výpočtem zjistíme, že potenciál je $f = x \cos y + (y^3 + C) \ln x + K$.

5. Pomocí rozvoje logaritmu máme
$$f(x) = 2x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} \, x^{n+1}.$$
Poloměr konvergence je $R = 1/3$.