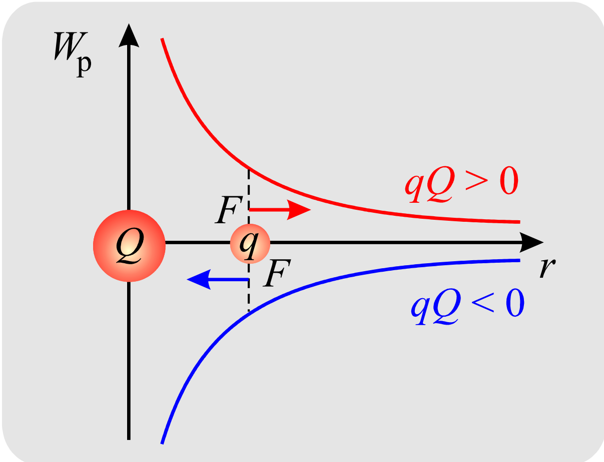
FYZIKA 1 – semináře



PŘÍKLADY PRO BAKALÁŘSKÉ STUDIUM

PETR KULHÁNEK

FEL ČVUT V PRAZE & AGA

6. 6. 2020

OBSAH

1 ROZMĚROVÁ ANALÝZA

1. Vlny na širém moři

Zadání: Jsou zadány následující parametry vlny na širém moři: hustota ρ, časová perioda narážení vlny na bóji T, tíhové zrychlení g. Zjistěte z rozměrové analýzy, jaký tvar by mohla mít závislost vlnové délky na těchto parametrech.

Řešení: Předpokládejme mocninnou závislost

$$\lambda = \mathrm{const}\, \rho^{\alpha} T^{\beta} g^{\gamma} \tag{1}$$

Provedeme nyní rozměrovou analýzu

$$\mathrm{m} = \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)^{\alpha} \mathrm{s}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^{\gamma} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{m}^1 = \mathrm{m}^{-3\alpha+\gamma} \mathrm{kg}^{\alpha} \mathrm{s}^{\beta-2\gamma} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 &= -3\alpha + \gamma \\ 0 &= \alpha \\ 0 &= \beta - 2\gamma \end{aligned}$$

Nyní již snadno nalezneme řešení:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0\,, \\ \gamma &= 1\,, \\ \beta &= 2\,. \end{aligned}$$

Hledaný vztah má tedy tvar

$$\lambda = \mathrm{const}\, g T^2\,. \tag{2}$$

2. Planckovy škály

Zadání: Nalezněte takové kombinace konstant c, G, $\hbar$ (rychlosti světla, gravitační konstanty a Planckovy konstanty), které dají přirozenou jednotku pro délku, čas, hmotnost a energii.

$$\begin{aligned} c &= 3\times10^{8}\ \ \mathrm{ms}^{-1}\,, \\ G &= 6.67\times10^{-11}\ \ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}\,, \\ \hbar &= 1.05\times10^{-34}\,\mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Řešení: Hledejme typický čas jako kombinaci zadaných fundamentálních konstant s neznámými exponenty α, β, γ:

$$t_0 = c^{\alpha} G^{\beta} \hbar^{\gamma}\,. \tag{4}$$

Tato rovnice ve skutečnosti představuje čtyřnásobnou rovnost: rovnost číselnou a rovnost rozměrovou v metrech, kilogramech a sekundách. Napíšeme nyní rozměrové části vytvořeného výrazu:

$$\mathrm{m}^0\mathrm{kg}^0\mathrm{s}^1 = \mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{s}^{-\alpha}\mathrm{kg}^{-\beta}\mathrm{m}^{3\beta}\mathrm{s}^{-2\beta}\mathrm{kg}^{\gamma}\mathrm{m}^{2\gamma}\mathrm{s}^{-\gamma}. \tag{5}$$

Nyní zapíšeme soustavu rovnic pro exponenty u metru, kilogramu a sekundy:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma\,, \\ 0 &= -\beta + \gamma\,, \\ 1 &= -\alpha - 2\beta - \gamma\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Řešením této soustavy získáme jednoznačné řešení pro exponenty

$$\alpha = -5/2\,; \qquad \beta = 1/2\,; \qquad \gamma = 1/2\,. \tag{7}$$

Tyto exponenty jednoznačně až na násobící číselný faktor určují velikost Planckova času. Zcela analogickým způsobem můžeme odvodit vztahy pro ostatní Planckovy veličiny. Výsledky jsou:

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}\ \mathrm{m}\,, \\ t_0 &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43}\ \mathrm{s}\,, \\ m_0 &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8}\ \mathrm{kg}\,, \\ E_0 &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{19}\ \mathrm{GeV}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Kytarová struna

Zadání: Jsou zadány následující parametry napjaté struny: délka l, hmotnost m a síla napjatosti F. Zjistěte z rozměrové analýzy, jaký tvar by mohl mít vzorec pro úhlovou frekvenci kmitů struny. Pokud vzorec obsahuje také nějaký parametr, který nelze z rozměrové analýzy určit, vyznačte ho rovněž ve vzorci.

Řešení: Hledáme vzorec ve tvaru $\omega = \xi\, l^{\alpha} m^{\beta} F^{\gamma}$, kde α, β, γ jsou neznámé reálné koeficienty, ξ je bezrozměrný koeficient. Pokud uvedený vzorec existuje, musí být splněn jak pro číselné části veličin, tak pro jejich rozměry. V rozměrech proto bude mít vzorec tvar (volíme SI soustavu)

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{kg}^{\beta}\mathrm{kg}^{\gamma}\mathrm{m}^{\gamma}\mathrm{s}^{-2\gamma}. \tag{9}$$

Levá a pravá strana se musí rovnat, každá jednotka tedy musí mít na pravé a levé straně tutéž mocninu. Rovnosti mocnin pro jednotlivé jednotky dají soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -1 &= -2\gamma; \\ 0 &= \alpha + \gamma; \\ 0 &= \beta + \gamma\,, \end{aligned} \tag{10}$$

jejímž řešením jsou koeficienty

$$\alpha = 1/2; \qquad \beta = -1/2; \qquad \gamma = -1/2\,, \tag{11}$$

dosazením dostaneme výsledný vztah

$$\omega = \xi\sqrt{\frac{F}{lm}}\,. \tag{12}$$

Bezrozměrný koeficient ξ nelze z rozměrové analýzy určit.

4. Krátké vlny v misce naplněné kapalinou

Zadání: Krátké vlny jsou dominantně ovlivněny povrchovým napětím σ, naopak zanedbatelný je vliv tíhového pole (to ovlivňuje především velké vlny). Zkuste odhadnout tvar závislosti pro rychlost těchto vln. Předpokládejte, že rychlost vln bude závist na povrchovém napětí, jejich vlnové délce a hustotě kapaliny

Řešení: Provedeme standardní rozměrovou analýzu. Nezapomeňte, že povrchové napětí má rozměr $[\sigma]$ = N/m. Výsledek je

$$v \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda\rho}}\,. \tag{13}$$

2 ZÁKLADNÍ OPERACE S VEKTORY

1. Úhly, kolmice a průměty 1

Zadání: Jsou zadány vektory $\mathbf{A} = (1,\ 0,\ -1)$ a $\mathbf{B} = (1,\ -2,\ 3)$.

1. Najděte úhel mezi vektory 2**A** a **A**+3**B**;

2. Leží vektory **A**+**B** a **A**−**B**. v jedné rovině? Odůvodněte.

3. Najděte kterýkoliv jednotkový vektor mířící ve směru kolmém k vektorům **A** a **B**.

4. Najděte velikost průmětu vektoru **A** do směru určeného vektorem **A** – **B**. Nakreslete schematicky obrázek, v němž vyznačte vektory **A**, **A** – **B** a hledaný průmět.

Řešení:

Ad 1

$$\mathbf{U} = 2\mathbf{A} = (2, 0, -2)\,,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} + 3\mathbf{B} = (1, 0, -1) + (3, -6, 9) = (4, -6, 8)\,.$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{UV} = \frac{-8}{\sqrt{8}\,\sqrt{116}} = -0{,}2626\,,$$

$$\alpha = 105{,}2°.$$

Ad 2.

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2, -2, 2)\,,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (0, 2, -4)\,.$$

Oba vektory nejsou vzájemnými násobky, tedy tvoří rovinu, jejíž jsou součástí.

Ad 3.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (-2,-4,-2)\,,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{N} = \frac{(-2,-4,-2)}{\sqrt{24}} = \frac{(2,-4,-2)}{2\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\,.$$

Druhý z normálových vektorů má opačné znaménko.

Ad 4.

Nejprve určíme jednotkový vektor, do kterého budeme dělat průmět

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (0,\ 2,\ -4)\,,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{(0,2,-4)}{\sqrt{20}} = \frac{(0,2,-4)}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2)\,.$$

Hledaná projekce bude rovna velikosti projekce násobené směrem, tj.

$$\mathbf{A}_{\mathrm{C}} = (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \;=\; (A_x\tau_x + A_y\tau_y + A_y\tau_y)\boldsymbol{\tau} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2) = \left(0,\ \frac{2}{5},\ \frac{-4}{5}\right).$$

2. Úhly, kolmice a průměty 2

Zadání: Jsou zadány vektory $\mathbf{A} = (5,\ -3,\ -4)$ a $\mathbf{B} = (3,\ -4,\ -5)$.

1. Najděte úhel mezi vektory **A**+**B** a **A**−**B**.; leží vektory **A**, **B**, **A**+**B** a **A**−**B**. v jedné rovině? Odůvodněte.

2. Najděte kterýkoliv jednotkový vektor mířící ve směru kolmém k vektorům **A** a **B**.

3. Najděte velikost průmětu vektoru **A** do směru určeného vektorem **A**+**B**. Nakreslete schematicky obrázek, v němž vyznačte vektory **A**, **B**, **A**+**B** a hledaný průmět.

Nepoužívejte kalkulačky, ve výsledcích mohou být zlomky, odmocniny i goniometrické funkce.

Řešení:

Ad 1. Postupujeme dle zadání

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (8,\ -7,\ -9)\,,$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2,\ -1,\ 1)\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}||\mathbf{A}-\mathbf{B}|} = \frac{16-7-9}{\sqrt{64+49+81}\sqrt{4+1+1}} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,.$$

A, **B**, **A**+**B** a **A**−**B** leží v jedné rovině, neboť dvěma různoběžnými vektory lze proložit jedinou rovinu a jejich lineární kombinace rovněž leží v jedné rovině.

Ad 2. Jedna z možností je:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \big((-3)(-5)-(-4)(-4),\ (-4).3-5(-5),\ 5(-4)-(-3).3\big) = (-1,\ 13,\ 11)\,,$$

$$\mathbf{C}^0 = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{(-1,\ 13,\ 11)}{\sqrt{1+13^2+11^2}} = \frac{(-1,\ 13,\ 11)}{\sqrt{291}}\,.$$

Pracnější by bylo řešit rovnice $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = 0$, $|\mathbf{C}| = 1$, tedy 3 rovnice pro 3 neznámé.

Ad 3.

$$\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|}=(5,\ -3,\ -4)\cdot\frac{(-8,\ -7,\ -9)}{\sqrt{8^2+7^2+9^2}}=\frac{40+21+36}{\sqrt{194}}=\frac{97}{\sqrt{194}}.$$

3. Trojúhelník daný vektory

Zadání: Jsou zadány 3 vektory, $\mathbf{A}=(1,\ 1,\ 2),\ \mathbf{B}=(-1,\ 2,\ 1),\ \mathbf{C}=(3,\ 4,\ -5)$.

1. Najděte velikost průmětu vektoru **C** do kolmého směru k vektorům **A** a **B**. Mohou ležet vektory **A**, **B** a **C** v jedné rovině? Odůvodněte.

2. Nechť vektory **A** a **B** tvoří dvě strany trojúhelníka. Najděte všechny tři úhly v tomto trojúhelníku.

Nepoužívejte kalkulačky, ve výsledcích mohou být zlomky, odmocniny i goniometrické funkce.

Řešení:

Ad 1.

$$\left|\mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}\right|=\left|(3,\ 4,\ -5)\cdot\frac{(1,\ 1,\ 2)\times(-1,\ 2,\ 1)}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}\right|=\left|(3,\ 4,\ -5)\cdot\frac{(-3,\ -3,\ 3)}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}}\right|=\frac{36}{\sqrt{27}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ad 2. úhel mezi vektory **A** a **B**:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\frac{-1+2+2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3};$$

třetí stranu trojúhelníka tvoří rozdíl vektorů **A** a **B**, na znaménku rozdílu nezáleží, úhel mezi vektory **A** a **A**+**B** bude:

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})}{|\mathbf{A}||\mathbf{A}-\mathbf{B}|}=\frac{(1,\ 1,\ 2)\cdot(2,\ -1,\ 1)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\beta=\frac{\pi}{3};$$

třetí úhel spočítáme jako doplněk součtu obou úhlů do π, vyjde opět $\pi/3$, tedy jedná se o rovnostranný trojúhelník.

3 RYCHLOST A ZRYCHLENÍ

1. Vodorovný vrh

Zadání: Nalezněte tečné zrychlení vodorovně vrženého tělesa.

Řešení: Nejprve určíme složky rychlosti a zrychlení:

$$\begin{array}{l} x(t) = v_0 t\,, \\ y(t) = H - gt^2/2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v_x(t) = \dot{x} = v_0\,, \\ v_y(t) = \dot{y} = -gt\,, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_x(t) = 0\,, \\ a_y(t) = -g\,. \end{array} \qquad (14)$$

V dalším kroku nalezneme velikost rychlosti:

$$v(t) = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\,. \qquad (15)$$

Velikost tečného zrychlení bude

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,. \qquad (16)$$

Po dosazení konkrétního času nalezneme snadno velikost tečného zrychlení v tomto čase. Je zřejmé, že se velikost tečného zrychlení s časem mění. Alternativním postupem, jak získat tečné zrychlení, je projekce celkového zrychlení do směru rychlosti

$$a_\mathrm{t} = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v}\,. \qquad (17)$$

Přesvědčte se, že výsledek vyjde stejný. Pokud bychom potřebovali znát i jednotlivé složky tečného zrychlení (vodorovnou a svislou, použijeme jeho definici:

$$\mathbf{a}_\mathrm{t} \equiv a_\mathrm{t}\boldsymbol{\tau} = a_\mathrm{t}\frac{\mathbf{v}}{v} \qquad \Rightarrow \qquad (18)$$

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{t}x} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{v_x}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{v_0 g^2 t}{v_0^2 + g^2 t^2}\,; \\ a_{\mathrm{t}y} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{v_y}{v} \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,\frac{-gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = -\frac{g^3 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}\,. \end{aligned} \qquad (19)$$

2. Pohyb po šroubovici

Zadání: Těleso se pohybuje po trajektorii $x(t) = v_0 t + x_0$, $y(t) = R\cos\omega t$, $z(t) = R - R\sin\omega t$.

1. Najděte velikost rychlosti.

2. Najděte jednotkový tečný vektor k dráze.

3. Najděte velikost tečného a normálového zrychlení.

4. Nalezněte celkové, tečné a normálové zrychlení.

5. Určete všechny předchozí veličiny v čase $t_1 = 2$ s, je-li $v_0 = 3$ m/s, $R = 5$ m a $\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$.

Řešení: Nejprve derivováním nalezneme obecné formule pro rychlost a zrychlení

$$\begin{aligned} v_x &= v_0, \\ v_y &= -R\omega \sin \omega t, \\ v_z &= -R\omega \cos \omega t, \\ a_x &= 0, \\ a_y &= -R\omega^2 \cos \omega t, \\ a_z &= R\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \tag{20}$$

Ad 1

$$v = \sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2}\,. \tag{21}$$

Ad 2

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2}}\left(v_0, -R\omega \sin \omega t, -R\omega \cos \omega t\right). \tag{22}$$

Ad 3

Velikost tečného zrychlení můžeme najít dvojím způsobem: buď jako časovou změnu velikosti rychlosti, nebo jako průmět zrychlení do směru rychlosti

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{23}$$

$$a_t = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = a_x \tau_x + a_y \tau_y + a_z \tau_z = 0. \tag{24}$$

Normálové zrychlení bude $\mathbf{a}_\mathrm{n} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}$. Jeho velikost proto je

$$a_\mathrm{n} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = R\omega^2. \tag{25}$$

Ad 4

Výsledky poskládáme z předchozích výpočtů:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0, -R\omega^2 \cos \omega t, R\omega^2 \sin \omega t)\,, \\ \mathbf{a}_\mathrm{t} &= (0, 0, 0)\,, \\ \mathbf{a}_\mathrm{n} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_\mathrm{t} = \mathbf{a}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

3. Mocninná křivka

Zadání: Těleso se pohybuje po křivce dané vztahem

$$x(t) = \alpha t\,, \qquad y(t) = \beta t^2\,, \qquad z(t) = \gamma t^3\,; \tag{27}$$

Určete rozměry konstant α, β, γ, je-li t čas. Nalezněte tečné a normálové zrychlení v čase $t = 10$ sekund od začátku pohybu pro číselné hodnoty konstant v SI

$$\frac{\alpha}{[\alpha]} = 1\,, \qquad \frac{\beta}{[\beta]} = 1/20\,, \qquad \frac{\gamma}{[\gamma]} = 1/300\,. \tag{28}$$

Řešení: Nejprve určíme ze vztahu (27) rozměry konstant:

$$[\alpha] = \text{m/s}\,; \quad [\beta] = \text{m/s}^2\,; \quad [\gamma] = \text{m/s}^3\,. \tag{29}$$

Nyní již snadno určím velikosti konstant v zadání křivky:

$$\frac{\alpha}{[\alpha]} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1[\alpha] = 1\ \text{m/s}\,;$$
$$\frac{\beta}{[\beta]} = 1/20 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05\,[\beta] = 0{,}05\ \text{m/s}^2\,; \tag{30}$$
$$\frac{\gamma}{[\gamma]} = 1/300 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{300}\ \text{m/s}^3\,.$$

Ze vztahu (27) nalezneme derivováním obecné formule pro rychlost a zrychlení

$$\mathbf{v} = (\alpha, 2\beta\, t, 3\gamma t^2)\,; \quad \mathbf{a} = (0, 2\beta, 6\gamma t)\,. \tag{31}$$

Tečné zrychlení nalezneme jako projekci do směru rychlosti

$$\mathbf{a}_\mathrm{t} = (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v}\right)\frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\,\mathbf{v}\,. \tag{32}$$

Do obecného vztahu nyní dosadíme

$$\mathbf{a}_\mathrm{t} = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}(v_x, v_y, v_z) = \frac{4\beta^2 t + 18\gamma^2 t^3}{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2 + 9\gamma^2 t^4}\,(\alpha, 2\beta\, t, 3\gamma t^2)\,. \tag{33}$$

Normálové zrychlení bude

$$\mathbf{a}_\mathrm{n} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\mathrm{t}\,. \tag{34}$$

Do výrazů (33) a (34) nyní dosadíme hodnoty konstant a čas t = 10 s.

4 POHYBOVÁ ROVNICE

1. Volný pád

Zadání: Sestavte pohybovou rovnici a navrhněte diferenční schéma pro její řešení.

Řešení: Numerické řešení provedeme ve čtyřech krocích:

1. Sestavíme pohybovou rovnici,
2. pohybovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu,
3. derivace nahradíme diferencemi,
4. vypočteme nové hodnoty za pomoci starých.

Pohybová rovnice pro volný pád vyplývá z druhého Newtonova pohybového zákona

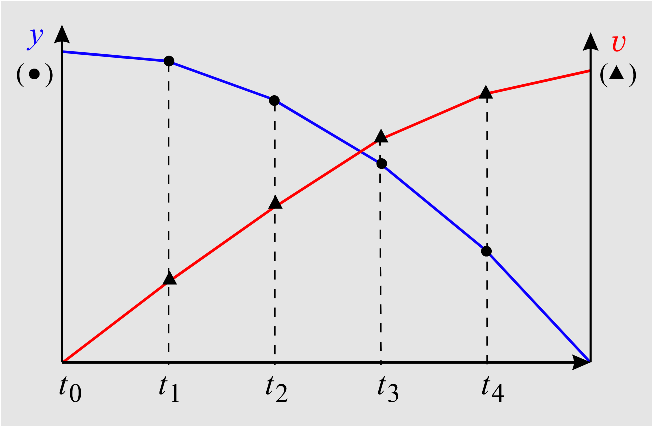
$$m\ddot{y} = -mg\,. \tag{35}$$

Výsledná diferenciální rovnice $\ddot{y} = -g$ je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si proto ukážeme právě na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení. Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v\,, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -g\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Nebudeme nyní hledat řešení v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$\begin{aligned} y_n &= y(t_n)\,, \\ v_n &= v(t_n)\,. \end{aligned} \tag{37}$$



Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &\cong v_n\,, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong -g\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Nyní vypočteme hodnoty $n + 1$ pomocí hodnot n:

$$y_{n+1} \cong y_n + v_n \, \Delta t \, ,$$
$$v_{n+1} \cong v_n - g \, \Delta t \, . \tag{39}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme jednotlivé hodnoty

$$y_0, v_0 \quad \Rightarrow \quad y_1, v_1 \quad \Rightarrow \quad y_2, v_2 \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad . \tag{40}$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a rychlost (počáteční podmínky), například $y_0 = H$, $v_0 = 0$.

2. Těleso padající v kapalině

Zadání: Navrhněte diferenční schéma pro těleso padající v kapalině.

Řešení: Na těleso bude působit síla a odpor prostředí úměrný rychlosti:

$$m\ddot{y} = -mg - \alpha v \tag{41}$$

Pohybovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \, ,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{m} v - g \, . \tag{42}$$

Nyní nahradíme derivace diferencemi

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \cong v_n \, ,$$
$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \cong -\frac{\alpha}{m} v_n - g \, , \tag{43}$$

a vypočteme nové hodnoty za pomoci starých:

$$y_{n+1} \cong y_n + v_n \Delta t \, ,$$
$$v_{n+1} \cong v_n - \frac{\alpha}{m} v_n \Delta t - g \Delta t \, . \tag{44}$$

3. Těleso padající z dálky na Slunce

Zadání: Navrhněte diferenční schéma pro volný radiální pád tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg do Slunce, jehož hmotnost je $M = 2 \times 10^{30}$ kg. Těleso začíná padat z oběžné dráhy Země ($r_0 = 150 \times 10^6$ km) s nulovou počáteční rychlostí (tíhové zrychlení na Zemi je $g = 10$ m/s^2, gravitační konstanta je $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ N kg^{-2}m^2). Určete pohyb za první tři minuty s krokem 60 s.

Řešení: Nejprve sestavíme pohybovou rovnici

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM}{r^2} \, . \tag{45}$$

Pohybovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v \,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -G\frac{M}{r^2} \,. \tag{46}$$

Nyní nahradíme derivace diferencemi

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{\Delta t} \cong v_n \,, \qquad \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \cong -G\frac{M}{r_n^2} \,, \tag{47}$$

a vypočteme nové hodnoty za pomoci starých:

$$r_{n+1} \cong r_n + v_n \Delta t \,, \qquad v_{n+1} \cong v_n - G\frac{M}{r_n^2}\Delta t \,. \tag{48}$$

Nyní do pravé strany dosadíme počáteční hodnoty a spočteme r_1, v_1. Z těchto hodnot určíme r_2, v_2 a tak dále.

5 DIFERENCIÁL, PŘÍRŮSTEK, GRADIENT

1. Jedna proměnná

Zadání: Určete změnu objemu koule při infinitezimální změně jejího poloměru

Řešení: Vyjdeme z obecného vztahu pro diferenciál funkce jedné proměnné určeného z její derivace

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x \tag{49}$$

a budeme ho aplikovat na objem koule

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 . \tag{50}$$

Nyní určíme první diferenciál

$$\mathrm{d}V = V'\,\mathrm{d}R = 4\pi R^2 \mathrm{d}R . \tag{51}$$

Interpretace výsledku je jasná. Jde o plochu koule přenásobenou přírůstkem poloměru. Takový vztah může fungovat jen pro nekonečně malý přírůstek poloměru. Pro konečný přírůstek by nebyl jasné, kde počítat plochu koule, zda na vnitřní části slupky, či na vnější, či někde uvnitř slupky. Proto můžeme pro konečný přírůstek pouze psát přibližný vztah:

$$\Delta V \doteq V'\,\Delta R \doteq 4\pi R^2 \Delta R . \tag{52}$$

2. Měření odporu

Zadání: Představte si, že měříte odpor nějakého prvku z Ohmova zákona, tj. budete měřit ampérmetrem proud protékaný prvkem a voltmetrem napětí na svorkách prvku. Výsledek měření je

$$\begin{aligned} I &= (10 \pm 1)\ \mathrm{A}\,; \\ U &= (5 \pm 0{,}1)\ \mathrm{V}\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Odhadněte maximální možnou chybu měření odporu.

Zadání: Při výpočtu odporu vyjdeme z Ohmova zákona

$$R(U,I) = \frac{U}{I} . \tag{54}$$

Pro funkci více proměnných nalezneme její změnu obdobně jako v minulém příkladu, opět půjde o derivaci funkce násobenou přírůstkem. Jen proměnných je nyní více, a tak přírůstky od všech argumentů sečteme:

$$\begin{aligned} f &= f(x_1,\ldots,x_N)\,; \\ \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\mathrm{d}x_N\,; \\ \Delta f &\doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\Delta x_N\,; \end{aligned} \tag{55}$$

Pro náš odpor bude platit

$$\Delta R \doteq \frac{\partial R}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial R}{\partial I}\Delta I = \frac{1}{I}\Delta U - \frac{U}{I^2}\Delta I; \tag{56}$$

První člen je způsobený chybami měření napětí, druhý chybami měření proudu. Oba členy mohou být kladné i záporné, protože chyby ΔU, ΔI jsou kladné i záporné. Může se stát, že se náhodně chyba měření napětí vyruší s chybou měření proudu. Maximální chybu měření odhadneme jakou součet absolutních hodnot obou členů, tj.

$$\begin{aligned} \Delta R_{\max} &\approx \left|\frac{1}{I}\Delta U\right| + \left|\frac{U}{I^2}\Delta I\right| = \left(\frac{1}{10}0{,}1 + \frac{5}{10^2}1\right)\Omega = \\ &= (0{,}01 + 0{,}05)\,\Omega = 0{,}06\;\Omega \end{aligned} \tag{57}$$

Na první pohled je jasné, že k chybě více přispěje ampérmetr. Výsledek měření odporu s maximální chybou lze tedy odhadnout jako

$$R = \frac{U}{I} = (0{,}50 \pm 0{,}06)\;\Omega \tag{58}$$

3. Kolmice k izoploše

Zadání: Nalezněte za pomoci diferencování kolmici k izoploše.

Řešení: Izoplochou nazýváme plochu konstantních hodnot nějaké skalární veličiny $f(x, y, z)$. Pokud jde o teplotu, hovoříme o izotermě, pokud jde o tlak, hovoříme o izobaře a pokud o hustotu o izodenzitále. Obecná definice izoplochy je

$$f(x, y, z) = C\,, \tag{59}$$

kde C je nějaká konstanta. Diferencováním získáme vztah

$$\begin{gathered} \mathrm{d}f = 0\,; \\ \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0\,. \end{gathered} \tag{60}$$

Poslední výraz můžeme zapsat jako skalární součin dvou vektorů

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}y) = 0\,. \tag{61}$$

Druhý vektor je obecný infinitezimální přírostek splňující rovnici (59), tedy nekonečně malý vektor ležící v izoploše. Vzhledem k tomu, že skalární součin je nulový, musí být první vektor kolmý na izoplochu. Tento vektor nazýváme gradient a značíme ho

$$\operatorname{grad} f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{62}$$

K alternativním označením také patří

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nabla f\,. \tag{63}$$

Všechny zápisy jsou jen zkratkou zápisu (62). Symbolu obráceného písmene delta ∇ říkáme „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo nabla (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského Nev(b)el. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 př. n. l. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „*slope*“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil.

4. Kolmice na vrstevnice

Zadání: Představte si, že nadmořská výška kopce je dána formulí: $h(x, y) = 5\exp[-x^2 - 9y^2]$. Nalezněte kolmé vektory k vrstevnicím v bodech o souřadnicích A = [3,0]; B = [−3,1].

Řešení: Rovnice vrstevnic jsou $h(x, y) = \text{const}$. Jde o analogii izoploch z minulého příkladu, máme ale jen dvě proměnné, takže namísto izoploch budeme mí jen izočáry, tedy vrstevnice. Tento vztah je snadné upravit na rovnici elipsy

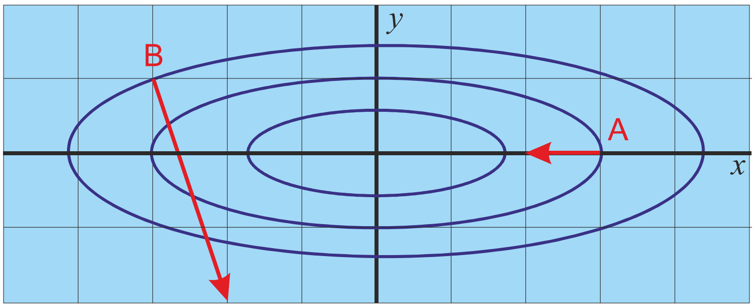
$$(x/3)^2 + y^2 = \text{const}. \tag{64}$$

Kolmice k vrstevnicím v libovolném bodě jsou

$$\mathbf{n} = \text{grad}\, h = (\partial h/\partial x, \partial h/\partial y) = 5\exp[-x^2 - 9y^2]\,(-2x, -18y) \sim (-x, -9y). \tag{65}$$

Nepodstatné konstanty mění jen délku vektoru a nic nemění na tom, že vektor je kolmý k vrstevnici, proto jsme tyto konstanty vynechali. Nyní dopočteme kolmice v zadaných bodech:

$$\mathbf{n}_A \sim (-3, 0) \sim (-1, 0);\ \mathbf{n}_B \sim (+3, -9) \sim (+1, -3). \tag{66}$$



5. Kolmice na křivku

Zadání: Nalezněte kolmici k parabole $y = x^2$ v jejím vrcholu a v bodě [1,1].

Řešení: Postup je stejný jako u izoploch nebo izočar. Naši parabolu můžeme chápat jako izočáru

$$f(x, y) = y - x^2 = 0 \tag{67}$$

Volbou jiné konstanty na pravé straně bychom dostali posunutou parabolu (jinou izočáru). Kolmici snadno nalezneme jako gradient:

$$\mathbf{n} = \text{grad}\, f = (-2x, 1) \tag{68}$$

V bodech A = [0, 0] a B = [1, 1] budou kolmice

$$\mathbf{n}_A = (0, 1)\,; \qquad \mathbf{n}_B = (-2, 1)\,. \tag{69}$$

Nakreslete si parabolu, oba body a obě kolmice.

6. SÍLA, PRÁCE, ENERGIE

1. Mechanická práce

Zadání: Částice se pohybuje v silovém poli $\mathbf{F} = (-kx, -mg, -kz)$ po křivce, která je průsečíkem ploch $y = x$, $z = ay^2$. Nalezněte mechanickou práci, kterou silové pole vykoná při přemístění tělesa z výšky H do počátku souřadnic. Použijte hodnoty $m = 1$ kg, $g = 10$ ms^{-2}, $k = 2$ N/m, $a = 0{,}5$ m^{-1}.

Řešení 1: Rovnice obou ploch jsou

$$y = x\,; \qquad z = ay^2. \tag{70}$$

Z těchto rovnic určíme souřadnice počátečního bodu, koncový bod je v počátku souřadnic:

$$A = [H, H, aH^2]\,; \qquad B = [0, 0, 0] \tag{71}$$

Nyní budeme křivku γ danou průsečíkem obou ploch parametrizovat, za parametr t zvolíme souřadnici x:

$$x = t\,, \quad y = t\,, \quad z = at^2. \tag{72}$$

Snadno nahlédneme, že se parametr t mění od hodnoty H do nuly. Element křivky bude dán diferenciály

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}z = 2at\,\mathrm{d}t. \tag{73}$$

Silové pole má v místě křivky tvar

$$\mathbf{F} = (-kx, -mg, -kz) = (-kt, -mg, -kat^2)\,. \tag{74}$$

Snadno již nalezneme práci vykonanou při přemístění těles po křivce γ dané vztahy (72)

$$\Delta A = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_\gamma F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z = \int_{t_A}^{t_B} \left(-kt\,\mathrm{d}t - mg\,\mathrm{d}t - 2ka^2t^3\,\mathrm{d}t\right). \tag{75}$$

Nyní provedeme integraci

$$\Delta A = \left[-k\frac{t^2}{2} - mgt - \frac{ka^2t^4}{2}\right]_H^0 = \frac{1}{2}kH^2 + mgH + \frac{1}{2}ka^2H^4\,. \tag{76}$$

Řešení 2: Zkusíme, zda není silové pole

$$\mathbf{F} = (-kx, -mg, -kz)\,. \tag{77}$$

konzervativní, tedy zda by k němu nešlo najít potenciální energii tak, aby silové pole bylo minus gradientem potenciální energie. V našem případě to jde, taková potenciální energie je

$$W_\mathrm{p} = \frac{1}{2} k x^2 + mgy + \frac{1}{2} k z^2 \,. \tag{78}$$

Vyzkoušejte si, že platí $\mathbf{F} = -\nabla W_\mathrm{p}$. V konzervativním poli nezáleží výsledek na volbě křivky a vykonaná práce je

$$\Delta A = -\Delta W_\mathrm{p} = W_\mathrm{p}(A) - W_\mathrm{p}(B) \,. \tag{79}$$

Po dosazení počátečního a koncového bodu (71) máme

$$\Delta A = \frac{1}{2} kH^2 + mgH + \frac{1}{2} ka^2 H^4 \,, \tag{80}$$

což je vztah (76), který jsme také získali přímou integrací.

2. Síla v centrálním poli

Zadání: Nalezněte všechny tři složky síly v centrálním poli daném vztahem $W_\mathrm{p}(r) = a/r^7$, kde r je vzdálenost od počátku souřadnicové soustavy.

Řešení: Radiální vzdálenost vyjádříme v kartézských souřadnicích, tj. $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$:

$$W_p(x,y,z) = \frac{a}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/2}} = a\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-7/2} \,. \tag{81}$$

Nyní již snadno získáme jednotlivé složky síly derivováním složené funkce, tj. derivujeme nejprve vnitřní funkci a poté vnější funkci:

$$F_x = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x} = -a\,2x(-7/2)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-9/2} = \frac{7ax}{r^9} \,. \tag{82}$$

Obdobně pro ostatní složky máme

$$F_y = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial y} = \frac{7ay}{r^9} \,. \tag{83}$$

$$F_z = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial z} = \frac{7az}{r^9} \,. \tag{84}$$

Výsledné silové pole tedy je

$$\mathbf{F} = \frac{7a}{r^9}(x,y,z) = \frac{7a}{r^9}\mathbf{r} = \frac{7a}{r^8}\frac{\mathbf{r}}{r} \,. \tag{85}$$

3. Diferenční schéma z potenciální energie

Zadání: Těleso se pohybuje v potenciální energii $W_\mathrm{p}(x) = V_0(1-\cos ax)$, $V_0 = 0.8$ J, $a = 1$ m^{-1}, $m = 1$ kg. Sestavte pohybovou rovnici (v jedné dimenzi), navrhněte pro ni diferenční schéma a řešte pohyb za první polovinu sekundu v pěti časových krocích ($\Delta t = 0.1$ s). Počáteční výchylka je nulová, počáteční rychlost je 1 m/s.

Řešení: Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}x} = -aV_0 \sin ax \tag{86}$$

Derivace je obyčejná, jelikož se v potenciální energii vyskytuje jediná proměnná. Standardním postupem převedeme tuto diferenciální rovnici na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v\,, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{aV_0}{m}\sin ax\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Nyní nahradíme derivace konečnými diferencemi

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t} &\doteq v_n\,, \\ \frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t} &\doteq -\frac{aV_0}{m}\sin(ax_n)\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Posledním krokem je výpočet nových hodnot z hodnot starých:

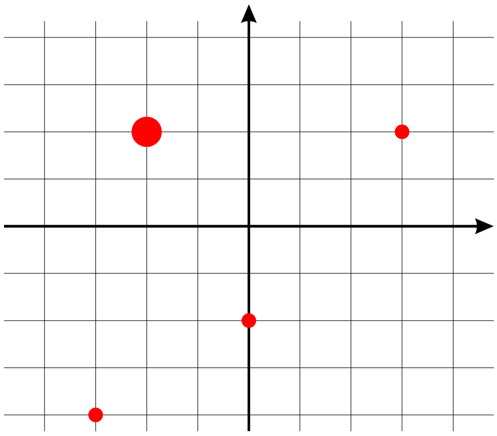
$$\begin{aligned} x_{n+1} &\doteq x_n + v_n\Delta t\,, \\ v_{n+1} &\doteq v_n - \frac{aV_0}{m}\sin(ax_n)\,\Delta t\,. \end{aligned} \tag{89}$$

Z pohybové rovnice jsme získali jednoduché diferenční schéma. Do pravé strany dosadíme počáteční podmínky a spočítáme nové hodnoty v čase $t_0 + \Delta t$. Postup opakujeme tak dlouho, jak je třeba.

7 HMOTNÝ STŘED, ROTAČNÍ POHYBY

1. Hmotný střed soustavy bodů

Zadání: Nalezněte hmotný střed soustavy bodů podle obrázku. Malé body mají hmotnost 1 g, velké body 5 g. Zakreslete do obrázku polohu vypočteného hmotného středu.



Řešení: Vyjdeme z definice hmotného středu

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} = \frac{\sum\limits_{a=1}^{4} m_a \mathbf{r}_a}{\sum\limits_{a=1}^{4} m_a}. \tag{90}$$

Gramy se v čitateli a ve jmenovateli zkrátí, výsledek bude tedy ve stejných jednotkách, v jakých jsou zadány polohy jednotlivých bodů (v našem případě bezrozměrné). Tělesa očíslujeme od jedné do čtyř zleva doprava. Potom máme:

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} = \frac{1\,(-3,-4)+5\,(-2,2)+1\,(0,-2)+1\,(3,2)}{1+5+1+1} = \frac{(-10,6)}{8} = (-1.25;\,0.75)\,. \tag{91}$$

2. Moment síly a moment hybnosti

Zadání: Nalezněte moment síly působící vzhledem k počátku na těleso o hmotnosti m, které bylo vodorovně vrženo rychlostí v_0 (tíhové zrychlení je g) z výšky H. Určete moment hybnosti pohybujícího se tělesa. Nakreslete.

Řešení: Nejprve si napišme klíčové vektory, tj. polohový vektor, hybnost a sílu:

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = (v_0 t,\ H - gt^2/2,\ 0)\,;\\ \mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} = (mv_0, -gt, 0)\,;\\ \mathbf{F} = (0, -mg, 0)\,.\end{gathered} \tag{92}$$

Nyní již snadno nalezneme příslušné momenty:

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = (0\,,0, -v_0 mg\,t)\,;\\ \mathbf{b} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \left(0\,,0, -mv_0 gt^2 - (H - gt^2/2)mv_0\right) = (0,0,-mv_0 H - mv_0 gt^2/2).\end{gathered} \tag{93}$$

Oba momenty míří kolmo na rovinu pohybu a mají velikosti

$$M = mgv_0 t\,; \qquad b = mv_0(H + gt^2/2). \tag{94}$$

3. Ždímačka

Zadání: Ždímačka rotuje s frekvencí $f = 1\,500$ ot/min. Poloměr bubnu je $R = 30$ cm. Při otevření se motor vypne a ždímačka se působením brzdy zastaví za 4 s. Po kolika otáčkách se zastaví buben? Jaký je průběh odstředivého zrychlení kapesníku na obvodu bubnu?

Řešení: Nejprve si zapišme počáteční podmínky úlohy, tj. počáteční úhlovou frekvenci (je dána otáčkami ždímačky) a úhel otočení v čase $t = 0$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,; \qquad f = \frac{1\,500}{1\ \mathrm{min}} = \frac{1\,500}{60\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{Hz}\,; \qquad \varphi_0 = 0\,. \tag{95}$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici

$$J\ddot{\varphi} = M_F \tag{96}$$

Moment síly na pravé straně bude dán brzdným momentem M, bude působit proti pohybu, proto napíšeme $M_F = -M$ a provedeme první integraci (rovnice je lineární s konstantní pravou stranou)

$$J\ddot{\varphi} = -M \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{M}{J} \quad \Rightarrow$$

$$\omega(t) = -\frac{M}{J}t + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = -\frac{M}{2J}t^2 + c_1 t + c_2\,.$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek $\omega(0) = \omega_0$, $\varphi(0) = 0$:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{J}t\,; \qquad \varphi(t) = \omega_0 t - \frac{M}{2J}t^2\,. \tag{97}$$

Zajímá nás situace na konci pohybu, tj. v koncovém čase $t_\mathrm{k} = 4$ s, kdy bude úhlová frekvence již nulová a úhel bude roven koncovému úhlu φ_k:

$$0 = \omega_0 - \frac{M}{J}t_\mathrm{k}\,; \qquad \varphi_\mathrm{k} = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_\mathrm{k}^2\,. \tag{98}$$

Z první rovnice můžeme spočítat neznámý podíl M/J a poté z druhé koncový úhel φ_k:

$$\frac{M}{J} = \frac{\omega_0}{t_k};$$

$$\varphi_k = \omega_0 t_k - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_k^2 = \omega_0 t_k - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_k}t_k^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t_k .$$

Hledaný počet otáček a průběh odstředivého zrychlení jsou:

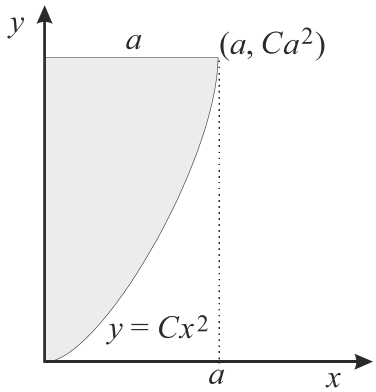
$$N = \varphi_k/2\pi = \frac{1}{2}\frac{\omega_0 t_k}{2\pi} = \frac{1}{2} f t_k = 50 .$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\omega_0 - \frac{M}{J}t\right)^2 = R\left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{t_k}t\right)^2 = R\omega_0^2\left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^2 . \tag{99}$$

Buben ždímačky vykoná ještě 50 otáček. Odstředivé zrychlení bude postupně slábnout z hodnoty $R\omega_0^2$ na nulu, které dosáhne v koncovém čase t_k.

4. Moment setrvačnosti parabolické výseče

Zadání: Určete moment setrvačnosti útvaru na obrázku při otáčení kolem osy y, pokud je hmotnost útvaru m a horní hrana a:



Řešení: Nejprve určíme plošnou hustotu útvaru. Plocha mezi souřadnicí x a objektem bude dána integrálem

$$S_0 = \int_0^a Cx^2 \mathrm{d}x = \left[C\frac{x^3}{3}\right]_0^a = C\frac{a^3}{3}. \tag{100}$$

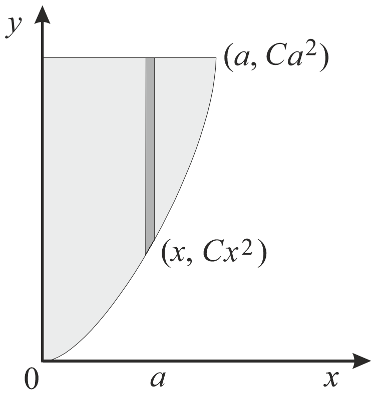
Plocha šedého útvaru bude rovna ploše ohraničujícího obdélníka minus S_0:

$$S = aCa^2 - C\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}Ca^3. \tag{101}$$

Hledaná plošná hustota je

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{3}{2}\frac{m}{Ca^3}. \tag{102}$$

Nyní určíme moment setrvačnosti. Útvar rozřežeme do svislých proužků s tloušťkou dx a výškou $Ca^2 - Cx^2$. Moment setrvačnosti sečteme přes všechny takové proužky, tj. budeme integrovat od 0 do a:

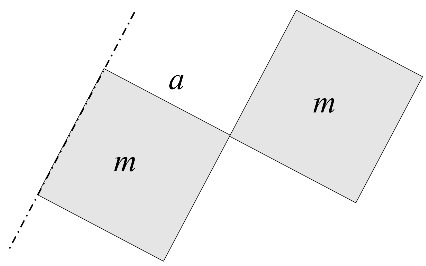


$$J=\int l^2\,\mathrm{d}m=\int l^2\,\sigma \mathrm{d}S=\int_0^a x^2\,\sigma C(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\sigma C\int_0^a (a^2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\frac{m}{Ca^3}C\left[a^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^a= \tag{103}$$
$$=\frac{3m}{2a^3}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)=\frac{3m}{2a^3}\frac{2a^5}{15}=\frac{1}{5}ma^2.$$

Povšimněte si, že výsledný moment má rozměr hmotnosti násobené druhou mocninou vzdálenosti a že nezávisí na strmosti paraboly C.

5. Moment setrvačnosti dvou čtverců

Zadání: Určete moment setrvačnosti dvou čtverců z obrázku vzhledem k vyznačené ose.



Řešení: |Moment setrvačnosti zjistíme jako součet momentů setrvačnosti obou čtverců. Čtverec dotýkající se osy otáčení bude mít moment setrvačnosti stejný jako tyč uchycená na okraji, tj. $ma^2/3$. Moment setrvačnosti druhého čtverce spočteme ze Steinerovy věty. Vzhledem k ose procházející hmotným středem bude jeho moment $ma^2/12$, tento moment posuneme o vzdálenost mezi osou otáčení a hmotným středem, tj. o 3/2 a:

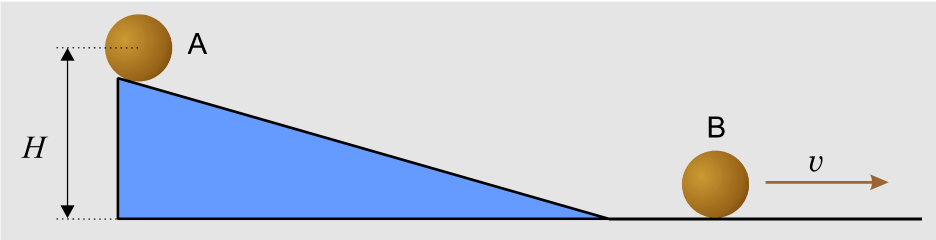
$$J=J_1+J_2=J_1+\left(J_S+md^2\right)=\frac{ma^2}{3}+\frac{ma^2}{12}+m\left(\frac{3}{2}a\right)^2=\frac{8}{3}ma^2. \tag{104}$$

Výsledný moment setrvačnosti tedy bude

$$J=\frac{8}{3}ma^2. \tag{105}$$

6. Těleso valící se po nakloněné rovině

Zadání: Spočtěte rychlost kuličky a poté válce (kola), které se skutálely po nakloněné rovině z výšky H.



Řešení: Rychlost určíme ze zákona zachování energie. V bodě A má těleso jen potenciální energii, v bodě B je jeho energie složena z kinetické energie translačního pohybu hmotného středu a rotačního pohybu vzhledem k hmotnému středu:

$$mgH = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} J \omega^2 \qquad \Rightarrow$$

$$mgH = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} J (v/R)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$mgH = \tfrac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right).$$

Nyní již snadno určíme rychlost kuličky nebo válce

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \dfrac{J}{mR^2}}} \,. \qquad (106)$$

Pro kouli máme $J = \tfrac{2}{5} mR^2$, pro válec $J = \tfrac{1}{2} mR^2$ a pro těleso, které klouže bez valení $J = 0$:

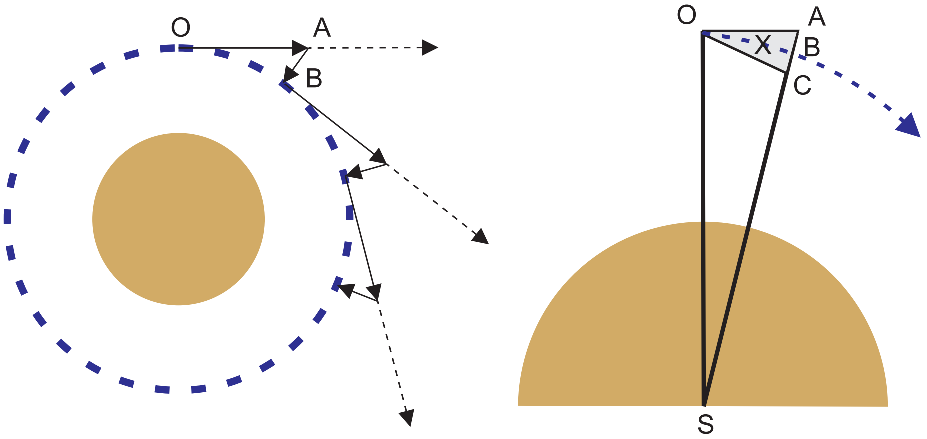
$$v_{\text{koule}} = \sqrt{\frac{10gH}{7}}\,; \qquad v_{\text{válec}} = \sqrt{\frac{4gH}{3}}\,; \qquad v_{\text{kluzák}} = \sqrt{2gH}\,. \qquad (107)$$

8 KEPLEROVY ZÁKONY, PROBLÉM DVOU TĚLES

1. Oběh tělesa po kruhové dráze

Zadání: Dokažte, že oběh tělesa po kruhové dráze lze chápat jako složení pohybu rovnoměrně přímočarého a volného pádu.

Řešení: Kdyby na oběžné dráze přestalo působit centrální těleso, pohyboval by se předmět nadále rovnoměrně přímočaře ve směru tečny k původní dráze. Současně s tímto pohybem se skládá volný pád k centrálnímu tělesu. (Jiná formulace: Rychlost oběhu se nemění, mění se však směr rychlosti. Změna směru rychlosti míří do centra, je způsobena centrálním tělesem a jde o volný pád.)



Z obrázku je zřejmá podobnost trojúhelníků (předpokládáme malý posun tělesa po oběžné dráze) OAC a SOB. Proto můžeme psát:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{XS}} \quad \Rightarrow \qquad \frac{2\Delta h}{\Delta l} = \frac{\Delta l}{r}\,. \tag{108}$$

Dosaďme nyní za volný pád $\Delta h = g\Delta t^2/2$ a za uraženou vzdálenost $\Delta l = v\,\Delta t$. Snadno nalezneme oběžnou rychlost

$$v = \sqrt{g\,r} = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,. \tag{109}$$

Za tíhové zrychlení jsme dosadili zrychlení v místě oběhu tělesa.

Poznámky:

- Jde o stejný výsledek, jaký bychom získali porovnáním odstředivé a gravitační síly.
- Při povrchu Země činí gravitační pád těles přibližně 5 m za první vteřinu, na kruhové dráze těsně se přimykající povrchu 5 m za každou vteřinu.
- Po dosazení za g lze výraz upravit na tvar $GmM/r^2 = mv^2/r$ a získat tak vztah pro „odstředivou“ sílu.

2. Třetí Keplerův zákon

Zadání: Odvoďte vztah mezi periodou oběhu tělesa a poloměrem dráhy pro kruhovou trajektorii.

Řešení: Označme poloměr trajektorie *a*, hmotnost tělesa *m*, hmotnost centra *M*. Z rovnosti odstředivé a gravitační síly plyne

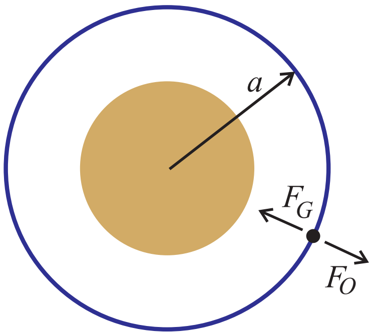
$$\frac{mv^2}{a} = G\frac{mM}{a^2} . \tag{110}$$

Použijeme-li pro rychlost vztah

$$v = \frac{2\pi a}{T} , \tag{111}$$

dostaneme třetí Keplerův zákon ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} . \tag{112}$$

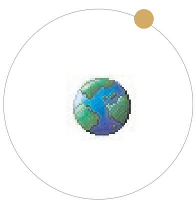


3. Gravitační působení Slunce a Země na Měsíc

Zadání: Nalezněte poměr gravitačních sil, kterými působí na Měsíc Země a Slunce. Která síla je větší?

Řešení:

$$\frac{F_{SM}}{F_{ZM}} = \frac{G\,M_M M_S / R_{MS}^2}{G\,M_M M_Z / R_{MZ}^2} = \left(\frac{R_{MZ}}{R_{MS}}\right)^2 \cdot \frac{M_S}{M_Z} = 6.55\times10^{-6} \cdot 0.33\times10^{+6} \cong 2.18 . \tag{113}$$



Síla, kterou na Měsíc působí Slunce je přibližně dvakrát větší než síla působící od naší Země.

4. Příliv a odliv

Zadání: Pokuste se vysvětlit, proč dochází k přílivu a odlivu dvakrát za den.

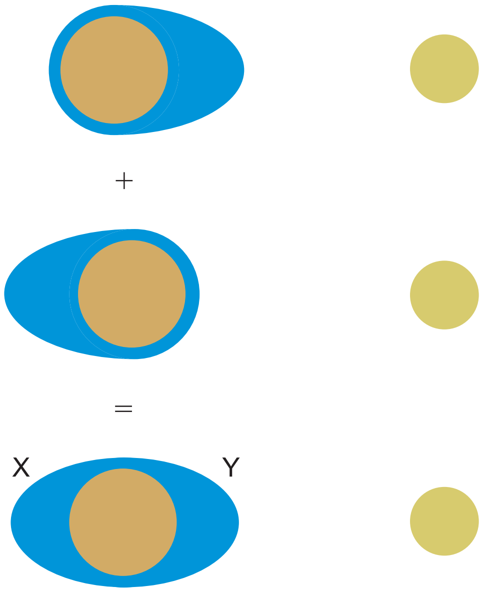
Řešení: Příliv a odliv vzniká díky slapovým silám. Jde o to, že gravitace na všechny části tělesa nepůsobí stejnou silou, na bližší působí větší silou. Nohy člověka stojícího na Zemi jsou přitahovány Zemí více než hlava. Pro člověka na povrchu Země je tento rozdíl malý.

Měsíc působí na Zemi pokrytou oceány a jeho přitažlivá síla je také pro různé oblasti různá. Výsledek si můžeme představit jako složení dvou situací:

a) Na horním obrázku voda tažená Měsícem od Země (protože je voda na přivrácené straně více přitahována).

b) Na prostředním obrázku je Země tažená Měsícem pryč od vod (protože je Země, která je blíže Měsíci více přitahována).

c) Na posledním obrázku je skutečná situace. V místě X je voda méně přitahována než Země, v místě Y je přitahována více. Díky rotaci pak nastává příliv i odliv dvakrát denně.



5. Hmotnost Země

Zadání: Pokuste se určit hmotnost Země z parametrů oběžné dráhy Měsíce (tj. oběžné doby a vzdálenosti).

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako při odvozování třetího Keplerova zákona pro kruhovou orbitu – z rovnováhy odstředivé a dostředivé síly pro Měsíc:

$$\frac{M_\mathrm{M} v^2}{R_\mathrm{ZM}} = G\frac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{ZM}^2}; \qquad v = \frac{2\pi R_\mathrm{ZM}}{T_\mathrm{M}}. \tag{114}$$

Po dosazení rychlosti do výrazu pro rovnováhu sil snadno získáme výsledný vztah:

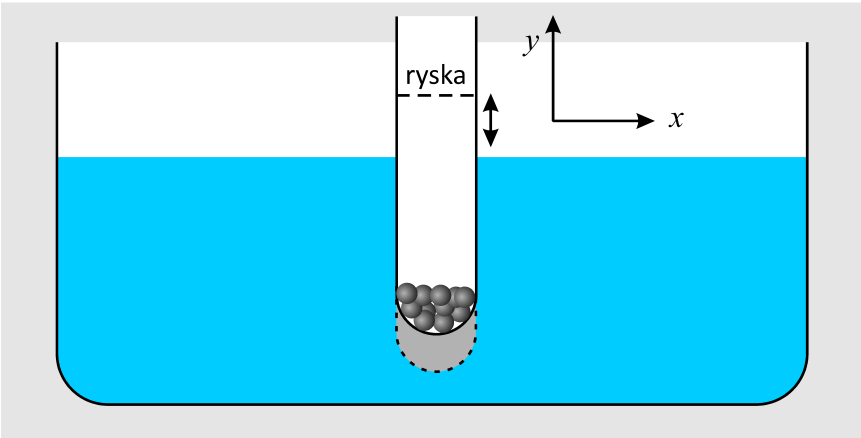
$$M_\mathrm{Z} = \frac{4\pi R_\mathrm{ZM}^3}{G T_\mathrm{M}^2}. \tag{115}$$

Poznámka: Parametry dráhy Měsíce lze relativně snadno získat experimentálně (oběžnou dobu a vzdálenost). K výpočtu je však třeba znát ještě gravitační konstantu. Proto se první snahy o její zjištění (L. V. Eötvösovy experimenty s přitahováním koulí zavěšených na torzním vláknu) nazývaly „Vážením Země". Po dosazení za známé hodnoty R_ZM, T_M, G dostaneme $M_\mathrm{Z} = 6\times10^{24}$ kg.

9 HARMONICKÉ OSCILACE

1. Zkumavka ve vodě

Zadání: Zkumavka zatížená broky se pohupuje na vodní hladině. Určete frekvenci a periodu kmitů. Průřez zkumavky je $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, hmotnost zkumavky s broky $m = 40$ g, hustota vody 1 $\mathrm{g/cm}^3$ a tíhové zrychlení předpokládejte $10\ \mathrm{m/s}^2$. Předpokládejte, že kmity zkumavky neovlivní výšku hladiny v kádince.



Řešení: Předpokládejme, že na začátku je zkumavka v klidu, tj. tíhová síla je právě kompenzována vztlakovou silou. Na zkumavce si uděláme rysku nebo nakreslíme značku, která je přesně v počátku souřadnic spojených s kádinkou. Poté do zkumavky strčíme. Naše ryska se začne spolu se zkumavkou vychylovat tu na jednu a tu na druhou stranu od počátku souřadnicového systému (v rovnovážné poloze je ryska v počátku souřadnic pevných vzhledem k okolí). Porušíme-li rovnováhu, objeví se vratná vztlaková síla a kmity zkumavky můžeme popsat pohybovou rovnicí:

$$\begin{gathered} m\ddot{y} = pS \quad \Rightarrow \\ m\ddot{y} = -\rho g\, y\, S\,. \end{gathered} \tag{116}$$

Tuto rovnici uvedeme na standardní tvar

$$\ddot{y} + \frac{\rho g S}{m} y = 0\,. \tag{117}$$

Jde o rovnici harmonických kmitů, koeficient u nulté derivace je druhou mocninou úhlové frekvence, tj.

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}\,. \tag{118}$$

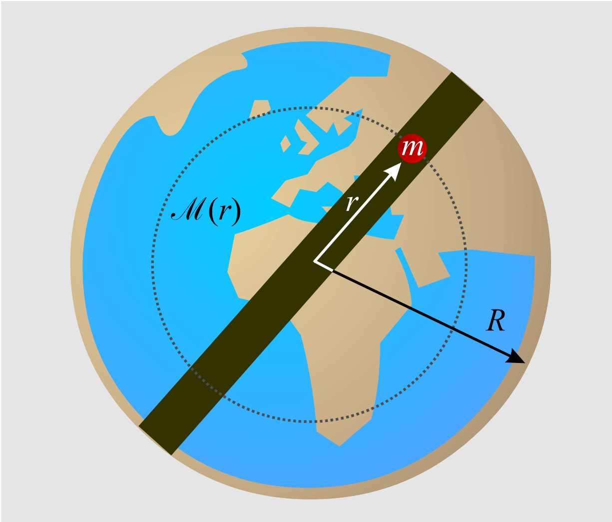
Periodu nyní snadno určíme ze vztahu $\omega = 2\pi/T$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}\,. \tag{119}$$

Po dosazení číselných hodnot (nezapomeňte je převést do soustavy jednotek SI!) dostaneme úhlovou frekvenci kmitů zkumavky $\omega = 5\ \mathrm{s}^{-1}$ a periodu $T \approx 1{,}26$ s.

2. Tunel skrze Zemi

Zadání: Představte si, že napříč Zemí je vystavěn tunel, do kterého vhodíme nějaký předmět. Jaký pohyb bude vykonávat? Vrátí se někdy zpět? Jestliže ano, kdy? Předpokládejte, že Zemi půjde provrtat a vnitřní teplo a tlak tunel nezničí. Těleso se při průletu neroztaví. Hustota Země je konstantní. Poloměr Země je R = 6 400 km a hmotnost $M = 6 \times 10^{24}$ kg.



Řešení: Lze ukázat (matematiku k tomu zatím neznáte), že na předmět o hmotnosti m působí gravitačně jen část Země uvnitř poloměru $r(t)$, na kterém se právě těleso nachází. Vliv vnějších částí se přesně vyruší. Podíl hmotnosti vnitřní části ku hmotnosti celé Země bude roven podílu příslušných objemů, tj.

$$\frac{\mathcal{M}(r)}{M} = \frac{r^3}{R^3} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{M}(r) = M\frac{r^3}{R^3}. \tag{120}$$

Nyní již snadno sestavíme pohybovou rovnici letícího tělesa

$$m\ddot{r} = -G\frac{m\mathcal{M}(r)}{r^2}. \tag{121}$$

Po dosazení za $\mathcal{M}$ a úpravě rovnice na standardní tvar (tj. převedeme všechny členy na jednu stranu a upravíme tak, aby koeficient u nejvyšší derivace byl roven jedné) dostaneme rovnici harmonických kmitů

$$\ddot{r} + G\frac{M}{R^3}r = 0. \tag{122}$$

Koeficient u nulté derivace je opět druhou mocninou úhlové frekvence, tj.

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}} = 0. \tag{123}$$

Periodu určíme ze vztahu $\omega = 2\pi/T$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \tag{124}$$

Po dosazení zjistíme, že předmět hozený do tunelu se vrátí za 1,4 hodiny.

3. Vibrující molekula

Zadání: Předpokládejte, že dvojatomová molekula má potenciální energii danou jednoduchým potenciálem

$$W_\mathrm{p} = W_0\left(1-\exp\left[-\alpha(r-r_0)^2\right]\right). \tag{125}$$

Proměnná r označuje vzdálenost atomů v molekule. Nakreslete průběh potenciální energie, diskutujte oblast přitažlivých a odpudivých sil. Nalezněte úhlovou frekvenci oscilací.

Řešení: Z fyzikálního hlediska je vzdálenost r nezáporná, pro vyšetření průběhu můžeme ale využít celý definiční obor, tj. reálnou osu. V krajních bodech definičního oboru platí

$$\lim_{r\to\pm\infty} W_\mathrm{p}(r) = W_0\,. \tag{126}$$

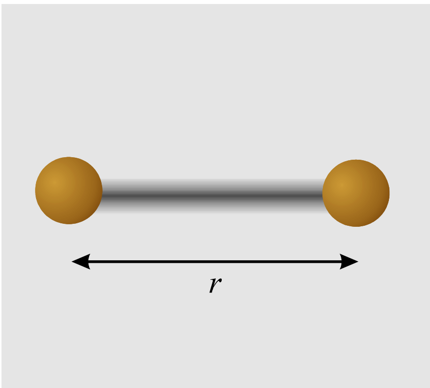
Pro určení průběhu nalezneme první a druhou derivaci zadané funkce:

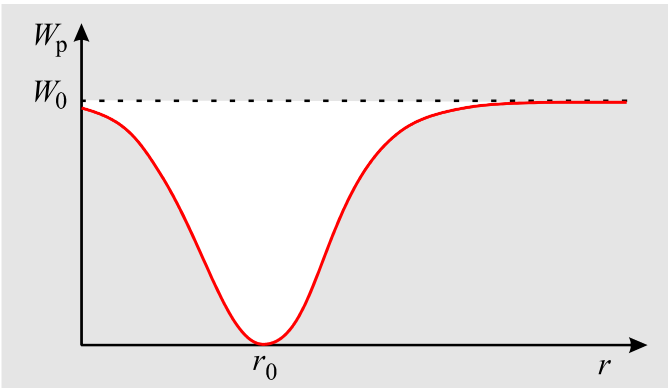
$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = 2W_0\alpha(r-r_0)\exp\left[-\alpha(r-r_0)^2\right];\\ \frac{\mathrm{d}^2W_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2} = 2W_0\alpha\exp\left[-\alpha(r-r_0)^2\right] - 4W_0\alpha^2(r-r_0)^2\exp\left[-\alpha(r-r_0)^2\right].\end{gathered} \tag{127}$$

Položíme-li první derivaci rovnou nule, získáme body podezřelé z extrému. Jediným řešením je hodnota

$$r = r_0\,, \tag{128}$$

ve které má samotná funkce nulovou hodnotu (tedy musí jít o minimum:





Jde o průběh potenciální energie s minimem v r_0. Pro $r < r_0$ je síla odpudivá a pro $r > r_0$ je síla přitažlivá (míří vždy k minimu potenciální energie). Výsledným pohybem proto budou kmity. Potenciál nahradíme pomocí Taylorova rozvoje parabolickou závislostí

$$W_\mathrm{p}(r) \approx \frac{1}{2}k(r-r_0)^2\,; \qquad k \equiv W_\mathrm{p}''(r_0) = 2\alpha W_0\,,. \tag{129}$$

Nezapomeňte, že pro určení tuhosti oscilací musíme do druhé derivace dosadit minimum, tedy r_0. Standardním způsobem nyní určíme úhlovou frekvenci kmitů molekuly:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\alpha W_0}{m}}\,. \tag{130}$$

4. Země jako harmonický oscilátor

Zadání: Země obíhá kolem Slunce po elipse s malou excentricitou. Vzdálenost od Slunce proto periodicky kolísá. Určete frekvenci a periodu těchto oscilací ze znalosti průběhu efektivní potenciální energie (součtu potenciální a rotační energie). Předpokládejte, že moment hybnosti Země je $b = 2{,}7\times10^{40}\ \mathrm{kg\,m^2s^{-1}}$, hmotnost Země $m = 6\times10^{24}$ kg, hmotnost Slunce $M = 2\times10^{30}$ kg a gravitační konstanta $G = 6{,}7\times10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-2}m^2}$.

Řešení: Energie planety na eliptické dráze je dána radiální, úhlovou a potenciální energií:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}. \tag{131}$$

Druhý člen je závislý pouze na poloze a můžeme ho proto přiřadit k potenciální energii. Interpretace členu jako kinetického nebo potenciálního je relativní a závisí na úhlu našeho pohledu. Zaveďme tzv. efektivní potenciální energii:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + W_{\mathrm{eff}}(r); \\ W_{\mathrm{eff}}(r) &\equiv \frac{b^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}. \end{aligned} \tag{132}$$

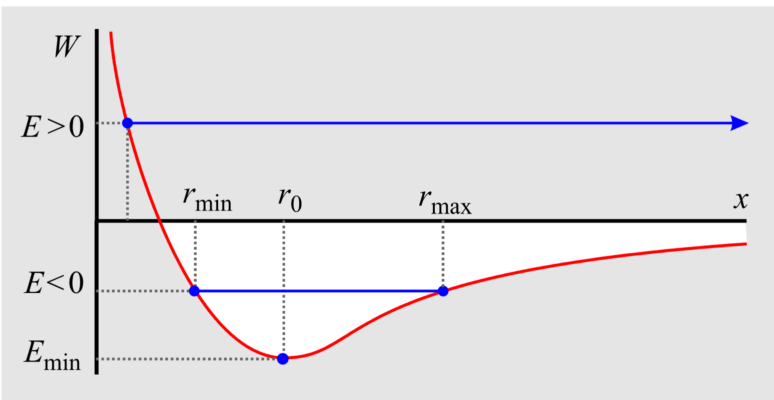
Z první rovnice snadno určíme radiální rychlost tělesa

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - W_{\mathrm{eff}}(r)\right)} \tag{133}$$

Je zjevné, že pohyb se může konat jedině v takových oblastech efektivní potenciální energie, kde je argument odmocniny nezáporný, tj. platí

$$E \geq W_{\mathrm{eff}}(r). \tag{134}$$

Průběh efektivní potenciální energie je znázorněn na obrázku. Z něho je patrné, že pro $E > 0$ je pohyb neomezený, $r \in \langle r_{\min}, \infty)$, pohyb se koná po hyperbole. Naopak pro $E < 0$ je pohyb omezený, $r \in \langle r_{\min}, r_{\max}\rangle$ a pohyb se koná po elipse. Limitními případy jsou $E = 0$ (pohyb po parabole) a $E = E_{\min}$ (pohyb po kružnici $r = r_0$). Bílou oblastí je označen vázaný pohyb.



Pohyb Země kolem Slunce lze tedy chápat jako pohyb v efektivní potenciální energii v okolí minima. Takový pohyb je přibližně harmonický – radiální vzdálenost Země od Slunce nepatrně periodicky kolísá, v přísluní je Země blíže ke Slunci, v odsluní dále. Potenciální energii lze v okolí minima nahradit parabolickou závislostí. Standardním postupem určíme minimum efektivní potenciální energie a tuhost oscilací. Z tuhosti pak již snadno nalezneme periodu pohybu:

$$r_0 = \frac{b^2}{Gm^2 M} \approx 150 \times 10^6 \text{ km};$$

$$k = W''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{G^4 m^7 M^4}{b^6}; \tag{135}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G^4 m^6 M^4 / b^6}} = \frac{2\pi b^3}{G^2 m^3 M^2} \approx 365 \text{ dní}.$$

10 DALŠÍ KMITY

1. Tlumený pohyb

Zadání: Řešte analyticky pohybovou rovnici pro tlumené kmity a nalezněte jejich útlum a frekvenci kmitů

$$\ddot{x} = -2A\dot{x} - 2A^2 x\,. \tag{136}$$

Řešení: Rovnici napíšeme v základním tvaru

$$\ddot{x} + 2A\dot{x} + 2A^2 x = 0\,. \tag{137}$$

Řešení budeme hledat ve tvaru exp(λt). Toto řešení dosadíme do rovnice a dostaneme

$$\lambda^2 \,\mathrm{e}^{\lambda t} + 2A\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} + 2A^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0\,. \tag{138}$$

Po zkrácení exponenciál dostaneme charakteristickou rovnici pro λ:

$$\lambda^2 + 2A\lambda + 2A^2 = 0\,, \tag{139}$$

která má řešení

$$\lambda_{1,2}\,\frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 - 8A^2}}{2} = -A \pm \sqrt{-A^2} = -A \pm \mathrm{i}A\,. \tag{140}$$

Obecné řešení tedy bude

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-At+\mathrm{i}At} + c_2\,\mathrm{e}^{-At-\mathrm{i}At} = \mathrm{e}^{-At}(a\cos At \;+\; b\sin At)\,. \tag{141}$$

Koeficient útlumu i frekvence kmitů mají hodnotu A.

Jiné řešení: Přímo z koeficientů rovnice (137) odečteme útlum a vlastní frekvenci netlumeného oscilátoru:

$$\delta = A\,; \qquad \omega_0 = \sqrt{2A^2}\,. \tag{142}$$

Frekvenci tlumených oscilací potom určíme ze vztahu

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{2A^2 - A^2} = A\,. \tag{143}$$

2. Dekrement útlumu a zbývající dráha

Zadání: Bod kmitá tlumeným harmonickým pohybem s počáteční amplitudou $A_1 = 1$ mm a s logaritmickým dekrementem útlumu $\Lambda = 2\times10^{-3}$. Určete celkovou dráhu, kterou bod ve svém pohybu ještě urazí.

Řešení: Celková dráha je rovna součtu všech amplitud výchylek na obě strany od rovnovážné polohy, násobenému dvěma (bod příslušnou dráhu vykoná vždy dvakrát – tam a zpět):

$$l = 2\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\right). \tag{144}$$

Poměr dvou po sobě následujících výchylek (tj. na opačné strany od rovnovážné polohy) je

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}=\cdots=\mathrm{e}^{\Lambda/2} \tag{145}$$

a současně platí

$$A_{k+1}=A_1\,\mathrm{e}^{-k\Lambda/2}\,.$$

Bude se tedy jednat o součet geometrické řady

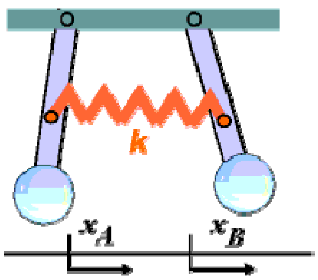
$$A_1+A_2+A_3+\cdots=A_1\left(1+\mathrm{e}^{-\Lambda/2}+\mathrm{e}^{-\Lambda}+\cdots\right)=A_1\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\Lambda/2}}\,. \tag{146}$$

a celková dráha bude podle vztahu (144) rovna

$$l=\frac{2A_1}{1-\mathrm{e}^{-\Lambda/2}}\doteq\frac{2A_1}{10^{-3}}=2000\,A_1=2\ \mathrm{m}.$$

3. Skládání kmitů

Zadání: Dvě stejná kyvadla jsou spojena napříč pružinou s malou tuhostí k. Nalezněte vlastní frekvence a vlastní kmity systému. Jak bude vypadat obecný kmit soustavy? Předpokládejte, že každé z kyvadel by samo o sobě kývalo harmonicky s frekvencí ω_0.



Řešení: Základní rovnice pro pohyb obou kyvadel doplníme o další harmonickou sílu odpovídající pružině:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_A&=-\omega_0^2x_A-\frac{k}{m}(x_A-x_B)\,,\\ \ddot{x}_B&=-\omega_0^2x_B-\frac{k}{m}(x_B-x_A)\,.\end{aligned} \tag{147}$$

Vlastním kmitem rozumíme takový kmit systému, při kterém všechny části systému kmitají (zde kývají) se stejnou frekvencí. Do soustavy proto dosadíme hledané řešení

$$x_A=A\exp[\mathrm{i}\omega t]\,;\qquad x_B=B\exp[\mathrm{i}\omega t]\,. \tag{148}$$

Získáme tak algebraickou soustavu rovnic pro amplitudy A a B:

$$\begin{pmatrix}\omega^2-\omega_0^2-\dfrac{k}{m}, & \dfrac{k}{m},\\ \dfrac{k}{m}, & \omega^2-\omega_0^2-\dfrac{k}{m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{149}$$

Netriviální (nenulové) řešení bude existovat pouze, pokud bude determinant soustavy nulový, což vede na dvě možnosti:

$$\omega_1 = \omega_0\,; \qquad\qquad A = B\,,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}}\,; \qquad A = -B\,. \tag{150}$$

Výsledek: Soustava má dvě vlastní frekvence a dva vlastní kmity. První vlastní kmit odpovídá synchronnímu pohybu obou kyvadel ($A = B$) a má původní frekvenci kyvadel. Frekvence tohoto modu tedy není ovlivněna pružinou.

Druhý vlastní kmit odpovídá pohybu kyvadel proti sobě ($A = -B$). Soustava koná kyvy na frekvenci ω_1 poněkud vyšší než ω_0 (pružina přispívá k tuhosti systému).

Libovolný jiný kyv systému je z důvodu linearity superpozicí předchozích řešení. Typické je vychýlení jednoho kyvadla, které začne předávat energii druhému kyvadlu a postupně se utlumí. Potom bude druhé kyvadlo předávat energii zpět prvnímu, atd. Můžeme hovořit buď o předávání energie a o rezonanci nebo o superpozici dvou vlastních kmitů s blízkou frekvencí, která vede na rázy.

11 ANALYTICKÁ MECHAMIKA

1. Kartézský svět

Zadání: Ukažte, že v konzervativním poli s potenciální energií $V(x, y, z)$ vedou Lagrangeovy rovnice pro hmotný bod v kartézské souřadnicové soustavě na Newtonovy rovnice.

Řešení: Hmotný bod má tři stupně volnosti, za zobecněné souřadnice zvolíme

$$q_1 = x; \qquad q_2 = y; \qquad q_3 = z. \tag{151}$$

potom

$$\begin{aligned} T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right); \\ L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = T - V &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - V(x,y,z). \end{aligned} \tag{152}$$

Příslušné Lagrangeovy rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}; \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

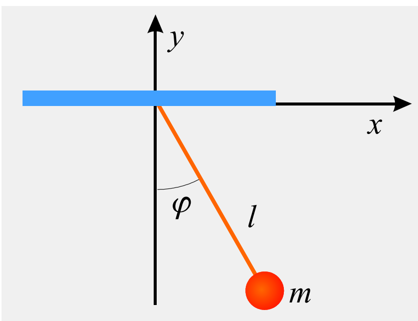
Všechny tři pohybové rovnice můžeme přepsat do běžného tvaru

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}; \qquad \mathbf{F} \equiv -\nabla V. \tag{153}$$

2. Rovinné kyvadlo

Zadání: Nalezněte pohybové rovnice kyvadla zavěšeného na nehmotném závěsu v Lagrangeově i v Hamiltonově formalizmu.

Řešení: Rovinné kyvadlo popíšeme jediným parametrem, za který zvolíme úhel φ.



Přejděme nyní z kartézských souřadnic k tomuto úhlu (v teoretické části skripta je kinetická energie odvozena jinak, bez zavedení kartézských souřadnic):

$$\begin{aligned} x(t) &= l\sin\varphi(t); \\ y(t) &= -l\cos\varphi(t), \end{aligned} \tag{154}$$

Nyní určíme rychlosti a vyčíslíme kinetickou a potenciální energii a Lagrangeovu funkci:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l\dot{\varphi}\cos\varphi;\\ \dot{y} &= l\dot{\varphi}\sin\varphi;\\ T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2;\\ V &= mgy = -mgl\cos\varphi;\\ L &= T-V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.\end{aligned} \tag{155}$$

Odpovídající Lagrangeova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{156}$$

Pro malé úhly je $\sin\varphi \approx \varphi$ a rovnice přechází v běžnou rovnici pro matematické kyvadlo. Nyní nalezneme zobecněnou hybnost a energii:

$$\begin{aligned}p &\equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi};\\ E &\equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi.\end{aligned} \tag{157}$$

Zobecněnou úhlovou rychlost dosadíme z prvního vztahu do druhého, a tím převedeme energii na Hamiltonovu funkci

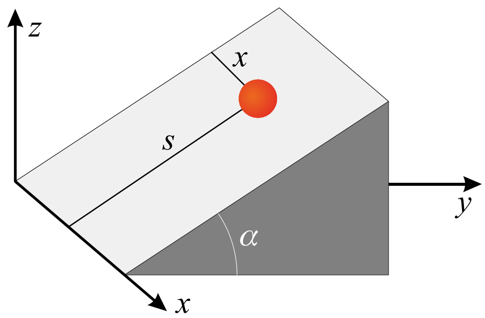
$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi. \tag{158}$$

Jako poslední krok nalezneme Hamiltonovy rovnice popisující pohyb kyvadla

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2};\\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi.\end{aligned} \tag{159}$$

3. Nakloněná rovina

Zadání: Nalezněte pohybové rovnice tělesa klouzajícího bez tření po nakloněné rovině v Lagrangeově formalizmu.



Řešení: Pohyb po nakloněné rovině má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenosti od hran nakloněné roviny $x(t)$ a $s(t)$. Standardním postupem máme:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(t);\\
y(t) &= s(t)\cos\alpha;\\
z(t) &= s(t)\sin\alpha;\\
T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{s}^2\right);\\
V &= mgz = mgs\sin\alpha;\\
L(s,\dot{x},\dot{s}) &= T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{s}^2\right)-mgs\sin\alpha,
\end{aligned}
\tag{160}
$$

a pohybové rovnice jsou

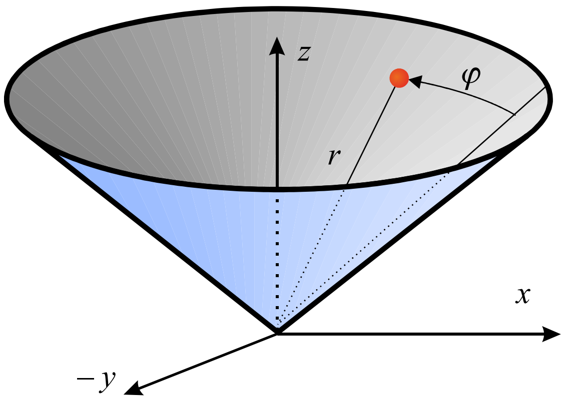
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \qquad\Rightarrow\qquad \ddot{x}=0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}-\frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \qquad\Rightarrow\qquad \ddot{s}=-g\sin\alpha.
\end{aligned}
\tag{161}
$$

Proměnná x je cyklická, proto se bude zachovávat hybnost p_x. Hybnost p_s se nezachová.

4. Plocha kužele

Zadání: sestavte pohybové rovnice hmotného bodu pohybujícího se bez tření v tíhovém poli po ploše kužele. Využijte Lagrangeův formalizmus.

Řešení: Pohyb má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenost částice od vrcholu kužele r a polární úhel φ. Využijeme tedy dvě ze sférických souřadnic, třetí – odklon θ_0 od osy z je na kuželové ploše konstantní.



Kinetickou energii můžeme určit z transformace mezi kartézskými a sférickými souřadnicem

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos\varphi(t)\sin\theta_0\,,\\
y(t) &= r(t)\sin\varphi(t)\sin\theta_0\,,\\
z(t) &= r(t)\cos\theta_0\,;
\end{aligned}
\tag{162}
$$

Je ale možné postupovat i přímo. Pokud se z daného místa pohneme infinitezimálně v radiální souřadnici, půjde o vzdálenost dr. Pohneme-li se v azimutu, bude vzdálenost $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Snadno sestavíme konetickou energii, potenciální energii a Lagrangeovu funkci:

$$
\begin{aligned}
T(r,\dot{r},\dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\sin^2\theta_0\,\dot{\varphi}^2\right);\\
V(r) &= mgz = mgr\cos\theta_0\,;\\
L(r,\dot{r},\dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\sin^2\theta_0\,\dot{\varphi}^2\right)-mgr\cos\theta_0\,,
\end{aligned}
\tag{163}
$$

a proto

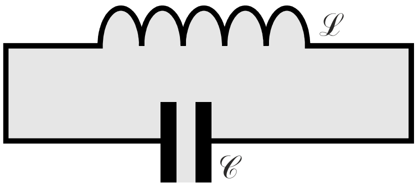
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{r}=mr\sin^2\theta_0\dot{\varphi}^2-mg\cos\theta_0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta_0\right)=0. \tag{164}$$

Povšimněte si, že v rovnici pro r na pravé straně vystupuje součet síly odstředivé a příslušné komponenty síly gravitační. Rovnice pro úhel φ není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti, proměnná φ je cyklická. Platí symetrie vzhledem k otočení ve směru úhlu φ.

5. LC obvod

Zadání: Řešte kmity klasického LC obvodu v Lagrangeově formalizmu.

Řešení: Za zobecněnou souřadnici budeme volit náboj $Q(t)$ odteklý z kondenzátorové baterie. Příslušnou zobecněnou rychlostí je elektrický proud $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$.



Označíme-li indukčnost $\mathscr{L}$ a kapacitu $\mathscr{C}$, potom Lagrangeova funkce bude kombinací energie vázané na cívce a energie vázané na kondenzátoru. Vzhledem k tomu, že energie cívky obsahuje časovou derivaci náboje, bude odpovídat kinetické energii v mechanice. Energie na kondenzátoru obsahuje pouze náboj Q, proto bude odpovídat potenciální energii. Snadno se přesvědčíme, že Lagrangeova funkce

$$L(Q,\dot{Q})=\frac{1}{2}\mathscr{L}\dot{Q}^2-\frac{Q^2}{2\mathscr{C}} \tag{165}$$

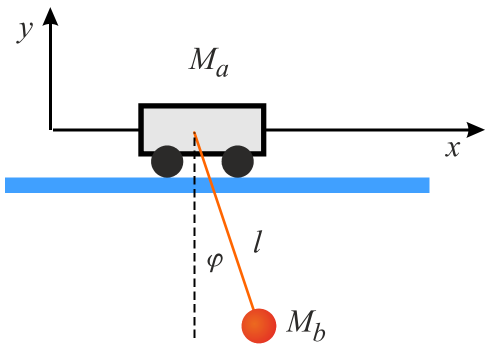
poskytne správnou rovnici $\mathscr{L}\mathscr{C}$ obvodu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}-\frac{\partial L}{\partial Q}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{Q}+\frac{1}{\mathscr{L}\mathscr{C}}Q=0. \tag{166}$$

Povšimněte si, že první člen v Lagrangeově funkci je energie vázaná v magnetickém poli cívky a druhý člen energie kondenzátorové baterie.

6. Landaův vozíček

Zadání: Nalezněte Lagrangeovu funkci pro kyvadlo zavěšené na vodorovně pohyblivém vozíčku (viz obrázek).



Řešení: Systém má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice zvolíme vodorovnou polohu $x(t)$ vozíčku a úhel $\varphi(t)$ kyvadla. Kartézské souřadnice vozíčku budeme značit indexem a a kartézské souřadnice kyvadla indexem b. Další postup je již standardní:

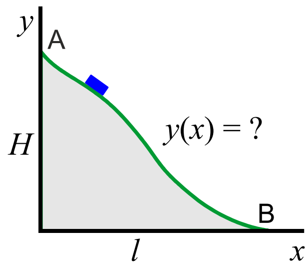
$$\begin{aligned} x_a(t) &= x(t); \qquad & x_b(t) &= x(t) + l\sin\varphi(t)\,, \\ y_a(t) &= 0; & y_b(t) &= -l\cos\varphi(t)\,; \end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned} L(\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}M_a\left(\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2\right)+\frac{1}{2}M_b\left(\dot{x}_b^2+\dot{y}_b^2\right)-M_a g y_a - M_b g y_b = \\ &= \frac{1}{2}M_a\dot{x}^2+\frac{1}{2}M_b\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+M_b g l\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{168}$$

7. Brachystochrona

Zadání: Nalezněte takový profil nakloněné roviny, aby těleso dopadlo na podložku v co možná nejkratším čase. Křivka definující profil se nazývá brachystochrona.

Řešení: Tentokrát nejde o úlohu z analytické mechaniky, ale o klasickou úlohu variačního počtu. Těleso má klouzat po nakloněné rovině obecného tvaru mezi dvěma body A a B, které jsou v různé výšce. Úkolem je nalézt rovnici tvaru nakloněné roviny tak, aby se těleso do bodu B dostalo za nejkratší čas.



Nejprve určíme obecný vztah pro celkový čas:

$$v=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}l}{v} \quad\Rightarrow$$
$$T=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\mathrm{d}l}{v(y)}=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{v(y)}=\int_{x_A}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\mathrm{d}x\,. \tag{169}$$

Rychlost určíme ze zákona zachování energie

$$mgy+\frac{1}{2}mv^2=mgH \tag{170}$$

Výsledná doba pohybu je

$$T=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{171}$$

Nyní je nutné nalézt křivku $y(x)$, pro kterou nabývá integrál (171) svého minima – jde opět o typickou úlohu variačního počtu. Nezávislou proměnnou v této úloze není čas, ale prostorová souřadnice x. Nehledáme zobecněnou souřadnici $q(t)$, ale funkci $y(x)$. Nutné podmínky pro extremálnost integrálu (Eulerovy-Lagrangeovy rovnice) proto budou mít tvar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0\,; \qquad F=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}}\,. \tag{172}$$

Přímé řešení by bylo značně nevýhodné. Pokud si povšimneme, že nezávislá proměnná x není ve funkcionálu zastoupena, musí se zachovávat „energie“

$$E \equiv \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{\sqrt{2g(H-y)}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} y' - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} = E_0 \,. \tag{173}$$

Jde o první integrál Eulerových-Lagrangeových rovnic a tedy o diferenciální rovnici prvního řádu. Povšimněte si, že „energie“ není v tomto případě rozdělitelná na „kinetickou“ část s derivacemi hledané funkce a „potenciální“ bez derivací. Po jednoduché úpravě máme

$$E_0 \sqrt{2g(H-y)} \sqrt{1+y'^2} = -1 \,. \tag{174}$$

Výraz umocníme na druhou

$$\begin{aligned} &2E_0^2 g(H-y)(1+y'^2) = 1 \qquad \Rightarrow \\ &H - y = \frac{K}{1+y'^2}\,; \qquad K \equiv \frac{1}{2E_0^2 g}\,. \end{aligned} \tag{175}$$

Nejjednodušší integrace je parametrická, tj. substituce $y' = \mathrm{tg}\,\varphi$. Parametrické řešení pro y potom je

$$H - y = \frac{K}{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad y = H - K\cos^2\varphi \,. \tag{176}$$

Zbývá nalézt řešení pro x z definičního vztahu pro substituci, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\varphi$ vyjádříme z (176):

$$y' = \mathrm{tg}\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad 2K\sin\varphi\cos\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,. \tag{177}$$

Separací máme

$$\mathrm{d}x = 2K\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \,, \tag{178}$$

po integraci máme parametrické zadání hledané křivky (brachystochrony)

$$x = K\varphi + K(\sin 2\varphi)/2 + L \tag{179}$$

$$y = H - K\cos^2\varphi \,. \tag{180}$$

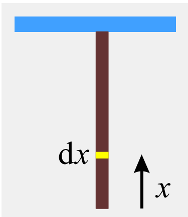
Integrační konstanty K a L lze určit z toho, že řešení musí procházet body $(0, H)$ a $(l, 0)$. Pro naše účely postačí jen obecné řešení, které je částí cykloidy:

12. MALÉ DEFORMACE

1. Drát prodloužený vlastní vahou

Zadání: Železný drát má hustotu $\rho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, Youngův modul pružnosti $E = 200\ \mathrm{GPa}$ a délku $l_0 = 200\ \mathrm{m}$. O kolik se tento drát prodlouží vlastní vahou?

Řešení: Drát bude zavěšen (jinak by spadl). Největší tah na něho bude v místě závěsu, nejnižší na dolním konci. Drát myšlenkově rozdělíme na infinitezimální úseky. Na každý z nich bude působit tah části drátu, která je pod ním:



Na námi zvolený element dx bude působit tah

$$\sigma = \frac{m(x)g}{S} = \frac{\rho S x\, g}{S} = \rho g\, x\,. \tag{181}$$

Prodloužení tohoto elementu bude z Hookova zákona

$$\mathrm{d}l = \frac{1}{E}\sigma\, \mathrm{d}x = \frac{1}{E}\rho g x\, \mathrm{d}x\,. \tag{182}$$

Celkové prodloužení drátu získáme integrací

$$\Delta l = \int \mathrm{d}l = \int_0^{l_0} \frac{1}{E}\rho g x\, \mathrm{d}x = \frac{\rho g l_0^2}{2E} \approx 8\ \mathrm{mm}\,. \tag{183}$$

2. Drát přetržený vlastní vahou

Zadání: Železný drát má hustotu $\rho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$ a mez pevnosti $\sigma_\mathrm{p} = 320\ \mathrm{MPa}$. Jakou by musel mít délku, aby se přetrhl vlastní vahou?

Řešení: Největší tah bude na drát působit v místě závěsu a bude dán celkovou tíží drátu. V okamžiku přetržení bude tento tah roven mezi pevnosti:

$$\sigma_\mathrm{p} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S l\, g}{S} = \rho g l\,. \tag{184}$$

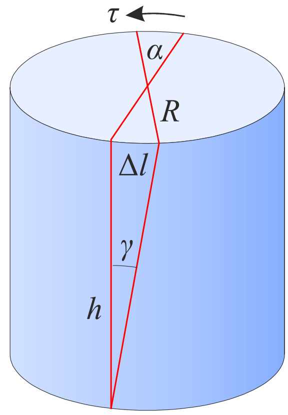
Odsud snadno určíme

$$l = \frac{\sigma_\mathrm{p}}{\rho g} \approx 4\ \mathrm{km}\,. \tag{185}$$

3. Válec v krutu

Zadání: Válec je postaven svisle, dolní podstava je přišroubována k podložce. Na horní podstavu působí síla, která zkroutí válec tak, že je horní podstava pootočená oproti dolní o úhel $\alpha = 0{,}001°$. Válec má výšku $h = 1\ \mathrm{m}$, průměr $R = 0{,}2\ \mathrm{m}$. Modul pružnosti ve smyku je 80 GPa. Určete tečné napětí τ na okraji horní podstavy.

Řešení: Nejprve si popsanou situaci podrobně zakresleme



Tečné napětí τ působící na horní podstavu je rovno síle působící na okraji vztažené na plochu horní podstavy. Toto napětí vyvolává smykovou deformaci

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau \tag{186}$$

Pro úhly γ a α platí (za předpokladu malých deformací):

$$\gamma \approx \frac{\Delta l}{h}, \tag{187}$$

$$\alpha = \frac{\Delta l}{R}. \tag{188}$$

Z těchto vztahů vyloučíme posunutí okraje Δl a úhel krutu γ a vypočteme tečné napětí τ:

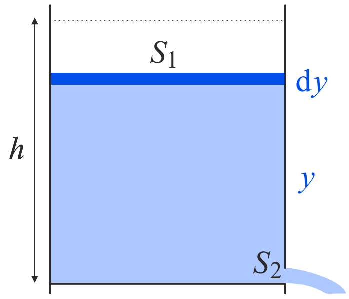
$$\tau = G\frac{R\alpha}{h} \approx 0{,}3\ \mathrm{MPa}. \tag{189}$$

Nezapomeňte, že před dosazením do výsledného vztahu musíte převést stupně na radiány.

13. TEKUTINY

1. Barel

Zadání: Válcový sud má průměr 80 cm a výšku 150 cm. Jak dlouho bude voda vytékat otvorem o ploše 2 cm^2? Sud je naplněný až po okraj.



Řešení: Při vytékání sudu musí platit především rovnice kontinuity v její nejjednodušší podobě pro nestlačitelnou kapalinu a alespoň krátkodobě ustálené proudění

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad \Rightarrow \qquad S_1\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = S_2 v_2 \,. \tag{190}$$

Rychlost v_1 je rychlost poklesu vodní hladiny (souřadnice y se zmenšuje, derivace podle času bude záporná, proto minus). Rychlost vytékání v_2 bude závislá na aktuální výšce hladiny a bude dána Bernoulliho rovnicí:

$$p_\mathrm{A} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = p_\mathrm{A} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{191}$$

Atmosférické tlaky p_A se na obou stranách rovnosti odečtou (jejich rozdíl u horní a dolní části sudu je neměřitelný). Výtoková rychlost je mnohem vyšší než rychlost poklesu hladiny, proto zanedbáme i druhou mocninu rychlosti v_1. Snadno určíme výtokovou rychlost v_2 a dosadíme ji do rovnice kontinuity:

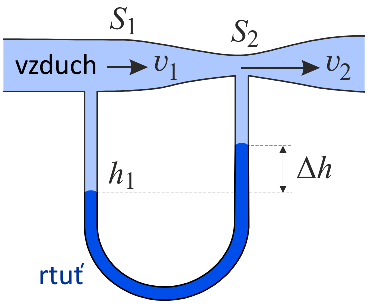
$$-S_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = S_2 \sqrt{2gy} \,. \tag{192}$$

V této diferenciální rovnici budeme separovat proměnné a poté provedeme integraci:

$$\int_0^T \mathrm{d}t = -\frac{S_1}{S_2}\int_0^h \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2gy}} = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 90 \text{ minut} \,. \tag{193}$$

2. Venturiho trubice

Zadání: Do Venturiho trubice vstupuje vzduch o hustotě 1,3 kg/m^3. Trubice se zužuje z průměru 2 cm na průměr 1 cm. Spojovací trubička je naplněna rtutí o hustotě 13 600 kg/m^3. Rozdíl výšek rtuti je 1,6 cm. Jakou rychlost má vtékající vzduch? (zdroj: reseneulohy.cz)



Řešení: Při řešení zkombinujeme rovnici kontinuity a Bernoulliho rovnici pro obě dvě části trubice. Třetím vztahem bude dorovnání rozdílu tlaků v obou částech trubice hydrostatickým tlakem rtuťového sloupce:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \,; \tag{194}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{195}$$

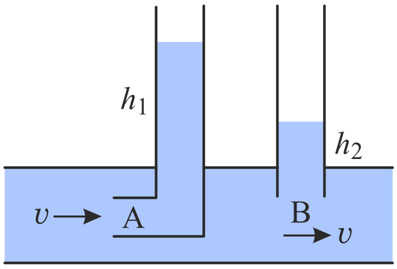
$$p_1 - p_2 = \rho_{\mathrm{Hg}} g\,\Delta h \tag{196}$$

Do Bernoulliho rovnice dosadíme za v_2 z rovnice kontinuity, za rozdíl tlaků z poslední rovnice a vypočteme hledanou rychlost vzduchu v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(S_1^2/S_2^2 - 1\right)}\frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{(d_1/d_2)^4 - 1}\frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{\rho}} \approx 15\ \mathrm{m/s}\,. \tag{197}$$

3. Pitotova trubice

Zadání: Určete rychlost proudění kapaliny v Pitotově trubici, je-li rozdíl výšek obou měřicích stanovišť 20 cm? (zdroj: reseneulohy.cz)



Řešení: V jedné části Pitotovy trubice je zahnutá měrná trubice, která zbrzdí rychlost kapaliny na nulu, druhá měrná trubice rychlost proudící kapaliny neovlivní. Pro obě měřicí místa zapíšeme Bernoulliho rovnici

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \tag{198}$$

První rychlost je nulová, druhá je rovna rychlosti proudění. Tlaky jsou kompenzovány hydrostatickými tlaky vodních sloupců:

$$h_1 \rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + h_2 \rho g\,. \tag{199}$$

Nyní snadno určíme rychlost proudění

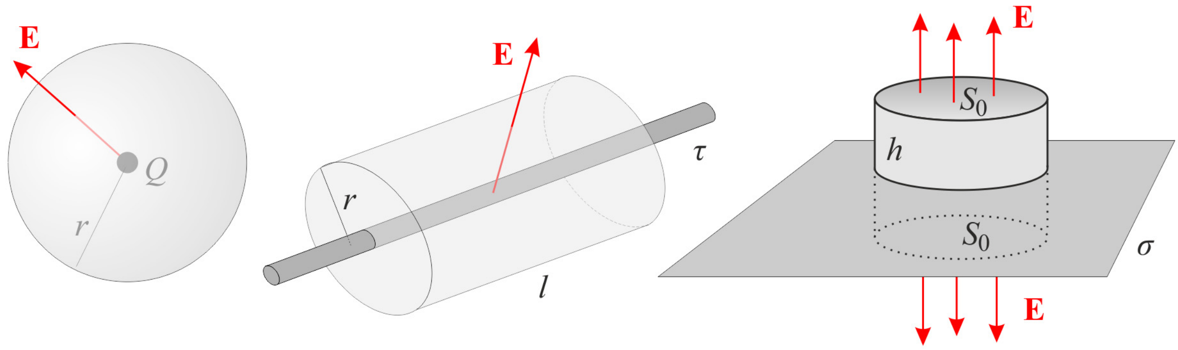
$$v = \sqrt{2\left(h_1 - h_2\right)g} \approx 2\ \mathrm{m/s}. \tag{200}$$

14 ELEKTRICKÉ POLE

1. Pole jednoduchých nabitých útvarů

Zadání: Určete z Gaussovy věty elektrostatiky elektrické pole v okolí bodového náboje, dlouhého nabitého vlákna a nekonečné nabité roviny.

Řešení: Nejdůležitějším součástí výpočtu je vždy správná volba integrační plochy. Snažíme se ji poskládat z ploch, které jsou buď rovnoběžné s polem, nebo kolmé na pole (v tom případě je ideální, pokud jsou všechny body plochy ve stejné vzdálenosti od zdroje). V obou případech je integrace triviální. U ploch, podél nichž pole jen klouže, je příspěvek k toku nulový a není co integrovat. U ploch, skrze které prochází pole kolmo je integrace také jednoduchá. Pokud je plocha ve stejné vzdálenosti od zdroje, bude mít na celé ploše pole konstantní hodnotu a vytkneme ho z integrace. Zbylý integrál je pouhou velikostí plochy. V zadaných případech budeme volit integrační plochy podle obrázku:



Ve všech třech případech vyjdeme z Gaussovy věty ve tvaru

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{201}$$

Nalevo integrujeme tok elektrického pole přes uzavřenou plochu, napravo je celkový náboj uzavřený v této ploše. Předpokládáme, že kolem objektu není dielektrikum. V opačném případě bychom jen konstantu ε_0 zaměnili za ε. V případě bodového náboje budeme za integrační plochu volit povrch koule ve vzdálenosti r od náboje. Na celém povrchu míří pole radiálně (tj. ve směru vnější normály) a velikost pole je na celé ploše stejná. Levá strana tedy bude

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_S E\,\mathrm{d}S = E\oiint_S \mathrm{d}S = E\,4\pi r^2\,.$$

Porovnáním s pravou stranou máme ihned

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{202}$$

což není nic jiného než Coulombův zákon. V případě lineárního nabitého objektu s lineární hustotou náboje τ (jednotkou je C/m) budeme za integračním plochu volit povrch válce dle obrázku. Uvnitř této plochy bude uzavřen náboj $Q = \tau\, l$. Podstavami válce žádný tok nepoteče (pole je s nimi rovnoběžné), u pláště bude podobná situace jako v případě bodového náboje:

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_S E\,\mathrm{d}S = E\oiint_S \mathrm{d}S = E\,2\pi r l\,.$$

Porovnáním s pravou stranou, kde vyjádříme náboj uvnitř válce, máme ihned

$$E\,2\pi r l = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{203}$$

V posledním případě nabité roviny s plošnou hustotou náboje σ (C/m^2) vedeme integrační plochu jako obecný válec protínající kolmo nabitou plochu. Uvnitř válce bude uzavřen náboj $Q = \sigma S_0$. Tentokrát nepoteče tok pláštěm, ale poteče naopak podstavami. U obou podstav bude příspěvek kladný, protože je elektrické pole rovnoběžné s vnější normálou plochy:

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_S E\,\mathrm{d}S = E \oiint_S \mathrm{d}S = E\,S_0 + E S_0 = 2 E S_0 \,.$$

Porovnáním s pravou stranou, kde vyjádříme náboj uvnitř válce, máme ihned

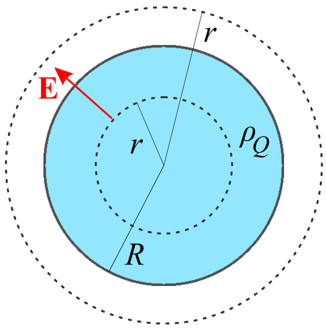
$$2 E S_0 = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{204}$$

Výsledek je zajímavý. V okolí bodového objektu ubývá pole jako $1/r^2$, v okolí lineárního útvaru ubývá pole jako $1/r$ a v okolní plošného objektu neubývá pole vůbec, tj. je homogenní a nezávisí na vzdálenosti od roviny.

	bodový náboj	nabitá přímka	nabitá rovina
elektrické pole	$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	$\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

2. Pole homogenně nabité koule

Zadání: Určete elektrické pole generované koulí, která je homogenně nabitá, má poloměr R a náboj Q.



Řešení: Opět použijeme Gaussovu větu a za integrační plochu budeme volit plochu koule o poloměru r. Pokud je $r > R$, bude uvnitř integrační plochy uzavřen celý náboj a výsledek se nebude lišit od vztahu pro bodový náboj

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}; \qquad r \ge R\,. \tag{205}$$

Pokud ale budeme uvnitř koule, bude k poli přispívat jen ta část celkového náboje, která je uzavřená v integrační ploše a Gaussova věta bude mít tvar:

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_r\,,$$

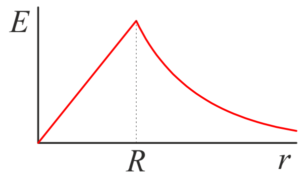
$$D\,4\pi r^2 = Q\frac{V(r)}{V(R)}\,,$$

$$\varepsilon E\,4\pi r^2 = Q\frac{r^3}{R^3}\,.$$

Odsud již snadno určíme pole uvnitř koule. Vnitřní i vnější řešení tedy bude:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,; & r \ge R\,, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{r}{R^3}\,; & r \le R\,. \end{cases} \tag{206}$$

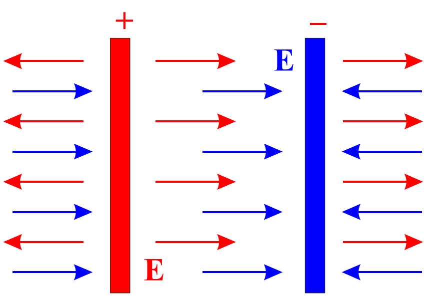
Elektrické pole nejprve lineárně roste od nuly v centru koule do maximální hodnoty na jejím povrchu. Vně koule pole klesá se druhou mocninou vzdálenosti a platí Coulombův zákon. Na povrchu koule dá vnitřní i vnější řešení stejnou hodnotu.



3. Kapacita deskového kondenzátoru

Zadání: Určete kapacitu deskového kondenzátoru vyplněného dielektrikem o permitivitě ε. Předpokládejte, že desky jsou natolik veliké, že můžete zanedbat okrajové efekty.

Řešení: Pole mezi deskami můžeme složit z polí od každé z desek (viz příklad 1 této kapitoly). Pokud zanedbáme okrajové efekty, bude pole mezi deskami dvojnásobné a vně desek nulové.



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}\,. \tag{207}$$

Napětí mezi deskami, bychom měli počítat jako křivkový integrál od jedné desky ke druhé z elektrického pole. Pole je ale homogenní, takže napětí bude pouhým součinem elektrického pole a vzdálenosti desek *d*:

$$U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon} = \frac{\frac{Q}{S}d}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{Qd}{\varepsilon S}\,. \tag{208}$$

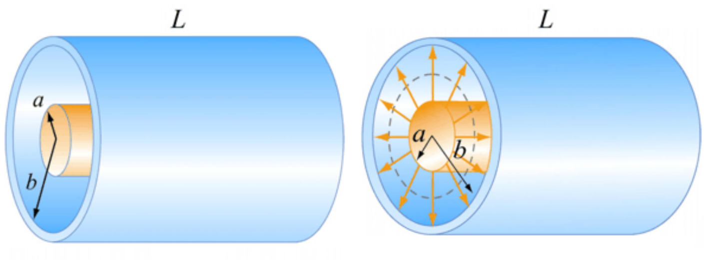
kde Q jsme označili náboj na deskách. Nyní již snadno určíme kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{S}{d}. \tag{209}$$

Čím větší desky, tím více se na ně vejde náboje, a tím větší je kapacita kondenzátoru C.

4. Kapacita válcového kondenzátoru

Zadání: Uvažujte válcový vodič o poloměru a obklopený souosou válcovou obálkou o poloměru b. Délka obou válců je L a předpokládejte, že L je mnohem větší než vzdálenost obou válců $b - a$, takže budete moci zanedbat okrajové jevy. Kondenzátor je nabitý tak, že vnitřní válec má náboj $+Q$ a vnější obálka náboj $-Q$. Jaká je kapacita kondenzátoru? Příklad je převzat z kurzu MIT 8.02T.



Řešení: Pro nalezení kapacity C je nejprve potřeba znát elektrické pole. Vzhledem k válcové symetrii problému zvolíme za Gaussovu plochu souosý válec délky $l < L$ o poloměru r, pro který platí $a < r < b$. Z Gaussova zákonu poté získáme

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = ES = E(2\pi r l) = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{210}$$

kde $\tau = Q/L$ je délková hustota náboje. Povšimněte si, že elektrické pole je nenulové jen v oblasti $a < r < b$. Pro $r < a$ je náboj uzavřený v ploše nulový, protože náboje jsou lokalizované na povrchu válcových kovových ploch. Pro $r > b$ je celkový náboj uzavřený v integrační ploše $q = \tau l - \tau l = 0$, protože Gaussova plocha obklopuje oba vodiče, jejichž náboje jsou stejné, ale mají opačné znaménko. Rozdíl potenciálů válcových ploch je

$$U = \phi_b - \phi_a = -\int_a^b E\,\mathrm{d}r = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}r}{r}\right) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{211}$$

kde jsme integrační křivku mezi povrchy volili podél siločar elektrického pole. Podle očekávání má vnější vodič se záporným nábojem nižší potenciál. Pro kapacitu dostáváme vztah

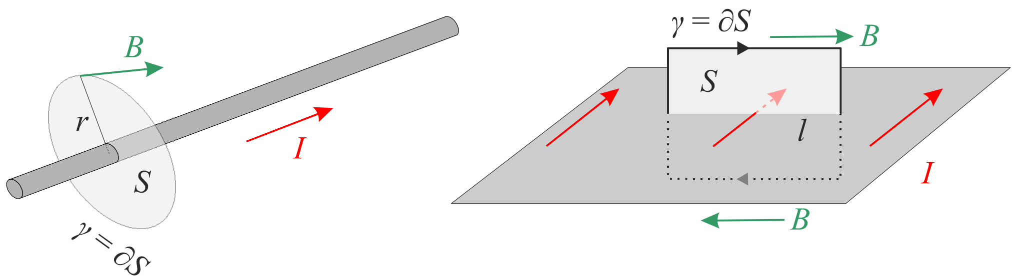
$$C = \frac{Q}{|U|} = \frac{\tau L}{\tau \ln(b/a)/2\pi\varepsilon_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}. \tag{212}$$

Kapacita opět závisí jen na geometrických faktorech, tj. na L, a, b.

15 MAGNETICKÉ POLE

1. Pole v okolí vodiče a plochy protékané proudem

Zadání: Určete magnetické pole v okolí dlouhého přímého vodiče protékaného elektrickým proudem. Určete také magnetické pole v okolí plochy protékané proudem.



Řešení: U obou výpočtů vyjdeme z Ampérova zákona

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I\,, \tag{213}$$

v němž se pokusíme volit integrační křivku co nejvýhodněji. Na pravé straně je celkový proud protékající plochou, jejíž hranice tvoří integrační cestu. U dlouhého vodiče budeme za integrační cestu volit kružnici o poloměru r. Magnetické pole má na celé kružnici konstantní velikost a jeho směr je vždy shodný s tečným směrem ke kružnici, a skalární součin proto přejde na obyčejné násobení:

$$\oint_\gamma B\,\mathrm{d}l = \mu_0 I\,;$$

$$B\oint_\gamma \mathrm{d}l = \mu_0 I\,;$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 I\,.$$

Výsledné magnetické pole bude ubývat s první mocninou vzdálenosti (je to typické pro jednodimenzionální zdroje polí):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{214}$$

V případě rovny protékané proudem bude mít pole (podle Ampérova pravidla pravé ruky) směr rovnoběžný s plochou a kolmý na tekoucí proud. Za integrační cestu zvolíme obdélník dle obrázku. Ke křivkovému integrálu na levé straně Ampérova zákona přispějí jen horní a dolní hrany obdélníku. Proud protékaný obdélníkem určíme z délkové hustoty i jako $I = i\,l$:

$$Bl + Bl = \mu_0 i\,l\,.$$

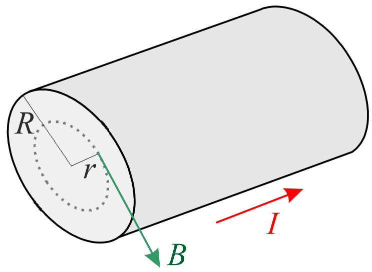
Z tohoto výrazu již snadno určíme magnetické pole

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \tag{215}$$

Povšimněte si, že pole nezávisí na vzdálenosti od proudové vrstvy, a je tedy homogenní, což je pro dvourozměrné zdroje polí typické.

2. Pole uvnitř vodiče

Zadání: Určete pole uvnitř i vně vodiče, jehož průřezem protéká konstantní proudová hustota. Vodič je natolik dlouhý, že můžete zanedbat okrajové efekty.



Řešení: Jako integrační křivku budeme volit kružnici o poloměru r. Pokud je $r > R$, bude integrační křivkou protékat veškerý proud a pro magnetické pole bude platit výpočet (216). Pokud povede integrační cesta uvnitř vodiče, tj. $r < R$, bude uvnitř ní protékat jen poměrná část elektrického proudu a z Ampérova zákona budeme mít:

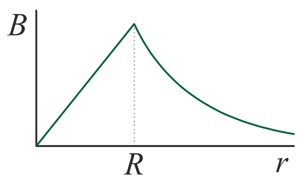
$$\oint_\gamma B\,\mathrm{d}l = \mu_0 I_r\,;$$

$$B\;2\pi r = \mu_0 I \frac{S(r)}{S(R)}\,;$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}\,.$$

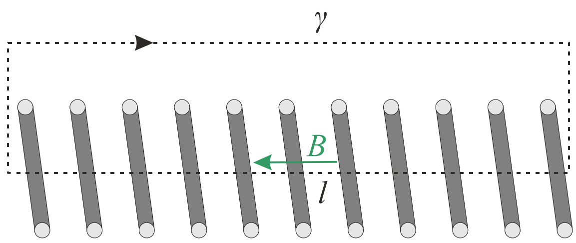
Odsud již snadno zjistíme, že pole uvnitř vodiče roste lineárně se vzdáleností od jeho osy až do maximální hodnoty na povrchu vodiče a dále klesá lineárně se vzdáleností:

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}; & r \geq R\,, \\ \dfrac{\mu_0 I\, r}{R^2}; & r \leq R\,. \end{cases} \tag{217}$$



3. Indukčnost solenoidu

Zadání: Určete indukčnost solenoidu (cívky), jejíž délka je l a má N závitů o průřezu S. Cívku považujte za natolik dlouhou, že můžete zanedbat okrajové efekty.



Řešení: Za integrační křivku budeme volit obdélník dle obrázku. Křivkový integrál bude nenulový jen na hraně procházející osou cívky. Na bočnících je pole na hrany kolmé a vně dlouhé cívky je pole nulové. Uvnitř cívky z Ampérova zákona dostaneme:

$$B\,l = \mu_0 NI \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 NI}{l}\,. \tag{218}$$

Magnetický indukční tok průřezem S cívky bude

$$\psi_B = B\,NS = \frac{\mu NI}{l}NS = \frac{\mu N^2 S}{l}I\,. \tag{219}$$

Nyní již snadno určíme indukčnost naší cívky:

$$L = \frac{\psi_B}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l}\,. \tag{220}$$

4. Magnetický tlak

Zadání: Odhadněte teplotu ve sluneční skvrně ze znalosti magnetického tlaku ve skvrně, koncentrace částic a teploty okolí.

Řešení: Celkový tlak vně i uvnitř skvrny musí být stejný. Ve skvrně je tlak součtem tlaku látky a magnetického tlaku:

$$p_{\mathrm{in}} + p_{\mathrm{mag}} = p_{\mathrm{out}}\,, \tag{221}$$

Magnetický tlak je roven hustotě magnetické energie, tj.

$$p_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} = \frac{B^2}{2\mu}\,. \tag{222}$$

Tlak látky je dán stavovou rovnicí:

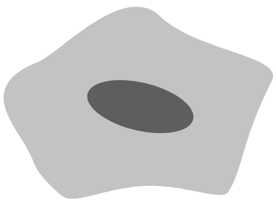
$$p = n\,kT\,. \tag{223}$$

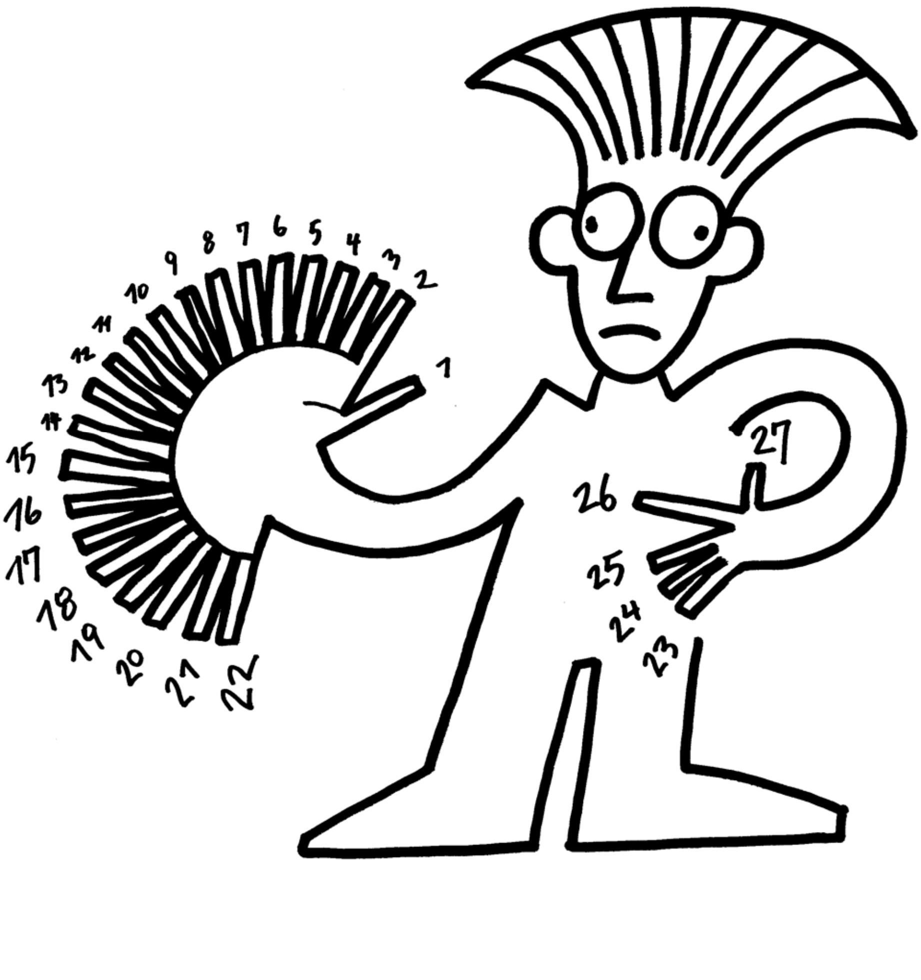
Celková bilance tlaku tedy bude

$$n\,k\,T_{\mathrm{in}} + \frac{B^2}{2\mu_0} = n\,k\,T_{\mathrm{out}}\,, \tag{224}$$

$$T_{\mathrm{in}} = T_{\mathrm{out}} - \frac{B^2}{2\mu_0 kn}\,. \tag{225}$$

Je zřejmé, že díky přítomnosti magnetického pole musí být teplota ve skvrně nižší než teplota okolí. Ve skutečnosti je rozdíl teplot cca 1 500 K. Teplota okolního povrchu je cca 6 000 K, teplota uvnitř skvrny cca 4 500 K. Skvrna při této teplotě také září, ale méně než okolí, proto se nám jeví jako tmavé místo.




1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27