MA 10-21

1. Nalezněte tečnou rovinu a rovnici přímky ve směru normály k ploše $x^2 - xy - y^2 - z = 0$ v bodě $A = (1, 1, -1)$.

2. Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_{x-2}^0 f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Zjistěte těžiště množiny B tvaru bumerangu omezené následujícími křivkami $x^2 = 2 - y$ a $x^2 = 2 - 2y$, je-li plošná hustota $f = 1$.

4. Mějme rovinná pole $\vec{F}_1 = (x^2, y^3)$ a $\vec{F}_2 = (y^2, x^3)$. Zjistěte, pro jaké $\tau \in \mathbb{R}$ je pole $\vec{G} = \vec{F}_1 + \tau \vec{F}_2$ potenciální a nalezněte jeho potenciál.

5. Pomocí rozvoje exponenciály $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ nalezněte Taylorův rozvoj funkce hyperbolický sinus: $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ v bodě $x_0 = -1$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

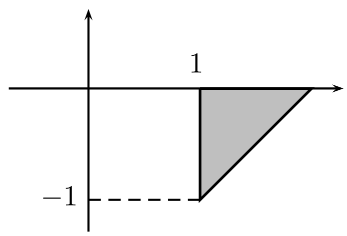
1. Gradient v bodě A je $\vec{n} = (2x - y, -2y - x, -1)\Big|_A = (1, -3, -1)$. Tečná rovina má rovnici

$$x - 3y - z + 1 = 0$$

a normálová přímka má parametrizaci $\varphi(t) = (t + 1, -3t + 1, -t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^{y+2} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/4}^0 \int_{1/\cos\varphi}^{2/(\cos\varphi - \sin\varphi)} f \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Z důvodů symetrie je x-ová souřadnice těžiště $x_t = 0$. Pro y_t vypočteme dva integrály,

$$\iint_B y = 2\int_0^{\sqrt{2}} \int_{1-\frac{1}{2}x^2}^{2-x^2} y\,dy\,dx = \frac{8\sqrt{2}}{5},$$
$$\iint_B 1 = 2\int_0^{\sqrt{2}} \int_{1-\frac{1}{2}x^2}^{2-x^2} 1\,dy\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Závěr: $y_t = \dfrac{\frac{8\sqrt{2}}{5}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{6}{5}$.

4. Podmínka $\dfrac{\partial G_2}{\partial x} = \dfrac{\partial G_1}{\partial y}$ dává, že $\tau = 0$. Potenciál je $g = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4 + C$.

5.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e}\frac{(x+1)^n}{n!} - e(-1)^n \frac{(x+1)^n}{n!}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{e} - e(-1)^n\Big)\frac{(x+1)^n}{n!}.$$

Poloměr konvergence je $R = \infty$.