1. Matice **Q** má 13 sloupců a 9 řádků. Její defekt je 5. Potom platí:
   (a) Hodnost matice **Q** je rovna 4.
   (b) Hodnost matice **Q** je rovna 8.
   (c) Matice **Q** je monomorfismus.
   (d) O hodnosti matice **Q** v tomto případě nelze rozhodnout.

2. Ať **A** a **B** jsou čtvercové matice typu n×n. Obě tyto matice jsou regulární. Pak je nutně regulární i následující matice.
   (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
   (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
   (c) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2$
   (d) $(\mathbf{A} + \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{B}$

3. Ať **A** a **B** jsou čtvercové matice typu 3×3, a ať pro tři různé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}$. Potom:
   (a) Nemůže platit rovnost $\mathbf{u} = \mathbf{o}$
   (b) Matice **A** a **B** mají nutně totožná jádra.
   (c) Matice **A** a **B** jsou nutně totožné.
   (d) Ani jedna z výše uvedených třech možností není pravdivá.

4. Ať **A** je čtvercová matice reálná matice typu 3×3 s vlastními čísly 1, 2 a 3. Potom *nutně* platí:
   (a) Matice **A** je regulární a diagonalisovatelná.
   (b) Matice **A** je regulární, ale není diagonalisovatelná.
   (c) Matice **A** není regulární, ale je diagonalisovatelná.
   (d) Matice **A** není ani regulární, ani diagonalisovatelná.

5. Matice **A** je nilpotentní a platí $\mathbf{A}^6 = \mathbf{O}$. Vyberte *nutně pravdivé* tvrzení.
   (a) Matice A má inversi.
   (b) $\mathbf{A}^5 = \mathbf{O}$
   (c) $\mathbf{A}^7 = \mathbf{O}$
   (d) Matice $\mathbf{A}^0$ nemá inversi.

6. Je dáno lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^3$ tři různé vektory v_1, v_2, v_3 takové, že $\mathbf{f}(\mathbf{v_1}) = \mathbf{o}$, $\mathbf{f}(\mathbf{v_2}) = \mathbf{o}$ a $\mathbf{f}(\mathbf{v_3}) = \mathbf{o}$. Hodnost zobrazení **f** *nemůže být*:
   (a) 3.
   (b) 2.
   (c) 1.
   (d) 0.

7. Ať **A** je reálná matice typu 2×2, ať každá ze soustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_1}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_2}$ má řešní. Pak *nutně platí*:
   (a) $\det(\mathbf{A}) = 0$
   (b) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ má právě jedno řešení.
   (c) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ má nekonečně mnoho řešení.
   (d) Existuje vektor $b \in \mathbb{R}^2$ takový, že soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení.

8. Mějme čtvercovou matici **A** typu n×n. potom *nutně* platí:
   (a) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26^n \cdot (\det(\mathbf{A}))^n$
   (b) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26 \cdot \det(\mathbf{A})$
   (c) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26 \cdot (\det(\mathbf{A}))^n$
   (d) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26^n \cdot \det(\mathbf{A})$

9. Mějme dvě čtvercové matice **A**, **B** typu n×n. Matice **A** a **B** jsou si podobné. Potom *nutně* platí:
   (a) Matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ si nemohou být podobné.
   (b) Matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ si nemohou být podobné.
   (c) Matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ a **B** si nemohou být podobné.
   (d) Neplatí ani jedno z výše uvedených

10. Mějme lineární zobrazení $\mathbf{f} : V \to W$. Vyberte *nepravdivé* tvrzení:
    (a) Je možné, že rank(f) = def(f).
    (b) Pokud je f isomorfismus, pak $\ker(\mathbf{f})$ je prázdná množina.
    (c) Pokud je V konečně dimensionální, pak $\dim(V) > \text{def}(\mathbf{f}) - \text{rank}(\mathbf{f})$.
    (d) Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ nemůže být zadáno joko $f(x) = 4 \cdot x + 2$. (Tj. v tomto případě volíme $V = W = \mathbb{R}^1$.)

11. Vektor v lineárního prostoru $\mathbb{R}^8$ nad $\mathbb{R}$ má vzhledem k uspořádané bázi $(b_1, b_2, \ldots, b_8)$ souřadnice $(1, 1, \ldots, 1)^T$. Potom vektor $w\ 2 \cdot v$ má vzhledem k uspořádané bázi $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_8 + b_1)$ souřadnice:
    (a) $(1, 1, \ldots, 1)^T$
    (b) $(2, 2, \ldots, 2)^T$
    (c) $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)^T$
    (d) Souřadnice nelze určit, protože $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_8 + b_1)$ není uspořádaná báze.

12. Ať L_1, L_2, L_3 jsou konečně dimensionální prostory, $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je isomorfismus a $\mathbf{g} : L_2 \to L_3$ je monomorfismus. Potom nutně platí:
    (a) Pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in L_3$ existuje vektor $\mathbf{v} \in L_1$ takový, že $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
    (b) $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : L_1 \to L_3$ je epimorfismus.
    (c) $\dim(L_1) \leq \dim(L_3)$.
    (d) Zobrazení **g** je epimorfismus.

13. Symbolem $\mathbb{R}[x]$ označujeme lineární prostor všech reálných polynomů s reálnými koeficienty. Následující podmnožina množiny $\mathbb{R}[x]$ je lineárním podprostorem lineárního prostoru $\mathbb{R}[x]$:
    (a) Množina všech polynomů sudého stupně společně s nulovým polynomem.
    (b) Množina všech polynomů nemajících reálný kořen.
    (c) Množina všech polynomů stupně přesně 2019 spolu s nulovým polynomem.
    (d) Množina všech polynomů s nulovými koeficienty u sudých mocnin.

14. V lineárním prostoru *V* mějme lineárně nezávislou množinu vektorů {**u**, **v**, **w**}. Následující množina vektorů je lineárně závislá:
    (a) {**v**, **w** + **u**, **w** − **v** + **u**}.
    (b) {**v** + **w**, **w** + **u**, **u** + **v**}.
    (c) {**v**, **v** − **w**, **v** + **w** + **u**}.
    (d) {2 · **v**, 2 · **w**, 2 · **u**}.

15. Mějme lineární prostor *V*, lineární zobrazení **f** : *V* → *V,* a dva lineárně nezávislé vektory **v** ∈ V, **w** ∈ V, které jsou vlastními vektory lineárního zobrazení **f** příslušnými vlastnímu číslu λ. Potom platí:
    (a) **f(v)** = λ · **w**
    (b) Vektor 2 · v je vlastní vektor lineárního zobrazení **f** příslušnými vlastnímu číslu 2 · λ.
    (c) Vektor f(v) je vlastní vektor lineárního zobrazení **f** příslušnými vlastnímu číslu 2 · λ.
    (d) Pro nenulové skaláry α a β je i vektor α · **v** + β · **w** vlastním vektorem lineárního zobrazení **f**.

16. Ať **A** je čtvercová matice typu 3×3 a ať det(**A**) = 3. Potom nutně platí (**E₃** je jednotková matice typu 3×3):
    (a) det(**-A**) = -3.
    (b) det(**A** + **E₃**) = 3 + 1 = 4.
    (c) det(**A** + **A**) = 3 + 3 = 6.
    (d) det(**A³**) = 3 × 3 = 9.

17. Nechť **f** : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
    (a) Pokud je **f** monomorfismus, pak je **f** i isomorfismus.
    (b) Pokud má **f** jádro celé $\mathbb{R}^3$, pak matice zobrazení **f** není diagonalizovatelná.
    (c) Zobrazení **x** → **f(x)** + $\mathbf{e_1}$ je také lineární.
    (d) Pokud je **f** nilpotentní, pak má f hodnost 3.

18. Nechť je S = (s_1,….,s_m), 2 ≤ m ≤ n, lineárně nezávislý seznam vektorů z $\mathbb{R}^n$. Vyberte nutně pravdivé tvrzení.
    (a) Seznam S nemůže být bází $\mathbb{R}^n$.
    (b) Seznam S nemůže generovat $\mathbb{R}^n$.

(c) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně nezávislý.
(d) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam generovat $\mathbb{R}^n$.

19. Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s čtvercovou maticí A. Rozhodněte které z následujících tvrzení platí:
(a) Pokud má soustava více řešení, podle Cramerovy věty nalezneme řešení nulové.
(b) Pokud má soustava právě jedno řešení, pak má i soustava $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení.
(c) Pokud soustava nemá řešení, může mít řešení soustava $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(d) Determinant matice **A** je nutně nulový.

20. Mějme dán lineární prostor $\mathbb{R}^3$ se standartním skalárním součinem a v něm uspořádanou ortogonální bázi B = ($\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$). Potom platí:
(a) Vektory $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$ jsou nutně jednotkové.
(b) *Nikdy* nemůže platit rovnost $\sqrt{< \mathbf{b_2} | \mathbf{b_2} >} = 0$.
(c) Existuje vektor z $\mathbb{R}^3$, který lze zapsat dvěma různými způsoby jako lineární kombinace vektorů z báze B.
(d) Projekce vektoru $\mathbf{b_3}$ na rovinu zadanou vektory $\mathbf{b_1}$ a $\mathbf{b_2}$ je *nutně* nenulová.

21. Ať pro čtvercovou matici **Q** platí rovnost $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$. Pak nutně platí:
(a) det(**Q**) = ± 1.
(b) Pro libovolné **b** má rovnice $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nekonečně mnoho řešení.
(c) Matice $\mathbf{Q}^2$ je singulární.
(d) Platí rovnost $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$.

22. V této otázce je tělesem skalárů množina reálných čísel. Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, mějme vektor $\vec{b} \in L_2$. Pak pro množinu M = $\{\vec{z} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}\}$ nutně platí:
(a) Množina M tvoří lineární podprostor prostoru L_1.
(b) Množina M obsahuje nulový vektor.
(c) Množina M obsahuje vektor $\vec{b}$.
(d) Když $\vec{x}_1 \in$ M a $\vec{x}_2 \in$ M, pak I $(2 \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \in$ M.

23. Ať **A** je čtvercová reálná matice. Vyberte pravdivé tvrzení.
(a) Pokud má **A** nulové vlastní číslo, pak A je regulární.
(b) Pokud je **A** regulární, pak je A diagonalisovatelná.
(c) Pokud je **A** diagonalizovatelná, pak je A singulární.
(d) Matice **A** má nulové vlastní číslo právě tehdy, když je **A** singulární.

24. Mějme matici **A** : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde rank(**A**) = 2, na prostorech : $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jsou standartní skalární součiny. Potom platí:
    (a) Pro libovolné **b** ∈ $\mathbb{R}^3$ má soustava **A** · **x** = **b** řešení.
    (b) Matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární.
    (c) Vektor $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je ortogonální projekce vektoru b na podprostor ker(**A**).
    (d) Matice **A** zachovává nutně skalární součin.

25. Víme, že pro **A** : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ má soustava **A** · **x** = **b** řešení pro libovolné **b**. Pak nutně platí:
    (a) **A** má více sloupců než řádků.
    (b) **A** má nenulový determinant.
    (c) **A** je isomorfismus.
    (d) rank(**A**) ≥ n.

26. Máme dáno lineární zobrazení **f** : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Víme, že pro libovolný vektor **x** ∈ $\mathbb{R}^3$ platí, že **f(x)** = 3 · **x**. Potom také platí:
    (a) def(**f**) = 3.
    (b) Existuje nestandartní báze prostoru $\mathbb{R}^3$, vzhledem ke které má zobrazení **f** vlastní číslo 9.
    (c) Matice zobrazení **f** vzhledem ke standartním bázím má determinant 3.
    (d) Vlastní vektory zobrazení **f** příslušné číslu 3 spolu s nulovým vektorem tvoří vlastní podprostor, kterým je celé $\mathbb{R}^3$.

27. Ať **A** a **B** jsou čtvercové matice typu 4×4, dále ať platí rank(**A**) = 2 a rank(**B**) = 2. Pak rank(**A** · **B**) *nemůže* být:
    (a) 0.
    (b) 1.
    (c) 2.
    (d) 3.

28. Čtvercová reálná matice **A** typu 2×2 má determinant det(**A**) = -1. Potom platí:
    (a) **A** nemůže měnit normu vektorů v $\mathbb{R}^2$ (normu odvozenou ze skalárního součinu).
    (b) **A** je matice projekce.
    (c) Soustava **A** · **x** = **b** má vždy triviální řešení.
    (d) det($\mathbf{A}^{-1}$) = -1.

29. Ať B je uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ a **M** ať je matice obsahující jako sloupce vektory z B (zapsané jako souřadnice vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$). Potom *nutně* platí:
    (a) Soustava lineárních rovnic $\mathbf{M}^n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení pro libovolné přirozené n.
    (b) Matice **M** je podobná jednotkové matici.
    (c) Matice **M** je positivně definitní.
    (d) Determinant matice **M** · $\mathbf{M}^{-1}$ je nulový.

30. Ať je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení. Pak nutně platí:
    (a) Pokud def(**f**) > 0, pak je **f** projekce na nějaký podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$.
    (b) Pokud je $\mathbf{f}^3$ nulové zobrazení, pak def(**f**) ≥ 2.
    (c) Ať **A** a **B** jsou matice zobrazení **f**, každá vzhledem k jiné bázi. Přesto platí det(**A**) = det(**B**).
    (d) dim(im(**f**)∩ker(**f**)) může být 3.

31. Mějme seznam vektorů $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ (n ≥ 2) z lineárního prostoru *L* nad $\mathbb{R}$. Pak *neplatí*:
    (a) Pokud je *V* lineárně nezávislý, pak dim(*L*) ≥ n.
    (b) Seznam *V* je lineárně nezávislý, pokud platí že každý jeho o jeden vektor kratší podseznam je lineárně nezávislý.
    (c) Pokud V generuje *L*, přesto nemusí nutně být bází *L*.
    (d) Existuje lineární kombinace vektorů z *V*, která je rovna nulovému vektoru.

32. Mějme matice **A**, **B** : $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, rank(**A**) = rank(**B**) = 3. Pak platí:
    (a) Matice **A** · **B** může být maticí kolmé projekce na podprostor v $\mathbb{R}^5$.
    (b) rank(**A** · **B**) může být 0.
    (c) rank(**A** + **B**) nemůže být 5.
    (d) rank(**A** · **B**) = min(rank(**A**), rank(**B**)).

Výsledky: 1. (b); 2. (b); 3. (d); 4. (a); 5. (c); 6. (a); 7. (b); 8. (d); 11.(a); 17. (a); 18. (c); 19. (b); 20. (b); 21. (a); 22. (d); 23. (d); 24. (b); 25. (d); 28. (d); 29. (a); 30. (c); 31. (b); 32. (a);