Cvičení 7 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Nejprve klasifikujeme typ izolované singularity v bodě* $\frac{\pi}{2}$. *Bod* $\frac{\pi}{2}$ *je zřejmě* 2*-násobný kořen faktoru* $(z-\frac{\pi}{2})^2$ *ve jmenovateli. Dále:*

$$
\begin{aligned}
\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= 0 \\
(\cos z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= -\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Bod $\frac{\pi}{2}$ *je tedy* 1*-násobný kořen* $\cos z$. *Celkem je bod* $\frac{\pi}{2}$ *tedy* $2+1=3$*-násobný kořen jmenovatele. Co se týče čitatele, jest:*

$$
\begin{aligned}
&e^{iz}-i+\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i-i+0=0 \\
&\left(e^{iz}-i+\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = ie^{iz}+\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i^2+1=0 \\
&\left(e^{iz}-i+\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \left(ie^{iz}+\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -e^{iz}-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -i-0\neq 0
\end{aligned}
$$

Bod $\frac{\pi}{2}$ *je tedy* 2*-násobný kořen čitatele.*

Porovnáním násobností kořene v čitateli a jmenovateli dostaneme, že bod $\frac{\pi}{2}$ *je pól řádu* $3-2=1$. *Dle limitního vzorečku pro výpočet rezidua v pólu řádu* 1 *tedy jest*[1]

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}-i+\sin(z-\frac{\pi}{2})}{(z-\frac{\pi}{2})^2\cos z} &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^{iz}-i+\sin(z-\frac{\pi}{2})}{(z-\frac{\pi}{2})^2\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}-i+\sin(z-\frac{\pi}{2})}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z} \overset{\text{„}LH\text{“}}{=} \\
&\overset{\text{„}LH\text{“}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{ie^{iz}+\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos z-(z-\frac{\pi}{2})\sin z} \overset{\text{„}LH\text{“}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{iz}-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin z-\sin z-(z-\frac{\pi}{2})\cos z} \\
&= \frac{-i}{-2} = \frac{i}{2}.
\end{aligned}
$$

Úloha 2. *Označme si jako* I *integrál ze zadání. Z obrázku vidíme, že bod* -1 *leží mimo křivku* C, *a tedy*

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z = 0$$

dle Cauchyovy věty. Takže

$$I = \int_C \frac{z-\frac{\pi}{2}i}{e^z-i}\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Jest

$$
\begin{aligned}
e^z &= i \\
e^z &= e^{\frac{\pi}{2}i} \\
z &= \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i
\end{aligned}
$$

pro $k\in\mathbb{Z}$. *Z obrázku vidíme, že jediný z těchto bodů, který leží uvnitř* C, *je bod* $\frac{\pi}{2}i$. *Dle reziduové věty tedy je*

$$\int_C \frac{z-\frac{\pi}{2}i}{e^z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z-\frac{\pi}{2}i}{e^z-i}.$$

Vidíme, že bod $\frac{\pi}{2}i$ *je jednonásobný kořen čitatele. Co se týče jmenovatele, jest*

$$
\begin{aligned}
e^z-i\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} &= 0 \\
(e^z-i)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} &= e^z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = i\neq 0,
\end{aligned}
$$

[1] Uvědomme si, že ačkoli se jedná o pól řadu 1, *nelze* použít „dosazovací metodu“, neboť bod $\frac{\pi}{2}$ *není* jednonásobný kořen jmenovatele.

takže se jedná i o jednonásobný kořen jmenovatele. Je to tedy odstranitelná singularita, a tedy

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} = 0.$$

Takže

$$\int_C \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} = 0.$$

Dosazením do (1) *tedy dostaneme*

$$I = \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Izolované singularity integrované funkce jsou zřejmě body $\pm i$*, přičemž pouze bod* i *leží uvnitř* C*. Takže*

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{z^2}{(z^2+1)^2}. \tag{3}$$

Z rozkladu $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ *okamžitě vidíme, že bod* i *je dvojnásobný pól, a tedy*

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{z^2}{(z^2+1)^2} &= \lim_{z \to i} \left((z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right)' = \lim_{z \to i} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \to i} \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4} = 2i \frac{2i - i}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

A tedy, díky (2) *a* (3),

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Úloha 3. *Křivka* C *je kladně orientovaná kružnice se středem v* $-i$ *a poloměru* 1*. Snadno nahlédneme, že bod* i *neleží uvnitř* C*, a tedy*

$$\int_C \frac{3}{z-i} + \frac{1}{(z-i)^2} \, \mathrm{d}z = 0$$

dle Cauchyovy věty. Označíme-li jako I *integrál za zadání, máme*

$$I = \int_C \frac{2}{(z+i)^2} + 4(z+i) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_{-i} \left(\frac{2}{(z+i)^2} + 4(z+i) \right).$$

Toto reziduum můžeme ale okamžitě určit/vyčíst, neboť $\frac{2}{(z+i)^2} + 4(z+i)$ *je sám sobě rozvojem do Laurentovy řady*[2] *se středem v* $-i$*. Jedná se tedy o koeficient u* $(z+i)^{-1}$*, který je* 0*, takže*

$$\operatorname{res}_{-i} \left(\frac{2}{(z+i)^2} + 4(z+i) \right) = 0,$$

a tedy

$$I = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

[2]Která je v tom případě konečná.