MA 2-22

1. Zjistěte největší a nejmenší z-tovou souřadnici bodu ležícího na průniku paraboloidu $z = x^2 + y^2$ s rovinou $x + 2y - z + 10 = 0$.

2. Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Najděte těžiště kužele $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, je-li hustota $f(x, y, z) = 1$.

4. Mějme rovinná pole $\vec{F} = (x^2 + y^2, x^3 + y^3)$ a $\vec{G} = (y^2, x^3)$. Zjistěte, pro jaké $\tau \in \mathbb{R}$ je pole $\vec{H} = \vec{F} + \tau\vec{G}$ potenciální a nalezněte jeho potenciál.

5. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ -1, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech se řada rovná funkci f.

Řešení.

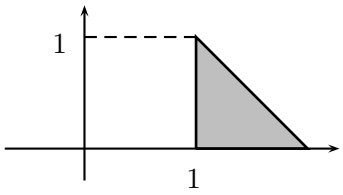
1. Hledáme extrémy funkce $f(x, y, z) = z$ za podmínek $x + 2y - z + 10 = 0$ a $x^2 + y^2 - z = 0$. Lagrangeova funkce je

$$L = z + \lambda_1(x + 2y - z + 10) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z)$$

a má dva stacionární body: $(2, 4, 20)$ a $(-1, -2, 5)$. První je nejvyšší bod na průniku a druhý je nejnižší.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\varphi}^{2/(\cos\varphi + \sin\varphi)} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Ze symetrie plyne, že $x_t = y_t = 0$. Zbývá vypočítat z-tovou souřadnici.

$$\iiint_P z = \int_0^h \int_0^{h-z} \int_0^{2\pi} z\varrho \; d\varphi d\varrho dz = \frac{\pi h^4}{12},$$
$$\iiint_P 1 = \int_0^h \int_0^{h-z} \int_0^{2\pi} \varrho \; d\varphi d\varrho dz = \frac{\pi h^3}{3}.$$

   Odtud $z_t = h/4$.

4. Pole $\vec{H}$ je potenciální pro $\tau = -1$ a má potenciál $f = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + K$.

5. $f(x) = -\dfrac{1}{2} + 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\pi}$ pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $x = k\pi$ má řada hodnotu průměru $-\frac{1}{2}$.