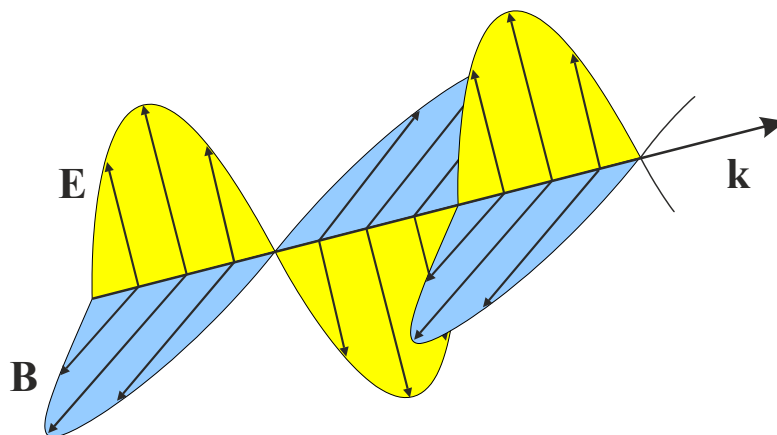


FYZIKA 2 – Semináře



PŘÍKLADY PRO BAKALÁŘSKÉ STUDIUM

PETR KULHÁNEK

OBSAH

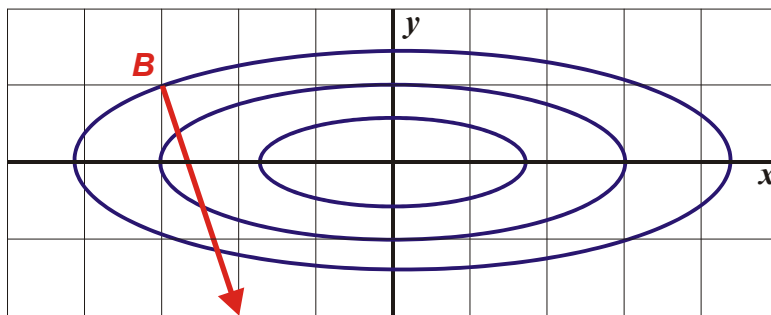
1	OPERACE S POLEM	1
1.	Gradient	1
2.	Divergence	1
3.	Rotace	2
4.	ABC toky	3
5.	Helicita	3
2	VLNĚNÍ	4
1.	Nadsvětelné rychlosti – „prasátko“	4
2.	Výtrysky z kvasaru – fiktivní nadsvětelná rychlost	4
3.	Exploze	5
4.	Hluk	5
5.	Kruhová vlna na membráně	5
6.	Elektromagnetická vlna v ionosféře	6
7.	Směrový diagram	6
8.	Okno	7
9.	Hluk stroje	7
10.	Fermatův princip (na přednášce)	8
11.	Seismografická stanice	9
12.	Skládání vln	10
13.	Osvětlení stolu	10
14.	Ladička	11
15.	Pískající lokomotiva	12
16.	Rotující hvězda	12
17.	Rázová vlna za letadlem	13
18.	Vlnová rovnice	13
19.	Disperzní relace vlnové rovnice	14
20.	Disperzní relace Kleinovy-Gordonovy rovnice	14
21.	Zvukové vlny v pohyblivém prostředí	15
3	ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	17
1.	Vlnová rovnice (na přednášce)	17
2.	Vlny v anizotropním prostředí	18
3.	Pole ve slunečním světle	18
4.	Čtvrtvlnná destička	19
5.	Vlny ve vodiči (na přednášce)	19
6.	Grupová rychlost při disperzi (na přednášce)	21
7.	Youngův experiment	21
8.	Antireflexní vrstva	22

9.	Optická mřížka	22
10.	Potenciál homogenního elektrického pole	24
11.	Potenciál homogenního magnetického pole	24
4.	RELATIVITA	25
1.	Mion	25
2.	Interval	25
3.	Elektron	26
4.	Slunce	27
5.	Dopplerův jev (na přednášce)	27
6.	Heavisideovo pole (na přednášce)	28
7.	Letící kondenzátor	30
8.	Inverzní matice k LT (přednáška)	31
9.	Úhel rotace, rapidita	32
10.	Parametry částice	33
11.	Relativistické urychlení	33
12.	Nepružná srážka	34
5.	KVANTOVÁ TEORIE	35
1.	Vlákno žárovky	35
2.	Slunce	35
3.	Fotoelektrický jev	36
4.	Hmotové vlny	36
5.	Bohrův model	37
6.	Fraunhoferova čára	37
7.	Komutátor I	38
8.	Komutátor II	38
9.	Operátor $i d/dx$	39
10.	Konečná jáma (nepovinné)	39
11.	Periodický potenciál a pásové spektrum (nepovinné)	42

1 OPERACE S POLEM

1. Gradient

Zadání: Nadmořská výška libovolného bodu na povrchu kopce je dána formulí $h(x, y) = A \exp [-(x/l_0)^2 - 9(y/l_0)^2]$, kde $A = 500$ m, $l_0 = 100$ m. Nalezněte směr největšího stoupání do kopce (malé posunutí po povrchu kopce v tomto směru vyvolá největší přírůstek nadmořské výšky) v bodě $B = [-30, 10]$ m.



Řešení: Směr největšího stoupání vyjadřuje gradient skalární funkce, kterou je popsána povrchová plocha kopce. Platí

$$\mathbf{n} = \text{grad } h = (\partial h / \partial x, \partial h / \partial y) = -\frac{2A}{l_0^2} \exp \left[-(x/l_0)^2 - 9(y/l_0)^2 \right] (x, 9y) \approx (-x, -9y)$$

Nepodstatné konstanty mění jen délku vektoru, nikoliv jeho směr, proto jsou v konečném výsledku vynechány. V bodě B je tedy směr největšího stoupání určen vektorem

$$\mathbf{n}_B \approx (+30, -90) \approx (+10, -30) \approx (+1, -3).$$

2. Divergence

Zadání: Nalezněte divergenci elektrického pole bodového náboje v celém prostoru (pro bodový náboj je $r \rightarrow 0, \rho_Q \rightarrow \infty$).

Řešení: Elektrické pole bodového náboje je dáno Coulombovým zákonem $\mathbf{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \mathbf{n}$, kde r je vzdálenost daného místa od náboje, \mathbf{n} je jednotkový vektor $\mathbf{n} = (x/r, y/r, z/r)$ mířící od náboje. Elektrické pole má tedy složky ($k = Q/(4\pi\epsilon_0)$)

$$E_x = k (x/r^3),$$

$$E_y = k (y/r^3),$$

$$E_z = k (z/r^3).$$

Pro výpočet divergence budeme potřebovat derivaci vzdálenosti podle jednotlivých proměnných:

$$\begin{aligned}\partial r / \partial x &= \partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial x = x/r, \\ \partial r / \partial y &= \partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial y = y/r, \\ \partial r / \partial z &= \partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial z = z/r.\end{aligned}$$

Divergence elektrického pole je

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z.$$

Derivace jednotlivých složek je v tomto případě optimální řešit jako derivace podílu

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{x}{r^3} \right) = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = k \frac{\frac{\partial x}{\partial x} r^3 - x 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = k \frac{r^3 - x 3r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = k \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Podobně bude

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \text{a} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = k \frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

takže pro divergenci máme

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= k \frac{r^2 - 3x^2 + r^2 - 3y^2 + r^2 - 3z^2}{r^5} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \\ &= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0; \quad r \neq 0.\end{aligned}$$

Divergence elektrického pole je tedy v celém prostoru nulová (nejsou v něm zřídla toku) kromě množiny $r = 0$, ve které se toto zřídlo (zdroj pole – singulární hustota náboje) nachází.

3. Rotace

Zadání: Nalezněte rotaci magnetického pole v okolí vodiče protékaného proudem. Vodič je nekonečně dlouhý a limitně tenký ($R \rightarrow 0$, $\mathbf{j} \rightarrow \infty$).

Řešení: Magnetické pole v okolí nekonečného tenkého vodiče je ve válcových souřadnicích dáno Ampérovým zákonem: $\mathbf{B} = \mu_0 I / (2\pi r) \boldsymbol{\tau}$, kde r je kolmá vzdálenost daného místa od vodiče, osa z míří ve směru vodiče, $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor tečný ke (kruhovým) siločarám $\boldsymbol{\tau} = (-y/r, x/r, 0)$. Magnetické pole má tedy složky ($k = \mu_0 I / (2\pi)$)

$$B_x = k(-y/r^2),$$

$$B_y = k(+x/r^2),$$

$$B_z = 0.$$

Pro výpočet rotace budeme potřebovat derivaci vzdálenosti podle jednotlivých proměnných

$$\begin{aligned}\partial r / \partial x &= \partial(x^2 + y^2)^{1/2} / \partial x = x/r, \\ \partial r / \partial y &= \partial(x^2 + y^2)^{1/2} / \partial y = y/r.\end{aligned}$$

Jednotlivé složky vektoru $\text{rot } \mathbf{B}$ jsou

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(\underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}}_0, \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}}_0, \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}}_{\text{nutno dopočítat}} \right).$$

Derivace jednotlivých složek je v tomto případě optimální řešit jako derivace podílu

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^2} \right) = k \frac{\frac{\partial x}{\partial x} r^2 - x 2r \frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = k \frac{r^2 - x 2r \frac{x}{r}}{r^4} = k \frac{r^2 - x^2}{r^4}$$

a podobně bude $\frac{\partial B_x}{\partial y} = -k \frac{r^2 - y^2}{r^4}$, takže poslední složka vektoru $\text{rot } \mathbf{B}$ je

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= k \frac{r^2 - x^2 + r^2 - y^2}{r^4} = k \frac{2r^2 - 2(x^2 + y^2)}{r^4} = \\ &= k \frac{2r^2 - 2r^2}{r^4} = 0; \quad r \neq 0. \end{aligned}$$

Rotace magnetického pole je tedy v celém prostoru nulová (nejsou v něm víry) kromě množiny $r=0$, ve které je centrum vírů a současně zdroj magnetického pole – singulární proudová hustota.

4. ABC toky

Zadání: Nalezněte divergenci a rotaci pole daného předpisem

$$\mathbf{V} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y).$$

Řešení: $\text{div } \mathbf{V} = 0$; $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{V}$. Pole nemá zdroje, ale je vírové. Promyslete si jak takové pole vypadá (jeho rotace je rovna samotnému poli) a ověřte (Mathlab, Mathematica...). Mohou taková pole existovat v přírodě? Ano, jde o konfigurace, ve kterých se nabitě částice pohybují podél magnetických indukčních čar. Proudová hustota je v tomto případě rovnoběžná s magnetickým polem $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$. Z Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ (magnetický problém bez elektrických polí) plyne $\text{rot } \mathbf{H} \parallel \mathbf{B}$, tj. rotace \mathbf{B} je úměrná samotnému \mathbf{B} . V matematice se taková pole nazývají Beltramova pole a mají šroubovicový (helikální charakter). Vír takového pole není nikdy plošný.

5. Helicita

Zadání: Nalezněte helicitu ABC toku z předchozího příkladu.

Návod: Helicita je matematická veličina, kterou se testuje šroubovitost pole. Je definována vztahem $\mathcal{H} = \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V}$

Řešení: $\mathcal{H} = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cos y \sin z + 2BC \cos z \sin x + 2AC \cos x \sin y$.

2 VLNĚNÍ

1. Nadsvětelné rychlosti – „prasátko“

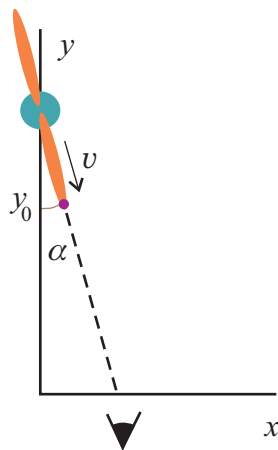
Zadání: Světelným zdrojem můžeme otočit o 90° za 0.1 s. Jak daleko musí být projekční plocha, aby se světelná skvrna (prasátko) pohybovala nadsvětelnou rychlostí?

Řešení: Úhlová rychlost prasátka je $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$. Obvodová rychlost na projekční stěně ve vzdálenosti l bude $v = l\omega$. Tato rychlost má být větší než rychlost světla c . Odsud plyne podmínka $l > c\Delta t/\Delta\varphi$.

Výsledek: $l > 20\,000$ km. To je podstatně méně než je oběžná dráha Měsíce (384 000 km!) a srovnatelné s oběžnými výškami GPS sond.

2. Výtrysky z kvasaru – fiktivní nadsvětelná rychlost

Zadání: Vzdálený kvasar je zdrojem dvou výtrysků látky, z nichž jeden se pohybuje směrem k pozorovateli pod malým úhlem téměř rychlostí světla. Určete, jakou rychlost naměří pozorovatel.



Řešení: Poloha objektu je dána vztahy:

$$\begin{aligned}x(t) &= vt \sin \alpha; \\ y(t) &= y_0 - vt \cos \alpha.\end{aligned}$$

Signál přichází k pozorovateli se zpožděním v čase

$$\tau \doteq t + \frac{y(t)}{c}.$$

Rychlost, kterou zjistí pozorovatel, proto bude

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx/dt}{d\tau/dt} = \frac{v \sin \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \underset{v \rightarrow c}{\approx} \frac{c \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \frac{c \alpha}{1 - (1 - \alpha^2/2)} = \frac{2c}{\alpha}.$$

Z výsledku je zřejmé, že pohybuje-li se výtrysk směrem k pozorovateli, tato fiktivní pozorovaná rychlost snadno převýší rychlost světla.

3. Exploze

Zadání: Při explozi nálože byla uvolněna energie 10^5 J. Exploze trvala 1 s. Jaká bude maximální intenzita detonační vlny ve vzdálenosti 10 metrů od exploze a ve vzdálenosti 20 metrů od exploze?

Předpoklady: Detonační vlna je kulově symetrická.

Řešení:

$$I = \Delta E / (\Delta S \Delta t) = \Delta E / (4\pi r^2 \Delta t)$$

Výsledek:

$$I_1 = 80 \text{ Wm}^{-2}, I_2 = 20 \text{ Wm}^{-2}.$$

4. Hluk

Zadání: Jak se sníží hladina hluku, vzdálím-li se od zdroje do dvojnásobné vzdálenosti?

Předpoklady: Zdroj hluku je malý vzhledem ke vzdálenostem, ve kterých posloucháme a hluk se šíří sféricky symetricky.

Řešení: Intenzita je úměrná kvadrátu amplitudy a pro kulovou vlnu je $I \sim 1/r^2$. Proto ve dvojnásobné vzdálenosti bude $I_2 = I_1/4$. Hladina hluku se sníží o

$$\Delta L = 10 \log(I_1/I_0) - 10 \log(I_2/I_0) = 10 \log(I_1/I_2) = 10 \log(4).$$

Výsledek:

$$\Delta L = 6 \text{ dB}.$$

5. Kruhová vlna na membráně

Zadání: Tenkou pružnou homogenní membránu ve tvaru kruhu o poloměru 1,5 m ve středu prudkým úderem paličkou vychýlíme o 1 cm. Hlavice paličky má tvar válce o průměru 1,5 cm. Osa hlavice paličky při úderu byla kolmá na rovinu membrány. Rychlost úderu a tuhost membrány byly takové, že se při úderu protáhla membrána pouze v bezprostředním okolí hlavice paličky. Jaká bude amplituda vlny vzniklé na okraji membrány? Útlum a energii předanou zpět paličce zanedbejte.

Řešení: U kruhové vlny pro amplitudu platí

$$A \sim \sqrt{\frac{1}{r}}.$$

Proto

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}.$$

Výsledek: Pro hodnoty $r_1 = 15$ mm, $r_2 = 1\,500$ mm a $A_1 = 10$ mm vychází $A_2 = 1$ mm.

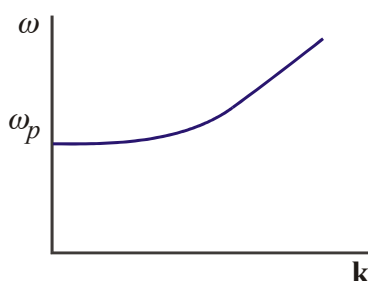
6. Elektromagnetická vlna v ionosféře

Zadání: Standardní disperzní relace rovinné elektromagnetické vlny $\omega^2 = c^2 k^2$ je při průchodu světla plazmatem modifikována na tvar $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$. Rychlost šíření světla ve vakuu je označena c . Veličina ω_p se nazývá plazmová frekvence (jde o frekvenci oscilací elektronů kolem iontů). Nalezněte závislost $\omega(k)$ a diskutujte její průběh. Určete fázovou a grupovou rychlost šíření této vlny.

Řešení: Zadaný výraz pro disperzní relaci nejprve upravíme do tvaru

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2} = ck \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}}.$$

Závislost $\omega(k)$ lze nyní snadno vykreslit a je uvedena na obrázku. Z grafu je zřejmé, že vlna se šíří jen pro frekvence $\omega > \omega_p$. Při nižších frekvencích elektromagnetické vlny se elektrony prostředí totiž “stihnou” rozkmitat a vlna je absorbována, plazma je pro takovou vlnu neprůhledné.



Fázová rychlost je

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2}},$$

závisí na vlnové délce vlny (disperze!) a je vždy větší než rychlost světla. Grupová rychlost

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c / \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2}}$$

je menší než rychlost šíření světla (jde o rychlost šíření informace). Součin obou rychlostí splňuje relaci

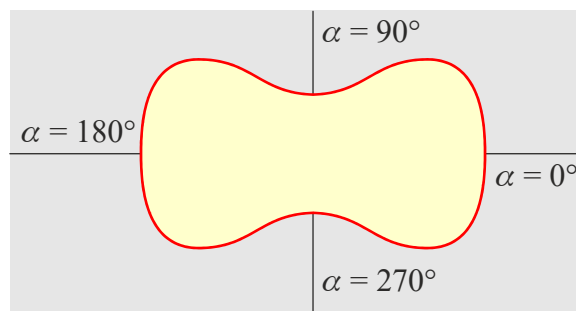
$$v_f v_g = c^2.$$

7. Směrový diagram

Zadání: Nalezněte tvar vlnoploch pro vlnu s disperzní relací $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \cos^2 \alpha$.

Řešení: Směrový diagram je závislost velikosti fázové rychlosti na úhlu α v polárním diagramu. Zřejmě je:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}} = c \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\omega_p^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2}}.$$



8. Okno

Zadání: Okno, jehož plocha je 2 m^2 , je otevřeno na ulici. Pouliční hluk má v rovině okna průměrnou hladinu intenzity 80 dB . Jak velký akustický výkon vstupuje zvukovými vlnami do pokoje?

Řešení: Zvukový výkon vstupující do místnosti

$$P = I S.$$

Intenzitu stanovíme ze zadané hladiny intenzity

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{L}{10}}.$$

kde $L/10$ je hladina vyjádřená v bellech a I_0 je referenční intenzita, $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$. Akustický výkon je

$$P = S I_0 10^{\frac{L}{10}} = 2 \times 10^{-4} \text{ W}.$$

9. Hluk stroje

Zadání: V prostředí, jehož hladina intenzity hlukového pozadí je 60 dB , byl změřen hluk stroje. Byla naměřena hodnota 64 dB . Jakou hodnotu hladiny intenzity hluku stroje bychom naměřili, kdybychom měřili v tiché místnosti?

Řešení: Sčítat můžeme v tomto případě pouze energie resp. intenzity zvuků. Ke skládání akustických tlaků nebo výchylek nemáme přesné informace o amplitudách a fázích jednotlivých složek zvukového spektra ve sčítacím bodě. Je tedy

$$I_M = I_P + I_S,$$

kde indexy znamenají: M (měření), P (pozadí), S (stroj). Platí

$$I_S = I_M - I_P.$$

Intenzity vyjádříme pomocí příslušných hladin intenzity

$$I_0 10^{\frac{L_S}{10}} = I_0 10^{\frac{L_M}{10}} - I_0 10^{\frac{L_P}{10}},$$

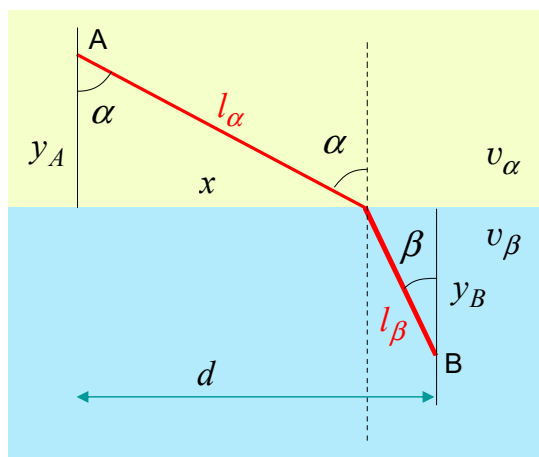
($L_S/10$ je hladina v bellech atd.). Ve výrazu zkrátíme referenční intenzitu

$$\frac{L_S}{10^{10}} = \frac{L_M}{10^{10}} - \frac{L_P}{10^{10}}.$$

10. Fermatův princip (na přednášce)

Zadání: Odvoďte z Fermatova principu zákon lomu světla na rozhraní dvou prostředí.

Řešení: Podle Fermatova principu bude ze všech možných trajektorií realizována trajektorie s minimální dobou chodu paprsku z bodu **A** do bodu **B**.



Pro trajektorii na obrázku je celková doba

$$t_{AB} = \frac{l_A}{v_A} + \frac{l_B}{v_B} = \frac{\sqrt{y_A^2 + x^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{y_B^2 + (d-x)^2}}{v_B}.$$

Obě vzdálenosti jsme vyjádřili z Pythagorovy věty (jde o přepony trojúhelníků). Tato doba je funkcí x , proto tuto závislost derivujeme podle proměnné x a položíme rovnou nule (nutná podmínka minima času šíření). Získáme tak podmínku

$$\frac{x}{v_A \sqrt{y_A^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v_B \sqrt{y_B^2 + (d-x)^2}} = 0.$$

Příslušné odmocniny opět přepíšeme z Pythagorovy věty na příslušné vzdálenosti

$$\frac{x}{v_A l_A} = \frac{(d-x)}{v_B l_B}.$$

Podíly na obou stranách jsou siny úhlů α a β

$$\frac{\sin \alpha}{v_A} = \frac{\sin \beta}{v_B}.$$

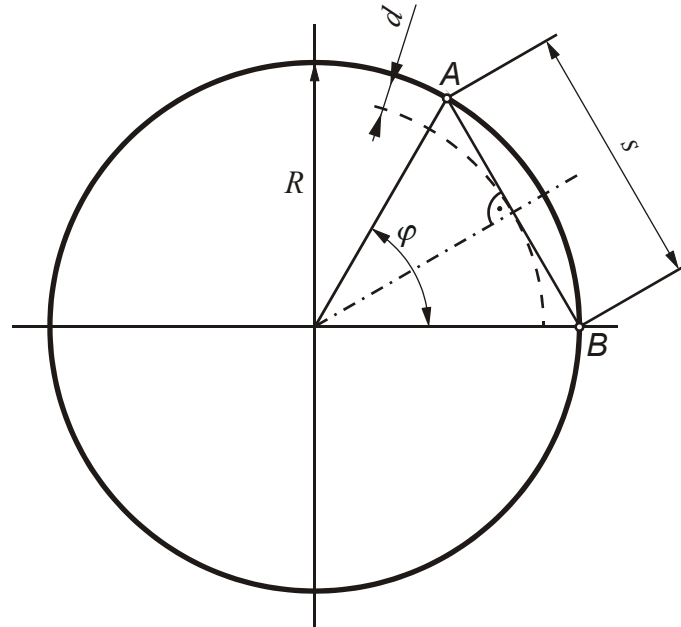
Jednoduchou úpravou získáme nejčastější zápis Snellova zákona lomu

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

(α – úhel dopadu, β – úhel lomu, n_1, n_2 jsou indexy lomu obou prostředí)

11. Seismografická stanice

Zadání. Vypočítejte úhlovou vzdálenost od hypocentra A do seismografické stanice B , je-li ze záznamu seismografu patrné, že podélné vlny přišly o $\Delta t = 80$ s dříve než vlny příčné. Rychlost šíření podélných vln v zemské kůře předpokládejte $c_L = 6,5$ km/s, rychlost příčných vln v témže prostředí $c_T = 4,4$ km/s. Stanovte interval úhlových vzdáleností, pro nějž je metoda použitelná, je-li tloušťka zemské kůry $d = 15$ až 60 km. Poloměr Země je $R = 6\,378$ km.



Řešení: Přímou vzdálenost s mezi body A a B lze vyjádřit pomocí rychlosti podélných nebo příčných vln a odpovídající doby průchodu vlny úsekem

$$s = c_L t_L = c_T t_T.$$

Časový interval mezi příchodem obou vln $\Delta t = t_T - t_L$ vyjádříme pomocí s , c_L a c_T

$$\Delta t = s \left(\frac{1}{c_T} - \frac{1}{c_L} \right) = s \frac{c_L - c_T}{c_L c_T}$$

a vzdálenost s pomocí úhlu φ

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s/2}{R} = \frac{s}{2R}$$

Spojením obou posledních vztahů obdržíme pro hledané

$$\varphi = 2 \arcsin \frac{\Delta t c_L c_T}{2R(c_L - c_T)} = 9,8^\circ \quad \varphi = 2 \arcsin \frac{\Delta t c_L c_T}{2R(c_L - c_T)} = 9,8^\circ.$$

Metoda je použitelná, pokud nedojde k průchodu nebo odrazu vln rozhraním mezi zemskou kůrou a zemským pláštěm (Mohorovičičova diskontinuita). Z obrázku lze psát

$$\cos \frac{\varphi_{\max}}{2} = \frac{R-d}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\max} = 2 \arccos \frac{R-d}{R}$$

Pro $d = 15$ km obdržíme $\varphi_{\max 15} = 4,5^\circ$, pro $\varphi_{\max 60} = 15,7^\circ$ $\varphi_{\max 60} = 15,7^\circ$.

12. Skládání vln

Zadání. Dvě rovinné harmonické vlny o stejné frekvenci a amplitudě, polarizované lineárně v navzájem kolmých směrech (os y a z) se šíří stejnou rychlostí v kladném směru osy x . Popište výslednou vlnu vzniklou jejich složením, má-li fázový rozdíl obou vln hodnotu

$$\text{a) } \varphi = 0, \quad \text{b) } \varphi = \pi, \quad \text{c) } \varphi = \pi/2, \quad \text{d) } \varphi = 3\pi/2,$$

a rozhodněte, o jakou polarizaci výsledné vlny se v uvedených případech jedná.

Řešení: Polarizované vlnění musí být příčné. Kmitání se děje v různých směrech, proto je třeba skládat vlny vektorově. Vzhledem k příznivému zadání lze přímo konstatovat, že výsledný vektor výchylky \mathbf{u} je

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_y U_0 \sin(\omega t - kx) + \mathbf{e}_z U_0 \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Zvolme nyní místo na ose x , v němž budeme sledovat polohu vektoru \mathbf{u} a tedy i roviny kmitů v čase, pro jednoduchost $x = 0$. Příklad se tak redukuje na skládání navzájem kolmých sinusových kmitů v rovině se vzájemným fázovým posunem

$$y = U_0 \sin \omega t,$$

$$z = U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

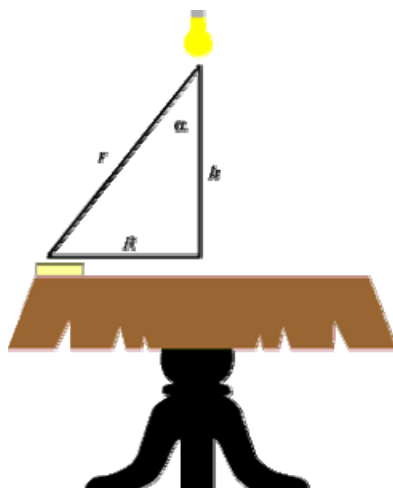
Tyto rovnice jsou parametrickým zadáním trajektorie koncového bodu vektoru \mathbf{u} v rovině y, z . Vyloučením parametru obdržíme rovnice trajektorií v názornější formě:

- Pro $\varphi = 0$ je $y/z = 1$. Příslušnou trajektorií je přímka $y = z$, vlna je tedy lineárně polarizována, rovina kmitu je určena osou x a uvedenou přímkou, polarizační rovina je k rovině kmitu kolmá.
- Pro $\varphi = \pi$ je $y/z = -1$. Situace je podobná, jen rovina kmitu i polarizační rovina jsou vůči předchozímu případu pootočený o 90° (trajektorií je přímka $y = -z$).
- V případě $\varphi = \pi/2$ lze druhou rovnici přepsat do tvaru $z = U_0 \sin(\omega t + \pi/2) = U_0 \cos \omega t$. Umocněním na druhou a sečtením s kvadrátem první rovnice obdržíme vztah $y^2 + z^2 = U_0^2$. Koncový bod vektoru \mathbf{u} se tedy pohybuje po kružnici o poloměru U_0 , rovina kmitu i polarizační rovina se v prostoru otáčí; jde proto o polarizaci kruhovou.
- Příklad $\varphi = 3\pi/2$ se od předchozího liší pouze opačným směrem otáčení (levotočivá a pravotočivá polarizace).

13. Osvětlení stolu

Zadání: Lampa je umístěna nad kulatým stolem o poloměru R v jeho středu. Určete optimální výšku lampy nad stolem tak, aby osvětlení knihy ležící na okraji stolu bylo maximální.

Předpoklady: Zdroj je dostatečně malý, vlnoplochu považujte za kulovou.



Řešení: Osvětlení, stejně tak jako tok světelné energie, ubývá s kvadrátem vzdálenosti r od zdroje a závisí na úhlu dopadu:

$$I = \frac{I_0 \cos \alpha}{r^2}.$$

Dosadíme-li $\cos \alpha = h/r$ a za vzdálenost r z Pythagorovy věty $r = (h^2 + R^2)^{1/2}$, získáme závislost:

$$I(h) = I_0 \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Při maximálním osvětlení musí být derivace této funkce podle h nulová, což vede na podmínku:

$$(h^2 + R^2)^{3/2} - 3h^2 (h^2 + R^2)^{1/2} = 0$$

Po vydělení rovnice členem $(h^2 + R^2)^{1/2}$ snadno nalezneme řešení

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

14. Ladička

Zadání: Zdroj zvuku se pohybuje na vozíku rychlostí $v = 25 \text{ cm s}^{-1}$ směrem ke stěně. Na opačné straně slyší pozorovatel rázy na frekvenci $f_R = 3 \text{ Hz}$. Jaká byla frekvence zdroje zvuku, jestliže je rychlost zvuku $c_s = 340 \text{ m/s}$?

Řešení: Pozorovatel slyší jednak přímou vlnu nižší frekvence (zdroj se vzdaluje) a jednak vlnu odraženou od stěny (vyšší frekvence – zdroj se pohybuje ke stěně). Obě vlny se skládají v rázy na rozdílové frekvenci:

$$f_1 = f_0 \left(1 - \frac{v}{c_s}\right), \quad f_2 = f_0 \left(1 + \frac{v}{c_s}\right), \quad f_R = f_2 - f_1 = 2f_0 \frac{v}{c_s}$$

Korekce frekvence na pohyb zdroje jsme napsali do čitatele ($v \ll c_s$). Snadno určíme, že $f_0 = f_R c_s / (2v)$.

Výsledek: $f_0 = 2\,040 \text{ Hz}$.

15. Pískající lokomotiva

Zadání: Lokomotiva jedoucí rychlostí 72 km/h píská 2 sekundy. Jak dlouho trvá zvuk, který vnímá v klidu stojící pozorovatel

- a) přijíždí-li lokomotiva k němu
- b) vzdaluje-li se lokomotiva od něho.

Rychlost zvuku je 340 ms^{-1} .

Řešení: Celkový počet kmitů obsažených v signálu se vlivem Dopplerova jevu nemění. Mění se jen frekvence a doba trvání signálů v místě pozorovatele. Označíme-li n počet kmitů v signálu, lze psát

$$n = f_0 t_0 = f_1 t_1 = f_2 t_2.$$

Kmitočet f_0 se při přibližování zdroje změní v důsledku Dopplerova jevu na

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c-v},$$

při vzdalování na

$$f_2 = f_0 \frac{c}{c+v}.$$

S použitím uvedených vztahů dostaneme pro přibližování

$$t_1 = \frac{n}{f_1} = \frac{f_0 t_0}{f_0 \frac{c}{c-v}} = t_0 \frac{c-v}{c} = 2 \frac{340-20}{340} = 1,88 \text{ s}.$$

a pro vzdalování

$$t_2 = \frac{n}{f_2} = \frac{f_0 t_0}{f_0 \frac{c}{c+v}} = t_0 \frac{c+v}{c} = 2 \frac{340+20}{340} = 2,12 \text{ s}.$$

16. Rotující hvězda

Zadání: Nalezněte vztah pro rozšíření spektrální čáry způsobené rotací hvězdy. Vztah přepište pro vlnovou délku čar.

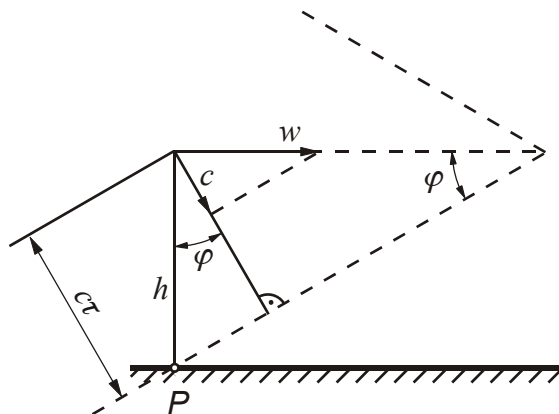
Řešení: Rotace hvězdy způsobuje, že jeden okraj hvězdy se k nám přibližuje rychlostí $v = R\omega$ a druhý okraj se toutéž rychlostí vzdaluje. R je poloměr hvězdy a ω úhlová rychlost rotace hvězdy. Výsledkem je dopplerovské rozšíření spektrální čáry. Krajiní frekvence budou dány vztahy $f_{1,2} = f_0 (1 \pm R\omega/c)$ a krajní vlnové délky $\lambda_{1,2} = c/[f_0 (1 \pm R\omega/c)] \sim (c \pm R\omega)/f_0$. Opět jsme využili toho, že korekce jsou malé a lze je se změnou znaménka převést z jmenovatele do čitatele ($1/[1+x] \sim [1-x]$).

Výsledek: Rozdíl vlnových délek obou čar tedy bude $\Delta\lambda = 2R\omega/f_0$.

17. Rázová vlna za letadlem

Zadání. Letadlo Concorde letí v konstantní výšce $h = 18$ km rychlostí $w = 2376$ km/h. Za jakou dobu uslyší pozorovatel na povrchu země sonický třesk letadla poté, co jej uviděl kolmo nad hlavou? (Zanedbejte zakřivení a ostatní nerovnosti zemského povrchu a nehomogenitu atmosféry, pro výpočet uvažujte $c = 330$ m/s. Jaký další předpoklad je v následujícím řešení obsažen?

Poznámka: Předpokládá se, že rychlost šíření světla (viz slovo „uviděl“) je dostatečně velká oproti rychlosti zvuku, aby ji bylo možno zanedbat.



Řešení: Letadlo letí nadzvukovou rychlostí, vytvoří se rázová vlna. Její čelo se pohybuje (normálovou) rychlostí c a dorazí k pozorovateli za čas τ . Pro poloviční vrcholový úhel rázové vlny platí $\sin \varphi = c/w$. Poloha pozorovatele je však určena výškou h , kterou vyjádříme pomocí c , τ a w

$$h = \frac{c\tau}{\cos \varphi} = \frac{c\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{c\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{w}\right)^2}},$$

$$\tau = \frac{h}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{w}\right)^2} = 47,2 \text{ s.}$$

18. Vlnová rovnice

Zadání: V (malé ale konečné) části periody jisté jednorozměrné postupné příčné vlny bylo zjištěno konstantní zrychlení a kmitajícího elementu. Stanovte, jak rychle se mění výchylka h elementu během průchodu této části vlny konkrétním bodem prostoru ve směru šíření. Fázová rychlost šíření je známa.

Řešení: Vlnění lze popsat jednorozměrnou vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0,$$

kde výraz $\partial^2 h / \partial t^2$ představuje v našem případě zrychlení kmitajícího bodu. Platí tedy

$$\frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{a}{v_f^2} = \text{const} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = K.$$

Rychlost změny výchylky podle souřadnice x je

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx = \int K dx = Kx = \frac{1}{v_f^2} ax.$$

v uvažovaném intervalu se proto mění lineárně.

Poznámka: Již ze zadání snadno nahlédneme, že se ve směru kolmém na rychlost šíření jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený a výchylka se bude i podle souřadnice x měnit s lineárně rostoucí nebo klesající rychlostí. Vlnová rovnice nám však poskytuje i hodnotu rychlosti této změny.

19. Disperzní relace vlnové rovnice

Zadání: Nalezněte disperzní relaci vlnové rovnice

Řešení: Na klasickou vlnovou rovnici narazíme v mnoha vědních odvětvích. Odpovídá jednoduchým vlnám bez disperze.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

Rovnice je lineární a každé její „rozumné“ řešení je možné zapsat pomocí Fourierovy transformace jako superpozici rovinných vln. Po dosazení rovinné vlny do vlnové rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c.$$

Fázová i grupová rychlost je stejná a nezávisí na vlnové délce parciální vlny, což je charakteristické pro lineární disperzní relace typu $\omega = ck$.

20. Disperzní relace Kleinovy-Gordonovy rovnice

Zadání: Nalezněte disperzní relaci Kleinovy-Gordonovy rovnice

Řešení: Kleinova-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \psi = 0; \quad \mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}.$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která se využívá pro popis částic s nulovým spinem v kvantové teorii. Rovnice je lineární, její řešení opět budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy transformace Kleinovy-Gordonovy rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \mu^2.$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}}}.$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je vždy nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah $v_f v_g = c^2$. Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze).

21. Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Zadání: Nalezněte disperzní relaci pro zvukové vlny v pohybujícím se plynu

Řešení: Za výchozí soustavu rovnic využijme rovnici kontinuity, pohybovou rovnici a stavovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p,$$

$$p = p(\rho) = K \rho^\gamma.$$

Připustíme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujeme řešení ve tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Výpočet probíhá zcela analogicky jako u zvukových vln v nepohyblivém prostředí. Nejprve provedeme linearizaci (v rovnicích ponecháme členy lineární v poruchách):

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_0 \delta \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \delta \rho) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = -\nabla \delta p,$$

$$\delta p = \alpha \delta \rho; \quad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

Po Fourierově transformaci máme

$$\begin{aligned}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - \omega)\delta\rho + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} &= 0, \\ +\mathbf{k}\delta p + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - \omega)\rho_0 \delta\mathbf{u} &=, \\ \delta p = \alpha\delta\rho; \quad \alpha &\equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

Po eliminaci proměnných (z poslední rovnice určíme δp , z předposlední $\delta\mathbf{u}$ získáme disperzní relaci

$$[\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 = 0; \quad \alpha = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = c_s k + k u_0 \cos \varphi = c_s k \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right); \quad c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

Ve výrazu jsme φ označili úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a rychlostí prostředí \mathbf{u}_0 . značíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_s k$, máme výsledný vztah

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right),$$

který není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění. U pohybujících se tekutin se tedy v disperzní relaci objeví místo úhlové frekvence ω kombinace $\Omega = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0$.

3 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

1. Vlnová rovnice (na přednášce)

Zadání: Ukažte, že z Maxwellových rovnic ve vakuu plyne vlnová rovnice pro elektrické i magnetické pole.

Návod: použijte vektorovou identitu $\text{rot rot } \mathbf{K} = \text{grad div } \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K}$.

Řešení: Vyjdeme z Maxwellových rovnic ve vakuu

$$\text{div } \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Budeme se snažit vyloučit z rovnic elektrické pole, proto provedeme rotaci na třetí rovnici

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \text{rot } \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \text{rot } \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Za $\text{div } \mathbf{B}$ dosadíme z druhé Maxwellovy rovnice, za $\text{rot } \mathbf{E}$ z poslední a získáme vlnovou rovnici pro magnetické pole:

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Zcela obdobně bychom získali vlnovou rovnici pro elektrické pole (rotací poslední rovnice). Provedeme-li ve vlnové rovnici Fourierovu transformaci získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} k^2.$$

Tuto disperzní relaci bychom získali i okamžitým použitím Fourierovy transformace na úvodní Maxwellovu soustavu. Navíc bychom zjistili vztahy mezi jednotlivými vektory, například to, že \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé vektory, a jde proto o vlnění příčné. Z disperzní relace standardním způsobem určíme fázovou a grupovou rychlost šíření světla ve vakuu, tedy vztah pro rychlost světla

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

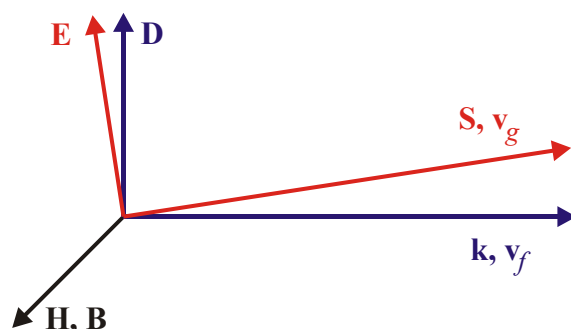
Z úvodní sady po FT pak plyne další užitečný vztah (viz přednáška):

$$E/B = c \tag{1}$$

2. Vlny v anizotropním prostředí

Zadání: Řešte pomocí Fourierovy transformace Maxwellových rovnic konfiguraci polí v elektromagnetické vlně v elektricky anizotropním prostředí. V jakém směru míří fázová rychlost a v jakém směru míří grupová rychlost?

Předpoklady: V anizotropním prostředí nemusí vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} mířit ve stejném směru. Připomeňme si, že $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Vektor elektrické polarizace \mathbf{P} je objemová hustota dipólových momentů, které vyvolá pole \mathbf{E} . Ty ale mohou sledovat například krystalografické roviny a ne pole \mathbf{E} . Výsledkem je, že pole \mathbf{E} a \mathbf{D} mají různý směr. Stejně tak může u magneticky aktivních materiálů docházet k magnetizaci prostředí a vektor $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ (kde \mathbf{M} je tzv. magnetizace) nemusí mířit ve stejném směru jako \mathbf{B} . Budeme předpokládat anizotropii elektrických vlastností, tj. elektrické vektory \mathbf{D} a \mathbf{E} nejsou rovnoběžné.



Řešení: V Maxwellových rovnicích položíme $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$. Vzhledem k anizotropii musíme v rovnicích ponechat oba elektrické vektory. Provedeme Fourierovu transformaci Maxwellových rovnic:

$$\begin{array}{llll}
 \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, & \Rightarrow & \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 & \Rightarrow & \mathbf{D} \perp \mathbf{k} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, & \Rightarrow & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow & \mathbf{B} \perp \mathbf{k} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t, & \Rightarrow & \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} & \Rightarrow & \mathbf{D} \perp \mathbf{k}, \mathbf{H} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t & \Rightarrow & \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} & \Rightarrow & \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \mathbf{E}
 \end{array}$$

Fázová rychlost míří ve směru vlnového vektoru \mathbf{k} , grupová rychlost ve směru šíření energie, tj. ve směru Poyntingova vektoru $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Poměry v elektromagnetické vlně v elektricky anizotropním prostředí jsou vystiženy v obrázku.

3. Pole ve slunečním světle

Zadání: Sluneční záření má v okolí Země intenzitu $I = 1.4 \text{ kW/m}^2$. Nalezněte průměrnou hodnotu intenzity elektrického a indukce magnetického pole v slunečním záření v místě, kde se nachází Země.

Řešení: Intenzita dopadající energie je dána velikostí Poyntingova vektoru: $I_Z = |\mathbf{S}| = EH$. Poměr elektrické intenzity a magnetické indukce v elektromagnetické vlně je $E/B = c$. Tyto dva vztahy můžeme chápat jako soustavu dvou rovnic pro elektrické a magnetické pole:

$$\mu_0 I = EB; \quad \frac{E}{B} = c.$$

Vynásobením a vydělením obou rovnic dostaneme řešení:

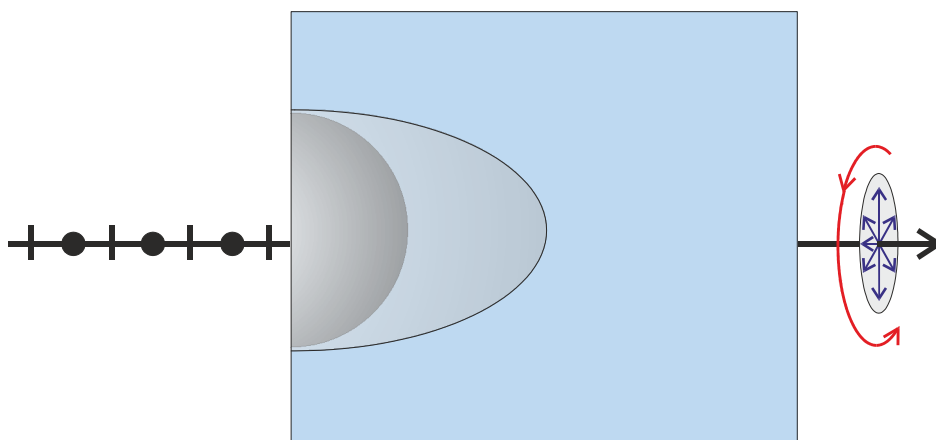
$$E = \sqrt{c\mu_0 I} ; \quad B = \sqrt{\mu_0 I/c} .$$

Výsledek: $E = 726 \text{ V/m}$, $B = 2.4 \times 10^{-6} \text{ T}$.

Poznámka: Pole 726 V/m se na první pohled zdá být enormní. Musíme si však uvědomit, že rozdíl potenciálů 726 V je měřen na vzdálenosti 1 m . Skutečné emisní akty však trvají krátkou dobu a pozorované světlo se skládá z úseků rozměrů několikanásobku vlnové délky. Na této vzdálenosti je již rozdíl potenciálů malý.

4. Čtvrtvlnná destička

Zadání: Nalezněte tloušťku čtvrtvlnné destičky vyrobené z berylu pro světlo o vlnové délce $\lambda = 500 \text{ nm}$.



Řešení: Řádná a mimořádná vlna mají vzájemně kolmé polarizace. Čtvrtvlnná destička je navržena tak, aby se obě vlny fázově posunuly o 90° , čímž vznikne kruhově polarizovaná vlna. K tomu dojde, je-li řez tak tlustý, aby rozdíl optických drah byl $\lambda/4$:

$$(n_e - n_o) d = \frac{\lambda}{4}$$

Odsud snadno určíme tloušťku destičky d . Pro beryl, který má řádný index lomu $1,598$ a mimořádný $1,590$ vychází $d = 15.6 \text{ }\mu\text{m}$.

5. Vlny ve vodiči (na přednášce)

Zadání: Nalezněme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu.

Řešení: V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_Q, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Aplikujme operaci divergence na třetí a za $\text{div } \mathbf{D}$ dosadíme z první rovnice

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right]$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\text{div } \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Nyní provedeme Fourierovu transformaci a poté vyloučíme jedno z polí (například elektrické) a získáme disperzní relaci ve tvaru

$$\omega^2 = c^2 k^2 - i c^2 \sigma \mu \omega$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru: Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + i c^2 \sigma \mu \omega \approx i c^2 \sigma \mu \omega$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + i k_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter $\exp[ik_1 x - k_2 x]$. Vlna je tlumená s charakteristickou vzdáleností útlumu

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$$

Tuto vzdálenost (do které vlna pronikne) nazýváme skinová hloubka.

Útlum v čase: Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro ω s řešením

$$\omega_{1,2} = \frac{-i c^2 \sigma \mu \pm \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4 c^2 k^2}}{2}$$

Uvědomíme-li si, že v diskriminantu je vodivostní člen dominantní (kov), zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \equiv -i c^2 \sigma \mu$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární

$$\omega = \omega_1 + i \omega_2 ; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -c^2 \sigma \mu$$

a má charakter útlumu

$$e^{-i \omega t} = e^{\omega_2 t} = e^{-c^2 \sigma \mu t}$$

s charakteristickou dobou útlumu

$$\tau = \left| \frac{1}{\omega_2} \right| = \frac{1}{c^2 \sigma \mu}$$

Povšimněte si, že při důsledném dodržení znaménkové konvence (u prostoru +, u času –) ve vlnění typu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ vyšel útlum v čase i v prostoru.

6. Grupová rychlost při disperzi (na přednášce)

Zadání: Vyjádřete grupovou rychlost za pomoci indexu lomu, který je frekvenčně závislý.

Řešení: V prostředí s disperzí závisí index lomu na frekvenci vlnění

$$n(\omega) \equiv \frac{c}{v_f} = \frac{ck}{\omega} \quad \Rightarrow \quad n(\omega)\omega = ck.$$

Získaný vztah budeme diferencovat

$$\omega \frac{dn}{d\omega} d\omega + n d\omega = c dk \quad \Rightarrow$$

$$\left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) d\omega = c dk.$$

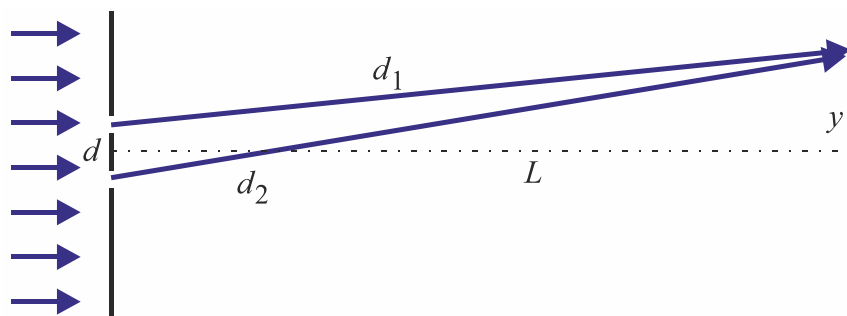
Z posledního vztahu snadno určíme grupovou rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

Vidíme, že grupová rychlost je malá v prostředích s velkým indexem lomu nebo s velkou disperzí (vysokou hodnotou $dn/d\omega$). Nejvyšší index lomu má diamant (cca 2,5) a grupová rychlost světla v něm jen 120 000 km/s. Existují ale i uměle připravená prostředí s vysokou disperzí, v nichž má rychlost šíření světla pouhou rychlost chodce. V roce 2000 se dokonce ve speciálně připraveném prostředí podařilo světlo zastavit.

7. Youngův experiment

Zadání: Určete polohu prvního maxima a prvního minima v Youngově experimentu se světlem o vlnové délce $\lambda = 500$ nm. Vzdálenost štěrbin je $d = 1$ mm, vzdálenost stínítka $L = 5$ m.



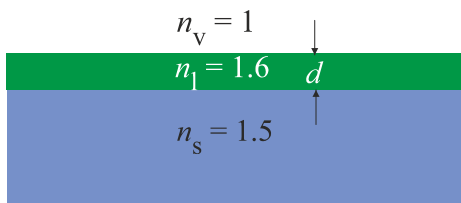
Řešení: Rozdíl optických drah (index lomu je roven jedné) bude

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2} = \\ &= L\sqrt{1 + \frac{(y + d/2)^2}{L^2}} - L\sqrt{1 + \frac{(y - d/2)^2}{L^2}} \approx \\ &\approx L\left(1 + \frac{1}{2} \frac{(y + d/2)^2}{L^2}\right) - L\left(1 + \frac{1}{2} \frac{(y - d/2)^2}{L^2}\right) = \frac{yd}{L}. \end{aligned}$$

Pro první maximum tedy bude $yd/L = \lambda$ a podmínka pro první minimum bude $yd/L = \lambda/2$. Odsud snadno určíme hodnoty y . První maximum bude ve vzdálenosti $y = 2.5 \text{ mm}$ a první minimum ve vzdálenosti 1.25 mm .

8. Antireflexní vrstva

Zadání: Na skleněné podložce o indexu lomu $n_s = 1.5$ je napařena vrstva laku tloušťky $0.5 \mu\text{m}$ s indexem lomu $n_l = 1.6$. Určete, které vlnové délky z viditelného spektra budou chybět v kolmo odraženém světle.



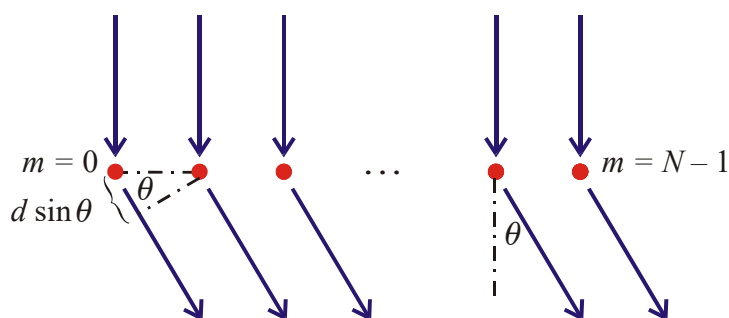
Řešení: Rozdíl optických drah na odrazu na horní a spodní vrstvě laku je $2n_l d$. Nesmíme zapomenout, že při odrazu na opticky hustším prostředí, (vrchní vrstva laku) se mění fáze na protifázi. V našem případě se tedy podmínky maxim a minim vymění. Pro minima tak máme:

$$2n_l d = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = 2n_l d / m$$

Do oblasti viditelného spektra spadají vlnové délky: 800 nm , 533 nm a 400 nm .

9. Optická mřížka

Zadání: Nalezněte součet rovinných vln ze všech ohybových center mřížky. Určete skutečný průběh světelné intenzity světla prošlého mřížkou. Počet ohybových center (vrypů) mřížky je N . Předpokládejte, že se vlny se za vrypy mohou šířit v prostředí o indexu lomu $n \neq 1$.



Řešení: Geometrický dráhový rozdíl sousedních paprsků je

$$\Delta l = d \sin \theta,$$

optický dráhový rozdíl (po přepočtení na vakuum)

$$\Delta \xi = nd \sin \theta,$$

odpovídající fázový rozdíl

$$\Delta \varphi = k \Delta \xi = \frac{2\pi}{\lambda} nd \sin \theta$$

(zde k je velikost vlnového vektoru). Pro získání výsledné intenzity světla (průměrnou intenzitou elektrického pole) je tedy nutné sečíst (počet interferujících svazků šтер-bin je m)

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{m=0}^{N-1} E_0 \exp[i(kx + m\Delta\varphi)] = E_0 \exp[ikx] \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} [\exp(i\Delta\varphi)]^m}_{\text{geom. řada}} = \\ &= E_0 \exp[ikx] \sum_{m=0}^{N-1} q^m = E_0 \exp[ikx] \frac{q^N - 1}{q - 1} = E_0 \exp[ikx] \frac{\exp(iN\Delta\varphi) - 1}{\exp(i\Delta\varphi) - 1} = \\ &= E_0 \exp[ikx] \frac{\exp\left(iN\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{\exp\left(iN\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(-iN\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(-i\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = E_0 \exp[i\ldots] \frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá intenzita světla $I \sim EE^*$, nejsou násobící komplexní jednotky v posledním výrazu ani vypsány. Intenzita světla po průchodu mřížkou je zjevně

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi nd}{\lambda} \sin \theta.$$

Tento průběh intenzity není vůbec jednoduchý, má celou řadu maxim a minim, z nichž jen některá maxima jsou opravdu výrazná. V těchto maximech (hlavní maxima druhého řádu) je

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

což vede na známou podmínku maxima na mřížce $nd \sin \theta_{\max} = k\lambda$, užívanou pro vzduch ($n = 1$) v obvyklejším tvaru $\sin \theta_{\max} = k\lambda / d$.

Poznámka: Pro $k = 0$ a tedy $\Delta\varphi = 0$ dává intenzita neurčitý výraz $0/0$. O existenci maxima i v tomto případě se můžeme přesvědčit použitím L'Hospitalova pravidla.

10. Potenciál homogenního elektrického pole

Zadání: Nalezněte potenciál homogenního elektrického pole.

Řešení: Zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby elektrické pole mířilo v ose x :

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0).$$

Vzhledem k tomu, že pole nezávisí na čase, bude převodní rovnice mezi hledaným potenciálem a polem

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

tedy ve složkách

$$E = -\frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad 0 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}; \quad 0 = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Tato soustava rovnic má velké množství řešení (potenciál, jak víme, není určen jednoznačně). K nejjednodušším řešením patří

$$\phi = -Ex.$$

Vyzkoušejte si derivovat výsledný vztah podle jednotlivých proměnných a ověřit, že dostaneme původní elektrické pole jako minus gradient potenciálu. Ukažte také (pouhým derivováním), že pro obecné homogenní pole lze použít vztah

$$\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

11. Potenciál homogenního magnetického pole

Zadání: Nalezněte potenciál homogenního magnetického pole.

Řešení: Zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby magnetické pole mířilo v ose z (záměrně volíme jinou osu než u elektrického pole, aby bylo možné řešit například pohyby v kolmých polích):

$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$

Převodní rovnice mezi hledaným potenciálem a polem je

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

tedy ve složkách

$$0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad 0 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Tato soustava rovnic má opět velké množství řešení (potenciál, jak víme, není určen jednoznačně). Klíčová je třetí rovnice, která musí dát pole B . Splníme ji (a současně i první dvě rovnice) například takto:

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0) \quad \text{nebo}$$

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \quad \text{nebo}$$

$$\mathbf{A} = 1/2 (-By, Bx, 0)$$

Všechny tři potenciály jsou stejně dobré. Vyzkoušejte, že po provedení rotace vše tří vztahů dostanete pole $(0, 0, B)$. Také si vyzkoušejte, že funguje i vztah pro homogenní magnetické pole mířící v obecném směru:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

4. RELATIVITA

1. Mion

Zadání: Doba života mionu (těžkého elektronu) je $\Delta\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s. Mion vznikl ve výšce $h = 15$ km nad povrchem Země interakcí kosmického záření s horními vrstvami atmosféry a dopadl na Zem. Jakou musel mít minimální rychlost při vzniku?



Řešení: Mion by podle klasické fyziky neměl na povrch Země vůbec dopadnout, protože se dříve rozpadne na normální elektron a neutrino. Z hlediska pozorovatele na Zemi je ale mion v pohyblivé soustavě a doba jeho života se prodlužuje na $\Delta t = \gamma \Delta\tau$. Mion proto může ulétnout až vzdálenost $h \leq c\Delta t = c\gamma \Delta\tau$. Z tohoto vztahu vypočteme rychlost, kterou musí minimálně mít:

$$v \geq c \sqrt{1 - \left(\frac{c \Delta\tau}{h} \right)^2} \approx 0,9992 c.$$

Příklad lze také řešit v soustavě spojené s mionem jako kontrakci vzdálenosti, kterou musí mion ulétnout.

2. Interval

Zadání: Dokažte, že interval mezi dvěma událostmi je ve všech souřadnicových soustavách stejný.

Řešení: Předpokládejme, že se odehrály dvě události A a B a každá je popsána čtyřmi prostoročasovými údaji v nějaké souřadnicové soustavě S . Spočteme interval v soustavě \tilde{S} a v soustavě S . Ukážeme, že obě hodnoty jsou stejné. V \tilde{S} platí



$$\Delta \tilde{s}^2 = -c^2 (\tilde{t}_B - \tilde{t}_A)^2 + (\tilde{x}_B - \tilde{x}_A)^2 + (\tilde{y}_B - \tilde{y}_A)^2 + (\tilde{z}_B - \tilde{z}_A)^2 .$$

Interval přepíšeme pomocí přírůstků, které určíme z Lorentzovy transformace

$$\tilde{t} = \gamma(t - vx/c^2), \quad \tilde{x} = \gamma(x - vt), \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z .$$

Pro interval tedy máme

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{s}^2 &= -c^2 \Delta \tilde{t}^2 + \Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{y}^2 + \Delta \tilde{z}^2 \quad \Rightarrow \\ \Delta \tilde{s}^2 &= -c^2 \left[\gamma(\Delta t - v \Delta x / c^2) \right]^2 + \left[\gamma(\Delta x - v \Delta t) \right]^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 . \end{aligned}$$

Po roznásobení se výrazy úměrné $\Delta x \Delta t$ vyruší a zbude

$$\Delta \tilde{s}^2 = -c^2 \gamma^2 (\Delta t)^2 - \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 (\Delta x)^2 + \gamma^2 (\Delta x)^2 + \gamma^2 v^2 (\Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 .$$

Nyní sloučíme členy s Δx a Δt k sobě:

$$\Delta \tilde{s}^2 = -\gamma^2 (c^2 - v^2) \Delta t^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 .$$

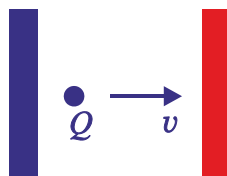
Využijeme-li definici koeficientu γ , máme okamžitě

$$\Delta \tilde{s}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta s^2 .$$

Interval mezi oběma událostmi je proto ve všech souřadnicových soustavách stejný.

3. Elektron

Zadání: Elektron je urychlen napětím $U = 10^6$ V. Určete jeho rychlost z klasického i relativistického výrazu pro kinetickou energii a výsledky porovnejte.



Řešení: Elektron v obou případech urychlením získá kinetickou energii

$$W_k = QU .$$

V klasickém případě je

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2QU}{m}} = 1,98 c .$$

V relativistickém případě je

$$W_k = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \quad \Rightarrow \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + QU} \right)^2} = 0,94 c.$$

Nerelativistický výraz tedy zjevně nemůžeme v tomto případě použít, vede k rychlostem pohybu elektronu vyšším než je rychlost světla.

4. Slunce

Zadání: Jak se změní hmotnost Slunce za jeden rok díky jeho vyzařování? Intenzita slunečního záření nad atmosférou Země je $I = 1,4 \text{ kW/m}^2$, hmotnost Slunce je $2 \times 10^{30} \text{ kg}$, vzdálenost Země od Slunce je $d = 150 \times 10^6 \text{ km}$.

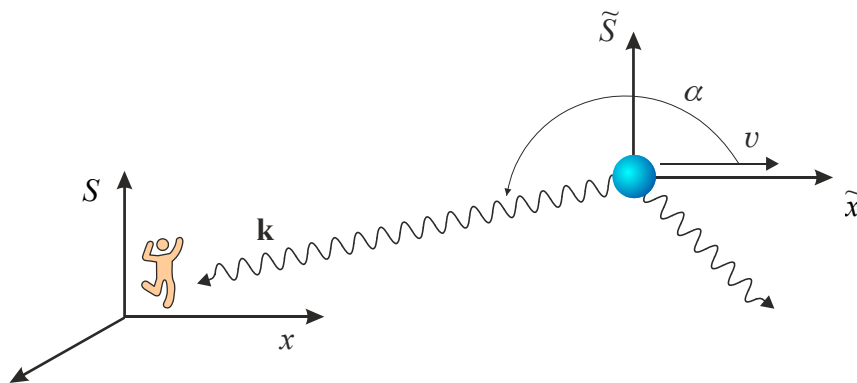
Řešení: Hmotnost se změní o

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = P \Delta t / c^2 = 4 \pi d^2 I \Delta t / c^2 \sim 10^{17} \text{ kg}.$$

Slunce přichází o zanedbatelný zlomek své celkové hmotnosti.

5. Dopplerův jev (na přednášce)

Zadání: Odvodme nyní relativistický Dopplerův jev pomocí transformace vlnového čtyřvektoru $(\omega/c, \mathbf{k})$. Pozorovatel je v soustavě S , zdroj periodického signálu je v soustavě označené vlnkou. Vlnění se šíří do všech směrů, nás zajímá jen vlnový vektor \mathbf{k} , který míří právě k pozorovateli. Úhel mezi směrem pohybu zdroje vlnění a směrem k pozorovateli je označen α (musíme rozlišovat α^0 v soustavě zdroje a α v soustavě pozorovatele).



V soustavě \tilde{S} spojené se zdrojem záření je řešení velmi jednoduché:

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k \cos \alpha_0 \\ k \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}.$$

Nyní provedeme Lorentzovu transformaci do soustavy pozorovatele S (jde o inverzní Lorentzovu transformaci):

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá frekvence v místě pozorovatele, postačí nalézt jen nultý řádek maticového násobení:

$$\omega = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_0 \right) \omega_0.$$

Tento vztah je známý jako relativistický Dopplerův jev. V limitě nízkých rychlostí (zanedbáme členy kvadratické a vyšší v v/c) je $\gamma \rightarrow 1$ a $\omega = (1 + v/c \cos \alpha_0) \omega_0$. Při vzdalování zdroje je úhel $\alpha_0 = 180^\circ$ a frekvence $\omega = (1 - v/c) \omega_0$, při přibližování zdroje vlnění je $\alpha_0 = 0^\circ$ a $\omega = (1 + v/c) \omega_0$. Jde o známé nerelativistické Dopplerovy vztahy. Při vyšších rychlostech jsou tyto vztahy modifikovány Lorentzovým faktorem γ . Jestliže zdroj záření pozorovatele míjí ($\alpha_0 = \pm 90^\circ$) je $\omega = \gamma \omega_0$. Ke změně frekvence tedy dochází i v případě, že se zdroj nevzdaluje ani nepřibližuje. Tento jev se nazývá transversální Dopplerův jev a jde o čistě relativistický jev, který nemá v nerelativistické fyzice obdoby. Je způsoben změnou chodu času v pohybující se soustavě (dilatací času). Prostorové relace maticové transformace dají vztahy

$$\omega \cos \alpha = \gamma \omega_0 (\beta + \cos \alpha_0),$$

$$\omega \sin \alpha = \omega_0 \sin \alpha_0.$$

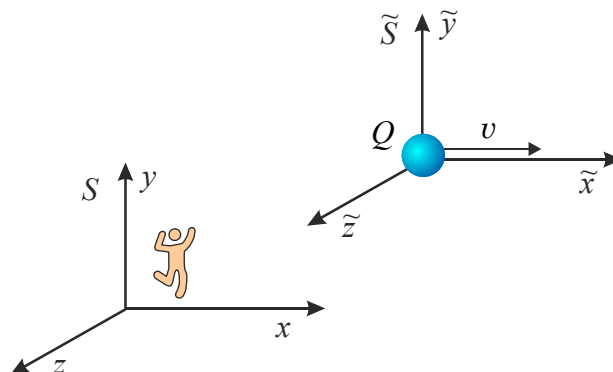
Pokud obě rovnice vydělíme, získáme vztah mezi oběma úhly, který je nezávislý na frekvencích a závisí jen na vzájemné rychlosti soustav:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha_0}{\gamma \beta + \gamma \cos \alpha_0}$$

Ze vztahu je zřejmé, že vlnoplocha změnila směr a že tato změna závisí jen na vzájemné rychlosti soustav v . Relativistický Dopplerův jev jsme naším postupem odvodili jen pro světlo ($\omega = ck$) a nikoli pro obecné vlnění látky.

6. Heavisideovo pole (na přednášce)

Zadání: Představme si, že kolem nás prolétá konstantní rychlostí nabitá částice. Jaké pole budeme, jakožto pozorovatelé vnímat?



Řešení: Využijeme transformaci čtyřpotenciálu pole $(\phi/c, \mathbf{A})$. V soustavě spojené s nábojem je vektorový potenciál nulový (není zde přítomno magnetické pole) a skalární potenciál je dán Coulombovým zákonem:

$$\tilde{\phi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}.$$

Provedeme inverzní Lorentzovu transformaci do soustavy S pozorovatele

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q/(4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení matic dostáváme pro potenciály v soustavě pozorovatele

$$\phi = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}};$$

$$A_x = \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}};$$

$$A_y = 0;$$

$$A_z = 0.$$

Ve výsledku jsme označili

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}.$$

Je zřejmé, že magnetické pole je již nenulové a elektrické pole je také modifikováno. Nový tvar polí je

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\gamma Q(x-vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\gamma Q y}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma Q z}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Magnetické pole určíme jako rotaci vektorového potenciálu:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\gamma\beta Q z}{4\pi\epsilon_0 c[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

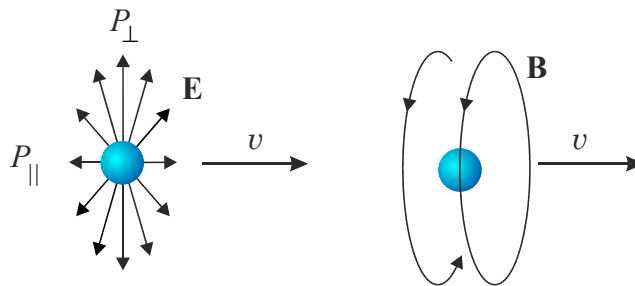
$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = + \frac{\gamma \beta Q y}{4\pi\epsilon_0 c [\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Důležitá je kolmá a rovnoběžná složka elektrického pole, určíme ji v místech daných na obrázku polohou pozorovatele P_{\parallel} : a P_{\perp}

$$E_{\perp} = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \Big|_{x=vt} = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)},$$

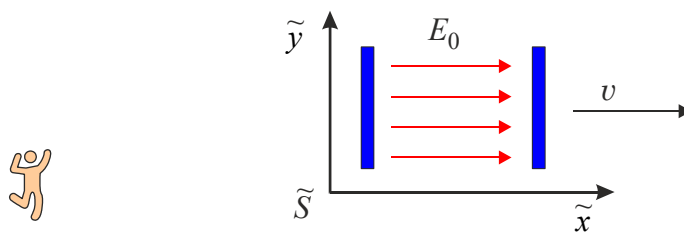
$$E_{\parallel} = E_x \Big|_{\substack{y=0 \\ z=0}} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x - vt)^2}.$$

Vidíme, že elektrické pole je napříč pohybu nataženo faktorem γ a ve směru pohybu je stlačeno faktorem $1/\gamma^2$. Pole se pohybuje spolu s nábojem. Magnetické pole tvoří kružnice kolem osy pohybu náboje a slábne se vzdáleností od náboje. Pro nekonečnou řadu nábojů bychom získali pole kolem vodiče. Pole je pojmenováno podle anglického fyzika a matematika Olivera Heavisidea (1850–1925).



7. Letící kondenzátor

Zadání: Rovinný deskový kondenzátor s homogenním elektrickým polem se pohybuje vzhledem k pozorovateli rychlostí v ve směru siločar pole. Určete elektrické a magnetické pole, které bude pozorovatel pozorovat.



Řešení: Zavedeme souřadnicovou soustavu \tilde{S} spojenou s kondenzátorem. Soustava S bude spojená s pozorovatelem. V soustavě spojené s kondenzátorem jsou potenciály pole triviální. Elektrické pole musí být záporně vzatým gradientem skalárního potenciálu, magnetické pole rotací vektorového potenciálu, odsud určíme potenciály:

$$\tilde{\phi} = -E_0 \tilde{x},$$

$$\tilde{A}_x = 0,$$

$$\tilde{A}_y = 0,$$

$$\tilde{A}_z = 0.$$

Nyní provedeme inverzní Lorentzovu transformaci k soustavě spojené s pozorovatelem:

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_0 \tilde{x}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledné potenciály jsou:

$$\begin{aligned} \phi &= -\gamma E_0 \tilde{x} = -\gamma^2 E_0 (x - vt), \\ A_x &= -\frac{\gamma\beta E_0 \tilde{x}}{c} = -\frac{\gamma^2 \beta E_0 (x - vt)}{c}, \\ A_y &= 0, \\ A_z &= 0. \end{aligned}$$

Poslední částí výpočtu je určení nových elektrických a magnetických polí:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \gamma^2 E_0 - \gamma^2 \frac{\beta}{c} E_0 v = \gamma^2 (1 - v^2/c^2) E_0 = E_0, \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = 0, \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0, \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Pohybuje-li se zdroj homogenního elektrického pole ve směru siločar, pole se nezmění. Toto tvrzení ale neplatí pro pohyb napříč siločávkám. V tomto případě se mění elektrické pole a generuje pole magnetické (Vyzkoušejte!).

8. Inverzní matice k LT (přednáška)

Zadání: Nalezněte inverzní matici k matici Lorentzovy transformace.

Řešení: V tomto případě stačí zaměnit $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, takže je pak $\gamma \rightarrow \gamma$; $\beta \rightarrow -\beta$ a inverzní matice má tvar

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformační rovnice má tvar

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Ověřte, že platí

$$\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = \mathbf{1}.$$

9. Úhel rotace, rapidita

Zadání: Nalezněte úhel rotace u Lorentzovy transformace.

Řešení: Postupujeme jako při obyčejné rotaci v prostoru, kdy se otočíme o určitý úhel v rovině (x, y) ; souřadnice z se nemění. Tento obecný případ lze popsat jako transformaci

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformační maticí při této rotaci je matice

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž determinant je $\det \mathbf{R} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Jak je tomu u Lorentzovy transformace? Z Lorentzovy transformační matice se zdá, že jde o rotaci v rovině (t, x) . Kdyby bylo $\gamma = \cos \varphi$, pak z determinantu Lorentzovy matice $\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1$ vychází $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = \cos^2 \varphi - 1$, což nedává $\sin^2 \varphi$. Tento problém řeší hyperbolické funkce ch a sh . Provedeme tedy substituci

$$\gamma \equiv \text{ch } u.$$

Pak je $\gamma^2 \beta^2 = \text{ch}^2 u - 1 = \text{sh}^2 u$ a lze volit $\gamma\beta = \text{sh } u$. Lorentzova matice získá tvar

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } u & -\text{sh } u & 0 & 0 \\ -\text{sh } u & \text{ch } u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

který je velice podobný rotační transformační matici, determinant je zjevně roven jedné. Jde o rotaci v rovině (t, x) o ryze imaginární úhel u , který se nazývá rapidita. Hodnotu rapidity snadno zjistíme:

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{\gamma \beta}{\gamma} = \beta = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{arcth} \frac{v}{c}.$$

Rapidita je jednoduchou funkcí vzájemné rychlosti obou soustav.

10. Parametry částice

Zadání: Elementární částice má v soustavě pozorovatele hybnost $3,6 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$ a celkovou energii $1,35 \times 10^{-13} \text{ J}$. Určete klidovou hmotnost a rychlost částice.

Řešení Napišme si nejprve vztahy pro hybnost a energii

$$p = \gamma m_0 v,$$

$$E = \gamma m_0 c^2.$$

$$v = \frac{p c^2}{E} = 240 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

V dalším kroku určíme koeficient γ a klidovou hmotnost (buď ze vztahu pro hybnost, nebo ze vztahu pro energii):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad m_0 = \frac{p}{\gamma v} = \dots = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}.$$

Klidová hmotnost elementární částice je rovna klidové hmotnosti elektronu.

11. Relativistické urychlení

Zadání: Řešte nerelativisticky a relativisticky pohybovou rovnici pro náboje, který je z nulové rychlosti urychlován ve směru elektrického pole.

Řešení nerelativistické: Budeme integrovat Newtonovu pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = QE \quad \Rightarrow \quad v(t) \equiv \dot{x} = \frac{QE}{m} t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{QE}{2m} t^2.$$

Nerelativistické řešení má zjevné vady, například

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \infty.$$

Náboj v konečném čase překročí rychlost světla a je urychlován dál a dál.

Řešení relativistické: Budeme integrovat relativistickou pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt}(mv) = QE \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = QE \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = QE t.$$

Vidíme, že po první integraci jsme nedostali rychlost samotnou, ale vztah, ze kterého teprve musíme rychlost vypočítat:

$$\frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = Q^2 E^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad m_0^2 v^2 = Q^2 E^2 t^2 (1 - v^2/c^2).$$

Z tohoto výrazu již snadno určíme hledanou rychlost

$$v(t) = c \frac{QE t / m_0 c}{\sqrt{1 + \frac{Q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}}}.$$

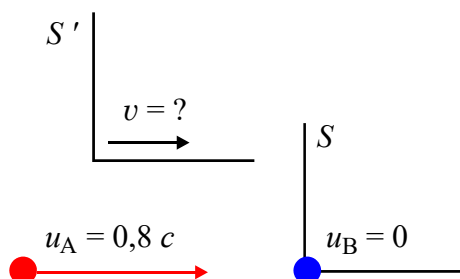
Výraz pro rychlost již není tak jednoduchý, zato ale nediverguje,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = c.$$

Chcete-li znát polohu nabitě částice, je třeba provést ještě jednu integraci.

12. Nepružná srážka

Zadání: Částice o klidové hmotnosti m_0 se nepružně srazí rychlostí $0,8c$ s nepohyblivou částicí o stejné hmotnosti. Jaká bude rychlost spojených částic po srážce? Jaká bude jejich celková hmotnost?



Řešení: Laboratorní soustavu S spojíme s částicí B , která je v klidu. Dále zavedeme těžišťovou soustavu obou částic S' , ve které se symetricky pohybují proti sobě. Rychlosti částic v těchto soustavách budou:

$$u_A = 0,8c; \quad u_B = 0, \\ u'_A = -v; \quad u'_B = +v.$$

Transformační rovnice pro rychlost částice B nám dává:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1 - \frac{u_B v}{c^2}} \Rightarrow v = \frac{0,8c - v}{1 - \frac{0,8v}{c}} \Rightarrow v = 0,5c.$$

Obě částice se tedy v těžišťové soustavě pohybují proti sobě rychlostí $0,5c$. Po srážce se spojené částice v těžišťové soustavě nepohybují. To znamená, že z hlediska laboratorní soustavy mají po srážce rychlost právě $0,5c$. Zbývá ještě určit jejich hmotnost. V těžišťové soustavě mají obě částice stejnou pohybovou hmotnost. Po srážce bude mít výsledná dvojice v těžišťové soustavě hmotnost:

$$m_T = 2m = 2\gamma m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0.$$

V těžišťové soustavě se po srážce částice nepohybují, proto jde o klidovou hmotnost spojené částice po srážce. Spojené částice se po srážce pohybují rychlostí $0,5c$ a mají klidovou hmotnost $4m_0/\sqrt{3}$.

5. KVANTOVÁ TEORIE

1. Vláknó žárovky

Zadání: Určete, jaký proud by měl procházet kovovým vláknem o průměru 0,1 mm, které je umístěno ve vyčerpané baňce, aby se jeho teplota udržela na konstantní hodnotě 2 500 K. Předpokládejte, že vlákno vyzařuje jako absolutně černé těleso, tepelné ztráty spojené s vedením tepla zanedbejte. Rezistivita vodiče je $\rho = 2,5 \times 10^{-4} \Omega \text{ cm}$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že vlákno září jako absolutně černé těleso, potom celkové množství energie, které je vyzařeno za jednu sekundu z jednoho metru čtverečního plochy, můžeme určit ze Stefanova-Boltzmannova zákona

$$I = \sigma T^4.$$

Celkové množství energie vyzařované plochou vodiče S za 1 s tedy je

$$W = IS = \sigma T^4 2\pi r l,$$

kde l je délka vodiče. Aby teplota vlákna byla konstantní, je třeba tuto vyzářenou energii kompenzovat energií, která vzniká při průchodu elektrického proudu I vodičem o odporu R za sekundu, tedy

$$W = RI^2.$$

Dostáváme

$$RI^2 = \sigma T^4 2\pi r l. \quad (*)$$

Odpor vodiče o poloměru r je

$$R = \rho \frac{l}{\pi r^2}.$$

Dosazením za R do rovnice (*) pro proud dostáváme

$$I = \pi r T^2 \sqrt{\frac{2\sigma r}{\rho}} \approx 1,47 \text{ A}.$$

2. Slunce

Zadání: Jaká je povrchová teplota Slunce, budeme-li předpokládat, že Slunce září jako absolutně černé těleso a že maximum intenzity jeho záření při dané teplotě připadá na vlnovou délku $\lambda_m = 5,1 \times 10^{-7} \text{ m}$? Určete výkon, vyzařovaný z 1 m^2 povrchu Slunce.

Řešení: K určení teploty povrchu Slunce použijeme Wienův zákon posuvu

$$\lambda_m T = b,$$

odkud dostáváme

$$T = 5700 \text{ K}.$$

Výkon vyzařovaný z 1 m^2 plochy slunečního povrchu určíme s použitím Stefanova-Boltzmannova zákona, do kterého dosadíme právě určenou teplotu povrchu Slunce:

$$I = \sigma T^4 = 5,9 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}.$$

3. Fotoelektrický jev

Zadání: Elektromagnetické záření o vlnové délce 436 nm dopadá na povrch lithia, které je umístěno ve vakuu. Je-li výstupní práce lithia $W_i = 3,8 \times 10^{-19}$ J, určete maximální kinetickou energii emitovaných elektronů, jejich rychlost a maximální vlnovou délku záření, které ještě bude elektrony z kovu emitovat.

Řešení: Z Einsteinovy rovnice pro fotoelektrický jev

$$\hbar\omega = W_i + \frac{1}{2}mv^2$$

určíme maximální kinetickou energii emitovaných elektronů

$$W_{\text{kin,max}} = \hbar\omega - W_i = h \frac{2\pi c}{\lambda} - W_i = 7 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

Maximální rychlost těchto elektronů bude

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{kin,max}}}{m_e}} = 3,9 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

Vlnová délka záření, které ještě bude elektrony z povrchu kovu uvolňovat, může být určena z podmínky

$$\hbar\omega = h \frac{2\pi c}{\lambda} = W_i$$

Pro tuto vlnovou délku dostáváme $\lambda = 5,2 \times 10^{-7}$ m. Je zřejmé, že emitovat elektrony z lithia může pouze elektromagnetické záření o vlnové délce kratší než $5,2 \times 10^{-7}$ m.

4. Hmotové vlny

Zadání: Určete vlnovou délku de Broglieovy vlny elektronu, který byl urychlen průcho-dem potenciálním rozdílem $U = 100$ V.

Řešení: Rychlost elektronu určíme z jeho kinetické energie

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU.$$

Dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 5,9 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Hybnost elektronu tedy je

$$p = m_e v = 5,4 \times 10^{-24} \text{ kg ms}^{-1}.$$

Vlnová délka de Broglieovy vlny je

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e v} = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Povšimněte si, že tato vlnová délka je řádově stejně velká jako poloměr vodíkového atomu.

5. Bohrov model

Zadání: Určete poloměry, rychlosti a energie možných drah v Bohrově modelu.

Řešení: Bohrovu kvantovací podmínku budeme kombinovat s rovností mezi odstředivou a coulombickou silou:

$$2\pi r_n = n\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv_n}$$
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}$$

Obě rovnice jsou soustavou pro určení poloměrů a rychlostí. Po snadném výpočtu vyjde:

$$r_n = \frac{4\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2;$$
$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar n}.$$

Po dosazení numerických hodnot dostaneme pro $n = 1$ dostaneme

$$r_1 = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Pro rychlost elektronu na této dráze pak dostáváme

$$v_1 = 2,18 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}.$$

Nakonec zbývá určit energii:

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = E_n = - \left(\frac{e^4 m_e}{32\pi\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}.$$

Základní stav atomu je charakterizován hlavním kvantovým číslem $n = 1$. Po dosazení numerických hodnot pro celkovou energii dostáváme

$$E_1 = -2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}.$$

6. Fraunhoferova čára

Zadání: Na základě Bohrova modelu určete vlnovou délku elektromagnetického záření emitovaného vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy $n = 4$ na kvantovou dráhu $n = 2$. Rychlost světla je $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Řešení: Frekvenci a následně i vlnovou délku emitovaného záření určíme z energie fotonu, který je vyzářen při přechodu elektronu ze čtvrté kvantové dráhy na druhou:

$$E_m - E_s = \hbar\omega.$$

Dosazením za celkovou energii elektronu na n -té kvantové dráze

$$E_n = - \left(\frac{m_e e^4}{32 \pi \epsilon_0^2 \hbar^3} \right) \frac{1}{n^2},$$

obdržíme pro úhlovou frekvenci emitovaného záření

$$\hbar \omega = \frac{m_e e^4}{32 \pi \epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Po převodu úhlové frekvence na vlnovou délku dostaneme výsledek

$$\lambda = 0,485 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

Záření o této vlnové délce bylo pozorováno ve spektru Slunce (Fraunhofer, 1815) a popsáno jako Fraunhoferova čára F.

7. Komutátor I

Zadání: Určete komutátor operátoru derivace a operátoru násobení souřadnicí.

Řešení: Mějme na \mathcal{L}^2 dva operátory: $\hat{\mathbf{D}} = d/dx$ a $\hat{\mathbf{X}} = x$, určíme jejich komutátor

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}] | \mathbf{f} \rangle &= (\hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{D}}) | \mathbf{f} \rangle = \left(\frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} \right) f(x) = \frac{d}{dx} (x f(x)) - x \frac{d}{dx} f(x) = \\ &= f(x) + x f'(x) - x f'(x) = f(x) = | \mathbf{f} \rangle \Rightarrow \\ [\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}] | \mathbf{f} \rangle &= | \mathbf{f} \rangle = \text{pro } \forall | \mathbf{f} \rangle \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow \\ [\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}] &= \hat{\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

8. Komutátor II

Zadání: Určete komutátor násobení druhou mocninou proměnné a operátoru derivace.

Řešení:

$$\begin{aligned} \left[x^2, \frac{d}{dx} \right] &= ? \\ \left[x^2, \frac{d}{dx} \right] f &= \left(x^2 \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} x^2 \right) f = \\ &= x^2 \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} x^2 f = x^2 \frac{df}{dx} - 2xf - x^2 \frac{df}{dx} = -2xf \Rightarrow \\ \left[x^2, \frac{d}{dx} \right] f &= -2xf \Rightarrow \\ \left[x^2, \frac{d}{dx} \right] &= -2x \end{aligned}$$

9. Operátor $i d/dx$

Zadání: Dokažte, že operátor $i d/dx$ je hermitovský na prostoru reálných čísel.

Řešení: Označme operátor $\hat{\mathbf{B}} = i \frac{d}{dx}$. Důkaz je přímočarý, s operací budeme „putovat“ z jedné části skalárního součinu do druhé.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{B}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{d}{dx} f(x) \right)^* g(x) dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d f^*(x)}{dx} g(x) dx \stackrel{p. partes}{=} \\ &= -i \left[f^*(x) g(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \frac{d g(x)}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left(i \frac{d g(x)}{dx} \right) dx = \langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{B}} \mathbf{g} \rangle. \end{aligned}$$

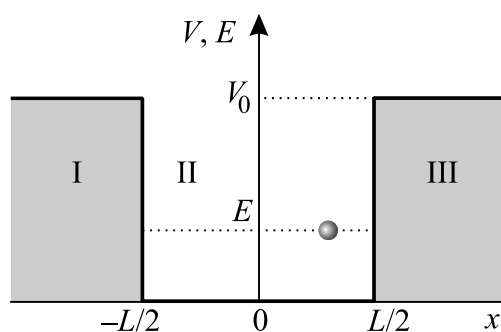
Výraz v hranaté závorce je nulový, neboť funkce z $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ jsou integrovatelné s kvadrátem na $(-\infty, \infty)$ a proto musí být

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 0 \quad \text{pro } \forall f, g \in \mathcal{L}^2.$$

Samotný operátor derivace $\hat{\mathbf{D}} = d/dx$ hermitovský není, při provedení integrace per partes by se zaměnilo znaménko a $\langle \hat{\mathbf{D}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = -\langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{D}} \mathbf{g} \rangle$.

10. Konečná jáma (nepovinné)

Běžnou aproximací potenciálového minima je konečná jáma. Jde o výhodné přiblížení například pro interakce neutronů a protonů v atomovém jádře, i když zde bychom správně měli řešit třírozměrnou konečnou jámu. Šířka jámy je v tomto případě přibližně 10^{-15} m, což je zhruba dosah silné interakce. Narozdíl od nekonečné jámy nelze spektrum energie určit analyticky. Naštěstí existuje jednoduchá geometrická metoda, která vede k nalezení spektra. Budeme předpokládat, že jáma je orientována symetricky vůči počátku souřadnicového systému, což nám usnadní závěrečný výpočet spektra. Výpočet se opět rozpadne na tři oblasti, ve kterých budeme postupovat obdobně jako u nekonečné jámy. První i druhá derivace vlnové funkce musí být na rozhraní spojitá, jinak by druhá derivace ve Schrödingerově rovnici byla nepřípustnou distribucí.



Budeme tedy řešit Schrödingerovu rovnici s potenciálem konečné jámy:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi, \quad V(x) = \begin{cases} 0; & x \in (-L/2, L/2), \\ V_0; & x \notin (-L/2, L/2). \end{cases}$$

V jednotlivých oblastech I, II a III je potenciál konstantní a řešení je jednoduché. V oblastech I a III je řešení kombinací rostoucí a klesající exponenciály, v dané oblasti je vždy jen jedna z těchto funkcí integrovatelná s kvadrátem a druhou je nutné vyloučit (položit konstantu u ní rovnou 0). V oblasti II je řešení složené z funkcí kosinus a sinus:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= C e^{hx}; & x \in I, & & h^2 &\equiv \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}; \\ \psi_{II}(x) &= A \cos kx + B \sin kx; & x \in II, & & & \\ \psi_{III}(x) &= D e^{-hx}; & x \in III, & & k^2 &\equiv \frac{2mE}{\hbar^2}.\end{aligned}$$

Podmínky spojitosti na levé a pravé straně jámy vedou na rovnice

$$\begin{aligned}\psi_{II}(-L/2) &= \psi_I(-L/2); \\ \psi_{II}(+L/2) &= \psi_{III}(+L/2); \\ \psi'_{II}(-L/2) &= \psi'_I(-L/2); \\ \psi'_{II}(+L/2) &= \psi'_{III}(+L/2).\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme vztahy mezi konstantami A , B , C a D :

$$\begin{aligned}A \cos(kL/2) - B \sin(kL/2) &= C e^{-hL/2}; \\ A \cos(kL/2) + B \sin(kL/2) &= D e^{-hL/2}; \\ +Ak \sin(kL/2) + Bk \cos(kL/2) &= Ch e^{-hL/2}; \\ -Ak \sin(kL/2) + Bk \cos(kL/2) &= -Dh e^{-hL/2}.\end{aligned}$$

Nyní první dvojici rovnic sečteme a odečteme. S druhou dvojicí uděláme totéž:

$$\begin{aligned}2A \cos(kL/2) &= (D + C) e^{-hL/2}; \\ 2B \sin(kL/2) &= (D - C) e^{-hL/2}; \\ 2Bk \cos(kL/2) &= (C - D)h e^{-hL/2}; \\ 2Ak \sin(kL/2) &= (C + D)h e^{-hL/2}.\end{aligned}$$

Pokud je konstanta A různá od nuly, můžeme provést výpočet z první a poslední rovnice, pokud je různé od nuly B , z druhé a třetí rovnice:

$$\begin{aligned}A \neq 0 &\Rightarrow k \operatorname{tg}(kL/2) = h, \\ B \neq 0 &\Rightarrow k \operatorname{ctg}(kL/2) = -h.\end{aligned}$$

Pokud by byly obě konstanty nenulové, dostaneme se ihned do sporu. Pokud by byly obě konstanty nulové, máme jen nulové řešení pro vlnovou funkci. V úvahu tedy přicházejí jen dvě možnosti

1. $A \neq 0, B = 0$. Podle **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** jde o řešení sudá.
2. $A = 0, B \neq 0$. Podle **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** jde o řešení lichá.

V obou případech je už snadné dopočítat z **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** konstanty C a D . Poslední konstantu A (v případě 1), resp. B (v případě 2), určíme z normovací podmínky $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. Nás ale spíše zajímá energetické spektrum částice v konečné jámě. To je určeno podmínkami **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**, které představují

transcendentní rovnice. V proměnných k a h je totiž obsažena energie. První podmínka je pro sudá řešení, druhá pro lichá. Zaveďme nové proměnné

$$\xi \equiv kL/2; \quad \eta \equiv hL/2. \quad (*)$$

Obě proměnné jsou bezrozměrné a spektrální podmínky se změní na

$$\begin{aligned} \eta &= \xi \operatorname{tg} \xi; & \text{sudá řešení,} \\ \eta &= -\xi \operatorname{ctg} \xi; & \text{lichá řešení.} \end{aligned} \quad (**)$$

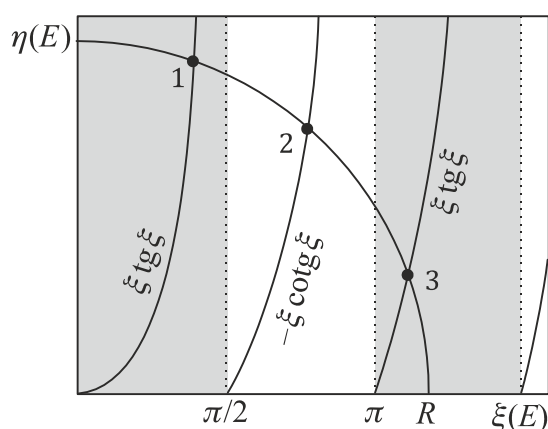
Oba vztahy (*), (**) můžeme snadno vykreslit do grafu v rovině (ξ, η) , tj. na vodorovnou osu budeme nanášet hodnoty ξ , na svislou osu hodnoty η vypočtené z pravých stran relace. Pro nové proměnné (ξ, η) platí jedna zajímavá vlastnost, která plyne z definic (*):

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{(k^2 + h^2)L^2}{4} = \frac{mV_0L^2}{2\hbar^2}.$$

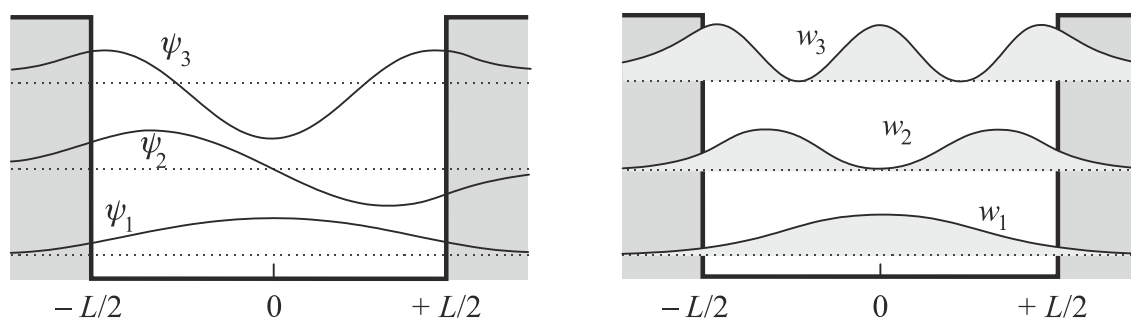
Nejde o nic jiného než o rovnici kružnice s poloměrem daným parametry jámy:

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2; \quad R \equiv \sqrt{\frac{mV_0L^2}{2\hbar^2}}.$$

Průsečíky této kružnice s křivkami (**) dají grafické řešení energetického spektra



Na rozdíl od nekonečné jámy částice proniká i do klasicky zakázaných oblastí, tj. do oblasti $x < -L/2$ a do oblasti $x > +L/2$. Z následujícího obrázku je patrné, že hustota pravděpodobnosti je v těchto zakázaných oblastech nenulová. Vlnové funkce se střídají sudé a liché. Hustoty pravděpodobnosti jsou sudé funkce pro všechny stavy. Střední hodnota polohy částice je proto 0, tedy uprostřed jámy.

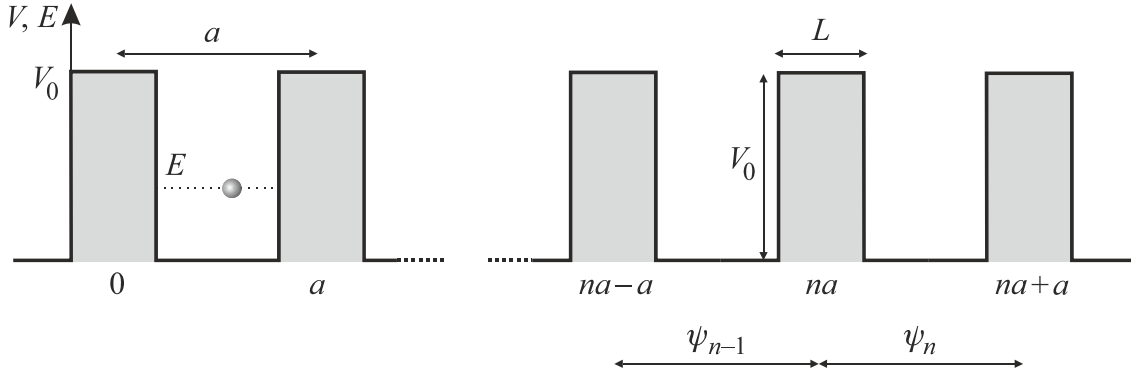


11. Periodický potenciál a pásové spektrum (nepovinné)

Velmi častý je také pohyb částic v nelokalizovaném potenciálu, například v periodickém potenciálu krystalické mříže, který splňuje základní podmínku

$$V(x+a) = V(x), \quad (1)$$

kde a je perioda potenciálu. K pochopení základních vlastností periodického potenciálu postačí řešit případ nekonečné posloupnosti střídajících se jam a bariér. Tento průběh potenciálu se nazývá Kronigův-Penneyův model. Poprvé ho použili německo-americký fyzik Ralph Kronig a anglický matematik William Penney. Budeme předpokládat, že výška opakujících se bariér je V_0 , jejich šířka L a perioda a .



Kvalitativní charakter spektra nezávisí na šířce jednotlivých bariér. Budeme je deformovat tak, aby zůstala zachována jejich plocha, tj. provedeme limitu $L \rightarrow 0$, $V_0 \rightarrow \infty$, tak, aby se součin LV_0 neměnil. Tím získáme potenciál složený z nekonečné řady Diracových impulzů a na každé bariéře postačí jedno jediné navázání vlnové funkce. Budeme tedy mít potenciál

$$V(x) = LV_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-na),$$

pro který snadno nalezneme řešení na intervalu $(na, na+a)$, kde je potenciál nulový:

$$\psi_n(x) = A_n \cos[k(x-na)] + B_n \sin[k(x-na)];$$

$$\psi'_n(x) = -A_n k \sin[k(x-na)] + B_n k \cos[k(x-na)]; \quad (2)$$

$$k \equiv 2mE/\hbar^2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Argument kmitavého řešení je vhodně posunut do lokálního počátku v místě každého Diracova impulzu, takže sinus začíná u každé jámy od nuly a kosinus od jednotky. Při navazování vlnových funkcí využijeme tři podmínky. Samotná vlnová funkce bude spojitá, první derivace bude mít skok (jde o Diracův impulz) a perioda potenciálu povede na periodicitu hustoty pravděpodobnosti. Rozepišme nyní tyto tři podmínky pro navázání na n -tém Diracově impulzu (resp. na n -té infinitezimální bariéře):

1. spojitost vlnové funkce

Na každé bariéře musíme předpokládat spojitost vlnové funkce. Kdyby byla nespojitá, první derivace by dala distribuci a druhá derivace obsažená ve Schrödingerově rovnici by byla derivací distribuce, kterou by nebylo možné žádným dalším členem kompenzovat. Musí tedy platit:

$$\psi_{n-1}(na) = \psi_n(na).$$

Odsud dostaneme první z výše zmíněných tří podmínek:

$$A_{n-1} \cos(ka) + B_{n-1} \sin(ka) = A_n. \quad (3)$$

2. Skok v první derivaci

Napišme Schrödingerovu rovnici v naší situaci

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x) \psi = E \psi.$$

Rovnici budeme integrovat v ε -okolí n -tého Diracova impulsu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{na-\varepsilon}^{na+\varepsilon} \psi''(x) dx + LV_0 \int_{na-\varepsilon}^{na+\varepsilon} \delta(x-na) \psi(x) dx = \int_{na-\varepsilon}^{na+\varepsilon} E \psi(x) dx.$$

Prostřední integrál lze spočítat vzhledem k přítomnosti Diracovy distribuce velmi snadno. V ostatních provedeme limitní přechod $\varepsilon \rightarrow 0$. Integrál na pravé straně dá díky spojitosti ψ nulu a levý integrál příslušný skok:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi']_{na-\varepsilon}^{na+\varepsilon} + LV_0 \psi_n(na) = 0,$$

odsud plyne podmínka pro skok první derivace ψ na n -tém Diracově impulsu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\psi'_n(na) - \psi'_{n-1}(na)] + LV_0 \psi_n(na) = 0.$$

Po dosazení řešení (2) máme druhou podmínku:

$$B_n + A_{n-1} \sin(ka) - B_{n-1} \cos(ka) = \frac{2mLV_0}{k\hbar^2} A_n. \quad (4)$$

3. Periodicita

Z periodicity potenciálu (1) plyne periodicitu hustoty pravděpodobnosti

$$w(x+a) = w(x); \quad w(x) \equiv \psi^*(x) \psi(x).$$

Odsud je jasné, že pro vlnovou funkci musí platit

$$\psi(x+a) = e^{i\phi} \psi(x),$$

kde ϕ je nějaké fázové posunutí. Pro naše konstanty potom plyne:

$$B_n = e^{i\phi} B_{n-1}; \quad A_n = e^{i\phi} A_{n-1}.$$

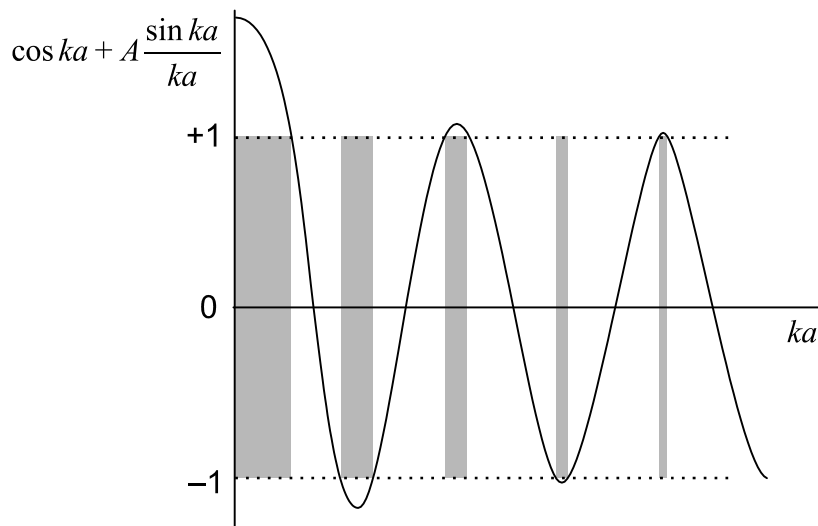
Nyní dosadíme A_{n-1} a B_{n-1} z posledního vztahu do podmínek (3) a (4). Tím získáme soustavu rovnic pro neznámé konstanty A_n a B_n :

$$\begin{pmatrix} \cos ka - e^{i\phi}, & \sin ka \\ \sin ka - \xi, & -(\cos ka - e^{i\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0; \quad \xi \equiv \frac{2mLV_0}{k\hbar^2}.$$

Nenulové řešení získáme jen tehdy, pokud bude determinant soustavy nulový, což vede na podmínku:

$$\cos \phi = \cos ka + A \frac{\sin ka}{ka}; \quad A \equiv \frac{mLaV_0}{\hbar^2}. \quad (5)$$

Pravá strana této podmínky musí být z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, jinak úhel ϕ na levé straně nelze nalézt a řešení neexistuje. Výsledkem jsou pásy, ve kterých se částice pohybovat může, a zakázané pásy, ve kterých řešení neexistuje, tj. částice s takovou energií se v periodickém potenciálu nemůže vyskytovat. Připomeňme si, že vlnový vektor \mathbf{k} je v podmínce (5) provázán s energií podle vztahu (2), tj. platí $k = 2mE/\hbar^2$.



V grafu je vynesena pravá strana podmínky (5). Tam, kde je křivka mimo interval $\langle -1, 1 \rangle$, řešení neexistuje a na grafu je šedou barvou označen zakázaný pás.

Zakázané pásy jsou typické v krystalových mřížích, v polovodičích, ale třeba i v periodických strukturách motýlích křídel, kde způsobují zajímavé, jakoby nepřírozené barvy.

