České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka příkladů z analýzy funkcí více proměnných

Miroslav Korbelář

Praha 2016

Předmluva

Tento text je určen pro studenty technických vysokých škol, zejména studentům Fakulty elektrotechnické ČVUT, k procvičení analýzy funkcí více proměnných, především diferenciálního a integrálního počtu. Sbírka obsahuje vzorová řešení příkladů k těmto tématům. K řešením jsou také připojena znění vět a definic a to tam, kde to slouží buď k připomenutí pojmu nebo k lepšímu pochopení postupu. Protože sbírka bude sloužit především jako podklad ke cvičením z předmětu *Matematická analýza 2* a *Matematika-vícedimenzionální kalkulus* vyučovaných na FEL ČVUT, obsahuje také příklady z Fourieových řad.

Část příkladů byla vytvořena pedagogy vyučujími na FEL ČVUT a část byla převzata ze zdrojů uvedených na konci sbírky a byla doplněna řešeními.

Sbírka byla vytvořena s podporou grantu RPAPS č. 13101/105/1051603C005.

Contents

1 Množiny v $\mathbb{R}^n$ jejich vlastnosti

Příklad 1.1. *Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $A^{\mathbf{c}} := \mathbb{R}^n \setminus A$ značí doplněk (*complement*) množiny A v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že platí:*

(i) $\left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} = \left(A^{\mathbf{c}}\right)^{\circ}$, $\overline{\left(A^{\mathbf{c}}\right)} = \left(A^{\circ}\right)^{\mathbf{c}}$,

(ii) A, B *otevřené* $\Rightarrow A \cap B$ *otevřená,*

(iii) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$,

(iv) A, B *uzavřené* $\Rightarrow A \cup B$ *uzavřená,*

(v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Řešení:
Pojem *otevřená* množina intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv"). Přesněji:

Otevřená množina G je taková, že s každým bodem $x_0 \in$ obsahuje i nějaké jeho okolí $U_\varepsilon(x_0)$ v podobě tzv. otevřené koule s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

tj.

$$G \text{ je } \textit{otevřená} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall x_0 \in G)\ (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$$

Pojmem uzavřené množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko. Přesněji:

Uzavřená množina F je taková, že každý bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jehož libovolné okolí $U_\varepsilon(x_0)$ má s množinou F průnik, už musí ležet v F:

$$F \text{ je } \textit{uzavřená} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n\big)\ \big((\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \cap F \neq \emptyset\ \big) \Rightarrow x_0 \in F$$

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové v tom smyslu:

$$G \text{ je otevřená} \quad \Leftrightarrow \quad G^{\mathbf{c}} \text{ je uzavřená}$$
$$F \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad F^{\mathbf{c}} \text{ je otevřená}$$

Připomeňme si ještě, že

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím (neboli vnitřek je největší otevřená množina obsažená v A)

$$x \in A^{\circ} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A.

$$x \in \overline{A} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů, jejich libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $A^{\mathbf{c}}$

$$x \in \partial A \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap A^{\mathbf{c}}$$

Pro libovolnou množinu A se tak celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží (značeno pomocí "$\mathbin{\dot\cup}$") na vnitřek A°, hranici ∂A a vnějšek $(A^{\mathbf{c}})^{\circ}$:

$$\mathbb{R}^n = A^{\circ}\ \mathbin{\dot\cup}\ \partial A\ \mathbin{\dot\cup}\ (A^{\mathbf{c}})^{\circ}$$

Kromě toho ještě platí:

- $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathbf{c}}}$
- Uzávěr $\overline{A}$ je uzavřená množina a sice nejmenší uzavřená, která obsahuje množinu A.
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(i) Snadno teď máme:

$$x \in \left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} \;\Leftrightarrow\; \neg\Big[(\forall\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\Big] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \varepsilon > 0)\; U_\varepsilon(x) \subseteq A^{\mathbf{c}} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(A^{\mathbf{c}}\right)^\circ .$$

Tedy

$$\left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} = (A^{\mathbf{c}})^\circ \;. \tag{E.1}$$

Druhou rovnost dostaneme buď analogicky nebo přechodem k doplňkům $A := B^{\mathbf{c}}$ a následně aplikací doplňků:

$$\overline{A} \overset{(E.1)}{=} \left((A^{\mathbf{c}})^\circ\right)^{\mathbf{c}} \quad\Rightarrow\quad \overline{(B^{\mathbf{c}})} = (B^\circ)^{\mathbf{c}} \tag{E.2}$$

Tedy můžeme prohazovat pořadí uzávěru a doplňku, když pak uzávěr změníme na vnitřek.

(ii) Jestliže A a B jsou otevřené, pak s každým bodem obsahují i nějakou otevřenou kouli. Když si vezmeme tu s menším poloměrem, bude obsažena v obou množinách, tedy v průniku. Takže $A \cap B$ je také otevřená.

(iii) Použijeme základní vlastnosti vnitřku:

$$A^\circ \subseteq A \tag{E.3}$$

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \tag{E.4}$$

$$A \subseteq B \quad\Rightarrow\quad A^\circ \subseteq B^\circ \tag{E.5}$$

Teď ukážeme, že $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$\Big(A{\cap}B \subseteq A \;\;\&\;\; A{\cap}B \subseteq B\Big) \overset{(E.5)}{\Longrightarrow} \Big((A{\cap}B)^\circ \subseteq A^\circ \;\;\&\;\; (A{\cap}B)^\circ \subseteq B^\circ\Big) \Longrightarrow (A{\cap}B)^\circ \subseteq A^\circ{\cap}B^\circ$$

A ještě zbývá udělat $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$A^\circ \text{ a } B^\circ \text{ jsou otevřené} \overset{\mathbf{(2)}}{\Rightarrow} A^\circ \cap B^\circ \text{ je otevřená} \Longrightarrow (A^\circ \cap B^\circ)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Tedy

$$A^\circ \cap B^\circ \overset{(E.3)}{\subseteq} A \cap B \overset{(E.5)}{\Longrightarrow} A^\circ \cap B^\circ \overset{(E.4)}{=} (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ \;.$$

Takže máme $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iv) Můžeme postupovat podobně jako v (2) a použít základní vlastnosti uzávěru:

$$A \subseteq \overline{A} \tag{E.6}$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \tag{E.7}$$

$$A \subseteq B \quad\Rightarrow\quad \overline{A} \subseteq \overline{B} \tag{E.8}$$

nebo můžeme využít dokázanou část (2) a přejdeme k doplňkům:

A, B uzavřené $\Rightarrow$ $A^{\mathbf{c}}, B^{\mathbf{c}}$ otevřené $\Rightarrow$ $A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}} = (A \cup B)^{\mathbf{c}}$ otevřená $\Rightarrow$ $A \cup B$ uzavřená.

(v) Můžeme postupovat podobně jako v (3) nebo můžeme využít dokázanou část (3) a přejdeme k doplňkům s pomocí (1):

$$\overline{A \cup B} = \left((\overline{A \cup B})^{\mathbf{c}}\right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(1)}}{=} \left(((A \cup B)^{\mathbf{c}})^\circ\right)^{\mathbf{c}} = \left((A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}})^\circ\right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(3)}}{=}$$

$$\overset{\mathbf{(3)}}{=} \left((A^{\mathbf{c}})^\circ \cap (B^{\mathbf{c}})^\circ\right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(1)}}{=} \left((\overline{A})^{\mathbf{c}} \cap (\overline{B})^{\mathbf{c}}\right)^{\mathbf{c}} = \left((\overline{A} \cup \overline{B})^{\mathbf{c}}\right)^{\mathbf{c}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Jak je vidět, při základní "manipulaci" s uzávěry, vnitřky atd.. si do velké míry vystačíme s "algebraickým" popisem těchto pojmů (viz vlastnosti (E.3) - (E.8)) a nemusíme jít až do základní definice, která využívá pojem okolí.

Příklad 1.2. *Najděte příklady, kdy uvedená tvrzení neplatí "pro zbylé možnosti," předchozího z příkladu, tj.*

(i) A_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou *otevřené, ale* $\bigcap_n A_n$ *už* není *otevřená,*

(ii) $(A \cup B)^\circ \supsetneq A^\circ \cup B^\circ$,

(iii) A_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou *uzavřené, ale* $\bigcup_n A_n$ *už* není *uzavřená,*

(iv) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Řešení:
(i) $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcap_n A_n = \{0\}$.
(iii) $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}\rangle \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_n A_n = (-\infty, 0)$.
(ii), (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x\}$. Pak je

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2 \supsetneq \mathbb{R}^2 \setminus \text{osa } y = A^\circ \cup B^\circ$$

a

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \text{osa } y = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Příklad 1.3. *Ukažte, že uzávěr každé množiny M je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.*

Řešení:
Plyne ihned z definic:
$a \in \overline{M} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$
a je hromadný bod $M \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$

Příklad 1.4. *Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že*

(i) nemá žádný vnitřní bod,

(ii) nemá žádný hraniční bod,

(iii) nemá žádný vnější bod,

(iv) nemá žádný hromadný bod,

(v) nemá žádný izolovaný bod.

Řešení:
(i) jakákoliv spočetná množina (např. $\mathbb{Q}^2$), kružnice, přímka (a mnoho dalších příkladů).
(ii) Z požadavku $\partial M = \emptyset$ plyne, že $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^\circ = M^\circ$, tedy $M^\circ = M = \overline{M}$ a množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Jediná taková neprázdná množina je pouze $M = \mathbb{R}^2$. (Pro podrobnosti viz příklad o souvislých množinách.)
(iii) Vnějšek množiny je roven $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$, tedy potřebujeme, aby $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ (množina je tzv. *hustá*). Můžeme opět volit např. $M = \mathbb{Q}^2$.
(iv) jakákoliv konečná množina; $\mathbb{N}^2$ (a mnoho dalších příkladů).
(v) jakákoliv otevřená množina (a mnoho dalších příkladů).

Příklad 1.5. *Stanovte hromadné body množiny $M = \{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.*

Řešení:
Ukážeme, že množina hromadných bodů je

$$N = \{(1/n, 0), (0, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\} \ .$$

Zřejmě každý prvek N je hromadný bod M.

Naopak, nechť $a \in \mathbb{R}^2$ je hromadný bod M, speciálně $a \in \overline{M}$. Protože jednotlivé projekce

$$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(x, y) := x, \quad \pi_2(x, y) := y$$

jsou spojité funkce, tak pro posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ je také $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_i(a_n) = \pi_i(a)$. Tedy

$$\pi_i(a) \subseteq \overline{\pi_i(M)} = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

pro $i = 1, 2$. Máme tak, že

$$a \in \Big(\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\Big)^2 = M \cup N.$$

Všechny body původní množiny M jsou ale izolované, tedy musí být $a \in N$.

Příklad 1.6. *Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:*

(i) $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\}$*;*

(ii) $M = \mathbb{Q}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$*, kde* $\mathbb{Q}$ *je množina všech racionálních čísel.*

Řešení:

(i) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost upravit na $(a + 1)^2 + b^2 \leq 4$ neboli $||(a, b) - (-1, 0)||^2 \leq 4$. Podobně druhá nerovnost znamená $||(a, b) - (2, 0)||^2 \leq 4$. Množinu M proto můžeme vyjádřit jako

$$M = A \cap B \quad \text{, kde} \quad A = \overline{U}_2(-1, 0) \quad \text{a} \quad B = \overline{U}_2(2, 0),$$

tedy jako průnik dvou uzavřených koulí (viz dále). Pro $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^2$ používáme značení

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - x_0|| \leq \varepsilon\}$$

Uzávěr M: Nyní víme, že obě množiny A i B jsou uzávěry nějakých množin, tedy jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli $\overline{M} = M$).

Vnitřek M: Použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Protože $A^\circ = \Big(\overline{U}_2(-1, 0)\Big)^\circ = U_2(-1, 0)$ (což není těžké ukázat). Podobně to platí pro B a dostáváme tak

$$M^\circ = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}.$$

Hranice M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ =$$
$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2 + 2a + b^2 = 3 \ \& \ a^2 - 4a + b^2 \leq 0) \vee (a^2 + 2a + b^2 \leq 3 \ \& \ a^2 - 4a + b^2 = 0)\}.$$

Důležitá poznámka: Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak množina

$$f^{-1}(-\infty, 0) = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) < 0\}$$

je otevřená množina (tj. vzor otevřeného intervalu $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina). Podobně

$$f^{-1}(-\infty, 0\rangle = \{a \in D \mid f(a) \leq 0\}$$

je uzavřená množina (tj. vzor uzavřeného intervalu $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina).

Protože funkce $f(a,b) = a^2 + 2a + b^2 - 3$ a $g(a,b) = a^2 - 4a + b^2$ jsou spojité na celém $\mathbb{R}^2$, je množina

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\}$$

uzavřená (neboli $\overline{M} = M$) a množina

$$N = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}$$

je otevřená (neboli $N^\circ = N$).

POZOR! Tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat přímo vnitřek M°, ale jen nějakou jeho podmnožinu $N \subseteq M^\circ$. Rovnost nemusí obecně nastat např. pro $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 \leq 0\}$ je

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 < 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = A^\circ.$$

Pro rovnost je potřeba použít větu o implicitní funkci. Z té pak plyne toto tvrzení:

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce na U. Položme

$$A = \{x \in U \mid f(x) \leq 0\}.$$

Pokud pro každé $x_0 \in A$ takové, že $f(x_0) = 0$, je $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x_0) \neq 0$, pak

$$A^\circ = \{x \in U \mid f(x) < 0\}.$$

V našem případě opravdu pro $f(a,b) = a^2 + 2a + b^2 - 3$ máme $f'(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}\right) = \left(2a + 2, 2b\right)$. Pokud by náhodou nastalo, že $f'(a,b) = 0$, pak je $a = -1$ a $b = 0$ a tudíž $f(-1,0) = -4 \neq 0$. Podmínku z předchozí věty tak máme splněnou a proto opravdu $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3\}$ je vnitřek množiny $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3\}$.

(ii) Uvědomíme si, že v libovolném okolí libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, 3$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $||(r_1, r_2, r_3) - (s_1, s_2, s_3)|| \leq \sqrt{3} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $x \in \mathbb{R}^3$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^3$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^3} = \mathbb{R}^3, \quad (\mathbb{Q}^3)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial\mathbb{Q}^3 = \overline{\mathbb{Q}^3} \setminus (\mathbb{Q}^3)^\circ = \mathbb{R}^3.$$

Příklad 1.7. *Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$?*

Řešení:
Jediné takové dvě množiny jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.

Abychom si to ověřili, použijeme následující pojem souvislé množiny, který intuitivně odpovídá tomu, že množinu nemůžeme "rozkouskovat" na oddělené bloky a tedy to, co se děje v jedné její části, ovlivňuje i celý zbytek této množiny (tento pojem se uplatní hlavně při spojitém rozšiřování funkci, existenci potenciálu atd.)

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *souvislá* právě když nejde rozdělit pomocí dvou otevřených disjunktních neprázdných množin, tj.

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je } \textit{souvislá} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg\Big[(\exists\, U_1, U_2 \text{ otevřené a neprázdné}) \quad A \subseteq U_1 \cup U_2 \quad \& \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset\Big]$$

Pokud by nyní existovala nějaká obojetná množina $U \neq \emptyset$ v $\mathbb{R}^n$, taková, že také $U \neq R^n$, znamenalo by to, že $\mathbb{R}^n$ se dá rozdělit pomocí dvou disjunktních neprázdných otevřených množin U a $U^{\mathbf{c}}$. Tedy $\mathbb{R}^n$ by pak nebyla souvislá množina.

Dokázat, že $\mathbb{R}^n$ je skutečně souvislá, dá trochu práci, ale zkusíme se podívat, jak by se to pro $n \geq 2$ dalo udělat, pokud bychom už věděli, že $\mathbb{R}$ je souvislá množina.

Budeme postupovat sporem.

- Předpokládejme, že $\mathbb{R}^n$ není souvislá pro $n \geq 2$. Dá se tedy zapsat jako $\mathbb{R}^n = U \cup V$, kde U a V jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny.

- Zvolme si bod $a \in U$ a $b \in V$ a nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je obvyklá parametrizace přímky, která spojuje body a a b (tj. $\varphi(t) = a + t(b-a)$ pro $t \in \mathbb{R}$).
- Zobrazení φ je tedy spojité a proto vzor $\varphi^{-1}(U)$ otevřené množiny U je opět otevřená množina (a neprázdná, protože $0 \in \varphi^{-1}(U)$).

  Podobně i $\varphi^{-1}(V)$ je otevřená a neprázdná množina (protože $1 \in \varphi^{-1}(V)$), která je navíc disjunktní s $\varphi^{-1}(U)$.
- A navíc určitě platí, že $\mathbb{R} = \varphi^{-1}(U) \cup \varphi^{-1}(V)$. To ale znamená, že $\mathbb{R}$ není souvislá, což je spor!

$\mathbb{R}^n$ tak musí být souvislá a proto nemá žádné další (neprázdné) obojetné množiny.

Příklad 1.8. *Rozhodněte, zda množina je souvislá:*

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x,y)|| < 5\}$,

(ii) $\mathbb{Q}^2$,

(iii) $\mathbb{R}^2 \setminus$ *"bod,"* $\mathbb{R}^2 \setminus$ *"přímka,"*

(iv) $\mathbb{R}^3 \setminus$ *"bod,"* $\mathbb{R}^3 \setminus$ *"přímka,"* $\mathbb{R}^3 \setminus$ *"rovina."*

Řešení:
(i) Dokazovat souvislost jako takovou je trochu obtížnější. Pomůžeme si proto o něco silnějším pojmem:

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obloukově souvislá*, pokud každé dva body $a, b \in M$ existuje spojitá křivka $\varphi : \langle 0, 1\rangle \to M$, že $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$.

Veta: Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

Pozor! Existují ale množiny, která jsou sice souvislé, ale nejsou obloukově souvislé, např.

$$A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0, \infty) \right\} \;\cup\; \{0\} \times \langle -1, 1\rangle$$

kde body na ose y nejdou propojit s grafem funkce $\sin\frac{1}{x}$.
Pro otevřené množiny ale oba pojmy splývají:

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Pak je obloukově souvislá právě když je souvislá. (Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.)

Množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x,y)|| < 5\}$ je souvislá, protože se jedná o mezikruží, které je obloukově souvislé (body lze spojit např. soustřednými kružnicemi a ty pak propojit úsečkou směřující do počátku).

(ii) Množina není souvislá, protože ji lze rozložit pomocí dvou neprázdných disjunktních otevřených množin A a B, např. $A = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x < \sqrt{2}\}$ a $B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x > \sqrt{2}\}$.

(iii), (iv) souvislé jsou tyto množiny: $\mathbb{R}^2 \setminus$ "bod," $\mathbb{R}^3 \setminus$ "bod," $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" (protože jsou zjevně obloukově souvislé),
a nesouvislé tyto: $\mathbb{R}^2 \setminus$ "přímka," $\mathbb{R}^3 \setminus$ "rovina" (protože se zjevně dají napsat pomocí dvou otevřených poloprostorů).

2 Limity funkcí více proměnných

Příklad 2.1. *Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:*

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod $(0,0)$ je hromadným bodem množiny D_f (tedy má smysl ptát se na limitu f v tomto bodě). Limitu určíme podle věty o limitě složené funkce $f(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = x+y$ a $h(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.

Pro korektní použití věty o limitě složené funkce ale ještě potřebujeme zajistit, aby

- buď v okolí bodu $(0,0)$ bylo $g(x,y) \neq 0$
- nebo aby funkce h byla spojitá v $z=0$.

První případ si můžeme zajistit tak, že omezíme definiční obor funkce g, tj. vezmeme $D_g := D_f$ a druhý tak, že funkci h spojitě dodefinujeme v $z=0$. Nyní tedy máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0 \quad \text{(protože } g \text{ je součet spojitých funkcí)},$$

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

takže

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 1.$$

(ii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}.$$

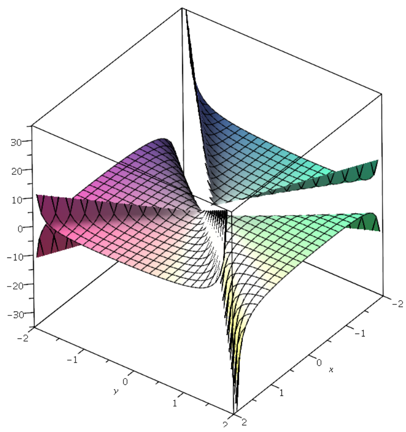
Zúžením f na osu x (tj. $y=0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Na druhou stranu zúžením f na osu y (tj. $x=0$) dostáváme

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.



(iii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+2y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{y\to 0} \frac{2x^2}{x^2+2x^2} = \frac{2}{3}.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iv) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$. Použijeme odhad

$$0 \leq \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \leq (x^4+2x^2y^2+y^4)\cdot\left|\ln(x^2+y^2)\right| = (x^2+y^2)^2\cdot\left|\ln(x^2+y^2)\right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro

$$g(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{a} \quad h(z) = z^2\ln z$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \ \text{ a } \ \lim_{z\to 0_+} h(z) = 0 \ \text{ (např. L'Hospitalovo pravidlo)}$$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o sevření pak máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

Příklad 2.2. *Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:*

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y-1}{xy-1}$.

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$$

a bod $(0,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Pro limitu použijeme obvyklý trik, jak se zbavit odmocniny (tj. vzorec $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2}{\Big(x^2+(y-1)^2\Big)\cdot\Big(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\Big)} = \frac{1}{2}\ .$$

(ii) Pro funkci $f(x,y,z) = \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz\neq 1\}$$

a bod $(1,1,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímku $x=y=z$ (bez bodu $(x,y,z)=(1,1,1)$) dostáváme $f(x,x,x)=\frac{x^3-x^3}{x^3-1}=0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=z}} f(x,y,z) = \lim_{x\to 1} f(x,x,x) = 0\ .$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x=y=1$ (opět bez bodu $(x,y,z)=(1,1,1)$) dostáváme $f(1,1,z)=\frac{z^2-z}{z-1}=z$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=1}} f(x,y,z) = \lim_{z\to 1} f(1,1,z) = \lim_{z\to 1} z = 1\ .$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iii) Pro funkci $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

a má hromadný bod $(0,0)$. Polynom v čitateli má vyšší stupeň než ve jmenovateli, takže spíš zkusíme ukázat, že limita existuje a bude nulová (což si můžeme otestovat zúžením f např. na souřadné osy).

Použijeme opět odhady a pak větu o limitě sevřené funkce. Zřejmě platí

$$|x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|,$$

což je důležitá nerovnost, která se hodí na dokazování limit. Podobně $|y|\le\|(x,y)\|$, takže máme

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\|(x,y)\|^2\cdot\|(x,y)\|^2}{x^2+y^2} = \|(x,y)\|^2.$$

Z definice limity snadno dostáváme, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^2 = 0$ (podobná tvrzení už můžeme brát skoro jako "fakt") a tedy z věty o limitě sevřené funkce je rovněž

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0\ .$$

(iv) Na rozdíl od předchozího případu zde bude situace podstatně jiná a to kvůli nulovým hodnotám jmenovatele. Pro funkci $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -\sqrt[3]{x^2}\}$$

a zřejmě má hromadný bod $(0,0)$.

Zúžením f na přímku $x=0$ (bez bodu $(x,y)=(0,0)$) dostáváme $f(0,y)=0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0\ .$$

Pokud by tedy limita existovala, musí být rovna 0. Polynom v čitateli je nulový na osách $x=0$ a $y=0$, zatímco polynom ve jmenovateli je nulový na křivce $y=-\sqrt[3]{x^2}$. V bodech $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ takových, že $y_0=-\sqrt[3]{x_0^2}$ a $x_0\neq 0$ tedy máme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 0\neq y_0=-\sqrt[3]{x_0^2}}} \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}\right| = \frac{x_0^2y_0^2}{+\infty} = +\infty$$

(pokud na chvíli připustíme, že $+\infty$ může také být limitou, kterou jinak smí podle naší definice být pouze prvek z $\mathbb{R}$.)

Pokud by funkce f měla v $(0,0)$ limitu 0, musela by speciálně být na nějakém okolí $(0,0)$ omezená, tj. existují $K > 0$ a $\varepsilon > 0$, že $\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}\right| \leq K$ pro všechna $(x,y) \in U_\varepsilon(0,0) \cap D_f$.

V okolí $U_\varepsilon(0,0)$ se ale také nacházejí body $(x_0, -\sqrt[3]{x_0^2})$, ve kterých je v limitě funkce f naopak neomezená.

To je spor a původní limita tedy NEEXISTUJE.

(v) Výraz v limitě má definiční obor

$$D : xy \neq 1 \ ,$$

což jsou dvě větve hyperboly. Zkusíme přiblížení ve směru souřadných os. Přiblížením po přímce $x = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x=1}} \frac{x^2y-1}{xy-1} = \lim_{y\to1} \frac{y-1}{y-1} = 1 \ .$$

Na druhou stranu přiblížením po přímce $y = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y=1}} \frac{x^2y-1}{xy-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} x+1 = 2 \ .$$

Původní limita tedy neexistuje.

3 Derivace ve směru, gradient, totální diferenciál

Příklad 3.1. *Najděte gradient funkce* $f(x,y) = e^x \sin y$ *v bodě* $a_0 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ *a rychlost růstu* f *v bodě* a_0 *ve směru vektoru* $\vec{v} = (-1, 2)$.

Řešení:
Gradient $\mathrm{grad} f(a_0)$ je maticí (ve standardních souřadnicích) derivace $f'(a_0)$ funkce f v bodě a_0. Postačující podmínkou pro existenci derivace funkce f v bodě a_0 je existence spojitých parciálních derivací na nějakém okolí bodu a_0 (což je v našem případě splněno).

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|a_0} = (e^x \sin y, e^x \cos y)_{|a_0} = \left(e\frac{\sqrt{2}}{2}, e\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Rychlost růstu $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0)$ funkce f v bodě a_0 ve směru vektoru $\vec{v}$ je dána

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{v} = \left(e\frac{\sqrt{2}}{2}, e\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1, 2) = e\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 3.2. *Najděte jednotkový směr největšího růstu funkce* $f(x,y,z) = xe^y + z^2$ *v bodě* $a_0 = (1, \ln 2, \frac{1}{2})$.

Řešení:

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{|a_0} = (e^y, xe^y, 2z)_{|a_0} = (2, 2, 1)$$

Jednotkový směr největšího růstu funkce f v bodě a_0 je

$$\frac{1}{||\mathrm{grad} f(a_0)||} \cdot \mathrm{grad} f(a_0) = \frac{1}{||(2,2,1)||} \cdot (2,2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Příklad 3.3. *Určete derivaci funkce* *(i) $f(x,y,z) = z^3 - x^2y$ v bodě $a = (1,6,2)$ podle vektoru $\vec{v} = (3,4,12)$,*

(ii) $f(x,y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a = (0,0)$ podle vektoru $\vec{v} = (-1,2)$.

Řešení:
Derivace funkce f v bodě a podle vektoru $\vec{v}$ je definovaná jako

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\cdot\vec{v}) - f(a)}{t} \ .$$

Pokud ovšem existuje derivace f'_a funkce f v bodě a (tj. totální diferenciál), pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = f'(a)[\vec{v}] = \mathrm{grad} f(a)\cdot\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot v_n$$

kde $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(i) Pro $f(x,y,z) = z^3 - x^2y$ a $a = (1,6,2)$ máme

$$\mathrm{grad} f(a) = (-2xy, -x^2, 3z^2)_{|a} = (-12,-1,12)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (-12,-1,12)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 104 \ .$$

Pokud bychom brali derivaci podle SMĚRU $\vec{v}$, pak je potřeba vektor ještě znormovat, tj. použijeme vektor $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ a pak je $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} = \frac{104}{13} = 8$.

(ii) Pro $f(x,y) = e^x\cos y + 2y$ a $a = (0,0)$ máme

$$\mathrm{grad} f(a) = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)_{|a} = (1,2)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (1,2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \ .$$

Příklad 3.4. *Velmi unavený horolezec leze po ploše, která je grafem funkce $f(x,y) = e^{xy} + \ln x$. Právě se nachází v bodě $A = (1,1,?) \in \mathbb{R}^3$. Kterým ze dvou směrů*

$$\mathbf{U} = (1,2,?) \quad a \quad \mathbf{V} = (2,1,?)$$

(v tečné rovině grafu funkce f v bodě A) se má vydat, aby šel cestou menšího stoupání?

Řešení:
Pro $a = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ je $f(a) = e$, tedy $A = (1,1,e)$. Spočítáme gradient (derivaci) funkce f:

$$\mathrm{grad}\ f(1,1) = f'(1,1) = (ye^{xy} + \frac{1}{x}, xe^{xy})_{|(1,1)} = (e+1, e)$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a je

$$z = f(1,1) + f'(1,1)\left[\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right] = e + (e+1,e)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (e+1)x + ey - (e+1)$$

Vektory U a V leží v této tečné rovině (přesněji v jejím zaměření) právě když jsou kolmé na její normálový vektor $\mathbf{N} = (e+1, e, -1)$ (tj. když $\mathbf{U}\cdot\mathbf{N} = 0 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}$.) Máme tak, že $\mathbf{U} = (1,2,3e+1)$ a $\mathbf{V} = (2,1,3e+2)$. Strmost stoupání je dána úhlem, který tyto vektory svírají s rovinou $z = 0$, tedy $\arctan\left(\frac{3e+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro $\mathbf{U}$ a $\arctan\left(\frac{3e+2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro $\mathbf{V}$. Menší stoupání je tak ve směru vektoru $\mathbf{U}$.

Poznámky:
(1) Mohli jsme využít implicitního zadání grafu $\Phi(x,y,z) = 0$ pro $\Phi(x,y,z) := f(x,y) - z$. Pak bychom rovnou dostali normálový vektor jako gradient Φ, tj. $\mathbf{N} = \mathrm{grad}\ \Phi(A)$.

(2) Pokud položíme $\mathbf{u} = (1,2)$ a $\mathbf{v} = (2,1)$, pak máme $\mathbf{U} = \Big(\mathbf{u}, f'(a)[\mathbf{u}]\Big)$ a $\mathbf{V} = \Big(\mathbf{v}, f'(a)[\mathbf{v}]\Big)$. Pokud navíc platí $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ (jako v našem případě), pak pro strmost stoupání ve směru vektorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ stačí porovnat pouze jejich poslední složky, tj. hodnoty $f'(a)[\mathbf{u}]$ a $f'(a)[\mathbf{v}]$.

Příklad 3.5. *Předpokládejme, že výška terénu v $\mathbb{R}^3$ je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}$. V bodě A daném $x = 2$ a $y = 1$ upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v $\mathbb{R}^2$), kterým se bude kutálet.*

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě B daném $x = 0$ a $y = 1$ (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou $z = 0$).

Řešení:
Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\mathrm{grad}(f)_{|A} = \left(-\frac{2x}{(x^2+2y^2+1)^2}, -\frac{4y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)_{|A} = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}\right)$$

tedy ve směru určeném např. vektorem $\vec{v} = (1,1)$ (směr je určen vektorem až na kladný násobek).

Normálový vektor tečné roviny grafu funkce ve zvoleném bodě je $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Jde tedy o normálové vektory

$$\vec{n}_A = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}, -1\right)$$

a

$$\vec{n}_B = \left(0, -\frac{4}{3^2}, -1\right)$$

s normami $\|\vec{n}_A\| = \sqrt{\frac{2^5}{7^4}+1}$ a $\|\vec{n}_B\| = \sqrt{\frac{2^4}{3^4}+1}$. Normálový vektor roviny $z = 0$ je $\vec{e} = (0,0,1)$. Úhly jednotlivých rovin jsou dány jako

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_A \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_A|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4}+1}}$$

a

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_B \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_B|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4}+1}}$$

Porovnáním dostaneme

$$\cos(\alpha) \overset{?}{>} \cos(\beta) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4}+1}} \overset{?}{>} \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4}+1}} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{2^4}{3^4}+1} \overset{?}{>} \sqrt{\frac{2^5}{7^4}+1} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2^4}{3^4} \overset{?}{>} \frac{2^5}{7^4} \;\Leftrightarrow\; 7 \cdot 7^3 \overset{?}{>} (2 \cdot 3) \cdot 3^3 \,.$$

Poslední vztah platí, proto $\cos(\alpha) > \cos(\beta)$ a tedy $\alpha < \beta$ a v bodě B je rovina strmější.

Příklad 3.6. *Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce*

(i) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ *v bodě* $(1,1,?)$,

(ii) $f(x,y) = xy + \sin(x+y)$ *v bodě* $(1,-1,?)$.

Řešení:
(i) Graf funkce f je $\{(a,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(a)\}$. Tečná rovina $T_{(a_0,f_{a_0})}$ ke grafu f v bodě $(a_0, f_{a_0}) = (1,1,3)$ je dána rovnicí

$$z = f(a_0) + \mathrm{grad} f_{|a_0} \cdot (a - a_0).$$

Máme $\mathrm{grad} f_{|a_0} = (4x, 2y)_{|a_0} = (4,2)$, tedy tečná rovina má rovnici

$$z = 3 + (4,2)\cdot(x-1, y-1) = 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$$

neboli

$$4x + 2y - z = 3.$$

(ii) Graf funkce f je množina $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\ \&\ (x,y) \in D_f\}$. Tečná rovina $T_{(x_0,y_0,z_0)}$, ke grafu f v bodě $(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,-1)$, kde $z_0 = f(x_0,y_0) = -1$ je dána rovnicí

$$z = f(x_0,y_0) + \mathrm{grad} f_{|(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$\mathrm{grad} f_{|(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|(x_0,y_0)} = \Big(y + \cos(x+y), x + \cos(x+y)\Big)_{|(1,-1)} = (0,2),$$

tedy tečná rovina má rovnici

$$z = -1 + (0,2)\cdot\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = -1 + 2(y+1)$$

neboli

$$2y - z = -1.$$

Příklad 3.7. *Nalezněte úhel, který v bodě* $(1,0,0)$ *svírají grafy funkcí*

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \quad a \quad g(x,y) = \sin(xy).$$

Řešení:
Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\ \&\ (x,y) \neq (0,0)\}$, kde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$, kde

$$G(x,y,z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\ F_{|(1,0,0)} = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\Big)_{|(1,0,0)} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\ G_{|(1,0,0)} = \Big(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\Big)_{|(1,0,0)} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je nyní dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Příklad 3.8. *Určete gradienty funkcí* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *a* $g(x,y) = e^{\sin(xy)}$ *v bodě* $(-1,0)$. *Určete úhel, který v bodě* $(-1,0,1)$ *svírají grafy těchto funkcí.*

Řešení:
Gradienty jsou

$$\operatorname{grad} f_{|(-1,0)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \right)_{|(-1,0)} = (-1,0)$$

$$\operatorname{grad} g_{|(-1,0)} = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)}, x\cos(xy)e^{\sin(xy)} \Big)_{|(-1,0)} = (0,-1)$$

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty funkcí

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$$

a

$$G(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \operatorname{grad} F_{|(1,0,0)} = (-1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \operatorname{grad} G_{|(1,0,0)} = (0,-1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je nyní dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Příklad 3.9. *Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$*, která*

(i) je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 3$*,*

(ii) vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:
Když je nějaká množina M zadaná jako vrstevnice nějaké spojitě diferencovatelné funkce (tj. rovností $f(x,y,z) = 0$), pak tečná rovina k M je kolmá ke gradientu funkce f (pokud je tento gradient nenulový), tj. gradient je její normálový vektor.

V našem případě si vezmeme $f(x,y,z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$. Takže normálový vektor tečné roviny je

$$f'_{|a_0} = \operatorname{grad}(f)_{|a_0} = \left(\frac{2x}{25}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{9} \right)$$

(i) Tečná rovina má být rovnoběžná s rovinou $\rho : 4x + 2y + z = 3$, která má normálový vektor $\vec{n}_\rho = (4,2,1)$. To nastane právě když

$$\left(\frac{2x}{25}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{9} \right) = \operatorname{grad}(f)_{|a_0} = \lambda \cdot \vec{n}_\rho = \lambda \cdot (4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy $x = 50\lambda$, $y = 16\lambda$ a $z = \frac{9}{2}\lambda$.
Současně má také platit, že

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \ .$$

Po dosazení pak dostaneme $100\lambda^2 + 16\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{473}$.
Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\vec{n}_\rho$, tedy rovnici $4x+2y+z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $(x_0, y_0, z_0) = \pm\frac{1}{\sqrt{473}} \cdot (100, 32, 9)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{473}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{473}.$$

(ii) Postupujeme podobně. Rovina, vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x}{25}, \frac{2y}{16}, \frac{2z}{9}\right) = \operatorname{grad}(f)_{|u_0} = \lambda \cdot \vec{n} = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}.$$

Příklad 3.10. *Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : 4x + 2y + z = 0$.*

Řešení:
Použijeme následující větu (důsledek věty o implicitní funkci):

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Nechť bod $u_0 \in G$ je takový, že $f(u_0) = 0$ a $f'(u_0) \neq 0$. Pak tečná rovina k nadploše (tzv. *varietě*)

$$M = \{u \in G \mid f(u) = 0 \ \ \& \ \ f'(u_0) \neq 0\}$$

v bodě u_0 má rovnici

$$f'(u_0)(u - u_0) = 0.$$

V našem případě je $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Protože pro $u_0 = (x, y, z)$ je derivace $f'(u_0) = \operatorname{grad}(f)_{|u_0} = (2x, 4y, 2z)$ nulová pouze pro $u_0 = (0, 0, 0)$ (a $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$) můžeme použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $u_0 \in M$ je právě $\operatorname{grad}(f)_{|u_0}$. Tato rovina bude rovnoběžná s ρ, která má normálový vektor $\vec{n}_\rho = (4, 2, 1)$, právě když $(2x, 4y, 2z) = \operatorname{grad}(f)_{|u_0} = \lambda \cdot \vec{n}_\rho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\vec{n}_\rho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $u_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

Příklad 3.11. *Najděte úhel sevřený dvěma plochami*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad a \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$$

v bodě $a_0 = (2, 0, 2)$.

Řešení:
Úhel sevřený dvěma rovinami je roven úhlu, který svírají přímky určené normálovými vektory těchto rovin. Podle předchozího je tedy

$$\vec{n}_1 = (2x, 2y, 2z)_{|a_0} = (4, 0, 4)$$

a

$$\vec{n}_2 = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|a_0} = (2, -4, -2).$$

Pro hledaný úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pak je

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$$

takže $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 3.12. *Vyšetřete existenci derivace (totálního diferenciálu) v bodě* $(0,0)$ *u funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Řešení:
Podle definice je derivace f v bodě $a_0 = (0,0)$ takové lineární zobrazení $f'_{|a_0} = L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = 0 \ .$$

Pokud derivace existuje, pak je jednoznačně určena parciálními derivacemi v daném bodě:

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{|(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{|(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Pro $a = (x,y)$ tak je

$$L(a - a_0) = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = x \ .$$

Takže

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pokud si teď vezmeme zúžení výsledného výrazu např. pro $x = y$ dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=y}} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{\sqrt{8} \cdot |x|} \ .$$

Tato limita ale neexistuje a tím spíš původní limita neexistuje (a už vůbec není nulová, jak bychom potřebovali). Derivace (totální diferenciál) v bodě $(0,0)$ tedy neexistuje.

Příklad 3.13. *Najděte derivaci složené funkce* $f \circ g$*, kde*

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix}$ *a* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ e^{st} \\ t^2 \end{pmatrix}$ *a* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Řešení:
(i) Můžeme buď vyjádřit funkci $h(s,t) = (f \circ g)(s,t) = (st)^2 + (s\sin t)^2 + (s\cos t)^2 = s^2t^2 + s^2$ a tu zderivovat

$$h'(s,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = (2st^2 + 2s, 2s^2t)$$

nebo použít větu o derivaci složené funkce:

$$h'(s,t) = (f\circ g)'(s,t) = f'(g(s,t))\circ g'(s,t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & 2z \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2st, & 2s\cos t, & 2s\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix} = (2st^2+2s, 2s^2t)$$

kde $g_i(s,t)$ jsou jednotlivé složky zobrazení g. Přitom je třeba při derivování f mít stejné (zvolené) pořadí proměnných jako je pak pořadí jednotlivých složek g_i v matici derivace zobrazení g (tedy např. pokud bychom derivovali v pořadí podle y, z, x pak pořadí složek v matici derivace g bude odshora postupně g_2, g_3 a g_1.) Změna pořadí jen odpovídá tomu, že si matici derivace zvolíme v jiné bázi.

(ii) Postupujeme podobně: $h(s,t) = (f\circ g)(s,t) = ste^{st} + t^2e^{st} + st^3$

$$h'(s,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \Big((t+st^2+t^3)e^{st}+t^3, (s+s^2t+2t+st^2)e^{st}+3st^2\Big)$$

nebo

$$h'(s,t) = f'(g(s,t))\circ g'(s,t) = \begin{pmatrix} y+z, & z+x, & x+y \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{st}+t^2, & st+t^2, & e^{st}+st \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \Big((t+st^2+t^3)e^{st}+t^3, (s+s^2t+2t+st^2)e^{st}+3st^2\Big).$$

Příklad 3.14. *Najděte derivaci složeného zobrazení $f\circ g$, kde*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad g(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Označme si jednotlivé složky zobrazení f jako $f_1(x,y) = xy$ a $f_2(x,y) = x^2+y^2$. Pro matici derivace zobrazení f pak máme

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

tedy v jednotlivých řádcích jsou zapsány gradienty jednotlivých složek.

Podobně pro $g_1(\alpha,\beta) = \cos\alpha$ a $g_2(\alpha,\beta) = -\sin(\alpha\beta)$ bude

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

Takže derivace $f\circ g$ bude

$$(f\circ g)' = f'_{|g}\circ g' = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}_{\Big| \substack{x=\ \ \cos\alpha \\ y=-\sin(\alpha\beta)}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha\beta) & \cos\alpha \\ 2\cos\alpha & -2\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -2\cos\alpha\sin\alpha + 2\beta\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) & 2\alpha\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -\sin(2\alpha) + \beta\sin(2\alpha\beta) & \alpha\sin(2\alpha\beta) \end{pmatrix} .$$

Složky se dají také vypočítat řetízkovým pravidlem bez sestavování matic. Složky zobrazení $f \circ g$ budou $(f \circ g)_i = f_i\big(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)\big)$, kde proměnné x a y jsou závislé na α a β jako $x(\alpha,\beta) = g_1(\alpha,\beta)$ a $y(\alpha,\beta) = g_2(\alpha,\beta)$. Matice derivace složeného zobrazení bude mít tvar

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial (f\circ g)_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f\circ g)_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

a podle řetízkového pravidla budeme mít např.

$$\frac{\partial (f\circ g)_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2\big(\cos\alpha, -\sin(\alpha\beta)\big)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \cos\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial(-\sin(\alpha\beta))}{\partial \alpha} =$$

$$= 2x \cdot (-\sin\alpha) + 2y \cdot (-\beta\cos(\alpha\beta)) = -2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2\beta\sin(\alpha\beta) \cdot \cos(\alpha\beta) .$$

Příklad 3.15. *Najděte derivaci funkce $z = f(x,y)$, která splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = 2$ pro všechna (x,y) z vhodného definičního oboru funkce. Postupujte nejdříve obecně a pak v bodě $(x,y,z) = (1,1,2)$.*

Řešení:
Funkci z sice neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$0 = \frac{\partial\, 2}{\partial x} = \frac{\partial(z^3 - 3xyz)}{\partial x} = 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial\, 2}{\partial y} = \frac{\partial(z^3 - 3xyz)}{\partial y} = 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

To samozřejmě děláme za předpokladu, že $3z^2 - 3xy \neq 0$. Tento výraz je právě parciální derivaci podle $\tilde{z}$ funkce $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{z}^3 - 3\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} - 2$ tří NEZÁVISLÝCH proměnných, která určuje původní rovnici jako $\Phi\big(x,y,z(x,y)\big) = 0$ (tzv. implicitně určená funkce). Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} = 3\tilde{z}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y} .$$

V bodě $z(1,1) = 2$, který splňuje implicitní rovnici a ve kterém je výraz $3z^2 - 3xy \neq 0$, pak dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{|(1,1)} = \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{|(1,1)} = \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 1} = \frac{2}{3} .$$

Příklad 3.16. *Najděte derivaci zobrazení $\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x+y,z) \\ f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}$, kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě* *diferencovatelná funkce.*

Řešení:
Složky zobrazení Φ označme Φ_1 a Φ_2. Potřebujeme sestavit matici

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

K výpočtu jednotlivých složek použijeme řetízkové pravidlo. K tomu si potřebujeme nějak označit proměnné funkce f, např. jako $f(u, v)$. Pak můžeme psát

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot \frac{\partial (x+y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$

a podobně

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)$$

a pro druhou složku budeme mít

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

Celkem tedy máme

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}.$$

4 Taylorův polynom, lokální extrémy

Příklad 4.1. *Ortogonální transformací převeďte homogenní kvadratický polynom (tedy kvadratickou formu) $g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ na diagonální tvar.*

Řešení:
(i) Matice $(g)_\mathcal{B}$ kvadratické formy g v dané bázi $\mathcal{B}$ je jednoznačně určena vztahem

$$g(u) = (u)_\mathcal{B}^T \cdot (g)_\mathcal{B} \cdot (u)_\mathcal{B}$$

pro všechna $u \in V$, kde $(u)_\mathcal{B}$ je souřadnicový zápis vektoru u v bázi $\mathcal{B}$.

Ve standardní bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ (tj. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) pro $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tedy máme $(u)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a

$$g(u) = (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Novou ortonormální bázi, ve které bude mít g diagonální tvar, najdeme jako vlastní (normované) vektory matice $\mathbb{A}$. Tedy potřebujeme spočítat kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9$. Tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$. Po dosazení pak pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro $\lambda_2 = 8$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a hledaná ortonormální báze je $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$. Matice přechodu $\mathbb{M} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$ je pak ortogonální, tedy $\mathbb{M}\mathbb{M}^T = \mathbb{E} = \mathbb{M}^T\mathbb{M}$ a $\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^T$. V nové bázi $\mathcal{B}$ má matice formy g diagonální tvar $(g)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. To můžeme ověřit např. i takto: pro přechod mezi souřadnicemi vektoru u v různých bázích máme vztah $(u)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$ a ten dosadíme do vyjádření formy

$$g(u) = (u)_{\mathcal{E}}^T (g)_{\mathcal{E}} (u)_{\mathcal{E}} = \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\Big)^T (g)_{\mathcal{E}} \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\Big) = (u)_{\mathcal{B}}^T \Big(\mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M}\Big) (u)_{\mathcal{B}}$$

tedy v bázi $\mathcal{B}$ má forma matici

$$(g)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by nás zajímalo nalezení jakékoliv báze (ne nutně ortogonální), ve které bude mít forma diagonální matici (tzv. *polární* báze) můžeme postupovat doplňováním na čtverec (tj. použijeme vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$):

$$g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{5}y + \left(\frac{3}{5}y\right)^2\right) - 5\left(\frac{3}{5}y\right)^2 + 5y^2 = 5\left(x - \frac{3}{5}y\right)^2 + \frac{16}{5}y^2$$

V nových souřadnicích $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odpovídajících nové bázi $\mathcal{B}'$ má tedy forma tvar

$$g(x', y') = 5(x')^2 + \frac{16}{5}(y')^2$$

a proto je pozitivně definitní. Příslušná matice přechodu ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pak ale není ortogonální - matice se odvodí ze vztahu

$${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} \cdot (u)_{\mathcal{E}} = (u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_{\mathcal{E}}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}^2$.

(iii) K pouhé definitnosti pak také stačí ověřit podmínky Sylvestrova kritéria, tj. znaménka hlavních subdeterminantů matice $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$:

$\Delta_1 = 5 > 0$
$\Delta_2 = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 16 > 0$
Tedy forma g je pozitivně definitní.

Příklad 4.2. *Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0:*

(i) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a_0 = (1,2,1)$,

(ii) $f(x,y,z) = xe^y \cos z$, $a_0 = (0,0,0)$.

Řešení:
(i) Taylorův polynom řádu (nejvýše) 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0+\vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)\vec{h} + \frac{1}{2!}f''(a_0)(\vec{h},\vec{h})$$

kde $\vec{h} = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$. Máme

$$f'(a_0) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)_{|a_0} = (4,4,12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\vec{h}) = 4 + (4,4,12)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2.$$

Polynom lze v tomto případě také získat přímo dosazením do původní funkce, kde si v rozvoji vezmeme pouze členy do stupně nejvýše 2:

$$f(1+h_1, 2+h_2, 1+h_3) = (1+h_1)(2+h_2)^2(1+h_3)^3 = (1+h_1)(4+4h_2+h_2^2)(1+3h_3+3h_3^2+h_3^3) =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2 + \text{vyšší členy}.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y\cos z, xe^y\cos z, -xe^y\sin z)_{|a_0} = (1,0,0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y\cos z & -e^y\sin z \\ e^y\cos z & xe^y\cos z & -xe^y\sin z \\ -e^y\sin z & -xe^y\sin z & -xe^y\cos \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\vec{h}) = h_1 + h_1h_2.$$

Polynom lze i v tomto případě také získat rozvojem jednotlivých funkcí jedné proměnné v daných bodech:

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \varphi(h_2)$$

$$\cos h_3 = 1 + \psi(h_3)$$

kde $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = 0$ a $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = 0$.

$$f(0+h_1, 0+h_2, 0+h_3) = h_1e^{h_2}\cos h_3 = h_1\Big(1+h_2+\varphi(h_2)\Big)\Big(1+\psi(h_3)\Big) =$$

$$= h_1 + h_1h_2 + \Omega(\vec{h})$$

kde $\Omega(\vec{h}) = h_1\varphi(h_2) + (h_1 + h_1h_2 + h_1\varphi(h_2))\psi(h_3)$.

Ukážeme, že platí $\lim\limits_{\vec{h}\to 0}\frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$ a tedy jsme skutečně tímto způsobem našli hledaný Taylorův polynom:

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \le \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|h_1h_2|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_3|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_2h_3|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1h_2h_3|}{||\vec{h}||^2} \le$$

$$\le \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\vec{h}|| + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\vec{h}|| \to 0$$

pro $\vec{h} \to 0$, protože $|h_i| \le ||\vec{h}||$ pro všechna $i = 1,2,3$. Uvedené odhady platí i když je náhodou $h_i = 0$ pro nějaké $i = 1,2,3$.

Příklad 4.3. *Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \cos(x - y)$$

v bodě $a = (0, 0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'_{|(0,0)} = \left(2xe^{x^2+y^2} + \sin(x - y), 2ye^{x^2+y^2} - \sin(x - y)\right)_{|(0,0)} = (0, 0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \cos(x - y) & 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x - y) \\ 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x - y) & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} + \cos(x - y) \end{pmatrix}_{|(0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0, 0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$) je matice $f''_{(0,0)}$ pozitivně definitní, takže v bodě $a = (0, 0)$ je lokální minimum.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovými polynomy funkcí jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \psi(t) \cdot |t|^2$$

kde $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$ a $\lim\limits_{t\to 0} \psi(t) = 0$.

$$f(h_1, h_2) = e^{h_1^2+h_2^2} - \cos(h_1 - h_2) = 1 + h_1^2 + h_2^2 + \varphi(h_1^2 + h_2^2) - \left(1 - \frac{(h_1 - h_2)^2}{2} + \psi(h_1 - h_2)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2 + \Omega(\vec{h}),$$

kde $\Omega(\vec{h}) = \varphi(h_1^2 + h_2^2) \cdot |h_1^2 + h_2^2| - \psi(h_1 - h_2) \cdot |h_1 - h_2|^2$.

Výraz $T(h_1, h_2) = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože $\lim\limits_{\vec{h}\to 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$:

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \leq \left|\varphi(||\vec{h}||^2)\right| + \left|\psi(h_1 - h_2)\right| \cdot \frac{|h_1 - h_2|^2}{||\vec{h}||^2} \leq \left|\varphi(||\vec{h}||^2)\right| + 4\left|\psi(h_1 - h_2)\right| \to 0$$

pro $\vec{h} \to 0$, protože $|h_1 - h_2|^2 \leq (|h_1| + |h_2|)^2 \leq (2||\vec{h}||)^2$.

Příklad 4.4. *Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f(x, y) = e^{2xy} - y^2$$

v bodě $a = (0, 0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'_{|(0,0)} = \left(2ye^{2xy}, 2xe^{2xy} - 2y\right)_{|(0,0)} = (0, 0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4y^2e^{2xy} & 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} \\ 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} & 4x^2e^{2xy} - 2 \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2.$$

Kvadratická forma

$$g(h_1,h_2) = 2h_1h_2 - h_2^2 = h_2(2h_1 - h_2)$$

druhé derivace je indefinitní (např. $g(1,1) = 1 > 0$ a $g(0,1) = -1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy sedlový bod funkce f.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovým polynomem funkce jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

kde $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$.

$$f(h_1,h_2) = e^{2h_1h_2} - h_2^2 = 1 + 2h_1h_2 + \varphi(2h_1h_2)\cdot|2h_1h_2| - h_2^2 =$$

$$= 1 + 2h_1h_2 - h_2^2 + \Omega(\vec{h}),$$

kde $\Omega(\vec{h}) = \varphi(2h_1h_2)\cdot|2h_1h_2|$.

Výraz $T(h_1,h_2) = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože $\lim\limits_{\vec{h}\to 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$:

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \le \left|\varphi(2h_1h_2)\right| \cdot \frac{|2h_1h_2|}{||\vec{h}||^2} \le 4\cdot\left|\varphi(2h_1h_2)\right| \to 0$$

pro $\vec{h} \to 0$, protože $|h_i| \le ||\vec{h}||$ pro $i = 1, 2$.

Příklad 4.5. *Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f(x,y) = e^{xy} - 2xy$$

v bodě $a = (0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:
Funkce je symetrická vzhledem k záměně proměnných, což usnadňuje výpočet.

$$f'_{|(0,0)} = \Big(ye^{xy} - 2y, xe^{xy} - 2x\Big)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} - 2 \\ e^{xy} + xye^{xy} - 2 & x^2e^{xy} \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 - h_1h_2.$$

Kvadratická forma

$$Q(\vec{h}) := f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = -2h_1h_2$$

druhé derivace je indefinitní (např. $Q(1,1) = -1 > 0$ a $Q(-1,1) = 1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy SEDLO.

Příklad 4.6. *Najděte lokální extrémy následujících funkcí:*

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

(ii) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$,

(iii) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

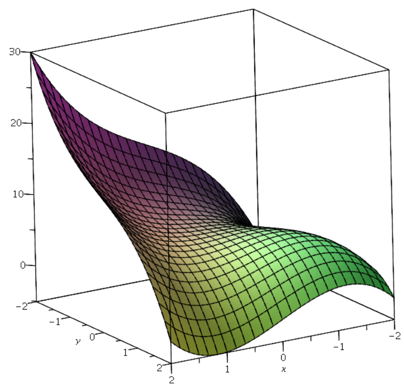
$$f'_{|(x,y)} = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je $f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = -4h_1h_2$ a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy sedlo.

Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) maximum. Toto maximum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).



(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'_{|(x,y)} = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $(x,y) = (2,-1)$. Druhá derivace

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

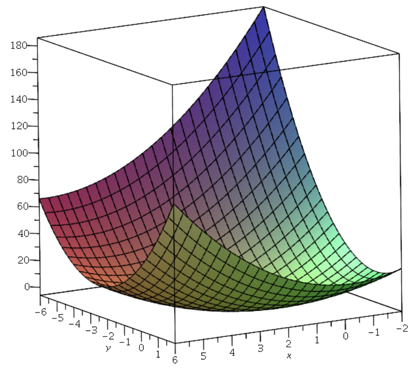
je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2,-1)$ je (ostré) lokální minimum $f(2,-1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. *kvadrik*) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$

$$= 2\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{3}{4}y + 2\cdot x\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + 2\cdot\frac{3}{4}y\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6$$

Tedy skutečně $f(x,y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y + 1 = 0$ neboli $(x,y) = (2,-1)$.



Poznámka:

Obecně můžeme použít i následující přístup: Každý polynom f v proměnných $x_1, \ldots, x_n$ stupně nejvýše dva můžeme pro $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ vyjádřit jako

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A}\vec{x} + 2\vec{b}^T\vec{x} + c$$

pro vhodnou symetrickou matici $\mathbb{A}$, vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme nyní, že $f'_{|\vec{x}_0} = 0$ pro nějaké $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pro derivace obecně máme:

$$f'_{|\vec{x}}(\vec{h}) = \vec{h}^T\mathbb{A}\vec{x} + \vec{x}^T\mathbb{A}\vec{h} + 2\vec{b}^T\vec{h} = 2(\vec{x}^T\mathbb{A} + \vec{b}^T)\vec{h}$$

$$f''_{|\vec{x}}(\vec{h}, \vec{k}) = 2\vec{h}^T\mathbb{A}\vec{k}$$

Tedy $f'_{|\vec{x}_0} = 0$ právě když $\vec{x}_0^T\mathbb{A} + \vec{b}^T = 0^T$, tj. $\mathbb{A}\vec{x}_0 = -\vec{b}$. Posunutím souřadnic pak dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} f(\vec{y} + \vec{x}_0) &= (\vec{y} + \vec{x}_0)^T\mathbb{A}(\vec{y} + \vec{x}_0) + 2\vec{b}^T(\vec{y} + \vec{x}_0) + c = \\ &= \vec{y}^T\mathbb{A}\vec{y} + 2\vec{y}^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + \vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + 2\vec{b}^T\vec{y} + 2\vec{b}^T\vec{x}_0 + c = \\ &= \vec{y}^T\mathbb{A}\vec{y} - 2\vec{y}^T\vec{b} - \vec{x}_0^T\vec{b} + 2\vec{b}^T\vec{y} + 2\vec{b}^T\vec{x}_0 + c = \\ &= \vec{y}^T\mathbb{A}\vec{y} - \vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + c. \end{aligned}$$

Protože matice druhé derivace je $f''_{|\vec{x}} = 2\mathbb{A}$, tak pokud je tato forma pozitivně definitní, pak $\vec{y}^T\mathbb{A}\vec{y} \geq 0$, tedy

$$f(\vec{y} + \vec{x}_0) = \vec{y}^T\mathbb{A}\vec{y} - \vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + c \geq -\vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + c$$

a rovnost nastává právě pro $\vec{y} = 0$. Tedy v bodě $\vec{x} = \vec{x}_0$ je ostré globální minimum a $f(\vec{x}_0) = -\vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0 + c$.

V našem případě máme:

$$f(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\Big(-\frac{5}{2}, 1\Big)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže $\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{23}\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ jak už víme.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'_{|(x,y)} = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

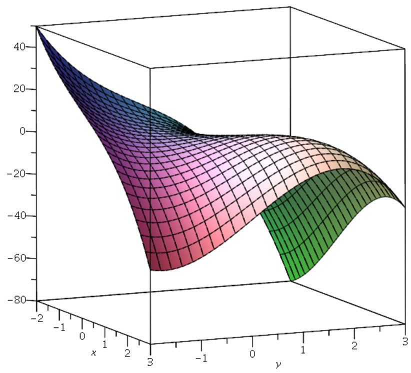
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.



5 Vázané a absolutní extrémy

Příklad 5.1. *Najděte nejmenší a největší hodnoty*

(i) funkce $f(x,y) = x - y + 3$ *za podmínky* $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,

(ii) funkce $f(x,y) = 2x - y + 1$ *za podmínky* $x^2 + 2x + y^2 = 0$,

(iii) funkce $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ *za podmínky* $x^2 + y^2 = 4y - 2x$,

(iv) funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ *s vazebnou podmínkou* $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:

(i) V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y)} = \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'_{|(x,y)}$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'_{|(x,y)} = 0$) právě když $(x,y) = (0,0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y) = 0$ a $\Phi'_{|(x,y)} = 0$. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1\}$$

je $\Phi'_{|(x,y)}$ regulární. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), \quad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \quad f(-1,1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x,y) = 3x^2+5xy+3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1,-1)$ a $(-1,1)$.

(ii) Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, kde $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = (x+1)^2 + y^2 - 1$. Pro extrém $a = (x,y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2,-1) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot \Big(2(x+1), 2y\Big)$$

a

$$(x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Vyjádříme x a y pomocí λ a dosadíme do vazby. Dostaneme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \qquad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

s hodnotami

$$f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \sqrt{5} - 1, \qquad f\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\sqrt{5} - 1.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

(iii) Útvar je kružnice $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(-4,-3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda \cdot \Big(2(x+1), 2(y-2)\Big)$$

a

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Vyjádříme $x + 1 = -\frac{2}{\lambda}$ a $y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}$ a dosadíme do zbývající rovnice. Dostaneme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{3\sqrt{5}}{5} + 2\right), \qquad \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{3\sqrt{5}}{5} + 2\right)$$

s odpovídajícími hodnotami po řadě

$$5\sqrt{5} + 4, \qquad -5\sqrt{5} + 4.$$

Kružnice je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá po řadě svého maxima a minima.

(iv) Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \;\&\; \Phi'_{|a} \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \dots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^3$ a $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y,z)} = (2x, 2y, 8z)$$

tak $\Phi'_{|(x,y,z)} = 0$ právě když $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$$

je $\Phi'_{|(x,y,z)} \neq 0$. Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1, 3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y, 8z)$$

a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \quad z = \frac{3}{8\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm\frac{2}{\sqrt{17}}(4, -4, 3)$ a $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{16}$. Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 2\sqrt{17}$.

Příklad 5.2. *Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

na kružnici $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$, kde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Pro extrém $a = (x, y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x + 2y, -2y + 2x) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Rovnice tedy vyjadřují to, že hledáme vektor $\vec{a} = (x, y)^T$ takový, že $||\vec{a}|| = 2$ a

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má netriviální řešení právě když determinant soustavy je roven nule, tj. $-(1-\lambda)(1+\lambda) - 1 = 0$, tedy $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Jde v podstatě o hledání vlastních čísel matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a jejích vlastních vektorů s normou rovnou 2.

Pro $\lambda = \sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_1 = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}} \ \cdot \ (1, \sqrt{2} - 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_1) = 4\sqrt{2}.$$

Pro $\lambda = -\sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_2 = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \ \cdot \ (-1, \sqrt{2} + 1)$$

s funkční hodnotou
$$f(a_2) = -4\sqrt{2}.$$
Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto bodech skutečně nabývá svého maxima a minima.

Příklad 5.3. *Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.*

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině
$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$
a případ vázaného extrému na
$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$
Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i extrémem T na A°. Takže musí platit, že
$$T'_{|a} = (2x - 1, 4y) = 0$$
tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, y) = 0\}$, kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že
$$(2x - 1, 4y) = T'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y)$$
a
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body
$$\left(\frac{1}{2}, 0\right),\ (1, 0),\ (-1, 0),\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot
$$T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Příklad 5.4. *Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.*

Řešení:
Množina $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ je čtverec a je zřejmě omezená i uzavřená (je vzorem uzavřeného intervalu $(-\infty, 1\rangle$ při spojitém zobrazení $\Psi(x, y) = |x| + |y|$).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině
$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$
a vázaného extrému na množině
$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\},$$
kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme

použitím symetrií $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takových, že zachovávají jak množinu ∂A, tak danou funkci f. Tedy má platit, že $\varphi(\partial A) = \partial A$ a $f \circ \varphi = f$.

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$(x,y) \mapsto (-x,-y) \qquad \textit{(středová souměrnost)}$$

$$(x,y) \mapsto (y,x) \qquad \textit{(souměrnost podle osy } x = y\textit{)}$$

$$(x,y) \mapsto (-y,-x) \qquad \textit{(souměrnost podle osy } x = -y\textit{)}$$

Extrém na A°:

$f'_{|a} = (2x-y, 2y-x) = 0$ nastává právě pro $a = (0,0) \in A^\circ$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂A:

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\} \text{ s vazbou } \Phi_1(x,y) = x + y - 1$$

a na

$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\} \text{ s vazbou } \Phi_2(x,y) = x - y - 1$$

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol $(1,0)$ čtverce A jako samostatnou vazbu).

Pro extrém na U_1 má tedy existovat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x-y, 2y-x) = f'_{|a} = \lambda_1 \Phi'_{1|a} = \lambda_1(1,1)$$

a

$$x + y = 1,$$

tedy $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in U_1$ a $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Podobně pro extrém na U_2 má existovat $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x-y, 2y-x) = f'_{|a} = \lambda_2 \Phi'_{2|a} = \lambda_2(1,-1)$$

a

$$x - y = 1,$$

tedy $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in U_2$ a $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Zbývá bod $(1,0)$ s hodnotou $f(1,0) = 1$.

Minimum tedy nabývá funkce v bodě $(0,0)$ a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu $(1,0)$ pomocí symetrií).

Příklad 5.5. *Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.*

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Hledáme sice jen kladná čísla, ale pro využití věty o nabytí maxima (a minima) spojité funkce je potřeba pracovat s množinou, která je *uzavřená* (a omezená). Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0 \ \&\ x + y + z = 100\},$$

(což je trojúhelník i s okraji), tj. hledáme *nezáporná* čísla. Množina A je zřejmě uzavřená a omezená.

Vyšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\},$$

tedy na $A \cap U = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\}$ s vazbou $\Phi(x,y,z) = x+y+z-100$ (trojúhelník bez okrajů) a na případ $A \setminus U$ (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (protože na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému $a = (x,y,z) \in A \cap U$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(1,1,1)$$

a

$$x + y + z = 100,$$

takže $a = \frac{100}{3}(1,1,1)$ a $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$ a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A.

Příklad 5.6. *Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině M dané podmínkami*

$$x + y + z = 5 \qquad a \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Řešení:
Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x,y,z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \;\;\&\;\; \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:
Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:
Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x+y)(5-x-y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x,y,z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \;\;\&\;\; \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} \text{ a } \mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} = (1,1,1)$

$\mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = (y+z, z+x, x+y)$.

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \mathrm{grad}(f)_{|a} = \lambda \cdot \mathrm{grad}(\Phi_1)_{|a} + \mu \cdot \mathrm{grad}(\Phi_2)_{|a} = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda - \mu(y + z)$$

$$zx = \lambda - \mu(z + x)$$

dostaneme $z(y - x) = \mu(y - x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

Příklad 5.7. *Na elipse* $M : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky* $p : 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:
Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x, y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ. Vzdálenost bodu $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left|(a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|}\right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left|(a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|}\right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x,y) = 10 \cdot \Big(f(x,y)\Big)^2 = (3x + y - 9)^2$$

  (snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x + y - 9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x,y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 (= 0)$ je zřejmě $\mathrm{grad}(\Phi) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) \neq 0$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(3,\ 1) = \mathrm{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \mathrm{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda\frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda = 0$ nebo $y = \frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda = 0$, pak platí $3x + y - 9 = 0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, který je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x,y) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- *uzavřená,*
- *omezená* a
- *má tečny ve všech svých bodech,*

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x,y) \in M$ je gradientem funkce Φ. Hledáme tedy body $a = (x,y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \mathrm{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \cdot (3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a $3u + v - 9 = 0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x, y, u, v) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

a

$$\Phi_2(x, y, u, v) = 3u + v - 9$$

s gradienty

$$\operatorname{grad}(\Phi_1)_{|a} = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right)$$

$$\operatorname{grad}(\Phi_2)_{|a} = (0, 0, 3, 1)$$

kde $a = (x, y, u, v)$. Označme si

$$K = \{a \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a) = 0 \;\&\; \Phi_2(a) = 0\}.$$

Pro body $a \in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x - u), 2(y - v), 2(u - x), 2(v - y)\Big) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right) + \mu \cdot (0, 0, 3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{a} \quad 3u + v - 9 = 0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda\frac{x}{2} = 2(x - u) = -3\mu$$

$$\lambda\frac{2y}{9} = 2(y - v) = -\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}\right) = 0$, kde případ $\lambda = 0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x_2, y_2) = -\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a pomocí rovnice $x - u = 3(y - v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{27\sqrt{5} - 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} + 27}{10\sqrt{5}}\right)$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{27\sqrt{5} + 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} - 27}{10\sqrt{5}}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdálenosti) bodů $a_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ platí

$$h(a_1) < h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a \in K$ a $\|a\| \to \infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2) + 1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K \cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K \cap \partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2)+1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$).
- Na množině $K \cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K \cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám$h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K \cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji" $K \cap \partial B$ protože tam je funkce "moc velká" a může to tedy být jedině bod a_1. Současně i na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ je funkce "moc velká," a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna."

A co bod a_2? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

Příklad 5.8. *Najděte vzdálenost paraboly $M: \ y = x^2$ od přímky $p: \ y = x - 2$.*

Řešení:
Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in M$ od přímky $p: \ x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Příklad 5.9. *V rovině $2x + y - z = 1$ nalezněte bod, pro nějž je součet čtverců vzdálenosti od bodů $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 3, 4)$ minimální.*

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro rovinu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$, kde $g(x, y, z) = 2x + y - z - 1$ a funkci

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2$$

vyjadřující součet čtverců vzdálenosti bodu (x, y, z) od bodů $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 3, 4)$. Pro extrém $a = (x, y, z)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(2(2x - 3), 2(2y - 4), 2(2z - 5)\Big) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2, 1, -1)$$

a

$$2x + y - z = 1.$$

Dostaneme $\lambda = -3$ a $a = \left(0, -\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$.

K nabytí minima funkce v tomto bodě bychom (kromě uzavřenosti M) potřebovali také její omezenost, kterou nemáme. Pomůžeme si proto odhadem. Pro $U \in \mathbb{R}^3$ máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$f(U) = ||U - A||^2 + ||U - B||^2 \geq \Big(||U|| - ||A||\Big)^2 + \Big(||U|| - ||B||\Big)^2 \to +\infty$$

pro $||U|| \to +\infty$. Existuje tedy $K > 0$ takové, že pro každé $U \in \mathbb{R}^3$ splňující $||U|| \geq K$ bude $f(U) \geq f(a) + 1$.

Nyní máme, že

- na množině $M_1 = M \cap \{U \in \mathbb{R}^3 \mid ||U|| \geq K\}$ má funkce hodnotu vždy alespoň $f(a) + 1$.

- na množině $M_2 = M \cap \{U \in \mathbb{R}^3 \mid ||U|| \leq K\}$, která je uzavřená i omezená nabývá svého minima. To nemůže být vázáno na okraj (kde je opět hodnota alespoň $f(a) + 1$), tedy to může být pouze v nalezeném bodě $a = \left(0, -\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$, který nutně kvůli své funkční hodnotě $f(a)$ musí ležet v M_2.

Celkově tedy funkce f skutečně nabývá na M svého (jediného) minima v bodě $a = \left(0, -\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$.

6 Dvojný integrál

Příklad 6.1. *Změňte pořadí integrace následujících integrálů:*

(i) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$

(ii) $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx$

(iii) $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\ dy\ dx$, *kde $a > 0$ je parametr.*

Řešení:

Použijeme **Fubiniho větu:** Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint_D |f|\ dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint_D f\ dS$ a platí

$$\int_{\pi_2(D)} \Big(\int_{(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D} f(x,y)\ dx \Big)\ dy = \iint_D f\ dS = \int_{\pi_1(D)} \Big(\int_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D} f(x,y)\ dy \Big)\ dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na $D = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \setminus \{(0,0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}\ dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že
$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(i) Základní oblast integrace je
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi \ \&\ 0 \le y \le \sin x\}.$$
Máme
$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$
a
$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$
Po výměně pořadí integrace máme
$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$
a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:
$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže
$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$, tudíž
$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:
$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(ii) Základní oblasti integrace jsou
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \&\ 0 \le y \le x\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \ \&\ 0 \le y \le 2 - x\}.$$
Množiny D_1 a D_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $D = D_1 \cup D_2$.

Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí
$$\iint_{D_1} f\ dS \ + \ \iint_{D_2} f\ dS = \iint_{D_1 \setminus D_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint_{D_1 \cap D_2} f\ dS \ + \ \iint_{D_2 \setminus D_1} f\ dS$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2 - y \rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(iii) Základní oblast integrace je
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2a \ \&\ \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}\}.$$

Oblast je tedy se shora omezená parabolou $y^2 = 2ax$ a že zdola polovinou kružnice $2ax - x^2 = y^2$ (neboli ekvivalentně $(x-a)^2 + y^2 = a^2$). Rozdělíme si ji na tři části (tento návod poskytuje obrázek)
$$D_1 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge a\}$$

$$D_2 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \;\;\&\;\; x \le a\}$$

a

$$D_3 := D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \;\;\&\;\; x \ge a\}.$$

Teď si oblasti D_i vyjádříme podle řezu v proměnné x (pomocí křivek $y^2 = 2ax$ a $(x-a)^2+y^2 = a^2$):

D_1 :

$$a \le y \le 2a, \qquad \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a$$

D_2 :

$$0 \le y \le a, \qquad \frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

D_3 :

$$0 \le y \le a, \qquad a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a$$

Takže výsledek je

$$\iint\limits_{D} f\ dS = \iint\limits_{D_1} f\ dS \;+\; \iint\limits_{D_2} f\ dS \;+\; \iint\limits_{D_3} f\ dS =$$

$$= \int_a^{2a}\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\ dx\ dy \;+\; \int_0^{a}\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy \;+\; \int_0^{a}\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\ dx\ dy\ .$$

Příklad 6.2. *Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:*

(i) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx$

(ii) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1}$

Řešení:

(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2 \;\&\; 0 \le y \le 4 - x^2 \;\&\; y \ne 4\}.$$

Funkce $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině D není omezená.

Proč: Množina D je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku D, tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Není tedy jasné, jestli je $\iint\limits_{D} |f|\ dS < \infty$ a jestli tedy vůbec můžeme použít Fubiniovu větu o záměně integrace. Pomůžeme si teď dodatkem:

Věta: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : D \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál $\iint\limits_{E} f\ dS$).

Kromě toho ještě připomeňme, jak je definován integrál $\iint\limits_{E} f\ dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} |f|\ dS =: \iint\limits_{E} |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Máme tedy
$$\pi_2(D) = \langle 0, 4\rangle$$
a
$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, \sqrt{4-y}\rangle.$$
Dostáváme tak
$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx\Big)\, dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$
$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4}\Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8-1}{4}.$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 8 \ \&\ \sqrt[3]{x} \le y \le 2\},$$
takže
$$\pi_2(D) = \langle 0, 2\rangle$$
a
$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, y^3\rangle.$$
Dostáváme tak
$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4+1} = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx\Big)\, dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$
$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

Příklad 6.3. *Vypočítejte integrál*
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$
přechodem do polárních souřadnic.

Řešení:
Základní oblast integrace je
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2 \ \&\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \ \&\ x^2+y^2 \le 4\},$$
tedy čtvrtkruh.

Použijeme **Větu o substituci:** Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, $f : U \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce s konečným integrálem a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U) a
- množina $U \setminus U^\circ$ ($\subseteq \partial U$) má *nulovou míru* (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak
$$\iint_{\Phi(U)} f\, dS = \iint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\, dS.$$

Polární souřadnice jsou určeny zobrazením $\Phi : \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, kde $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Máme $\Phi'_{|(r,\varphi)} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ a $\det \Phi'_{|(r,\varphi)} = r$. Protože D je čtvrtina kruhu, snadno ji zparametrizujeme $D = \Phi(U)$, kde $U = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Na D° je Φ zřejmě prosté a spojitě diferencovatelné a množina ∂D se skládá ze dvou úseček a oblouku kružnice, což jsou množiny míry nula. Celkem tak dostáváme:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy = \iint_{D=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dS =$$

$$= \iint_U r^2 \cdot r\ dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^2 r^3\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\ d\varphi = 2\pi.$$

Příklad 6.4. *Vypočítejte integrál*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1+\cos\varphi$.

Řešení:
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \ \&\ 0 \le r \le 1+\cos\varphi\}$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint_U r \cdot r\ dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Pro jednotlivé integrály jsme použili vztahy (pro $n \ge 0$):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = \int_{0-\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\ d\varphi = \begin{bmatrix} \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} \\ d\alpha = d\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}\Big(\alpha + \frac{\pi}{2}\Big)\ d\alpha = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1}\alpha\ d\alpha = 0.$$

(plyne z periodicity a lichosti funkcí) a dále podobně:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi$$

a současně

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$$

tedy

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Příklad 6.5. *Vypočítejte integrál*

$$\iint_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS$$

pro neomezenou množinu $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2}\}$.

Řešení:
Zopakujme si, že pokud je v integrálu $\iint_E f\ dS$ funkce f nebo oblast E integrace neomezená, pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{E_n} |f|\ dS =: \iint_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$.

V našem případě tedy máme $f(x,y) = xe^{-y}\frac{\sin y}{y}$. Nejdříve potřebujeme ověřit existenci zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenci. Na E máme

$$\left|xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\right| \le xe^{-y}.$$

Pro tuto nezápornou funkci (tzv. *majorantu*) můžeme tedy použít Fubiniho větu (pokud nám při postupné integraci nakonec vyjde konečná hodnota):

$$\iint_E xe^{-y}\ dS = \int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\ dx\ dy = \int_0^\infty \frac{y^2}{8}e^{-y}\ dy = \int_0^\infty\left(\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}\right)e^{-\frac{y}{2}}\ dy \le \int_0^\infty K\cdot e^{-\frac{y}{2}}\ dy < \infty$$

kde jsme použili to, že $|\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}| \le K$ pro vhodnou konstantu $K > 0$ (tato funkce je spojitá a jde k nule v nekonečnu).

Integrál z $|f|$ je proto konečný a my tak můžeme použít Fubiniho větu (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině). Můžeme proto psát:

$$\iint_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS = \int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dx\ dy = \frac{1}{8}\int_0^\infty y(e^{-y}\sin y)\ dy =$$

$$= \left[\begin{smallmatrix} g(y)=y, & g'(y)=1 \\ h'(y)=e^{-y}\sin y, & h(y)=-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[y\left(-\frac{e^{-y}}{2}\right)(\cos y+\sin y)\Big]_{y=0}^{y=\infty} - \frac{1}{8}\int_0^\infty -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\ dy =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^\infty e^{-y}(\cos y+\sin y)\ dy = \frac{1}{16}\Big[-e^{-y}\cos y\Big]_0^\infty = \frac{1}{16}.$$

Poznámka: K odvození neurčitých integrálů jsme použili následující postup (jednodušší než opakovaná metoda per partes) využívající funkce komplexní proměnné:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy + \mathbf{i}\int e^{-y}\sin y\ dy = \int e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y)\ dy = \int e^{-y}e^{\mathbf{i}y}\ dy =$$

$$= \int e^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy = \frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1} + C = -\frac{\mathbf{i}+1}{2}e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y) + C =$$

$$= \left[-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y)\right] + \mathbf{i}\left[-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)\right] + C.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí pak dostáváme:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y) + C_1$$

a

$$\int e^{-y}\sin y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) + C_2,$$

kde C_1, C_2 a C jsou konstanty.

Integrály lze odvodit ještě "heuristicky" - primitivní funkce bude nejspíš obsahovat $e^{-y}\cos y$ a $e^{-y}\sin y$. Zkusíme si je tedy zderivovat:

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\cos y\right) = -e^{-y}(\sin y + \cos y)$$
$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\sin y\right) = -e^{-y}(\sin y - \cos y)$$

a integrály z původních funkcí teď najdeme prostě jen lineární kombinací rovnic:

$$e^{-y}\sin y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)\right)$$
$$e^{-y}\cos y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y)\right).$$

Příklad 6.6. *Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu*

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E:\quad 0 \le y \le \frac{2}{3},\qquad y \le x \le 2 - 2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ a $(2,0)$. Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body $A_1,\dots,A_n$ je konvexní obal $[A_1,\dots,A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1,\dots,A_n]_\alpha = \{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i \mid 0 \le \lambda_1,\dots,\lambda_n\ \&\ \sum_{i-1}^{n}\lambda_i = 1\}).$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$
$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = (2,0)$$
$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U:\quad 0 \le v \le u,\qquad 0 \le u \le 2.$$

Dále je $(\Phi^{-1})' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det\Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy = \iint_{E=\Phi(U)}(x+2y)e^{y-x}\ dS = \iint_U ue^{-v}\cdot\frac{1}{3}\ dS =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2\int_0^u ue^{-v}\ dv\ du = \frac{1}{3}\int_0^2 u\Big[-e^{-v}\Big]_{v=0}^{v=u}\ du = \frac{1}{3}\int_0^2 u(1-e^{-u})\ du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u}\Big]_{u=0}^{u=2} =$$

$$= 1 + e^{-2}.$$

Příklad 6.7. *Vypočítejte integrál*

$$\iint\limits_E \frac{y}{x} e^{xy}\, dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$ a $y = \frac{x}{2}$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x. \quad \frac{2}{x} \leq y \leq \frac{4}{x}$$

neboli

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad 2 \leq xy \leq 4.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = xy$$

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení Φ, které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení Φ vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že $x, y > 0$)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u, v) = \Big(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\Big)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1} : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi^{-1}(x, y) = \Big(\frac{y}{x}, xy\Big).$$

Determinant Φ' se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'_{|\Phi(u,v)}} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 2, \quad 2 \leq v \leq 4.$$

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy}\, dS = \iint\limits_U u e^v \Big| -\frac{1}{2u} \Big|\, dS = \frac{1}{2} \int\limits_2^4 \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 e^v\, du\, dv = \frac{3}{4}(e^4 - e^2).$$

Příklad 6.8. *Najděte hmotnost a polohu těžiště*

(i) trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 0)$, jehož hustota je rovna $\rho(x, y) = x$.

(ii) části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x, jejíž hustota je rovna $\rho(x, y) = y$.

Řešení:
(i) Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 4 - 3y.$$
Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:
$$m = \iint_E \rho \; dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x \; dx \Big) \; dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \; dy = \frac{1}{2} \Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3} \Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{10}{3}$$
x-ová souřadnice těžiště:
$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\rho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2 \; dx \Big) \; dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \Big[x^3 \Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$
$$= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \; dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{21}{10}$$
y-ová souřadnice těžiště:
$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\rho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy \; dx \Big) \; dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \Big[x^2 y \Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$
$$= \frac{3}{20} \int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \; dy = \frac{6}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \; dy = \frac{6}{5} \Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{10}.$$
(ii) Oblast integrace je
$$E: \quad -3 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 9 - x^2.$$
hmotnost:
$$m = \iint_E \rho \; dS = \int_{-3}^3 \Big(\int_0^{9-x^2} y \; dy \Big) \; dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \Big[y^2 \Big]_0^{9-x^2} dx = \int_0^3 (x^2-9)^2 \; dx =$$
$$= \Big[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81y \Big]_{x=0}^{x=3} = \frac{648}{5}$$
x-ová souřadnice těžiště:
$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\rho(x,y) \; dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 x \Big(\int_0^{9-x^2} y \; dy \Big) \; dx = 0$$
(je to lichá funkce na množině symetrické podle osy y)
y-ová souřadnice těžiště:
$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\rho(x,y) \; dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 \Big(\int_0^{9-x^2} y^2 \; dy \Big) \; dx = \frac{1}{3m} \int_{-3}^3 \Big[y^3 \Big]_{y=0}^{y=9-x^2} dx =$$
$$= \frac{2}{3m} \int_0^3 (3^2 - x^2)^3 \; dx = \frac{5}{3 \cdot 324} \Big[3^6 x - 3^4 x^3 + \frac{3^3}{5} x^5 - \frac{x^7}{7} \Big]_{x=0}^{x=3} = \frac{36}{7}.$$

Příklad 6.9. *K výpočtu integrálu*

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 (e^{y^2} + 2xy)\ dy\ dx$$

zvolte vhodný způsob integrace.

Řešení:
Použijeme změnu pořadí integrace jednotlivých proměnných. Oblast integrace je

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ \&\ 2x \le y \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\ \&\ 0 \le x \le \frac{y}{2}\}.$$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 \left(e^{y^2} + 2xy\right)\ dy\ dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} \left(e^{y^2} + 2xy\right)\ dx\ dy = \int_0^2 \frac{y}{2}e^{y^2} + \frac{y^3}{4}\ dy = \left[\frac{e^{y^2}}{4} + \frac{y^4}{16}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{e^4+3}{4}.$$

Jiné, mnohem náročnější řešení: Použijeme substituci polárních souřadnic Φ

$$\Phi: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}, \qquad \det \Phi' = r$$

oblasti

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ \&\ 2x \le y \le 2\}$$

s parametrizací $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r\cos\varphi \le 1\ \&\ 2r\cos\varphi \le r\sin\varphi \le 2\ \&\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Ta se po úpravách zjednoduší na

$$U = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le \frac{2}{\sin\varphi}\ \&\ \arctan 2 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Pak máme

$$\iint_{E=\Phi(U)} \left(e^{y^2} + 2xy\right)\ dS = \iint_U \left(e^{r^2\sin^2\varphi} + 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\right) r\ dS =$$

$$= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sin\varphi}} \left(e^{r^2\sin^2\varphi} + 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\right) r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{r^2\sin^2\varphi}}{2\sin^2\varphi} + \frac{r^4\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sin\varphi}} d\varphi = \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4-1}{2\sin^2\varphi} + \frac{8\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\ d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1-e^4}{2}\operatorname{cotg}(\varphi) - \frac{4}{\sin^2\varphi}\right]_{\varphi=\arctan 2}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -4 - \frac{1-e^4}{2}\frac{1}{\tan(\arctan 2)} + 4\left(1 + \frac{1}{\left(\tan(\arctan 2)\right)^2}\right) = \frac{e^4+3}{4}.$$

Příklad 6.10. *Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál*

$$\iint_E e^{y^3}\sqrt{xy - y^2}\ dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:
Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x-y) \geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\iint\limits_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{y^3} \sqrt{xy-y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^1 \left[e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy-y^2)^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\, dy = 6 \int\limits_0^1 3y^2 e^{y^3}\, dy = 6 \Big[e^{y^3} \Big]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\ .$$

Příklad 6.11. *K výpočtu integrálu*

$$\iint_E x \cos(x^2 + y)\, dS$$

kde $E: -\sqrt{\pi} \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \pi$, *zvolte vhodný způsob integrace.*

Řešení:
Oblast E je obdélník. Můžeme použít integraci jak podle x tak podle y:

$$\iint_E x\cos(x^2+y)\, dS = \int\limits_0^\pi \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 x\cos(x^2+y)\, dx\, dy = \int\limits_0^\pi \left[\frac{\sin(x^2+y)}{2} \right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi \sin(y) - \sin(y+\pi)\, dy = \int\limits_0^\pi \sin(y)\, dy = \Big[-\cos(y) \Big]_{y=0}^{y=\pi} = 2$$

nebo

$$\iint_E x\cos(x^2+y)\, dS = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 \int\limits_0^\pi x\cos(x^2+y)\, dy\, dx = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 \Big[x\sin(x^2+y) \Big]_{y=0}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 x\sin(x^2+\pi) - x\sin(x^2)\, dx = \int\limits_{-\sqrt{\pi}}^0 -2x\sin(x^2)\, dx = \Big[\cos(x^2) \Big]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} = 2\ .$$

Příklad 6.12. *Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál*

$$\iint\limits_E x^2 \cdot |y|\, dS,$$

kde oblast je $E: x^2 + y^2 \leq 2$. *Tuto oblast načrtněte.*

Řešení:
Oblast je kruh o poloměru $\sqrt{2}$. K výpočtu použijeme sférické souřadnice:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\iint\limits_E x^2 \cdot |y|\, dS = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^2\cos^2\varphi \cdot |r\sin\varphi| \cdot r\, d\varphi\, dr = \left(\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^4\, dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi |\sin\varphi|\, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^5}{5} \cdot \left(2 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \; d\varphi \right) = \frac{8\sqrt{2}}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{16\sqrt{2}}{15} \; .$$

Příklad 6.13. *Vypočítejte hodnotu integrálu*

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \; dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:
Oblast integrace

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y^2 \; \& \; 0 < y \le 1\}$$

je omezená, ale u funkce $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0, 0)$. Vyšetříme tedy chování f na E v tomto bodě. Protože pro $(x, y) \in E$ máme $0 \le x \le y^2$ a $0 < y$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$ a tedy

$$1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y \to 1$$

pro $(x, y) \to (0, 0)$ a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje.

Pro výpočet použijeme Fubiniho větu

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \; dS = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \; dx \; dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y e^y - y \; dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

7 Trojný integrál

Příklad 7.1. *Vypočtěte*

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) \; dz \; dy \; dx.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad |x| \le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4 - x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2 + y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. K výpočtu integrálu použijeme *cylindrické souřadnice*:

$$\Phi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi : \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r \; .$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le z \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \cdot r\ dV = \int_0^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dz = 2\pi \int_0^2 \int_0^z r^3\ \ dr\ dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 z^4\ \ dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Příklad 7.2. *Vypočtěte*

$$\iiint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\ dV,$$

kde $E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1.$

Řešení:
Věta o substituci má analogický tvar a podmínky (pouze "zanedbatelné" množiny nyní zahrnují i plochy, roviny atd.):

$$\iiint_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ dV.$$

Použijeme *sférické souřadnice*:

$$\Psi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{kde} \quad \Psi: \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array} .$$

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde{r} & = & r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} & = & \varphi \\ \tilde{z} & = & r\cos\vartheta \end{array}, \quad \Phi_2: \begin{array}{rcl} x & = & \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y & = & \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z & = & \tilde{z} \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta) \cdot r = r^2 \sin\vartheta.$$

Zvolíme si parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi \ .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}\ dV = \iiint_U \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[r \frac{\sqrt{r^2 - 4r\cos\vartheta + 4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int_0^1 r\Big(\sqrt{r^2+4r+4} - \sqrt{r^2-4r+4}\Big)\ dr =$$

$$= \pi \int_0^1 r\Big(|r+2| - |r-2|\Big)\ dr = \pi \int_0^1 r\Big(r+2-(2-r)\Big)\ dr = 2\pi \int_0^1 r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Příklad 7.3. *Vypočtěte těžiště tělesa*

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\rho = 1$, *kde* $R > 0$ *a* $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ *jsou parametry.*

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem 2α, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint_U r^2 \sin\vartheta\ dV = \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^\alpha r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha) \int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Psi(U)} z\ dV = \frac{1}{m} \iiint_U r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\ dV = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3\ dr \right) \cdot \left(\int_0^\alpha \sin 2\vartheta\ d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha).$$

Příklad 7.4. *Určete těžiště homogenního kužele s výškou* $h > 0$ *a poloměrem podstavy* $R > 0$.

Řešení:
Kužel

$$E: \quad 0 \le z \le H \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint_E 1\ dV = \int_0^h \Big(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h}\cdot z} 1\ dxdy \Big)\ dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2\ dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_E z\ dV = \frac{1}{m} \int_0^h \Big(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h}\cdot z} z\ dxdy \Big)\ dz = \frac{1}{m} \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^3\ dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h\ .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislostí plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel" s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

Příklad 7.5. *Vypočtěte těžiště tělesa*

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x/a &=& r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y/b &=& r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z/c &=& r\cos\vartheta \end{array}\ ,$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Phi} \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}'_{|\Phi}) \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti E si usnadníme znalostí objemu koule K o poloměru 1 a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého elipsoidu F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint_E 1\ dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1\ dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'|\ dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint_K 1\ dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $T = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z\ dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr\cos\vartheta) \cdot (abcr^2 \sin\vartheta)\ dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8} c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

Příklad 7.6. *Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního paraboloidu E o výšce h a poloměru postavy R vzhledem k ose, která prochází těžištěm E a je kolmá k ose rotační symetrie paraboloidu E (tzv.* ekvatoriální moment*).*

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) \le z \le h.$$

Určíme těžiště tělesa E pomocí cylindrických souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

a parametrizace $E = \Phi(U)$

$$U: \quad \frac{hr^2}{R^2} \le z \le h \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \; .$$

hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} 1 \; dV = \iiint\limits_{U} r \; dV = \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^{h} \int_0^{2\pi} r \; d\varphi \; dz \; dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R r \left(h - \frac{hr^2}{R^2} \right) \; dr = 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi h R^2}{2}.$$

Těleso E je rotačně symetrické podle osy z, takže je potřeba určit pouze z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} zr \; dV = \frac{1}{m} \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^{h} \int_0^{2\pi} zr \; d\varphi \; dz \; dr =$$

$$= \frac{4}{hR^2} \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^{h} zr \; dz \; dr = \frac{2}{hR^2} \int_0^R r \left(h^2 - \frac{h^2 r^4}{R^4} \right) \; dr = \frac{2h}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6R^4} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{2}{3} h.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na osu z a procházející těžištěm nebude (vzhledem k symetrii tělesa E podle osy z) záviset na konkrétní volbě směru této osy. Zvolíme si ji tedy např. rovnoběžnou s osou x - tj. osa p bude mít rovnice $y = 0$ a $z = \frac{2}{3}h$. Hledaný moment setrvačnosti pak bude

$$M = \iiint\limits_{E} \Big(\rho_p(x,y,z) \Big)^2 \; dV,$$

kde $\rho_p(x,y,z) = y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2$ je čtverec vzdálenosti bodu (x,y,z) od přímky p.

K výpočtu momentu použijeme opět transformaci Φ:

$$M = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 \; dV = \iiint\limits_{U} r^3 \sin^2\vartheta + r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 \; dV =$$

$$= \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^{h} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\vartheta + r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 \; d\varphi \; dz \; dr = \pi \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^{h} r^3 + 2r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 \; dz \; dr =$$

$$= \pi \int_0^R hr^3 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2}{3} r \left[\left(z - \frac{2}{3}h\right)^3\right]_{z=\frac{hr^2}{R^2}}^{z=h} dr = \pi h \int_0^R r^3 - \frac{r^5}{R^2} + \frac{2}{81} rh^2 - \frac{2}{3} h^2 r \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^3 dr =$$

$$= \pi h \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{6} + \frac{R^2h^2}{81} - \left[\frac{h^2R^2}{12}\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^4\right]_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\pi h R^2}{12}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right).$$

Příklad 7.7. *Vypočtěte*

$$\iiint_E y \; dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad 0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

I zde platí

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f \; dV = \iint_{\pi(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x,y,z) \; dz \Big) \; dS,$$

kde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi(x,y,z) = (x,y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y. Případně:

$$\int\int\int_E f \; dV = \int_{\pi_1(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x,y,z) \; dz \Big) \; dy \Big) \; dx,$$

kde $\pi_{1,2}, \pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$ a $\pi_1(x,y,z) = x$.

$$\iiint_E y \; dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \; dz \; dy \; dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y) \; dy \; dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \; dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

Příklad 7.8. *Vypočtěte*

$$\iiint_E xyz \; dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

Příklad 7.9. *Vypočtěte*

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ *a* $(0,1,1)$.

Řešení:
Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \leq z \leq y - x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y \int\limits_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y y^2 x - x^2 y\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

Příklad 7.10. *Vypočítejte hodnotu integrálu*

$$\iiint\limits_E |z|\ dV,$$

kde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \&\ |z| \leq 3\ \&\ y \geq 0\}$.

Řešení:
Oblast E je polovina válce. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad \det \Phi' = r$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1\ \&\ |z| \leq 3\ \&\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)} |z|\ dV = \iiint\limits_U |z| r\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \int\limits_{-3}^3 |z| r\ dz\ d\varphi\ dr = \left(\int\limits_{-3}^3 |z|\ dz\right) \cdot \left(\int\limits_0^\pi 1\ d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 r\ dr\right) = \frac{9}{2}\pi.$$

Příklad 7.11. *Vypočítejte hodnotu integrálu*

$$\iiint\limits_E x^2\ dV,$$

kde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\ \&\ 0 \leq y\ \&\ x \leq 0\}$.

Řešení:
Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad \det\Phi' = r$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq z \leq 2 \ \&\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2\ dV = \iiint\limits_{U} r^3\cos^2\varphi\ dV = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{z} r^3\cos^2\varphi\ dr\ dzd\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int\limits_{0}^{2} z^4\cos^2\varphi\ dzd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int\limits_{0}^{2} z^4\ dz\right)\cdot\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\varphi\ d\varphi\right) = \frac{8}{5}\pi.$$

8 Křivkový integrál

Příklad 8.1. *Integrujte funkci* $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ *podél křivky* Γ*:* $y = \frac{x^2}{2}$ *od bodu* $A = (1, \frac{1}{2})$ *do bodu* $B = (0,0)$.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_{\Gamma} f\ ds = \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(t))\cdot||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \Gamma$.

Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1-t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1+(t-1)^2}.$$

Takže

$$\int\limits_{\Gamma} f\ ds = \int\limits_{0}^{1} \frac{1-t+\frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}}\cdot\sqrt{1+(t-1)^2}\ dt = \int\limits_{0}^{1} 1-t+\frac{(1-t)^4}{4}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= -\int\limits_{1}^{0} u + \frac{u^4}{4}\ du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

Příklad 8.2. *Vypočítejte křivkový integrál*

$$\int\limits_{\Gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\ ds,$$

kde Γ *je asteroida* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, *s parametrem* $a > 0$.

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Zparametrizujeme ji proto upravenými polárními souřadnicemi, které budou mít také vhodné exponenty:

$$\varphi: \begin{array}{l} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{array}$$

pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t \Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(3a\cos t \cdot \sin t)^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 3a\,|\cos t \cdot \sin t|\,.$$

Využijeme toho, že asteroida i funkce jsou symetrické podle souřadných os, takže stačí počítat jen na čtvrtině asteroidy:

$$\int_\Gamma (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\ ds = \int_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \cdot 3a\,|\cos t \cdot \sin t|\ dt =$$

$$= 12 \cdot a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos^5 t \cdot \sin t + \sin^5 t \cdot \cos t\Big)\ dt = 2a^{\frac{7}{3}} \Big[-\cos^6 t + \sin^6 t \Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}\ .$$

Příklad 8.3. *Integrujte funkci* $f(x, y) = x + y$ *podél křivky* $\mathcal{C}$*:* $x^2 + y^2 = 4$ *v prvním kvadrantu od bodu* $A = (2, 0)$ *do bodu* $B = (0, 2)$.

Řešení:
Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice $\varphi(t) = \big(2\cos(t), 2\sin(t)\big)$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \big(-2\sin(t), 2\cos(t)\big) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = 2.$$

Takže

$$\int_\mathcal{C} f\ ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t)\ dt = 4\Big[\sin(t) - \cos(t)\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8.$$

Příklad 8.4. *Vypočítejte křivkový integrál*

$$\int_\Gamma xy\ ds,$$

kde $\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ \ \&\ \ x, y \geq 0$ *s parametry* $a \neq b$.

Řešení:
Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\varphi: \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \cos t \\ \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{array}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-a\sin t,\ b\cos t \Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\ .$$

Takže

$$\int_\Gamma xy\ ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=a^2\sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ du = 2(a^2-b^2)\sin t \cos t\ dt \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u}\ du = \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\ .$$

Příklad 8.5. *Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako $\varphi(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t^2}{2}\right)$. Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1\rangle$.*

Řešení:
Křivka leží v plášti válce $x^2 + y^2 = 1$ a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky Γ se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt\ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(-\sin(t), \cos(t), t\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2} = \sqrt{1+t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} t=\sinh(\alpha) \\ dt=\cosh(\alpha)d\alpha \end{smallmatrix} \right] = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh^2(\alpha)} \cdot \cosh(\alpha)\ d\alpha =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2})} \cosh^2(\alpha)\ d\alpha = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \right)^2 d\alpha = \frac{1}{4} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\ .$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $u = \sqrt{1+t^2}$ je částí hyperboly ($u^2 - t^2 = 1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\ .$$

Jde o rozklad funkce e^α na sudou a lichou funkci, tj. $e^\alpha = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $u = \sqrt{1-t^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$	$\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$
$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha),$	$\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $t = \sinh(\alpha)$:

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$

Příklad 8.6. *Spočítejte délku části kuželové spirály $\mathcal{C}$ s $n \in \mathbb{N}$ závity definované parametrizací φ : $\langle 0, 2n\pi \rangle \to \mathbb{R}^3$,*

$$\varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t).$$

Řešení:
Křivka leží v plášti kužele $x^2 + y^2 = z^2$. Délka křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací φ se pak vypočítá jako

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\; dt \quad \Big(= \int_{\mathcal{C}} 1\; ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky $\mathcal{C}$. Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\big(\cos(t) - t\sin(t)\big)^2 + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2},$$

takže dostáváme

$$L(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1\; ds = \int_0^{2n\pi} \sqrt{2 + t^2}\; dt = \left[\substack{t = \sqrt{2}u \\ dt = \sqrt{2}du} \right] = 2 \int_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1 + u^2}\; du = \left[\substack{u = \sinh(x) \\ du = \cosh(x)dx} \right] =$$

$$= 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} \cosh^2(u)\; du = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} 1 + \cosh(2u)\; du = \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2} \right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \Big[u + \sinh(u)\cosh(u) \Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \Big[u + \sinh(u)\sqrt{1 + \sinh(u)^2} \Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1 + 2n^2\pi^2} = \ln\Big(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1 + 2n^2\pi^2} \Big) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1 + 2n^2\pi^2}.$$

Poznámka: Opět jsme využili vztahy pro hyperbolické funkce $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ a $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x).$$

Inverzní funkci pro $u = \sinh(x)$ už známe:

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\Big(u + \sqrt{1 + u^2} \Big).$$

Příklad 8.7. *Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.*

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z)$,

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = \Big(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, \quad -\frac{1}{x+z}, \quad \frac{y}{(x+z)^2} \Big)$.

Řešení:
Práce síly $\vec{F}$ v oblasti U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x'' nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \; -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

(i) Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, \;\; 0 - 0, \;\; 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z \; . \qquad (3)$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y) \; dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2 \; dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z) \right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z \; dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x + z)^2} - \frac{1}{(x + z)^2}, \;\; \frac{2y}{(x + z)^3} - \frac{2y}{(x + z)^3}, \;\; \frac{1}{(x + z)^2} - \frac{1}{(x + z)^2} \right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} \quad . \tag{6}$$

Začneme třeba druhou rovnici:

$$f(x,y,z) = \int -\frac{1}{x+z}\,dy = -\frac{y}{x+z} + C(x,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x+z} + C(x,z)\right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x,z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x+z} + D(x)\right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\,d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

Příklad 8.8. *Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.*

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t^2 + t^4, t^4 + t, t + t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}\ dt = \int_0^1 3t^2 + 5t^4 + 6t^5\ dt = \Big[t^3 + t^5 + t^6\Big]_0^1 = 3.$$

9 Plošný integrál

Příklad 9.1. *Najděte velikost plochy*

(i) části roviny $x + 2y + z = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$,

(ii) paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží pod rovinou $z = 9$.

Řešení:
Plocha je určena jako $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 4\ \&\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Její obsah spočítáme podle vztahu

$$\iint_M 1\ dS = \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|\ dS,$$

kde Φ je vhodná parametrizace plochy M, tj. zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, které je

- spojitě diferencovatelné a prosté na U°,
- $\Phi(U) = M$
- matice Φ' má hodnost 2 na U° (neboli $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$ na U°).

(i) Protože plocha M je grafem funkce $f(x, y) = 4 - x - 2y$ s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

jako parametrizaci si jednoduše zvolíme

$$\Phi(x, y) = \Big(x, y, f(x, y)\Big) = (x, y, 4 - x - 2y)$$

pro $(x, y) \in U$.

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{6},$$

takže Φ zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky.

Můžeme tedy psát

$$\iint_M 1\ dS = \iint_U \sqrt{6}\ dS = \sqrt{6} \iint_U 1\ dS = \sqrt{6} \cdot 4\pi,$$

protože obsah kruhu U o poloměru 2 je 4π.

(ii) Plocha je určena jako
$$M: \quad x^2+y^2=z \ \ \& \ \ z \le 9.$$
Jako parametrizaci si zvolíme
$$\Phi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$$
s definičním oborem
$$U: \quad x^2+y^2 \le 9.$$
Máme
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=(1,0,2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=(0,1,2y)$$
a
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}=(-2x,-2y,1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}.$$
Takže
$$\iint\limits_M 1 \ dS = \iint\limits_U \sqrt{4(x^2+y^2)+1} \ dS = \left[\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ (r,\varphi)\in\langle 0,3\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle} \right] = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 r\sqrt{4r^2+1} \ dr \ d\varphi =$$
$$= \left(\int\limits_0^3 r\sqrt{4r^2+1} \ dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1 \ d\varphi \right) = \left[\frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_{r=0}^{r=3} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Příklad 9.2. *Spočítejte*
$$\iint\limits_M z \ dS,$$
kde M je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.

Řešení:
Integrál z funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je určený jako
$$\iint\limits_M f \ dS = \iint\limits_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \ dS \ ,$$
kde Φ je opět vhodná parametrizace.

Plocha je určena jako
$$M: \quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad 0 \le z \le x+1.$$
Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako
$$\Phi(\varphi,z)=(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$$
s definičním oborem
$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le z \le 1+\cos\varphi.$$
Máme
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=(0,0,1)$$
a
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}=(\cos\varphi,\sin\varphi,0) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro funkci $f(x,y,z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U z\ dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1+\cos\varphi} z\ dz\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2}\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$

$$= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Příklad 9.3. *Spočítejte*

$$\iint\limits_M yz\ dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u+v$, $z = u-v$ a $u^2+v^2 \leq 1$.

Řešení:
Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U: \quad u^2+v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (uv, u+v, u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u+v$ a $z = u-v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = (v,1,1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = (u,1,-1)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} = (-2, v+u, v-u) \qquad \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint\limits_M yz\ dS = \iint\limits_U (u^2-v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\ dS = \left[\begin{smallmatrix} u=r\cos\varphi \\ v=r\sin\varphi \\ (r,\varphi)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4}\ dr\ d\varphi = \left(\int\limits_0^3 r^3\sqrt{2r^2+4}\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi\ d\varphi\right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u+v$ a $z = u-v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2-z^2}{4}$ a $1 \geq u^2+v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \qquad y^2+z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

Příklad 9.4. *Spočítejte*

$$\iint\limits_M x^2z + y^2z\ dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
Plochu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4 \;\&\; z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, 2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\sin\vartheta\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\varphi, 2\cos\vartheta\sin\varphi, -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_M x^2z + y^2z \; dS = \iint_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

10 Integrální věty

Příklad 10.1. *Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y,z) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).*

Řešení:
Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Podle Greenovy věty tedy pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \; dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Máme tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \; dS = \iint_M 2xy^2 \; dS = \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2 \; dy \; dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^{10} \; dx = \frac{2}{33}.$$

Příklad 10.2. *Ověřte Gaussovu větu pro pole* $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ *a sféru* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:

Orientace okraje ∂M je v tomto případě daná vnější normálou.

V našem případě máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; .$$

Gaussovu větu teď ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

a

$$\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F})\; dV = \iiint\limits_M 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\; dV = \left[\begin{smallmatrix} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 3r^2 \cdot |r^2\sin\vartheta|\; dr\; d\varphi\; d\vartheta = \left(\int_0^1 3r^4\; dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\; d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\; d\vartheta\right) = \frac{3}{5}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci ∂M pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta),$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi \; .$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (\, -\sin\vartheta\sin\varphi,\; \sin\vartheta\cos\varphi,\; 0\,) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= (\, \cos\vartheta\cos\varphi,\; \cos\vartheta\sin\varphi,\; -\sin\vartheta\,) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta\cdot(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = -\sin\vartheta\cdot\vec{\Phi}(\varphi,\vartheta).$$

Vektor $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$ tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj. $-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Dosazením tedy obdržíme

$$\iint\limits_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}(\Phi(\varphi,\vartheta))\cdot\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) dS = \iint\limits_U \vec{F}(\Phi(\varphi,\vartheta))\cdot\Big(\sin\vartheta\cdot\vec{\Phi}(\varphi,\vartheta)\Big)\; dS =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\Big(\sin^4\vartheta\cos^4\varphi + \sin^4\vartheta\sin^4\varphi + \cos^4\vartheta\Big)\; d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{\pi}\sin^5\vartheta\; d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\; d\varphi\right) + \left(\int_0^{\pi}\cos^4\vartheta\sin\vartheta\; d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\; d\varphi\right).$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\; d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^4\varphi\; d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\; d\varphi$$

a

$$\int_0^{\pi}\sin^5\vartheta\; d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\vartheta\; d\vartheta.$$

Pro $n \geq 2$ spočítáme tedy integrál

$$A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha \, d\alpha = [-\cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}\alpha \cdot \cos^2\alpha \, d\alpha =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\alpha \cdot (1-\sin^2\alpha) \, d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2}$ a $A_2 = \frac{\pi}{4}$ a $A_0 = 1$. Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \cdots = \left(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left[-\frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}\right) \cdot \left(2\pi\right) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

Příklad 10.3. *Spočítejte tok pole $\vec{F} = (e^y, ye^x, x^2y)$ částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.*

Řešení:
Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \& \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientací plochy "nahoru." Máme tak

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS = \iint_U \left(e^y, ye^x, x^2y\right) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(-2xe^y - 2y^2e^x + x^2y\right) \, dx \, dy = \int_0^1 -e^y - 2y^2(e^1 - 1) + \frac{y}{3} \, dy = -(e-1) - \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{5}{3}e.$$

Příklad 10.4. *Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (3x, xy, 2xz)$ a krychli $M = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.*

Řešení:
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a

$$\iiint_M \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3+3x)\, dx\, dy\, dz = \left(\int_0^1 3+3x\, dx\right)\cdot\left(\int_0^1\int_0^1 1\, dy\, dz\right) = \frac{9}{2}.$$

Integrál přes okraj rozdělíme na jednotlivé stěny $(\partial M)_i$, $i = 1,\dots,6$ a pro vztah

$$I_i := \iint_{(\partial M)_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{U_i} \vec{F}(\Phi_i)\cdot \vec{n}_i\, dS$$

použijeme parametrizace Φ_i, kde $U_i = \langle 0,1\rangle^2$, a příslušné orientace $(\partial M)_i$ pomocí normovaných normálových vektorů $\vec{n}_i$:

$$\Phi_1(x,y) = (x,y,1),\quad \vec{n}_1 = (0,0,1),\quad I_1 = \int_0^1\int_0^1 (3x,xy,2x)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 2x\, dx\, dy = 1$$

$$\Phi_2(x,y) = (x,y,0),\quad \vec{n}_2 = (0,0,-1),\quad I_2 = \int_0^1\int_0^1 (3x,xy,0)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} dx\, dy = 0$$

$$\Phi_3(x,z) = (x,1,z),\quad \vec{n}_3 = (0,1,0),\quad I_3 = \int_0^1\int_0^1 (3x,x,2xz)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} dx\, dz = \int_0^1\int_0^1 x\, dx\, dz = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_4(x,z) = (x,0,z),\quad \vec{n}_4 = (0,-1,0),\quad I_4 = \int_0^1\int_0^1 (3x,0,2xz)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} dx\, dz = 0$$

$$\Phi_5(y,z) = (1,y,z),\quad \vec{n}_5 = (1,0,0),\quad I_5 = \int_0^1\int_0^1 (3,y,2z)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} dy\, dz = 3$$

$$\Phi_6(y,z) = (0,y,z),\quad \vec{n}_6 = (-1,0,0),\quad I_6 = \int_0^1\int_0^1 (0,0,0)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} dy\, dz = 0.$$

Tedy

$$\iint_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S} = I_1 + \cdots + I_6 = 1 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

Příklad 10.5. *Vypočtěte průtok kapaliny, která proteče oblastí $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le a$ (kde $a > 0$, $R > 0$ jsou parametry), je-li rychlost proudění $\vec{F} = (xz, yz, xy)$.*

Řešení:

Oblast M je válec o poloměru R a výšce a. Integrály v Gaussově větě udávají rozdíl toho, co do oblasti přiteče a co z oblasti odteče (např. pro konstantní proudění je přítok roven odtoku a integrály jsou nulové), ale neříkají nám kolik kapaliny se celkově v objemu vymění (např. při velkém konstantním proudění to bude více než při malém). Abychom toto zjistili, je potřeba v integrálu toku pole přes povrch vzít zvlášť kladnou část integrované funkce, tj. $\vec{F}\cdot\vec{n} > 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co odtéká), a zvlášť zápornou část, tj. $\vec{F}\cdot\vec{n} < 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co vtéká).

Nechť $\vec{n}$ představuje vnější normované normálové pole na okraji ∂M. Pak pro

$$\text{odtok} := \iint_{\partial M} \max\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}\}\, dS$$

$$\text{přítok} := \left|\iint_{\partial M} \min\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}\}\, dS\right|$$

máme podle Gaussovy věty

$$\text{odtok - přítok} = \iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV.$$

Výpočet toku přes ∂M rozdělíme na horní podstavu $(\partial M)_1$, dolní podstavu $(\partial M)_2$ a plášť $(\partial M)_3$. Pro horní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_1(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, a) \quad \text{pro} \quad U_1 = \langle 0, R\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_1 = (0,0,1).$$

Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}_1\}\ dS = \iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0, xy\}\ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} r^3 \sin\varphi\cos\varphi\ dS =$$

$$= \left(\int\limits_0^R r^3\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\ d\varphi\right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{-\cos 2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{4}.$$

Podobně pro dolní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_2(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0) \quad \text{pro} \quad U_2 = \langle 0, R\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_2 = (0,0,-1).$$

Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}_2\}\ dS = \iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0, -xy\}\ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle\times\langle \frac{\pi}{2},\pi\rangle} -r^3 \sin\varphi\cos\varphi\ dS =$$

$$= \left(\int\limits_0^R r^3\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2\varphi\ d\varphi\right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi} = \frac{R^4}{4}.$$

Konečně pro plášť použijeme parametrizaci

$$\Phi_3(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \quad \text{pro} \quad U_3 = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, a\rangle.$$

Pak je

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} = (0,0,1)$$

a vektorový součin

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$$

odpovídá vnější orientaci. Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_3} \max\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}\}\ dS = \iint\limits_{U_3} \max\left\{0, \vec{F}\big(\Phi_3(\varphi,z)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)\right\}\ dS =$$

$$= \iint\limits_{U_3} \max\left\{0, (zR\cos\varphi, zR\sin\varphi, R^2\sin\varphi\cos\varphi) \cdot \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\ dS = \iint\limits_{U_3} \max\{0, zR^2\}\ dS =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} zR^2\ d\varphi\ dz = \left(\int\limits_0^a zR^2\ dz\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) = \pi R^2 a^2.$$

Celkově tedy máme

$$\text{odtok} = \frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2.$$

Přítok pak spočítáme pomocí Gaussovy věty:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2z$$

$$\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_M 2z\ dV = \left[\begin{smallmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ (r,\varphi,z)\in\langle 0,R\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,a\rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^R 2zr\ dr\ d\varphi\ dz = \left(\int_0^a z\ dz \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^R 2r\ dr \right) = \pi R^2 a^2.$$

Tedy

$$\text{přítok} = \text{odtok} - \pi R^2 a^2 = \frac{R^4}{2}.$$

Závěr: Do oblasti přiteče (za jednotku času) $\frac{R^4}{2}$ objemových jednotek kapaliny a odteče $\frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny. Oblast tak za jednotku času ztratí $\pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny.

Příklad 10.6. *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ *a* M *je sféra* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ *s vnější orientací a* $R > 0$ *je parametr.*

Řešení:
Tok vektorového pole $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS\ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Integrál spočítáme podle definice (ale lze použít i Gaussovu větu, protože jde o uzavřenou plochu). Plochu M zparametrizujeme přirozeně pomocí posunutých sférických souřadnic:

$$\Phi : \quad \begin{aligned} x - a &= R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y - b &= R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z - c &= R\cos\vartheta \end{aligned}$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big(-R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0 \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big(R\cos\vartheta\cos\varphi,\ R\cos\vartheta\sin\varphi,\ -R\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -R\sin\vartheta \cdot \big(R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta\big) = -R\sin\vartheta \cdot \big(x-a,\ y-b,\ z-c\big).$$

Vektor $(x-a,\ y-b,\ z-c)$ míří směrem od bodu (a,b,c) k bodu $(x,y,z)\in M$. Takže vektorový součin má opačný směr, než zadaná vnější orientace sféry M. Proto místo $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$ vezmeme v integrálu $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Pro skalární součin vektoru v integrálu tedy máme

$$(\vec{F}\circ\Phi)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=R\sin\vartheta\cdot\Big((a+R\sin\vartheta\cos\varphi)^2,\ (b+R\sin\vartheta\sin\varphi)^2,\ (c+R\cos\vartheta)^2\Big)\cdot\begin{pmatrix}R\sin\vartheta\cos\varphi\\ R\sin\vartheta\sin\varphi\\ R\cos\vartheta\end{pmatrix}=$$

$$=R^2\sin\vartheta\cdot\Big[2R\big(a\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+c\cos^2\vartheta\big)+c^2\cos\vartheta+R^2\cos^3\vartheta+\cdots\Big]$$

kde tečky znamenají výrazy, ze kterých se dá vytknout buď pouze "$\sin\varphi$" nebo pouze "$\cos\varphi$" a to v liché mocnině. V integrálu pak tyto výrazy dají nulu. Takže už můžeme psát

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}=$$

$$=\iint_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\vartheta\le\pi}} R^2\sin\vartheta\cdot\Big[2R\big(a\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+c\cos^2\vartheta\big)+c^2\cos\vartheta+R^2\cos^3\vartheta\Big]\,d\varphi\,d\vartheta=$$

$$=\int_0^\pi R^2\sin\vartheta\cdot\Big[2R\big(\pi a\sin^2\vartheta+\pi b\sin^2\vartheta+2\pi c\cos^2\vartheta\big)+2\pi c^2\cos\vartheta+2\pi R^2\cos^3\vartheta\Big]\,d\vartheta=$$

$$=2R^3\pi(a+b)\cdot\left(\int_0^\pi\sin^3\vartheta\,d\vartheta\right)+4R^3\pi c\cdot\left(\int_0^\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right)+$$

$$+R^2\pi c^2\cdot\left(\int_0^\pi\sin(2\vartheta)\,d\vartheta\right)+2R^4\pi\cdot\left(\int_0^\pi\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right)=$$

$$=2R^3\pi(a+b)\cdot\left(\int_0^\pi(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\right)+4R^3\pi c\cdot\Big[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}+2R^4\pi\cdot\Big[-\frac{\cos^4\vartheta}{4}\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}=$$

$$=\quad 2R^3\pi(a+b)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)+4R^3\pi c\cdot\frac{2}{3}\quad=\quad\frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)\ .$$

Příklad 10.7. *Pomocí Stokesovy věty spočítejte*

$$\int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2)$ *a* M *je řez kostky* $J=\langle 0,a\rangle^3$ *rovinou* $x+y+z=\frac{3a}{2}$. *Orientace je určena pořadím bodů* $\left(\frac{a}{2},a,0\right)$, $\left(a,0,\frac{a}{2}\right)$ *a* $\left(a,\frac{a}{2},0\right)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2,z^2,x^2)$ *a* M *je trojúhelník* $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ *a* $(0,0,a)$. *Orientace je daná uvedeným pořadím vrcholů.*

Řešení:
Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}.$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

(i) Množina M je pravidelný šestiúhelník s hranou o délce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Dále máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \big(-2y-2z, -2x-2z, -2x-2y\big) \ .$$

Podle zadání je normálové vektorové pole orientované plochy M určené (normovaným) vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ (směru vektoru také odpovídá zadání). K výpočtu využijeme

- definici toku pole plochou,
- toho, že plocha splňuje rovnici $x+y+z=\frac{3a}{2}$ a
- toho, že známe velikost plochy pravidelného šestiúhelníku:

$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\big)\ dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\iint_M x+y+z\ dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\iint_M \frac{3a}{2}\ dS =$$

$$= -2\sqrt{3}a\iint_M 1\ dS = -2\sqrt{3}a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3 \ .$$

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Množina M je rovnostranný trojúhelník s hranou o délce $\sqrt{2}a$ a leží v rovině $x+y+z=a$. Dále máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \big(-2z, -2x, -2y\big) \ .$$

Normálové vektorové pole orientované plochy M je opět $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$. Výpočet provedeme podobně:

$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\big)\ dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_M x+y+z\ dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_M a\ dS =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = -a^3 \ .$$

Příklad 10.8. *Pomocí Stokesovy věty spočítejte*

$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ *a* M *je polosféra* $x^2+y^2+z^2=1$ *a* $z\geq 0$ *s orientací směrem vzhůru.*

Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2+y^2+z^2=1 \ \ \& \ \ z\geq 0$$

a

$$\partial M: \ \ x^2+y^2=1 \quad \& \quad z=0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0\leq\alpha\leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}(0,\cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha})\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}d\alpha = \int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\ d\alpha = \pi.$$

Příklad 10.9. *Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole* $\vec{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$ *povrchem krychle* $M = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:
Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj ∂M oblasti M v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast M. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Pro použití Gaussovy věty předpokládáme vnější orientaci povrchu krychle ∂M. Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 9x^2z^2$$

a

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 9x^2z^2\ dx\ dy\ dz = \left(\int_0^1 9x^2\ dx\right)\cdot\left(\int_0^1 1\ dy\right)\cdot\left(\int_0^1 z^2\ dz\right) = 1.$$

11 Fourierovy řady

Příklad 11.1. *Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce* $f(t) = t^2$ *na* $[-1, 1)$.

Řešení:
Definice: Nechť f je T-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její **Fourierovu řadu** definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence,

$$a_k = \tfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

a

$$b_k = \tfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Toto pak zapisujeme jako

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big].$$

Tvrzení: (i) Pokud f je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$.

(ii) Pokud f je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$.

Pro naši funkci f máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Dostáváme tak

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int_{-1}^1 t^2\cos(k\pi t)\,dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2k^2} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2k^2},$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int_{-1}^1 t^2\sin(k\pi t)\,dt = 0.$$

Tudíž máme

$$f \sim \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t).$$

Jordanovo kritérium: Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T. Předpokládejme, že její derivace f' je po částech spojitá na I.

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big] \Big) = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je f navíc spojitá $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$ konverguje k f *stejnoměrně.*

Pro náš příklad tudíž pro $t \in [-1, 1]$ dostáváme, že $t^2 = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t)$.

Speciálně pro $t = 0$ pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro $t = 1$ pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Příklad 11.2. *Mějme funkci*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [0, 1), \\ 0 & , \ t \in [1, 2). \end{cases}$$

Určete

(i) Fourierovu řadu

(ii) sinovou Fourierovu řadu

(iii) kosinovou Fourierovu řadu

příslušného periodického rozšíření funkce f.

Řešení:

Definice: Nechť f je funkce spojitá na $[0, L)$. Její *sinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího lichého periodického rozšíření a její *kosinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího sudého periodického rozšíření.

Tvrzení: Sinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $a_k = 0$, $b_k = \frac{2}{L} \int\limits_0^L f(t) \sin(k\omega t)\, dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Kosinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $b_k = 0$, $a_k = \frac{2}{L} \int\limits_0^L f(t) \cos(k\omega t)\, dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Poznámka: Součet sinové Fourierovy řady je $T = 2L$-periodické rozšíření funkce f do liché funkce. Součet kosinové Fourierovy řady je $T = 2L$-periodické rozšíření funkce f do sudé funkce. Oba součty je potřeba ještě upravit pomocí Jordanova kritéria.

V našem případě je

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [0, 1) \\ 0 & , \ t \in [1, 2) \end{cases}$$

(i) Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \pi$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\, dt = \left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 \sin(k\pi t)\, dt = \left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{k\pi}\Big[1-\cos(k\pi)\Big] =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\Big[1-(-1)^k\Big] = \begin{cases} 0 & , \ k \text{ sudé}, \\ \frac{2}{(2k+1)\pi} & , \ k \text{ liché}. \end{cases}$$

Takže

$$f \sim \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]\sin(k\pi t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi t).$$

(ii) Pro sinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $a_k = 0$.

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\, dt = \left[-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Takže sinová Fourierova řada funkce f je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

(iii) Pro kosinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $b_k = 0$,

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \tfrac{2}{2}\int_0^1 \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\, dt = \left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Takže kosinová Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

Speciálně platí $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = (-1)^{k+1}\frac{2}{(2k+1)\pi}$, takže řadu můžeme psát jako

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{(2k+1)\pi}\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}t\right).$$

Příklad 11.3. *Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = \sin t$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$. Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.*

Řešení:
Perioda naší funkce je $T = \frac{\pi}{2}$, takže $\omega = 4$. Funkce f není ani lichá ani sudá. Spočítáme koeficienty Fourierovy řady funkce f:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \frac{4}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos(4kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(4k+1)t - \sin(4k-1)t\big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\cos(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-4}{\pi(16k^2-1)}.$$

$$b_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin(4kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-\cos(4k+1)t + \cos(4k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\sin(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\cos(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-16}{\pi(16k^2-1)}.$$

Takže dostáváme

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(16k^2-1)}(\cos 4kt + 4k \sin 4kt),\ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření naší funkce f není spojité v bodech $t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech Fourierova řada konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = \frac{1}{2}$. Ve všech ostatních bodech konverguje řada k periodickému rozšíření funkce f podle Jordanova kritéria.

Příklad 11.4. *Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce* $f(t) = |t|$, $-1 \le t < 1$.

Řešení:
Perioda rozšíření bude $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{2}$. Rozšíření funkce f je sudé, takže $b_k = 0$. Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2}\int_0^1 t\, dt = 2\left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} dt = 1;$$

$$a_k = 2\int_0^1 t \cos k\pi t\, dt = 2\left[t\frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1).$$

Protože pro sudé k je $\cos k\pi = 1$, máme $a_k = 0$. Podobně, pro liché $k = 2n+1$ je $\cos(2n+1)\pi = -1$, takže $a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi^2(2n+1)^2}$.

Protože periodické rozšíření funkce f je spojité, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Proto můžeme napsat dokonce

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi t,\ -1 \le t < 1.$$

Příklad 11.5. *Určete sinovou Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce* $f(t) = \sin t$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$. *Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.*

Řešení:
K určení sinové Fourierovy řady funkce definované na intervalu $[0, L)$, musíme začít s lichým rozšířením funkce f na interval $[-L, L)$.

Budeme tak mít $L = \frac{\pi}{2}$ a liché rozšíření naší funkce na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak bude opět funkce sinus. Proto sinová Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ je totéž jako Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}$. Z lichosti plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\cos(2k+1)t + \cos(2k-1)t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Liché periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje sinová Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje sinová Fourierova řada k lichému periodickému rozšíření funkce f.

Příklad 11.6. *Mějme funkci*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,\ t \in [0,1), \\ -2 & ,\ t \in [1,2). \end{cases}$$

Určete Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce f.

Řešení:
Pro Fourierovu řadu máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Určíme koeficienty:

$$a_0 = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -2\,dt\Big) = -1;$$

$$a_k = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 \cos k\pi t\,dt - 2\int_1^2 \cos k\pi t\,dt\Big) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{2}\Big(\int_0^1 \sin k\pi t\,dt - 2\int_1^2 \sin k\pi t\,dt\Big) = \frac{3}{k\pi}\Big[1-(-1)^k\Big] = \begin{cases} 0 & ,\ k \text{ sudé}, \\ \frac{6}{k\pi} & ,\ k \text{ liché}. \end{cases}$$

Proto pro lichá čísla $k = 2n+1$ dostaneme tvar

$$f \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\pi}\Big[1-(-1)^k\Big] \sin k\pi t = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Literatura

References

[1] J. Stewart: *Calculus*, Brooks-Cole, 1991.

[2] G. Thomas, R. Finney: *Calculus and analytic geometry - Part* 2, Addison-Wesley, 1996.

[3] J. Hamhalter, J. Tišer: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, ČVUT, 2005.

[4] J. Hamhalter, J. Tišer: *Integrální počet funkcí více proměnných*, ČVUT, 2005.