MA 9-21

1. Do elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ vepište obdélník se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami, který má největší obvod. Jaká je hodnota obvodu?

2. Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f\,dy\,dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho\,d\varphi$.

3. Vypočtěte objem množiny P omezené plochami:

$$z=(x^2+y^2)^2-1 \quad \text{a} \quad z=4-4(x^2+y^2).$$

4. Mějme pole $\vec{F}=(\sin y+2\alpha x, x\cos y, 2z)$. Zjistěte, jaké hodnoty $\alpha\in\mathbb{R}$ pole **není** potenciální. Pro zbylé hodnoty α najděte jeho potenciál.

5. Vypočtěte Fourierovu řadu 2π-periodické funkce f, že $f(x)=\pi-|x|$ pro $x\in\langle-\pi,\pi)$ a vyšetřete, kde řada reprezentuje funkci f.

Řešení.

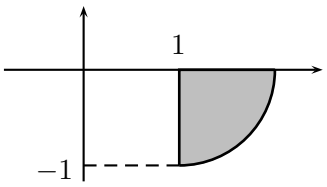
1. Má-li obdélník pravý horní vrchol v bodě (x,y), je jeho obvod $4x+4y$. Lagrangeova funkce je $L=4x+4y-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)$. Stacionární body zjistíme ze soustavy:

$$4=\lambda\frac{2x}{a^2}, \quad 4=\lambda\frac{2y}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Odtud máme $x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a obvod $=4\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^0\int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} f\,dx\,dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/4}^0\int_{1/\cos\varphi}^{2\cos\varphi} f\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$



3. K výpočtu jsou vhodné cylindrické souřadnice. V nich mají omezující plochy tvar $z = \varrho^4 - 1$ a $z = 4 - 4\varrho^2$. Průmět množiny P na rovinu xy je kruh s poloměrem $\varrho = 1$, což získáme řešením rovnice $\varrho^4 - 1 = 4 - 4\varrho^2$. Objem je

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\varrho^4-1}^{4-4\varrho^2} \varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5\varrho - 4\varrho^3 - \varrho^5) d\varrho \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

4. Pole je potenciální pro všechny hodnoty α s potenciálem $f = x \sin y + \alpha x^2 + z^2 + C$.

5. $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x,$
řada reprezentuje funkci všude.