Komplexní analýza

Komplexní funkce komplexní proměnné

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Reálná a imaginární část funkce

- **Komplexní funkce komplexní proměnné** je zobrazení $f\colon D \to \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$.
- Protože $f(z) \in \mathbb{C}$ pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$, můžeme psát

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde u, v jsou reálné funkce dvou reálných proměnných.

Definice

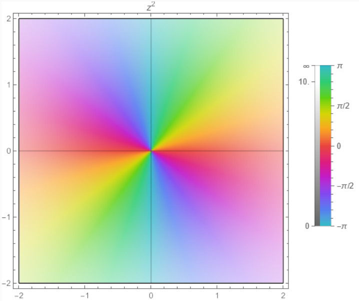
- Reálnou funkci u jako výše nazýváme **reálná část funkce** f. Píšeme $\operatorname{Re} f = u$.
- Reálnou funkci v jako výše nazýváme **imaginární část funkce** f. Píšeme $\operatorname{Im} f = v$.

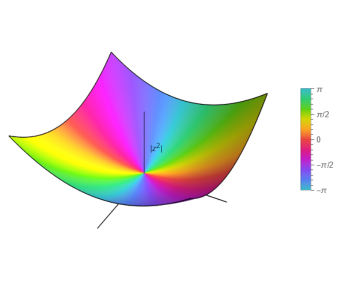
Upozornění

Reálná i imaginárná část funkce jsou reálné funkce.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^2$. Reálná část funkce f je $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část je $v(x, y) = 2xy$.





Okolí bodu, otevřené množiny a oblasti

„Blízká komplexní čísla jsou blízké body v rovinně.“

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$.

- Množinu $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **okolí bodu** z_0 s poloměrem ε.
- Množinu $P(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **prstencové okolí bodu** z_0 s poloměrem ε.

Poučení

$U(z_0, \varepsilon)$ je otevřený kruh se středem v z_0 a poloměru ε.
$P(z_0, \varepsilon)$ je $U(z_0, \varepsilon)$ bez svého středu.

Úmluva

Stručněji budeme psát jen $U(z_0)$ a $P(z_0)$, pokud nás přesný poloměr (prstencového) okolí nezajímá.

Definice

Množina $M \subseteq \mathbb{C}$ je:

- **otevřená**, jestliže pro každé $z \in M$ existuje $U(z)$ tak, že $U(z) \subseteq M$;
- **oblast**, jestliže je otevřená a každé dva body z množiny Ω lze spojit lomenou čarou ležící v Ω.

Příklad

1. $\mathbb{C}$, $\emptyset$, $U(z)$ a $P(z)$ (pro každé $z \in \mathbb{C}$) jsou oblasti.
2. $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ je oblast.
3. Je-li $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast/otevřená, pak také $G \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ je oblast/otevřená pro každé $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $U(i, 1) \cup U(-i, 1)$ je otevřená, ale není to oblast.

- Další pojmy jako hranice, uzávěr, uzavřené množiny… a vztahy mezi nimi jsou stejné jako v $\mathbb{R}^2$.

Limita

I pojem limity a spojitosti je jako u funkcí dvou reálných proměnných.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na $P(z_0)$.
Řekneme, že f **má limitu** $L \in \mathbb{C}$ v bodě z_0, jestliže ke každému okolí $U(L)$ existuje prstencové okolí $P(z_0)$ takové, že pro každé $z \in P(z_0)$ platí $f(z) \in U(L)$. Píšeme $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$.

- Limita je jednoznačná, pokud existuje.
- Mějme $z_0 = x_0 + iy_0$ a $L = A + Bi$. Platí $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ právě tehdy, když

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \quad \text{a} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B,$$

  kde $u = \mathrm{Re} f$ a $v = \mathrm{Im} f$.

Spojitost

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na $U(z_0)$.
Řekneme, že f je **spojitá v bodě** z_0, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Řekneme, že f je **spojitá na množině** $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M.

- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je spojitá právě tehdy, když obě $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojité (jako reálné funkce reálných proměnných).

Příklad

Konstantní funkce, polynomy, $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $\bar{z}$ a $|z|$ jsou spojité funkce na $\mathbb{C}$.

Dosud v zásadě nic moc nového

Otázka

A proč to tedy děláme, když je všechno prakticky stejné jako u funkcí dvou reálných proměnných?

Upozornění

U pojmu derivace začínají zásadní odlišnosti od reálné analýzy.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je definovaná na $U(z_0)$. Pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací** funkce f v bodě z_0. Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

Existuje-li $f'(z_0)$, pak říkáme, že f je **diferencovatelná** v bodě z_0.

- Diferenční podíl má smysl, protože komplexní čísla můžeme na rozdíl od prvků $\mathbb{R}^2$ dělit.

- Jelikož aritmetika limit je stejná jako v reálném oboru, platí i stejná aritmetika derivací.
- Jsou-li f a g diferencovatelné v bodě $z \in \mathbb{C}$, pak
  1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
  2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
  3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, je-li navíc $g(z) \neq 0$.
- Je-li g diferencovatelná v bodě $z \in \mathbb{C}$ a f diferencovatelná v bodě $g(z)$, pak
  4. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

- Diferencovatelnost implikuje spojitost.

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Věta (Cauchyovy-Riemannovy podmínky)

Nechť $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Nechť u a v mají spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0). Potom f je diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ právě tehdy, když jsou splněny tzv. **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

V takovém případě navíc platí, že

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Příklad

1. Funkce $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale není diferencovatelná v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.
2. Funkce $f(z) = |z|^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale je diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$, kde platí $f'(0) = 0$.

Upozornění

I na první pohled „pěkné a rozumné" funkce často nejsou v komplexní analýze diferencovatelné.

Definice

Řekneme, že funkce f je **holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$**, jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny Ω.

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celistvá**.

Příklad

1. Polynom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, kde $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, je celistvá funkce.
2. Racionální funkce $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \not\equiv 0$, je holomorfní funkce na svém definičním oboru $D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.
3. Naopak funkce $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ či $|z|^2$ nejsou holomorfní na žádné otevřené množině podmnožině $\mathbb{C}$.

Harmonické funkce

Holomorfní funkce úzce souvisí s tzv. harmonickými funkcemi, které možná znáte z fyziky (např. elektrostatiky).

Definice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Řekneme, že reálná funkce Φ definovaná na Ω je **harmonická** na Ω, jestliže Φ má spojité druhé parciální derivace na Ω a $\Delta\Phi(x, y) = 0$ pro každé $(x, y) \in \Omega$.

Symbol Δ je Laplaceův operátor, tj. $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$.

Příklad

Uvažme celistvou funkci $f(z) = z^2$. Její reálná část $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část $v(x, y) = 2xy$ jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$.

Upozornění

Součet druhých nesmíšených parciálních derivací musí být konstantně nulový v každém bodě Ω.

Předchozí příklad nebyl náhoda.

Tvrzení

Nechť f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom reálná a imaginární část funkce f jsou harmonické funkce na Ω.

Příklad

Je dána funkce $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Funkce u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.
- Všechny funkce v na $\mathbb{R}^2$ takové, že $f = u + iv$ je celistvá, jsou tvaru $v(x, y) = 2xy + y + K$, kde K je libovolná reálná konstanta.

- Funkce v jako výše se nazývá *harmonicky sdružená funkce* k u.
- Obecně nemusí existovat k zadané harmonické funkci harmonicky sdružená funkce, ale na tzv. jednoduše souvislých oblastech (bude později) vždy existuje.