MA 5-22

1. Zjistěte rozměry kvádru vepsaného do elipsoidu $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}\leq 1$, který má maximální objem. Hrany kvádru jsou rovnoběžné se souřadnými osami.

2. Přepište následující integrál

$$\int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx\,dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho\,d\varphi$.

3. Vypočtěte objem průniku kužele $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\geq\sqrt{x^2+y^2}\}$ a jednotkové koule se středem v počátku.

4. Zjistěte, pro kterou funkci $q(y)$ je pole

$$\vec{F}=(x^2,yz^2,zq(y))$$

potenciální a nalezněte jeho potenciál.

5. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce definované

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in(-\pi,0\rangle,\\ 0 & x\in(0,\pi\rangle. \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech se řada rovná funkci f.

Řešení.

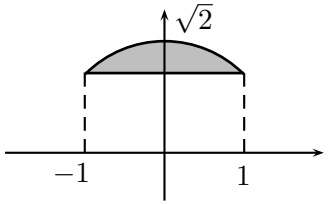
1. U hranolu si označíme x,y,z souřadnice vrcholu, který leží v 1. oktantu (tj. $x,y,z>0$). Pak délky hran jsou $2x,2y,2z$ a objem $8xyz$. Protože vrchol leží na povrchu elipsoidu, musí splňovat vazebnou podmínku $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$. Lagrangeova funkce je tak

$$L=8xyz+\lambda\Big(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1\Big).$$

Stacionární bod funkce L je $\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$. Rozměry kvádru pak $\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}$ a $\frac{8}{\sqrt{3}}$, objem $V=\frac{64}{3\sqrt{3}}$.

2. Opačné pořadí je $\int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dx\,dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1/\sin\varphi}^{\sqrt{2}} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$



3. Protože jde o část jednotkové koule, je výhodné použít sférické souřadnice:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\theta\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

4. Podmínka $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ nám dá, že $q'(y)=2y$, tj. $q(y)=y^2$. Potenciál je v tom případě $f=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2z^2+K$.

5. Fourierova řada má tvar

$$-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

Zadané funkci se rovná ve všech bodech kromě lichých násobků π, tj. $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, v bodech $x=(2k+1)\pi$ má řada hodnotu $-\pi/2$.