Elektrická měření

2. PŘESNOST MĚŘENÍ

2024/2025

Jakub Svatoš

2. PŘESNOST MĚŘENÍ

- **Přesnost měření**
- **Nejistota měření** – nejistota *typu A* a *typu B*, *kombinovaná nejistota*, nejistoty měření analogovými a číslicovými měřicími přístroji
- **Nejistota při nepřímých měřeních**
- **Chyba metody a její korekce**

Přesnost měření

Výsledek měření není úplný, pokud neobsahuje údaj o přesnosti.

Klasický způsob vyjádření přesnosti měření - chyba měření:

$\Delta_{(X)} = X_{(M)} - X_{(S)}$ (absolutní) $\delta_{(X)} = \Delta_{(X)} / X_{(M)}$ (relativní, vztaženo k měřené)

$X_{(M)}$ - naměřená hodnota
$X_{(S)}$ - pravá (správná) hodnota - problém - není známa → tzv. konvenčně pravá hodnota.

Nejistota měření

- Nejrůznější vlivy vyskytující se spolu s měřenou veličinou se projeví odchylkou mezi naměřenou a skutečnou hodnotou měřené veličiny
- Pokud jsou tyto vlivy systematické a jejich vliv je známý, korigují se (např. chyby metody)
- Skutečná hodnota leží s jistou pravděpodobností v určitém „tolerančním pásmu“ okolo výsledku měření - rozsah tohoto pásma charakterizuje nejistota měření.

1993 - Mezinárodní organizace pro normalizaci (ISO) Guide to the Expression of Uncertainty of Measurements (definice základních pojmů a vztahů a příklady jejich aplikace).

Definice:

- *měřená hodnota* jako střední prvek souboru, který reprezentuje měřenou veličinu
- *nejistota měření* jako parametr přiřazený k výsledku měření, charakterizující rozptýlení hodnot, které lze odůvodněně pokládat za hodnotu veličiny, jež je objektem měření.

ČSN EN 60 359 Elektrická a elektronická měřicí zařízení – Vyjadřování vlastností.

Standardní nejistota = standardní (směrodatná) odchylka veličiny, pro niž je nejistota udávána (označuje se symbolem ***u*** z angl. ***uncertainty***).

Nejistota měření obecně obsahuje řadu složek:

1) složky, které mohou být vyhodnoceny ***ze statistického rozložení výsledků měření*** a mohou být charakterizovány ***experimentální standardní odchylkou*** (odpovídá v podstatě ***náhodným chybám*** dle klasického přístupu)
standardní nejistoty typu (kategorie) A (označení u_A)

- jsou stanoveny z výsledků opakovaných měření statistickou analýzou série naměřených hodnot,
- jejich příčiny se považují za neznámé a jejich hodnota klesá s počtem měření;

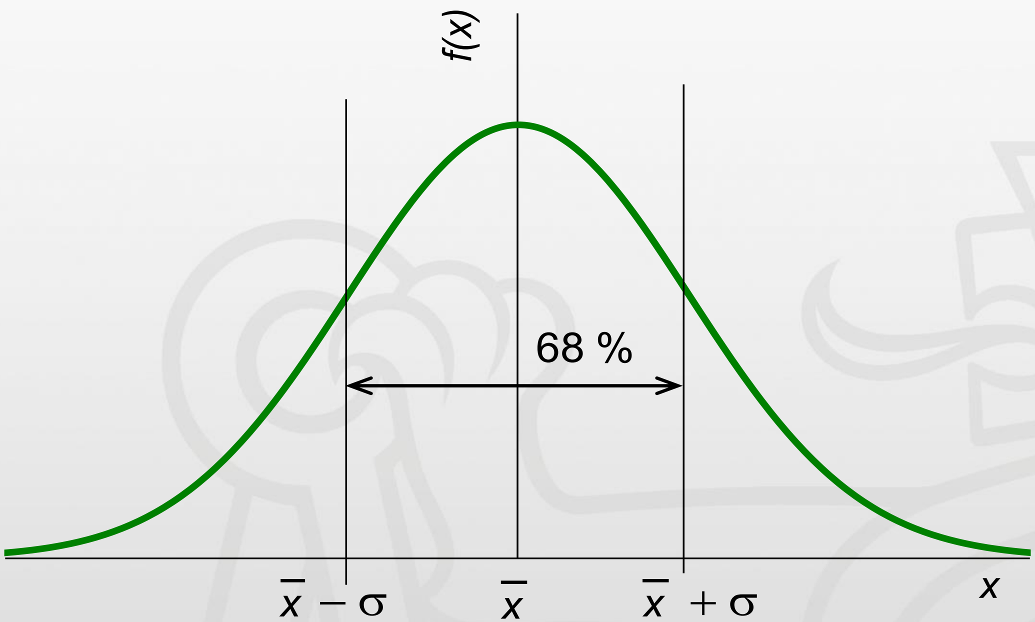
2) složky, které se vyhodnocují z jejich ***předpokládaného*** *pravděpodobnostního rozložení* např. nejistoty údajů měřicích přístrojů, nejistoty hodnot pasivních prvků apod.
(odpovídá v podstatě ***systematickým chybám*** dle klasického přístupu s tím, že chyby, které lze korigovat, jsou korigovány)
standardní nejistoty typu (kategorie) B (označení u_B)

- jsou získány jinak než statistickým zpracováním výsledků opakovaných měření
- jsou vyhodnoceny pro jednotlivé zdroje nejistoty identifikované pro konkrétní měření a jejich hodnoty nezávisí na počtu opakování měření
- pocházejí od různých zdrojů a jejich společné působení vyjadřuje *výsledná standardní nejistota typu B*.

Příklady rozdělení používaných při analýze nejistot

Standardní nejistota ~ **směrodatná odchylka** veličiny *x*

1) představuje u veličiny mající *normální rozdělení* polovinu šířky intervalu, v jehož středu leží výsledek měření $\bar{x}$ (průměrná hodnota opakovaných měření) veličiny *x* a ve kterém s pravděpodobností přibližně 68 % leží skutečná hodnota veličiny *x*

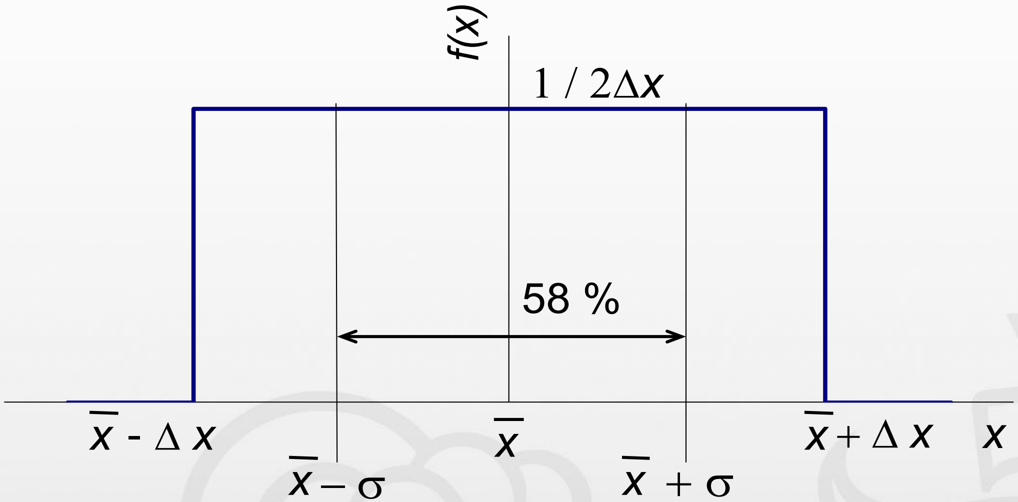


Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

~ obvyklý výsledek analýzy standardní nejistoty typu A

2) u veličiny mající *rovnoměrné rozdělení* v intervalu o šířce $2\Delta x$ v jehož středu leží výsledek měření $\bar{x}$ veličiny x (tj. všechny hodnoty této veličiny leží v intervalu $\pm\,\Delta x$ okolo výsledku měření) je rovna $\Delta x / \sqrt{3}$ (pravděpodobnost, že v intervalu $x \pm \Delta x / \sqrt{3}$ leží skutečná hodnota veličiny x je 58%)



$$D = \frac{[\Delta x - (-\Delta x)]^2}{12} = \frac{4\Delta x^2}{12} = \frac{\Delta x^2}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

~ častý předpoklad pro složky standardní nejistoty typu B

3) vztah mezi maximální odchylkou od střední hodnoty (polovinou šířky intervalu, ve kterém mohou ležet hodnoty veličiny) a standardní odchylkou lze určit i pro jiné než rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti

Kombinovaná standardní nejistota u_C
Sloučení standardní nejistoty typu A (u_A) s výslednou standardní nejistotou typu B (u_B)

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$$

Rozšířená nejistota

Pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v intervalu udaném standardní nejistotou je nízká (68 % pro normální rozložení - časté u nejistoty typu A, 58 % pro rovnoměrné rozdělení - časté u nejistot typu B)

Rozšířená nejistota označená $U(x)$ je definována jako součin kombinované standardní nejistoty u_C a koeficientu rozšíření k_r:

$$U(x) = k_r\, u_C(x)$$

kde U je rozšířená nejistota, k_r koeficient rozšíření, u_C kombinovaná standardní nejistota, x měřená veličina.

- s rozšířenou nejistotou **je nutno vždy uvést** číselnou hodnotu koeficientu rozšíření k_r
- nejčastěji se používá $\boldsymbol{k_r = 2}$, v některých případech může hodnota k_r ležet i v intervalu <2, 3>
- pro $\boldsymbol{k_r = 2}$ je pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v intervalu udaném rozšířenou nejistotou **95 %** pro normální rozložení (pro jiná běžně používaná rozložení je ještě vyšší)

Vyhodnocení standardních nejistot typu A

- Odpovídá výpočtu náhodných chyb
- Metoda vychází ze statistické analýzy série opakovaných měření *n* nezávislých stejně přesných pozorování (*n* > 10).
- Odhad výsledné hodnoty *x* měřené veličiny *X* je reprezentován hodnotou výběrového průměru (aritmetického průměru).
- Nejistota příslušná k odhadu *x* se určí jako směrodatná odchylka výběrového průměru:

$$u_A(x) = \hat{\sigma}(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$, kde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\sigma}(\bar{X})$ je odhad směrodatné odchylky *aritmetického průměru*

n počet prvků výběrového souboru

Tato nejistota je způsobena kolísáním naměřených údajů. V případě malého počtu měření (*n* < 10) je takto určená hodnota málo spolehlivá.

Vyhodnocení standardních nejistot typu B

Odhad na základě dostupných informací a zkušeností, obvykle z:

- údaje výrobce (např. třída přesnosti elektromechanického měřicího přístroje dvojice parametrů charakterizujících přesnost číslicového přístroje, tolerance u pasivních součástek),
- údaje získané při kalibraci a z certifikátů,
- nejistoty referenčních údajů v příručkách.

Přístroj používáme za stanovených pracovních podmínek – ovlivňující veličiny nabývají hodnot v rozsahu definovaném výrobcem

(tj. provozní nejistota údaje přístroje se určí z parametrů udaných výrobcem)

a) ručkové přístroje

Klasicky definovaná chyba přístroje Δ_p:

určuje maximální možnou odchylku naměřené hodnoty od hodnoty skutečné je definována třídou přesnosti *TP*:

$$\Delta_P = \frac{TP}{100} M$$

kde *M* je hodnota měřicího rozsahu

Určení standardní nejistoty údaje:

- interval, ve kterém hodnota měřené veličiny s velkou pravděpodobností leží, je roven < $-\Delta_p$, $+ \Delta_p$ >
- předpokládáme, že se jedná o **rovnoměrné rozložení**
- nejistotu údaje přístroje vypočteme ze vztahu

$$u_{\mathrm{B}} = \sigma = \frac{\Delta_{\mathrm{P}}}{\sqrt{3}} = \frac{TP/100}{\sqrt{3}} M$$

Příklad výpočtu nejistoty měření elektromechanickým přístrojem

Elektromagnetický voltmetr; třída přesnosti *TP* = 0,5; rozsah přístroje *M* = 130 V.

Ovlivňující veličiny (teplota, mg. pole apod.) jsou v rozsahu hodnot definovaných výrobcem

Přístroj je používán za stanovených pracovních podmínek → jejich vliv nebude uvažován.

U_X = 71,1 V

(údaj přístroje se při opakovaných měřeních neměnil → nejistoty typu A nemusíme uvažovat)

Určení standardní nejistoty typu B:

$$u_{\mathrm{B}} = \frac{TP/100}{\sqrt{3}} M = \frac{0{,}5/100}{\sqrt{3}} 130 = 0{,}375\ (\mathrm{V})$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření k_r = 2:

U_x = 71,1 V ± 0,75 V; k_r = 2

Výsledek včetně rozšířené nejistoty vyjádřené v relativním tvaru:

U_x = 71,1 V ± 0,75/71,1*100 % = 71,1 V ± 1,1 %; k_r = 2

b) číslicové přístroje

Klasicky definovaná chyba přístroje Δ_p :

- určuje maximální možnou odchylku naměřené hodnoty od hodnoty skutečné
- je definována

a) chybou z odečtené hodnoty δ_1 a chybou z rozsahu δ_2; chybu údaje *X* určíme ze vztahu

$$\Delta_X = \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M$$

, kde *M* je použitý měřicí rozsah

b) chybou z odečtené hodnoty δ_1 a počtem kvantizačních kroků $\pm N$; chybu údaje X určíme ze vztahu

$$\Delta_X = \frac{\delta_1}{100} X + N R$$

, kde *R* je rozlišení přístroje, tj. hodnota měřené veličiny odpovídající kvantizačnímu kroku,

Určení standardní nejistoty údaje:

- interval, ve kterém hodnota měřené veličiny s velkou pravděpodobností leží, je roven $< -\Delta_p, + \Delta_p >$
- předpokládáme, že se jedná o rovnoměrné rozložení.
- nejistotu údaje přístroje vypočteme ze vztahu

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_X}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M}{\sqrt{3}}$$

popř.

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_X}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + N\ R}{\sqrt{3}}$$

Příklad výpočtu nejistoty měření číslicovým multimetrem

Měření proudu: použitý rozsah M = 200 mA; ± 0,1 % z odečtené hodnoty ± 0,05 % z rozsahu.

Ovlivňující veličiny (teplota, mg. pole apod.) jsou v rozsahu hodnot definovaných výrobcem Přístroj je používán za stanovených pracovních podmínek → jejich vliv nebude uvažován.

I_X = 60,0 mA (údaj přístroje se při opakovaných měřeních neměnil → nejistoty typu A nemusíme uvažovat)

Určení standardní nejistoty typu B:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0,1}{100} 60,0 + \frac{0,05}{100} 200}{\sqrt{3}} = \frac{0,06 + 0,1}{\sqrt{3}} = 0,09\ (\mathrm{mA})$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření k_r = 2:

I_x = 60,0 mA ± 0,18 mA; k_r = 2

Výsledek včetně rozšířené nejistoty vyjádřené v relativním tvaru:

I_x = 60,0 mA ± 0,3 %; k_r = 2

Příklad výpočtu nejistoty měření číslicovým multimetrem

Ovlivňující veličina (teplota) je v rozsahu hodnot definovaných výrobcem.

Použitý rozsah M = 200 mA;   ± 0,1 % z odečtené hodnoty ± 2 digity;   4-místný display

I_X = 60 mA   (údaj přístroje se při opakovaných měřeních neměnil -> pouze nejistoty typu B)

Určení standardní nejistoty typu B:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + N\,R}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0,1}{100}\,60,0 + 2\,\frac{200}{2000}}{\sqrt{3}} = \frac{0,06 + 0,2}{\sqrt{3}} = 0,15\,(\text{mA})$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření k_r = 2:

I_x = 60,0 mA ± 0,30 mA; k_r = 2   popř. I_x = 60,0 mA ± 0,5 %; k_r = 2

Příklad výpočtu nejistoty měření přesným číslicovým voltmetrem

Měření napětí: použitý rozsah M = 10 V; ± 0,01 % z odečtené hodnoty ± 0,005 % z rozsahu

Naměřené hodnoty:

5,0009; 5,0019; 4,9992; 4,9998; 5,0011; 4,9989; 5,0007; 5,0003; 4,9995; 5,0014 (V)

Odhad výsledné hodnoty:

$$\overline{U}_{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = 5{,}00037 \cong 5{,}0004\ (\mathrm{V})$$

Určení standardní nejistoty typu A:

$$u_{\mathrm{A},U_{\mathrm{X}}} = \hat{\sigma}(\overline{U}_{\mathrm{X}}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(U_{\mathrm{X},i} - \overline{U}_{\mathrm{X}}\right)^2} = 0{,}00032\ (\mathrm{V})$$

Určení standardní nejistoty typu B:

$$u_{\mathrm{B},U_{\mathrm{X}}} = \frac{\frac{\delta_1}{100}X + \frac{\delta_2}{100}M}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0{,}01}{100}5{,}0004 + \frac{0{,}005}{100}10}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}0005 + 0{,}0005}{\sqrt{3}} = 0{,}00058\ (\mathrm{V})$$

Kombinovaná standardní nejistota

$$u_{\mathrm{C},U_{\mathrm{X}}} = \sqrt{u_{\mathrm{A},U_{\mathrm{X}}}^2 + u_{\mathrm{B},U_{\mathrm{X}}}^2} = \sqrt{0{,}00032^2 + 0{,}00058^2} = 0{,}00066\ (\mathrm{V})$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření k_r = 2:

U_x = 5,0004 V ± 0,0013 V; k_r = 2 popř. U_x = 5,0004 V ± 0,026 %; k_r = 2

Vyhodnocení nejistot nepřímých měření

Nepřímá měření jsou měření, u kterých se měřená veličina *Y* vypočítá pomocí známé funkční závislosti z *N* veličin X_i, určených přímým měřením, jejichž odhady a nejistoty (případně i vzájemné vazby - kovariance) jsou známy, tedy:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$ kde *f* je známá funkce.

Odhad *y* hodnoty výstupní veličiny *Y* lze stanovit ze vztahu:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$ kde $x_1, x_2, \ldots, x_N$ jsou odhady vstupních veličin $X_1, X_2, \ldots, X_N$

Zákon šíření nejistot v případě, že vstupní veličiny nejsou mezi sebou korelovány, je dán vztahem

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{xi} \right)^2}$$

kde u_y je kombinovaná standardní nejistota veličiny *y*

u_{xi} standardní kombinované nejistoty měřených veličin x_i.

Vyhodnocení nejistot nepřímých měření

Pozn. 1: Při slučování nejistot se ani při jejich malém počtu neuvažuje jejich aritmetický součet jako při výpočtu maximální možné chyby, ale vždy se používá součet geometrický

Pozn. 2: Nejistota hodnoty *X* pasivního prvku (etalonu, dekády, děliče apod.) použitého v měřicím obvodu, u nějž je uvedeno toleranční pásmo ± Δ_{max} popř. třída přesnosti *TP*, se určí dle vztahů:

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_{max}}{\sqrt{3}} \qquad \text{popř.} \qquad u_B = \sigma = \frac{TP/100}{\sqrt{3}} X$$

Příklad výpočtu nejistoty měření odporu Ohmovou metodou, $R_X = U/I$

U: Čísl. voltmetr, rozsah 200 mV; ±0,1 % z odečtené hodnoty ±0,05 % z rozsahu;
U = 150 mV;

$$u_{\mathrm{U}} = \frac{\frac{0{,}1}{100}150 + \frac{0{,}05}{100}200}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}15 + 0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}14\ \mathrm{mV} \approx 0{,}1\,\%$$

I: *Magel. ampérmetr, rozsah 1,2 A; TP = 0,5; I = 0,4 A*

$$u_{\mathrm{I}} = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}2}{100\sqrt{3}} = 0{,}0034\ \mathrm{A} \approx 0{,}87\ \%$$

Standardní nejistota měření odporu:

$$u_{R_{\mathrm{X}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}u_{\mathrm{x}i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial(U/I)}{\partial U}u_{\mathrm{U}}\right)^2 + \left(\frac{\partial(U/I)}{\partial I}u_{\mathrm{I}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}u_{\mathrm{U}}\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2}u_{\mathrm{I}}\right)^2} = 3{,}2\,\mathrm{m\Omega}$$

Standardní nejistota měření odporu vyjádřená v relativním tvaru:

$$\frac{u_{R_{\mathrm{X}}}}{R_{\mathrm{X}}}100 = 100\sqrt{\left(\frac{1}{I}\frac{u_{\mathrm{U}}}{U/I}\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2}\frac{u_{\mathrm{I}}}{U/I}\right)^2} = 100\sqrt{\left(\frac{u_{\mathrm{U}}}{U}\right)^2 + \left(\frac{-u_{\mathrm{I}}}{I}\right)^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}87^2} = 0{,}88\,\%$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření $k_r = 2$:

$R_X = U/I = 0{,}15/0{,}4 = 0{,}3750\ \Omega \pm 6{,}4\ \mathrm{m\Omega}$; $k_r = 2$ popř. $R_X = 0{,}3750\ \Omega \pm 1{,}7\ \%$; $k_r = 2$

Pozn: V případě ***součinu nebo podílu*** se pod odmocninou ***sčítají kvadráty nejistot vyjádřených v relativním tvaru***

Příklad výpočtu nejistoty měření výkonu v 3-fázové síti, $P_X = P_1 + P_2 + P_3$

Wattmetry: Rozsah 2400 W; TP = 0,5; P_1 = 1600 W, P_2 = 1200 W, P_3 = 2000 W

$$u_{P_1} = u_{P_2} = u_{P_3} = \frac{0{,}5 * 2400}{100\sqrt{3}} = 6{,}9\ \mathrm{W}$$

Standardní nejistota měření výkonu v 3-fázové síti třemi wattmetry:

$$u_{P_X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_1} u_{P1}\right)^2 + \left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_2} u_{P2}\right)^2 + \left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_3} u_{P3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{u_{P1}{}^2 + u_{P2}{}^2 + u_{P3}{}^2} = 12\ \mathrm{W}$$

Výsledek včetně rozšířené nejistoty s koeficientem rozšíření k_r = 2:

$P_X = P_1 + P_2 + P_3$= 4800 W ± 24 W; k_r = 2 popř. P_X = 4800 W ± 0,5 %; k_r = 2

Pozn: V případě ***součtu nebo rozdílu*** se pod odmocninou ***sčítají kvadráty nejistot vyjádřených v absolutním tvaru***

Chyba metody vs. nejistota měření

Chyba metody – rozdíl mezi naměřenou a skutečnou hodnotou způsobený nedokonalostí použitých zařízení (použité metody) - $\Delta_M = X_{(M)} - X_{(S)}$

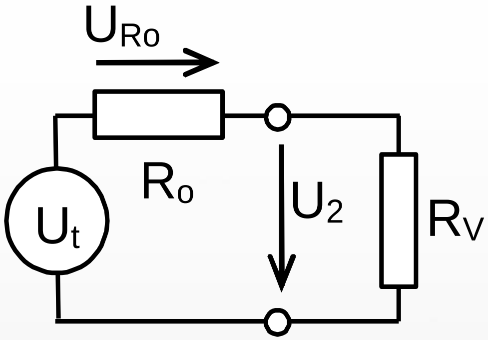
Chyby metody, u nichž lze určit konkrétní velikost, se korigují
Např. korekce spotřeby měřicích přístrojů (měření *R*, *P*), rozdílného fázového posuvu jednotlivých kanálů při měření fázového rozdílu apod.

Při výpočtu nejistoty nepřímých měření ale nejistotu korekce neuvažujeme! Vycházíme ze vztahu **bez korekčního členu**.

Chyby metody, u nichž nelze určit konkrétní velikost a nelze je zanedbat, je nutné zahrnout do výsledné nejistoty měření

- jejich vliv je symetrický (např. vstupní napěťová nesymetrie popř. vstupní klidový proud OZ) – nejistota typu B – předpokládáme obvykle rovnoměrné rozložení
- jejich vliv je nesymetrický (např. vliv výstupního odporu zdroje měřeného napětí, udáno $R_o < R_{o,max}$) – provedeme korekci tak, aby vliv byl symetrický

Příklad měření napětí termočlánku ($R_o < R_{o,max} = 5\ \Omega$)



Voltmetr:
U_2 = 7,00 mV; Rozs. 20 mV; R_V = 1 kΩ; přesnost 0,1 % z rozs.

$\Delta_{M,max} = -\,U_{Ro,max} = -\,R_{o,max}\,I = -\,R_{o,max}\,U_2 / R_V = -\,0{,}035\ (\mathrm{mV})$

$U_t = U_2 - \Delta_{M,max} / 2 = U_2 + R_{o,max}\,U_2 / 2R_V = 7 + 0{,}035/2 = 7{,}018\ (\mathrm{mV})$

$$u_{B,M} = \frac{\Delta_{M,max}/2}{\sqrt{3}} = \frac{35.10^{-6}/2}{\sqrt{3}} = 10.10^{-6}\ (\mathrm{V}) \qquad u_{B,ČV} = \frac{0{,}1.20.10^{-3}}{100\sqrt{3}} = 11{,}5.10^{-6}\ (\mathrm{V})$$

$$u_{C,U_t} = \sqrt{u_{B,M}^2 + u_{B,ČV}^2} = \sqrt{(10.10^{-6})^2 + (11{,}5.10^{-6})^2} = 15.10^{-6}\ (\mathrm{V})$$

U_t = 7,02 mV ± 0,03 mV; k_r = 2 popř. U_t = 7,02 mV ± 0,4 %; k_r = 2