Sbírka příkladů

pro předmět

Bezpečná matematika

Petr Koníček

poslední změna 2.11.2022

Obsah

Seminář 1

Příklad 1.1 Zjednodušte $\dfrac{\dfrac{b}{\frac{d}{a}+13d}}{\frac{1}{d}} - \dfrac{b}{13}$ $\left[\dfrac{-b}{13(1+13a)}\right]$

Příklad 1.2 Zjednodušte $\dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{8}{(x+2)x}$ $[x-2]$

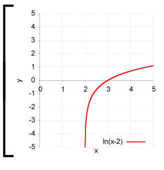
Příklad 1.3 Zjednodušte $\sqrt{1+y} - \sqrt{\dfrac{x+y}{1+\frac{x}{y}}}$ $\left[\sqrt{1+y}-\sqrt{y}\right]$

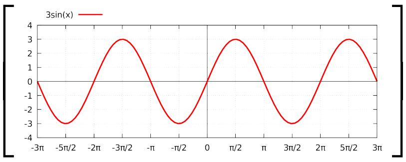
Příklad 1.4 Vypočítejte kořeny kvadratické rovnice $p^2 + 250p + 10^4 = 0$ $[\{-50; -200\}]$

Příklad 1.5 Kvadratický polynom $P = 5p^2 - 5000p - 10^7$ vyjádřete jako součin kořenových činitelů. $[5(p-2000)(p+1000)]$

Příklad 1.6 Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-4} + e^x$ $[D(f) = (-1; 2) \cup (2; \infty)]$

Příklad 1.7 Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x-3} + \sqrt{7-x}$ $[D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; 7\rangle]$

Příklad 1.8 Nakreslete graf funkce $f(x) = \ln(x-2)$ []

Příklad 1.9 Nakreslete graf funkce $f(x) = 3\sin(x)$ []

Příklad 1.10 Vyřešte rovnici $e^{x-2} = 1$ $[K = \{2\}]$

Příklad 1.11 Vyřešte rovnici $\ln(x^2-3) = 0$ $[K = \{-2; 2\}]$

Příklad 1.12 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{3+x}}{x-1}\right)$ $[\infty]$

Příklad 1.13 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x^2-13}\right)$ $[0]$

Příklad 1.14 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{e^x}{2x-4}\right)$ $[-\infty]$

Seminář 2

Příklad 2.1 Zjednodušte $\left[(a+2)(a+3)-(a+2)^2\right]^3 - a^3$ $[6a^2+12a+8]$

Příklad 2.2 Zjednodušte $\left[\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3 \Big/ \frac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right] \cdot \frac{n}{3}$ $\left[\frac{n+2}{n-2}\right]$

Příklad 2.3 Pro $z_1 = 3+3i$ a $z_2 = 2-i$

a) spočítejte $z_1 + z_2$, výsledek uveďte v algebraickém tvaru $[5+2i]$

b) spočítejte $z_1 \cdot z_2$, výsledek uveďte v algebraickém tvaru $[9+3i]$

c) spočítejte $\frac{z_1}{z_2}$, výsledek uveďte v algebraickém tvaru $\left[\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i\right]$

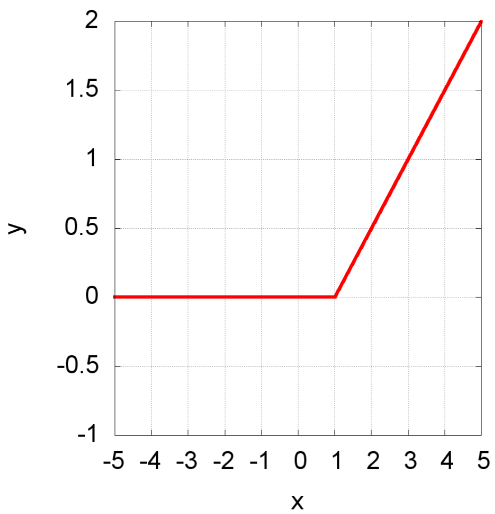
d) vyjádřete z_1 v exponenciálním tvaru $\left[3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$

Příklad 2.4 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [1,2]$ a má směrnici $\frac{1}{3}$
$\left[y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3},\ 3y - x - 5 = 0\right]$

Příklad 2.5 Napište rovnici přímky, která prochází body $A = [1,3]$ a $B = [2,5]$ $[2x - y + 1 = 0]$

Příklad 2.6

Napište rovnici funkce $f(x)$, jejíž graf vypadá takto:



$$\left[f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} & x > 1 \end{cases} \right]$$

Příklad 2.7 Vyřešte rovnici $\ln(x-1) = 2$ $\left[K = \left\{e^2 + 1\right\}\right]$

Příklad 2.8 Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x^2 - 25} + \ln(\sqrt{x} - 2)$ $[D(f) = (4;5) \cup (5;\infty)]$

Příklad 2.9 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{\ln(x-1)}{x^3 - 3} \right)$ $[\infty]$

Příklad 2.10 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{\cos x}{x - 2} \right)$ $[-\infty]$

Příklad 2.11 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{e^x}{e^x - 1} \right)$ $[-\infty]$

Příklad 2.12 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x \sin(x)}{x + 1} \right)$ [limita neexistuje]

Příklad 2.13 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right)$ $[0]$

Seminář 3

Příklad 3.1 Pro $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = 2e^{-i\pi}$

a) spočítejte $z_1 + z_2$, výsledek uveďte v algebraickém a exponenciálním tvaru $\left[2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

b) spočítejte $z_1 \cdot z_2$, výsledek uveďte v algebraickém a exponenciálním tvaru $\left[-4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}\right]$

c) spočítejte $\frac{z_1}{z_2}$, výsledek uveďte v algebraickém a exponenciálním tvaru $\left[-1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3}{4}\pi}\right]$

Příklad 3.2 Určete definiční obor funkce $f(x) = e^{\sin(x)} + \dfrac{\arctan(x)}{\ln(x)}$ $[D(f) = (0;1) \cup (1;\infty)]$

Příklad 3.3 Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^4 + 1) + 3x^2 - 1$
$\left[\cos(x)e^x + \sin(x)e^x + \dfrac{4x^3}{x^4 + 1} + 6x\right]$

Příklad 3.4 Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$ $\left[\dfrac{2e^{2x}\sqrt{x} - e^{2x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right]$

Příklad 3.5 Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2 + 1}$ $\left[\dfrac{(e^x + xe^x)(x^2 + 1) - 2x^2e^x}{(x^2 + 1)^2}\right]$

Příklad 3.6 Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{e^x - 1}$ $\left[\dfrac{\cos(x^2)2x(e^x - 1) - \sin(x^2)e^x}{(e^x - 1)^2}\right]$

Příklad 3.7 Najděte derivaci funkce $f(x) = (x\sin(2x))^5$ $[5(x\sin(2x))^4(\sin(2x) + 2x\cos(2x))]$

Příklad 3.8 Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin(x) + 3}{x}}$ $\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\sin(x) + 3}} \cdot \dfrac{\cos(x)x - (\sin(x) + 3)}{x^2}\right]$

Příklad 3.9 Najděte

a) první derivaci funkce $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$ $[\cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x)]$

b) druhou derivaci funkce $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$ $[-5\sin(x)\cos(2x) - 4\cos(x)\sin(2x)]$

Řešení:

a) první derivace

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [\sin(x)]'\cos(2x) + \sin(x)[\cos(2x)]' \\
&= \cos(x)\cos(2x) + \sin(x) \cdot (-\sin(2x))[2x]') \\
&= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \cdot 2 \\
&= \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) \checkmark
\end{aligned}
$$

b) druhá derivace

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= [\cos(x)]'\cos(2x) + \cos(x)[\cos(2x)]' - 2([\sin(x)]'\sin(2x) + \sin(x)[\sin(2x)]') \\
&= -\sin(x)\cos(2x) - \cos(x)\sin(2x)[2x]' - 2(\cos(x)\sin(2x) + \sin(x)\cos(2x)[2x]') \\
&= -\sin(x)\cos(2x) - \cos(x)\sin(2x) \cdot 2 - 2(\cos(x)\sin(2x) + \sin(x)\cos(2x) \cdot 2) \\
&= -\sin(x)\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 2(\cos(x)\sin(2x) + 2\sin(x)\cos(2x)) \\
&= -\sin(x)\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 4\sin(x)\cos(2x) \\
&= -5\sin(x)\cos(2x) - 4\cos(x)\sin(2x) \checkmark
\end{aligned}
$$

- ověřeno na TI-89, matematici mají vystaveno $-3\sin(x)\cos(2x) - 4\cos(x)\sin(2x)$

Příklad 3.10 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x^2}{e^x - 1}\right)$ $[0]$

Příklad 3.11 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{e^x}{\ln(x)}\right)$ $[\infty]$

Příklad 3.12 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}\right)$ $[-\pi]$

Příklad 3.13 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{e^x}\right)$ $[0]$

Seminář 4

Příklad 4.1 Kvadratický polynom $2,5 \cdot 10^{-4}p^2 + p + 1000$ vyjádřete jako součin kořenových činitelů. $[2,5 \cdot 10^{-4}(p + 2000)^2]$

Příklad 4.2 Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x} - 3}$ $[D(f) = (1; 9) \cup (9; \infty)]$

Příklad 4.3 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\sin(x)}{e^{x^2} - 1} \right)$ $[\infty]$

Příklad 4.4 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2 - 1} \right)$ $[-\infty]$

Příklad 4.5 Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{(-4)^n + 2^n}{(-3)^n - 2^n} \right)$ $[\infty]$

Příklad 4.6 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{2\arctan(x) - \pi} \right)$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

Příklad 4.7 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\left[\dfrac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{\ln\left(x + 1\right)} \right]^4 \right)$ $[16]$

Příklad 4.8 Uvažujte funkci $f(x) = e^{3x-3} + 2x$. Najděte tečnu k jejímu grafu v bodě daném $x_0 = 1$. $[y = 5x - 2]$

Příklad 4.9 Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$ $[\cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)]$

Příklad 4.10 Najděte derivaci funkce $f(x) = \left(\dfrac{\sin(2x) + x^3}{\ln(x^4 + 1)} \right)^6$

$$\left[6 \left(\frac{\sin(2x) + x^3}{\ln(x^4 + 1)} \right)^5 \frac{(2\cos(2x) + 3x^2)\ln(x^4 + 1) - \dfrac{4x^3}{x^4 + 1}(\sin(2x) + x^3)}{\ln^2(x^4 + 1)} \right]$$

Příklad 4.11 Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{x \ln(\cosh(x) + 1)}$

$$\left[e^{x\ln(\cosh(x)+1)}\cdot\left(\ln(\cosh(x)+1)+x\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}\right)\right]$$

Příklad 4.12 Najděte derivaci funkce $f(x)=e^{1+|2x-4|}$ $\left[f'(x)=\begin{cases}-2e^{5-2x} & x<2\\ \text{neexistuje} & x=2\\ 2e^{2x-3} & x>2\end{cases}\right]$

Příklad 4.13 Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x)=x^2e^x$

[rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a na $\langle 0;\infty)$, klesající na $\langle -2;0\rangle$]

[lokální maximum v bodě $x_1=-2$, $f(-2)=4e^{-2}$, lokální minimum v bodě $x_2=0$, $f(0)=0$]

Seminář 5

Příklad 5.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x) + \dfrac{\ln(x)+1}{\sqrt{x}}$ [$D(f) = (0;1\rangle$]

Příklad 5.2 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \left(\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}\right)$ [1]

Příklad 5.3 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\right)$ [0]

Příklad 5.4 Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-8}$
[svislá asymptota pro $x = 2$, vodorovná asymptota $y = 1$ pro $x = \pm\infty$]

Řešení:

- hledáme svislou asymptotu
- hledáme body, kde funkce není definována
- tam je šance na nevlastní limitu ve vlastním bodě a tím i asymptotu bez směrnice
- funkce obsahuje zlomek, takže jmenovatel musí být různý od nuly

  $x^3 = 8 \Rightarrow x \neq 2$
- v bodě $x = 2$ by mohla být svislá asymptota

  určíme $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\right)$

  $x = 2,1 \;\; f(x) = \dfrac{2,1^3+1}{2,1^3-8} = 8,14$

  $x = 2,01 \;\; f(x) = \dfrac{2,01^3+1}{2,01^3-8} = 75,6$

  $x = 2,001 \;\; f(x) = \dfrac{2,001^3+1}{2,001^3-8} = 750,6$

$x = 2,0001 \ f(x) = \dfrac{2,0001^3 + 1}{2,0001^3 - 8} = 7500,6$

- vidíme, že $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right) = \infty$
- v bodě $x = 2$ se nachází svislá asymptota
- ze zvědavosti určíme $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right)$

$x = 1,9 \ f(x) = \dfrac{1,9^3 + 1}{1,9^3 - 8} = -6,887$

$x = 1,99 \ f(x) = \dfrac{1,99^3 + 1}{1,99^3 - 8} = -74,376$

$x = 1,999 \ f(x) = \dfrac{1,999^3 + 1}{1,999^3 - 8} = -749,4$

$x = 1,9999 \ f(x) = \dfrac{1,9999^3 + 1}{1,9999^3 - 8} = -7499,4$

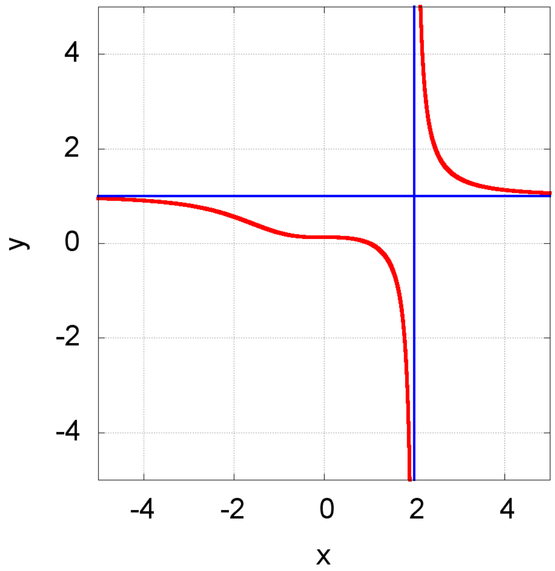
- vidíme, že $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right) = -\infty$
- nezávisle se tím potvrdila svislá asymptota v bodě $x = 2$
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right) &= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8}{x^3}} \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^3}} \right) \\
&= \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1
\end{aligned}$$

- funkce má vodorovnou asymptotu $y = 1$ pro $x = \infty$
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x \to -\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right) &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8}{x^3}} \right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^3}} \right) \\
&= \frac{1 + (-0)}{1 - (-0)} = 1
\end{aligned}$$

- funkce má vodorovnou asymptotu $y = 1$ pro $x = -\infty$



Příklad 5.5 Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \leq \pi \\ \dfrac{\sin(2x)}{x-\pi} & x > \pi \end{cases}$

[spojitá na intervalech $(-\infty; \pi)$ a $(\pi; \infty)$, nespojitá v π]

Příklad 5.6 Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\cos(x^3)+2}$

$$\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)(\cos(x^3)+2) - x\sqrt{x^2+1}(-\sin(x^3)\cdot 3x^2)}{(\cos(x^3)+2)^2}\right]$$

Příklad 5.7 Najděte derivaci funkce $f(x) = \left(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)^x$

$$\left[\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)^x \left(\ln\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right) + \frac{xe^{2x}}{\sin(x^2)+2}\frac{\cos(x^2)2xe^{2x} - (\sin(x^2)+2)e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x})^2}\right)\right]$$

Příklad 5.8 Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 12|x+1|$

[rostoucí na $(\infty, -1\rangle$ a na $\langle 2; \infty)$, klesající na $\langle -1; 2\rangle$]

[lokální maximum v bodě $x_1 = -1$, $f(-1) = -1$, lokální minimum v bodě $x_2 = 2$, $f(2) = -28$]

Příklad 5.9 Pro funkci $f(x) = x\cos(x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 2 se středem $a = \pi$

$$\left[-\pi - (x-\pi) + \frac{1}{2}\pi(x-\pi)^2\right]$$

Příklad 5.10 Vypočítejte integrál $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}\mathrm{d}x$ $[\ln|y| + C = \ln|\sin(x)+3| + C]$

Příklad 5.11 Vypočítejte integrál $\int (x+1)e^x \mathrm{d}x$ $[xe^x + C]$

Příklad 5.12 Vypočítejte integrál $\int \frac{1}{\ln^2(x)+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $[\arctan(\ln(x)) + C]$

Příklad 5.13 Vypočítejte integrál $\int \frac{3\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)}$ $\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C\right]$

Seminář 6

Příklad 6.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(x^2 - x) + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ $[D(f) = \langle -2; 0) \cup (1; 2\rangle]$

Příklad 6.2 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x) - 1}\right)$ $[-\infty]$

Příklad 6.3 Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ [šikmá asymptota $y = x - 1$ pro $x = \pm\infty$]

Řešení:

- funkce obsahuje zlomek, takže jmenovatel musí být různý od nuly

  $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
- pro $x \neq 2$ je $\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} = x - 1$
- hledáme svislou asymptotu
- hledáme body, kde funkce není definována
- tam je šance na nevlastní limitu ve vlastním bodě a tím i asymptotu bez směrnice
- v bodě $x = -2$ by mohla být svislá asymptota
- určíme $\lim\limits_{x \to (-2^+)} \left(\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}\right)$
- jedná se limitu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to (-2^+)} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 2}\right) &= \lim_{x \to (-2^+)} \left(\frac{[x^2 + x - 2]'}{[x + 2]'}\right) \\
&= \lim_{x \to (-2^+)} \left(\frac{2x + 1}{1}\right) \\
&= \lim_{x \to (-2^+)} (2x + 1) \\
&= 2 \cdot (-2) + 1 = -3
\end{aligned}$$

- určíme $\lim\limits_{x \to (-2^-)} \left(\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}\right)$

- jedná se limitu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-2^-)}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right) &= \lim_{x\to(-2^-)}\left(\frac{[x^2+x-2]'}{[x+2]'}\right)\\
&= \lim_{x\to(-2^-)}\left(\frac{2x+1}{1}\right)\\
&= \lim_{x\to(-2^-)}(2x+1)\\
&= 2\cdot(-2)+1=-3
\end{aligned}$$

- svislá asymptota v bodě $x=-2$ neexistuje
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x\to+\infty$
- potřebujeme určit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right)$
- jedná se limitu $\dfrac{\infty}{\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[x^2+x-2]'}{[x+2]'}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{1}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}(2x+1)\\
&= 2\cdot\infty+1=\infty
\end{aligned}$$

- vodorovná asymptota pro $x\to\infty$ neexistuje
- hledáme šikmou asymptotu pro $x\to+\infty$

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2+x-2}{x+2}}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}\\
&= \frac{1+0-0}{1+0}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}-1\cdot x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-2-x(x+2)}{x^2+2x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-2-x^2-2x}{x^2+2x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{x+2} \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+2} \\
&= -\lim_{x\to+\infty}1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

- pro $x \to \infty$ máme šikmou asymptotu $y = x - 1$
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x \to -\infty$
- potřebujeme určit $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x-2}{x+2}\right)$
- jedná se limitu $\dfrac{\infty}{\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{[x^2+x-2]'}{[x+2]'}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{1}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty}(2x+1) \\
&= 2\cdot(-\infty)+1=-\infty
\end{aligned}
$$

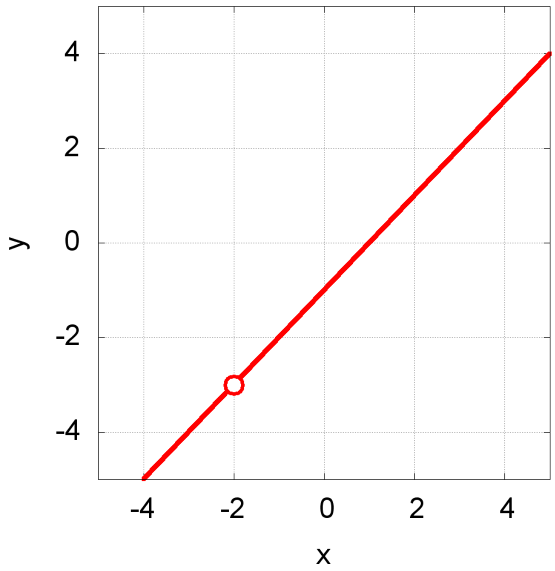
- vodorovná asymptota pro $x \to -\infty$ neexistuje

- hledáme šikmou asymptotu pro $x \to -\infty$

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^2+x-2}{x+2}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} \\
&= \frac{1+0-0}{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty} [f(x)-ax] \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+2} - 1\cdot x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2-x(x+2)}{x^2+2x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2-x^2-2x}{x^2+2x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-2}{x+2} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x+2} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

- pro $x \to -\infty$ máme šikmou asymptotu $y = x - 1$



Příklad 6.4 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\frac{5x-x^3}{x^3+x-1}\right]$ [limita neexistuje]

Příklad 6.5 Najděte derivaci funkce $f(x)=\frac{e^x}{\cos(x)+2}\cdot(x^3+\ln(x^2+1))$

$$\left[\frac{e^x(\cos(x)+2)+e^x\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2}\cdot(x^3+\ln(x^2+1))+\frac{e^x}{\cos(x)+2}\left(3x^2+\frac{2x}{x^2+1}\right)\right]$$

Příklad 6.6 Najděte derivaci funkce $f(x)=\sqrt[x-1]{x^2e^{5x}}$

$$\left[\sqrt[x-1]{x^2e^{5x}}\cdot\frac{\frac{2xe^{5x}+5x^2e^{5x}}{x^2e^{5x}}(x-1)-\ln(x^2e^{5x})}{(x-1)^2}\right]$$

Příklad 6.7 Určete intervaly ve kterých je funkce $f(x)=x^3-6x|x+1|$ konvexní nebo konkávní a inflexní body této funkce

[konvexní na $\langle -2,-1\rangle$ a na $\langle 2,\infty)$; konkávní na $(-\infty,2\rangle$ a na $\langle -1,2\rangle$]
[inflexní body jsou $\{-2,-1,2\}$]

Řešení:

- zjistíme, kdy je uvnitř absolutní hodnoty nula a podle toho rozdělíme definiční obor:

  $|x+1|: x=-1$

1. $x\in(-\infty;-1)$

$x+1<0$, takže $|x+1|=-(x+1)$

$$f(x)=x^3-6x|x+1|=x^3+6x(x+1)=x^3+6x^2+6x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x^3+6x^2+6x\right]' \\ &= 3x^2+12x+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[3x^2+12x+6\right]' \\ &= 6x+12 \end{aligned}$$

- nulové body druhé derivace

  $6x+12=0$

  $6x=-12$

  $x=-2$

2. $x \in \langle -1; \infty)$

   $x+1>0$, takže $|x+1|=x+1$

$$f(x)=x^3-6x|x+1|=x^3-6x(x+1)=x^3-6x^2-6x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x^3-6x^2-6x\right]' \\ &= 3x^2-12x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[3x^2-12x-6\right]' \\ &= 6x-12 \end{aligned}$$

- nulové body druhé derivace

  $6x-12=0$

  $6x=12$

  $x=2$

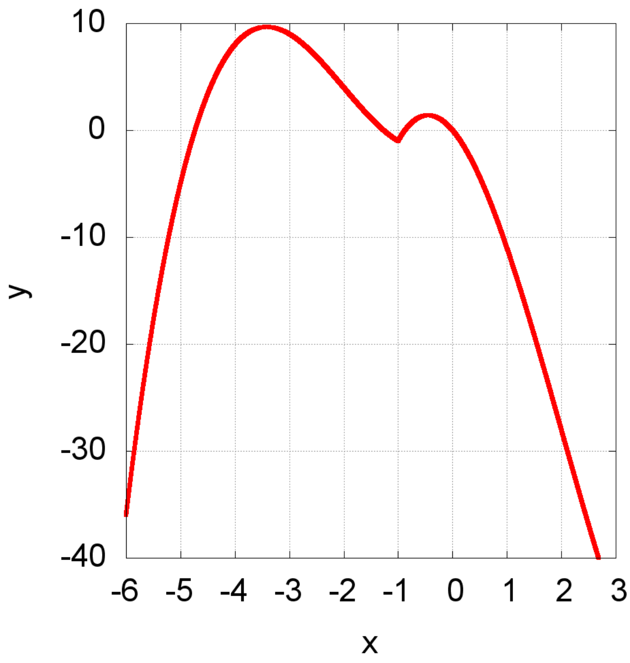
- dělící body budou $x_1=-2$, $x_2=-1$ a $x_3=2$

	$(-\infty;-2\rangle$	$\langle -2;-1\rangle$	$\langle -1;2\rangle$	$\langle 2;\infty\rangle$
$6x-12$			$-$	$+$
$6x+12$	$-$	$+$		
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

- pro $x \in (-\infty;-2)$ platí $f''<0$ – funkce je konkávní
- pro $x \in (-2;-1)$ platí $f''>0$ – funkce je konvexní
- pro $x \in (-1;2)$ platí $f''<0$ – funkce je konkávní
- pro $x \in (2;\infty)$ platí $f''>0$ – funkce je konvexní

- všechny tři podezřelé body $-2; -1; 2$ jsou inflexní, vždy se měnilo znaménko druhé derivace
- druhá derivace v bodě -1 není definovaná, to není překážka, funkce se mění z konvexní na konkávní

  $f(-2) = 4,\ f(-1) = -1,\ f(2) = -28$



Příklad 6.8 Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 3 se středem $a = 0$ $\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]$

Příklad 6.9 Vypočítejte integrál $\int 10(e^x + 1)^4 e^x \mathrm{d}x$ $\left[2(e^x + 1)^5 + C\right]$

Příklad 6.10 Vypočítejte integrál $\int (x - 1)\sin(x)\mathrm{d}x$ $\left[-(x - 1)\cos(x) + \sin(x) + C\right]$

Příklad 6.11 Vypočítejte integrál $\int 18x^2 \cos(1 - x^3)\mathrm{d}x$ $\left[-6\sin(1 - x^3) + C\right]$

Příklad 6.12 Vypočítejte integrál $\int (8x + 1)\ln(x)\mathrm{d}x$ $\left[\ln(x)(4x^2 + x) - 2x^2 - x + C\right]$

Příklad 6.13 Rozložte $f(x) = \dfrac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x + 1)(x - 1)^2(x^2 + 4)}$ na parciální zlomky. Nejprve vypočtěte ty koeficienty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

$$\left[\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4}=\frac{1}{x+1}+\frac{-5}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4x+8}{x^2+4}\right]$$

Řešení:

- rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{5x^3-19x^2+44}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4}$$

- pomocí zakrývací metody lze určit koeficienty A a C

$$A=\left.\frac{5x^3-19x^2+44}{(///)(x-1)^2(x^2+4)}\right|_{x=-1}=\frac{5(-1)^3-19(-1)^2+44}{(-1-1)^2((-1)^2+4)}=\frac{-5-19+44}{4\cdot 5}=\frac{20}{20}=1$$

$$C=\left.\frac{5x^3-19x^2+44}{(x+1)(////)(x^2+4)}\right|_{x=1}=\frac{5\cdot 1^3-19\cdot 1^2+44}{(1+1)(1^2+4)}=\frac{5-19+44}{2\cdot 5}=\frac{30}{10}=3$$

- rovnici vynásobíme jmenovatelem $(x+1)(x-1)^2(x^2+4)$

$$\frac{5x^3-19x^2+44}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)^2}\cancel{(x^2+4)}}\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)^2}\cancel{(x^2+4)}=$$
$$\frac{A}{\cancel{x+1}}\cancel{(x+1)}(x-1)^2(x^2+4)+\frac{B}{\cancel{x-1}}(x+1)(x-1)^{\cancel{2}}(x^2+4)+$$
$$\frac{C}{\cancel{(x-1)^2}}(x+1)\cancel{(x-1)^2}(x^2+4)+\frac{Dx+E}{\cancel{(x^2+4)}}(x+1)(x-1)^2\cancel{(x^2+4)}$$

$$5x^3-19x^2+44=A(x-1)^2(x^2+4)+B(x+1)(x-1)(x^2+4)+$$
$$C(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)(x+1)(x-1)^2$$

- do rovnice dosadíme $A=1$ a $C=3$

$$5x^3-19x^2+44=1\cdot(x-1)^2(x^2+4)+B(x+1)(x-1)(x^2+4)+$$
$$3(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)(x+1)(x-1)^2$$

$$5x^3-19x^2+44=(x^2-2x+1)(x^2+4)+B(x^2-1)(x^2+4)+$$
$$3(x^3+4x+x^2+4)+(Dx+E)(x+1)(x^2-2x+1)$$

$$5x^3-19x^2+44=(x^4+4x^2-2x^3-8x+x^2+4)+B(x^4+4x^2-x^2-4)+$$
$$(3x^3+12x+3x^2+12)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x+x^2-2x+1)$$

$$5x^3-19x^2+44=(x^4+5x^2-2x^3-8x+4)+B(x^4+3x^2-4)+$$
$$(3x^3+12x+3x^2+12)+(Dx+E)(x^3-x^2-x+1)$$

$$5x^3-19x^2+44=x^4+8x^2+x^3+4x+16+Bx^4+3Bx^2-4B$$
$$+Dx^4-Dx^3-Dx^2+Dx+Ex^3-Ex^2-Ex+E$$

$$5x^3-19x^2+44=$$
$$(1+B+D)x^4+(1-D+E)x^3+(8+3B-D-E)x^2+(4+D-E)x+16-4B+E$$

- máme rovnost dvou polynomů, což nastává jen tehdy, jsou-li jejich koeficienty stejné
- porovnáním koeficientů obou stran dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1+B+D &= 0 \\ 1-D+E &= 5 \\ 8+3B-D-E &= -19 \\ 4+D-E &= 0 \\ 16-4B+E &= 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B+D &= -1 \\ -D+E &= 4 \\ 3B-D-E &= -27 \\ D-E &= -4 \\ -4B+E &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B+D &= -1 \\ -D+E &= 4 \\ -4B+E &= 28 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ -4+4\cdot 1 & 0+4\cdot 1 & 1+4\cdot 0 & 28+4\cdot(-1) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0+4\cdot 0 & 4+4\cdot(-1) & 1+4\cdot 1 & 24+4\cdot 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 40 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0\cdot\frac{1}{5} & 0\cdot\frac{1}{5} & 5\cdot\frac{1}{5} & 40\cdot\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0-0 & -1-0 & 1-1 & 4-8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0\cdot(-1) & -1\cdot(-1) & 0\cdot(-1) & -4\cdot(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1-0 & 1-1 & 0-0 & -1-4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

- vidíme, že $B=-5,\ D=4,\ E=8$
- rozklad bude

$$\frac{5x^3-19x^2+44}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4} = \frac{1}{x+1}+\frac{-5}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4x+8}{x^2+4}$$

Seminář 7

Příklad 7.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = e^x\sqrt{\sin(x)+1} + \dfrac{1}{\cos(x)+1}$

$$\left[D(f) = \bigcup_{k\in Z} \{(2k-1)\pi; (2k+1)\pi\} \right]$$

Příklad 7.2 Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x + x}{\ln(13-x)}\right)$ $[-\infty]$

Příklad 7.3 Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x\ln(e^x - 1))$ $[0]$

Příklad 7.4 Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}\right)$

$$\left[\cos\left(x + \frac{\ln(x)}{x^2+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - \ln(x)2x}{(x^2+1)^2}\right) \right]$$

Příklad 7.5 Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = |x+1|e^{-x}$
[klesající na $(\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0; \infty)$, rostoucí na $\langle -1; 0\rangle$]
[lokální minimum v bodě $x_1 = -1$, $f(-1) = 0$, lokální maximum v bodě $x_2 = 0$, $f(0) = 1$]

Řešení:

- zjistíme, kdy je uvnitř absolutní hodnoty nula a podle toho rozdělíme definiční obor:

  $|x+1| : x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

1. $x \in (-\infty; -1)$

   $x + 1 < 0$, takže $|x+1| = -(x+1)$

$$f(x) = |x+1|e^{-x} = -(x+1)e^x$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [-(x+1)e^{-x}]' \\
&= [-(x+1)]'e^{-x} + (-(x+1))[e^{-x}]' \\
&= -e^{-x} + (-(x+1))e^{x} \cdot (-1) \\
&= -e^{x} + (x+1)e^{x} \\
&= -e^{x} + xe^{x} + e^{x} \\
&= xe^{x}
\end{aligned}$$

- stacionární body

  $y' = xe^x = 0$

  $x = 0$

- tento bod leží mimo interval $(-\infty; -1)$, nebudeme jej proto brát v úvahu

2. $x \in (-1; \infty)$

   $x + 1 > 0$, takže $|x+1| = (x+1)$

$$f(x) = |x+1|e^{-x} = (x+1)e^{x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [(x+1)e^{-x}]' \\
&= [(x+1)]'e^{-x} + (x+1)[e^{-x}]' \\
&= e^{-x} + (x+1)e^{x} \cdot (-1) \\
&= e^{x} - (x+1)e^{x} \\
&= e^{x} - xe^{x} - e^{x} \\
&= -xe^{x}
\end{aligned}$$

- stacionární body

  $y' = -xe^x = 0$

  $x = 0$

- dělící body pro intervaly monotonie budou $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$

	$(-\infty; -1\rangle$	$(-1; 0)$	$(0; \infty)$
$-x$		$+$	$-$
x	$-$		
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

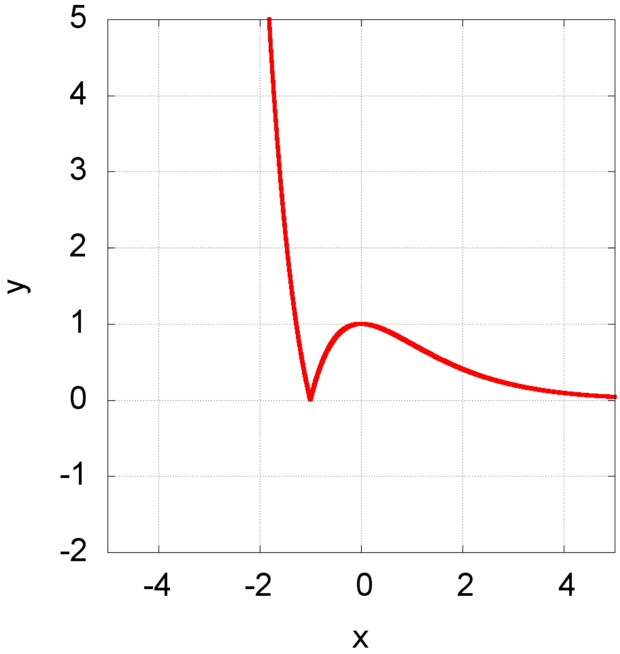
- v bodě $x_1 = -1$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (minimum)
- v bodě $x_2 = 0$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (maximum)
- funkční hodnoty v dělících bodech

  $f(-1) = 0$

  $f(0) = 1$

- funkce je klesající na $(\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0; \infty)$

- funkce je rostoucí na $\langle -1; 0\rangle$
- funkce má lokální minimum v bodě $x_1 = -1,\ f(-1) = 0$
- funkce má lokální maximum v bodě $x_2 = 0,\ f(0) = 1$



Příklad 7.6 Najděte globální maximum a minimum funkce $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$

a) na intervalu $M = \langle 1; 3\rangle$

$\left[\text{minimum v bodě } x = 1,\ f(1) = \dfrac{9}{5},\ \text{maximum v bodě } x = 2,\ f(2) = 2\right]$

b) na intervalu $N = \langle 1; \infty)$

[minimum neexistuje, infimum funkce je rovno 1, maximum v bodě $x = 2,\ f(2) = 2$]

Příklad 7.7 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+13}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{2}{9}(x^3+13)^{\frac{3}{2}} + C\right]$

Příklad 7.8 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (2x+8)\cos(2x)\mathrm{d}x$ $\left[(x+4)\sin(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + C\right]$

Příklad 7.9 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{\sin(2x)} + 5\right)\cos(2x)\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}e + 2\right]$

Příklad 7.10 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$ $\left[\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2+4| + C\right]$

Příklad 7.11 Vypočítejte obsah konečné oblasti vymezené křivkami $y = x^2$ a $y = x + 2$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

Příklad 7.12 Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alespoň dvěma způsoby.

$[-192]$

Řešení:

1. Gaussova eliminace

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0\cdot 5 & 3\cdot 5 & -1\cdot 5 & 2\cdot 5 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 15-3\cdot 5 & -5-3\cdot 1 & 10-3\cdot(-2) \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 6\cdot 8\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 48\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\cdot 48\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 48\cdot 2\cdot 5\cdot 1\cdot 2 = -192$$

2. Laplaceův rozvoj

- pro určení $\det \mathbf{A}$ provedeme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce $j = 1$, kde je jen jeden nenulový člen a_{21}

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31} + (-1)^{4+1} a_{41} \det A_{41} \\ &= -a_{21} \det A_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ \boxed{2} & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, a_{21} = 2, A_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- pro určení $\det \mathbf{A_{21}}$ provedeme Laplaceův rozvoj podle druhého řádku $j = 2$, kde je jen jeden nenulový člen a_{22}

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A_{21}} &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{2i} \det A_{2i} \\
&= (-1)^{1+2} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22} + (-1)^{3+2} a_{23} \det A_{23} \\
&= a_{22} \det A_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, a_{22} = 6, \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 = 16$$

$\det \mathbf{A_{21}} = a_{22} \det A_{22} = 6 \cdot 16 = 96$

$\det \mathbf{A} = -a_{21} \det A_{21} = -2 \cdot 96 = -192$

Příklad 7.13 Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$x_1 - x_4 + x_6 = 0$, $x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$, $x_5 - 2x_6 = 0$, množinu řešení vyjádřete jako lineární obal nějaké báze.
[podprostor $\langle\{(0,0,1,0,0,0),(1,-2,0,1,0,0),(-1,2,0,0,2,1)\}\rangle$]

Řešení:

- převod levých stran homogenní soustavy na matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$n - h(A) = 6 - 3$, v tomto případě je počet parametrů 3

- zavedeme: $x_3 = r, x_4 = s, x_6 = t$
- dosadíme do rovnic:

$$\begin{aligned}
x_1 - s + t &= 0 \\
x_2 + 2s - x_5 &= 0 \\
x_5 - 2t &= 0
\end{aligned}$$

- z první rovnice: $x_1 = s - t$
- ze třetí rovnice: $x_5 = 2t$
- ze druhé rovnice: $x_2 = x_5 - 2s = 2t - 2s$
- obecné řešení $(s - t, 2t - 2s, r, s, 2t, t)$ pro $r, s, t \in R$
- vyjádříme je pomocí vektorů jako $r(0,0,1,0,0,0) + s(1,-2,0,1,0,0) + t(-1,2,0,0,2,1)$
- množina všech řešení je rovna podprostoru $\langle\{(0,0,1,0,0,0),(1,-2,0,1,0,0),(-1,2,0,0,2,1)\}\rangle$

Seminář 8

Příklad 8.1 Určete

a) definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ $[D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)]$

b) limity v krajních bodech intervalů $D(f)$

$$\left[\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\right]$$

Příklad 8.2 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x\sin(2\pi x)}{x-1}\right)$ $[2\pi]$

Příklad 8.3 Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \ln(3-x) & x < 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{\cos(\pi x)} & x \geq 3 \end{cases}$

$\left[\text{nespojitá v bodě } x = 3 \text{ a v bodech } x = n - \dfrac{1}{2} \text{ pro } n \geq 4,\ n \in Z\right]$

Příklad 8.4 Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln(5 + |2x-4|)$ $\left[f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{9-2x} & x < 2 \\ \text{neexistuje} & x = 2 \\ \dfrac{2}{2x+1} & x > 2 \end{cases}\right]$

Příklad 8.5 Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - 4x & x < 0 \\ \sqrt[5]{x^2 - 4x + 5} & x \geq 0 \end{cases}$

[rostoucí na $(-\infty; -2\rangle$ a na $\langle 2; \infty)$, klesající na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 0; 2\rangle$]

[lokální maximum v bodě $x = -2$, $f(-2) = 5$, lokální minimum v bodě $x = 2$, $f(2) = 1$]

Řešení:

1. $x \in (-\infty; 0)$

$$f'(x) = [1 - x^2 - 4x]' = -2x - 4$$

- stacionární body

$y' = -2x - 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -2$

2. $x \in \langle 0; \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\sqrt[5]{x^2-4x+5}]' \\ &= [(x^2-4x+5)^{\frac{1}{5}}]' \\ &= \frac{1}{5}(x^2-4x+5)^{\left(\frac{1}{5}-1\right)}[x^2-4x+5]' \\ &= \frac{1}{5}(x^2-4x+5)^{-\frac{4}{5}}(2x-4) \end{aligned}$$

- stacionární body

  $y' = \frac{1}{5}(x^2-4x+5)^{-\frac{4}{5}}(2x-4) = 0$

  $2x - 4 = 0$

  $2x = 4$

  $x = 2$

- nalezneme nulové body jmenovatele

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

- jmenovatel nemá reálné kořeny
- dělící body pro intervaly monotonie budou $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$-2x-4$	$+$	$-$		
$2x-4$			$-$	$+$
$(x^2-4x+5)^{-\frac{4}{5}}$			$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

- v bodě $x_1 = -2$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (maximum)
- v bodě $x_2 = 0$ se znaménko derivace nemění – není tam extrém
- v bodě $x_3 = 2$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (minimum)
- funkční hodnoty v dělících bodech

  $f(-2) = 1 - (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 - 4 + 8 = 5$

- limity zleva a zprava v nule

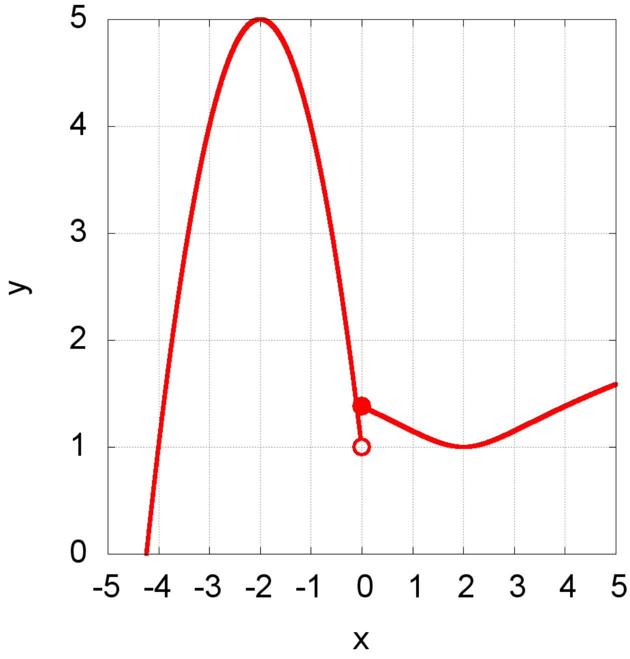
$$\lim_{x \to 0^-} (1 - x^2 - 4x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2-4x+5)^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{5}} \doteq 1,38$$

- v bodě 0 je funkce nespojitá

  $f(2) = \sqrt[5]{2^2 - 4 \cdot 2 + 5} = \sqrt[5]{4 - 8 + 5} = \sqrt[5]{1} = 1$

- funkce je rostoucí na $(-\infty; -2\rangle$ a na $\langle 2; \infty)$
- funkce je klesající na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 0; 2\rangle$
- funkce má lokální maximum v bodě $x_1 = -2,\ f(-2) = 5$
- funkce má lokální minimum v bodě $x_3 = 2,\ f(2) = 1$



Příklad 8.6 Najděte tečnu ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 1$, která je kolmá na přímku $p: x + 12y - 1 = 0$ $[K = \{-12x + y - 17 = 0;\ -12x + y + 15 = 0\}]$

Příklad 8.7 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x) + 1)}{x} \mathrm{d}x$ $[\sin(\ln(x) + 1) + C]$

Příklad 8.8 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^e (18x^2 + 2x) \ln(x) \mathrm{d}x$ $\left[4e^3 + \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2}\right]$

Příklad 8.9 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^{2x} + 1}$ $\left[\arctan(e) - \frac{\pi}{4}\right]$

Příklad 8.10 Rozložte $f(x) = \dfrac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)}$ na parciální zlomky. Vypočtěte ty koeficienty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

$\left[\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x-3} + \dfrac{D}{(x-3)^2} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1}\right]$

$\left[\dfrac{11}{4(x+1)} + \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{-3}{4(x-3)} + \dfrac{1}{(x-3)^2} + \dfrac{-2x+2}{x^2+1}\right]$

Řešení:

- rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

- pomocí zakrývací metody lze určit koeficienty B a D

$$B = \left.\frac{8x^2+8x+64}{(////)(x-3)^2(x^2+1)}\right|_{x=-1} = \frac{8(-1)^2+8(-1)+64}{(-1-3)^2((-1)^2+1)} = \frac{8-8+64}{(-4)^2(1+1)} = \frac{64}{16\cdot 2} = \frac{64}{32} = 2$$

$$D = \left.\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(////)(x^2+1)}\right|_{x=3} = \frac{8\cdot 3^2+8\cdot 3+64}{(3+1)^2(3^2+1)} = \frac{72+24+64}{16\cdot 10} = \frac{160}{160} = 1$$

- ze zvědavosti vypočteme ostatní koeficienty
- rovnici vynásobíme jmenovatelem $(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)$

$$\frac{8x^2+8x+64}{\cancel{(x+1)^2}\cancel{(x-3)^2}\cancel{(x^2+1)}}\cancel{(x+1)^2}\cancel{(x-3)^2}\cancel{(x^2+1)} = \frac{A}{\cancel{x+1}}(x+1)^{\cancel{2}}(x-3)^2(x^2+1)+$$
$$\frac{B}{\cancel{(x+1)^2}}\cancel{(x+1)^2}(x-3)^2(x^2+1) + \frac{C}{\cancel{x-3}}(x+1)^2(x-3)^{\cancel{2}}(x^2+1)+$$
$$\frac{D}{\cancel{(x-3)^2}}(x+1)^2\cancel{(x-3)^2}(x^2+1) + \frac{Ex+F}{\cancel{(x^2+1)}}(x+1)^2(x-3)^2\cancel{(x^2+1)}$$

$$8x^2+8x+64 = A(x+1)(x-3)^2(x^2+1)+$$
$$B(x-3)^2(x^2+1) + C(x+1)^2(x-3)(x^2+1)+$$
$$D(x+1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x+1)^2(x-3)^2$$

- do rovnice dosadíme $B = 2$, $D = 1$

$$8x^2+8x+64 = A(x+1)(x-3)^2(x^2+1)+$$
$$2(x-3)^2(x^2+1) + C(x+1)^2(x-3)(x^2+1)+$$
$$1(x+1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x+1)^2(x-3)^2$$

- rozepíšeme $(x-3)^2$ a $(x+1)^2$

$$8x^2+8x+64 = A(x+1)(x^2-6x+9)(x^2+1)+$$
$$2(x^2-6x+9)(x^2+1) + C(x^2+2x+1)(x-3)(x^2+1)+$$
$$(x^2+2x+1)(x^2+1) + (Ex+F)(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)$$

$$\begin{aligned} 8x^2+8x+64 = {} & A(x+1)(x^4-6x^3+9x^2+x^2-6x+9)+ \\ & 2(x^4-6x^3+9x^2+x^2-6x+9)+C(x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1)(x-3)+ \\ & (x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1)+(Ex+F)(x^4-6x^3+9x^2+2x^3-12x^2+18x+x^2-6x+9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x^2+8x+64 = {} & A(x+1)(x^4-6x^3+10x^2-6x+9)+ \\ & 2(x^4-6x^3+10x^2-6x+9)+C(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)(x-3)+ \\ & (x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+(Ex+F)(x^4-4x^3-2x^2+12x+9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x^2+8x+64 = {} & A(x^5-6x^4+10x^3-6x^2+9x+x^4-6x^3+10x^2-6x+9)+ \\ & 2(x^4-6x^3+10x^2-6x+9)+C(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x-3x^4-6x^3-6x^2-6x-3)+ \\ & (x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+(Ex^5-4Ex^4-2Ex^3+12Ex^2+9Ex+Fx^4-4Fx^3-2Fx^2+12Fx+9F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x^2+8x+64 = {} & A(x^5-5x^4+4x^3+4x^2+3x+9)+ \\ & 2(x^4-6x^3+10x^2-6x+9)+C(x^5-x^4-4x^3-4x^2-5x-3)+ \\ & (x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+(Ex^5-6Ex^4+10Ex^3-6Ex^2+9Ex+Fx^4-6Fx^3+10Fx^2-6Fx+9F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x^2+8x+64 = {} & x^5(A+C+E)+x^4(-5A-C-4E+F+3)+ \\ & x^3(4A-4C-2E-4F-10)+ \\ & x^2(4A-4C+12E-2F+22)+x(3A-5C+9E+12F-10)+ \\ & 9A-3C+9F+19 \end{aligned}$$

- máme rovnost dvou polynomů, což nastává jen tehdy, jsou-li jejich koeficienty stejné
- porovnáním koeficientů obou stran dostaneme soustavu rovnic pro neznámé A, C, E, F

$$\begin{aligned} A+C+E &= 0 && (1) \\ -5A-C-4E+F+3 &= 0 && (2) \\ 4A-4C-2E-4F-10 &= 0 && (3) \\ 4A-4C+12E-2F+22 &= 8 && (4) \\ 3A-5C+9E+12F-10 &= 8 && (5) \\ 9A-3C+9F+19 &= 64 && (6) \end{aligned}$$

- rozšířená matice soustavy bude

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & -2 & -4 & 10 \\ 4 & -4 & 12 & -2 & -14 \\ 3 & -5 & 9 & 12 & 18 \\ 9 & -3 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5+5\cdot 1 & -1+5\cdot 1 & -4+5\cdot 1 & 1+5\cdot 0 & -3+5\cdot 0 \\ 4-4\cdot 1 & -4-4\cdot 1 & -2-4\cdot 1 & -4-4\cdot 0 & 10-4\cdot 0 \\ 4-4\cdot 1 & -4-4\cdot 1 & 12-4\cdot 1 & -2-4\cdot 0 & -14-4\cdot 0 \\ 3-3\cdot 1 & -5-3\cdot 1 & 9-3\cdot 1 & 12-3\cdot 0 & 18-3\cdot 0 \\ 9-9\cdot 1 & -3-9\cdot 1 & 0-9\cdot 1 & 9-9\cdot 0 & 45-9\cdot 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{lrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -6 & -4 & 10 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & -14 \\ 0 & -8 & 6 & 12 & 18 \\ 0 & -12 & -9 & 9 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{lrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -8+2\cdot 4 & -6+2\cdot 1 & -4+2\cdot 1 & 10+2\cdot(-3) \\ 0 & -8+2\cdot 4 & 8+2\cdot 1 & -2+2\cdot 1 & -14+2\cdot(-3) \\ 0 & -8+2\cdot 4 & 6+2\cdot 1 & 12+2\cdot 1 & 18+2\cdot(-3) \\ 0 & -12+3\cdot 4 & -9+3\cdot 1 & 9+3\cdot 1 & 45+3\cdot(-3) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 10\cdot\frac{1}{10} & 0 & -20\cdot\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 36 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4+4\cdot 1 & -2+4\cdot 0 & 4+4\cdot(-2) \\ 0 & 0 & 8-8\cdot 1 & 14-8\cdot 0 & 12-8\cdot(-2) \\ 0 & 0 & -6+6\cdot 1 & 12+6\cdot 0 & 36+6\cdot(-2) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\cdot(-\frac{1}{2}) & -4\cdot(-\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 14\cdot\frac{1}{14} & 28\cdot\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 12\cdot\frac{1}{12} & 24\cdot\frac{1}{12} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1-1 & -3-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1-1 & 0 & 0-(-2) \\ 0 & 4 & 1-1 & 0 & -5-(-2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4\cdot\frac{1}{4} & 0 & 0 & -3\cdot\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1-1 & 0 & 0 & 2-(-\frac{3}{4}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- koeficienty jsou $A = \dfrac{11}{4}$, $B = 2$, $C = -\dfrac{3}{4}$, $D = 1$, $E = -2$, $F = 2$
- rozklad bude

$$\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} =$$
$$\frac{11}{4(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{-3}{4(x-3)} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{-2x+2}{x^2+1}$$

Příklad 8.11 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\mathrm{d}x$ [∞]

Příklad 8.12 Uvažujte vektorový prostor $V = \{(x,-x,y,0,2x); x,y \in R\}$ a v něm vektory $\vec{u} = (1,-1,2,0,2), \vec{v} = (2,-2,1,0,4)$. Dokažte, že $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ je báze prostoru V

Řešení:

a) Vektory báze musí být lineárně nezávislé

- řešíme rovnici

  $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} = \vec{0}$

  $a_1(1,-1,2,0,2) + a_2(2,-2,1,0,4) = (0,0,0,0,0).$

- ve složkách platí

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 0 \\ -a_1 - 2a_2 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}$$

- rozšířená matice soustavy bude

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

- první dva sloupce matice jsou tvořeny vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1+1 & -2+2 & 0+0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 0-2\cdot 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 2 & 0-2\cdot 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3}\cdot 0 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) & -\frac{1}{3}\cdot 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & 0-2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- řešení je $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, takže $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně nezávislé

b) B generuje V

- libovolný vektor z V, obecně vektor $\vec{a} = (x,-x,y,0,2x)$ lze vyjádřit jako lineární kombinace $\vec{u}$ a $\vec{v}$

  $\vec{a} = b_1\vec{u} + b_2\vec{v}$

  $(x,-x,y,0,2x) = b_1(1,-1,2,0,2) + b_2(2,-2,1,0,4)$

- ve složkách

$$\begin{aligned}
b_1 + 2b_2 &= x \\
-b_1 - 2b_2 &= -x \\
2b_1 + b_2 &= y \\
0b_1 + 0b_2 &= 0 \\
2b_1 + 4b_2 &= 2x
\end{aligned}$$

- rozšířená matice soustavy bude

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -1 & -2 & -x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2x \end{array}\right)$$

- první dva sloupce matice jsou tvořeny vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -1 & -2 & -x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -1 & -2 & -x \\ 2 & 1 & y \\ 2 & 4 & 2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -1+1 & -2+2 & -x+x \\ 2 & 1 & y \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 2x-2\cdot x \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 2 & y-2\cdot x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y-2x \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -\frac{1}{3}\cdot 0 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) & -\frac{1}{3}\cdot(y-2x) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & x-2\cdot\frac{2x-y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{2y-x}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{3} \end{array}\right)$$

- meziúprava

$$x - 2\cdot\frac{2x-y}{3} = x - \frac{4x-2y}{3} = \frac{3x-4x+2y}{3} = \frac{2y-x}{3}$$

$b_1 = \frac{2y-x}{3}$, $b_2 = \frac{2x-y}{3}$

- vidíme, že B generuje V

Příklad 8.13 $B = (\vec{u}, \vec{v})$ je báze prostoru V, $\vec{u} = (1, -1, 2, 0, 2)$, $\vec{v} = (2, -2, 1, 0, 4)$ Uvažujte v něm vektory $\vec{a} = (3, -3, 0, 0, 6)$ a $\vec{b} = (3, -3, 3, 0, 6)$

a) Spočítejte $\vec{a} + \vec{b}$ [$(6, -6, 3, 0, 12)$]

b) Najděte souřadnice $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ vzhledem k bázi B. $\left[[\vec{a}]_B = (-1;2),\ [\vec{b}]_B = (1;1)\right]$

c) Sečtěte $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ $[[(0;3)]_B]$

d) Který vektor z V má souřadnice $[\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B$? $[(6,-6,3,0,12)]$

Řešení:

a) Spočítejte $\vec{a}+\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= (3,-3,0,0,6)+(3,-3,3,0,6)\\ &= (3+3,-3-3,0+3,0+0,6+6)\\ &= (6,-6,3,0,12)\end{aligned}$$

b) Najděte souřadnice $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ vzhledem k bázi B.

- bázi tvoří dva vektory, proto dimenze je dva
- souřadnice vektoru $\vec{a}$ vzhledem k B označíme a_1, a_2
- hledáme a_1, a_2 tak, aby

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\\ (3,-3,0,0,6) &= a_1(1,-1,2,0,2)+a_2(2,-2,1,0,4)\end{aligned}$$

- musí platit soustava pěti rovnic pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned}a_1+2a_2 &= 3\\ -a_1-2a_2 &= -3\\ 2a_1+a_2 &= 0\\ 0a_1+0a_2 &= 0\\ 2a_1+4a_2 &= 6\end{aligned}$$

- rozšířená matice soustavy bude

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1+1 & -2+2 & -3+3\\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 2 & 0-2\cdot 3\\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 6-2\cdot 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -\frac{1}{3}\cdot 0 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) & -\frac{1}{3}\cdot(-6)\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 2\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

- vidíme, že $a_1=-1, a_2=2$
- takže $[\vec{a}]_B = (-1;2)$

- souřadnice vektoru $\vec{b}$ vzhledem k B označíme b_1, b_2
- hledáme b_1, b_2 tak, aby

$$\begin{aligned}\vec{b} &= b_1\vec{u} + b_2\vec{v}\\ (3,-3,3,0,6) &= b_1(1,-1,2,0,2) + b_2(2,-2,1,0,4)\end{aligned}$$

- musí platit soustava pěti rovnic pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned}b_1 + 2b_2 &= 3\\ -b_1 - 2b_2 &= -3\\ 2b_1 + b_2 &= 3\\ 0b_1 + 0b_2 &= 0\\ 2b_1 + 4b_2 &= 6\end{aligned}$$

- rozšířená matice soustavy bude

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -1+1 & -2+2 & -3+3\\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 2 & 3-2\cdot 3\\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 6-2\cdot 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ -\frac{1}{3}\cdot 0 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) & -\frac{1}{3}\cdot(-3)\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

- vidíme, že $b_1 = 1, b_2 = 1$
- takže $[\vec{b}]_B = (1;1)$

c) Sečtěte $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ (jako vektory)

$$\begin{aligned}[\vec{x}]_B = [\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B &= (-1;2) + (1,1)\\ &= (-1+1; 2+1)\\ &= (0;3)\\ &= (x_1; x_2)\end{aligned}$$

d) Který vektor z V má souřadnice $[\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B$?

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{u} + x_2\vec{v}\\ &= 0(1,-1,2,0,2) + 3(2,-2,1,0,4)\\ &= (6,-6,3,0,12)\end{aligned}$$

- Jaké poučení z toho plyne?
  - vyšlo to stejně jako v a)
  - operace s vektory se převádějí na operace se souřadnicemi, což může být někdy jednodušší
  - zde dvě čísla oproti šesti u původních vektorů
  - to jednodušší samozřejmě záleží na tom, zda umíme efektivně najít ty souřadnice

Seminář 9

Příklad 9.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt[x]{\ln(x)}$ $[D = (1; \infty)]$

Příklad 9.2 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[x]{e^x + 1}\right)$ $[e]$

Příklad 9.3 Určete asymptoty funkce $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)$
[vodorovné asymptoty $y = 2$ pro $x = +\infty$ a $y = 0$ pro $x = -\infty$, svislá asymptota v $x = 0$]

Řešení:

- hledáme svislou asymptotu
- hledáme body, kde funkce není definována
- tam je šance na nevlastní limitu ve vlastním bodě a tím i asymptotu bez směrnice
- funkce obsahuje zlomek, takže jmenovatel musí být různý od nuly

  $-\frac{1}{x}$ není definována pro $x = 0$
- v bodě $x = 0$ by mohla být svislá asymptota
- určíme $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)$

  pro $x \to 0^+$ je $-\frac{1}{x} \to -\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) &= e^{-\infty} + 0 \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

- limita zprava je vlastní
- proto zatím nejsme schopni rozhodnout o existenci asymptoty
- určíme $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)$

pro $x \to 0^-$ je $-\dfrac{1}{x} \to \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) &= e^{\infty} + 0 \\ &= \infty + 0 = \infty\end{aligned}$$

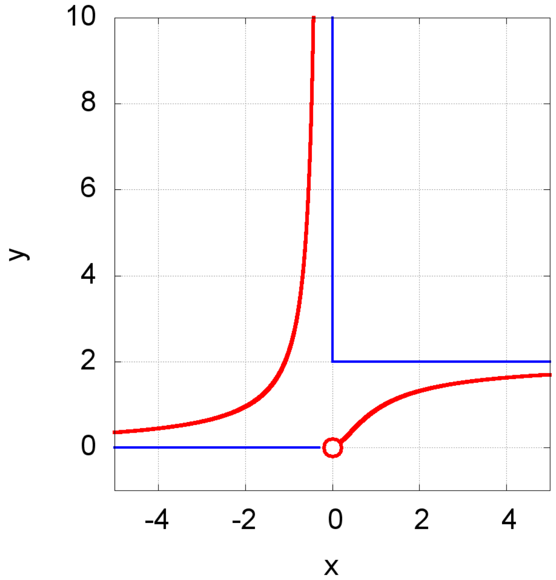
- funkce má svislou asymptotu pro $x = 0$
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x \to +\infty$
- potřebujeme určit $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) &= e^{0} + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

- funkce má vodorovnou asymptotu $y = 2$ pro $x = +\infty$
- hledáme vodorovnou asymptotu pro $x \to -\infty$
- potřebujeme určit $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) &= e^{0} - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

- funkce má vodorovnou asymptotu $y = 0$ pro $x = -\infty$



Příklad 9.4 Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{|x-2|} - |x-2|$ $\left[f'(x) = \begin{cases} -e^{-(x-2)} + 1 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ e^{x-2} - 1 & x > 2 \end{cases}\right]$

Příklad 9.5 Pro funkci $f(x) = \int\limits_{13}^{x} e^{t^4} - 8t^2 \mathrm{d}t$ určete

a) intervaly ve kterých je funkce konvexní nebo konkávní
[konvexní na $\langle 2, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$]

b) inflexní body funkce $[\{-2; 0; 2\}]$

Příklad 9.6 Pro funkci $f(x) = \arctan(x)$

a) sestavte Taylorův polynom stupně 3 s vhodným středem $\left[\text{střed v nule, } T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3\right]$

b) pomocí $T_3(x)$ určete $4 \cdot f(1)$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

c) jaká je přesná hodnota $4 \cdot f(1)$? $[\pi]$

d) co dostaneme při použití polynomu T_n? $\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right]$

Řešení:

a)

- Taylorův polynom stupně n se středem a definujeme jako

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i$$

- vezmeme $a = 0$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)(x-0)^i \\ &= \frac{1}{0!}f^{(0)}(0)x^0 + \frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x^1 + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 \end{aligned}$$

- funkce

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \arctan(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- první derivace

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\arctan(x)]' \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{0^2+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- druhá derivace

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{1}{x^2+1}\right]' \\ &= [(x^2+1)^{-1}]' \\ &= (-1)\cdot(x^2+1)^{-2}[x^2+1]' \\ &= (-1)\cdot(x^2+1)^{-2}\cdot 2x \\ &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{-2\cdot 0}{(0^2+1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- třetí derivace

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \left[\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right]' \\ &= \frac{[-2x]'(x^2+1)^2-(-2x)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)2(x^2+1)[x^2+1]'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1)-(-2x)2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \frac{6\cdot 0^2-2}{(0^2+1)^3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

- zapíšeme Taylorův polynom

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3 \\ &= 0+1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2+\frac{1}{6}(-2)x^3 \\ &= x-\frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \cdot T_3(1) &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right) \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3} \\ &= 2,6666 \end{aligned}$$

c)

- přesně

$$\begin{aligned} 4 \arctan(1) &= \cancel{4}\frac{\pi}{\cancel{4}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

d)

- pro Taylorův polynom platí

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{1+2k}$$

- pro $x = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{(-1)^0}{1+2\cdot 0} + \frac{(-1)^1}{1+2\cdot 1} + \frac{(-1)^2}{1+2\cdot 2} + \frac{(-1)^3}{1+2\cdot 3} + \frac{(-1)^4}{1+2\cdot 4} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \end{aligned}$$

Příklad 9.7 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{5\pi} (x+5)\sin\left(\frac{x}{5}\right) \mathrm{d}x$ $[25\pi + 50]$

Příklad 9.8 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x) + 4\sin(x) + 4}{\sin^2(x)(\sin^2(x)+4)} \cos(x)\mathrm{d}x$
$\left[\ln|\sin(x)| - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{2}\ln(\sin^2(x)+4) + C\right]$

Řešení:

- substituce $y = \sin(x)$

  $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$

  $\mathrm{d}y = \cos(x)\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\cos(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2(x) + 4\sin(x) + 4}{\sin^2(x)(\sin^2(x)+4)}\cos(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\cancel{\cos(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\cancel{\cos(x)}} \\ &= \int \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$\dfrac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}$ rozložíme na parciální zlomky

- rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{Cy+D}{y^2+4}$$

- rovnici vynásobíme $y^2(y^2+4)$

$$\frac{y^2+4y+4}{\cancel{y^2}\cancel{(y^2+4)}} \cdot \cancel{y^2}\cancel{(y^2+4)} = \frac{A}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y^2}(y^2+4) + \frac{B}{\cancel{y^2}}\cancel{y^2}(y^2+4) + \frac{Cy+D}{\cancel{y^2+4}}y^2\cancel{(y^2+4)}$$

$$y^2 + 4y + 4 = Ay(y^2+4) + B(y^2+4) + (Cy+D)y^2$$

- dosadíme $y = 0$

$$0^2 + 4\cdot 0 + 4 = A\cdot 0\cdot(0^2+4) + B(0^2+4) + (C\cdot 0 + D)0^2$$

$$4 = 4B$$

$$B = 1$$

- dosadíme $B = 1$ do původní rovnice

$$y^2 + 4y + 4 = Ay(y^2+4) + 1\cdot(y^2+4) + (Cy+D)y^2$$

- roznásobíme pravou stranu

$$y^2 + 4y + 4 = Ay^3 + 4Ay + y^2 + 4 + Cy^3 + Dy^2$$

- dáme k sobě členy s různými mocninami y

$$y^2 + 4y + 4 = (A+C)y^3 + (D+1)y^2 + 4Ay + 4$$

- koeficienty u jednotlivých mocnin y se musí sobě rovnat

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\ D + 1 &= 1 \\ 4A &= 4\end{aligned}$$

- z druhé rovnice máme $D = 0$, ze třetí $A = 1$
- dosadíme $A = 1$ do první rovnice

$1 + C = 0$

- máme tedy $C = -1$
- hledaný rozklad na parciální zlomky je

$$\begin{aligned}\frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{-y+0}{y^2+4} \\ &= \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{-y}{y^2+4}\end{aligned}$$

- pomocí rozkladu rozepíšeme integrál

$$\int \frac{y^2+4y+4}{y^2(y^2+4)}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y - \int \frac{y}{y^2+4}\mathrm{d}y$$

- ve třetím integrálu uděláme substituci $z = y^2 + 4$

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 2y$

$\mathrm{d}z = 2y\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}z}{2y}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y - \int \frac{y}{y^2+4}\mathrm{d}y &= \ln|y| - \frac{1}{y} - \int \frac{\cancel{y}}{z}\frac{\mathrm{d}z}{2\cancel{y}} \\ &= \ln|y| - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\mathrm{d}z \\ &= \ln|y| - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\ln|z| + C \\ &= \ln|y| - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\ln(y^2+4) + C \\ &= \ln|\sin(x)| - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{2}\ln(\sin^2(x)+4) + C \checkmark\end{aligned}$$

Příklad 9.9 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1-\sinh^2(x)}}\mathrm{d}x$ $[\arcsin(\sinh(x)) + C]$

Příklad 9.10 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(2x)}{x^2}\mathrm{d}x$ $[\ln(2) + 1]$

Příklad 9.11 Číslo $z = \dfrac{3-i}{1+i-\dfrac{2i}{3+i}}$ převeďte na

a) algebraický tvar $\left[\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}i\right]$

b) exponenciální tvar $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right]$

Příklad 9.12 Vyřešte soustavu lineárních rovnic danou maticí s parametrem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{pro } a \neq \pm 1 \text{ řešení neexistuje} \\ \text{pro } a = -1 \text{ právě jedno řešení } x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 0 \\ \text{pro } a = 1 \text{ nekonečně mnoho řešení} \\ x_1 = 1 - 2t, x_2 = t - 1, x_3 = 1 - t, x_4 = t \text{ kde } t \in R \end{array}\right]$$

Řešení:

- upravíme matici na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0-0 & 0-0 & 1-1 & a-1 & 1-1 \\ 1-1 & 0-0 & 0-(-1) & 2-1 & a^2-0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1+0 & 0+0 & -1+1 & 1+1 & 0+1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0-0 & 0-0 & 1-1 & 1-1 & a^2-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right)$$

- poslední řádek dává rovnici $a^2 - 1 = 0$
- ta je splněna pouze pro $a = \pm 1$
- pro $a \neq \pm 1$ je hodnost matce soustavy menší než hodnost rozšířené
- podle Frobeniovy věty pro $a \neq \pm 1$ řešení neexistuje

1. $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -(-1) & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^2-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- poslední řádku vypustíme a dostaneme rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

- hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, takže soustava má právě jedno řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\cdot 0 & -\frac{1}{2}\cdot 0 & -\frac{1}{2}\cdot 0 & -\frac{1}{2}\cdot(-2) & -\frac{1}{2}\cdot 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1-2\cdot 0 & 0-2\cdot 0 & 0-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 & 1-1 & -1-0 \\ 0-0 & 0-0 & 1-0 & 1-1 & 1-0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- řešení je $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 0$

2. $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^2-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- poslední dvě řádky vypustíme a dostaneme rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  $(n - h(A)) = 4 - 3$, v tomto případě máme jeden parametr

- zvolíme $x_4 = t$
- dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2t &= 1 \\ x_2 - t &= -1 \\ x_3 + t &= 1 \end{aligned}$$

- z první rovnice: $x_1 + 2t = 1$

  $x_1 = 1 - 2t$

- ze druhé rovnice

  $x_2 - t = -1$

  $x_2 = -1 + t$

- ze třetí rovnice

  $x_3 + t = 1$

  $x_3 = 1 - t$

- obecné řešení $(1 - 2t, t - 1, 1 - t, t)$ pro $t \in R$
- vyjádříme je pomocí vektorů jako $(1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, -1, 1)$,

Seminář 10

Příklad 10.1 Pro kterou hodnotu parametru a bude mít funkce $f(x) = e^x + \sqrt{2x-a}$ definiční obor $D(f) = \langle 11, \infty)$? $[a = 22]$

Příklad 10.2 Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+5x^2}{x^2 - \ln(-x)} \right)$ $[5]$

Příklad 10.3 Jakou hodnotu musí mít parametr p, aby limita $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{\ln(x-3)}{5x-1-p} \right)$ vyšla $\dfrac{1}{5}$? $[p = 19]$

Příklad 10.4 Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{4 + \sin(\ln(x))} + 3$ v bodě $x = 1$
$\left[\dfrac{\cos(\ln(x))}{2x\sqrt{4+\sin(\ln(x))}} \right]$ $\left[\dfrac{1}{4} \right]$

Příklad 10.5 Pro funkci $f(x) = 12e^{x^2-2|x|}$ určete

a) maximální intervaly monotonie

[rostoucí na $(-1; 0\rangle$ a na $\langle 1; \infty)$, klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0; 1\rangle$]

b) lokální extrémy [lokální minimum pro $x_1 = -1$ a $x_3 = 1$, lokální maximum pro $x_2 = 0$]

c) hodnotu funkce v lokálním maximu [12]

Řešení:

a)

- zjistíme, kdy je uvnitř absolutní hodnoty nula a podle toho rozdělíme definiční obor:

  $|x| : x = 0$

1. $x \in (-\infty; 0)$

   $x < 0$, takže $|x| = -x$

$$f(x) = 12e^{x^2-2|x|} = 12e^{x^2+2x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[12e^{x^2+2x}\right]' \\ &= 12e^{x^2+2x}[x^2+2x]' \\ &= 12e^{x^2+2x}(2x+2) \\ &= 12(2x+2)e^{x^2+2x} \end{aligned}$$

- stacionární body

  $y' = 12(2x+2)e^{x^2+2x} = 0$

  $2x+2=0$

  $x+1=0$

  $x=-1$

2. $x \in \langle 0; \infty)$

   $x > 0$, takže $|x| = x$

$$f(x) = 12e^{x^2-2|x|} = 12e^{x^2-2x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[12e^{x^2-2x}\right]' \\ &= 12e^{x^2-2x}[x^2-2x]' \\ &= 12e^{x^2-2x}(2x-2) \\ &= 12(2x-2)e^{x^2-2x} \end{aligned}$$

- stacionární body

  $y' = 12(2x-2)e^{x^2-2x} = 0$

  $2x-2=0$

  $x-1=0$

  $x=1$

- dělící body pro intervaly monotonie budou $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 1$

	$(-\infty; -1\rangle$	$\langle -1; 0\rangle$	$\langle 0; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$2x-2$			$-$	$+$
e^{x^2-2x}			$+$	$+$
$2x+2$	$-$	$+$		
e^{x^2+2x}	$+$	$+$		
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

- v bodě $x_1 = -1$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (minimum)
- v bodě $x_2 = 0$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (maximum)
- v bodě $x_3 = 1$ se znaménko derivace mění – je tam extrém (minimum)
- funkční hodnoty v dělících bodech

$f(-1) = 12e^{(-1)^2+2\cdot(-1)} = 12e^{1-2} = 12e^{-1}$

- limity zleva a zprava v nule

$$\lim_{x\to 0^-} 12e^{x^2+2x} = \lim_{x\to 0^-} 12e^0 = 12$$
$$\lim_{x\to 0^+} 12e^{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^+} 12e^0 = 12$$

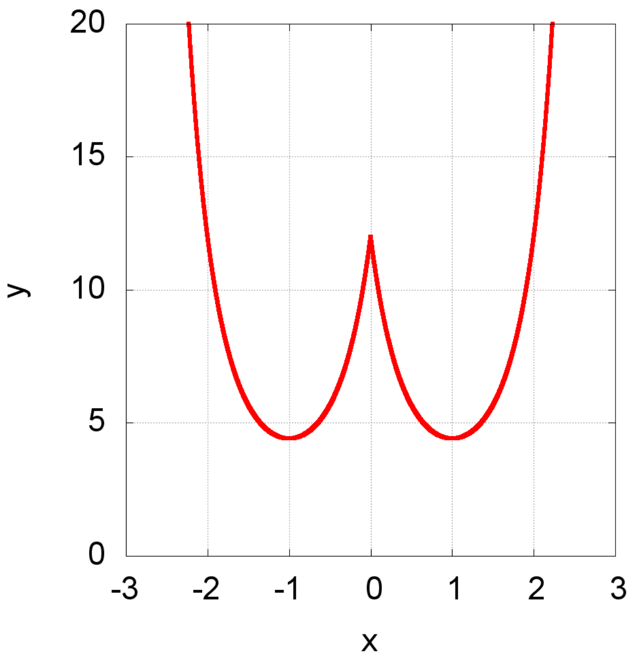
- v bodě 0 je funkce spojitá, funkční hodnota je 12

$f(1) = 12e^{1^2-2\cdot 1} = 12e^{1-2} = 12e^{-1}$

- funkce je rostoucí na $\langle -1; 0\rangle$ a na $\langle 1; \infty)$
- funkce je klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0; 1\rangle$

b), c)

- funkce má lokální minimum v bodě $x_1 = -1$ a $x_3 = 1$ a to $f(\pm 1) = 12e^{-1}$
- funkce má lokální maximum v bodě $x_2 = 0$, $f(0) = 12$



Příklad 10.6 Které reálné číslo má tu vlastnost, že když jej vynásobíte číslem o deset menším, tak dostanete nejmenší možný výsledek, který lze tímto způsobem získat? $[x = 5]$

Příklad 10.7 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^1 \left[12x(x^2+1)^5 - 41\right] \mathrm{d}x$ $[(64-1) - 41 = 22]$

Příklad 10.8 Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ $[1]$

Příklad 10.9 Vypočítejte integrál $\int\limits_0^1 \pi(2x+6)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$ [14]

Příklad 10.10 Pro kterou hodnotu parametru b bude mít komplexní číslo $-15+bi$ exponenciální tvar $re^{\frac{3}{4}\pi i}$? [$b=15$]

Příklad 10.11 Rozložte $f(x) = \dfrac{3x^4+4x^2+11}{(x-2)^3(x^2+1)^2}$ na parciální zlomky. Nejprve vypočtěte ty koeficienty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

$$\left[\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}\right]$$
$$\left[\frac{54}{125(x-2)}+\frac{-8}{25(x-2)^2}+\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{-2(34+27x)}{125(x^2+1)}+\frac{-2(2+11x)}{25(x^2+1)^2}\right]$$

Řešení:

- rozklad budeme hledat ve tvaru
$$\frac{3x^4+4x^2+11}{(x-2)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$
- pomocí zakrývací metody lze určit koeficient C
$$C = \left.\frac{3x^4+4x^2+11}{(////)(x^2+1)^2}\right|_{x=2} = \frac{3\cdot 2^4+4\cdot 2^2+11}{(2^2+1)^2} = \frac{3\cdot 16+4\cdot 4+11}{(4+1)^2} = \frac{75}{25} = 3$$
- rovnici vynásobíme jmenovatelem $(x-2)^3(x^2+1)^2$
$$\frac{3x^4+4x^2+11}{\cancel{(x-2)^3}\,\cancel{(x^2+1)^2}}\cancel{(x-2)^3}\,\cancel{(x^2+1)^2} = \frac{A}{\cancel{x-2}}(x-2)^{\cancel{3}2}(x^2+1)^2+\frac{B}{\cancel{(x-2)^2}}(x-2)^{\cancel{3}}(x^2+1)^2+$$
$$\frac{C}{\cancel{(x-2)^3}}\cancel{(x-2)^3}(x^2+1)^2+\frac{Dx+E}{\cancel{x^2+1}}(x-2)^3(x^2+1)^{\cancel{2}}+\frac{Fx+G}{\cancel{(x^2+1)^2}}(x-2)^3\cancel{(x^2+1)^2}$$

$$3x^4+4x^2+11 = A(x-2)^2(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+$$
$$C(x^2+1)^2+(Dx+E)(x-2)^3(x^2+1)+(Fx+G)(x-2)^3$$

- do rovnice dosadíme $C=3$
- po roznásobení dostaneme
$$\begin{aligned}3x^4+4x^2+11 &= x^6(A+D)\\ &+ x^5(-4A+B-6D+E)\\ &+ x^4(3+6A-2B+13D-6E+F)\\ &+ x^3(-8A+2B-14D+13E-6F+G)\\ &+ x^2(6+9A-4B+12D-14E+12F-6G)\\ &+ x(-4A+B-8D+12E-8F+12G)\\ &+ 3+4A-2B-8E-8G\end{aligned}$$

- máme rovnost dvou polynomů, což nastává jen tehdy, jsou-li jejich koeficienty stejné
- porovnáním koeficientů obou stran dostaneme soustavu rovnic pro neznámé A, B, D, E, F, G

$$\begin{aligned} A + D &= 0\checkmark && (1)\\ -4A + B - 6D + E &= 0\checkmark && (2)\\ 6A - 2B + 13D - 6E + F &= 0\checkmark && (3)\\ -8A + 2B - 14D + 13E - 6F + G &= 0\checkmark && (4)\\ 9A - 4B + 12D - 14E + 12F - 6G &= -2\checkmark && (5)\\ -4A + B - 8D + 12E - 8F + 12G &= 0\checkmark && (6)\\ 4A - 2B - 8E - 8G &= 8\checkmark && (7) \end{aligned}$$

$$A = \frac{54}{125},\ B = -\frac{8}{25},\ C = 3,\ D = -\frac{54}{125},\ E = -\frac{68}{125},\ F = -\frac{22}{25},\ G = -\frac{4}{25}$$

- rozklad bude

$$\frac{3x^4 + 4x^2 + 11}{(x-2)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} =$$
$$\frac{54}{125(x-2)} + \frac{-8}{25(x-2)^2} + \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{-2(27x+34)}{125(x^2+1)} + \frac{-2(11x+2)}{25(x^2+1)^2}$$

Příklad 10.12 Homogenní soustava lineárních rovnic je dána maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -a & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$. Pro kterou hodnotu parametru a má tato soustava nekonečně mnoho řešení? [$a = 5$]

celkem **129** příkladů