MA 11-21

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $x^2+y^2+z^2-2y=0$, která je rovnoběžná s rovinou $2x-y+2z=1$.

2. Přepište následující integrál
$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} f\,dy\,dx$$
nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho\,d\varphi$.

3. Mějme válec $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le h\}$ s hustotou $f(x,y,z)=z$. Válec rozdělíme vodorovným řezem na dva válce, tak aby obě části měly stejnou hmotnost. V jaké výšce se má řez provést?

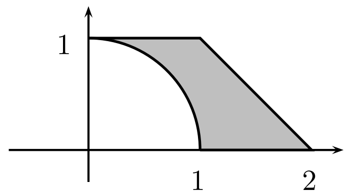
4. Pro kterou hodnotu parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ je pole
$$\vec{F}=(e^zy,e^zx,e^zxy+\lambda x)$$
potenciální? Pro zjištěné hodnoty λ určete potenciál.

5. Pomocí rozvoje logaritmu o středu $x_0=0$,
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$
nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\ln 2(1+x)^2$ se středem bodě $x_0=0$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

1. Normála k ploše v hledaném bodě je násobek normály k zadané rovině:
$$(2x,2y-2,2z)=\alpha(2,-1,2).$$
Odtud $x=z=\alpha$ a $y=1-\frac{1}{2}\alpha$. Dosazením do rovnice plochy dostaneme dva body pro $\alpha=\pm\frac{2}{3}$: $A_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ a $A_2=(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$. Tečné roviny jsou dvě, $2x-y+2z-2=0$ a $2x-y+2z+4=0$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f\ dx\,dy$, v polárních souřadnicích
$$\int_0^{\pi/4}\int_1^{2/(\cos\varphi+\sin\varphi)} f\varrho\,d\varrho d\varphi+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^{1/\sin\varphi} f\varrho\,d\varrho d\varphi.$$



3. Hmotnost celého válce je
$$m = \iiint_P f = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h z\varrho \; dz\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi a^2 h^2,$$
kde jsme užili cylindrické souřadnice. Podmínka pro hledanou výšku h_1 řezu je
$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 h_1^2 = \tfrac{1}{4}\pi a^2 h^2,$$
odkud máme $h_1 = h/\sqrt{2}$. (Řez neprochází těžištěm!)

4. Protože $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, -\lambda, 0)$, musí být $\lambda = 0$. Potenciál je $f = e^z xy$.

5. Protože $f(x) = \ln 2 + 2\ln(1+x)$, je Taylorův rozvoj
$$f(x) = \ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$
Poloměr konvergence je $R = 1$.