MA2: Řešené příklady—Funkce více proměnných: $D(f)$, graf, limita

1. Najděte a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{x-y}$.

2. Najděte a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{\ln(y)}{2\ln(x)}$.
Najděte a načrtněte její hladiny konstantnosti pro hodnoty $c = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$.

3. Najděte a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = 3 - \sqrt{4-x^2-y^2}$.
Určete tvar jejího grafu a načrtněte jej.

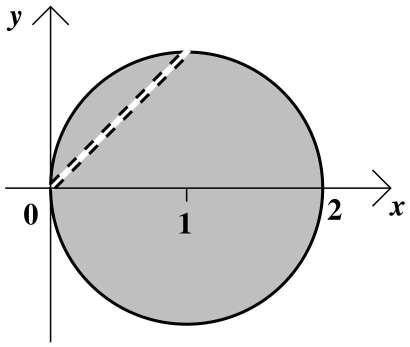
4. Spočítejte limity funkce $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+2y^2}$ v bodech $(1,2)$ a $(0,0)$.

5. Spočítejte limity funkce $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$ v bodech $(1,1)$, $(1,-1)$ a $(0,0)$.

Řešení:

1. Podmínky pro existenci jsou $2x-x^2-y^2 \geq 0$ a $x-y \neq 0$.
První podmínka říká $x^2-2x+y^2 \leq 0$. Jaký objekt popisuje?
Zkušenost nám říká, že podmínku lze přepsat na standardní rovnici kružnice pomocí doplnění na čtverec. Vypadá to takto: $x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2 + y^2 \leq 1$, tedy $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, což popisuje kružnici o poloměru 1 se středem $(1,0)$ včetně obvodu.
Podmínka $y-x \neq 0$ znamená, že vynecháváme přímku $y=x$. Definičním oborem je tedy kruh bez příslušného úseku oné přímky.

$$D(f) = \{(x,y) \in I\!R^2;\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \text{ a } y \neq x\}.$$



2. Zde jsou tři podmínky existence: $y>0$, $x>0$ a $\ln(x) \neq 0$. Poslední podmínka dává $x \neq 1$.
Dostáváme tedy definiční obor

$$D(f) = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x,y > 0 \text{ a } x \neq 1\}.$$

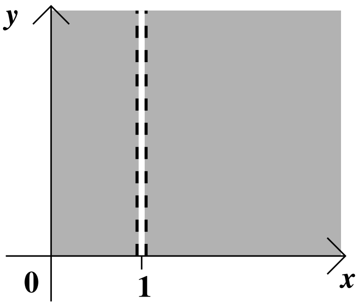
Toto je první kvadrant (bez hranice) s odstraněnou přímkou $x=1$ (viz obrázek níže).
Hladiny konstantnosti: Zkusíme to nejprve obecně: $f(x,y)=c$ znamená

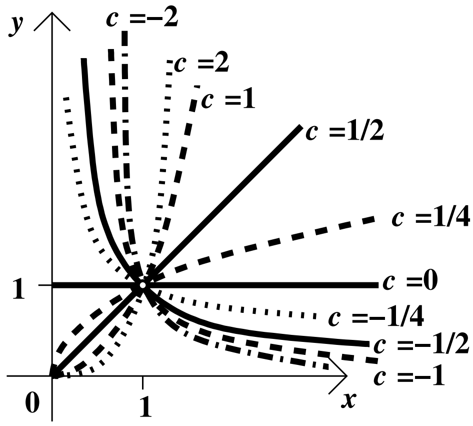
$$\frac{\ln(y)}{2\ln(x)} = c \quad \Longrightarrow \quad \ln(y) = 2c\ln(x) = \ln(x^{2c}) \quad \Longrightarrow \quad y = x^{2c}.$$

Dostáváme tedy

c:	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
hladina:	$y=\frac{1}{x^4}$	$y=\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$y=1$	$y=\sqrt{x}$	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^4$

Obrázek definičního oboru a hladin konstantnosti tedy vypadá takto:

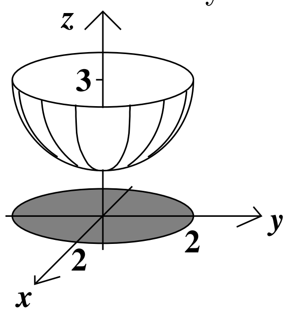




3. Podmínka existence je $4-x^2-y^2 \geq 0$. To znamená $x^2+y^2 \leq 4$, definičním oborem je tedy kruh se středem v počátku a poloměrem 2:

$$D(f)=\{(x,y)\in I\!R^2;\ x^2+y^2\leq 4\}.$$

Graf f je nějaký povrch daný rovnicí $z=f(x,y)$. Když dosadíme, dostaneme $z=3-\sqrt{4-x^2-y^2}$ neboli $x^2+y^2+(z-3)^2=2^2$. Tato rovnice popisuje sféru s poloměrem 2 a středem $(0,0,3)$.
Každá funkce má ale jen jednu hodnotu v každém bodě definičního oboru, což znamená, že musíme rozhodnout, zda bereme vrchní či spodní polovinu sféry. Protože hodnoty naší funkce dostáváme odečítáním něčeho kladného od 3, zajímá nás část sféry ležící pod 3, grafem je tedy dolní polosféra:



4. Vždy začínáme definičním oborem. Je dán podmínkou $x^2+2y^2 \neq 0$, což znamená $(x,y)\neq(0,0)$. Máme proto

$$D(f)=I\!R^2-\{(0,0)\}.$$

a) Limita v bodě $(1,2)$.
Tento bod leží v definičním oboru, tudíž stačí dosadit.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right)=\frac{2}{9}.$$

b) Limita v bodě $(0,0)$. Tento bod neleží v $D(f)$, ale leží na jeho hranici, limita má smysl. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}?$$

Neurčitý výraz a žádný l'Hospital pro funkce více proměnných.
Tradiční přístup volá po zjednodušení situace, zkusíme se k bodu $(0,0)$ blížit po jednoduchých křivkách. Nejjednodušší je jít po přímkách rovnoběžných s osami. Nejprve tedy rovnoběžně s osou y, což uděláme tak, že pevně zafixujeme hodnotu $x=0$, body typu $(0,y)$ pak necháme blížit k $(0,0)$, tedy vlastně děláme $y\to 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{2y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0.$$

Neurčitý výraz nevznikl, protože se nejprve dosazuje $x = 0$, pak se to upraví algebrou a teprve pak se dělá limita $y \to 0$.
Teď rovnoběžně s osou x, tedy zvolíme $y = 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Vyšlo to stejně, ale to se stává i u limit, které ve skutečnosti neexistují, směry podél os bývají často výjimečně dobré. Zkusíme proto jít do $(0,0)$ po přímkách obecných, se směrnicí k, to je takový tradiční přístup. Pokud se body (x,y) blíží k $(0,0)$ po přímce se směrnicí k, pak splňují rovnici $y = kx$. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{kx^3}{x^2+2k^2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{kx}{1+2k^2}\right) = 0.$$

Máme teď podezření, že by limita mohla být 0, ale bohužel toto jako důkaz nestačí, protože k počátku je možné se blížit i jinými cestami. Populární jsou třeba paraboly $y = kx^2$, ale i po nich se dostáváme s limitou do nuly (zkuste).
Je zřejmé, že není možné vyzkoušet takto postupně **všechny** možné cesty k počátku, tudíž je třeba jiný nápad. Danou funkci nelze dost dobře přepsat v jiný výraz, čímž padá další populární trik. Zo zbývá? Zkusme se podívat, co se vlastně v limitě děje. Ptáme se, co se stane, když $(x,y) \to (0,0)$. To podle definice znamená, že $\|(x,y)\| \to 0$. Jeden z možných přístupů je porovnat části zlomku s normou bodu.
Ve jmenovateli to je jasné: $x^2+y^2 \le x^2+2y^2 \le 2x^2+2y^2$, tedy $\|(x,y)\|^2 \le x^2+2y^2 \le \sqrt{2}\|(x,y)\|^2$. Jak je tomu v čitateli? Dolní odhad normou dost rozumně nejde, i pro body s relativně velkou normou může být výraz x^2y velice malý (stačí dát třeba $x = 0$). Naopak to ale jde, je-li norma malá, musí být i výraz malý:

$$|x^2y| = x^2\sqrt{y^2} \le (x^2+y^2)\sqrt{y^2} \le (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|^3.$$

Můžeme tedy odhadovat

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right| = \frac{|x^2y|}{x^2+2y^2} \le \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\|.$$

Pokud tedy pošleme $\|(x,y)\| \to 0$, pak podle věty o srovnání musí $\frac{x^2y}{x^2+2y^2} \to 0$. Závěr:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right) = 0.$$

5. Definiční obor je dán podmínkou $x^2 - y^2 \neq 0$, máme

$$D(f) = \{(x,y) \in I\!R^2;\ |x| \neq |y|\}.$$

Z roviny tedy vyjímáme diagonální přímky.
a) Limita v bodě $(1,1)$. Tento bod neleží v $D(f)$, ale leží na jeho hranici, limita má smysl. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) \overset{\frac{2}{0}}{=\!=} \text{diverguje}.$$

Je možné, aby limita divergovala, ale pořád existovala, tedy aby byla ∞ či $-\infty$? To záleží na znaménku té 0 ve jmenovateli. Zde je ale jasné, že když se bod (x,y) blíží v rovině k bodu $(1,1)$, tak to lze dělat tak, aby bylo $x > y > 1$, pak máme ve zlomku $\frac{2}{0^+} = \infty$, je ale také snadné jít k bodu $(1,1)$ tak, aby bylo $1 < x < y$, pak máme ve zlomku $\frac{2}{0^-} = -\infty$. Závěr:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) \text{ neexistuje}.$$

b) Limita v bodě $(1,-1)$. Tento bod neleží v $D(f)$, ale leží na jeho hranici, limita má smysl. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{=} ?$$

Neurčitý výraz, zkusíme proto tradiční přístup a budeme se k bodu $(1,-1)$ blížit po přímkách, nejprve rovnoběžných s osami. Začneme s $x=1$ a $y\to -1$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ x=1}}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)=\lim_{y\to -1}\Big(\frac{1+y^3}{1-y^2}\Big) \underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{y\to -1}\Big(\frac{3y^2}{-2y}\Big)=\lim_{y\to -1}\Big(\frac{3y}{-2}\Big)=\frac{3}{2}.$$

Teď rovnoběžně s osou x, tedy zvolíme $y=-1$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ y=-1}}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x^3-1}{x^2-1}\Big) \underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\Big(\frac{3x^2}{2x}\Big)=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{3x}{2}\Big)=\frac{3}{2}.$$

Vyšlo to stejně, ale už víme, že to nemusí nic znamenat. Zkusíme proto jít do $(1,-1)$ po přímkách obecných, se směrnicí k. Všimněte si, že se můžeme s body (x,y) blížit jen skrz definiční obor, proto nelze použít přímku se směrnicí $k=-1$. Pokud se body (x,y) blíží k $(1,-1)$ po přímce N_k se směrnicí k, pak splňují rovnici $y-(-1)=k(x-1)$. Uvažujme tedy situaci, kdy $x\to 1$ a bereme body $(x,y)=(x,kx-k-1)$ pro $k\neq -1$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ (x,y)\in N_k}}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)&=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x^3+(kx-(k+1))^3}{x^2-(kx-(k+1))^2}\Big)\\ &=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x^3+k^3x^3-3k^2x^2(k+1)+3kx(k+1)^2-(k+1)^3}{x^2-k^2x^2-(k+1)^2+2kx(k+1)}\Big)\\ &=\frac{1+k^3-3k^2(k+1)+3k(k+1)^2-(k+1)^3}{1-k^2-(k+1)^2+2k(k+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} ?\end{aligned}$$

Tak nic, zamyslíme se, jestli by to nešlo jinak. Nepomohla by algebra? Čitatel i jmenovatel přece umíme rozložit.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\Big(\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}\Big)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\Big(\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\Big)=\frac{3}{2}.$$

Takže tato limita konverguje.

c) Limita v bodě $(0,0)$. Tento bod neleží v $D(f)$, ale leží na jeho hranici, limita má smysl. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{=} ?$$

Zase neurčitý výraz. Pomůže zkrácení jako výše?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{=} ?$$

Takže nic. Zkusíme tradiční přístup, k počátku $(0,0)$ se budeme blížit po přímkách. Pokud se body (x,y) blíží k $(0,0)$ po přímce se směrnicí k, pak splňují rovnici $y=kx$. Všimněte si, že se můžeme s body (x,y) blížit jen skrz definiční obor, proto nelze použít přímky se směrnicemi $k=\pm 1$. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x^3+(kx)^3}{x^2-(kx)^2}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x^3(1+k^3)}{x^2(1-k^2)}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(x\frac{1+k^3}{1-k^2}\Big)=0.$$

Máme podezření, že by limita mohla být 0, ale bohužel toto jako důkaz nestačí, protože k počátku je možné se blížit i jinými cestami. Populární jsou třeba paraboly $y=kx^2$, ale i po nich se dostáváme do nuly (zkuste).

Šlo by si limitu přepsat ještě jinak?

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{(x-y)^2+xy}{x-y}\Big)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(x-y+\frac{xy}{x-y}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{xy}{x-y}\Big)\\ &= 0 + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{xy}{x-y}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{xy}{x-y}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{=} ?\end{aligned}$$

Zatím máme podezření, že by limita mohla být nula. Opravdu platí, že když se body (x,y) blíží k počátku, tak se výraz xy zmenšuje rychleji než výraz $x-y$? Vlastně ani ne. Na to je ale třeba trochu použít přístup z definice. Řekněme, že se omezíme na body z nějakého δ-okolí počátku, tedy $\|(x,y)\| < \delta$. Pak souřadnice x,y mohou být relativně velké, například pro body blízko diagonále je x,y blízké $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta$, pak i jejich součin je relativně velký, jmenovitě okolo $\frac{1}{2}\delta^2$, zatímco pro rozdíl $x-y$ žádné omezení nemáme, můžeme jej udělat libovolně malý (a celý zlomek pak libovolně velký) tím, že bereme body velice blízké diagonále, nedokážeme tomu zabránit žádnou podmínkou typu „ať je bod blízko počátku“. Vypadá to tedy, že i když se omezíme na malé okolí počátku, tak stejně dokážeme zlomek nechat „vybouchnout“.

Takže možná limita neexistuje. Abychom to viděli, je třeba vymyslet dráhu, která by se cestou k počátku výrazně přibližovala k diagonále, pokud možno rychleji, než se blížíme k počátku. Po experimentování je možné přijít například s křivkou $y = x + kx^2$, tedy $y-x$ se k nule blíží výrazně rychleji, než x a y samotné. Zkusíme to.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x+kx^2}}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big) &= \lim_{x\to0}\Big(\frac{x^3+(x+kx^2)^3}{x^2-(x+kx^2)^2}\Big) = \lim_{x\to0}\Big(\frac{x^3+x^3+3kx^4+3k^2x^5+k^3x^6}{x^2-x^2-2kx^3-k^2x^4}\Big)\\ &= \lim_{x\to0}\Big(\frac{2x^3+3kx^4+3k^2x^5+k^3x^6}{-2kx^3-k^2x^4}\Big) = \lim_{x\to0}\Big(\frac{2+3kx+3k^2x^2+k^3x^3}{-2k-k^2x}\Big) = -\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Výsledek závisí na k, tudíž limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big)$ nemůže existovat.

Mimochodem, zajímavá volba je křivka $y = x + x^3$, kdy se $y - x$ k nule blíží ještě rychleji. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x+x^3}}\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\Big) &= \lim_{x\to0}\Big(\frac{x^3+(x+x^3)^3}{x^2-(x+x^3)^2}\Big) = \lim_{x\to0}\Big(\frac{x^3+x^3+3x^5+3x^7+x^9}{x^2-x^2-2x^4-x^6}\Big)\\ &= \lim_{x\to0}\Big(\frac{2x^3+3x^5+3x^7+x^9}{-2x^4-x^6}\Big) = \lim_{x\to0}\Big(\frac{2+3x+3x^3+x^5}{-2x-x^3}\Big) \overset{\frac{2}{0}}{=} \text{neexistuje}.\end{aligned}$$