14. domácí cvičení

(číselné řady)

14/1) Vyšetřete součty řad:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(\frac{(2n+1)\,n}{(n+1)\,(2n-1)}\Big)$.

14/2) Určete, zda řada konverguje, diverguje nebo osciluje (tj. vyšetřete součet řady). Pokud řada konverguje, sečtěte ji.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\Big)$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\cos k\pi}{5^k}\Big)$, d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2-\mathrm{j}}{(2-3\,\mathrm{j}\,)^n}$.

14/3) Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ konverguje daná řada a pro tato x, z řadu sečtěte.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{x+2}{x}\Big)^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{5-3\,\mathrm{j}}{2\,\mathrm{j}\,-z}\Big)^{k+1}$.

14/4) Zjistěte, zda řada konverguje, diverguje nebo osciluje. Vyzkoušejte, která kritéria lze použít.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,3^n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\Big(\frac{2n+1}{n+100}\Big)^n$.

14/5) Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^n}$. Vyzkoušejte, která kritéria lze použít.

14/6) Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$. Vyzkoušejte, která kritéria lze použít.

14/7) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

14/8) Určete, pro jaká $a \in \mathbb{R}$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n$ konverguje absolutně, konverguje neabsolutně, diverguje, osciluje.

— —

Výsledky:

14/1) a) $a_n = \sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1} > 1$, tedy $s_N > N$ a $\lim_{N\to\infty} s_N \geq \lim_{N\to\infty} N = +\infty$. Odtud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, tj. řada diverguje.

b) $a_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}$, $s_N = (\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})+\ldots+(\sqrt{2N+1}-\sqrt{2N-1})+$
$+(\sqrt{2N+3}-\sqrt{2N+1}) = \sqrt{2N+3}-\sqrt{3}$. Odtud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N = +\infty$, a řada diverguje.
Divergenci řady bychom zde mohli dostat také ze srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 3$ je
$\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{3n}+\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

c) $a_n = \big(\ln(2n+1)-\ln(2n-1)\big)+\big(\ln n-\ln(n+1)\big)$; $s_N = \big[(\ln 3-\ln 1)+(\ln 1-\ln 2)\big]+$
$+\big[(\ln 5-\ln 3)+(\ln 2-\ln 3)\big]+\ldots+\big[(\ln(2N+1)-\ln(2N-1))+(\ln N-\ln(N+1))\big] =$
$= \big[(\ln 3-\ln 1)+(\ln 5-\ln 3)+\ldots+(\ln(2N+1)-\ln(2N-1)\big]+$
$= \big[(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\ldots+(\ln N-\ln(N+1))\big] = \big[\ln(2N+1)-\ln 1\big]+\big[\ln 1-\ln(N+1)\big] =$
$= \ln\Big(\frac{2N+1}{N+1}\Big)$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2$ a řada konverguje.

14/2) a) $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$; po úpravě jako v příkladu 13/1) $s_N = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right)$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{11}{18}$ a řada konverguje.

b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}} =$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, řada konverguje.

c) $\cos k\pi = (-1)^k$, tedy $a_k = \left(-\frac{1}{5}\right)^k$, $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$, takže $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$ a řada konverguje.

d) $a_n = (2-\mathrm{j})\left(\frac{1}{2-3\mathrm{j}}\right)^n$, $\left|\frac{1}{2-3\mathrm{j}}\right| = \frac{1}{\sqrt{13}} < 1$; $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{2-\mathrm{j}}{(2-3\mathrm{j})^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2-3\mathrm{j}}} = \frac{2-\mathrm{j}}{(2-3\mathrm{j})^2}\cdot\frac{2-3\mathrm{j}}{1-3\mathrm{j}} =$ $= \frac{2-\mathrm{j}}{(2-3\mathrm{j})(1-3\mathrm{j})} = \frac{2-\mathrm{j}}{-7-9\mathrm{j}} = \frac{-5+25\mathrm{j}}{130} = \frac{-1+5\mathrm{j}}{26}$, řada konverguje.

14/3) a) $\left|\frac{x+2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < |x|$ (tj. vzdálenost x od -2 je menší než od nuly) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$; $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{x+2}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{x}} = \frac{x+2}{x}\cdot\frac{x}{x-(x+2)} = -\frac{x+2}{2}$.

b) $\left|\frac{5-3\mathrm{j}}{2\mathrm{j}-z}\right| < 1 \Leftrightarrow |5-3\mathrm{j}| < |2\mathrm{j}-z| \Leftrightarrow \sqrt{34} < |z-2\mathrm{j}|$; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{5-3\mathrm{j}}{2\mathrm{j}-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{5-3\mathrm{j}}{2\mathrm{j}-z}} = \frac{5-3\mathrm{j}}{5\mathrm{j}-5-z}$.

14/4) Protože jde o řady s nezápornými členy, nemohou oscilovat.

a) Řada **konverguje** podle kritéria srovnávacího $\left(a_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, podílového $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3(n+2)} < \frac{1}{3} < 1\right)$, podílového limitního $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3} < 1\right)$, odmocninového $\left(\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}\cdot 3} < \frac{1}{3}\right)$ a odmocninového limitního $\left(\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{3}\right.$, protože se dá ukázat, že $\left.\sqrt[n]{n+1} \to 1\right)$; bylo by možné použít i „limitní srovnávací“ kritérium.

b) Řada **konverguje**, dobře vychází podílové limitní kritérium $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)} \to 0\right)$, příp. i podílové $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)} \le \frac{7^3}{(2\cdot 12-3)(2\cdot 12-4)} = \frac{343}{420} < 1 \text{ pro } n \ge 12\right)$

c) Řada **diverguje**, dobře vycházejí kritéria srovnávací $\left(a_n \ge 3 \text{ pro } n \ge 99\right)$, podílové $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n^2+203n+300}{2n^2+203n+101}\right)^n\cdot\frac{2n+3}{n+101} > \frac{2n+3}{n+101} \ge 1 \text{ pro } n \ge 98\right)$, odmocninové $\left(\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3}\,\frac{2n+1}{n+100} \ge 1 \text{ pro } n \ge 99\right)$ a odmocninové limitní $\left(\sqrt[n]{a_n} \to 2\right.$, protože $\left.\sqrt[n]{3} \to 1\right)$

14/5) Řada **konverguje** podle kritéria srovnávacího $\left(a_n \le \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n \text{ pro } n \ge 2 \text{ a } \left|\frac{1}{\ln 3}\right| < 1\right)$, podílového $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right)^n\cdot\frac{1}{\ln(n+2)} < 1\cdot\frac{1}{\ln 3} < 1\right)$, podílového limitního $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1\right)$, odmocninového $\left(\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln(n+1)} \le \frac{1}{\ln 3} < 1 \text{ pro } n \ge 2\right)$ a odmocninového limitního $\left(\sqrt[n]{a_n} \to 0 < 1\right)$.

14/6) Řada **diverguje** podle kritéria srovnávacího (např. pro $n \ge 1$ je $a_n \ge \frac{1}{\sqrt{5n}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje – NEBO: pro $n \ge 1$ je $a_n \ge \frac{1}{\sqrt{5n}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje), „srovnávacího limitního“ (např. pro $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ je $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n+1}} = \sqrt{\frac{n}{4n+1}} \to \frac{1}{2} \in (0,\infty)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje) a integrálního $\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_1^{\infty} = +\infty\right)$.

14/7) Řada **konverguje neabsolutně**: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria $\left((a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right.$ je nerostoucí, $a_n \ge 0$, $\left.a_n \to 0\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ diverguje podle kritérií: srovnávacího $\left(|b_n| > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ diverguje}\right)$ a integrálního (funkce $\frac{1}{2x-1}$ je nezáporná a nerostoucí a $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^{\infty} = +\infty$)

14/8) Řada pro $|a| < 1$ **konverguje absolutně** (podle kritéria podílového limitního $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a|\cdot\frac{n+1}{n} \to |a| < 1\right)$, odmocninového limitního $\left(\sqrt[n]{|a_n|} = |a|\sqrt[n]{n} \to |a| < 1\right)$),

pro $a \ge 1$ **diverguje** (podle kritéria srovnávacího $\left(a_n > n \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} n \text{ diverguje}\right)$, podílového $\left(a_n \ge 0 \text{ a } \frac{a_{n+1}}{a_n} = a\cdot\frac{n+1}{n} > a \ge 1\right)$, odmocninového $\left(a_n \ge 0 \text{ a } \sqrt[n]{a_n} = a\cdot\sqrt[n]{n} > a \ge 1\right)$, pro $a > 1$ lze použít i limitní verze podílového a odmocninového kritéria),

pro $a \le -1$ **osciluje**