MA 9-22

1. Na jednotkové sféře nalezněte bod, kde výraz $x - 2y + 2z$ je největší možný.

2. Přepište následující integrál

$$\int_{-1}^{0} \int_{x}^{-x^2} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Gaussovy věty zjistěte tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ hranicí tělesa P omezeného plochami $z = 1 - x^2 - y^2$ a $z = 0$. Orientace je dána vnější normálou.

4. Určete parametr $\xi \in \mathbb{R}$ tak, aby pole $\vec{F} = \left(\dfrac{\xi y}{1 + \xi^2 x^2}, \operatorname{arctg} \xi x \right)$ bylo potenciální a příslušný potenciál vypočtěte.

5. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodického rozšíření funkce

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ -1, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech se řada rovná funkci f.

Řešení.

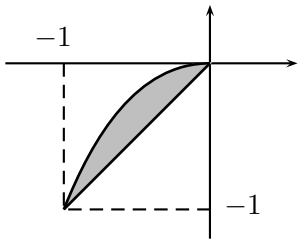
1. Vazebná podmínka je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, a tak Lagrangeova funkce má tvar

$$L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Máme dva stacionární body $\pm(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Největší hodnota daného výrazu je v bodě $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{-y}}^{y} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{\pi}^{5\pi/4} \int_{0}^{-\sin\varphi/\cos^2\varphi} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Protože $\operatorname{div} \vec{F} = 2(x+y+z)$ máme podle Gaussovy věty

$$\iint_{(\partial P)} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_P 2(x+y+z)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\varrho^2} 2(\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi + z)\varrho\, dz\, d\varrho\, d\varphi = \frac{pi}{3}.$$

4. Pole $\vec{F}$ je potenciální pro všechny hodnoty parametru $\xi \in \mathbb{R}$ a potenciál je $f = y\operatorname{arctg}(\xi x) + K$.

5. Řada má tvar

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cos kx + \Big(-\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k}\Big)\sin kx$$

a její součet se rovná funkci f pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.