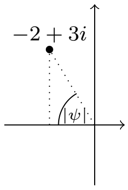
Cvičení 1 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Nejprve číslo převedeme do algebraického tvaru. Rozšířením komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli dostaneme*

$$\frac{6+2i}{-1-2i} = \frac{6+2i}{-1-2i} \cdot \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{-6+12i-2i-4}{1+4} = -2+2i.$$

Dále $i^{81} = i^{80}i = i$, *takže* $z = -2+2i+i = -2+3i$. *Tedy* $\operatorname{Re} z = -2$ *a* $\operatorname{Im} z = 3$.

Nyní převedeme z *do goniometrického/exponenciálního tvaru. Jest* $r = |z| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$. *Vidíme, že číslo* z *leží v druhém kvadrantu. (Nějaký) argument* φ *čísla* z *tedy můžeme určit například jako* $\varphi = \pi - |\psi|$, *kde* $|\psi|$ *je velikost (neorientovaného) úhlu* ψ *v pravoúhlém trojúhelníku:*



Vidíme, že $\operatorname{tg}|\psi| = \frac{3}{2}$, *takže* $|\psi| = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. *Tedy* $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. *Je dobré si uvědomit, že takto zvolený úhel* φ *je zároveň hlavní hodnota argument čísla* z.

Úloha 2. *Máme*

$$|z| = |(-2-2i)^{13}||(3+3i)^{20}| = |-2-2i|^{13}|3+3i|^{20}.$$

Jest $|-2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ *a* $|3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$, *takže*

$$|z| = \left(\sqrt{8}\right)^{13}\left(\sqrt{18}\right)^{20}.$$

Vidíme, že čísla (-2 - 2i) a $(3+3i)$ *leží popořadě na ose 3. a 1. kvadrantu, takže snadno určíme jejich (dokonce hlavní) hodnotu argumentu. Jest* $\arg(-2-2i) = -\frac{3}{4}\pi$ *a* $\arg(3+3i) = \frac{\pi}{4}$. *Vzpomeneme si na geometrickou interpretaci násobení. Víme, že* $13 \cdot (-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{39}{4}\pi$ *je (nějaký) argument čísla* $(-2-2i)^{13}$ *a* $20 \cdot \frac{\pi}{4} = 5\pi$ *je (nějaký) argument čísla* $(3+3i)^{20}$. *Takže* $-\frac{39}{4}\pi + 5\pi = -\frac{19}{4}\pi$ *je nějaký argument čísla* z. *Uvědomíme si, že (např.)* $-\frac{19}{4}\pi = -4\pi - \frac{3}{4}\pi$, *takže číslo* z *leží ve 3. kvadrantu (nejprve 2krát oběhneme kružnici v záporném směru a poté ještě pokračujeme v záporném směru o úhel velikosti* $\frac{3}{4}\pi$*). Vidíme, že* $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$.

Úloha 3. *Řešení najdeme v exponenciálním tvaru, tj.* $z = |z|e^{i\varphi}$ *pro vhodné* $\varphi \in \mathbb{R}$. *S využitím* $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ *si také pravou stranu vyjádříme v exponenciálním tvaru jako* $-5i = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$. *Na levé straně využijeme Moivreovu větu. Tedy*

$$\begin{aligned} z^3 &= -5i \\ |z|^3 e^{3\varphi i} &= 5e^{-\frac{\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

Takže $|z|^3 = 5$ *a* $3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$. *Odtud* $|z| = \sqrt[3]{5}$ *a* $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi$. *Všechna různá řešení rovnice lze tedy zapsat (např.) jako* $z_k = \sqrt[3]{5}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)}$ *pro* $k = 0, 1, 2$.