Vypracoval: Khorin

Korektura: Rutherther

Případné připomínky a hlášení chyb:

Discord: Khorin#3817, Rutherther#8497

Důležité identity k memorování

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

$$\det\left(A^T\right)=\det(A)$$

$$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$$

$$\det\left(k\cdot A_{n\times n}\right)=k^n\cdot\det(A)$$

$$\det\left(\operatorname{adj}(A)\right)=\left(\det(A)\right)^{n-1}$$

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$

$$\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

$$\operatorname{adj}(A\cdot B)=\operatorname{adj}(B)\cdot\operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}\left(A^T\right)=\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T$$

$$\operatorname{sign}(\pi\cdot\sigma)=\operatorname{sign}(\pi)\cdot\operatorname{sign}(\sigma)$$

$$\operatorname{sign}(\pi)=\operatorname{sign}\left(\pi^{-1}\right)$$

$$<a\,|\,b>=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\alpha)$$

$$<a\,|\,a>=\|a\|^2$$

$$<\alpha\cdot a\,|\,b>=\alpha\cdot<a\,|\,b>$$

$$<a+c\,|\,b>=<a\,|\,b>+<c\,|\,b>$$

$$\operatorname{proj}_u(v)=\frac{<v\,|\,u>}{<u\,|\,u>}\cdot u$$

$$\operatorname{rej}_u(v)=v-\operatorname{proj}_u(v)$$

$$\operatorname{proj}_{\operatorname{span}(s_1,s_2,\dots,s_n)}(v) = \frac{<v\,|\,s_1>}{<s_1\,|\,s_1>}s_1 + \frac{<v\,|\,s_2>}{<s_2\,|\,s_2>}s_2 + \cdots + \frac{<v\,|\,s_n>}{<s_n\,|\,s_n>}s_n$$

Projekce vektoru x na podprostor, u kterého neznáme ortogonální bázi a matice A je jakoukoliv bází tohoto prostoru:

a) S metrickým tensorem:

$$\operatorname{proj}_W(x) = A\cdot\left(A^T\cdot G\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot G\cdot x$$

b) Se standardním skalárním součinem

$$\operatorname{proj}_W(x) = A\cdot\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot x$$

Vzdálenost bodu p' od přímky π ve tvaru $\pi = p + \operatorname{span}(s)$ v $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(p',\pi) = \left\|(p-p') - \frac{<s\,|\,p-p'>}{<s\,|\,s>}\cdot s\right\|$$

Vzdálenost přímky π' ve tvaru $\pi' = p' + \operatorname{span}(s')$ od roviny π ve tvaru $\pi = p + \operatorname{span}(s_1,s_2)$ v $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(\pi',\pi) = \frac{\left|\det(s_1,s_2,p'-p)\right|}{\sqrt{\operatorname{Gram}(s_1,s_2)}}$$

Vzdálenost přímky π ve tvaru $\pi = p + \operatorname{span}(s)$ od přímky π' ve tvaru $\pi' = p' + \operatorname{span}(s')$ v $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(\pi',\pi) = \frac{\left|\det(s',s,p'-p)\right|}{\sqrt{\operatorname{Gram}(s',s)}}$$

Cauchy-Schwarz-Bunyakovski nerovnost:

$$\left|<x\,|\,y>\right| \le \sqrt{<x\,|\,x>}\cdot\sqrt{<y\,|\,y>}$$

Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$A\cdot v = \lambda\cdot v$$

Důkazy identit

$$\underline{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

$$A \cdot B = A \cdot B$$

Vezmeme inversi z obou stran.

$$(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = E_n$$

Vynásobíme zleva maticí A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$$

$$B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$$

Vynásobíme zleva maticí B^{-1}.

$$B^{-1} \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\underline{\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}}$$

Použijeme již známou rovnost, což je naprosto validní krok.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

$$\det(A) \cdot A^{-1} = \mathrm{adj}(A)$$

$$\det(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A$$

$$\det(\det(A)) = \det(\mathrm{adj}(A) \cdot A)$$

Můžeme si všimnout, že $\det(\det(A))$ je vlastně $\det(\det(A) \cdot E_n)$, kde $\det(A)$ je číslo, takže můžeme použít $\det(k \cdot A_{n \times n}) = k^n \cdot \det(A)$, takže máme $(\det(A))^n \cdot \det(E_n) = (\det(A))^n$.

$$(\det(A))^n = \det(\mathrm{adj}(A))$$

$$\frac{(\det(A))^n}{\det(A)} = \det(\mathrm{adj}(A))$$

$$\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

$$\underline{\det(k\cdot A_{n\times n}) = k^n\cdot\det(A)}$$

Z definice víme, že platí $\det(A)=\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}(\pi)\cdot a_{\pi(1),1}\cdot a_{\pi(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n}$. Pro $\det(k\cdot A)$ tedy platí

$$\det(k\cdot A)=\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}(\pi)\cdot k\cdot a_{\pi(1),1}\cdot k\cdot a_{\pi(2),2}\cdot\ldots\cdot k\cdot a_{\pi(n),n},$$

$$\det(k\cdot A)=\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}(\pi)\cdot k^n\cdot a_{\pi(1),1}\cdot a_{\pi(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n}=k^n\cdot\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}(\pi)\cdot a_{\pi(1),1}\cdot a_{\pi(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n},$$

což je $k^n\cdot\det(A)$.

$$\underline{<a\,|\,a>=\|a\|^2}$$

$$<a\,|\,a>=a^T\cdot a=(a_1,\ldots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\cdot a_1\\ \vdots\\ a_n\cdot a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^2\\ \vdots\\ a_n^2\end{pmatrix}$$

$$\underline{<\alpha\cdot a\,|\,b>=\alpha\cdot<a\,|\,b>}$$

$$<\alpha\cdot a\,|\,b>=(\alpha\cdot a)^T\cdot b=(\alpha\cdot a_1,\ldots,\alpha\cdot a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\alpha\cdot(a_1,\ldots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\alpha\cdot<a\,|\,b>$$

$$\underline{<a+c\,|\,b>=<a\,|\,b>+<c\,|\,b>}$$

$$<a+c\,|\,b>=(a+c)^T\cdot b=(a_1+c_1,\ldots,a_n+c_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=(a_1,\ldots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}+(c_1,\ldots,c_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=<a\,|\,b>+<c\,|\,b>$$

$$\underline{\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)$$

$$\det(A^{-1})=\det\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)\right)=\det\left((\det(A))^{-1}\right)\cdot\det(\operatorname{adj}(A))$$

A protože $\det(\operatorname{adj}(A))=(\det(A))^{n-1}$, tak musí platit

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)^{-n}}\cdot(\det(A))^{n-1}=\det(A)^{-1}=\frac{1}{\det(A)}.$$

$$\operatorname{adj}\left(A^T\right)=\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)$$

$$\det\left(A^{-1}\right)=\det\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)\right)$$

$$\det\left(A^{-1}\right)=\det\left(\frac{1}{\det(A)}\right)\cdot\det\left(\operatorname{adj}(A)\right)$$

$$\frac{1}{\det\left(A^T\right)}=\det(A)^{-n}\cdot\det\left(\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T\right)$$

$$\frac{1}{\det(A)}\cdot\det(A)^n=\det\left(\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T\right)$$

$$\frac{1}{\det\left(A^T\right)}\cdot\det\left(A^T\right)^n=\det\left(\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T\right)$$

$$\left(\det\left(A^T\right)\right)^{n-1}=\det\left(\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T\right)$$

a protože $\left(\det(A)\right)^{n-1}=\det\left(\operatorname{adj}(A)\right)\Rightarrow\left(\det\left(A^T\right)\right)^{n-1}=\det\left(\operatorname{adj}(A)^T\right)$, musí platit

$$\det\left(\operatorname{adj}\left(A^T\right)\right)=\det\left(\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T\right)$$

$$\operatorname{adj}\left(A^T\right)=\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T.$$

$$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$$

$$A^{-1}\cdot A=E_n$$

$$\det\left(A^{-1}\cdot A\right)=\det\left(E_n\right)$$

$$\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det(A)=1$$

$$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$$

$$\underline{\left(A\cdot B\right)^T = B^T\cdot A^T}$$

$$\left(A\cdot B\right)^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{in} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{in} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{i1} \\ \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{i2} & \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{1i}\cdot b_{in} & \sum_{i=1}^n a_{2i}\cdot b_{in} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}\cdot b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_{i1}\cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n b_{i1}\cdot a_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n b_{i1}\cdot a_{ni} \\ \sum_{i=1}^n b_{i2}\cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n b_{i2}\cdot a_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{i2}\cdot a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{in}\cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n b_{in}\cdot a_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{in}\cdot a_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B^T\cdot A^T$$

$$\underline{\left(A+B\right)^T = A^T + B^T}$$

$$\left(A+B\right)^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = A^T + B^T$$

29. 1. 2019

Část A:

1. Následující podmnožina množiny $R[x]$ je lineárním podprostorem prostoru $R[x]$:
   a) Množina všech polynomů sudého stupně společně s nulovým polynomem.
   b) Množina všech polynomů nemajících reálný kořen.
   c) Množina všech polynomů stupně přesně 2019 spolu s nulovým polynomem.
   d) Množina všech polynomů s nulovými koeficienty u sudých mocnin.
2. V lineárním prostoru V mějme lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u, v, w\}$. Následující množina vektorů je lineárně závislá:
   a) $\{v, w+u, w-v+u\}$.
   b) $\{v+w, w+u, u+v\}$.
   c) $\{v, v-w, v+w+u\}$.
   d) $\{2\cdot v, 2\cdot w, 2\cdot u\}$.
3. Mějme lineární prostor V, lineární zobrazení $f: V \to V$, a dva lineárně nezávislé vektory $v \in V, w \in V$, které jsou vlastními vektory lineárního zobrazení f příslušnými vlastnímu číslu λ. Potom platí:
   a) $f(v) = \lambda \cdot w$.
   b) Vektor $2\cdot v$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2\cdot\lambda$.
   c) Vektor $f(v)$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2\cdot\lambda$.
   d) Pro nenulové skaláry α a β je vektor $\alpha\cdot v+\beta\cdot w$ vlastním vektorem lineárního zobrazení f.
4. Ať A je čtvercová matice typu 3×3 a ať $\det(A)=3$. Potom nutně platí (E_3 je jednotková matice typu 3×3):
   a) $\det(-A)=-3$
   b) $\det(A+E_3)=3+1=4$
   c) $\det(A+A)=3+3=6$
   d) $\det(A^3)=3\cdot 3=9$

Část B:

Definujte pojem skalární součin na obecném lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$. Pozor, nedefinujte standardní skalární součin.

Ať $\langle - | - \rangle$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že pokud matice $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje rovnost $\langle x | x' \rangle = \langle A \cdot x | A \cdot x' \rangle$ pro všechny dvojice x, x' vektorů z $\mathbb{R}^n$, pak je A regulární a splňuje rovnost $A^T \cdot A = E_n$.

Část C:

Ať T je seznam vektorů z $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ a ať p je přímka v $\mathbb{R}^4$:

$$T = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}), \ p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

Ortogonalisujte seznam T a nalezněte vzdálenost přímky p od podprostoru $\mathrm{span}(T)$.

Výsledky:

Část A:

1. d)

   Množina je uzavřená na sčítání i násobení a obsahuje nulu – třeba $0x^2$.

2. a)

   Lineární kombinace této množiny je $a_1 \cdot v + a_2 \cdot (w+u) + a_3 \cdot (w-v+u) = \vec{o}$ a pro nenulové koeficienty $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1$ vychází nulový vektor, takže je lineárně závislá.

3. d)

   Víme, že je zobrazení lineární a že platí $f(v) = \lambda \cdot v$ a $f(w) = \lambda \cdot w$. Pro lineární kombinaci $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ můžeme tedy napsat

   $$f(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w) = \alpha \cdot \lambda \cdot v + \beta \cdot \lambda \cdot w = \lambda \cdot (\alpha \cdot v + \beta \cdot w),$$

   tedy zkráceně $f(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \lambda \cdot (\alpha \cdot v + \beta \cdot w)$.

4. a)

   Využijeme identity $\det(k \cdot A) = k^n \cdot A$, kde n je rozměr matice. Dostáváme

   $$\det((-1) \cdot A) = (-1)^3 \cdot 3 = -3.$$

Část B:

Nechť $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení se čtvercovou maticí A. Předpokládejme, že platí rovnost $\langle x|x'\rangle = \langle A\cdot x|A\cdot x'\rangle$. Potom z definice skalárního součinu vyplývá

$$\langle x|x'\rangle = \langle A\cdot x|A\cdot x'\rangle, x, x'$$

$$x^T\cdot x' = (A\cdot x)^T\cdot A\cdot x'$$

$$x^T\cdot x' = A^T\cdot x^T\cdot A\cdot x'$$

$$x^T\cdot E_n\cdot x' = x^T\cdot A^T\cdot A\cdot x'$$

a protože toto platí pro všechny dvojice x, x', musí platit $A^T\cdot A = E_n$. Odtud

$$A^T\cdot A = E_n$$

$$\det\left(A^T\cdot A\right) = \det\left(E_n\right)$$

$$\det\left(A^T\cdot A\right) = 1$$

$$\det\left(A^T\right)\cdot\det\left(A\right) = 1$$

$$\det\left(A\right)\cdot\det\left(A\right) = 1$$

$$\det^2\left(A\right) - 1 = 0$$

$$\left(\det\left(A\right)-1\right)\cdot\left(\det\left(A\right)+1\right) = 0\,.$$

$\det\left(A\right)$ může tedy nabývat pouze hodnot 1 a -1, které jsou obě nenulové. Matice A je tedy regulární.

Část C:

$$T = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\\3\end{pmatrix}\right),\ p = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$$

Nazvěme $P = (p_1, p_2, p_3)$ ortogonální bází k bázi T. Provedeme Gram-Schmidtův ortogonalisační proces:

$$p_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}>} \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}1\\4\\0\\3\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}>} \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}1\\4\\0\\3\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}>} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},$$

Ortogonální báze k T je tedy $P = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$.

Nazvěme ω vzdáleností $\operatorname{span}(T)$ od p. Potom

$$\omega(\operatorname{span}(T), p) = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right|}} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\left|\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 14 \\ 6 & 14 & 26 \end{vmatrix}\right|}} = \frac{48}{24} = 2.$$

Vzdálenost $\operatorname{span}(T)$ od p je rovna číslu 2.

21.1.2020

Část A:

1. V této otázce je tělesem skalárů množina reálných čísel. Ať $f: L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $\vec{b}$ je vektor v L_2. Pak pro množinu $M = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{b}\}$ platí:
   a) Množina M tvoří lineární podprostor prostoru L_1.
   b) Množina M obsahuje nulový vektor.
   c) Když $\vec{x}_1 \in M$ a $\vec{x}_2 \in M$, pak $(3 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot \vec{x}_2) \in M$.
   d) Množina M obsahuje vektor $\vec{b}$.
2. Ať je B uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ a ať M je matice obsahující jako sloupce vektory z B (zapsané jako souřadnice vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$). Potom nutně platí:
   a) Matice M má kladný determinant.
   b) Sloupce matice $M \cdot M$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.
   c) Rozdíl $M - E_3$ je nulová matice.
   d) Matice M nemůže být positivně definitní.
3. Je dáno zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Víme, že pro libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^3$ platí, že $f(x) = 3 \cdot x$. Potom také platí:
   a) Existuje báze prostoru $\mathbb{R}^3$, vzhledem ke které má zobrazení f vlastní číslo 9.
   b) Matice zobrazení f vzhledem ke standardním bázím má determinant 3.
   c) Platí $\operatorname{eigen}(3, f) = \mathbb{R}^3$.
   d) $\operatorname{def}(f) = 3$.
4. Vektor v lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ má vzhledem k uspořádané bázi $(b_1, b_2, \ldots, b_8)$ souřadnice $(1,1,\ldots,1)^T$. Potom vektor $2 \cdot v$ má vzhledem k uspořádané bázi $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_8 + b_1)$ souřadnice:
   a) $(2,2,\ldots,2)^T$
   b) $(1,1,\ldots,1)^T$
   c) $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)^T$
   d) Souřadnice nelze určit, protože $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_8 + b_1)$ není uspořádaná báze.

Část B:

Definujte pojmy skalární součin a kolmost dvou vektorů vzhledem ke skalárnímu součinu na obecném lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$.

Definujte nebo vyvraťte následující tvrzení:

Ať $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou dva různé nenulové vektory v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $<-|->$. Jestliže $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou na sebe kolmé, potom $\vec{a}, \vec{b}$ jsou lineárně nezávislé.

Část C pro versi LAG:

Ať $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení, ať B, C, D jsou báze prostoru $\mathbb{R}^2$. Dále

$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ je matice f vzhledem k bázím B a C, $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ je matice f vzhledem k D a C.

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^2$ platí $\operatorname{coord}_B(x) = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$. Spočtěte $\operatorname{coord}_D(x)$.

Část C pro versi LAGA:

Ať $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -8 \\ 8 & -4 & 8 \\ -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ jsou reálné matice, X ať je neznámá reálná matice komutující s maticí A. Vyřešte maticovou rovnost $X \cdot C = A \cdot X + B$.

Výsledky

Část A:

1. c)

   Pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$, tak platí $f\left(\vec{y}_1\right) = \vec{x}_1,\ f\left(\vec{y}_2\right) = \vec{x}_2$ pro nějaká $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ z L_1 . Potom platí

   $3\cdot\vec{x}_1 - 2\cdot\vec{x}_2 = 3\cdot f\left(\vec{y}_1\right) - 2\cdot f\left(\vec{y}_2\right) = f\left(3\cdot\vec{y}_1\right) - f\left(2\cdot\vec{y}_2\right) = f\left(3\cdot\vec{y}_1 - 2\cdot\vec{y}_2\right) = f\left(3\cdot\vec{x}_1 - 2\cdot\vec{x}_2\right)$

   a tím pádem je $3\cdot\vec{x}_1 - 2\cdot\vec{x}_2$ v množině M .

2. b)

   Pokud vektory z báze převedeme do sloupců čtvercové matice, bude vždy regulární. Je to proto, že báze generuje celý prostor, a tak pro jakýkoliv vektor z toho prostoru musí mít soustava řešení, a to právě souřadnice. Funguje to logicky i naopak. Každá regulární čtvercová matice má sloupce tvořící uspořádanou bázi prostoru rozměru matice.

   Potřebujeme se tedy ujistit, že $\det\left(M\cdot M\right)$ je také nenulový.

   Protože $\det\left(M\cdot M\right) = \det\left(M\right)\cdot\det\left(M\right) = \det^2\left(M\right)$, je logické, že je tato možnost pravdivá. Druhá mocnina nenulového čísla je rovněž nenulové číslo.

3. c)

   Zápis $\mathrm{eigen}\left(3, f\right)$ je označení pro vlastní prostor $\ker\left(f - 3\cdot E_n\right)$.

   Je poměrně těžké dokázat, že generuje celé $\mathbb{R}^3$, takže lze k odpovědi dojít vyloučením všech ostatních možností.

   Možnost a) to není, protože jsou vlastní čísla imunní vůči změně báze.

   Možnost b) to být nemůže, protože třeba matice s trojkami na hlavní diagonále má determinant roven 27 .

   Možnost d) je už od pohledu nesmyslná, neboť defekt roven třem má v tomto případě jen nulová matice.

   Zbývá tedy možnost c), nad kterou už není potřeba se zamýšlet.

4. d)

   Je moudré vyzkoušet nejdříve menší případy.

   $a_1\cdot\left(b_1 + b_2\right) + a_2\cdot\left(b_2 + b_1\right) = \vec{o}$ je netriviální pro $a_1 = 1, a_2 = -1$.

   $a_1\cdot\left(b_1 + b_2\right) + a_2\cdot\left(b_2 + b_3\right) + a_3\cdot\left(b_3 + b_1\right) = \vec{o}$ má jen triviální řešení.

   $a_1\cdot\left(b_1 + b_2\right) + a_2\cdot\left(b_2 + b_3\right) + a_3\cdot\left(b_3 + b_4\right) + a_4\cdot\left(b_4 + b_1\right) = \vec{o}$ je netriviální pro

   $a_1 = a_3 = 1, a_2 = a_4 = -1$. Je vidět, že pro sudou dimensi báze lze vymyslet netriviální řešení lineární kombinace, protože následuje určitý vzorec chování. Když máme lichou dimensi, máme i lichý počet součtů, a tak na jeden součet připadne, aby byl zároveň záporný i kladný a tím pádem nelze vymyslet netriviální řešení takové lineární kombinace. To znamená, že nový seznam v $\mathbb{R}^8$ bude lineárně závislý a nebude tak tvořit uspořádanou bázi $\mathbb{R}^8$

Část B:

Ať $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou dva různé nenulové vektory v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $<-|->$. Předpokládejme, že jsou na sebe $\vec{a}$ a $\vec{b}$ kolmé. Vezměme lineární kombinaci vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$

$$\alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} = \vec{o}\,.$$

Vezměme skalární součin s vektorem $\vec{a}$ z obou stran

$$< \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} \,|\, \vec{a} > = < \vec{o} \,|\, \vec{a} >$$

$$\alpha_1 \cdot < \vec{a} \,|\, \vec{a} > + \alpha_2 \cdot < \vec{b} \,|\, \vec{a} > = \vec{o}\,.$$

Protože z definice skalárního součinu platí $< \vec{a} \,|\, \vec{a} > \geq 0$ a $< \vec{a} \,|\, \vec{a} > = 0$ pouze a jen tehdy, když $\vec{a} = \vec{o}$. Víme však, že $\vec{a} \neq \vec{o}$, a proto tedy platí $< \vec{a} \,|\, \vec{a} > > 0$. Platí proto $\alpha_1 = \vec{o}$.

Vezměme skalární součin s vektorem $\vec{b}$ z obou stran

$$< \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} \,|\, \vec{b} > = < \vec{o} \,|\, \vec{b} >$$

$$\alpha_1 \cdot < \vec{a} \,|\, \vec{b} > + \alpha_2 \cdot < \vec{b} \,|\, \vec{b} > = \vec{o}\,.$$

Protože z definice skalárního součinu platí $< \vec{b} \,|\, \vec{b} > \geq 0$ a $< \vec{b} \,|\, \vec{b} > = 0$ pouze a jen tehdy, když $\vec{b} = \vec{o}$. Víme však, že $\vec{b} \neq \vec{o}$, a proto tedy platí $< \vec{b} \,|\, \vec{b} > > 0$. Platí proto $\alpha_2 = \vec{o}$.

Protože platí $\alpha_1 = \alpha_2 = \vec{o}$, jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}$ lineárně nezávislé.

Část C pro versi LAG:

$$[M]_{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ [N]_{D,C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \operatorname{coord}_B(x) = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hledáme matici transformace souřadnic $T_{B\to D}$ vzhledem k funkci f, pro kterou platí

$$T_{B\to D} = [M]_{B\to C} \circ [N]_{C\to D}.$$

Spočítáme $[N]_{C\to D}$, kterou je inversí matice $[N]_{D\to C}$.

$$T_{B\to C} = [N]_{C\to D} = [N]^{-1}{}_{D\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Dosadíme a dostáváme

$$T_{B\to D} = [N]_{C\to D} \cdot [M]_{B\to C} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 38 & 15 \\ 22 & 19 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\operatorname{coord}_D(x)$ je

$$\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 38 & 15 \\ 22 & 19 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 15 \\ 22 & 19 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Část C pro versi LAGA:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -8 \\ 8 & -4 & 8 \\ -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot C = A \cdot X + B$$

Protože matice X komutuje s maticí A, platí

$$X \cdot C = X \cdot A + B$$

$$X \cdot C - X \cdot A = B$$

$$X \cdot (C - A) = B$$

$$X = B \cdot (C - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -8 \\ 8 & -4 & 8 \\ -8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

16.1.2020

Část A:

1. Ať $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ jsou lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$. Pak je nutně pravda:
   a) Vektory $\vec{v}_1$ a $r \cdot \vec{v}_2$ jsou pro libovolné r z $\mathbb{F}$ lineárně nezávislé.
   b) Vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ jsou lineárně nezávislé.
   c) Každá lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ je rovna nulovému vektoru.
   d) Každý vektor z L lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$.
2. Ať B je matice typu 3×3 a ať soustavy $(B\,|\,e_1),(B\,|\,e_2)$ a $(B\,|\,e_3)$ mají každá právě jedno řešení (popořadě a_1, a_2 a a_3). Pak musí být nutně pravda:
   a) $\det(3\cdot B)=0$.
   b) $\det(B^3)>0$.
   c) K matici B existuje matice inversní.
   d) Seznam vektorů (a_1, a_2, a_3) je lineárně závislý.
3. Ať pro reálné matice A a B rozměrů 2×2 platí rovnost $AB^T = B^T A$. Potom je nutně pravda:
   a) $\left(A-B^T\right)^2 = A^2 - \left(B^T\right)^2$
   b) $\left(A^T-B\right)^2 = A^2 - 2A^T B + B^2$
   c) $\left(A-B^T\right)^2 = A^2 - 2AB^T + \left(B^T\right)^2$
   d) $\left(A^T-B^T\right)^2 = \left(A^T\right)^2 - 2A^T B^T + \left(B^T\right)^2$
4. Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$ dimense n, ať $f : L \longrightarrow \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Potom platí:
   a) Zobrazení f je monomorfismus.
   b) Matice M zobrazení f vzhledem k jakýmkoli bázím B a C je regulární.
   c) Zobrazení f je nilpotentní.
   d) Hodnost zobrazení f je maximálně rovna 1.

Část B:

Definujte pojmy afinní podprostor lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$ a dimense afinního podprostoru.
Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:
Ať je dáno $A:\mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ a ať b je v $\operatorname{im}(A)$. Potom množina $\{v\in\mathbb{F}^s \mid Av=b\}$ tvoří afinní podprostor prostoru $\mathbb{F}^s$ dimense $\operatorname{def}(A)$.

Část C pro LAGA: (LAG měla ortogonální rejekci, ale nemáme zadání.)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $<-|->$ s metrickým tensorem G ortogonalisujte seznam vektorů (e_1, e_2, e_3), kde $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix}4&3&0\\3&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$.

Výsledný ortogonální seznam zapište jako (v_1, v_2, v_3).

Část A:

1. b)
   U lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{o}$ neexistuje netriviální řešení a seznam je tak lineárně nezávislý.
2. c)
   Pokud je A čtvercová a má pouze jedno řešení pro nějaký nenulový vektor, je invertibilní.
3. c)
   Roznásobování závorek s maticemi je v podstatě stejné, jako s proměnnými, ale je potřeba brát v potaz obecnou nekomutativitu násobení matic a dodržovat tak pořadí násobení.
   $(A-B^T)^2 = (A-B^T)(A-B^T) = A^2 - AB^T - B^T A + (B^T)^2 = A^2 - AB^T - AB^T + (B^T)^2 = A^2 - 2AB^T + (B^T)^2$
4. d)
   Vyplývá z definice hodnosti zobrazení. Dimense obrazu nemůže být vyšší než dimense výsledného prostoru.

Část B:

Toto přímo vyplývá z Frobeniovy věty, kterou stačí korektně citovat a už není potřeba ji dokazovat.

Část C:

Provedeme Gram-Schmidtův ortogonalisační proces, ale pro skalární součin použijeme vzorec $<x\,|\,y> = x^T \cdot G \cdot y$, kde G je metrický tensor.

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Změna velikosti nemění ortogonalitu, a tak se můžeme jednoduše zbavit zlomků.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaný ortogonální seznam je $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

11.6.2019

Část A:

1. Ať $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Pokud má f jádro celé $\mathbb{R}^4$, pak matice zobrazení f není diagonalisovatelná.
   b) Pokud je f monomorfsmus, pak je f i isomorfismus.
   c) Zobrazení $x \to f(x)+e_1$ je také lineární.
   d) Pokud má f hodnost 3, pak f je monomorfismus.
2. Ať $S=(s_1,\ldots,s_m)$, $2 \le m \le n$, je lineárně nezávislý seznam vektorů z $\mathbb{R}^n$. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Seznam S nemůže generovat $\mathbb{R}^n$.
   b) Seznam S nemůže být bází $\mathbb{R}^n$.
   c) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam generovat $\mathbb{R}^n$.
   d) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně nezávislý.
3. Ať má soustava lineárních rovnic $A \cdot x = b$ právě jedno řešení. Potom nutně platí:
   a) Vektor b je nutně nulový.
   b) Matice A má více sloupců než řádků.
   c) Soustava lineárních rovnic $A \cdot x = o$ má právě jedno řešení.
   d) Matice A je čtvercová a determinant matice A je nenulový.
4. Pro lineární prostor L nad $\mathbb{F}$ a jeho libovolné podmnožiny M a N vždy platí:
   a) $\operatorname{span}(M) \subseteq \operatorname{span}(L/M)$.
   b) $\operatorname{span}(M \cup N) \subseteq \operatorname{span}(M) \cup \operatorname{span}(N)$.
   c) $\operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(N)$.
   d) $\operatorname{span}(M \cup N) \subseteq \operatorname{span}(L \cup (M \cap N))$.

Část B:

Definujte pojmy obraz (image) lineárního zobrazení z prostoru L_1 do prostoru L_2 a hodnost lineárního zobrazení.

Zformulujte a dokažte Frobeniovu větu o existenci a tvaru řešení soustav lineárních rovnic nad tělesem $\mathbb{F}$.

Část C:

V $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem je lineární podprostor W zadán rovnicí $3x+4y-z=0$. Nalezněte jakoukoliv bázi (b_1,b_2,b_3) prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby platilo $b_1 \in W$ a $b_2 \in W$. Ověřte jakýmkoli způsobem, že (b_1,b_2,b_3) je báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Bázi (b_1,b_2,b_3) ortogonalisujte Gram-Schmidtovým ortogonalisačním procesem. Výslednou ortogonální bázi označte (c_1,c_2,c_3) a ověřte, že je ortogonální.

Výsledky

Část A:

1. b)
   Pokud je f monomorfismus, tak platí $\operatorname{def}(f)=0$. Protože $\operatorname{rank}(f)=\dim(L_1)-\operatorname{def}(f)=4$, platí $\operatorname{rank}(f)=\dim(L_2)$ a zobrazení je tedy epimorfismus a proto zároveň isomorfismus.
2. d)
   Kdyby toto neplatilo, tak by byl původní seznam lineárně závislý, protože bychom místo odebrání odebíraný vektor vynulovali, použili ty samé koeficienty a seznam by tak byl lineárně závislý.
3. c)
   Pokud má soustava $A\cdot x=b$ jen jedno řešení, je buď b nulový – v tom případě c) stejně platí, protože vlastně kopíruje otázku. Pokud je b nenulový, tak má soustava $A\cdot x=o$ pouze triviální řešení, protože sloupce takové matice, aby bylo jen jedno řešení pro nenulový vektor musí být lineárně nezávislé a jejich lineární kombinace může být jen triviální. Pozor na možnost d). I nečtvercové matice mohou mít jen jedno řešení (pokud majínulový poslední řádek i poslední položku vektoru b, splňují podmínku $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\mid b)$ z Frobeniovy věty)
4. Množina $\operatorname{span}(L\cup(M\cap N))$ bude vždycky větší než $\operatorname{span}(M\cup N)$, protože vůbec nezáleží na velikosti $M\cup N$ napravo. Jedná se totiž o spojení L, které je fundamentálně větší než kterékoliv jeho podmnožiny a jelikož se jedná o operátor inklusivní podmnožiny, neexistuje způsob, jak by levá strana mohla být větší než pravá.

Část B:

(1):

Mějme matici $A:\mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ ve sloupcovém zápisu $(a_1,\dots,a_s)$ a vektor $\vec{b}$ z $\mathbb{F}^r$. Tvrdíme, že $(A\mid\vec{b})$ má řešení právě a jen tehdy, když $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\mid\vec{b})$.

Víme, že $(A\mid\vec{b})$ má řešení právě a jen tehdy, když $\vec{b}\in\operatorname{im}(A)$. Protože $\operatorname{im}(A)=\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)$, platí, že $(A\mid\vec{b})$ má řešení právě a jen tehdy, když $b\in\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)$. Stačí tedy dokázat, že $b\in\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)$ právě a jen tehdy, když $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\mid\vec{b})$.

Protože $b\in\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)$ právě a jen tehdy, když $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)=\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s,\vec{b})$, stačí dokázat, že platí $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s,\vec{b})=\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s)$ právě a jen tehdy, když $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\mid\vec{b})$.

Směr $\Rightarrow$:

To je jasné, protože $\operatorname{rank}(A)=\dim(\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s))$ a $\operatorname{rank}(A\mid\vec{b})=\dim(\operatorname{span}(a_1,\dots,a_s,\vec{b}))$.

Směr $\Leftarrow$:

Ať $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\vec{b})$. To znamená, že platí $\dim\left(\operatorname{span}(a_1,...,a_s)\right)=\dim\left(\operatorname{span}\left(a_1,...,a_s,\vec{b}\right)\right)$.

Protože $\dim\left(\operatorname{span}(a_1,...,a_s)\right)$ je lineárním podprostorem prostoru $\dim\left(\operatorname{span}\left(a_1,...,a_s,\vec{b}\right)\right)$ stejné dimense, platí $\dim\left(\operatorname{span}(a_1,...,a_s)\right)=\dim\left(\operatorname{span}\left(a_1,...,a_s,\vec{b}\right)\right)$.

(2):

(i) Chceme dokázat, že pokud $\vec{x}=\vec{p}+\vec{x}_h$, kde $\vec{x}_h$ je nějaký vektor z $\ker(A)$, tak $A\vec{x}=\vec{b}$.

(ii) Chceme dokázat, že pokud $A\vec{x}=\vec{b}$, tak $\vec{x}=\vec{p}+\vec{x}_h$ pro všechna $\vec{x}_h$ z $\ker(A)$.

Budeme používat, že platí $A\vec{p}=\vec{b}$.

(i) $A\vec{x}=A(\vec{p}+\vec{x}_h)=A\vec{p}+A\vec{x}_h=A\vec{p}+0=\vec{b}+\vec{o}=\vec{b}$

(ii) Víme, že platí $A\vec{x}=\vec{b}$ a $A\vec{p}=\vec{b}$. Pro $\vec{x}$ můžeme napsat $\vec{x}=\vec{p}+(\vec{x}-\vec{p})$. Musíme dokázat, že $(\vec{x}-\vec{p})$ leží v $\ker(A)$. To vyplývá z rovnosti $A(\vec{x}-\vec{p})=A\vec{x}-A\vec{p}=\vec{b}-\vec{b}=\vec{o}$ a z faktu, že nulový vektor leží dle definice v jádře.

Část C:

Vybereme dva lineárně nezávislé vektory, které sedí do rovnice $3x+4y-z=0$. Zvolme třeba $b_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$. Započněme Gram-Schmidtův ortogonalisační proces. Můžeme využít nezávislosti velikosti vektoru na ortogonalitě a zbavit se tak výsledných zlomků.

$$c_1=b_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$c_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}-\frac{<\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}>}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}-\frac{4}{25}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}25\\0\\75\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}-16\\72\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\75\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}9\\12\\75\end{pmatrix}$$

Třetí vektor můžeme získat z rovnice $3x+4y-z=0$, jakožto normálový vektor roviny $c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hledaný seznam je $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 75 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

5.2.2019

Část A:

1. Matice A je nilpotentní a platí $A^6 = O$. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Matice A má inversi.
   b) $A^5 = O$.
   c) $A^7 = O$.
   d) Matice A^5 nemá inversi.
2. Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^3$ tři různé vektory v_1, v_2, v_3 takové, že $f(v_1) = o, f(v_2) = o$ a $f(v_3) = o$. Hodnost zobrazení f nemůže být:
   a) 3.
   b) 2.
   c) 1.
   d) 0.
3. Ať A je reálná matice typu 2×2, ať každá ze soustav $A \cdot x = e_1$ a $A \cdot x = e_2$ má řešení. Pak nutně platí:
   a) $\det(A) = 0$.
   b) Soustava $A \cdot x = e_1 + e_2$ má právě jedno řešení.
   c) Soustava $A \cdot x = e_1 + e_2$ má nekonečně mnoho řešení.
   d) Existuje vektor $b \in \mathbb{R}^2$ takový, že soustava $A \cdot x = b$ nemá řešení.
4. Mějme čtvercovou matici A typu $n \times n$. Potom nutně platí:
   a) $\det(26 \cdot A) = 26^n \cdot (\det(A))^n$.
   b) $\det(26 \cdot A) = 26 \cdot \det(A)$.
   c) $\det(26 \cdot A) = 26 \cdot (\det(A))^n$.
   d) $\det(26 \cdot A) = 26^n \cdot \det(A)$.

Část B:

Definujte pojmy jádro lineárního zobrazení a lineární podprostor lineárního prostoru.

Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: Jestliže $f : L \longrightarrow L$ je lineární zobrazení. Potom $\ker(f)$ je lineárním podprostorem prostoru $\ker(f \circ f)$.

Část C:

Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jsou lineární zobrazení. Mějme uspořádané báze $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Matice zobrazení f vzhledem k bázi A a matice zobrazení g vzhledem k bázi B jsou popořadě $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Nalezněte matici zobrazení $f \circ g$ vzhledem k bázi A. Nalezněte $\mathrm{coord}_A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Výsledky

Část A:

1. c)
   $A^7 = A^6 \cdot A = O \cdot A = O$.
2. a)
   Pokud f posílá tři různé vektory na nulu, tak je nejpříznivější podmínka pro obraz, kdyby byly všechny lineárně závislé. Tím pádem by byl defekt roven jen jedné a obraz by byl roven 2. Nikdy však nedosáhne na trojku, protože by se muselo jednat o monomorfismus, a to v tomto případě nejde.
3. b)
   Protože jsou vektory e_1 a e_2 lineárně nezávislé, musí platit $\operatorname{rank}(A) = 2 = \dim(L_2)$ a zároveň $\operatorname{def}(A) = \dim(L_1) - \operatorname{rank}(A) = 2 - 2 = 0$. Matice A je tedy isomorfní a pro všechna b ze $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ má soustava $A \cdot x = b$ právě jedno řešení.
4. d)
   Vyplývá z identity $\det(k \cdot A_{n\times n}) = k^n \cdot A_{n\times n}$.

Část B:

Nechť $f : L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $\vec{v}$ je vektor z množiny $\ker(f)$. Potom z definice jádra platí $f(\vec{v}) = \vec{o}$. Odtud $f(\vec{o}) = f(f(\vec{v})) = f \circ f(\vec{v}) = \vec{o}$. Celkově tak platí, že pokud $v \in \ker(f)$, tak $v \in \ker(f \circ f)$, z čehož vyplývá $\ker(f) \subseteq \ker(f \circ f)$.

Část C:

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}),\ B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}),\ [f]_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ [g]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli spočítat $f \circ g$, musíme mít obě zobrazení vzhledem ke stejné bázi. Převedeme třeba $[g]_B$ na $[g]_A$. K tomu je potřeba spočítat $[g]_A = T_{B\mapsto A} \cdot [g]_B \cdot T_{A\mapsto B}$, takže hledáme matice $T_{A\mapsto B}$ a $T_{B\mapsto A}$. Najdeme jako první třeba $T_{B\mapsto A}$. K tomu potřebujeme vyjádřit vektory v bázi B pomocí vektorů v bázi A, takže dostáváme

$$T_{B\mapsto A} = ([b_1]_A, [b_2]_A) = (\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici $T_{A\mapsto B}$ spočítáme buď inversí nebo stejným způsobem, tedy

$$T_{A\mapsto B} = (T_{B\to A})^{-1} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do výše zmiňovaného vzorce a získáváme.

$$[g]_A = T_{B\mapsto A} \cdot [g]_B \cdot T_{A\mapsto B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice $[f]_A \circ [g]_A$ je

$$[f]_A \circ [g]_A = [f]_A \cdot [g]_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

Hledané souřadnice jsou $\mathrm{coord}_A(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

28. 1. 2019

Část A:

1. Nechť $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Pokud je f monomorfismus, pak je f i isomorfismus.
   b) Pokud má f jádro celé $\mathbb{R}^3$, pak matice zobrazení f není diagonalisovatelná.
   c) Zobrazení $x \mapsto f(x)+e_1$ je také lineární.
   d) Pokud je f nilpotentní, pak má hodnost 3.
2. Nechť je $S=(s_1,\ldots,s_m)$, $2 \le m \le n$, lineárně nezávislý seznam vektorů z $\mathbb{R}^n$. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Seznam S nemůže být bází $\mathbb{R}^n$.
   b) Seznam S nemůže generovat $\mathbb{R}^n$.
   c) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně nezávislý.
   d) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam generovat $\mathbb{R}^n$.
3. Mějme soustavu lineárních rovnic $A \cdot x = b$ s čtvercovou maticí A. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí:
   a) Pokud má soustava více řešení, podle Cramerovy věty nalezneme řešení nulové.
   b) Pokud má soustava právě jedno řešení, pak má i soustava $(A \cdot A) \cdot x = b$ právě jedno řešení.
   c) Pokud soustava nemá řešení, může mít řešení soustava $(A \cdot A) \cdot x = b$.
   d) Determinant matice A je nutně nenulový.
4. Mějme dán lineární prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem a v něm uspořádanou ortogonální bázi $B=(b_1,b_2,b_3)$. Potom platí:
   a) Vektory b_1, b_2, b_3, jsou nutně jednotkové.
   b) Nikdy nemůže platit rovnost $\sqrt{< b_2 \mid b_2 >} = 0$.
   c) Existuje vektor z $\mathbb{R}^3$, který lze zapsat dvěma různými způsoby jako lineární kombinace vektorů z báze B.
   d) Projekce vektoru b_3 na rovinu zadanou vektory b_1 a b_2 je nutně nenulová.

Část B:

Definujte pojmy jádro lineárního zobrazení a obraz lineárního zobrazení.

Ať A je čtvercová matice. Dokažte, popřípadě vyvraťte protipříkladem následující dvě tvrzení:

1. Když je matice A diagonalisovatelná, pak je diagonalisovatelná i matice A^2.
2. Když je matice A^2 diagonalisovatelná, pak je diagonalisovatelná i matice A.

Část C:

Je dáno lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a seznam vektorů $B=(b_1,b_2,b_3)=(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix})$. Víte, že platí rovnosti $f(b_1)=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, f(b_2)=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}, f(b_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Nalezněte matici zobrazení f vzhledem k bázi B. Dále nalezněte souřadnice nějakého vlastního vektoru zobrazení f příslušeného vlastnímu číslu 2 vzhledem k bázi K_3.

Část A:

1. a)
   Pokud je f monomorfismus, tak platí $\operatorname{def}(f)=0$. Protože
   $\operatorname{rank}(f)=\dim(L_1)-\operatorname{def}(f)=3$, platí $\operatorname{rank}(f)=\dim(L_2)=3$ a zobrazení je tedy epimorfismus a proto zároveň isomorfismus.
2. c)
   Kdyby toto neplatilo, tak by byl původní seznam lineárně závislý, protože bychom místo odebrání odebíraný vektor vynulovali, použili ty samé koeficienty a seznam by tak byl lineárně závislý.
3. b)
   Vzhledem k tomu, že je matice čtvercová, musí být v případě jednoho řešení i regulární. Regularita je imunní vůči mocnění, protože pokud platí $\det(A)\neq 0$, tak musí nutně platit $\det(A\cdot A)=\det(A)\cdot\det(A)=\det^2(A)\neq 0$. Jinými slovy – nelze determinant mocněním matice vynulovat, protože se jedná o mocnění nenulového čísla. Nově vzniklá rovnice má tak řešení
4. b)
   Definice skalárního součinu říká $<x\mid x>\ \geq 0$ a $<x\mid x>\ =0$ právě a jen tehdy, když $x=0$. Vektory v bázi však nemohou být nulové, a proto nemůže platit $\sqrt{<b_2\mid b_2>}=0$.

Část B:

1. Ať A je čtvercová matice. Předpokládejme, že je diagonalisovatelná. Potom existují matice D a P takové, že platí $A=P^{-1}\cdot D\cdot P$. Pro matici A^2 platí

$$A^2=P^{-1}\cdot D\cdot P\cdot P^{-1}\cdot D\cdot P=P^{-1}\cdot D\cdot D\cdot P=P^{-1}\cdot D^2\cdot P.$$

2. Ať A je čtvercová matice. Zvolme $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Potom $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. Matice A^2 je diagonální. Matice A však ne. Druhé tvrzení proto neplatí.

Část C:

$$B=\left(b_1,b_2,b_3\right)=(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}),\ f\left(b_1\right)=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix},f\left(b_2\right)=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix},f\left(b_3\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Označme $\left[f\right]_B$ matici zobrazení vzhledem k bázi B se zmíněnými přiřazeními. Hledáme takovou $\left[f\right]_B$, pro kterou platí

$$\left[f\right]_B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&3\\2&3&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\4&6&0\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\-4&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\4&6&0\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Teď je otázka, zda budeme věřit zadání, že má matice $\left[f\right]_B$ vlastní číslo opravdu 2. Na ověření není nic složitého. Musí totiž platit

$$\det\left(\left[f\right]_B-2\cdot E_n\right)=0$$

$$\det(\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix})=\det(\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix})=0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\0&-1&-1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Řešením je tedy $\mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$, což je na příklad $\vec{v}_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, který převedeme do K_3:

$$\vec{v}_{K_3}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&3\\2&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení f vzhledem k bázi B je $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ a hledaný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 2 v bázi K_3 je $\vec{v}_{K_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Tvrzení: *množina* $\mathsf{span}(M)$ *je lineárně nezávislá množina*
   (a) platí pro jakoukoli množinu M vektorů v lineárním prostoru L.
   (b) platí pro jakoukoli neprázdnou konečnou množinu M vektorů v lineárním prostoru L.
   (c) platí pro jakoukoli nekonečnou množinu M vektorů v lineárním prostoru L.
   (d) neplatí pro žádnou množinu M vektorů v lineárním prostoru L.

2. Ať je dána matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Potom *nutně* platí:
   (a) pro jakýkoli vektor $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^n$ má soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ vždy alespoň jedno řešení.
   (b) existuje vektor $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^n$, pro který nemá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ žádné řešení.
   (c) maticová rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_n$ nemá žádné řešení,
   (d) existuje vektor $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^n$, který je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$.

3. Ať W je lineární podprostor prostoru $(\mathbb{Z}_3)^6$ dimense 2. Potom počet vektorů ve W je
   (a) 3^6,
   (b) 3^2,
   (c) 2^6,
   (d) 2^3.

4. Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení mezi konečně dimensionálními lineárními prostory L_1 a L_2. Které z následujících tvrzení *nutně platí*?
   (a) $\dim(\mathrm{im}(\mathbf{f})) < \dim(L_2)$.
   (b) $\dim(\mathrm{im}(\mathbf{f})) \leq \dim(\ker(\mathbf{f})) - \dim(L_2)$.
   (c) $\dim(\ker(\mathbf{f})) \leq \dim(L_1)$.
   (d) $\dim(L_2) \leq \dim(L_1)$.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Definujte (celými větami) pojmy *standardní skalární součin v prostoru* $\mathbb{R}^n$ a *ortonormální báze prostoru* $\mathbb{R}^n$ *se standardním skalárním součinem.*

Dokažte: Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ právě tehdy, když seznam $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Rozhodněte, zda reálnou matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lze diagonalisovat. V kladném případě příslušnou diagonální matici *napište*, v záporném případě *vysvětlete*, proč diagonalisovat nelze.

Závěrečnou odpověď zapište celou větou.

`LS 2018: ukázka písemného testu z B6B01LAG`

Výsledky

Část A:

1. d)
   Každý lineární obal obsahuje nulový vektor, takže se jedná o lineárně závislou množinu. Pro případ $\operatorname{span}(M)=\{\vec{o}\}$ slouží definice, která říká, že se jedná o lineárně závislou množinu.
2. d)
   Zvolíme-li $b=\vec{o}$, vždycky bude existovat triviální lineární kombinace.
3. b)
   Pro takovou dvoudimensionální množinu v $(\mathbb{Z}_3)^6$ musí existovat bijekce $(\mathbb{Z}_3)^2 \longrightarrow \mathbb{F}_3{}^2$.
   Protože obecné těleso $(\mathbb{F}_n)^m$ obsahuje n^m vektorů, je jasné, že to musí být 3^2.
4. c)
   Dimense L_1 je přirozeně vždycky větší nebo rovno než dimense jádra, neboť $\dim(L_1)=\dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{im}(f))$, kde $\dim(\operatorname{im}(f))$ je vždy kladné číslo.

Část B:

Nechť $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je čtvercová matice se sloupcovým zápisem $(a_1,...,a_n)$, kde seznam $(a_1,...,a_n)$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Matice A^T má řádkový zápis $(a_1^T,...,a_n^T)$.Platí

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix} a_1{}^T\cdot a_1 & a_1{}^T\cdot a_2 & \cdots & a_1{}^T\cdot a_n \\ a_2{}^T\cdot a_1 & a_2{}^T\cdot a_2 & \cdots & a_2{}^T\cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n{}^T\cdot a_1 & a_n{}^T\cdot a_2 & \cdots & a_n{}^T\cdot a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} <a_1\,|\,a_1> & <a_1\,|\,a_2> & \cdots & <a_1\,|\,a_n> \\ <a_2\,|\,a_1> & <a_2\,|\,a_2> & \cdots & <a_2\,|\,a_n> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <a_n\,|\,a_1> & <a_n\,|\,a_2> & \cdots & <a_n\,|\,a_n> \end{pmatrix}.$$

Z ortonormality $(a_1,...,a_n)$ vyplývá, že pro jakýkoliv skalární součin $<a_i\,|\,a_j>$, kde $i,j\in\{1,2,...,n\}$ platí $<a_i\,|\,a_j>=\begin{cases} i=j\,|\,1 \\ i\neq j\,|\,0 \end{cases}$, a proto $A^T\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_n$ a tedy $A^T=A^{-1}$.

Část C:

Provedeme výpočet charakteristického polynomu.

$$\operatorname{char}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}(\lambda) = \det(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot E_n) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-\lambda\cdot(4-\lambda)+4) = -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8$$

Hornerovo schéma

	-1	6	-12	8
-1	-1	7	-19	27
1	-1	5	-7	1
-2	-1	8	-28	56
2	-1	4	-4	0
2	-1	2	0	
2	-1	0		

Charakteristický polynom je tedy $\operatorname{char}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}(\lambda) = -(\lambda-2)^3$.

Ověříme, zda se aritmetická násobnost charakteristického polynomu rovná geometrické.

$$\operatorname{def}(\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{pmatrix}) = \operatorname{def}(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2 \neq \deg((x-2)^3)$$

Matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ není diagonalisovatelná, protože se aritmetická násobnost jejího charakteristického polynomu nerovná geometrické.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Nechť má matice $\mathbf{A}$ 5 řádků a 4 sloupce, defekt $\operatorname{def}(\mathbf{A}) = 2$. Pak *nutně* platí:
   (a) Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří lineárně nezávislý seznam vektorů.
   (b) Úpravy matice $\mathbf{A}$ Gaussovou eliminační metodou mohou defekt zvýšit.
   (c) $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{A})) \geq 2$.
   (d) Každá nehomogenní soustava (pro libovolné $\mathbf{b}$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má nekonečně mnoho řešení.

2. Budiž $\mathbf{B}$ matice typu 3×3, nechť soustavy $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_2$ a $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_3$ mají každá právě jedno řešení (popořadě $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$). Pak *musí být nutně pravda*:
   (a) Seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ je lineárně závislý.
   (b) $\det(2 \cdot \mathbf{B}) = 0$.
   (c) $\det(\mathbf{B}^3) > 0$.
   (d) K matici $\mathbf{B}$ existuje matice inversní.

3. Ať $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice typu $m \times m$, ať $\mathbf{B}$ je matice s n lineárně nezávislými sloupci typu a m řádky, kde $m \neq n$. Vyberte *nutně pravdivé* tvrzení.
   (a) Součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ není definován.
   (b) Součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nemá lineárně nezávislé sloupce.
   (c) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$.
   (d) $\mathbf{B}$ je epimorfismus (surjektivní lineární zobrazení).

4. Uvažujme lineární prostor $\mathbb{C}$ *nad tělesem* $\mathbb{C}$. Vyberte *nepravdivé* tvrzení.
   (a) Seznam vektorů $(1, i)$ z $\mathbb{C}$ je lineárně nezávislý.
   (b) $\dim(\mathbb{C}) < 3$.
   (c) V zadaném lineárním prostoru existuje právě jeden nulový vektor.
   (d) Seznam vektorů $(1 + i, 1 - i)$ z $\mathbb{C}$ je lineárně závislý.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Definujte pojmy: *vlastní hodnota lineárního zobrazení*, *vlastní vektor lineárního zobrazení*.

Dokažte, že pokud má reálná matice $\mathbf{A}$ typu 2×2 vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ příslušné různým nenulovým vlastním hodnotám a_1 a a_2, pak je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislý seznam vektorů v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V tomto příkladu pracujeme s lineárním prostorem $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem. Mějme vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, které mají vzhledem k uspořádané bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ souřadnice $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathbf{coord}_B(\mathbf{w}) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu 2×2 se sloupci $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, kde $\mathbf{a}_1$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{v}$ na přímku zadanou rovnicí $y = x$, a $\mathbf{a}_2$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{w}$ na přímku zadanou rovnicí $y = x$. Jaký je determinant matice $\mathbf{A}$? (Nápověda: nejdříve si nakreslete obrázek situace.)

Výsledky

Část A:

1. c)
   Matice A je maticí zobrazení $A: \mathbb{F}^4 \longrightarrow \mathbb{F}^5$. Pro $\dim(\mathrm{im}(A))$ platí $\dim(\mathrm{im}(A)) = \dim(L_1) - \mathrm{def}\,(A) = 4 - 2 = 2$. Abychom však mohli použít možnost c), musíme dokázat, že ostatní možnosti jsou nepravdivé. Možnost b) zjevně neplatí. Pro možnost a) je protipříklad $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pro možnost d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$.
2. d)
   Pokud je matice čtvercová a má pro nějaký vektor pouze jedno řešení, musí být regulární, a tedy i invertibilní.
3. a)
   Maticový součin má smysl právě a jen tehdy, když je počet sloupců první matice roven počtu řádků druhé. U součinu $B_{m\times n} \cdot A_{m\times m}$ musí platit $m = n$, což dle zadání neplatí.
4. a)
   Seznam $(1, i)$ je lineárně závislý, protože existuje netriviální řešení lineární kombinace $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot i = \vec{o}$, a to $1 \cdot 1 + i \cdot i = \vec{o}$.

Část B:

Nechť A je reálná matice typu 2×2, vektory v_1, v_2 její vlastní vektory příslušné různým nenulovým vlastním hodnotám a_1, a_2. Mějme lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 se skaláry β_1, β_2 z $\mathbb{R}$

$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 = \vec{o}.$$

Vynásobíme rovnost maticí A.

$$\beta_1 \cdot A \cdot v_1 + \beta_2 \cdot A \cdot v_2 = \vec{o}$$

Dosadíme dle rovnosti $A \cdot v = a \cdot v$.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_2 \cdot v_2 = \vec{o}$$

Vynásobíme původní rovnost vlastní hodnotou a_1.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_1 \cdot v_2 = \vec{o}$$

Vezmeme rozdíl získaných dvou rovností.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_2 \cdot v_2 - \beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_1 \cdot v_2 = \vec{o}$$

$$0 \cdot \beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 (a_2 - a_1) = \vec{o}.$$

Protože $v_2 \neq \vec{o}, a_2 \neq a_1$, musí platit $\beta_1 = \beta_2 = 0$ a vektory v_1, v_2 jsou tedy lineárně nezávislé.

Část C:

$$B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right), \mathrm{coord}_B(v) = \left(\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right), \mathrm{coord}_B(w) = \left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$$

Abychom mohli počítat projekci, musíme převést přímku na tvar afinního podprostoru.

$$p: y = x$$

$$p: x - y = 0$$

$$p: (1 -1 \mid 0)$$

$$p: \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Následně převedeme přímku z K_2 do B:

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

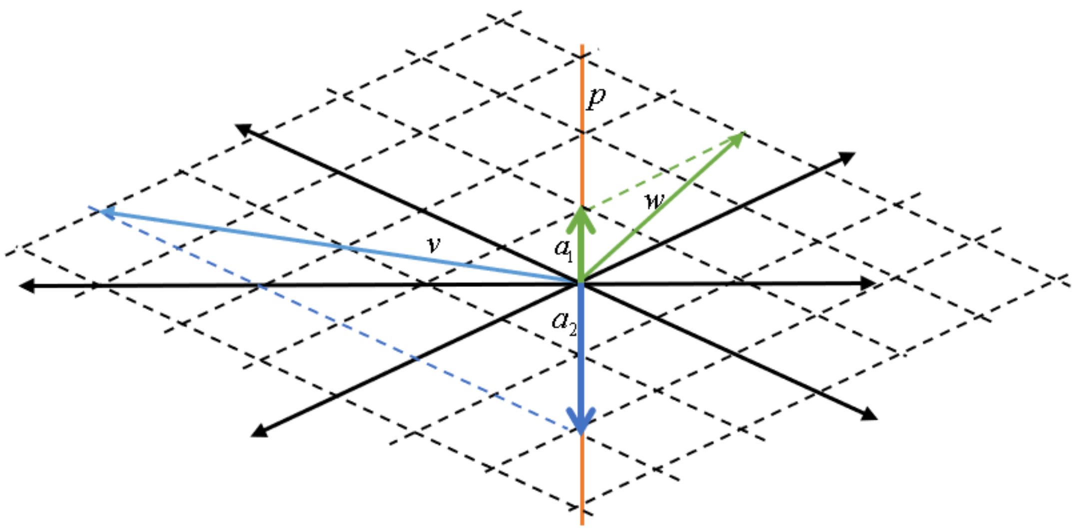
$$p: \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

Spočítáme determinant matice A.

$$\det(A) = \det((a_1, a_2)) = \det\left(\frac{<\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}>}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}, \frac{<\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}>}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} = 0$$

Determinant matice A je roven nule.

Obrázek:



23.1.2020

Část A:

1. Ať má čtvercová soustava lineárních rovnic $A \cdot x = b$ nad $\mathbb{F}$ alespoň jedno řešení. Potom nutně platí:
   a) Matice A má inversi.
   b) Soustava $(A + E_n) \cdot x = b$ má právě jedno řešení.
   c) Vektor b je lineární kombinací sloupců matice A.
   d) Matice A má nulový determinant.
2. Ať $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a $\operatorname{rank}(f) = 3$. Potom V nemůže být:
   a) matice transformace souřadnic.
   b) diagonalisovatelná matice.
   c) matice rotace.
   d) matice projekce na rovinu určenou vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Vektor v lineárního prostoru L nad $\mathbb{R}$ má vzhledem k uspořádané bázi $(b_1, b_2 ..., b_n)$ souřadnice $(a_1, a_2, ..., a_n)^T$. Potom vektor $6 \cdot v$ má vzhledem k uspořádané bázi $(3 \cdot b_1, 3 \cdot b_2 ..., 3 \cdot b_n)$ souřadnice:
   a) $(18 \cdot a_1, 18 \cdot a_2, ..., 18 \cdot a_n)^T$
   b) $(2 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, ..., 2 \cdot a_n)^T$
   c) $(a_1 / 2, a_2 / 2, ..., a_n / 2)^T$
   d) Souřadnice nelze určit, protože $(3 \cdot b_1, 3 \cdot b_2 ..., 3 \cdot b_n)$ není uspořádaná báze.
4. Ať lineární prostory L_1 a L_2 mají konečnou dimensi. Ať $f : L_1 \longrightarrow L_2$ je epimorfismus a ať má lineární zobrazení f vzhledem k nějakým bázím prostorů L_1 a L_2 matici zobrazení F. Potom nutně platí:
   a) $\operatorname{def}(f) > 0$.
   b) Soustava $F \cdot x = b$ má řešení pro libovolný vektor b z L_2.
   c) Pro každý vektor $w \in W$ existují alespoň dva vektory $v_1, v_2 \in L_1$ takové, že $f(v_1) = f(v_2) = w$.
   d) $\dim(L_1) > \dim(L_2)$.

Část B:

Definujte pojmy součin matic (nad tělesem $\mathbb{F}$) a transponovaná matice k matici.

Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

Ať A a B jsou symetrické matice stejných rozměrů nad tělesem $\mathbb{F}$. Potom je matice $B \cdot A$ opět symetrická matice.

Část C:

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem jsou dány přímky

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}),\ \pi' = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}).$$

1. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek π a π'.

2. Spočítejte vzájemnou vzdálenost $\omega(\pi, \pi')$ přímek π a π'.

Výsledky

Část A:

1. c)

   Ať x je řešením soustavy $A \cdot x = b$ o souřadnicích $(x_1, \ldots, x_n)$ a matice A má sloupcový zápis $(a_1, \ldots, a_n)$. Potom lze vektor b zapsat jako $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$, tedy lineární kombinaci sloupců matice A.
2. d)

   Ze vzorce pro výpočet matice projekce $F = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T$ vyplývá, že taková matice musí být nutně čtvercová, protože pokud je matice A typu $m \times n$, tak je výsledná matice produktem $(m \times n) \cdot (n \times n) \cdot (n \times m)$, tedy $m \times m$.

   Poznámka: na zadání této otázky bylo opravdu špatně vidět, takže je možné, že je v tomto dokumentu chybně zapsaná.
3. b)

   Víme, že $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$. Pro vektor $6 \cdot v$ vzhledem k bázi $(3 \cdot b_1, 3 \cdot b_2 \ldots, 3 \cdot b_n)$ spočítejme faktor k, který je potřeba doplnit před jeho souřadnice.

   $$6 \cdot v = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot k \cdot a_i \cdot b_i$$

   $$6 \cdot v = 3 \cdot k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

   A protože $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$, dostáváme

   $$6 \cdot v = 3 \cdot k \cdot v$$
   $$k = 2.$$

   Výsledné souřadnice tedy musí být $(2 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \ldots, 2 \cdot a_n)^T$.
4. b)

   Protože se jedná o epimofrismus, je jasné, že rovnice $F \cdot x = b$ musí mít řešení pro jakýkoliv vektor b z L_1.

Část B:

Nechť A a B jsou matice stejných rozměrů nad tělesem $\mathbb{F}$. Předpokládejme, že A a B jsou symetrické. Potom platí $A = A^T$ a $B = B^T$. Pro součin $B \cdot A$ můžeme napsat $B^T \cdot A^T$. Předpokládejme, že platí $B^T \cdot A^T = (B \cdot A)^T$.

Kvůli identitě $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$ však stačí dokázat, že $(B \cdot A)^T \neq (A \cdot B)^T$.

Předpokládejme, že platí $(B \cdot A)^T = (A \cdot B)^T$. Po transponování obou stran dostáváme

$$\left((A \cdot B)^T\right)^T = \left((B \cdot A)^T\right)^T$$

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Protože je násobení matic z definice obecně nekomutativní, nemůže tato rovnost vždy platit a součin $B \cdot A$ tedy nemůže být vždy symetrický.

Poznámka: Není potřeba to takhle dokázat – stačí vymyslet protipříklad. Tohle je hlubší pohled na věc.

Část C:

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}),\ \pi' = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix})$$

1. Přímky π a π' jsou mimoběžné, protože vektory $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ určující jejich směr jsou lineárně nezávislé.

2. Hledaná vzdálenost je

$$\omega(\pi, \pi') = \left\| \operatorname{rej}_{\operatorname{span}(s,s')}(p - p') \right\| = \left\| \operatorname{proj}_{\operatorname{span}(s \times s)}(p - p') \right\| = \left\| \frac{< p - p' \mid s \times s >}{< s \times s \mid s \times s >} s \times s \right\| = \left\| \frac{< \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 13.$$

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Ať $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice, pro které má smysl součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Pak *nutně* platí:

   (a) $\operatorname{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \geq \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

   (b) Každý sloupec $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je lineární kombinací sloupců $\mathbf{A}$.

   (c) Pokud je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ čtvecová a $\mathbf{B}$ má lineárně nezávislé sloupce, pak $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$.

   (d) Pokud má smysl i součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2. Ať $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je uspořádaná ortogonální báze podprostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem. Pak *nutně* platí:

   (a) Pro libovolné $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, kde $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = 0$, je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ uspořádaná ortogonální báze lineárního podprostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

   (b) Platí $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

   (c) Seznam $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ je uspořádaná báze prostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

   (d) Pro libovolný vektor $\mathbf{b} \notin \mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ takový, že $\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, platí $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

3. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu 2×2, ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ ani $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ nemá řešení. Pak *nutně* platí:

   (a) $\mathbf{A}$ je regulární.

   (b) $\mathbf{A}$ je nulová matice.

   (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nemá řešení.

   (d) Sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně závislé.

4. Mějme tři čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ rozměrů $n \times n$, $\mathbf{O}$ je nulová matice $n \times n$.

   (a) $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right)\right) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{C})$.

   (b) $\det((\mathbf{A} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) = (\det(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A})) \cdot \det(\mathbf{B})$.

   (c) $5 \cdot \det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{C}) = \det(5 \cdot \mathbf{B}) + \det(\mathbf{C})$.

   (d) $\det(\mathbf{E}_n) \cdot \det(\mathbf{E}_n^{-1}) = -1$.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Dokažte, že pokud má reálná matice $\mathbf{A}$ typu 2×2 vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ příslušné různým nenulovým vlastním číslům a_1 a a_2, pak je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislý seznam vektorů v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno přiřazeními

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte hodnotu $\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Nalezněte matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 prostoru $\mathbb{R}^2$. Diagonalisujte $\mathbf{A}$. Závěrečnou odpověď zapište celou větou.

02-06-2016: písemná zkouška z B6B01LAG

Výsledky

Část A:

1. b)
   Stačí se podívat, jak je definováno násobení matic. Ať A a B jsou matice typu $o \times m$ a $m \times n$ o sloupcových zápisech $(a_1, a_2, ..., a_m)$, $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Součin $A \cdot B$ je matice o sloupcovém zápisu $(A \cdot b_1, A \cdot b_2, ..., A \cdot b_n) = ((a_1, a_2, ..., a_m) \cdot b_1, (a_1, a_2, ..., a_m) \cdot b_2, ..., (a_1, a_2, ..., a_m) \cdot b_n)$, kde je j-tý sloupec roven lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_j$, tedy celý seznam vypadá takto
   $$(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_1, \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_2, ..., \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_n).$$
2. c)
   Hledáme k takové, že platí $k \cdot (v_1 + v_2) = v_2 - v_1$, tedy
   $$k \cdot v_1 + k \cdot v_2 + v_1 - v_2 = \vec{o}$$
   $$(k+1) \cdot v_1 + (k-1) \cdot v_2 = \vec{o}$$
   a protože $v_1 \neq \vec{o}$ a $v_2 \neq \vec{o}$, muselo by platit $k = 1$ a zároveň $k = -1$.
3. d)
   Sloupce matice A mohou být logicky buď lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé – žádná třetí možnost není. Pokud by byly lineárně nezávislé, generovaly by celé $\mathbb{R}^2$, a tak by nutně musela existovat lineární kombinace – tedy řešení x_1 a x_2 taková, že $A \cdot x_1 = e_1$ a $A \cdot x_2 = e_2$, protože e_1 i e_2 jsou z $\mathbb{R}^2$.
4. b)
   $$\det((A-A) \cdot B) = \det(A-A) \cdot \det(B) = 0 \cdot \det(B) = (\overbrace{\det(A) - \det(A)}^{=0}) \cdot \det(B)$$

Část B:

Nechť A je reálná matice typu 2×2, vektory v_1, v_2 její vlastní vektory příslušné různým nenulovým vlastním hodnotám a_1, a_2. Mějme lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 se skaláry β_1, β_2 z $\mathbb{R}$

$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 = \vec{o}.$$

Vynásobíme rovnost maticí A.

$$\beta_1 \cdot A \cdot v_1 + \beta_2 \cdot A \cdot v_2 = \vec{o}$$

Dosadíme dle rovnosti $A \cdot v = a \cdot v$.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_2 \cdot v_2 = \vec{o}$$

Vynásobíme původní rovnost vlastní hodnotou a_1.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_1 \cdot v_2 = \vec{o}$$

Vezmeme rozdíl získaných dvou rovností.

$$\beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_2 \cdot v_2 - \beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot a_1 \cdot v_2 = \vec{o}$$

$$0 \cdot \beta_1 \cdot a_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 \left(a_2 - a_1\right) = \vec{o} \;.$$

Protože $v_2 \neq \vec{o}$ a $a_2 \neq a_1$, musí platit $\beta_1 = \beta_2 = 0$ a proto jsou vektory v_1, v_2 lineárně nezávislé.

Část C:

Zobrazení vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lze udělat na příklad jeho vyjádřením jako lineární kombinace již známých vzorů, protože je f lineární.

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -1 \cdot f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + 1 \cdot f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Stejně však musíme spočítat matici A zobrazení f, tak si alespoň můžeme ověřit, že když proženeme vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maticí tohoto zobrazení, opravdu vyjde $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Hledáme matici A, pro kterou platí

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ověříme zobrazení vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vidíme, že to máme správně $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Diagonalisujeme matici A.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \left(-4-\lambda\right) \cdot \left(5-\lambda\right) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = \left(\lambda+1\right) \cdot \left(\lambda-2\right)$$

Ověříme diagonalisovatelnost.

$$\mathrm{def}(\begin{pmatrix} -4-\left(-1\right) & -6 \\ 3 & 5-\left(-1\right) \end{pmatrix}) = \mathrm{def}(\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}) = \mathrm{def}(\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 = \deg(\left(\lambda+1\right))$$

$$\mathrm{def}(\begin{pmatrix} -4-2 & -6 \\ 3 & 5-2 \end{pmatrix}) = \mathrm{def}(\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}) = \mathrm{def}(\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 = \deg(\left(\lambda-2\right))$$

Diagonální matice k matici A je $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a hodnota $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ je $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

14.1.2020

Část A:

1. Mějme lineární prostor V, lineární zobrazení $f: V \to V$, a dva lineárně nezávislé vektory $v \in V, w \in V$, které jsou vlastními vektory lineárního zobrazení f příslušnými vlastním číslům λ. Potom platí:
   a) $f(v) = \lambda \cdot w$.
   b) Vektor $2 \cdot v$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2 \cdot \lambda$.
   c) Vektor $f(v)$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2 \cdot \lambda$.
   d) Pro nenulové skaláry α a β je vektor $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ vlastním vektorem lineárního zobrazení f.
2. Ať $S = (s_1, ..., s_k)$, $2 \le k \le n$ je lineárně závislý seznam vektorů z $\mathbb{R}^n$. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:
   a) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně závislý.
   b) Ať do seznamu S přidáme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně závislý.
   c) Seznam S může být bází $\mathbb{R}^n$.
   d) Seznam S může generovat $\mathbb{R}^n$.
3. Matice Q má 19 sloupců a 23 řádků. Její defekt je 5. Potom nutně platí:
   a) Matice Q je epimorfismus.
   b) Hodnost matice Q je rovna 18.
   c) Hodnost matice Q je rovna 14.
   d) O hodnosti matice Q v tomto případě nelze rozhodnout.
4. Mějme čtvercovou matici A typu $n \times n$. Potom nutně platí:
   a) $\det(-5 \cdot A) = (-5)^n \cdot (\det(A))^n$.
   b) $\det(-5 \cdot A) = -5 \cdot \det(A)$.
   c) $\det(-5 \cdot A) = -5 \cdot (\det(A))^n$.
   d) $\det(-5 \cdot A) = (-5)^n \cdot \det(A)$.

Část B:

Definujte pojmy obraz lineárního zobrazení a lineární podprostor lineárního zobrazení.

Jestliže $f: L \longrightarrow L$ je lineární zobrazení, potom $\operatorname{im}(f)$ je lineárním podprostorem prostoru $\operatorname{im}(f \circ f)$.

Část C:

V prostoru $\mathbb{R}^2$ jsou zadány vektory $b_1 = \begin{pmatrix} p \\ 3+p \end{pmatrix}$ a $b_2 = \begin{pmatrix} p-3 \\ p \end{pmatrix}$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

1. Nalezněte (jakýmkoli způsobem) množinu P všech p takových, že $B = (b_1, b_2)$ tvoří uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Přidejte drobný komentář k tomu, jak jste množinu P našli.

2. Pro každé $p \in P$ nalezněte matici M lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, kde $f(b_1) = f(b_2) = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 prostoru $\mathbb{R}^2$ (tj. matici M zobrazení f vzhledem k bázím K_2 a K_2).

Přidejte drobný komentář k tomu, jak jste matici M našli.

Výsledky

Část A:

1. d)
   Víme, že je zobrazení lineární a že platí $f(v)=\lambda\cdot v$ a $f(w)=\lambda\cdot w$. Pro lineární kombinaci $\alpha\cdot v+\beta\cdot w$ můžeme tedy napsat
   $$f(\alpha\cdot v+\beta\cdot w)=\alpha\cdot f(v)+\beta\cdot f(w)=\alpha\cdot\lambda\cdot v+\beta\cdot\lambda\cdot w=\lambda\cdot(\alpha\cdot v+\beta\cdot w),$$
   tedy zkráceně $f(\alpha\cdot v+\beta\cdot w)=\lambda\cdot(\alpha\cdot v+\beta\cdot w)$.
2. b)
   To je jasné. Po přidání stačí vzít původní lineární kombinaci a přidat k nové položce nulu.
3. c)
   Matice Q je maticí lineárního zobrazení $\mathbb{F}^{19}\xrightarrow{Q}\mathbb{F}^{23}$ a platí
   $$\operatorname{im}(Q)=\dim(L_1)-\ker(Q)=19-5=14.$$
4. d)
   Odpověď vyplývá ze vzorce $\det(k\cdot A_{n\times n})=k^n\cdot\det(A_{n\times n})$.

Část B:

Toto neplatí kvůli vlastnosti hodnosti $\operatorname{rank}(A\cdot B)\le\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$. Stačí tedy najít protipříklad.

$\operatorname{rank}(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=1$, ale $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=\operatorname{rank}(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix})=0$.

Část C:

$$b_1=\begin{pmatrix}p\\3+p\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}p-3\\p\end{pmatrix}$$

1. Báze musí být regulární, a tak stačí spočítat, kdy bude determinant matice B o sloupcovém zápisu (b_1,b_2) s parametrem $p\in\mathbb{R}$ nenulový.

$$\begin{vmatrix}p&p-3\\3+p&p\end{vmatrix}=p^2-(p^2-9)=9$$

Nehledě na hodnotě parametru p bude determinant nenulový, a tak množina je množina $P=\mathbb{R}$.

2. Hledáme matici A takovou, že $A\cdot\begin{pmatrix}p&p-3\\3+p&p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9\\-18&-18\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}9&9\\-18&-18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p&p-3\\3+p&p\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}9&9\\-18&-18\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}p&3-p\\-3-p&p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3\\6&-6\end{pmatrix}$$

Hledaná matice A zobrazení f je $A=\begin{pmatrix}-3&3\\6&-6\end{pmatrix}$ pro všechna p.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Matice $\mathbf{A}$ je typu 6×6. Determinantem matice $\mathbf{A}$ je z definice součet jistých $6! = 720$ členů. Kolik z nich je jistě nulových, pokud $a_{15} = 0$?
   (a) 0.
   (b) 120.
   (c) 360.
   (d) 720.

2. Vyberte pravdivé tvrzení.
   (a) Součinem dvou nediagonálních matic je vždy matice nediagonální.
   (b) Součinem dvou horních trojúhelníkových matic může být matice, která není horní trojúhelníkovou.
   (c) Součinem dvou symetrických matic je vždy matice symetrická.
   (d) Součinem dvou čtvercových matic může být matice nečtvercová.

3. Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolný vektor $\mathbf{b}$. Pak je pravda:
   (a) Zobrazení $\mathbf{A}$ je epimorfismus.
   (b) $\ker(\mathbf{A})$ obsahuje pouze nulový vektor.
   (c) Matice $\mathbf{A}$ má hodnost nutně rovnou počtu svých sloupců.
   (d) Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří bázi prostoru $\operatorname{im}(\mathbf{A})$.

4. Matice $\mathbf{A}$ typu 3×3 má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, jim příslušné vlastní vektory jsou $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pak *nutně* platí:
   (a) $\det(\mathbf{A}) = 4$.
   (b) Třetí sloupec matice $\mathbf{A}$ je nulový.
   (c) Matice $\mathbf{A}$ není diagonalisovatelná.
   (d) $\ker(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3$.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Nechť $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ je lineárně nezávislý seznam vektorů v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$ a ať $\vec{b} = 1\cdot\vec{v}_1 + 2\cdot\vec{v}_2 + 3\cdot\vec{v}_3$. Dokažte, že platí $\mathsf{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3) \subseteq \mathsf{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Spočtěte kolmou projekci vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na rovinu $x + 2 \cdot y - 5 \cdot z = 0$. (Kolmou projekcí se myslí kolmá projekce vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^3$.)

Závěrečnou odpověď zapište celou větou.

Výsledky

Část A:

1. b)
   Při determinantu matice 6×6 počítáme s $6!$ členy. Při vynechání jednoho jich tedy zbyde $5!$, což je 120.
2. Pravděpodobně chyba v otázce.
3. a)
   Pokud má soustava $A \cdot x = b$ řešení pro jakýkoliv vektor b, je jasné, že pro matici $A : L_1 \longrightarrow L_2$ musí platit $\operatorname{rank}(A) = \dim(L_2)$, tedy, že je matice A epimorfismus.
4. b)
   Platí

$$A \cdot v_3 = \lambda_3 \cdot v_3$$
$$A \cdot v_3 = 0 \cdot v_3$$
$$A \cdot v_3 = \vec{o}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Část B:

Abychom dokázali, že platí $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3) \subseteq \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, musíme dokázat, že pro jakýkoliv vektor $\vec{x}$ z L, kde $\vec{x} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3)$, platí $\vec{x} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Nechť $\vec{x}$ je vektor z lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Předpokládejme, že $\vec{x} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3)$. Protože je $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3)$ množina $\{a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{b} + a_3 \cdot \vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}\}$, platí $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{b} + a_3 \cdot \vec{v}_3$, kde a_1, a_2, a_3 jsou nějaké skaláry z tělesa $\mathbb{F}$ a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vektory z L.

Dosadíme za $\vec{b}$ rovnost $\vec{b} = \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 + 3 \cdot \vec{v}_3$ a dostáváme

$$\vec{x} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot (\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 + 3 \cdot \vec{v}_3) + a_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\vec{x} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot a_2 \cdot \vec{v}_2 + 3 \cdot a_2 \cdot \vec{v}_3 + a_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\vec{x} = (a_1 + a_2) \cdot \vec{v}_1 + (2 \cdot a_2) \cdot \vec{v}_2 + (3a_2 + a_3) \cdot \vec{v}_3.$$

Z uzávěrových vlastností obecného tělesa $\mathbb{F}$ vyplývá $a_1 + a_2, 2 \cdot a_2, 3a_2 + a_3 \in \mathbb{F}$, a protože $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ je množina $\{a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}\}$, platí také $\vec{x} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, a proto je tvrzení $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3) \subseteq \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ pravdivé.

Část C:

Získáme vektory z roviny $x+2y-5z=0$ řešením rovnice $\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 \mid 0\end{pmatrix}$.

Získáváme $\mathrm{span}(\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix})$. Pro ortogonální projekci je potřeba mít ortogonální seznam vektorů, takže vytvoříme ortogonální seznam $O=(o_1,o_2)$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalisačního procesu.

$$o_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$o_2=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{<\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}>}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{11}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}$$

Provedeme projekci.

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{span}(o_1,o_2)}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})=\frac{<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}>}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\frac{<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}\|\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}>}\cdot\begin{pmatrix}51\\12\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/15\\17/15\\2/3\end{pmatrix}$$