Cvičení 7 a 8 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 8 a 9

Úloha 1. *Spočtěte.*

(a) $\operatorname{res}_\pi \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$
(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z-1-z}$
(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1-\cos z}$

Úloha 2. *Spočtěte.*

(a)

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-4|=2$.

(b)

$$\int_C \frac{1}{z\sin z}+\frac{e^{\sin z}}{z+3}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2, $\frac{3\pi}{2}+2i$, $\frac{3\pi}{2}-2i$.

(c)

$$\int_C \frac{1}{e^z-1}+\frac{z-\frac{\pi}{2}}{(\cos z)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $\frac{\pi}{4}+i$, $\frac{\pi}{4}-i$, $\pi+i$, $\pi-i$.

Úloha 3. *Určete, čemu se rovná*

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5}+\frac{3}{z-3}+\frac{4}{z+3}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Úloha 4. *Spočtěte.*

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$
(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

Pro nudící se

Úloha 5. *O funkcích $f_1(z)$, $f_2(z)$ a $f_3(z)$ víme, že mají v bodě $z_0\in\mathbb{C}$ jednoduchý pól a platí $\operatorname{res}_{z_0} f_1(z)=2$, $\operatorname{res}_{z_0} f_2(z)=-1$ a $\operatorname{res}_{z_0} f_3(z)=-2$. Určete, jaký typ izolované singularity mají v bodě $z_0\in\mathbb{C}$ funkce $g(z)=f_1(z)+f_2(z)$ a $h(z)=f_1(z)+f_3(z)$.*

Úloha 6. *Spočtěte*

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}}+\sin\left(\frac{1}{z-10}\right)\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

Úloha 7. *Víme, že*

$$\int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z=5 \quad a \quad \int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z=-3,$$

kde $f(z)$ je celistvá funkce, L_1 je úsečka s počátečním bodem -2 a koncovým i a L_2 je úsečka s počátečním bodem i a koncovým 2. Určete

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde C je záporně orientovaná polokružnice se středem v 0, poloměru 2 a počátečním bodem 2.

Reziduum

Připomenutí.

(1) *Nechť* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentův rozvoj funkce* f *na prstencovém okolí izolované singularity* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Koeficient* a_{-1} *(tj. koeficient u* $(z-z_0)^{-1}$*) nazýváme* **reziduem** *funkce* f *v bodě* z_0 *a značíme* $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.

(2) *Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.*

(3) *Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.*

- **Má-li** $f(z)$ **v bodě** z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

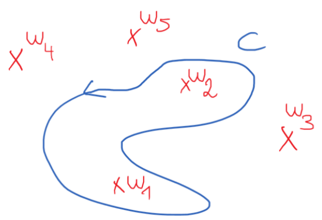
  Speciálně pro
  - ⋆ $k = 1$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$;
  - ⋆ $k = 2$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big((z-z_0)^2 f(z)\big)'$.
- *Je-li funkce* f *tvaru* $f = \frac{g}{h}$, *kde* g *je holomorfní na okolí* z_0 *a* h **má v bodě** z_0 **jednonásobný kořen**, *potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- *Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“, nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...*

Reziduová věta

Připomenutí.



$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{w_1} f(z) + \operatorname{res}_{w_2} f(z)\right)$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x$

Připomenutí.

- *Nechť* P, Q *jsou nenulové polynomy,* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Nechť* $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$ *(pokud* $\alpha = 0$, *tak* $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$*) a* Q *nemá žádné reálné kořeny. Potom*

  (a) *pokud* $\alpha \geq 0$, *pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

  kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} \colon Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\};$$

  (b) *pokud* $\alpha < 0$, *pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w\in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

  kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} \colon Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Výsledky

Úloha 1: (a) $\frac{1}{\pi^2}$
(b) $\frac{1}{\pi^2}$
(c) $-\frac{i}{2}$
(d) 2
(e) 0

Úloha 2: (a) $\frac{4}{49}\pi i$
(b) $-2i$
(c) $2\pi i$

Úloha 3: $8\pi i$

Úloha 4: (a) $\frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\left(\frac{e^{-2}}{8} - \frac{e^{-6}}{24}\right)\pi$
(d) $e^{-1+i}\pi = e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1)\pi$

Úloha 5: $g(z)$ má v z_0 jednoduchý pól; $h(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu

Úloha 6: $8\pi i$

Úloha 7: -2