Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Nechť má matice $\mathbf{A}$ 5 řádků a 4 sloupce, defekt $\mathrm{def}(\mathbf{A}) = 2$. Pak *nutně* platí:
   (a) Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří lineárně nezávislý seznam vektorů.
   (b) Úpravy matice $\mathbf{A}$ Gaussovou eliminační metodou mohou defekt zvýšit.
   (c) $\dim(\mathrm{im}(\mathbf{A})) \geq 2$.
   (d) Každá nehomogenní soustava (pro libovolné $\mathbf{b}$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má nekonečně mnoho řešení.
2. Budiž $\mathbf{B}$ matice typu 3×3, nechť soustavy $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_2$ a $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_3$ mají každá právě jedno řešení (popořadě $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$). Pak *musí být nutně pravda*:
   (a) Seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ je lineárně závislý.
   (b) $\det(2 \cdot \mathbf{B}) = 0$.
   (c) $\det(\mathbf{B}^3) > 0$.
   (d) K matici $\mathbf{B}$ existuje matice inversní.
3. Ať $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice typu $m \times m$, ať $\mathbf{B}$ je matice s n lineárně nezávislými sloupci typu a m řádky, kde $m \neq n$. Vyberte *nutně pravdivé* tvrzení.
   (a) Součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ není definován.
   (b) Součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nemá lineárně nezávislé sloupce.
   (c) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$.
   (d) $\mathbf{B}$ je epimorfismus (surjektivní lineární zobrazení).
4. Uvažujme lineární prostor $\mathbb{C}$ *nad tělesem* $\mathbb{C}$. Vyberte *nepravdivé* tvrzení.
   (a) Seznam vektorů $(1, i)$ z $\mathbb{C}$ je lineárně nezávislý.
   (b) $\dim(\mathbb{C}) < 3$.
   (c) V zadaném lineárním prostoru existuje právě jeden nulový vektor.
   (d) Seznam vektorů $(1 + i, 1 - i)$ z $\mathbb{C}$ je lineárně závislý.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Definujte pojmy: *vlastní hodnota lineárního zobrazení*, *vlastní vektor lineárního zobrazení*.

Dokažte, že pokud má reálná matice $\mathbf{A}$ typu 2×2 vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ příslušné různým nenulovým vlastním hodnotám a_1 a a_2, pak je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislý seznam vektorů v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V tomto příkladu pracujeme s lineárním prostorem $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem. Mějme vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, které mají vzhledem k uspořádané bázi $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ souřadnice $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix})$ a $\mathbf{coord}_B(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu 2×2 se sloupci $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, kde $\mathbf{a}_1$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{v}$ na přímku zadanou rovnicí $y = x$, a $\mathbf{a}_2$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{w}$ na přímku zadanou rovnicí $y = x$. Jaký je determinant matice $\mathbf{A}$? (Nápověda: nejdříve si nakreslete obrázek situace.)