Cvičení 5 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Potřebujeme ověřit, zda leží bod $z = 5 + 8i$ v předepsaném mezikruží konvergence. Jest*

$$|z - 5i|\Big|_{z=5+8i} = |5 + 3i| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

Vidíme, že $\sqrt{34} < 8 = r$, neboť (např.) $\sqrt{34} < \sqrt{36} = 6 < 8$. Vzdálenost bodu $z = 5 + 8i$ od středu $z_0 = 5i$ dané Laurentovy řady je tedy menší než její vnitřní poloměr konvergence. Laurentova řada tedy ve zkoumaném bodě nekonverguje.

Úloha 2. *Jest*

$$f(z) = \frac{(z+i)^3}{(3z-2)^2} = (z+i)^3 \frac{1}{(3z-2)^2}. \tag{1}$$

Potřebujeme tedy najít rozvoj $\frac{1}{(3z-2)^2}$ do mocninné řady se středem v $-i$. Ten najdeme tak, že nejprve najdeme rozvoj pro $\frac{1}{3z-2}$, který potom vhodným způsobem zderivujeme. Připomeňme si známý součet geometrické řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \textit{pro } |z| < 1. \tag{GEOM}$$

S jeho pomocí máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= \frac{1}{3(z+i) - 3i - 2} = -\frac{1}{3i+2} \frac{1}{1 - \left(\frac{3(z+i)}{3i+2}\right)} = -\frac{1}{3i+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(z+i)}{3i+2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} (z+i)^n \end{aligned} \tag{2}$$

pro

$$\begin{aligned}\left|\frac{3(z+i)}{3i+2}\right| &< 1 \\ |z+i| &< \frac{|3i+2|}{3} = \frac{\sqrt{13}}{3}.\end{aligned}$$

Protože

$$\left(\frac{1}{3z-2}\right)' = -\frac{3}{(3z-2)^2},$$

jest díky (2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3z-2)^2} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3z-2}\right)' = -\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} (z+i)^n\right)' = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1}.\end{aligned}$$

Dosazením zpět do (1) *tedy dostaneme*

$$f(z) = (z+i)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n+2}$$

pro $|z + i| < \frac{\sqrt{13}}{3}$ (poloměr konvergence je $R = \frac{\sqrt{13}}{3}$).

Úloha 3. *Začneme tím, že si faktorizujeme kvadratický polynom ve jmenovateli. Snadno zjistíme, že $z^2 + z - 6 = (z + 3)(z - 2)$. Takže*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + z - 6)^3} = \frac{1}{(z-2)^3} \frac{1}{(z+3)^3}. \tag{3}$$

Potřebujeme tedy najít rozvoj $\frac{1}{(z+3)^3}$ *do Laurentovy řady se středem ve* 2. *Ten najdeme tak, že nejprve najdeme rozvoj pro* $\frac{1}{z+3}$, *který potom vhodným způsobem zderivujeme. S pomocí* (GEOM) *máme*

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{5+(z-2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{5}\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z-2)^n \tag{4}$$

pro

$$\begin{aligned} \left|-\frac{z-2}{5}\right| &< 1 \\ |z-2| &< 5. \end{aligned}$$

Protože

$$\left(\frac{1}{z+3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(z+3)^2}\right)' = \frac{2}{(z+3)^3},$$

jest díky (4)

$$\frac{1}{(z+3)^3} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z-2)^n\right)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}n(n-1)(z-2)^{n-2}.$$

Dosazením zpět do (3) *tedy dostaneme*

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}n(n-1)(z-2)^{n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}n(n-1)(z-2)^{n-5}$$

pro $|z-2| < 5$. *(prstencové okolí bodu* 2 *má poloměr* $R = 5$*).*

Úloha 4. *Jest*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{4}{(z-1)^7} + \frac{3}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^7} - \frac{3}{(z-1)^4} - \frac{2}{z-1} - (z-1)^2 + \cdots \\ &= \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} - (z-1)^2 + \cdots \end{aligned}$$

pro $z \in P(1)$, *kde* $+\cdots$ *obsahuje pouze nezáporné mocniny* $(z-1)$, *které jsou pro klasifikaci izolované singularity irelevantní. Vidíme, že Laurentův rozvoj funkce* $f(z)$ *na prstencovém okolí zkoumané izolované singularity obsahuje konečně mnoho záporných mocnin* $(z-1)$ *a nejmenší z nich je* (-2). *Jedná se tedy o pól řádu* 2.