Cvičení 6 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 7

Úloha 1. *Klasifikujte typ izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}, \; z \in P(i),$$

v bodě $z = i$.

Úloha 2. *Určete koeficient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *a exponent* $k \in \mathbb{Z}$ *tak, aby funkce*

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \; z \in P(1),$$

měla v bodě 1 *jednoduchý pól.*

Úloha 3. *Klasifikujte všechny izolované singularity funkce* $f(z)$*, kde*

(a) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2 (z-\pi)^4}$

(b) $f(z) = \frac{(e^z - 1)(1-\cos z)^4}{z^{11}}$

(c) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5(1-e^{iz})}$

(d) $f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)^2 (z - \frac{\pi}{2})}$

Úloha 4. *Určete reziduum funkce* $f(z)$ *v bodě* z*, je-li*

(a) $z = -2$ *a*

$$f(z) = \frac{3}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2 (z+2)^{3n+5}, \; z \in P(-2);$$

(b) $z = 0$ *a*

$$f(z) = \frac{2}{z^3} + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) z^{2n+4}, \; z \in P(0).$$

Úloha 5. *Určete koeficient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *a exponent* $k \in \mathbb{Z}$ *tak, aby platilo*

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n} \right) = \frac{4}{9}.$$

Úloha 6. *Spočtěte.*

(a) $\operatorname{res}_\pi \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$

(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1-\cos z}$

Pro nudící se

Úloha 7. *O funkci* $f(z)$ *víme, že má v bodě* i *pól řádu* 1*. Dále o ní víme, že splňuje* $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ *a* $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$*. Klasifikujte typ izolované singularity funkce* $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$*,* $z \in P(i)$*, v bodě* i*.*

Úloha 8. *Zdůvodněte/Dokažte, že platí následující tvrzení: Má-li funkce* $f(z)$ *v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *pól řádu* $k \in \mathbb{N}$ *a funkce* $g(z)$ *pól řádu* $l \in \mathbb{N}$*, přičemž* $k \neq l$*, pak funkce* $f(z) + g(z)$ *má v bodě* z_0 *pól řádu* $\max\{k, l\}$*. Rozmyslete si také, že předpoklad* $k \neq l$ *je důležitý.*

Klasifikace izolovaných singularit

Připomenutí.

- *Nechť* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentův rozvoj funkce* f *na prstencovém okolí izolované singularity* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.*
  - *(1) Pokud* $a_n = 0$ *pro každé* $n < 0$, *pak* z_0 *je* **odstranitelná singularita**.
    - ⋆ $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$ *na prstencovém okolí* z_0
  - *(2) Pokud* $a_{-k} \neq 0$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_n = 0$ *pro každé* $n < -k$, *pak* z_0 *je* **pól řádu** k.
    - ⋆ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$ *na prstencovém okolí* z_0, *kde* $a_{-k} \neq 0$
  - *(3) Pokud* $a_n \neq 0$ *pro nekonečně mnoho* $n < 0$, *pak* z_0 *je* **podstatná singularita**.
- *Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.*
- *Pokud ne, často se hodí následující pravidlo. Uvažme funkci* $f = \frac{g}{h}$, *přičemž* g *má v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *kořen násobnosti* $k \in \mathbb{N}_0$ *a* h *má v bodě* z_0 *kořen násobnosti* $l \in \mathbb{N}$. *Potom* f *má v* z_0*:*
  - ⋆ *odstranitelnou singularitu, pokud* $k \geq l$;
  - ⋆ *pól řádu* $l-k$, *pokud* $k < l$.
- *Funkce* $f \not\equiv 0$, *která je holomorfní na okolí* $z_0 \in \mathbb{C}$, *má v* z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, *pokud*
$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \qquad a \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$
  - ⋆ *Polynom* $(z-z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, *má v bodě* z_0 *kořen násobnosti* k.
- *Má-li funkce* f *v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *kořen násobnosti* k *a* g *násobnosti* l, *potom funkce* $f(z)g(z)$ *má v bodě* z_0 *kořen násobnosti* $k+l$.

Reziduum

Připomenutí.

(1) Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentův rozvoj funkce* f *na prstencovém okolí izolované singularity* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Koeficient* a_{-1} *(tj. koeficient u* $(z-z_0)^{-1}$*) nazýváme* **reziduem** *funkce* f *v bodě* z_0 *a značíme* $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.

(2) Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.

(3) Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.

- **Má-li** $f(z)$ **v bodě** z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, *potom*
$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$
- *Je-li funkce* f *tvaru* $f = \frac{g}{h}$, *kde* g *je holomorfní na okolí* z_0 *a* h **má v bodě** z_0 **jednonásobný kořen**, *potom*
$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$
- *Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“ nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...*

Výsledky

Úloha 1: Odstranitelná singularita.

Úloha 2: $k = 2$, $a = -\frac{8}{3}$

Úloha 3:
(a) Izolované singularity jsou body 0 a π. Bod 0 je pól řádu 2. Bod π je pól řádu 1.
(b) Jediná izolovaná singularita je bod 0. Bod 0 je pól řádu 2.
(c) Izolované singularity jsou body $2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou odstranitelné singularity. Bod 0 je pól řádu 4.
(d) Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \neq \mathbb{Z}$ jsou póly řádu 2. Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu 3.

Úloha 4:
(a) $\mathrm{res}_{-2} f = 6$
(b) $\mathrm{res}_0 f = 0$

Úloha 5: $k = 1$ a $\alpha = \frac{1}{3}$

Úloha 6:
(a) $\frac{1}{\pi^2}$
(b) $\frac{1}{\pi^2}$
(c) $-\frac{i}{2}$
(d) 2
(e) 0

Úloha 7: Odstranitelná singularita.