MA 5-21

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou yz.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte tok rotace pole

$$\vec{F} = \big(-y, \operatorname{arctg} z, \ln(1 + x^2 z^2)\big)$$

plochou M danou $4x^2 + y^2 + z = 4$, $z \geq 0$. Plocha M je orientována normálou s kladnou z-tovou složkou.

4. Nalezněte všechny hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$, pro které je vektorové pole $\vec{F} = (ay + bz, ax + bz, ax + by)$ potenciální a určete jeho potenciál.

5. Najděte Fourierův rozvoj 2π-periodického rozšíření funkce $f(x) = 2x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ a vyšetřete, kde řada reprezentuje funkci f.

Řešení.

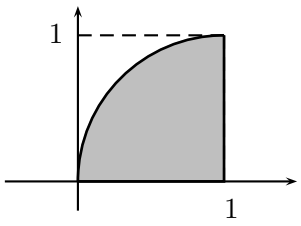
1. Normála k ploše v hledaném bodě je násobek normály k zadané rovině:

$$(2x - 2, 2y, 2z) = \alpha(1, 0, 0).$$

Odtud $y = z = 0$ a $x = 1 + \frac{1}{2}\alpha$. Dosazením do rovnice plochy dostaneme dva body pro $\alpha_1 = 2$ a $\alpha_2 = -2$. Tečné roviny jsou dvě, $x - 2 = 0$ a $x = 0$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Kraj plochy M je křivka C zadaná rovnicí $4x^2 + y^2 = 4$. Její parametrizace je $\varphi(t) = (\cos t, 2\sin t, 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Podle Stokesovy věty máme

$$\iint_{(M)} \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{S} = \int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 0, 0)(-\sin t, 2\cos t, 0)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\sin^2 t\, dt = 2\pi.$$

4. Protože $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, b - a, 0)$ je pole potenciální pro $a = b$ a jeho potenciál je $f = a(xy + xz + yz) + C$.

5. Protože funkce f je lichá, obsahuje řada jen sinové členy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

a reprezentuje f ve všech bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.