Komplexní analýza

Úvod, komplexní čísla

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Základní informace

Stránka předmětu: https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01KAN

Věnujte pozornost pravidlům předmětu (viz Moodle).

- Podmínky zápočtu upřesní cvičící. Ze semestrálních písemek lze získat až 20 bodů ke zkoušce.
- Včas se dobře seznamte s podmínkami a průběhem zkoušky. Vějte pozornost vzorovým zadáním zkouškové písemky.

Obsah kurzu:

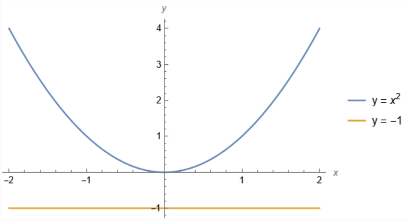
1. Komplexní analýza
2. Transformace (Fourierova transformace, Laplaceova transformace a Z-transformace)

Upozornění

Nezaspěte začátek a nenechte si ujet vlak. Vše na sebe navazuje...

Imaginární nevždy znamená smyšlené

- Víme, že rovnice $x^2 = -1$ nemá v oboru reálných čísel řešení.
- Říct, že řešením je jistý imaginární prvek i splňující $i^2 = -1$, může působit uměle:



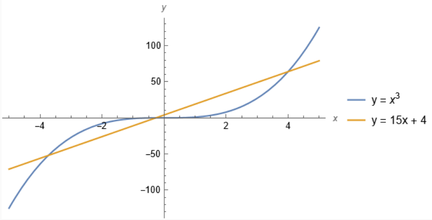
Otázka

Co ale např. kubická rovnice $x^3 = 15x + 4$?

- Existují tzv. Cardanovy vzorce pro řešení kubické rovnice $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

- Co když $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$? Např. pro $x^3 = 15x + 4$ to nastává, ale:



Poučení

Reálné problémy často vyžadují komplexní metody.

Komplexní čísla

Definice (neformální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu dvojčlenů $x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se kterými počítáme jako s reálnými dvojčleny za využití pravidla $i^2 = -1$.

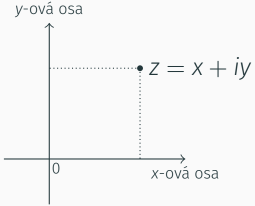
Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

- Prvek i se nazývá **imaginární jednotka**.
- Terminologie a značení:
  - $z = x + iy$ **algebraický tvar** komplexního čísla z.
  - x **reálná část** komplexního čísla z. Píšeme $\mathrm{Re}\, z = x$.
  - y **imaginární část** komplexního čísla z. Píšeme $\mathrm{Im}\, z = y$.
- Ztotožňujeme $x = x + 0i$ a $i = 1i$.

Upozornění

Reálná i imaginární část komplexního čísla jsou reálná čísla!

Geometrická interpretace komplexních čísel



Poučení

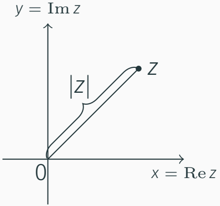
Reálná a imaginární část komplexního čísla jsou kartézské souřadnice bodu v rovině.

- Zatímco body/(uspořádané dvojice) z $\mathbb{R}^2$ neumíme násobit, struktura komplexních čísel je o násobení obohacena.
- Tento „drobný detail“ má velmi podstatné důsledky.

Velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla

Definice

Velikost (nebo také **absolutní hodnota** či modul) komplexního čísla $z = x + iy$ je nezáporné reálné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

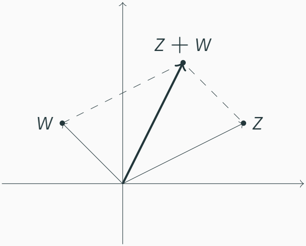


- $|z|$... vzdálenost čísla z od počátku
- $\sqrt{x^2 + y^2}$... vzdálenost bodu (x, y) od počátku
- $z = 0$ právě tehdy, když $|z| = 0$.

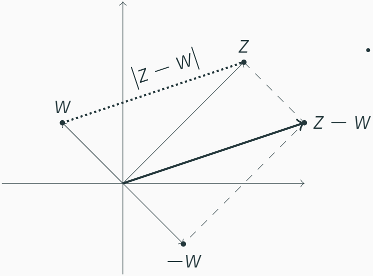
Upozornění

Nedefinujeme uspořádání komplexních čísel! Můžeme porovnávat velikosti komplexních čísel, nikoliv ale komplexní čísla mezi sebou.

Geometrický význam sčítání, vzdálenost komplexních čísel



- $z + w = (z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)$ pro $z = z_1 + iz_2$ a $w = w_1 + iw_2$
- $z \mapsto z + w$
  posun (z_1, z_2) v rovině o (w_1, w_2)

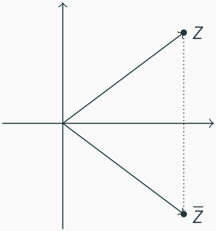


- $|z - w| = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2}$
  vzdálenost mezi $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$

Komplexní sdružení

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Komplexní číslo $\bar{z} = x - iy$ se nazývá **komplexně sdruženým číslem** k číslu z.



- $z \mapsto \bar{z}$... zrcadlení kolem reálné osy
- $|z| = |\bar{z}|$

Příklad

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $z\bar{z} = |z|^2$.

Dělení komplexních čísel

Otázka

Umíme násobit dvě komplexní čísla. Co by mělo být $\frac{w}{z}$ pro $z \neq 0$?

- $\frac{w}{z} = w\frac{1}{z}$
- Inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ je definován rovností $z^{-1}z = 1$.
    - pro $z = 0$ inverzní prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
    - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme: $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

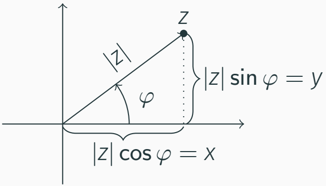
Příklad

Nechť $w = 5 - i$ a $z = 1 + 2i$.

1. $w - z = 4 - 3i$, $\overline{w - z} = 4 + 3i$ a $|w - z| = 5$;
2. $\frac{w}{z} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$, $\mathrm{Re}\,\frac{w}{z} = \frac{3}{5}$ a $\mathrm{Im}\,\frac{w}{z} = -\frac{11}{5}$.

Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť $z = x + iy$ je nenulové komplexní číslo.



- $\varphi \in \mathbb{R}$ orientovaný úhel
- $(x, y) = (|z| \cos\varphi, |z| \sin\varphi)$
- polární souřadnice bodu (x, y)

Poučení

Vyjádření

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi), \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R},$$

nazýváme **goniometrický tvar** čísla $z \neq 0$.

Upozornění

Orientovaný úhel $\varphi \in \mathbb{R}$ není jednoznačný. Můžeme totiž „obíhat“ dokola či v opačném směru.

Exponenciální tvar komplexního čísla

Otázka

Jak lze zapsat $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ úsporněji?

- Nejspíše jste již někde viděli tzv. Eulerův vzorec:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- Pomocí něj lze goniometrický tvar komplexního čísla zapsat mnohem úsporněji jako:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Poučení

Vyjádření

$$z = |z|e^{i\varphi}, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R},$$

nazýváme **exponenciální tvar** čísla $z \neq 0$.

Množina argumentů a hlavní hodnota argumentu

Definice

Mějme nenulové $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

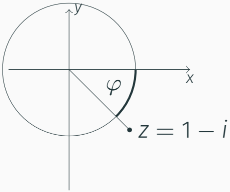
1. Libovolné takové $\varphi \in \mathbb{R}$ nazýváme **argument** čísla z.
2. Množinu $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}\}$ nazýváme **množina všech argumentů** čísla z.
3. To $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ spňující navíc $(-\pi, \pi]$ nazýváme **hlavní hodnota argumentu** čísla z. Toto jedno φ značíme $\arg z$.

Příklad

Mějme $z = -1 + i$.

1. $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.
2. $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{\frac{11}{4}\pi i} = \sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi i} = \cdots$

Pro jistotu ještě jednou



Hodnotu φ z obrázku nevidíme.

$\varphi = \frac{7\pi}{4}$? $\varphi = -\frac{\pi}{4}$? $\varphi = \frac{31\pi}{4}$?

Ovšem vidíme, že $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

Poučení

Nenulové komplexní číslo má nekonečně mnoho argumentů.
Ovšem má ale pouze jednu jedinou hlavní hodnotu argumentu, která leží v intervalu $(-\pi, \pi]$.

Rovnost komplexních čísel

Tvrzení (O rovnosti komplexních čísel)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ jsou nenulová. Nechť $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Potom $z = w$ právě tehdy, když

$$|z| = |w| \qquad \text{a zároveň} \qquad \psi = \varphi + 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}.$$

Poučení

Velikosti stejné, ale dva „náhodné“ argumenty se mohou lišit o celočíselný násobek 2π.

Geometrický význam násobení

- Mějme nenulová $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$.
- Za použití součtových vzorců můžeme ověřit:

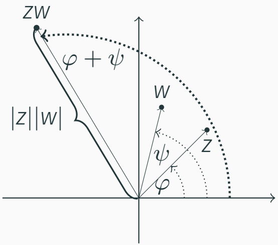
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$$

- A tedy:

$$zw = |z||w|\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big) = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$$

Poučení

Úhly se sčítají a velikosti násobí.



- $|zw| = |z||w|$
- $\varphi + \psi \in \mathrm{Arg}(zw)$
- Nemusí ale být $\varphi + \psi = \arg(zw)$.

Moivreova věta

Tzv. Moivreova věta by teď už pro nás neměla být překvapením.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Stručněji:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -2$. Množina všech jejích řešení je

$$\left\{\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)} : k = 0,1,2,3\right\} =$$
$$\left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\right) : k = 0,1,2,3\right\}$$

Základní identity

Tvrzení (Základní identity)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

1. $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ a $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
2. $\bar{\bar{z}} = z$;
3. $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$;
4. $\overline{zw} = \bar{z}\,\overline{w}$;
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{w}}$, kdykoli $w \neq 0$;
6. $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$
7. $|z| = |\bar{z}|$;
8. $|zw| = |z|\,|w|$;
9. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, kdykoliv $w \neq 0$.

Rozšířená komplexní rovina

- Existuje také tzv. rozšířená komplexní rovina (a s ní souvisí pojem Riemannova sféra), která vznikne rozšířením komplexní roviny o jeden „nevlastní bod“.
- Tento jeden prvek má interpretaci „komplexního nekonečna“.
- My se ale obejdeme bez toho.

Upozornění

V komplexní analýze nemáme $+\infty$ a $-\infty$ jako v reálné analýze.