MA 4-22

1. Nalezněte tečnou rovinu ke grafu $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = (1, 1, \pi/4)$ a určete její průsečíky s osami x, y a z.

2. Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_{x-2}^0 f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Hmotná koule P s poloměrem R a středem v počátku má hustotu v bodě (x, y, z) rovnou třetině vzdálenosti bodu (x, y, z) od počátku. Vypočěte moment setrvačnosti koule P vzhledem k ose procházející počátkem.

4. Vyšetřete, zda je pole $\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ potenciální. Spočtěte integrál z pole $\vec{F}$ přes kladně orientovanou jednotkovou kružnici se středem v počátku.

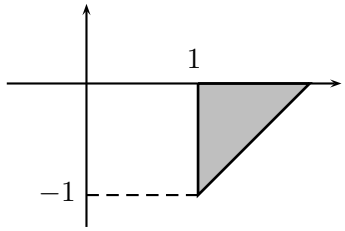
5. Zjistěte pro mocninnou řadu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n!} + 3^{-n}\Big) x^n$ poloměr konvergence a určete její součet. (Návod: řadu napište jako součet dvou řad.)

Řešení.

1. Normála ke grafu v bodě A je $\vec{n} = \operatorname{grad}(\operatorname{arctg}(y/x) - z)\big|_A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Odtud máme, že tečná rovina je $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{1}{4}\pi = 0$ a průsečíky s osami x, y, z jsou postupně $\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^{y+2} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/4}^0 \int_{1/\cos\varphi}^{2/(\cos\varphi - \sin\varphi)} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Moment setrvačnosti je $I = \iiint_P v^2 f$, kde funkce $v^2 = x^2 + y^2$ a hustota $f = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ve sférických souřadnicích máme

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \varrho^2 \sin^2\theta \cdot \tfrac{1}{3}\varrho \cdot \varrho^2 \sin\theta \, d\varrho \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi R^6}{27}.$$

4. Pole $\vec{F}$ není potenciální, integrál přes kružnici má hodnotu 2π.

5. Poloměr konvergence $R = 3$. Řadu napíšeme jako součet dvou řad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{x}{3}\Big)^n$. První je rozvoj exponenciální funkce e^x a druhá řada je geometrická s kvocientem $x/3$ a se součtem $\dfrac{3}{3-x}$. Celkový součet je $e^x + \dfrac{3}{3-x}$.