K přípravě na zápočtový test jsem vyplodil 3 typy příkladů, každý ve dvou variantách, na 3 typy úloh. Za jejich vypracování dávám možnost získat body za aktivitu (celkově až 3 body za 3 splněné úkoly). Pozor! Vyberte si prosím vždy pouze jednu z variant příkladu (např. u příkladu **1** pouze **1a** nebo pouze **1b**), ale máte možnost výběru varianty u každého příkladu (tedy např. vypracujete **1a, 2b, 3a**). Posílejte mi domácí úkoly nejlépe napsané čitelně ale ručně (na papír, na tablet,…) a pak oskenované nebo vyfocené. Deadlinem nechť je přespříští cvičení, ale samozřejmě by bylo ideální odevzdat to do příštího cvičení, kdy budeme psát zápočtový test. V případě možných přehlédnutí v zadání nebo nejasností, nepochopení či zásadními obtížemi s vypracováním příkladů, mi prosím pište na email munzavoj@fel.cvut.cz .

1 Tečné a normálové zrychlení

- Těleso se pohybuje po trajektorii:

(1a) $x(t) = \alpha e^{\beta t}\cos(\beta t)\,,\;\; y(t) = \alpha e^{\beta t}\sin(\beta t)\,,\;\; z(t) = \gamma t^4$

(1b) $x(t) = B\ln(At)\,,\;\; y(t) = \sqrt{Ct},\;\; z(t) = B\, e^{\sin(At)}$

- Nalezněte rychlost $\boldsymbol{v}$, celkové zrychlení $\boldsymbol{a}$, tečné zrychlení $\boldsymbol{a_t}$ a alespoň formálně napište normálové zrychlení $\boldsymbol{a_n}$.
- Určete rozměry konstant

(1a) $[\alpha], [\beta], [\gamma]$.
(1b) $[A], [B], [C]$.

2 Eulerovo diferenční schéma

- Sestavte pohybovou rovnici pro pohyb částice ve směru x způsobený silou

(2a) $F = -kx^3$

(2b) $F = -kv^2$

kde k je konstanta, v je rychlost ve směru x. Mocniny u x a v_x při zadání na hodině mohly lišit. Použijte mocniny, které se Vám líbí.

- Navrhněte tvar Eulerova diferenčního schématu pro její řešení a rozepište, jak budou vypadat jednotlivé iterace startující na počáteční podmínce $x_0 = L, v_0 = 0$.

3 Mechanická práce po křivce

- Vypočtěte mechanickou práci vykonanou částicí v silovém poli $\boldsymbol{F}$ při pohybu po křivce Γ:

(3a) $\boldsymbol{F} = (\alpha y, \beta z^2, \gamma x^3)$, kde x, y, z jsou prostorové souřadnice a α, β, γ jsou konstanty.

Γ je průsečíkem ploch $y = \frac{2\beta}{\alpha}x^2$, $z = -x$. Pohyb probíhá z bodu $A = [0, ?, ?]$ do bodu $B = [L, ?, ?]$.

(3b) $\boldsymbol{F} = \left(\alpha\sqrt{x}, \beta y^3, -\frac{\alpha^2}{\beta}z^4\right)$, kde x, y, z jsou prostorové souřadnice a α, β jsou konstant. Γ je šroubovice s poloměrem R a výškou závitu $2\pi b$. Osou šroubovice je osa z. Na počátku je částice v $A = [R, 0, 0]$ pak na šroubovici vykoná čtvrt obrátky v kladném směru z, takže na konci pohybu je částice v bodě $B = [0, R, \frac{b\pi}{2}]$.

X Rozměrová analýza

V rámci přípravy přidávám i dva převzaté příklady na rozměrovou analýzu. Tu už jsme si procvičili v písemce na začátku jedné z hodin, takže za tyto příklady body nebudou. Slouží jen k přípravě, proto přidávám i jejich výsledky.

Přesýpací hodiny

Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek úzkým hrdlem o ploše S z horní do dolní nádobky. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru S mezi nádobami, hustotě zrnek písku ρ a (zřejmě) na tíhovém zrychlení g. Naopak, nezávisí na velikosti zrnek a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro určení rychlosti sypání $\Delta m/\Delta t$ písku v hodinách.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = k\rho g^{1/2} S^{5/4},$$

Tlak v nitru Země a Slunce

Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti M, poloměru R, a jelikož jistě souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě $\mathrm{G} = 6,672 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ Newtonova gravitačního zákona. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ($M_\mathrm{S} = 1,99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{S} = 696\,000\,\mathrm{km}$) a Zemi ($M_\mathrm{Z} = 5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$).

$$p \propto \mathrm{G}\frac{M^2}{R^4}.$$

Dosazením příslušných hodnot dostaneme odhady pro tlak v nitru Slunce a Země jako $p_\mathrm{S} \approx 10^{15}\,\mathrm{Pa}$ a $p_\mathrm{Z} \approx 10^{12}\,\mathrm{Pa}$. Současné udávané odhady tlaku v nitru Slunce a Země jsou $p_\mathrm{S} = 2 \times 10^7\,\mathrm{GPa}$, $p_\mathrm{Z} = 3,5 \times 10^5\,\mathrm{MPa}$, odkud je vidět, že odhad pomocí rozměrové analýzy není špatný.