Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

**Část A** (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

- 1. Ať  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou matice, pro které má smysl součin  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . Pak  $nutn\check{e}$  platí:
  - (a)  $rank(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \ge rank(\mathbf{A})$ .
  - (b) Každý sloupec  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  je lineární kombinací sloupců  $\mathbf{A}$ .
  - (c) Pokud je  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  čtvecová a  $\mathbf{B}$  má lineárně nezávislé sloupce, pak  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ .
  - (d) Pokud má smysl i součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , pak  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .
- 2. Ať  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  je uspořádaná ortogonální báze podprostoru  $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$  se standardním skalárním součinem. Pak nutně platí:
  - (a) Pro libovolné  $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ , kde  $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ , je  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  uspořádaná ortogonální báze lineárního podprostoru  $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ .
  - (b) Platí  $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0$
  - (c) Seznam  $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)$  je uspořádaná báze prostoru  $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2).$
  - (d) Pro libovolný vektor  $\mathbf{b} \notin \mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  takový, že  $\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{v}_1 \rangle = 0$ , platí  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ .
- 3. Ať  $\mathbf{A}$  je matice typu  $2 \times 2$ , ať  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1$  ani  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_2$  nemá řešení. Pak  $nutn\check{e}$  platí:
  - (a) A je regulární.
  - (b) A je nulová matice.
  - (c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  nemá řešení.
  - (d) Sloupce matice A jsou lineárně závislé.
- 4. Mějme tři čtvercové matice  ${\bf A},\,{\bf B}$  a  ${\bf C}$  rozměrů  $n\times n,\,{\bf O}$  je nulová matice  $n\times n.$ 
  - (a)  $\det(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{pmatrix}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{C}).$
  - (b)  $\det((\mathbf{A} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) = (\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A})) \cdot \det(\mathbf{B}).$
  - (c)  $5 \cdot \det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{C}) = \det(5 \cdot \mathbf{B}) + \det(\mathbf{C})$ .
  - (d)  $\det(\mathbf{E}_n) \cdot \det(\mathbf{E}_n^{-1}) = -1$ .

 $\check{\mathbf{C}}$ ást  $\mathbf{B}$  (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Dokažte, že pokud má reálná matice  $\mathbf{A}$  typu  $2 \times 2$  vlastní vektory  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  příslušné různým nenulovým vlastním číslům  $a_1$  a  $a_2$ , pak je  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  lineárně nezávislý seznam vektorů v  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$ .

**Část C** (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Lineární zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  je zadáno přiřazeními

$$\mathbf{f}(\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right))=\left(\begin{array}{c}-4\\3\end{array}\right)\qquad\mathbf{f}(\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right))=\left(\begin{array}{c}-10\\8\end{array}\right).$$

Nalezněte hodnotu  $\mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ). Nalezněte matici  $\mathbf{A}$  zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem ke kanonické bázi  $K_2$  prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Diagonalisujte  $\mathbf{A}$ . Závěrečnou odpověď zapište celou větou.