Cvičení 3 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Chceme najít všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že jsou pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splněny obě Cauchyovy-Riemannovy podmínky:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \tag{CR1}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{CR2}$$

Z (CR1) *tedy dostáváme*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2.$$

Integrací podle proměnné y dostaneme

$$v(x,y) = \int 4x^3 - 12xy^2 \,\mathrm{d}y = 4x^3y - 4xy^3 + C(x), \tag{1}$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, která může záviset na proměnné x (nikoliv ovšem na y).

Využitím (CR2) *dostaneme*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(4y^3 - 12x^2y + 3) = -4y^3 + 12x^2y - 3. \tag{2}$$

Derivací (1) *podle x dále dostaneme*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y - 4xy^3 + C(x)) = 12x^2y - 4y^3 + C'(x). \tag{3}$$

Nyní porovnáme (2) *a* (3)*, čímž dostaneme*

$$\begin{aligned} -4y^3 + 12x^2y - 3 &= 12x^2y - 4y^3 + C'(x) \\ C'(x) &= -3. \end{aligned}$$

Takže

$$C(x) = \int -3 \,\mathrm{d}x = -3x + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dosazením zpět do (1) *konečně dostáváme*

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - 3x + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$.

Dále chceme určit K tak, aby platilo

$$f(2+i) = u(2,1) + iv(2,1) = -4 + 5i.$$

Má tedy platit $v(2,1) = 5$, takže

$$\begin{aligned} 4x^3y - 4xy^3 - 3x + K\Big|_{x=2,y=1} &= 5 \\ 32 - 8 - 6 + K &= 5 \\ K &= -13. \end{aligned}$$

Nakonec máme určit $f'(1-i)$. Dosazením do vztahu pro derivaci z C-R podmínkem dostaneme

$$\begin{aligned} f'(1-i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 4x^3 - 12xy^2 + i(12x^2y - 4y^3 - 3)\Big|_{x=1,y=-1} \\ &= 4 - 12 + i(-12 + 4 - 3) = -8 - 11i. \end{aligned}$$

Úloha 2. *Připomeňme si, že pro libovolné* $w \in \mathbb{C}$ *platí* $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$. *Tedy* $|e^{-2+\frac{98}{45}\pi i}| = e^{-2}$. *Dále* $|-3i| = 3$, *takže*

$$|z| = |-3i| \cdot |e^{-2+\frac{98}{45}\pi i}| = 3e^{-2}.$$

Dále si připomeňme, že pro libovolné $w \in \mathbb{C}$ *platí* $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} e^w$. *Tedy* $\frac{98}{45}\pi \in \operatorname{Arg} e^{-2+\frac{98}{45}\pi i}$. *Protože* $-\frac{\pi}{2}$ *je argument (dokonce hlavní hodnota argumentu) čísla* $-3i$, *máme*

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{98}{45}\pi = \frac{151}{90}\pi \in \operatorname{Arg} z.$$

Teď si zbývá uvědomit, že číslo z *tedy leží ve 4. kvadrantu. Můžeme například psát* $\frac{151}{90}\pi = 2\pi - \frac{29}{90}\pi$, *takže* $\arg z = -\frac{29}{90}\pi$. *Nakonec*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z = \ln(3e^{-2}) - \frac{29}{90}\pi i.$$

Úloha 3. *Rovnici přenásobíme* e^{iz+1} *(o čemž víme, že je vždy nenulové), čímž dostaneme*

$$\begin{aligned} e^{2iz} &= -\frac{i}{e^{iz+1}} \\ e^{iz+1}e^{2iz} &= -i \\ e^{3iz+1} &= -i. \end{aligned}$$

Pravou stranu si také vyjádříme pomocí exponenciální funkce. Jest $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$, *takže*

$$e^{3iz+1} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Tedy

$$3iz + 1 = -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \quad \textit{kde } k \in \mathbb{Z},$$

takže

$$z = -\frac{1}{3i} - \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} + \frac{1}{3}i,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.