MA 6-21

1. Nalezněte na křivce $x^2 + xy + y^2 = 1$ bod nejblíže a bod nejdále k počátku.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte jaká, práce se vykoná při pohybu bodu o hmotnosti $m = 1$ po obvodu trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(3, 0)$ a $(3, 3)$. Pohyb se děje v kladném smyslu v poli $\vec{F} = (y^2 - x^3, x^2 - y^3)$.

4. Zjistěte, zda je pole $\vec{F} = \left(\ln(1 + z), 2yz, \dfrac{x}{1 + z} + y^2\right)$ potenciální a v kladném případě nalezněte potenciál.

5. Rozkladem na parciální zlomky rozviňte funkci

$$f(x) = \frac{3}{2 + x - x^2}$$

do Taylorovy řady se středem $x_0 = 0$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

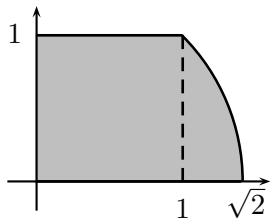
1. Lagrangeova funkce je $L = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$. Rovnice pro stacionární body:

$$2x = \lambda(2x + y), \quad 2y = \lambda(2y + x), \quad x^2 + xy + y^2 = 1.$$

Řešením jsou 4 body $\pm(1, -1)$ a $\pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Nejblíže jsou body $\pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a nejdále $\pm(1, -1)$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f \; dx \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} f \, \varrho \, d\varrho d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f \, \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Označíme trojúhelník symbolem T. Podle Greenovy věty máme

$$\int_{(\partial T)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_T \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) = \int_0^3 \int_0^x 2x - 2y \; dy\, dx = 9.$$

4. Pole je potenciální s potenciálem $f = x\ln(1+z) + y^2 z + C$.

5. Rozkladem na parciální zlomky máme

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\Big)\, x^n.$$

Poloměr konvergence je $R = 1$.