

KAPITOLA 12: Číselné řady

Označení:

- $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$
- $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ – rozšířená komplexní rovina (∞ – nevlastní hodnota, číslo, bod)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - a| < \varepsilon\} \text{ pro } a \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$$

$$U_K(\infty) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > K\} \text{ pro } K \geq 0$$

definujeme pro $a \in \mathbb{C}$:

$$a \pm \infty = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty \text{ (jen pro } a \neq 0), \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

nedefinujeme:

$$0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \pm \infty$$

Posloupnosti komplexních čísel

$$(a_n)_{n=1}^\infty = (\alpha_n + j\beta_n)_{n=1}^\infty = (\alpha_n)_{n=1}^\infty + j(\beta_n)_{n=1}^\infty, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$$

definice limity jako v reálném případě

Platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(\operatorname{Re} a_n)^2 + (\operatorname{Im} a_n)^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$
– k tomu stačí, když platí $\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Re} a_n| = +\infty$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} a_n| = +\infty$ (není to ovšem nutné – viz posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty = (1, 2j, 3, 4j, \dots)$, pro kterou ani jedna z uvedených dvou limit neexistuje)

12.1 Úvod

$(a_n)_{n=1}^\infty$ – posloupnost reálných nebo komplexních čísel

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ – (nekonečná) řada reálných nebo komplexních čísel, a_n – n -tý člen řady

obecněji: $\sum_{n=N_0}^\infty a_n$; $\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)}}^\infty a_n$, kde $P(n)$ je nějaký výrok (např. „3 nedělí n “); ...

Definice:

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak N -tý **částečný součet** řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ definujeme předpisem:

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Existuje-li $s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$, nazýváme s **součtem řady** $s = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Píšeme $s = \sum_{n=1}^\infty a_n$.

Řekneme, že řada **konverguje** (**diverguje** | **osciluje**), jestliže posloupnost částečných součtů $(s_N)_{N=1}^\infty$ má limitu vlastní (nevlastní | nemá limitu).

Poznámka: Změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na to, zda řada konverguje, diverguje či osciluje.

Příklad 12.1: $\sum_{n=1}^\infty n$ diverguje [$s_N = \frac{N(N+1)}{2}$]; $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n$ osciluje [$(s_N)_{N=1}^\infty = (-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots)$];
 $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n n$ osciluje v \mathbb{R} , ale diverguje v \mathbb{C} [$(s_N)_{N=1}^\infty = (-1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots)$]

Příklad 12.2: Geometrická řada s kvocientem q : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, kde $a_0, q \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = q \cdot a_n$, tj. $a_n = a_0 \cdot q^n$

- Speciálně pro $a_0 = 1$ je

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N q^n = s_N = 1 + q + q^2 + \dots + q^N.$$

Je-li $q = 1$, pak zřejmě platí $s_N = N + 1$. Pro $q \neq 1$ máme

$$s_{N+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1} = \begin{cases} s_N + q^{N+1} \\ 1 + q \cdot s_N \end{cases}$$

tedy

$$\begin{aligned} s_N + q^{N+1} &= 1 + q \cdot s_N, \\ s_N &= \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

To nám dává pro $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a obecněji

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} q^n = \sum_{n=N_0}^{\infty} q^{N_0} \cdot q^{n-N_0} \stackrel{m=n-N_0}{=} \sum_{m=0}^{\infty} q^{N_0} \cdot q^m = q^{N_0} \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

Pro ostatní kvocienty q z vyjádření s_N dostáváme

$$\begin{aligned} \diamond \text{ v } \mathbb{R}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= \begin{cases} +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases} \\ \diamond \text{ v } \mathbb{C}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= \begin{cases} \infty & \text{pro } |q| > 1 \text{ nebo } q = 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro } |q| = 1, q \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Pro obecné $a_0 \neq 0$ všechny součty vynásobíme číslem a_0 .

Speciálně pro $|q| < 1$ dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 \cdot \frac{1}{1 - q},$$

a obecněji jako výše

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=N_0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 q^{N_0} \cdot \frac{1}{1 - q} = a_{N_0} \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

- Pro $a_0 = 0$ je součet řady nulový (všechny členy řady jsou nulové).

Příklad 12.3: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{5}$

Příklad 12.4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Máme totiž $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, takže

$$s_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Věta 12.1:

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}})$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}})$ a $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A,$$

pokud je výraz vpravo definován.

Věta 12.2:

Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují obě řady $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n$, $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n$.
Pokud řady konvergují, pak

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n + j \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n.$$

Věta 12.3 (nutná podmínka konvergence):

Jestliže $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Příklad 12.5: Řady $\sum_{n=1}^\infty \arctg n$, $\sum_{n=1}^\infty \sin(n\frac{\pi}{2})$ nekonvergují. Je totiž $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg n = \frac{\pi}{2} \neq 0$ a $(\sin(n\frac{\pi}{2}))_{n=1}^\infty = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$, tedy limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\frac{\pi}{2})$ neexistuje.

12.2 Řady s nezápornými členy**Věta 12.4:**

Je-li $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak existuje součet $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a je nezáporný).

Poznámka: Protože je zde $(s_N)_{N=1}^\infty$ neklesající (a tedy $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$ existuje), stačí k určení hodnoty součtu řady najít limitu jakékoliv podposloupnosti posloupnosti $(s_N)_{N=1}^\infty$.

Příklad 12.6: Harmonická řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta 12.5 (srovnávací kritérium):

Nechť $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \geq n_1$. Potom platí:

- a) Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a je-li $n_1 = 1$, pak $0 \leq \sum_{n=1}^\infty a_n \leq \sum_{n=1}^\infty b_n$).
- b) Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$.

Příklad 12.7: Pro $\alpha \leq 1$ řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje, protože pro tato α je $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ a harmonická řada diverguje.

Příklad 12.8: Řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje. Podle příkladu 12.4 totiž konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ a $\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{n(n+n)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$.

Poznámka („limitní verze“ srovnávacího kritéria): Uvažujme řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, $\sum_{n=1}^\infty b_n$ s kladnými členy. Předpokládejme, že existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (zřejmě $c \geq 0$). Pokud je $c \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Z definice limity totiž existuje k $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{1}{2}c = c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon = \frac{3}{2}c$, a tedy $\frac{1}{2}cb_n < a_n < \frac{3}{2}cb_n$. Použijeme-li nyní srovnávací kritérium na řady s členy $c_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{1}{2}cb_n$, a_n a $d_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{3}{2}cb_n$, zjistíme, že jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^\infty c_n$, a pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty d_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Řady $\sum_{n=1}^\infty c_n$ a $\sum_{n=1}^\infty d_n$ přitom zřejmě konvergují právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Pokud je $c = 0$, pak nám konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty b_n$ dává konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Z definice limit totiž k $\varepsilon = 1$ existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{a_n}{b_n} < 0 + \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$. Konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ nám na základě limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ o konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty b_n$ nic neříká.

Příklad 12.8 – dodatek: K důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ můžeme použít také výše uvedenou limitní verzi srovnávacího kritéria: Máme $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2}) / (\frac{1}{n(n+1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$ a řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ konverguje.

Věta 12.6 (podílové kritérium – D'Alembertovo):

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \geq n_1$. Potom platí:

- a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- b) Jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.7 (limitní podílové kritérium):

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- a) Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- b) Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.8 (odmocninové kritérium – Cauchyovo):

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- b) Jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n , pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.9 (limitní odmocninové kritérium):

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- a) Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- b) Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Poznámky:

- a) V nelimitních kritériích pro konvergenci nestačí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ resp. $\sqrt[n]{a_n} < 1$ pro všechna n (viz např. harmonická řada: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, ale řada diverguje).
- b) Limitní kritéria nepomohou, je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (viz např. řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – konverguje).
- c) U podílového kritéria pro divergenci nestačí: „pro nekonečně mnoho n “ (viz příklad 12.10).
- d) Lze-li ukázat, že řada konverguje pomocí podílového kritéria, lze to i pomocí odmocninového. Pro divergenci to ale neplatí (viz např. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$, jejíž divergenci lze ukázat pomocí podílového kritéria, ne však pomocí odmocninového).

Připomenutí – užitečné limity (viz [P11.6]):

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pro } a > 0 \qquad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Příklad 12.9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje podle kritéria podílového ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$), podílového limitního ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$), odmocninového limitního ($\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \langle \frac{1}{\infty} \rangle = 0 < 1$), srovnávacího (pro $n \geq 2$ je $n! \geq (n-1)n \geq \frac{n}{2}n$, tedy $a_n \leq \frac{2}{n^2}$, a přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konverguje).

Příklad 12.10: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{1}{2^n}$ pro n -sudé a $a_n = \frac{1}{5^n}$ pro n -liché, konverguje podle odmocninového kritéria (podílové ale nepomůže, protože $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pro všechna lichá n ; nelze použít ani limitní odmocninové kritérium, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje; vhodné je ale použití srovnávacího kritéria, protože pro každé n platí $a_n \leq (\frac{1}{2})^n$).

Příklad 12.11: U řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, podílové ani odmocninové kritérium nepomůže.

Věta 12.10 (integrální kritérium):

Nechť f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle N, \infty \rangle$, kde $N \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_N^{\infty} f(x) dx$.

Příklad 12.12: Podle integrálního kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ (využití ve srovnávacím kritériu).

Příklad 12.13: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Řešení: Máme $\frac{1}{n \ln n} = f(n)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, která je na intervalu $\langle 2, \infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Můžeme tedy zkusit použít integrální kritérium. Protože

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln |\ln x|]_2^{\infty} = \infty - \ln(\ln 2) = \infty,$$

zkoumaná řada podle integrálního kritéria diverguje.

Poznámka: Pokud ve Větě 12.10 s $N = 1$ řada konverguje a její součet je roven A , pak pro chybu $r_k = A - \sum_{n=1}^k f(n)$ ($= \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n)$), které se dopustíme, když místo celé řady sečteme jen jejích prvních k členů, platí

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x) dx \leq r_k \leq \int_k^{\infty} f(x) dx.$$

Příklad 12.14: Odhadněte chybu součtu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, jestliže sečteme jen prvních 100 členů. (Součet uvedené řady lze získat pomocí Fourierových řad, které budete mít později.)

Řešení: Máme $\frac{1}{n^2} = f(n)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$, která je na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. K odhadu chyby $r_{100} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$, tedy můžeme použít předchozí poznámku. Ta nám dává odhady

$$\begin{aligned} r_{100} &\geq \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{101}^{\infty} = \frac{1}{101} = 0, \overline{0099} \\ r_{100} &\leq \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{100}^{\infty} = \frac{1}{100} = 0, 01. \end{aligned}$$

Pro hledanou chybu r_{100} tak máme odhad $0, \overline{0099} \leq r_{100} \leq 0, 01$.

12.3 Řady s obecnými členy

Věta 12.11:

Jestliže pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, pak tato řada diverguje.

Platí: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\left| \sum_{n=N+1}^M a_n \right| = |s_M - s_N| < \varepsilon$, kdykoliv $n_0 \leq N < M$ (tj. řada splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku (B.C.P.) pro konvergenci řad)

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\dots \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně (relativně)**

Poznámka: Konverguje-li reálná řada neabsolutně, pak „součet“ jejích kladných členů je $+\infty$, záporných $-\infty$. Tj. označíme-li $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ (všimněte si, že $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$), pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$.

Příklad 12.14: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje absolutně.

Poznámka: Absolutní konvergenci řad lze zkoumat pomocí kritérií z odstavce 12.2.

Věta 12.12:

Konverguje-li řada absolutně, pak konverguje.

(Obrácené tvrzení neplatí.)

Věta 12.13 (Leibnizovo kritérium):

Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$ (tzv. **alternující řada**) konverguje právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Příklad 12.15: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konverguje neabsolutně.

Poznámky:

a) Je-li $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ prosté zobrazení, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ nazýváme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí:

- 1) Jestliže řada konverguje absolutně, pak konverguje absolutně i každé její přerovnání a má stejný součet.
- 2) Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání této řady. Totéž platí pro $\pm\infty$. Řadu lze přerovnat v tomto případě i tak, že nová řada bude oscilovat.

b) **Cauchyovým součinem** řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazýváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, \dots ,
 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ (srovnejte s výpočtem koeficientů při násobení dvou polynomů).

Platí: Jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují a alespoň jedna z nich konverguje absolutně, pak konverguje i jejich

Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ a platí $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Konvergují-li absolutně obě řady, pak konverguje absolutně i jejich Cauchyův součin.

12.4 Příklady

Příklad 12.16: Zjistěte, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{x+2}\right)^n$.

Řešení: Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{5}{x+2}$, která podle Příkladu 12.2 konverguje právě tehdy, když $\left|\frac{5}{x+2}\right| < 1$. Toto nastává, právě když $5 < |x+2|$, tj. pro $x > -2 + 5 = 3$ a pro $x < -2 - 5 = -7$. Uvedená řada tak konverguje pro $x \in (-\infty, -7) \cup (3, \infty)$.

Příklad 12.17: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n-1)^n}{(4n+7)^n}$.

Řešení: Máme $a_n = \frac{9^n(n-1)^n}{(4n+7)^n} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{9(n-1)}{(4n+7)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{9}{4} > 1.$$

Tedy podle limitního odmocninového kritéria řada diverguje. Divergenci můžeme dostat také pomocí prostého odmocninového kritéria, protože pro $n \geq 4$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

Příklad 12.18: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arcsin 1)^n}{n^2}$.

Řešení: Máme $a_n = \frac{(\frac{\pi}{2})^n}{n^2} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1^2} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Tedy podle limitního odmocninového kritéria řada diverguje. Divergenci můžeme dostat také pomocí limitního podílového kritéria, protože

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(\frac{\pi}{2})^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Příklad 12.19: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

Řešení: Máme $a_n = \frac{n^n}{(2n)!} > 0$ a

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)n^n} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot e = 0 < 1. \end{aligned}$$

Tedy podle limitního podílového kritéria řada konverguje.

Příklad 12.20: Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n^2 - 6n + 5}{(n^2 - 3n + 2)^2}$.

Řešení: Rozkladem na jednoduché zlomky dostaneme $a_n = \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2}$. Protože je na intervalu $\langle 3, \infty \rangle$ funkce $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ nezáporná a nerostoucí a $\int_3^{\infty} f(x) dx = \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right]_3^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2}$, daná řada konverguje. Podílové ani odmocninové kritérium zde nepomohou, protože $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (ověřte) a dá se ukázat, že také $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Příklad 12.21: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(3n+2)\operatorname{arctg} n}$.

Řešení: Označíme-li a_n členy dané řady, pak $a_n = (-1)^n b_n$, kde $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \right)_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \left\langle \frac{1}{\infty \cdot \frac{\pi}{2}} \right\rangle = 0$. Podle Leibnizova kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Zkoumejme

nyní absolutní konvergenci řady. Máme $|a_n| = \frac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \geq \frac{1}{(3n+2n)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5\pi n}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5\pi n}$

diverguje, dostáváme ze srovnávacího kritéria, že i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje. Daná řada tedy absolutně nekonverguje.

Dostali jsme tak, že zkoumaná řada konverguje neabsolutně. (Při zkoumání absolutní konvergence jsme mohli použít také limitní verzi srovnávacího kritéria: $\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3\pi} \in (0, \infty)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje).

Příklad 12.22: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3n-1)(n+2)}{n^2+3}$.

Řešení: Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \langle \text{neex.} \cdot 3 \rangle$ neexistuje, není splněna nutná podmínka konvergence, a daná řada proto nekonverguje. Nekonverguje tedy ani absolutně.

Příklad 12.23: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!}$.

Řešení: Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n+7}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt[3]{2n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{2n+7}{2n+5}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \cdot 0 = 0$, daná řada konverguje absolutně, a tedy i konverguje. Mohli jsme také nejdřív pomocí Leibnizova kritéria dokázat prostou konvergenci, a pak až zkoumat konvergenci absolutní. Pro použití Leibnizova kritéria bychom ale nejdřív museli ověřit, že posloupnost $\left(\frac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!} \right)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. To je možné, ale nepříjemné.