Matematická analýza 1

1. paralelka

ZS 2017/2018

Vzorová zadání písemné části zkoušky

Na začátku každé úlohy v písmné práci bude uveden maximální počet bodů, který je možné za úlohu získat. Pro započítání bodů z úlohy do celkového hodnocení písemné práce je nutné z ní získat minimálně 3 body. Další informace týkající se hodnocení zkoušky jsou na `http://math.feld.cvut.cz/veronika/vyuka/ma1.htm#t12`.

Varianta 1

1. (12 bodů) Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné, kde to má smysl) funkce f v bodech x_1 a x_2:

$$f(x) = \frac{\sqrt{16x^2+9}-5}{x-1}, \quad x_1 = 1,\ x_2 = +\infty.$$

[$\frac{16}{5}$ pro $x \to 1,\ x \to 1^{\pm}$; 4 pro $x \to +\infty$]

2. (9 bodů) Najděte

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x\,.$$

[$-\frac{1+\ln x}{x} + c$ na $(0,\infty)$ (per partes)]

3. (9 bodů) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{2} \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right| \mathrm{d}x.$$

[$\frac{6}{\pi}$]

4. (12 bodů) Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce

$$f(x) = (x+4)\,|x| + 2.$$

[rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,+\infty)$, klesající na $\langle -2,0\rangle$;
lokální maximum: $f(-2)=6$, lokální minimum: $f(0)=2$]

5. (9 bodů) Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot 2^n - 1}{5^n}$$

konverguje, diverguje nebo osciluje. Pokud její součet existuje, najděte ho.

[řada konverguje, její součet je $\frac{15}{4}$]

6. (9 bodů) Podle definice najděte derivaci funkce f v bodě $a = 1$. Definici derivace uveďte.

$$f(x) = (x^2-1)(\cosh x + \sinh x).$$

[$f'(1) = 2\,\mathrm{e}$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Varianta 2

1. (9 bodů) Najděte Taylorův polynom řádu 4 funkce f v bodě $-\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\pi+2x} \cdot \cos x - 1\,.$$

$[\,T(x) = -1 + (x+\frac{\pi}{2}) + 2(x+\frac{\pi}{2})^2 + \frac{11}{6}\,(x+\frac{\pi}{2})^3 + (x+\frac{\pi}{2})^4\,]$

2. (12 bodů) Vypočtěte

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{10\cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$[\,2\pi + 2\ln 3 \quad (t = \operatorname{tg} x)\,]$

3. (9 bodů) Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce

$$f(x) \;=\; \mathrm{e}^{-2x}(4x^2+1)\,.$$

$[\,$ funkce má stacionární bod $x = \frac{1}{2}$, lokální extrémy nemá, je klesající na $D(f) = \mathbb{R}\,]$

4. (12 bodů) Vyšetřete svislé, vodorovné a šikmé asymptoty grafu funkce f. Uveďte vždy, zda asymptoty daného typu existují, a pokud ano, napište jejich rovnice:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arctg} x.$$

[svislé ani vodorovné asymptoty graf funkce nemá, šikmé asymptoty: $y = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $y = -x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$]

5. (9 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})\,.$$

[řada konverguje, nekonverguje absolutně]

6. (9 bodů) Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \cosh x$ na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$.

$[\,\frac{1}{2}\,(\,\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\,)\;(= \sinh 1)\,]$

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Některé další typy zkouškových příkladů

Pro úlohy 1 – 5 (úlohy 1 – 5 jsou obvykle hodnoceny z 9 - 12 bodů)

- Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné, má-li to smysl) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} \cdot \Big(\operatorname{cotg}(\pi\,x)\Big)^2, \quad x_0 = 2.$$

[neexistuje pro $x \to 2$; $+\infty$ pro $x \to 2^-$; $-\infty$ pro $x \to 2^+$]

- Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné, má-li to smysl) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}+3}, \quad x_0 = 0$$

$[\,\mathrm{e}^2$ (limita oboustranná i jednostranné)$\,]$

- Vyšetřete limity posloupností

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} (-2)^{3n} \cdot \big(\ln|\cos(n\pi)|\big)\,.$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \Big(2^{-3n} + \ln|2+\cos(n\pi)|\Big)\,.$$

$[\,$a) 0 (jde o posloupnost samých nul), b) neexistuje$\,]$

- Najděte tečnu t grafu funkce $f(x) \;=\; x + \sqrt{2\,\mathrm{e}^x + 3}$, která je kolmá na přímku $p:\; x + 2y + 6 = 0\,.$

$[\,t:\; 2x - y + 3 - \ln 3 \;=\; 0 \quad (x_0 = \ln 3)\,]$

- Vypočtěte
$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$$
$[\ln 3 \quad (t=\sqrt{x+1})]$

- Vypočtěte
$$\int_0^2 \arcsin\tfrac{x}{2}\ \mathrm{d}x.$$
$[\ \pi-2\ \ \big(\ =[x\arcsin\tfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}]_0^2\big)\quad$ (per partes) $]$

- Vypočtěte
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^4 x}\ \mathrm{d}x$$
$[+\infty \quad (\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f=\int_{-\pi/2}^{0} f+\int_0^{\pi/2} f;\quad t=\sin x)]$

- Najděte stacionární body, lokální extrémy a maximální intervaly monotonie funkce
$$f(x)=x^6-4x^2+4\,\mathrm{arctg}\,(x^2).$$
$[$stacionární body: $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; rostoucí na $\langle-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},0\rangle$ a $\langle\frac{1}{\sqrt[4]{3}},+\infty)$, klesající na $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$ a $\langle 0,\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$;
lokální maximum: $f(0)=0$, lokální minima: $f(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=f(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=-\frac{11\sqrt{3}}{9}+\frac{2}{3}\pi\ \ \big(f'(x)=\ldots=\frac{2x^5(3x^4-1)}{1+x^4}\big)]$

- Určete intervaly konvexity a konkávity a body inflexe funkce f na intervalu $(-\pi,\pi)$:
$$f(x)=\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)\,.$$
$[$ konvexní na $\langle-\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi\rangle$; konkávní na $(-\pi,-\frac{3}{4}\,\pi\rangle$ a na $\langle\frac{1}{4}\,\pi,\pi)$;
inflexe v bodech $-\frac{3}{4}\,\pi,\ \frac{1}{4}\,\pi\,]$

- Najděte nejmenší a největší hotnotu funkce f na intervalu $I=\langle 1,\infty)$:
$$f(x)=\frac{\ln(\mathrm{e}\cdot x)}{\sqrt{x}}\,.$$
$[$ největší hodnota f na I: $f(\mathrm{e})=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; nejmenší hodnoty f na I nenabývá $]$

- Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+4}{n^4+n^2}\ .$$
$[$řada konverguje absolutně (tedy také konverguje) $]$

Pro úlohu 6 (úloha 6 je hodnocena z 9 bodů)

- Najděte body lokálních extrémů a maximální intervaly monotonie funkce f. Zformulujte použitou větu.
$$f(x)=\int_1^x \frac{\sin(\pi t)}{t}\ \mathrm{d}t\,,\qquad x\in(0,4)\ .$$
$[$rostoucí na $(0,\,1\rangle$ a $\langle 2,\,3\rangle$, klesající na $\langle 1,\,2\rangle$ a $\langle 3,\,4)$; lokální maxima v bodech 1, 3, lokální minimum v bodě 2$]$

- Vyšetřete konvergenci integrálu
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\ \mathrm{d}x\,.$$
Pokud jste použili nějaké kritérium, zformulujte ho.
$[$integrál konverguje (srovnáme s integrálem z funkce e^{-2x})$]$

- Najděte na maximálním intervalu
$$\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\ \mathrm{d}x.$$
$[\ -\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\tfrac{x-1}{2}\ +c\ \text{ na }(-1,3)\quad\big(\tfrac{x-1}{2}=\sin t\big)\ ]$

Více typů příkladů najdete ve vzorových testech, domácích cvičeních a v materiálech k přednáškám na
`http://math.feld.cvut.cz/veronika/vyuka/ma1.htm` a `.../vyuka/textyma1.htm`.