KAPITOLA 12: Číselné řady

12.1 Úvod

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – posloupnost reálných čísel

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – (nekonečná) řada reálných čísel,

a_n – n-tý člen řady

obecněji: $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$; $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ P(n)}}^{\infty} a_n$, kde $P(n)$ je nějaký výrok

(např. „3 nedělí n“) ; ...

Definice :

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak N-tý **částečný součet** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ definujeme

předpisem:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N .$$

Existuje-li $s = \lim\limits_{N\to\infty} s_N$, nazýváme s **součtem řady**. Píšeme

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Řekneme, že řada **konverguje** (**diverguje** | **osciluje**), jestliže posloupnost částečných součtů $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ má limitu vlastní (nevlastní | nemá limitu).

Poznámka :

Změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na to, zda řada konverguje, diverguje či osciluje.

Příklad 12.1: a) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverguje;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ osciluje

Příklad 12.2: Geometrická řada s kvocientem q

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \text{kde} \quad a_0, \ q \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad \text{tj.} \quad a_n = a_0 \cdot q^n$$

Speciálně pro $a_0 = 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} q^n = s_N = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N.$$

Je-li $q \neq 1$ pak

$$s_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \ .$$

Odtud pro $|q| < 1$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \ .$$

Dále

$$
\begin{aligned}
s_N &= \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad \text{pro} \quad q \neq 1\,,\\
s_N &= N+1 \quad \text{pro} \quad q = 1.
\end{aligned}
$$

Tedy pro $|q| \geq 1$ je

$$
\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad q \geq 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro} \quad q \leq -1 \end{cases}
$$

Pro <u>obecné $a_0 \neq 0$</u> všechny součty vynásobíme číslem a_0.

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \begin{cases} a_0 \cdot \dfrac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1, \quad a_0 > 0 \\ -\infty & \text{pro } q \geq 1, \quad a_0 < 0 \\ \text{osciluje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Pro <u>$a_0 = 0$</u> je součet řady nulový.

Pro $n_0 \in \mathbb{N}$ označme

$$b_0 = a_{n_0} = a_0\, q^{n_0}, \qquad b_n = b_0 \cdot q^n.$$

Pak pro $n \geq n_0$ je $a_n = b_{n-n_0}$, tedy pro $|q| < 1$ máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_{n-n_0} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m =$$

$$= b_0 \cdot \frac{1}{1-q} = a_{n_0} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Příklad 12.3: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(-4)^n} = \frac{12}{5}$$

Příklad 12.4: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Věta 12.1 :

Je-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}}$ a $c \in \mathbb{R}$,

pak platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= A + B, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n &= c \cdot A, \end{aligned}$$

pokud je výraz vpravo definován.

Věta 12.3 (nutná podmínka konvergence) :

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad 12.5: Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^2+4n}$

nekonvergují

12.2 Řady s nezápornými členy

Věta 12.4 :

Je-li $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak existuje součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a je nezáporný).

Poznámka : Protože v tomto případě víme, že limita posloupnosti $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ existuje, stačí nám k určení hodnoty součtu řady najít limitu jakékoliv podposloupnosti posloupnosti $(s_N)_{N=1}^{\infty}$.

Příklad 12.6: Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta 12.5 (srovnávací kritérium) :

Nechť $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \geq n_1$. Potom platí:

a) Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(a je-li $n_1 = 1$, pak $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$) .

b) Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 12.7: Pro $\alpha \leq 1$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverguje

Příklad 12.8: Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ konverguje

(tedy pro $\alpha \geq 2$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje)

Poznámka („limitní verze“ srovnávacího kritéria) :

Předpokládejme, že pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Pak platí:

- Pokud je $c \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Pokud je $c = 0$, pak nám konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dává konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 12.6 (podílové kritérium – D'Alembertovo) :

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \geq n_1$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.7 (limitní podílové kritérium) :

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.8 (odmocninové kritérium – Cauchyovo) :

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 12.9 (limitní odmocninové kritérium) :

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Poznámky :

a) V nelimitních kritériích pro konvergenci nestačí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ resp. $\sqrt[n]{a_n} < 1$ pro všechna n.

b) Limitní kritéria nepomohou, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

c) U podílového kritéria pro divergenci nestačí

„pro nekonečně mnoho n."

Připomenutí – užitečné limity (viz [P11.6]):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Příklad 12.9: Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje např. podle podílového kritéria.

Příklad 12.10: Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ pro n - sudé a

$a_n = \dfrac{1}{5^n}$ pro n - liché,

konverguje podle odmocninnového kritéria

(lepší je tu ale srovnávací)

(podílové nepomůže, odmocninové limitní také ne)

Příklad 12.11: U řad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, podílové ani odmocninové kritérium nepomůže.

Věta 12.10 (integrální kritérium) :

Nechť f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle K, \infty)$, $K \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=K}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_K^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 12.12: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Příklad 12.13: Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje

Poznámka : Jestliže ve Větě 12.10 s $K = 1$ řada konverguje a její součet je roven A, pak pro chybu

$$r_k = A - \sum_{n=1}^{k} f(n) \ \left(= \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \right),$$

které se dopustíme, když místo celé řady sečteme jen jejích prvních k členů, platí:

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq \ r_k \ \leq \ \int_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 12.14: Odhadněte chybu součtu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, jestliže sečteme jen prvních 100 členů.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$, je na intervalu $\langle 1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí. K odhadu chyby $r_{100} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$ tedy lze použít předchozí poznámku:

$$\begin{aligned} r_{100} &\geq \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_{101}^{\infty} = \frac{1}{101} = 0,\overline{0099} \\ r_{100} &\leq \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_{100}^{\infty} = \frac{1}{100} = 0,01. \end{aligned}$$

Pro hledanou chybu r_{100} tak máme odhad

$$0,\overline{0099} \leq r_{100} \leq 0,01.$$

12.3 Řady s obecnými členy

Věta 12.11 :
Jestliže pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, pak tato řada diverguje.

Platí : Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že

$$\left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \right| = |s_M - s_N| < \varepsilon, \text{ kdykoliv } n_0 \leq N < M$$

(tj. řada splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku (B.C.P.) pro konvergenci řad)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ **konverguje absolutně**}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ **konverguje neabsolutně (relativně)**}$$

Příklad 12.14: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje absolutně

Poznámka : Konverguje-li reálná řada neabsolutně, pak „součet" jejích kladných členů je $+\infty$, záporných $-\infty$.

Poznámka : Absolutní konvergenci řad lze zkoumat pomocí kritérií z odstavce **12.2**.

Věta 12.12 :

Konverguje-li řada absolutně, pak konverguje.

(Obrácené tvrzení neplatí.)

Věta 12.13 (Leibnizovo kritérium) :

Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, b_n \;=\; b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ (tzv. **alternující řada**) konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Příklad 12.15: Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

konverguje neabsolutně

Poznámky : Je-li $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ prosté zobrazení, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ nazýváme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí:

1) Jestliže řada konverguje absolutně, pak konverguje absolutně i každé její přerovnání a má stejný součet.
2) Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání této řady.

Totéž platí pro $\pm\infty$. Řadu lze přerovnat v tomto případě i tak, že nová řada bude oscilovat.

Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazýváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

kde

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ \dots,$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

<u>Platí:</u> Jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují a alespoň jedna z nich

konverguje absolutně, pak konverguje i jejich Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

a platí

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Konvergují-li absolutně obě řady, pak konverguje absolutně i jejich Cauchyův součin.

12.4 Příklady

Příklad 12.16: Zjistěte, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{5}{x+2}\Big)^n.$$

Řešení: Geometrická řada s kvocientem $q = \dfrac{5}{x+2}$ konverguje právě tehdy, když $\left|\dfrac{5}{x+2}\right| < 1$, tedy pro $5 < |x+2|$.

Uvedená řada tak konverguje pro $x \in (-\infty, -7) \cup (3, \infty)$.

Příklad 12.17: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n-1)^n}{(4n+7)^n}.$$

Řešení: Máme $a_n = \dfrac{9^n(n-1)^n}{(4n+7)^n} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{9(n-1)}{(4n+7)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{4} > 1.$$

Tedy podle limitního odmocninového kritéria řada **diverguje**.

Divergenci můžeme dostat také pomocí prostého odmocninového kritéria, protože pro $n \geq 4$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

Příklad 12.18: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arcsin 1)^n}{n^2}.$$

Řešení: Máme $a_n = \frac{(\frac{\pi}{2})^n}{n^2} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1^2} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Podle limitního odmocninového kritéria řada **diverguje**.

Je možné použít i limitní podílové kritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(\frac{\pi}{2})^n} = \frac{\pi}{2} \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Příklad 12.19: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}\,.$$

Řešení: Máme $a_n = \frac{n^n}{(2n)!} > 0$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)\,n^n} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \mathrm{e} = 0 < 1.$$

Tedy podle limitního podílového kritéria řada **konverguje**.

Příklad 12.20: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n^2 - 6n + 5}{(n^2 - 3n + 2)^2}.$$

Řešení: Máme $a_n = \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2}$.

Na intervalu $\langle 3, \infty)$ je funkce $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ nezáporná a nerostoucí a

$$\int_3^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \Big]_3^{\infty} = 0 - \big(-\frac{1}{2} - 1\big) = \frac{3}{2},$$

tedy daná řada **konverguje**.

Podílové ani odmocninové kritérium zde nepomohou, protože

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Příklad 12.21: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(3n+2)\operatorname{arctg} n}.$$

Řešení: Máme $a_n = (-1)^n b_n$, kde $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \right)_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost, $\lim_{n\to\infty} b_n = \langle\!\langle \frac{1}{\infty \cdot \frac{\pi}{2}} \rangle\!\rangle = 0$. Podle Leibnizova kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**.

Dále $|a_n| = \frac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \geq \frac{1}{(3n+2n)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5\pi n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5\pi} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy ze srovnávacího kritéria i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje. Daná řada tedy **absolutně nekonverguje**.

Dostali jsme tak, že zkoumaná řada **konverguje neabsolutně**.

Při zkoumání absolutní konvergence jsme mohli použít také limitní verzi srovnávacího kritéria:

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3\pi} \in (0, \infty)$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Příklad 12.22: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3n-1)(n+2)}{n^2+3}\,.$$

Řešení: Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = \langle\!\langle \text{neex.} \cdot 3 \rangle\!\rangle$ neexistuje, není splněna nutná podmínka konvergence, a daná řada proto nekonverguje. Nekonverguje tedy ani absolutně.

Příklad 12.23: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!}.$$

Řešení: Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+7}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt[3]{2n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2n+7}{2n+5}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \cdot 0 = 0,$$

takže daná řada **konverguje absolutně**, a tedy i **konverguje**.

Mohli jsme také nejdřív pomocí Leibnizova kritéria dokázat prostou konvergenci, a pak až zkoumat konvergenci absolutní. Pro použití Leibnizova kritéria bychom ale nejdřív museli ověřit, že posloupnost $\left(\frac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. To je možné, ale nepříjemné.