MA 3-22

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2y-y^2}}^1 f \, dx \, dy.$$

   nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok pole $\vec{F} = (x^3-yz, x^2+y^3, 3+z^3)$ hranicí tělesa

$$P = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le a\big\}.$$

4. Nalezněte, pokud existuje, potenciál pole

$$\vec{F} = (y+yz, x+xz+3z^3, xy+9yz^2-1).$$

5. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce definované $f(x) = -x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$. Ověřte, že pro $x = \pi/2$ dává Fourierova řada možnost zjistit součet řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

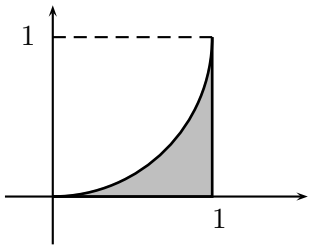
   a hodnotu součtu nalezněte.

Řešení.

1. Z rovnic $2x - y + 1 = 0$, $2y - x = 0$, $z + 1 = 0$ dostaneme jeden stacionární bod $(-2/3, -1/3, -1)$, ve kterém je minimum.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f \; dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_{2\sin\varphi}^{1/\cos\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Protože $\operatorname{div} \vec{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, máme při použití cylindrických souřadnic

$$\iiint_P \operatorname{div} F = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^z 3(\varrho^2 + z^2)\varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi = \frac{9\pi a^5}{10}.$$

4. Potenciál je $f = xy + zxy + 3yz^3 - z + K$.

5. Funkce f je lichá, proto její Fourierova řada bude obsahovat jen sinové členy.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{2(-1)^k}{k}.$$

Fourierova řada má tvar $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k} \sin kx$. V bodě $x = \pi/2$ jsou pro sudé k členy nulové a řada má tvar

$$2(-1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \cdots) = f(\pi/2) = -\pi/2.$$

Odtud máme, že hledaný součet roven $\pi/4$.