MA 11-22

1. Mezi všemi kvádry s uhlopříčkou délky $\sqrt{3}$ nalezněte ten, jehož objem je maximální.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f \, dx \, dy.$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Mějme těleso P ohraničené plochami $z = 0$ a $z = a^2 - x^2 - y^2$. Určete hodnotu parametru $a > 0$, aby objem tělesa P byl stejný jako objem válce s poloměrem podstavy a a výškou a.

4. Zjistěte, zda je pole $\vec{F} = (2xe^{yz}, x^2ze^{yz}, x^2ye^{yz})$ potenciální. V kladném případě vypočtěte potenciál a hodnotu integrálu pole $\vec{F}$ po křivce začínající v bodě $(1, 0, 0)$ a končící v bodě $(1, 3, -1)$.

5. Zjistěte u mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) x^n$ poloměr konvergence a určete její součet. (Návod: řadu rozdělte na součet dvou řad.)

Řešení.

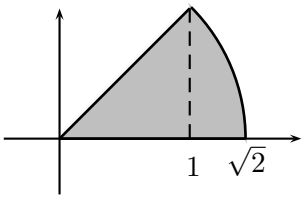
1. Označíme-li délky stran kvádru x, y, z, pak hledáme maximum funkce $f = xyz$ při vazebné podmínce $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$. Lagrangeova funkce

$$L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

má jeden stacionární bod $(1, 1, 1)$. Hledaný kvádr je jednotková krychle.

2. Opačné pořadí je $\int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dy \, dx$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} f(\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi) \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Pro výpočet objemu použijeme cylindrické souřadnice:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{a^2-\varrho^2} \varrho \; dz \, d\varrho \, d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

   Porovnáním s objemem válce πa^3 dostaneme $a = 2$.

4. Pole $\vec{F}$ je potenciální a potenciál je $f = x^2 e^{yz} + K$. Hodnota integrálu je $f(1, 3, -1) - f(1, 0, 0) = e^{-3} - 1$.

5. Rozdělením vzniknou dvě řady: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Obě mají poloměr konvergence $R = 1$. Druhá řada je geometrická s kvocientem $q = x$ a její součet se rovná $\dfrac{2x}{1-x}$. Derivací první řady dostaneme geometrickou řadu také s kvocientem $q = x$. Její součet je $\dfrac{1}{1-x}$. Integrací pak máme, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. Hledaný součet řady je: $-\ln(1-x) + \dfrac{2x}{1-x}$ pro $x \in (-1, 1)$.