## 1.1. Úvod

## 1.1.1. Měření nesinusových napětí

U střídavých voltmetrů se pro převod střídavého napětí na stejnosměrné používají převodníky střední nebo efektivní hodnoty.

U levnějších číslicových multimetrů se používají převodníky střední hodnoty využívající operační usměrňovač. Tyto přístroje měří aritmetickou střední hodnotu, ale jsou cejchovány v efektivní hodnotě pro harmonický, tedy sinusový průběh, pro nějž má koeficient tvaru hodnotu přibližně 1,11. Při měření efektivní hodnoty neharmonických napětí popř. proudů tak mohou vzniknout značné chyby metody vzhledem k tomu, že činitel tvaru je v těchto případech odlišný od hodnoty 1,11. Střední hodnotu měřené veličiny lze v případě měření takovýmto přístrojem vypočíst vydělením údaje přístroje koeficientem tvaru pro sinusový průběh.

V kvalitnějších multimetrech se používají převodníky efektivní hodnoty. Tato skutečnost je obvykle vyznačena buď přímo na multimetru, či v návodu k přístroji (datasheetu) zkratkou RMS (Root Mean Square = odmocnina ze střední hodnoty kvadrátu) popř. True RMS. V tomto případě měří multimetr správně efektivní hodnotu napětí, popř. proudu, i v případě neharmonických průběhů.

V případě číslicových osciloskopů, které jsou schopny měřit parametry zobrazených průběhů, je efektivní hodnota vypočtena z jednotlivých vzorků dle diskretizovaného definičního integrálu, tedy  $U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n^2}$  kde N je počet vzorků na periodu.

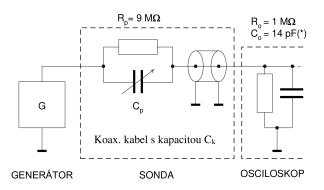
Poznámka: U většiny multimetrů je při přepnutí přístroje do režimu měření střídavých napětí nebo proudů převodník střední, popř. efektivní hodnoty oddělen od vstupních obvodů multimetru kondenzátorem, takže je měřena pouze střídavá složka měřené veličiny a stejnosměrná je odfiltrována.

### 1.1.2. Osciloskopická sonda

Pro zmenšení zkreslení měřeného napětí, nejčastěji impulzního průběhu, které je způsobeno zejména vstupní kapacitou osciloskopu a kapacitou přívodního stíněného kabelu, je vhodné použít tzv. osciloskopickou sondu, v nejjednodušším případě pasivní (viz obr 1.1).

Průchozí impedance sondy je dána paralelní kombinací  $R_p \parallel C_p$  a tato tvoří spolu se vstupní impedancí osciloskopu a kapacitou stíněného přívodu (paralelní kombinace  $R_o \parallel (C_o + C_k)$ ) napěťový dělič s přenosem obvykle 10:1. Pro frekvenční nezávislost přenosu musí být poměr reálných částí čitatele a jmenovatele roven poměru částí imaginárních, po úpravě platí:  $R_pC_p = R_o(C_o + C_k)$ .

Pro nastavení frekvenčně nezávislého průběhu se na sondách i na modelovém přípravku používá proměnný prvek  $C_p$ . V případě skutečné sondy jde o miniaturní kapacitní trimr, který je třeba nastavovat nevodivým nástrojem (předložená sonda je již kompenzována, nastavování trimru proto nebudeme provádět). Na osciloskopu je obvykle umístěn kalibrační zdroj obdélníkového signálu pro kompenzaci sondy v praxi.



Obr. 1.1. Pasivní osciloskopická sonda

## 1.2. Domácí příprava

**1.2.1.** Uveď te jakým vztahem je definována aritmetická střední hodnota a jakým efektivní hodnota.

aritmetická střední hodnota pro diskrétní veličinu měřenou N-krát:  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x[i]$  aritmetická střední hodnota pro spojitou veličinu měřenou po čas  $\Delta t$ :  $\bar{x} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} x(t) dt$  efektivní hodnota pro spojitou veličinu měřenou po čas  $\Delta t$ :  $x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} x(t)^2 dt}$  aritmetická stř. hodnota pro harmonický průběh  $x(t) = x_m \sin(\omega t)$  měřený v půlperiodě  $\frac{T}{2}$ :  $\bar{x} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x_m \sin(\omega t) dt = \frac{2x_m}{T} \left[ \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2x_m}{T} \left[ \frac{-\cos(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) - \cos(\frac{2\pi}{T}0)}{\frac{2\pi}{T}} \right] = \frac{x_m [-\cos(\pi) + \cos(0)]}{\pi} = \frac{2x_m}{\pi}$  efektivní hodnota pro harmonický průběh  $x(t) = x_m \sin(\omega t)$  měřený v periodě T:  $x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_m^2 \sin(\omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{x_m^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{x_m^2}{2T} (T - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T)} = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$ 

1.2.2. Pro úhel sepnutí  $\alpha=90^\circ$  určete aritmetickou střední hodnotu a efektivní hodnotu napětí výpočtem z definic, je-li efektivní hodnota při sinusovém průběhu  $U_{ef}$ .

$$\begin{array}{l} \text{\'uhel sepnut\'i} \ \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u(t) = 0: \ t \in [0, \frac{T}{4}) \cup [\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}); \ U_m \sin(\frac{2\pi}{T}t): \ t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}) \cup [\frac{3T}{4}, T) \\ \bar{U}_\alpha = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} U_m \sin(\frac{2\pi}{T}t) \mathrm{d}t = \frac{2U_m}{T} [\frac{-\cos(\frac{2\pi}{T}t)}{\frac{2\pi}{T}}]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \frac{U_m [-\cos(\pi) - -\cos(\frac{\pi}{2})]}{\pi} = \frac{U_m [1+0]}{\pi} = \frac{U_m}{\pi} \\ U_{ef_\alpha} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} U_m^2 \sin(\frac{2\pi}{T}t)^2 \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2U_m^2}{2T}} [1 - \frac{\sin(2\frac{2\pi}{T}t)}{2\frac{2\pi}{T}}]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T}} [\frac{T}{4} - \frac{(\sin(2\pi) - \sin(\pi) = 0)}{2\frac{2\pi}{T}}]} = \frac{U_m}{2} \\ U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \ \bar{U}_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{ef}; \ U_{ef\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{ef} \end{array}$$

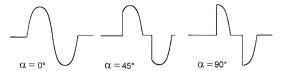
**1.2.3.** Odvoďte, že pro frekvenční nezávislost přenosu osciloskopické sondy musí platit  $R_pC_p=R_o(C_o+C_k)$ .

$$\begin{split} C_{\parallel} &= \sum_{i=1}^{N} C_{i} \xrightarrow{C_{k} \parallel C_{0}} C_{o,k} = C_{o} + C_{k}; \\ \text{OSC-sonda se skládá ze 2 RC článků: } R_{p} \parallel C_{p} \text{ a } R_{o} \parallel C_{o} \parallel C_{k} = R_{o} \parallel (C_{o} + C_{k}) \\ \text{pro přechodové děje RC-článku je časová konstanta } \tau = RC \\ \text{pro frekvenční nezávislost musí platit } f_{p} = f_{o,k}, \text{ tedy:} \end{split}$$

$$\tau_p = \tau_{o,k} \sim R_p C_p = R_o C_{o,k} \sim R_p C_p = R_o (C_o + C_k)$$

## 1.3. Úkol měření

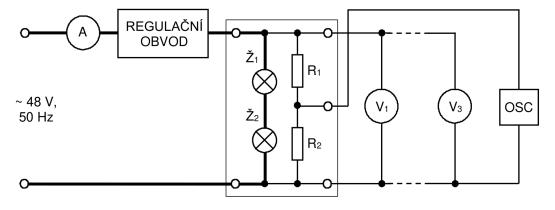
- 1.3.1. Zapojte měřicí obvod podle obr. 1.3.
- 1.3.2. Změřte napětí na zátěži, jejíž výkon je regulován obvodem s triakem, pro úhel sepnutí  $\alpha$  přibližně 0°, 45° a 90°, viz obr. 1.2, předloženými číslicovými multimetry  $V_1$  až  $V_3$  a číslicovým oscjloskopem v režimu "Meas".



Obr. 1.2. Průběhy měřených napětí

- **1.3.3.** Určete, které z multimetrů měří správně efektivní hodnotu, a určete relativní chybu metody měření efektivní hodnoty u ostatních.
- **1.3.4.** Z údaje multimetrů, které to umožňují, určete aritmetickou střední hodnotu měřeného průběhu.
- 1.3.5. Pro úhel sepnutí  $\alpha = 90^{\circ}$  určete aritmetickou střední hodnotu a efektivní hodnotu napětí rovněž výpočtem z definic (viz příprava, bod 1.2.2.,  $U_{ef}$  = hodnota naměřená pro sinusový průběh nejpřesnějším z multimetrů). Vypočtené hodnoty srovnejte s naměřenými a v případě jejich rozdílu analyzujte možné příčiny.
- 1.3.6. S využitím interního zdroje kalibračního signálu (1 kHz, 1 V, obdélník) proveďte kompenzaci modelu sondy 10:1, která je připojena ke vstupu osciloskopu CH1. Pro obě mezní polohy proměnného kondenzátoru ("překompenzovaná" / "podkompenzovaná" sonda) přibližně zakreslete pozorovaný průběh do sešitu. Na druhém kanálu osciloskopu (vstup CH2) pozorujte průběh téhož signálu snímaný profesionální sondou obdobných parametrů, zakreslete do sešitu a zjistěte jeho parametry (amplitudu, frekvenci, délku náběžné a sestupné hrany, popř. překmitnutí). Tuto sondu nekompenzujte!

## 1.4. Schéma zapojení



Obr. 1.3. Zapojení měřicího obvodu

## 1.5. Seznam měřících přístrojů

zn.	přístroj	specifikace
V1	Keysight	True RMS AC voltage: $M = 100 \text{ V}$ , $f = 40 \text{ Hz}$ to 1 kHz:
	U1241C	$R = 0.01 \text{ V}, Ac = \pm (1.0\% \text{ of } rdg + 5 \text{ digits})$
V2	Mastech	AC voltage: $M = 200 \text{ V}$ , $f = 40 \text{ Hz}$ to $400 \text{ Hz}$ :
V Z	MY64	$R = 0.1 \text{ V}, Ac = \pm (0.8\% \text{ of } rdg + 3 \text{ digits})$
V/2	HP	True RMS AC voltage: $M = 1 V \text{ to } 750 V$ , $f = 10 Hz \text{ to } 20 \text{ kHz}$ :
V3	34401A	$Ac = \pm (0.06\% \text{ of } rdg + 0.03\% \text{ of } range)$
OSC	Keysight	Measurement range AC Rms $f = 20$ Hz to $100$ kHz, $V_{max} = 300$ Vrms
	DSOX2002A	DC vertical gain accuracy $\pm 3\%$ full scale; y(5 V/div), x(5 ms/div)

#### 1.3.2

 $u_B = \sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{\delta_1}{100}X + \frac{\delta_2}{100}M, \frac{\delta_1}{100}X + N \cdot R); M$ rozsah,  $\delta_1$  chyba z odečtené hodnoty,  $\delta_2$  chyba z rozsahu, X naměřená hodnota, R kvantizační krok, N počet digitů

$$u_{B,V1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta_1}{100} X + N \cdot R \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1.0}{100} X + 5 \cdot 0.01 \right) V$$

$$u_{B,V2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta_1}{100} X + N \cdot R \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{0.8}{100} X + 3 \cdot 0.1 \right) V$$

$$u_{B,V3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{0.06}{100} X + \frac{0.03}{100} 750 \right) V$$

$$u_{B,OSC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta_2}{100} M \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3}{100} 5 \cdot 8 V = 0.7 V$$

T. 1.1. Změřená napětí na zátěži  $U_{ef}$  [V]

$\alpha$	V1	V2	V3	OSC
0°	$51.42 \pm 0.33$	$50.8 \pm 0.4$	$51.00 \pm 0.15$	$52.5 \pm 0.7$
45°	$50.48 \pm 0.32$	$48.1 \pm 0.4$	$50.11 \pm 0.15$	$51.5 \pm 0.7$
90°	$41.20 \pm 0.26$	$33.3 \pm 0.3$	$40.86 \pm 0.14$	$41.9 \pm 0.7$

### 1.3.3.

správně efektivní hodnotu neměří pouze V2, který nemá výrobcem uvedený parametr TrueRMS, a  $U_{ef}$  určuje z aritmetické střední hodnoty předpokládaje harmonický signál

$$U_{ef \rm sin} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m; \ \bar{U}_{\rm sin} = \frac{2}{\pi} U_m \Rightarrow \frac{U_{ef \rm sin}}{\bar{U}_{\rm sin}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11 \Rightarrow U_{ef \rm sin} \approx 1.11 \cdot \bar{U}_{\rm sin}$$

relativní chybu určím podílem chyby absolutní a naměřené hodnoty

T. 1.2. Relativní chyby měření  $U_{ef}$ 

	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,					
$\alpha$	V1	V3	OSC			
0°	$0.33/51.4 \cdot 100\% \approx 0.6\%$	$0.148/51.001 \cdot 100\% \approx 0.3\%$	$0.7/52.5 \cdot 100\% \approx 1.3\%$			
45°	$0.32/50.48 \cdot 100\% \approx 0.6\%$	$0.147/50.109 \cdot 100\% \approx 0.3\%$	$0.7/51.5 \cdot 100\% \approx 1.4\%$			
90°	$0.26/41.20 \cdot 100\% \approx 0.6\%$	$0.144/40.868 \cdot 100\% \approx 0.4\%$	$0.7/41.9 \cdot 100\% \approx 1.7\%$			

### 1.3.4.

vlastně mi to umožňují všechny, jen pro V1, V3 a OSC musím vztahy odvodit (ještě pro  $\alpha=45^\circ$ ), u V2 stačí hodnoty podělit konstantou 1.11 viz 1.3.3  $\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u(t)=0:\ t\in[0,\frac{T}{8})\cup[\frac{T}{2},\frac{5T}{8}];\ U_m\sin(\frac{2\pi}{T}t):\ t\in[\frac{T}{8},\frac{T}{2})\cup[\frac{5T}{8},T)$   $\bar{U}_\alpha=\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{2}}U_m\sin(\frac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t=\frac{2U_m}{T}[\frac{-\cos(\frac{2\pi}{T}t)}{\frac{2\pi}{T}}]_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{2}}=\frac{U_m[-\cos(\pi)-\cos(\frac{\pi}{4})]}{\pi}=\frac{U_m[1+\frac{\sqrt{2}}{2}]}{\pi}$   $U_{ef_\alpha}=\sqrt{\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{2}}U_m^2\sin(\frac{2\pi}{T}t)^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2U_m^2}{2T}}[1-\frac{\sin(2\frac{2\pi}{T}t)}{2\frac{2\pi}{T}}]_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{2}}=\sqrt{\frac{U_m^2}{T}}[\frac{3T}{8}-\frac{\sin(2\pi)-\sin(\frac{\pi}{2})}{2\frac{2\pi}{T}}]=U_m\sqrt{\frac{3\pi+2}{8\pi}}$   $\bar{U}_\alpha=\frac{U_m[1+\frac{\sqrt{2}}{2}]}{\pi};\ U_{ef_\alpha}=U_m\sqrt{\frac{3\pi+2}{8\pi}}\Rightarrow \bar{U}_\alpha=\frac{U_{ef_\alpha}}{\sqrt{\frac{3\pi+2}{8\pi}}}\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi}\approx0.806\cdot U_{ef_\alpha}$  viz 1.2.2.  $\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \bar{U}_\alpha=\frac{U_m}{\pi};\ U_{ef_\alpha}=\frac{U_m}{2}\Rightarrow \bar{U}_\alpha=\frac{2U_{ef_\alpha}}{2}\Rightarrow \bar{U}_\alpha=\frac{2\cdot U_{ef_\alpha}}{\pi}\approx0.637\cdot U_{ef_\alpha}$  viz 1.3.3.  $\alpha=0\Rightarrow \bar{U}_\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}U_{ef_\alpha}\approx0.900\cdot U_{ef_\alpha}$  pokud chci uvažovat i chybu měření, musím jí přenést  $u_{f(x_1,\dots,x_n)}=\sqrt{\sum_{i=1}^n(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_i)\cdot u_{x_i})^2}$ 

pokud chci uvažovat i chybu měření, musím jí přenést  $u_{f(x_1,...,x_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_i) \cdot u_{x_i})^2}$  zde máme pouze funkce jedné proměnné vynásobené nějakým koeficientem, tudíž:

$$u_{f(x)=kx} = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x}(X) \cdot u_x)^2} = \left| \frac{\partial kx}{\partial x}(X) \cdot u_x \right| = \left| ku_x \right|$$

T. 1.3. Určení (odhad) střední aritmetické hodnoty  $\bar{U}$  [V]

$\alpha$	k(V1,V3,OSC), k(V2)	V1	V2	V3	OSC
0°	$0.900, 1.11^{-1}$	$46.3 \pm 0.3$	$45.8 \pm 0.4$	$45.90 \pm 0.14$	$47.3 \pm 0.6$
45°	$0.806, 1.11^{-1}$	$40.7 \pm 0.3$	$43.3 \pm 0.4$	$40.38 \pm 0.12$	$41.5 \pm 0.6$
90°	$0.637, 1.11^{-1}$	$26.2 \pm 0.2$	$30.0 \pm 0.3$	$26.03 \pm 0.09$	$26.7 \pm 0.4$

### 1.3.5.

sinusový průběh odpovídá úhlu sepnutí  $\alpha = 0^{\circ}$ , nejpřesnější z multimetrů bude ten s nejmenší relativní chybou viz T. 1.2., tudíž V3, a tak referenční  $U_{ef} = (51.00 \pm 0.15) \text{V}$ ,

viz 1.2.2. 
$$\bar{U}_{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{ef} \approx 22.96 \text{ V}; \ U_{ef\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{ef} \approx 36.06 \text{ V}$$

$$u_{\bar{U}_{\alpha}(U_{ef})} = \sqrt{(\frac{\partial \bar{U}_{\alpha}}{\partial U_{ef}} (U_{ef}[V3]) \cdot u_{U_{ef}})^2} = |\frac{\sqrt{2}}{\pi} (U_{ef}[V3]) \cdot u_{U_{ef}}| = |\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot u_{U_{ef}}| \approx 0.07 \text{ V}$$

$$u_{U_{ef\alpha}(U_{ef})} = \sqrt{(\frac{\partial U_{ef\alpha}}{\partial U_{ef}} (U_{ef}[V3]) \cdot u_{U_{ef}})^2} = |\frac{\sqrt{2}}{2} (U_{ef}[V3]) \cdot u_{U_{ef}}| = |\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u_{U_{ef}}| \approx 0.11 \text{ V}$$

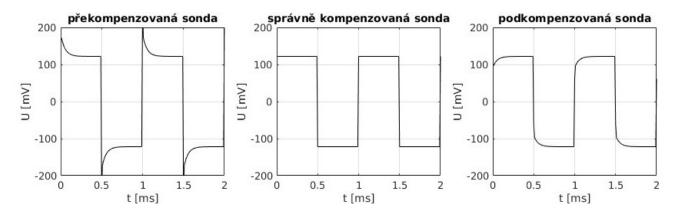
 $\bar{U}_{\alpha}=(22.96\pm0.07)$  V, srovnáme-li s odhadem viz T. 1.3.  $(26.03\pm0.09)$  V, výsledek je menší  $U_{ef\alpha}=(36.06\pm0.11)$  V, srovnáme-li s naměřenou hodnotou viz T. 1.1.  $(40.86\pm0.14)$  V, výsledek je opět menší, chyba mohla vzniknout nepřesností triaku, který měl skutečný úhel sepnutí menší, než uvedených 90°

### 1.3.6.

signál byl měřen na přiblížení  $x(200~\mu\text{s}/\Delta) \times y(100~\text{mV}/\Delta)$ , kmital s frekvencí 1 kHz, neboli s periodou 1/1 kHz = 1 ms (5 dílků),

měl napětí  $U_{ef}=1V$ , u obdelníkového signálu je  $U_{ef}=\sqrt{T^{-1}\int_0^T U_m^2 \mathrm{d}t}=U_m$ ), a osciloskopická sonda dělící poměr 10:1, tedy  $\frac{U_o}{U_o,p}=\frac{R_o}{R_p+R_o}=\frac{1\mathrm{M}\Omega}{(1+9)\mathrm{M}\Omega}=\frac{1}{10}$ , tudíž by zobrazená amplituda měla nabývat  $U_{ef}/10=0.1~\mathrm{V}=100~\mathrm{mV}$  (1 díleku)

při kompenzaci pro  $R_pC_p=R_o(C_o+C_k)$  byl ale jak u modelu sondy na CH1, tak i u profesionální sondy na CH2 naměřen rozdíl hladin napětí  $\Delta Y=2U_m=243.750 {\rm mV}$ , tedy zobrazená amplituda  $U_m=121.875~{\rm mV}$ 



Obr. 1.4. grafy kompenzovaného signálu pro 3 polohy  $R_pC_p(>,=,<)R_o(C_o+C_k)$ 

prostřední graf průběhu napětí odpovídá jak grafu správně kompenzovaného modelu sondy, tak sondě profesionální, oba signály měli amplitudu  $U_m=121.875~{\rm mV}$ , která odpovídala i jejich efektivní hodnotě  $U_{ef}$ 

# 1.6. Závěrečné vyhodnocení

Pro měření napětí jsou vhodnější multimetry/voltmetry nežli osciloskop, poněvadž mají větší přesnost, při měření efeftivní hodnoty je třeba pro nesinusové průběhy střídavého proudu použít přístroje s parametrem True RMS, naměřené hodnoty  $U_{ef}$  sínusového průběhu se pro různá měřidla (s jistou tolerancí) shodovaly, pro měření napětí přes osciloskopickou sondu hodnota vyšla větší než předpoklad.