MA 1-21

1. Jakou výšku má nejvyšší bod na ploše $z = (x+1)^2 + y^2$ uvažované nad elipsou $4x^2 + y^2 = 1$?

2. Přepište následující integrál

$$\int_{-1}^{0} \int_{1+x}^{\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Najděte těžiště kužele $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h\}$, je-li hustota v bodě (x, y, z) rovna jeho vzdálenosti od roviny xy.

4. Zjistěte, je-li pole $\vec{F} = (e^x \sin y + xy, e^x \cos y + \lambda x^2)$ potenciální pro nějakou hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$ a v kladném případě najděte jeho potenciál.

5. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ -1, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

Řešení.

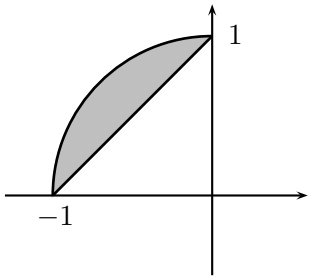
1. Lagrangeova funkce má tvar $L = (x+1)^2 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^1 - 1)$. Rovnice pro stacionární body funkce L jsou

$$2(x+1) = \lambda 8x, \quad 2y^2 = \lambda 2y, \quad 4x^2 + y^2 = 1.$$

Dostaneme 4 stacionární body: $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ a $(0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5})$. Porovnáním hodnot funkce z zjistíme, že nejvyšší bod má výšku $7/3$.

2. Opačné pořadí je $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f \; dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \int_{1/(\sin\varphi - \cos\varphi)}^{1} f \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Ze symetrie plyne, že $x_t = y_t = 0$. Zbývá vypočítat z-tovou souřadnici.

$$\iiint_P z\sqrt{x^2+y^2} = \int_0^h \int_0^z \int_0^{2\pi} z\varrho^2 \, d\varphi d\varrho dz = \frac{2\pi}{15}\, h^5,$$
$$\iiint_P \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^h \int_0^z \int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\varphi d\varrho dz = \frac{\pi}{6}\, h^4.$$

   Odtud $z_t = \dfrac{4}{5}\, h$.

4. Pole je potenciální pro $\lambda = 1/2$ s potenciálem $f = e^x \sin y + \frac{1}{2}x^2 y + K$.

5. $f(x) = -\dfrac{1}{2} + 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\pi}$ pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $x = k\pi$ má řada hodnotu průměru $-\frac{1}{2}$.