

Integrální počet funkcí více proměnných.

Jan Hamhalter,
Jaroslav Tišer

Katedra matematiky
Fakulta elektrotechnická
České Vysoké Učení Technické
Praha

*Učený hlupák je větší hlupák
než hlupák neučený.*

MOLIÈRE

Předmluva

Tato skripta jsou druhým vydáním stejnojmenných skript FEL ČVUT z roku 1996. Jak název prozrazuje, zabývají se integrály „vyšší třídy“: vícerozměrnými, křivkovými a plošnými. Navazují na *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Převážná většina podobných textů určených pro technické školy vychází z klasické Riemannovy definice. Zde jsme se rozhodli vybudovat integrál způsobem, který podle našeho mínění více odpovídá jak modernímu přístupu tak i duchu matematiky. Všechny typy integrálů zavádíme axiomatically. Tato metoda dává vyniknout přímočarosti základní myšlenky a navíc není tolik zatížena množstvím pomocných výpočtů. Upřednostňujeme totiž porozumění před formální dovedností.

Čemu jsou věnovány jednotlivé kapitoly lze snadno zjistit letmým pohledem do obsahu skript. Nemá proto valného smyslu to zde znovu opakovat. Pro úplnost jen poznamenejme, že první čtyři kapitoly jsou základní a odpovídají obsahu bakalářské etapy studia. Symbol \square označuje konec důkazu. Za každým tématickým celkem následuje několik typických řešených úloh. Stupeň zvládnutí látky si čtenář pak může ověřit na připojených neřešených úlohách.

Praha, září 2005

Obsah

Předmluva	3
1 Objem tělesa.	7
1 Formulace problému.	7
2 Existence a jednoznačnost.	10
3 Odvození existence a jednoznačnosti	15
2 Dvojný integrál.	19
1 Násobná integrace.	19
2 Cvičení.	26
3 Integrály přes základní oblasti.	27
4 Cvičení.	37
3 Substituce v dvojném integrálu.	43
1 Geometrický význam determinantu.	44
2 Jakobián.	50
3 Cvičení.	56
4 Trojný integrál.	65
1 Zavedení a definice.	65
2 Substituce v trojném integrálu.	70
3 Cvičení.	72
5 Křivka a její délka	77
1 Motivace a základní pojmy	77
2 Délka křivky	81
3 Cvičení	86
6 Křivkový integrál funkce	89
1 Definice a způsob výpočtu	89
2 Cvičení	97
7 Křivkový integrál vektorového pole	101
1 Základní pojmy	101
2 Křivkový integrál jako práce	107
3 Křivkový integrál jako průtok	109
4 Cvičení	112

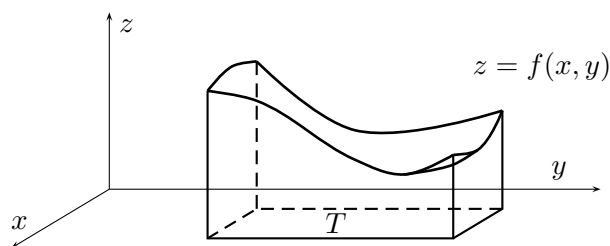
8	Plocha a její obsah	117
1	Definice plochy	117
2	Definice a výpočet obsahu plochy	118
3	Cvičení	129
9	Plošný integrál funkce	135
1	Definice a výpočet	135
2	Cvičení	141
10	Plošný integrál vektorového pole	149
1	Definice a výpočet	149
2	Plošný integrál jako průtok plochou	154
3	Cvičení	155
11	Integrální věty	161
1	Gaussova věta	161
2	Greenova věta	168
3	Stokesova věta	170
4	Cvičení	175
12	Potenciál vektorového pole	187
1	Definice a výpočet	187
2	Cvičení	195

Kapitola 1

Objem tělesa.

1 Formulace problému.

Jedním ze základních problémů, který má řešit integrální počet funkcí více proměnných, je následující otázka: Jak velký je objem tělesa omezeného grafem funkce $f(x, y)$ nad obdélníkem T ? (Viz obr. 1.1.)



Obr. 1.1.

Tato otázka je obtížnější než by se na první pohled zdálo. Nemůžeme totiž začít s výpočtem, protože nevíme, co počítat. Potřebujeme *definici* objemu. Z elementární geometrie víme, co je objem kváдру, koule nebo kužele, ale nikdy jsme se tam nesetkali s tělesy obecnějšího typu. Stojí před námi tak dva úkoly:

- (i) definovat pojem „objem tělesa“,
- (ii) najít způsob výpočtu jeho velikosti.

Postup, který zvolíme, bude poněkud odlišný od standardních přístupů. Nicméně jeho logická jasnost a elegance jsou výhody, které ho činí snadnějším pro pochopení.

Začneme s přesnou formulací problému. Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná funkce dvou proměnných a nechť

$$T = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle$$

je dvourozměrný interval. (T není nic jiného než uzavřený obdélník.) V dalším textu budeme často místo termínu „dvourozměrný interval“ používat kratší „obdélník“. Množina

$M(f, T)$ je množina bodů tělesa shora omezeného grafem funkce f a zdola obdélníkem T ,

$$M(f, T) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

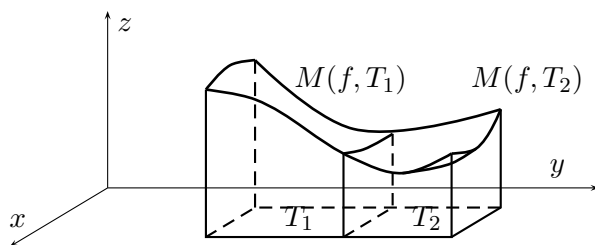
Ať už je objem množiny $M(f, T)$ cokoli, jedním jsme si jisti: musí to být nezáporné číslo. Označme tedy toto zatím neznámé číslo symbolem $V(f, T)$, tj.

$$V(f, T) = \text{„objem“ množiny } M(f, T).$$

Rozdělíme nyní obdélník T na dva menší T_1 a T_2 , jak je znázorněno na obr. 1.2. Zřejmě

$$T = T_1 \cup T_2.$$

Tím nám vznikla dvě tělesa $M(f, T_1)$ a $M(f, T_2)$, která dohromady tvoří původní těleso $M(f, T)$.



Obr. 1.2.

Má-li číslo $V(f, T)$ splňovat naše představy o objemu, musí nutně platit, že součet objemů obou těles $M(f, T_1)$ a $M(f, T_2)$ dává objem původního tělesa $M(f, T_1 \cup T_2)$:

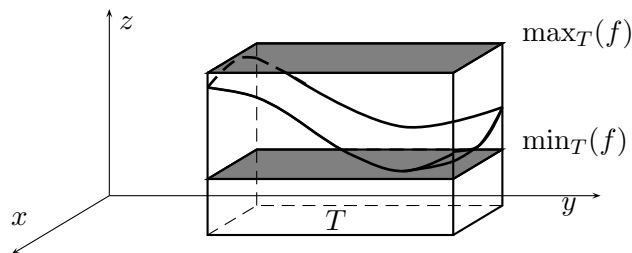
$$V(f, T_1) + V(f, T_2) = V(f, T_1 \cup T_2).$$

Této vlastnosti budeme říkat *aditivita* objemu. Vyjadřuje běžný a zcela jasný požadavek, že rozdělíme-li těleso na dvě části, pak součet objemů těchto částí je objem tělesa původního.

Povšimněme si však ještě jedné vlastnosti. Je-li jedno těleso obsažené v druhém, čekáme, že objem prvního je menší než objem druhého. Je přirozené nazvat tuto vlastnost *monotonii* objemu. Jako speciální ukázka monotonie může sloužit následující příklad. Funkce f nabývá na obdélníku T svého minima a maxima (viz [1], Kapitola 4, Věta 4.1). Označme je

$$\min_T(f) \text{ a } \max_T(f).$$

Kvádr s podstavou T a výškou $\min_T(f)$ je zřejmě obsažen v tělese $M(f, T)$. Z druhé strany, množina $M(f, T)$ je obsažena v kvádru s podstavou T a výškou $\max_T(f)$, viz obr. 1.3.



Obr. 1.3.

Požadavek monotonie lze v tomto případě formulovat takto:

$$\min_T(f) \cdot \text{obsah}(T) \leq V(f, T) \leq \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T).$$

Vyzbrojení aditivitou a monotonií můžeme přikročit k matematické definici objemu množiny $M(f, T)$.

Definice 1.1. Zobrazení V , které uzavřenému obdélníku $T \subset \mathbb{R}^2$ a funkci $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě a nezáporně na T přiřadí nezáporné číslo $V(f, T)$, se nazývá **objem množiny** $M(f, T)$, jestliže splňuje následující dva axiomy (=požadavky):

(A) *aditivita:*

$$V(f, T_1) + V(f, T_2) = V(f, T_1 \cup T_2),$$

kdykoli T_1 a T_2 jsou dva uzavřené obdélníky mající společnou právě jednu celou stranu,

(M) *monotonie:*

$$\min_T(f) \cdot \text{obsah}(T) \leq V(f, T) \leq \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T).$$

Zde je třeba se pozastavit a podívat se na Definici 1.1 trochu blížeji.

Poznámka 1.2. Tato poznámka se vztahuje k axiomu (A). Tak, jak je formulován, nám říká, co se stane, rozdělíme-li obdélník T na dva menší — T_1 a T_2 . Můžeme v tomto procesu pokračovat a rozdělit např. T_1 na obdélníky T_{11} a T_{12} . Použitím (A) na T_1 dostaneme

$$V(f, T_1) = V(f, T_{11}) + V(f, T_{12}).$$

Pro původní objem $V(f, T)$ tak máme

$$V(f, T) = V(f, T_{11}) + V(f, T_{12}) + V(f, T_2).$$

Tímto způsobem můžeme pokračovat v dělení každého z obdélníků. Tato úvaha pak vede k následující obecné rovnosti:

$$(1.1) \quad V(f, T) = V(f, T_1) + \cdots + V(f, T_n),$$

je-li

$$T = T_1 \cup \cdots \cup T_n,$$

kde obdélníky T_1, \dots, T_n jsou takové, že žádné dva nemají společný vnitřní bod.

Poznámka 1.3. Způsob, jakým je v Definici 1.1 zaveden objem, se nazývá axiomatický. Definuje objekt tím, že vyjmenuje požadavky — axiomy — na něj kladené. V našem případě jsme zavedli objem jako zobrazení V splňující axiomy (A) a (M). Axiomatická definice však v sobě může skrývat past. Ukážeme si toto nebezpečí na jednoduchém příkladu.

Představme si, že chceme definovat objekt X těmito dvěma požadavky:

(*) X je reálné číslo,

(**) $X^2 = -2$.

Každý ihned vidí, že objekt X mající vlastnosti (*) a (**) neexistuje. Neboť má-li X být reálné číslo, pak jeho kvadrát musí být nezáporný. Příčina neexistence spočívá v tom, že axiomy (*) a (**) jsou vzájemně ve sporu. Toto se může stát v každé axiomatické definici, pokud nevolíme axiomy dostatečně obezřetně. Je jen jediný způsob, jak se této pasti vyhnout. Ten použijeme i v případě zobrazení V z Definice 1.1. Abychom jednou pro vždy přesvědčili sebe i ostatní, že vůbec nějaké zobrazení V vyhovující axiomům (A) a (M) existuje, nezbude nám nic jiného, než jedno takové zobrazení sestroit. Ukážeme, že takové V nejen existuje, ale je navíc právě jediné.

2 Existence a jednoznačnost.

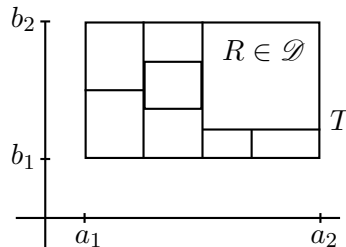
Abychom ukázali existenci a jednoznačnost objemu a našli jeho hodnotu, budeme potřebovat několik pojmů. Prvním z nich je *dělení* obdélníku T . Připomeňme si, co je dělení intervalu $I = \langle a_1, a_2 \rangle \subset \mathbb{R}$. Je to množina všech uzavřených podintervalů I_1, I_2, \dots, I_n intervalu I , které vzniknou umístěním konečně mnoha dělicích bodů do I . Tyto intervaly jsou buď disjunktní nebo mají společný právě jeden krajní bod. Krátce řečeno, je to systém uzavřených podintervalů pokrývající základní interval I a žádné dva různé podintervaly nemají společný vnitřní bod.

Definice 1.4. *Dělením uzavřeného obdélníku T nazýváme množinu \mathcal{D} takových uzavřených obdélníků $R \subset T$, jejichž sjednocení dává původní obdélník*

$$T = \bigcup_{R \in \mathcal{D}} R$$

a žádné dva různé obdélníky R a R' z množiny \mathcal{D} nemají společný vnitřní bod.

Typický příklad dělení obdélníku T je znázorněn na obr. 1.4. Všimneme si ihned, že prvky R dělení \mathcal{D} splňují předpoklady, které jsme požadovali pro obecnější formu aditivity v (1.1), viz obr. 1.4.



Obr. 1.4.

Přístupme nyní k definici dalšího pojmu.

Definice 1.5. *Nechť \mathcal{D} je dělení uzavřeného obdélníku T . Řekneme, že dělení $\tilde{\mathcal{D}}$ obdélníku T je zjemněním dělení \mathcal{D} , jestliže každý prvek $\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}$ je obsažen v nějakém prvku $R \in \mathcal{D}$.*

Jinými slovy, z daného dělení \mathcal{D} získáme jeho zjemnění, když několik prvků původního dělení opět dále rozdělíme.

Definice 1.6. *Nechť \mathcal{D} je dělení uzavřeného obdélníku T . Norma dělení $\|\mathcal{D}\|$ je číslo udávající největší diametr prvků $R \in \mathcal{D}$, tj.*

$$\|\mathcal{D}\| = \max_{R \in \mathcal{D}} \text{diam}(R).$$

(Pro úplnost: diametr množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ je číslo $\sup\{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in A\}$.) Zřejmě platí, že je-li $\tilde{\mathcal{D}}$ zjemnění \mathcal{D} , pak $\|\tilde{\mathcal{D}}\| \leq \|\mathcal{D}\|$.

Definice 1.7. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném obdélníku T a nechť \mathcal{D} je dělení T . Horní součet $\overline{S}(f, \mathcal{D})$ příslušný k \mathcal{D} se nazývá číslo*

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R).$$

Podobně dolní součet $\underline{S}(f, \mathcal{D})$ je definován

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \min_R(f) \cdot \text{obsah}(R).$$

Slovy to znamená, že horní součet získáme tak, že v každém obdélníku $R \in \mathcal{D}$ zjistíme maximum funkce f na R a toto maximum vynásobíme obsahem R . Všechna takto získaná čísla od všech obdélníků z daného dělení pak sečteme.

Povšimněme si následující vlastnosti. Je-li $\tilde{\mathcal{D}}$ zjemnění \mathcal{D} , pak

$$(1.2) \quad \overline{S}(f, \tilde{\mathcal{D}}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}) \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, \tilde{\mathcal{D}}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Ukážeme např. první nerovnost, druhá je analogická. Protože $\tilde{\mathcal{D}}$ zjemňuje \mathcal{D} , každý prvek $R \in \mathcal{D}$ je ještě dál rozložen na menší obdélníky patřící do $\tilde{\mathcal{D}}$. Tím

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\tilde{R} \subset R \\ \tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}}} \max_{\tilde{R}}(f) \cdot \text{obsah}(\tilde{R}) &\leq \sum_{\substack{\tilde{R} \subset R \\ \tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}}} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(\tilde{R}) = \max_R(f) \sum_{\substack{\tilde{R} \subset R \\ \tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}}} \text{obsah}(\tilde{R}) = \\ &= \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) \end{aligned}$$

Sečtením těchto odhadů pro všechna $R \in \mathcal{D}$ dostaneme požadovanou nerovnost

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{R \in \mathcal{D}} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) \geq \sum_{R \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{\tilde{R} \subset R \\ \tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}}} \max_{\tilde{R}}(f) \cdot \text{obsah}(\tilde{R}) = \\ &= \sum_{\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{D}}} \max_{\tilde{R}}(f) \cdot \text{obsah}(\tilde{R}) = \overline{S}(f, \tilde{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Z (1.2) navíc plyne, že pro jakákoli dělení \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 obdélníku T platí

$$(1.3) \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Opravdu, uvažíme-li společné zjemnění \mathcal{D}_3 obou daných dělení, tak můžeme psát

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_1) \geq \overline{S}(f, \mathcal{D}_3) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}_3) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Jak souvisí čísla $\underline{S}(f, \mathcal{D})$ a $\overline{S}(f, \mathcal{D})$ s naší (zatím) neznámou hodnotou $V(f, T)$ uvádí následující tvrzení.

Tvrzení 1.8. *Nechť f je spojitá nezáporná funkce na uzavřeném obdélníku T . Pak pro každé dělení \mathcal{D} obdélníku T platí*

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Důkaz. Nechť obdélník R je libovolný prvek dělení \mathcal{D} , $R \in \mathcal{D}$. Pro něj nám axiom (M) dává

$$\min_R(f) \cdot \text{obsah}(R) \leq V(f, R) \leq \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R).$$

Tyto nerovnosti sečteme přes všechny obdélníky $R \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{R \in \mathcal{D}} \min_R(f) \cdot \text{obsah}(R) \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} V(f, R) \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R).$$

Nyní si uvědomíme, že výraz zcela vlevo je $\underline{S}(f, \mathcal{D})$ a výraz zcela napravo $\overline{S}(f, \mathcal{D})$. Takže máme

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} V(f, R) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Podle Poznámky 1.2 je rovněž

$$\sum_{R \in \mathcal{D}} V(f, R) = V(f, T),$$

a tím dostáváme dokazované nerovnosti. \square

Tvrzení 1.8 říká, že existuje-li zobrazení V , pak jeho hodnota $V(f, T)$ je kontrolována zdola i shora čísly $\underline{S}(f, \mathcal{D})$ a $\overline{S}(f, \mathcal{D})$. Protože $\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T)$ pro každé dělení \mathcal{D} obdélníku T , tak také

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T),$$

kde supremum bereme přes všechna možná dělení \mathcal{D} obdélníku T . Číslo $\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D})$ je tak nejlepší dolní odhad hodnoty $V(f, T)$ pomocí dolních součtů. Podobně infimum všech horních součtů dává nejlepší horní odhad,

$$V(f, T) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Celkově

$$(1.4) \quad \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Lepší kontrolu než (1.4) nám horní a dolní součty nejsou schopny poskytnout. To pro náš cíl — nějakým způsobem určit hodnotu $V(f, T)$ — není na první pohled příliš slibné. Pokud by ovšem nenastal zvláštní případ, že horní a dolní odhad se rovnají. Pak by naopak naše cesta k $V(f, T)$ končila. Položili bychom

$$V(f, T) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \quad (= \inf_{\mathcal{D}} \bar{S}(f, \mathcal{D}))$$

a ověřili, že tato volba splňuje axiomy (A) a (M). V další části této kapitoly dokážeme, že tato šťastná okolnost opravdu nastává. Příroda je sice složitá, nikoli však zlomyslná. Můžeme tak formulovat hlavní větu této kapitoly.

Věta 1.9. *Ke každé spojitě funkci $f(x, y)$ na uzavřeném obdélníku $T \subset \mathbb{R}^2$ existuje právě jedna hodnota $V(f, T)$ taková, že splňuje axiomy (A) a (M) z Definice 1.1. Navíc platí*

$$V(f, T) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \bar{S}(f, \mathcal{D}).$$

Důkaz této věty bude proveden v následujícím odstavci. Věta 1.9 nejen říká, že pojem objem tělesa vymezený v Definici 1.1 má jednoznačný smysl, ale zároveň udává i způsob jak tento objem získat pomocí elementárních objemů sjednocených kvádrů. Tato skutečnost je analogická aproximaci určitého integrálu (t.j. plochy omezené grafem funkce jedné proměnné) pomocí částečných součtů. Stanovení objemu tělesa pomocí částečných součtů je základem numerických metod. Nehodí se však pro analytický výpočet. Problému jak objem spočítat pomocí integrace funkcí bude věnována následující kapitola. Pro lepší ilustraci obsahu Věty 1.9 si nyní určíme objem tělesa v jednom jednoduchém případě. Postup se opírá o fakt, že

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T) \leq \bar{S}(f, \mathcal{D})$$

pro jakékoli dělení \mathcal{D} obdélníku T . Budeme si volit postupně dělení $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$, která budou stále lépe určovat hodnotu $V(f, T)$, až v limitě příslušné horní a dolní součty splynou.

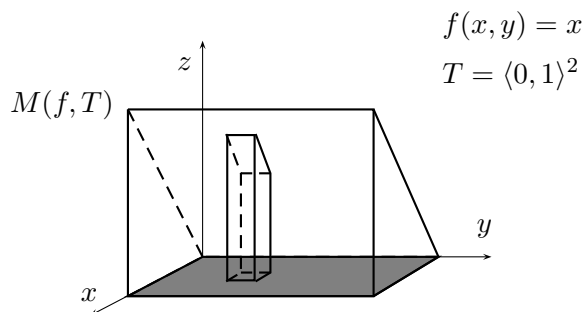
Příklad 1.10. Pomocí horních a dolních součtů určete objem množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x, \ x, y \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Množina M je jednotková krychle šikmo seříznutá rovinou $z = x$. V našem označení je to množina $M(f, T)$, kde

$$f(x, y) = x, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \quad (= \langle 0, 1 \rangle^2),$$

viz obr. 1.5.



Obr. 1.5.

Nechť dělení \mathcal{D}_n čtverce T vznikne tak, že T rozdělíme na malé čtverce o straně $\frac{1}{n}$. Formální zápis je

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \times \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle \mid i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Spočteme nyní příslušné horní a dolní součty. Nechť $R \in \mathcal{D}_n$, tj. R je typu

$$R = \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \times \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle$$

pro nějaké $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Maximum a minimum funkce $f(x, y) = x$ na R je vlastně maximální a minimální hodnota x -ové složky bodu z R . Takže

$$\max_R(f) = \frac{i}{n}, \quad \min_R(f) = \frac{i-1}{n}.$$

Odtud dostaneme, že

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \sum_{R \in \mathcal{D}_n} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n i = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i \right).$$

Vzpomeneme-li si, že součet prvních n přirozených čísel je $\frac{n}{2}(n+1)$, máme hodnotu vnitřní sumy. Ta se ještě sčítá přes $j = 1, \dots, n$. Takže hodnotu $\frac{n}{2}(n+1)$ sečteme ještě n -krát samu se sebou. Výsledek je pak

$$\frac{1}{n^3} \cdot n \cdot \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Úplně stejně postupujeme i u dolního součtu:

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \sum_{R \in \mathcal{D}_n} \min_R(f) \cdot \text{obsah}(R) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \right).$$

Vnitřní suma je vlastně součet čísel od 0 do $n-1$, tj. součet prvních $n-1$ přirozených čísel. Jeho hodnota je $\frac{n-1}{2}n$. Sčítání přes j je opět jen n -krát sečtená hodnota $\frac{n-1}{2}n$, takže výsledek je

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \frac{1}{n^3} \cdot n \cdot \frac{n-1}{2}n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Máme tak

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq V(f, T) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Jak už každý vidí, limita obou krajních členů je $\frac{1}{2}$, a tím i

$$V(f, T) = \frac{1}{2}.$$

Vlastní číselná hodnota objemu není samozřejmě v tomto případě nijak cenná; to jsme věděli už na počátku, že vyjde $\frac{1}{2}$, neboť M je přesně polovina jednotkové krychle. Důležité na tomto příkladě ale bylo, že jsme explicitně viděli mechanismus zpřesňování hodnoty $V(f, T)$ — jemnější a jemnější dělení nám dávalo přesnější a přesnější meze pro $V(f, T)$. Tento princip je základem numerických metod (numerické kvadratury).

3 Odvození existence a jednoznačnosti

Cílem této části je dokázat Větu 1.9. Důležitým argumentem v tomto důkazu je následující vlastnost spojitě funkce na uzavřené a omezené množině v \mathbb{R}^n .

Věta 1.11. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřené a omezené množině $T \subset \mathbb{R}^n$. Pak je stejnoměrně spojitá, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že kdykoli dva body $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T$ jsou od sebe vzdáleny nejvýše δ , pak*

$$|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \varepsilon.$$

Má-li bod \mathbf{u} složky $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, pak symbol $f(\mathbf{u})$ je zkrácený zápis výrazu $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Tento způsob budeme užívat vždy, kdy nebude nutné explicitně vypisovat složky.

Důkaz zde nebudeme provádět, neboť je uveden ve skriptech [1, kapitola 4]. Pouze si připomeňme, v čem spočívá odlišnost spojitosti a stejnoměrné spojitosti: je-li f spojitá v bodě \mathbf{u} , pak z definice víme, že na jistém δ -okolí bodu \mathbf{u} se budou hodnoty funkce f navzájem lišit ne více než o předepsané $\varepsilon > 0$. Podíváme-li se však na chování f v δ -okolí jiného bodu, může se stát, že funkce f tam roste strměji, a tak rozdíly jejích hodnot na tomto okolí už převýší dané ε . A v okolí dalších bodů tyto rozdíly mohou být větší a větší. Naproti tomu stejnoměrná spojitost zaručuje, že existuje takové univerzální $\delta > 0$, že na δ -okolí *každého* bodu je rozdíl funkčních hodnot nejvýše ε .

Tvrzení 1.12. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném obdélníku T . Pak*

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Důkaz. Z (1.3) víme, že jedna nerovnost platí vždy:

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Abychom dokázali rovnost, stačí když ukážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$(1.5) \quad \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) + \varepsilon.$$

V důsledku libovolnosti volby $\varepsilon > 0$ pak ihned dostaneme zbylou nerovnost a celý důkaz bude ukončen.

Mějme tedy dáno $\varepsilon > 0$. Nejprve si ho upravíme tak, že zavedeme

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\text{obsah}(T)}.$$

Z Věty 1.11 k tomuto $\tilde{\varepsilon}$ existuje $\delta > 0$, že kdykoli dva body $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T$ jsou od sebe vzdáleny nejvýše δ , tak

$$(1.6) \quad |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Nechť \mathcal{D}_0 je dělení s normou $\|\mathcal{D}_0\| < \delta$. Pak dva body \mathbf{u}, \mathbf{v} , které leží v jednom prvku dělení $R \in \mathcal{D}_0$ jsou od sebe vzdáleny nejvýše δ . Zvolme si tyto body z R tak, že funkce f nabývá v bodě \mathbf{u} svého maxima a v bodě \mathbf{v} svého minima na R , tj.

$$f(\mathbf{u}) = \max_R(f), \quad f(\mathbf{v}) = \min_R(f).$$

Protože platí (1.6), tak i

$$(1.7) \quad \max_R(f) - \min_R(f) \leq \tilde{\varepsilon}.$$

(Zde není třeba psát absolutní hodnotu, neboť $\max_R(f) - \min_R(f)$ je nezáporný výraz.)
Nyní

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{D}_0) - \underline{S}(f, \mathcal{D}_0) &= \sum_{R \in \mathcal{D}_0} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) - \sum_{R \in \mathcal{D}_0} \min_R(f) \cdot \text{obsah}(R) \\ &= \sum_{R \in \mathcal{D}_0} (\max_R(f) - \min_R(f)) \cdot \text{obsah}(R) \leq \tilde{\varepsilon} \sum_{R \in \mathcal{D}_0} \text{obsah}(R) \\ &= \tilde{\varepsilon} \cdot \text{obsah}(T) = \varepsilon, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost vyplývá z (1.7) a poslední rovnost je dána volbou $\tilde{\varepsilon}$. Tím jsme získali odhad

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_0) - \underline{S}(f, \mathcal{D}_0) \leq \varepsilon,$$

tj.

$$(1.8) \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_0) \leq \underline{S}(f, \mathcal{D}_0) + \varepsilon.$$

Uvědomíme-li si nyní triviální nerovnosti

$$\inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_0), \quad \underline{S}(f, \mathcal{D}_0) \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}),$$

můžeme z (1.8) vyvodit

$$\inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_0) \leq \underline{S}(f, \mathcal{D}_0) + \varepsilon \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) + \varepsilon.$$

Ale to už je požadovaná nerovnost (1.5) a důkaz je hotov. □

Nyní máme vše potřebné k zakončení důkazu hlavní věty.

Důkaz Věty 1.9:

To, že zobrazení V (pokud vůbec existuje) je jediné, jsme si vlastně uvědomili už dříve: má-li V splňovat axiomy aditivity a monotonie, musí jeho hodnota ležet mezi

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq V(f, T) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}),$$

viz (1.4). Z Tvrzení 1.12 však plyne, že máme pouze *jedinou* možnost volby

$$V(f, T) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \quad (= \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D})).$$

K existenci tak zbývá jen ověřit, že tato volba vyhovuje požadavkům (A) a (M).

Začneme s ověřováním monotonie. Zvolme si dělení \mathcal{D}_0 obdélníku T , které má pouze jediný prvek, a to T . Pak zřejmě

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_0) = \min_T(f) \cdot \text{obsah}(T), \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_0) = \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T).$$

Tím dostaneme

$$\min_T(f) \cdot \text{obsah}(T) \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = V(f, T) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T),$$

což je axiom (M).

Aditivita: Necht obdélník T je rozdělen na dva menší obdélníky T_1, T_2 , které mají společnou právě jednu stranu. Zvolme si dělení \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 obdélníků T_1 a T_2 . Dáme-li všechny prvky z \mathcal{D}_1 i z \mathcal{D}_2 dohromady, dostaneme dělení \mathcal{D}_3 obdélníku T . Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} (1.9) \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_3) &= \sum_{R \in \mathcal{D}_3} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) = \sum_{R \in \mathcal{D}_1} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) + \\ &\quad + \sum_{R \in \mathcal{D}_2} \max_R(f) \cdot \text{obsah}(R) = \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \overline{S}(f, \mathcal{D}_2). \end{aligned}$$

Zcela analogicky máme pro dolní součty

$$(1.10) \quad \underline{S}(f, \mathcal{D}_3) = \underline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Využitím (1.9) dostáváme, že pro každá dělení \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 obdélníků T_1 a T_2 platí

$$V(f, T) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_3) = \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \overline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Tudíž

$$V(f, T) \leq \inf_{\mathcal{D}_1} \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \inf_{\mathcal{D}_2} \overline{S}(f, \mathcal{D}_2),$$

kde první infimum je přes všechna dělení obdélníku T_1 a druhé přes všechna dělení obdélníku T_2 . To znamená, že

$$(1.11) \quad V(f, T) \leq V(f, T_1) + V(f, T_2).$$

Stejně ukážeme, že platí i obrácená nerovnost. Použitím (1.10) dostaneme

$$V(f, T) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}_3) = \underline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Máme tak, že

$$(1.12) \quad V(f, T) \geq \sup_{\mathcal{D}_1} \underline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \sup_{\mathcal{D}_2} \underline{S}(f, \mathcal{D}_2) = V(f, T_1) + V(f, T_2),$$

kde opět první supremum je přes všechna dělení obdélníku T_1 a druhé přes všechna dělení obdélníku T_2 . Spojení nerovností (1.11) a (1.12) ihned dává

$$V(f, T) = V(f, T_1) + V(f, T_2).$$

Ověřením aditivity je celý důkaz ukončen. □

Kapitola 2

Dvojný integrál.

1 Násobná integrace.

V této části se budeme zabývat nalezením elegantnějšího a hlavně efektivnějšího způsobu výpočtu objemu tělesa $M(f, T)$ než nám poskytuje obecná konstrukce (viz Příklad 1.10 V minulé kapitole). Začneme — na první pohled — poněkud odtažitě. Zapomeneme chvíli na objem $V(f, T)$ a podíváme se na integrování funkcí dvou proměnných.

Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na obdélníku $T = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle$. Pro každé pevně zvolené x je funkce $f(x, y)$ spojitě závislá jen na y . Můžeme ji integrovat v mezích b_1, b_2 :

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy.$$

Tento výraz je funkcí x . Označme jej

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy.$$

Příklad 2.1. Nechť $f(x, y) = x^2 y + x \sin y$ a $T = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^2 (x^2 y + x \sin y) \, dy = \int_0^2 x^2 y \, dy + \int_0^2 x \sin y \, dy = \\ &= x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 + x \left[-\cos y \right]_0^2 = 2x^2 + x(1 - \cos 2). \end{aligned}$$

Stejně tak můžeme volit pevně y . Tím $f(x, y)$ bude spojitou funkcí v x . Jejím integrováním dostaneme funkci v proměnné y , kterou označíme

$$\psi(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx.$$

Příklad 2.2. Necht f i T jsou stejné jako v Příkladu 2.1. Pak

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \int_1^2 (x^2 y + x \sin y) \, dx = \int_1^2 x^2 y \, dx + \int_1^2 x \sin y \, dx \\ &= y \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \sin y \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{7}{3} y + \frac{3}{2} \sin y.\end{aligned}$$

V obou příkladech vyšly funkce $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ spojité. Ukážeme, že to nebylo náhodou: vyjdeme-li od spojitě funkce $f(x, y)$, tak integrováním podle jedné či druhé proměnné dostaneme vždy spojitou funkci.

Věta 2.3. *Necht funkce f je spojitá na obdélníku $T = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle$. Pak funkce $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ dané integrály*

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \quad \text{a} \quad \psi(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx$$

jsou spojité.

Důkaz. Ukážeme pouze první část tvrzení, tj. že funkce $\varphi(x)$ je spojitá. Druhá část má důkaz zcela analogický (proměnné x a y si vymění role).

Necht $x_0 \in \langle a_1, a_2 \rangle$. Dokážeme, že φ je spojitá v x_0 . Mějme $\varepsilon > 0$. Hledáme $\delta > 0$ takové, aby kdykoli se x od x_0 liší o méně než δ , $|x - x_0| < \delta$, tak hodnoty $\varphi(x)$ a $\varphi(x_0)$ se liší nejvýše o ε , $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$. Upravíme si nejprve zadané ε tím, že zavedeme

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b_2 - b_1}.$$

Nyní použijeme Větu 1.11. Ta nám poskytne k $\tilde{\varepsilon}$ takové δ , že

$$(2.1) \quad |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \tilde{\varepsilon},$$

kdykoli body \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou od sebe vzdáleny nejvýše o δ . A toto δ je už ono hledané. Ověřme si to. Necht x je takové, že $|x - x_0| < \delta$ a zkusme odhadnout rozdíl funkčních hodnot φ :

$$(2.2) \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} (f(x, y) - f(x_0, y)) \, dy \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy.$$

Vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y) je

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} = |x - x_0| < \delta.$$

Podle (2.1) je tak

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Můžeme tedy poslední člen v (2.2) dále odhadnout

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \leq \int_{b_1}^{b_2} \tilde{\varepsilon} dy = \tilde{\varepsilon}(b_2 - b_1) = \varepsilon.$$

Zjistili jsme, že $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$ a spojitost funkce φ je dokázána. \square

Když nyní už víme, že funkce

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy$$

je spojitá, nic nám nemůže zabránit v tom, abychom ji neintegrovali podle x v mezích od a_1 do a_2 :

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) dx = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx.$$

Podobně pro funkci ψ :

$$\int_{b_1}^{b_2} \psi(y) dy = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy.$$

Integrály na pravé straně budeme nazývat *dvojnásobné integrály* funkce f přes obdélník T . Někdy, bude-li to třeba, můžeme pro přesnost naznačit závorkami pořadí integrace

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Příklad 2.4. Spočteme oba dvojnásobné integrály (tj. v obou pořadích) funkce

$$f(x, y) = x^2 y + x \sin y$$

přes obdélník $T = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Využijeme samozřejmě toho, že příslušné funkce $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ máme již spočteny v Příkladech 2.1 a 2.2.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^2 x^2 y + x \sin y dy dx &= \int_1^2 2x^2 + x(1 - \cos 2) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + (1 - \cos 2) \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \frac{14}{3} + \frac{3}{2}(1 - \cos 2). \end{aligned}$$

Nyní při prohozeném pořadí integrace:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_1^2 x^2 y + x \sin y dx dy &= \int_0^2 \left(\frac{7}{3} y + \frac{3}{2} \sin y \right) dy = \frac{7}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 + \frac{3}{2} [-\cos y]_0^2 \\ &= \frac{14}{3} + \frac{3}{2}(1 - \cos 2). \end{aligned}$$

Jen těžko může uniknout naší pozornosti fakt, že oba integrály v předchozím příkladě vyšly stejně. Jestliže jsme se pročetli první kapitolou a částí druhé kapitoly až sem, získali jsme — sice malou — ale přece jenom jistou matematickou zkušenost. Ta nám už nedovolí, abychom přijali laciné vysvětlení, že je to náhoda. Tušíme, že se za rovností skrývá hlubší důvod.

Věta 2.5. *Zobrazení, které uzavřenému obdélníku T a nezáporné spojitě funkci f na T přiřadí dvojnásobný integrál funkce f přes T vyhovuje axiomům (A) a (M). Tím hodnota násobných integrálů nezávisí na pořadí integrace.*

Poznámka 2.6. Typ tvrzení, že hodnota násobného integrálu nezávisí na pořadí integrace, se v matematické literatuře nazývá *Fubiniova věta*. V našem výkladu je to právě Věta 2.5. Fubini dokázal toto tvrzení pro mnohem obecnější integrály, tzv. Lebesgueův integrál a měřitelné funkce.

Důkaz. Z důvodů symetrie stačí, když důkaz provedeme pro jedno pořadí integrace. Začneme s ověřením monotonie: mějme obdélník $T = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle$. Pak

$$(2.3) \quad \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx \leq \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \max_T(f) \, dy \right) dx = \int_{a_1}^{a_2} \max_T(f) (b_2 - b_1) \, dx \\ = \max_T(f) (b_2 - b_1) (a_2 - a_1) = \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T).$$

Podobně

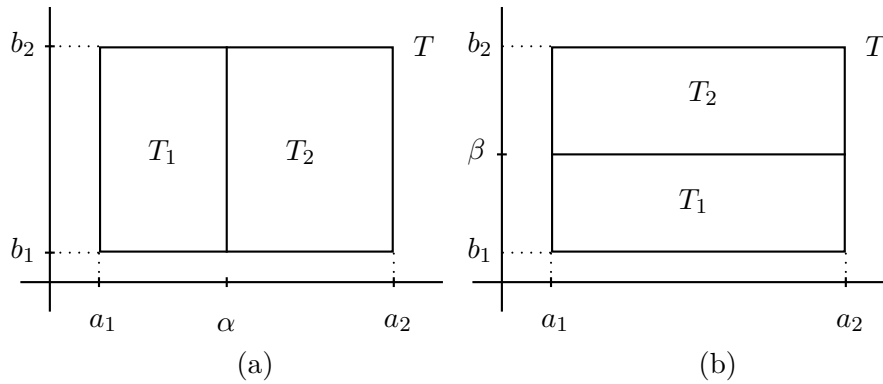
$$(2.4) \quad \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx \geq \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \min_T(f) \, dy \right) dx = \int_{a_1}^{a_2} \min_T(f) (b_2 - b_1) \, dx \\ = \min_T(f) (b_2 - b_1) (a_2 - a_1) = \min_T(f) \cdot \text{obsah}(T).$$

Nerovnosti (2.3) a (2.4) spolu dávají

$$\min_T(f) \cdot \text{obsah}(T) \leq \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx \leq \max_T(f) \cdot \text{obsah}(T),$$

což je axiom (M).

Aditivita: Nechť obdélník T je sjednocení dvou obdélníků T_1 a T_2 , jak je znázorněno na obr. 2.1(a).



Obr. 2.1.

Při známém označení

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy$$

bude dvojnásobný integrál I_1 přes obdélník T_1 roven

$$I_1 = \int_{a_1}^{\alpha} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{a_1}^{\alpha} \varphi(x) \, dx.$$

Stejně pro obdélník T_2

$$I_2 = \int_{\alpha}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{\alpha}^{a_2} \varphi(x) \, dx$$

a pro původní obdélník T

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) \, dx.$$

Zřejmě platí $I = I_1 + I_2$, což je však již axiom aditivity. Ještě je třeba ověřit druhý způsob rozdělení obdélníku T na dva menší, jak je znázorněno na obr. 2.1(b). Zde je situace dokonce jednodušší než v prvním případě. Můžeme rovnou počítat

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{\beta} f(x, y) \, dy + \int_{\beta}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{\beta} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{a_1}^{a_2} \int_{\beta}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Opět vidíme, že dvojnásobný integrál příslušný T je součet dvojnásobných integrálů pro T_1 a T_2 .

Věta 1.9 říká, že existuje právě jediné zobrazení V vyhovující axiomům (A) a (M). Věta 2.5 ukazuje, že oba násobné integrály vyhovují zmíněným axiomům. Z toho plyne, že

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = V(f, T) = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

□

Předchozí věta tvrdí, že dvojnásobné integrály pro nezáporné spojitě funkce nezávisí na pořadí integrace. Omezení dané nezáporností integrované funkce však není podstatné. Věta se dá rychle zobecnit na obecný případ. Uvažujme proto spojitou funkci $f(x, y)$ (ne nutně nezápornou) na obdélníku $T = \langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle$. Tato funkce má na T minimum $c = \min_T(f)$. Přičteme-li nyní k funkci $f(x, y)$ konstantu c , dostaneme funkci $g(x, y) = f(x, y) + c$, která je na T nezáporná. Pro funkci g tedy platí Věta 2.5, a proto

$$(2.5) \quad \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} (f(x, y) + c) \, dy \, dx = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} (f(x, y) + c) \, dx \, dy.$$

Lehce se můžeme přesvědčit, že dvojný integrál z konstantní funkce c přes obdélník T nezávisí na pořadí integrace a je vždy roven $c \cdot \text{plocha}(T)$. Odečtením této hodnoty od obou stran rovnosti (2.5) získáme závěrem

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dvojnásobné integrály tedy vycházejí pro jakékoliv spojitě funkce vždy stejně. Jejich společnou hodnotu budeme značit

$$\iint_T f, \quad \text{eventuelně} \quad \iint_T f(x, y).$$

Pro nezápornou funkci f má tato hodnota význam objemu. Násobné integrály mají však smysl i pro obecnou spojitou funkci na T . Pomocí nich tak zavádíme pojem dvojného integrálu pro obecnou spojitou funkci.

Definice 2.7. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený obdélník a nechť funkce $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku T . Dvojným integrálem funkce f přes množinu T nazýváme*

$$\iint_T f = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

Tím jsme završili cestu započatou otázkami „Co je objem?“ a „Jak vypočítat jeho hodnotu?“. Odpověď na první z nich je Definice 1.1 spolu s Větou 1.9 a na druhou můžeme nyní odpovědět, že hodnota $V(f, T)$ je dvojný integrál funkce f přes T .

Někdy se vyskytne nutnost integrovat přes neomezený obdélník, např.

$$T = \langle -1, +\infty \rangle \times \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Takový obdélník je vlastně nekonečným sjednocením postupně rostoucích omezených obdélníků $T_n = T \cap (\langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle)$, viz obr 2.2:

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Integrály přes T_n již máme definovány a je intuitivně jasné, že jejich hodnota by se měla blížit k hodnotě integrálu přes T . To nás vede k přirozené volbě, že položíme

$$\iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f.$$

Obecně můžeme definovat integrál přes neomezený obdélník následovně.

Definice 2.8. *Nechť T je uzavřený neomezený obdélník a nechť $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Položíme*

$$T_n = T \cap (\langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle).$$

Existuje-li vlastní $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f$, řekneme, že existuje integrál $\iint_T f$ a jeho hodnota je rovna této limitě,

$$(2.6) \quad \iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f.$$

Nezápornost funkce f zaručuje existenci výše uvedené limity neboť posloupnost $\iint_{T_n} f$ je nezáporná. V případě obecné funkce f definujeme dvojný integrál tak, že si f rozložíme na kladnou a zápornou část následovně:

$$f_+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\} \quad \text{a} \quad f_-(x, y) = \max\{-f(x, y), 0\}.$$

Obě funkce f_+ a f_- jsou nezáporné a platí, že $f = f_+ - f_-$. Existují-li vlastní integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$ přes neomezený obdélník T , pak položíme

$$\iint_T f = \iint_T f_+ - \iint_T f_-.$$

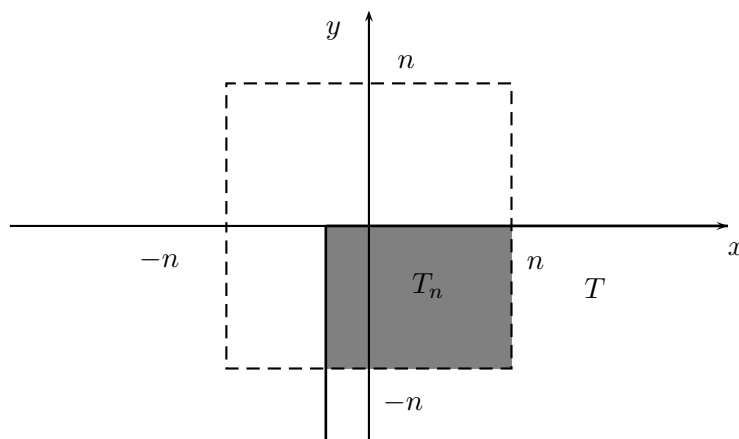
V opačném případě říkáme, že integrál neexistuje.

2 Cvičení.

Úloha. Zjistěte, zda existuje

$$\iint_T e^{-x+y}, \quad T = \langle -1, +\infty \rangle \times \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Řešení. Položíme $T_n = T \cap (\langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle)$. Obdélník T_n je znázorněn na obr. 2.2.



Obr. 2.2.

Počítejme,

$$\begin{aligned} \iint_{T_n} e^{-x+y} &= \int_{-1}^n \int_{-n}^0 e^{-x+y} dy dx = \int_{-1}^n [e^{-x+y}]_{-n}^0 dx \\ &= \int_{-1}^n e^{-x} - e^{-x-n} dx = (1 - e^{-n}) \int_{-1}^n e^{-x} dx = (1 - e^{-n}) [-e^{-x}]_{-1}^n = \\ &= (1 - e^{-n})(-e^{-n} + e) = e - e^{-n+1} - e^{-n} + e^{-2n}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (e - e^{-n+1} - e^{-n} + e^{-2n}) = e$, dostáváme

$$\iint_T e^{-x+y} = e.$$

Vypočítejte následující dvojné integrály přes zadané obdélníky T .

$$1. \iint_T xy, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$$

2. $\iint_T e^{x+y}, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
3. $\iint_T \frac{x^2}{1+y^2}, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
4. $\iint_T \frac{1}{(1+x+y)^2}, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
5. $\iint_T \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
6. $\iint_T x \sin(x+y), \quad T = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$
7. $\iint_T x^2 y e^{xy}, \quad T = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$
8. $\iint_T x^2 y \cos(xy), \quad T = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

Spočtěte dvojné integrály přes neomezený obdélník T .

9. $\iint_T \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}, \quad T = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$
10. $\iint_T xy e^{-x^2-y^2}, \quad T = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$
11. $\iint_T e^{-|x|-|y|}, \quad T = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$
- 12.* $\iint_T \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$
- 13.* $\iint_T \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^2}, \quad T = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$

Výsledky.

1. 1; 2. $(e-1)^2$; 3. $\frac{\pi}{12}$; 4. $\ln \frac{4}{3}$; 5. $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; 6. $\pi-2$; 7. 2; 8. 0; 9. π^2 ; 10. $\frac{1}{4}$;
 11. 4; 12. 2π , ve vnitřním integrálu použijte substituci $y = \sqrt{1+x^2} \sinh t$; 13. $\frac{\pi}{4a^2}$.

3 Integrály přes základní oblasti.

To, že umíme určit objem tělesa s obdélníkovou podstavou omezeného shora grafem spojitě funkce, nás nemůže nadlouho uspokojit. Vadí nám tu příliš jednoduchý typ podstavy.

V aplikacích se vyskytují tělesa s mnohem obecnější podstavou než obdélník. Budeme proto nyní uvažovat množiny následujícího tvaru.

- Mějme dvě spojitě funkce $y = s_1(x)$ a $y = s_2(x)$ na intervalu $I = \langle a_1, a_2 \rangle$ takové, že platí $s_1(x) \leq s_2(x)$. Prvním typem podstavy je množina

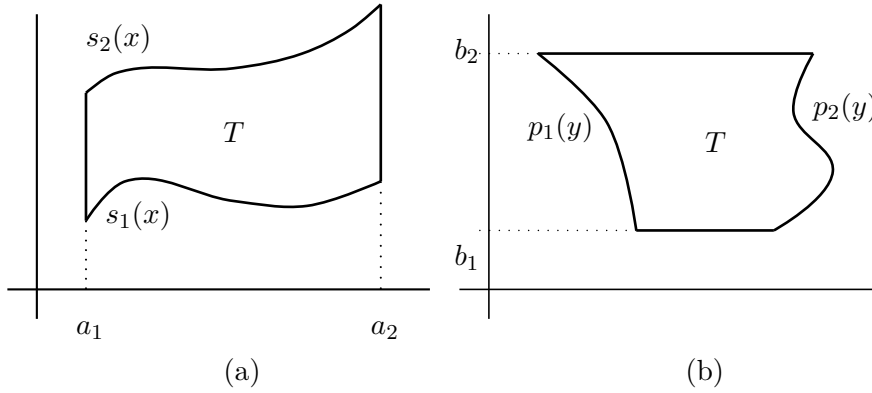
$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, s_1(x) \leq y \leq s_2(x) \right\},$$

viz obr. 2.3(a).

- Mějme dvě spojitě funkce $x = p_1(y)$ a $x = p_2(y)$ na intervalu $J = \langle b_1, b_2 \rangle$, takové, že platí $p_1(y) \leq p_2(y)$. Druhým typem podstavy je množina

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J, p_1(y) \leq x \leq p_2(y) \right\},$$

viz obr. 2.3(b).



Obr. 2.3.

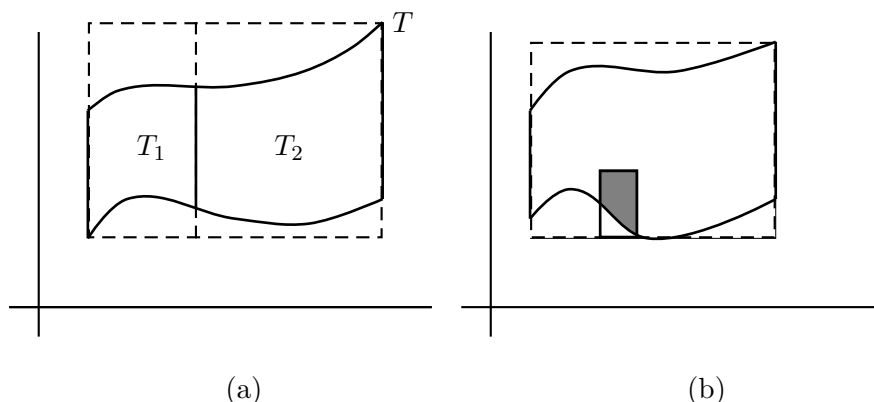
Není žádný standardní název pro takovéto typy množin, proto jim budeme pro naši potřebu říkat *základní oblasti*. Tělesa, kterými se budeme zabývat, mají formálně stejný zápis $M(f, T)$ jako v Kapitole 1, jen symbol T nyní značí základní oblast:

$$M(f, T) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

Proto se zdá, že i definice objemu takového tělesa bude stejná jako Definice 1.1. Na axiomu monotonie (M) není třeba měnit vůbec nic, neboť jak $\min_T(f)$ a $\max_T(f)$, tak i $\text{obsah}(T)$ mají jasný smysl i pro základní oblasti T . (Z integrálního počtu jedné proměnné víme, jak spočítat $\text{obsah}(T)$). U aditivity je však nutné si ujasnit, co znamená rozdělení základní oblasti na dvě menší. Nejjednodušší způsob je ten, že opíšeme oblasti T obdélník a ten rozdělíme na dva menší. Jejich průniky s oblastí T jsou opět základní oblasti a tvoří rozdělení T , viz obr. 2.4(a). Aditivitu lze pak formulovat tak, že

$$V(f, T) = V(f, T_1) + V(f, T_2),$$

kde T_1 a T_2 jsou základní oblasti dělící T ve výše uvedeném smyslu. Toto rozdělení na dvě části můžeme přirozeným způsobem zobecnit na pojem *dělení* základní oblasti: každý prvek dělení opsaného obdélníku pronikne s oblastí T , viz obr. 2.4(b).



Obr. 2.4.

Náš cíl je teď dokázat větu o existenci a jednoznačnosti zobrazení V i pro základní oblasti. Vzpomeňme si, co bylo třeba k důkazu v případě obdélníku: za prvé pojem dělení a za druhé stejnoměrná spojitost funkce (viz Větu 1.11). Dělení jsme již zobecnili z obdélníků na základní oblasti a Věta 1.11 platí i pro základní oblasti. Nyní bychom mohli slovo od slova opisovat důkazy Tvrzení 1.8 a 1.12, a tím i důkaz hlavní Věty 1.9, s jedinou změnou, že všude bychom považovali T za základní oblast. To samozřejmě dělat nebudeme, pouze si na základě této skutečnosti uvědomíme, že platí

Věta 2.9. *Pro každou spojitou funkci f a každou základní oblast T , na které je f definována, existuje právě jedna hodnota $V(f, T)$, která splňuje axiomy (A) a (M).*

Poznámka 2.10. Už v Poznámce 1.2 jsme si uvědomili, že axiom aditivity můžeme aplikovat na rozklad obdélníku na více než dvě části. V případě základních oblastí je situace zcela stejná:

$$(2.7) \quad V(f, T) = V(f, T_1) + \cdots + V(f, T_n),$$

kdykoli základní oblast $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ je sjednocením základních oblastí T_1, \dots, T_n takových, že žádné dvě nemají společný vnitřní bod. Tato obecnější formulace se nám bude hodit v dalších kapitolách.

Přistoupíme nyní k násobným integrálům přes základní oblasti. Ty jsou formálně podobné integrálům přes obdélníky. Je tu jen jedna odlišnost, na kterou si musíme dávat pozor. K ní se dostaneme až po důkazu následující věty, která zobecňuje Větu 2.3

Věta 2.11. *Nechť f je spojitá funkce na základní oblasti T typu (a) z obr. 2.3. Pak funkce*

$$\varphi(x) = \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy$$

je spojitá na intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$. Podobně pro oblast typu (b) z obr. 2.3 je funkce

$$\psi(y) = \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) dx$$

spojitá na intervalu $\langle b_1, b_2 \rangle$.

Důkaz. Ukážeme opět jen první část tvrzení, neboť druhá je zcela analogická. Necht $x_0 \in \langle a_1, a_2 \rangle$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Budeme dokazovat, že existuje tak malé okolí bodu x_0 , že se na něm liší hodnota $\varphi(x)$ od $\varphi(x_0)$ nejvýše o ε . Označme si

$$M = \max_T |f|, \quad M_1 = \max_{x \in \langle a_1, a_2 \rangle} |s_1(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a_1, a_2 \rangle} |s_2(x)|.$$

K upravenému $\tilde{\varepsilon}$,

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2M + M_1 + M_2},$$

existuje z Věty 1.11 takové $\delta_1 > 0$, že kdykoli jsou dva body $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T$ vzdáleny o nejvýše δ_1 , tak

$$(2.8) \quad |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Protože i funkce $s_2(x)$ a $s_1(x)$ jsou spojité v x_0 , existuje jisté $\delta_2 > 0$, že

$$(2.9) \quad |s_2(x) - s_2(x_0)| \leq \tilde{\varepsilon}, \quad |s_1(x) - s_1(x_0)| \leq \tilde{\varepsilon},$$

kdykoli je x v δ_2 -okolí bodu x_0 , tj. $|x - x_0| < \delta_2$. Položíme hledané δ rovné $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Odhadněme nyní rozdíl $|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ pro x z δ -okolí bodu x_0 .

$$(2.10) \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy \right|.$$

K rozdílu přičteme a odečteme dva integrály $\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y) dy$ a $\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy \right| &= \left| \left(\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y) dy \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy \right) + \left(\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy \right) \right|. \end{aligned}$$

Podívejme se na první a poslední rozdíly. V prvním mají integrály stejnou horní mez, a proto

$$(2.11) \quad \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y) dy = \int_{s_1(x)}^{s_1(x_0)} f(x, y) dy.$$

Podobně v posledním rozdílu mají integrály stejnou dolní mez, a tak

$$(2.12) \quad \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y) dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y) dy = \int_{s_2(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y) dy.$$

Protože obecně platí následující odhad

$$\left| \int_a^b f \, dy \right| \leq \int_a^b |f| \, dy \leq \max |f| \cdot (b - a),$$

máme tak částečně odhadnut výraz (2.11) hodnotou $M |s_1(x_0) - s_1(x)|$ a výraz (2.12) hodnotou $M |s_2(x) - s_2(x_0)|$. Tím jsme dostali částečný odhad rozdílu

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &\leq M |s_1(x_0) - s_1(x)| + \left| \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y) \, dy - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y) \, dy \right| + \\ &\quad + M |s_2(x) - s_2(x_0)| \end{aligned}$$

Vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y) je $|x - x_0|$, a ta je menší než δ , speciálně menší než δ_1 . Z (2.8) pak plyne, že

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Můžeme tak pokračovat v předchozím odhadu:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &\leq M |s_1(x_0) - s_1(x)| + \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} \tilde{\varepsilon} \, dy + M |s_2(x_0) - s_2(x)| = \\ &= M |s_1(x_0) - s_1(x)| + \tilde{\varepsilon} |s_2(x) - s_1(x_0)| + M |s_2(x_0) - s_2(x)|. \end{aligned}$$

S využitím (2.9) a volby $\tilde{\varepsilon}$ dostaneme

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} (M_1 + M_2) + M \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} (2M + M_1 + M_2) = \varepsilon.$$

A tím je důkaz hotov. □

Teď, když víme, že integrály

$$\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) \, dy, \quad \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) \, dx$$

jsou spojité funkce postupně v x a v y , můžeme je integrovat podle zbývajících proměnných

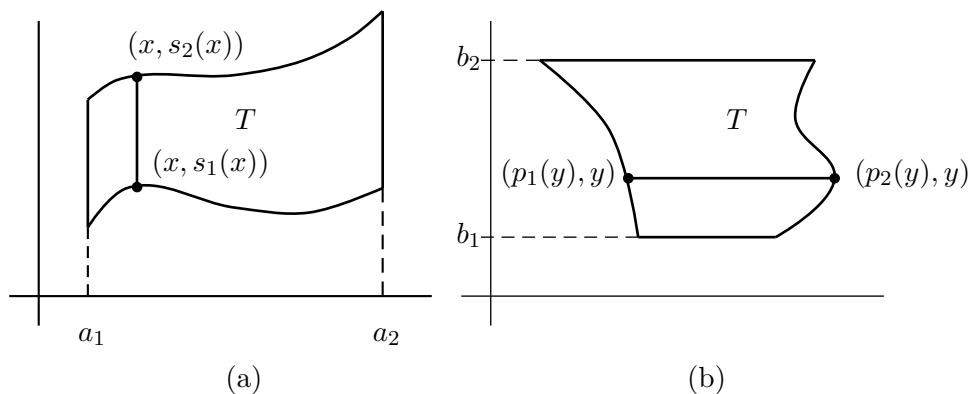
$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx, \quad \int_{b_1}^{b_2} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Rozdíl oproti integraci přes obdélník je ten, že zde nemůžeme volně prohazovat pořadí integrálů. Vnější integrály musí být vždy ty, které neobsahují ve svých mezích proměnnou. Při konkrétních výpočtech je důležité mít na paměti následující interpretaci dvojnásobné

integrace. Pro každé $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ nejprve zintegrujeme funkci $f(x, y)$ podél svislé úsečky mezi body $(x, s_1(x))$ a $(x, s_2(x))$, viz obr. 2.6(a). Dostaneme hodnotu

$$\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy.$$

Pak tuto hodnotu integrujeme přes všechny svislé úsečky, které tak vyplní celou množinu.



Obr. 2.6.

Podobně druhý typ základní oblasti vyplňujeme vodorovnými úsečkami, přes které je počítán vnitřní integrál, obr. 2.6(b).

Příklad 2.12. Nalezněte objem tělesa shora omezeného grafem funkce $f(x, y) = x + y$ a s podstavou ohraničenou křivkami

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{2}x^3.$$

Podstavu P tvoří základní oblast

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle 0, 1 \rangle, \frac{1}{2}x^3 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{x} \right\}.$$

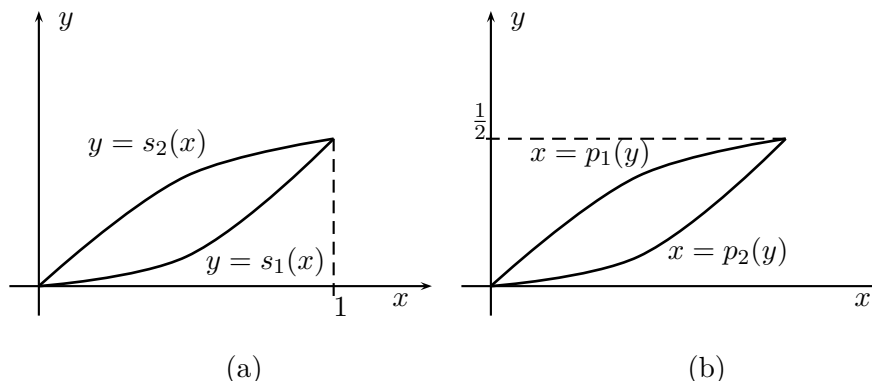
Ta je znázorněna na obr. 2.7. Vidíme, že je poněkud výjimečná. Může být totiž považována za oblast obou typů. Jednak je omezena funkcemi

$$s_1(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad \text{a} \quad s_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

viz obr. 2.7(a), nebo ji můžeme považovat za omezenou funkcemi

$$p_1(y) = (2y)^2 \quad \text{a} \quad p_2(y) = (2y)^{\frac{1}{3}},$$

viz obr. 2.7(b).



Obr. 2.7.

Každý si určitě všiml, že funkce $y = s_1(x)$ a $x = p_2(y)$ jsou navzájem inverzní. Stejně tak $s_2(x)$ a $p_1(y)$. První typ násobného integrálu je

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}x^3}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} (x+y) \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}x^3}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{8} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{8} \right) dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{1}{10} - \frac{1}{56} = \frac{81}{560}. \end{aligned}$$

Druhý typ je

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{(2y)^2}^{(2y)^{\frac{1}{3}}} (x+y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{(2y)^2}^{(2y)^{\frac{1}{3}}} dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 8y^4 - 4y^3 \right) dy = \frac{3}{20} + \frac{3}{28} - \frac{1}{20} - \frac{1}{16} = \frac{81}{560}. \end{aligned}$$

Souvislost násobných integrálů přes základní oblasti s objemem je stejná jako u obdélníků. Ověříme, že oba násobné integrály vyhovují axiomům aditivity a monotonie. To je úkol nevyžadující žádnou zvláštní invenci. Jednoduše kopírujeme důkaz obdobného tvrzení pro obdélníky (Věta 2.5). Co je však důležité, je z tohoto pohledu Věta 2.9. Podle ní zobrazení $V(f, T)$ existuje pouze jediné a tudíž se musí rovnat našim násobným integrálům:

$$V(f, T) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \left(\text{eventuelně} \int_{b_1}^{b_2} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \right),$$

v závislosti na typu základní oblasti. Obě pořadí integrace dají stejnou hodnotu. Je to opět Fubiniho věta pro tuto situaci. Výše uvedené násobné integrály se nemusí omezovat pouze na nezáporné funkce. Definujeme proto *dvojný integrál* obecné spojité funkce jako

Definice 2.13. *Nechť T je základní oblast a nechť $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dvojný integrál funkce f přes množinu T je*

$$\iint_T f = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \left(\text{event.} \int_{b_1}^{b_2} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \right)$$

pro oblast typu (a), (eventuelně pro oblast typu (b)).

V praktických výpočtech je důležité mít představu o tvaru oblasti T a na základě toho zvolit vhodné pořadí pro násobný integrál. Podle toho, co jsme dosud uvedli, by mohl vzniknout mylný dojem, že pro daný typ oblasti je možné použít jen jediné pořadí integrace. Opak je pravdou. Pořadí integrálů si můžeme zvolit zcela libovolně. Jiná věc je ale složitost výpočtu. Obecně platí, že vnější integrace podle proměnné x je výhodnější pro oblasti typu (a) a podle proměnné y pro oblasti typu (b).

Zatím jsme integrovali funkce spojitě na základní oblasti T . V mnoha případech však funkce, které potřebujeme integrovat jsou spojitě pouze ve vnitřku T a na hranici nemusí být vůbec definovány. Např. funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

je spojitá ve vnitřku jednotkového čtverce $T = \langle 0, 1 \rangle^2$. V některých hraničních bodech není definována (úsečky $\{0\} \times \langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$). Pro takovou funkci f jsme – přísně vzato – dvojný integrál nedefinovali. Abychom odstranili tuto potíž zavedeme integrál přes přes základní oblast i pro funkce spojitě pouze na vnitřku T . (Vnitřek množiny T je $T \setminus \partial T$, kde ∂T je hranice, viz [1], Kapitola 1 nebo v těchto skriptech Definice 11.1).

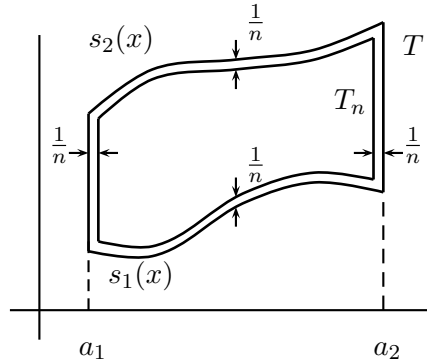
Nechť T je základní oblast např. typu (a) z obr.2.3

$$T = \left\{ (x, y) \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, s_1(x) \leq y \leq s_2(x) \right\}$$

a nechť $s_1(x) < s_2(x)$ na (a_1, a_2) . Nechť dále f je nezáporná funkce spojitá na vnitřku T . Označíme

$$T_n = \left\{ (x, y) \mid x \in \left\langle a_1 + \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n} \right\rangle, s_1(x) + \frac{1}{n} \leq y \leq s_2(x) - \frac{1}{n} \right\}.$$

Pak pro dostatečně velká n jsou T_n základní oblasti obsažené ve vnitřku T , viz obr. 2.8.



Obr. 2.8.

Oblasti T_n se zvětšují s rostoucím n , $T_n \subset T_{n+1}$, a sjednocení všech $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ dá celý vnitřek T . Funkce f je spojitá na každém T_n . Pro ni máme integrál definován, $\iint_{T_n} f$. Definujeme nyní

$$(2.13) \quad \iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f.$$

Integrál $\iint_T f$ může být nyní i nekonečný, což se v případě funkce spojitě na celém T stát nemohlo.

Je-li nyní f obecná spojitá funkce na vnitřku T (tj. už nikoli jen nezáporná), rozložíme ji už známým způsobem na kladnou a zápornou část

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+ = \max\{f, 0\}, \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Existují-li konečné oba integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$, pak položíme

$$\iint_T f = \iint_T f_+ - \iint_T f_-.$$

V opačném případě říkáme, že integrál $\iint_T f$ neexistuje.

Závěrem této kapitoly uvedeme jednoduché základní vlastnosti dvojného integrálu, které snad ani nepotřebují důkaz. Všechny vyplývají bezprostředně z definice.

Věta 2.14. *Nechť f a g jsou spojitě funkce na vnitřku základní oblasti T a necht existují $\iint_T f$ a $\iint_T g$. Pak platí*

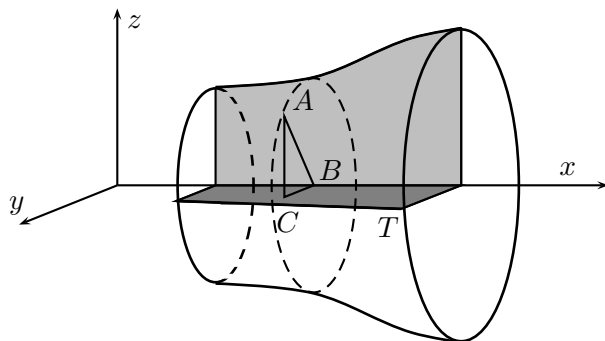
$$(i) \quad \iint_T (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_T f + \beta \iint_T g \quad \text{pro každé } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \text{Je-li } f \geq g \text{ na } T, \text{ pak } \iint_T f \geq \iint_T g.$$

Příklad 2.15. V integrálním počtu jedné proměnné jsme odvodili vzorec pro objem rotačního tělesa. Jestliže množina omezená shora grafem funkce h na intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$ rotuje kolem osy x , tak objem vzniklého tělesa je

$$V = \pi \int_{a_1}^{a_2} h^2(x) dx.$$

K témuž vzorci je možné dospět i tak, že budeme počítat objem pomocí dvojného integrálu. Situaci máme zachycenou na obr. 2.9.



Obr. 2.9.

Budeme počítat čtvrtinu celkového objemu. Ta je reprezentována částí tělesa ležícího nad množinou T . Podstava T má zápis

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \quad 0 \leq y \leq h(x) \right\}.$$

Ještě je třeba určit funkci $f(x, y)$, jejíž graf omezuje těleso nad množinou T . V obrázku máme vyznačen pravoúhlý trojúhelník ABC . Necht bod $C \in T$ má souřadnice $C = (x, y)$. Pak velikost odvěsny BC je y a velikost přepony AB je $h(x)$. Naše hledaná hodnota $f(x, y)$ je pak velikost AC . Z Pythagorovy věty plyne

$$f^2(x, y) + y^2 = h^2(x), \quad \text{tj.} \quad f(x, y) = \sqrt{h^2(x) - y^2}.$$

Nyní můžeme psát, že celkový objem V je roven

$$V = 4 \iint_T f = 4 \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{h(x)} \sqrt{h^2(x) - y^2} \, dy \, dx.$$

Pro výpočet vnitřního integrálu užijeme substituci $y = h(x) \sin t$. Takže

$$\begin{aligned} \int_0^{h(x)} \sqrt{h^2(x) - y^2} \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{h^2(x) - h^2(x) \sin^2 t} \, h(x) \cos t \, dt = h^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \\ &= h^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{\pi}{4} h^2(x). \end{aligned}$$

Dosazením do původního integrálu tak máme

$$V = 4 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\pi}{4} h^2(x) \, dx = \pi \int_{a_1}^{a_2} h^2(x) \, dx.$$

Poznámka 2.16. Povšimněme si jednoduché, ale velmi důležité interpretace dvojného integrálu z konstantní funkce rovné 1. Víme, že $\iint_T 1$ je objem tělesa s podstavou T shora omezeného rovinou $z = 1$. Tento objem je však číselně roven obsahu T . Budeme si proto pamatovat, že

$$\text{obsah}(T) = \iint_T 1.$$

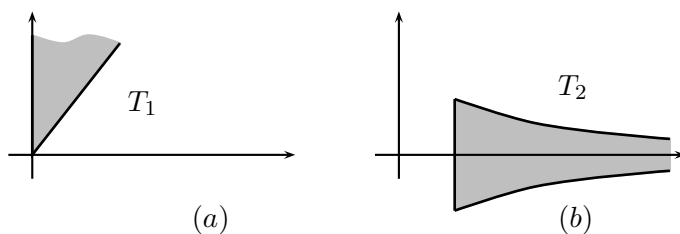
Závěrem se zastavme u otázky, jak počítat integrály přes neomezené základní oblasti. Příklady takových oblastí je např. množina

$$T_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \right\}$$

nebo

$$T_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, |y| \leq \frac{1}{x} \right\},$$

viz obr. 2.10.



Obr. 2.10.

S touto úlohou si poradíme stejně, jako v případě neomezených obdélníků.

Definice 2.17. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je neomezená základní oblast a nechť $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná na vnitřku T . Položíme $T_n = T \cap (\langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle)$. Existuje-li vlastní $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f$, řekneme, že integrál $\iint_T f$ existuje a jeho hodnota je rovna limitě*

$$\iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} f.$$

V případě obecné spojitě funkce postupujeme analogicky jako v při definici integrálu přes neomezené obdélníky. Funkci f rozložíme na kladnou a zápornou část $f = f_+ - f_-$, kde $f_+ = \max\{f, 0\}$ a $f_- = \max\{-f, 0\}$. Existují-li vlastní integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$, pak položíme

$$\iint_T f = \iint_T f_+ - \iint_T f_-.$$

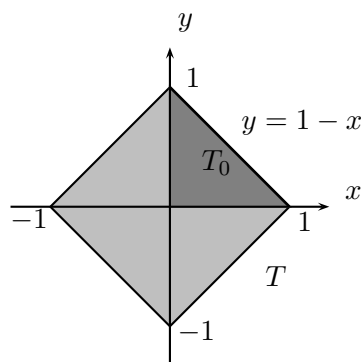
V opačném případě říkáme, že $\iint_T f$ neexistuje.

4 Cvičení.

Úloha. Vypočtěte

$$\iint_T x^2 + y^2,$$

kde T je množina omezená křivkou $|x| + |y| = 1$.



Obr. 2.11.

Řešení. V prvním kroku si musíme množinu T alespoň v hrubých rysech nakreslit. V našem případě si uvědomíme, že změna znaménka u souřadnice x nebo y nemá vliv na tvar množiny. Jinými slovy to znamená, že T je symetrická jak podle osy x , tak podle osy y . Stačí tedy zjistit její tvar v 1. kvadrantu, kde $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Zde je T omezena přímkou $x + y = 1$. Označme symbolem T_0 množinu bodů v 1. kvadrantu ležící pod přímkou $x + y = 1$. Celá množina T je pak na obr. 2.11. Rovněž hodnota integrované funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ se nezmění při záměně $x \rightarrow -x$ a $y \rightarrow -y$. Stačí tedy integrovat přes T_0 a výsledek vynásobit čtyřmi. T_0 je základní oblast omezená shora grafem funkce $y = 1 - x$ a zdola $y = 0$. Tím

$$\begin{aligned} \iint_T x^2 + y^2 &= 4 \iint_{T_0} x^2 + y^2 = 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2 \, dy \, dx \\ &= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Úloha. Změňte pořadí integrace v integrálu

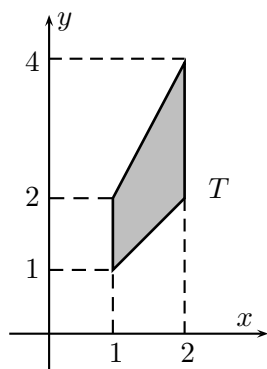
$$\int_1^2 \int_x^{2x} f \, dy \, dx.$$

Řešení. Zjistíme nejprve, přes jakou množinu se vlastně integruje. Z vnějšího integrálu vidíme, že

$$1 \leq x \leq 2.$$

Z vnitřního pak

$$x \leq y \leq 2x.$$



Obr. 2.12.

Tyto dvě podmínky určují základní oblast T zobrazenou na obr. 2.12.

Při změně pořadí bude vnější integrace podle proměnné y . Průmět T do osy y je interval $\langle 1, 4 \rangle$. Proto bude první integrál v mezích od 1 do 4. Ale pozor! Je-li $y \in \langle 1, 2 \rangle$,

pak T je omezeno zleva přímkou $x = 1$ a zprava přímkou $x = y$. V našem označení to jsou funkce $p_1(y) = 1$ a $p_2(y) = y$. Pro $y \in \langle 2, 4 \rangle$ je T omezeno grafy jiných funkcí: $x = y/2$ a $x = 2$, tj.

$$p_1(y) = \frac{y}{2} \quad \text{a} \quad p_2(y) = 2.$$

Musíme tak integraci přes y rozdělit do dvou integrálů; první pro $y \in \langle 1, 2 \rangle$ a druhý pro $y \in \langle 2, 4 \rangle$. Výsledek je pak

$$\int_1^2 \int_x^{2x} f \, dy \, dx = \int_1^2 \int_1^y f \, dx \, dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f \, dx \, dy.$$

Úloha. Vypočítejte hmotnost čtverce se stranou $2a$, je-li jeho plošná hustota úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu a její maximum je 1.

Řešení. Čtverec označený T si umístíme tak, aby jeho střed byl v počátku souřadnic a strany rovnoběžné s osami. Pak

$$T = \langle -a, a \rangle \times \langle -a, a \rangle.$$

Protože hustota $\rho(x, y)$ je úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu, musí mít tvar $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, kde k je konstanta úměrnosti. Navíc víme, že maximální hodnota ρ je 1. Ta se zřejmě nabývá v nejvzdálenějších bodech, což jsou právě vrcholy $(\pm a, \pm a)$. Tím

$$1 = \rho(\pm a, \pm a) = k(a^2 + a^2) = 2ka^2, \quad \text{tj. } k = \frac{1}{2a^2}.$$

Hmotnost m je tak možno vyjádřit

$$m = \iint_T \rho = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{2a^2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \frac{4}{2a^2} \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 \, dy \, dx = \frac{4}{3} a^2.$$

Úloha. Zjistěte těžiště základní oblasti M omezené shora parabolou $y = \sqrt{2px}$, $x \in \langle 0, 2p \rangle$ a osou x . Plošná hustota je $\rho = 1$.

Řešení. Základní oblast M je popsána

$$M = \left\{ (x, y) \mid x \in \langle 0, 2p \rangle, 0 \leq y \leq \sqrt{2px} \right\}.$$

Pro souřadnice těžiště (x_t, y_t) platí

$$x_t = \frac{\iint_M x \rho}{\iint_M \rho}, \quad y_t = \frac{\iint_M y \rho}{\iint_M \rho}.$$

Musíme tak vypočítat všechny tři dvojný integrály.

$$\begin{aligned}\iint_M x\rho &= \int_0^{2p} \int_0^{\sqrt{2px}} x \, dy \, dx = \int_0^{2p} \sqrt{2px}^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{16}{5}p^3, \\ \iint_M y\rho &= \int_0^{2p} \int_0^{\sqrt{2px}} y \, dy \, dx = \int_0^{2p} \frac{1}{2} 2px \, dx = 2p^3 \\ \iint_M 1 &= \int_0^{2p} \int_0^{\sqrt{2px}} 1 \, dy \, dx = \int_0^{2p} \sqrt{2px} \, dx = \frac{8}{3}p^2.\end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit do vztahů pro souřadnice těžiště a dostáváme, že těžiště množiny M je bod $(\frac{6}{5}p, \frac{3}{4}p)$.

V následujících příkladech vypočtete dvojný integrály přes zadané základní oblasti.

1. $\iint_T 1$ T je omezena křivkami $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$,
2. $\iint_T \left(\frac{x}{y}\right)^2$ T je omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$,
3. $\iint_T x^2 + y$ T je omezena křivkami $y = x^2$, $x = y^2$,
4. $\iint_T 2x + y$ T je omezena křivkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$,
5. $\iint_T \cos(x + y)$ T je omezena křivkami $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$,
6. $\iint_T x^2 + y^2$ T je omezena křivkami $y = 0$, $y = 1 - x$, $y = 1 + x$,
7. $\iint_T e^{\frac{x}{y}}$ T je omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$,
8. $\iint_T \sqrt{4x^2 - y^2}$ T je omezena křivkami $y = 0$, $x = 1$, $y = x$,
9. $\iint_T x$ T je omezena křivkami $y = 2x - 1$, $y = 4 - (1 - x)^2$,
10. $\iint_T \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}}$ T je omezena křivkami $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$.

V následujících integrálech změňte pořadí integrace:

$$11. \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f \, dx \, dy$$

$$12. \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$$

$$13. \int_0^a \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f \, dy \, dx$$

$$14. \int_0^2 \int_{2x}^{6-x} f \, dy \, dx$$

$$15. \int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f \, dx \, dy$$

$$16. \int_0^\pi \int_0^{\sin x} f \, dy \, dx$$

$$17. \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f \, dy \, dx$$

$$18. \int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f \, dy \, dx$$

$$19. \int_0^1 \int_0^{x^2} f \, dy \, dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f \, dy \, dx$$

$$20. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f \, dx \, dy + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f \, dx \, dy$$

$$21. \int_{-3}^0 \int_{-x}^3 f \, dy \, dx + \int_0^3 \int_x^3 f \, dy \, dx$$

$$22. \int_0^2 \int_0^{2x^2} f \, dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{10-x} f \, dy \, dx + \int_4^7 \int_{x-4}^{10-x} f \, dy \, dx$$

Vypočtěte následující integrály přes neomezené oblasti:

$$23. \iint_T \frac{1}{x^p y^q},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, xy \geq 1\}$$

$$24. \iint_T e^{-(x+y)},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$

$$25. \iint_T \frac{1 - \ln x}{y^3},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq y\}$$

$$26. \iint_T e^{-y^2},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$

$$\begin{aligned}
27. \iint_T x e^{-y} \frac{\sin y}{y}, & \quad T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \right\} \\
28. \iint_T \frac{y}{1+x^2}, & \quad T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right\}
\end{aligned}$$

V následujících příkladech vypočtete souřadnice těžiště daných homogenních množin, tj. hustota $\rho = 1$:

29. Množina T omezená křivkami $y = 2x^3$ a $y^2 = 4x$.

30. Množina T omezená parabolou $y = 2x - 3x^2$ a osou x .

31. Nechť K je polovina kruhu s poloměrem R , $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$. Označme $A = (R, 0)$ a $B = (-R, 0)$. Zavěsíme-li volně půlkruh v bodě A , vypočtete, jaký úhel α bude svírat úsečka AB se svislým směrem. Plošná hustota je $\rho = 1$.

32. Nechť množina A je omezena parabolou $y = 1 - ax^2$, $a > 0$ a osou x . Určete hodnotu parametru b tak, aby parabola $y = bx^2$ rozdělila množinu A na dvě části stejného obsahu.

Výsledky.

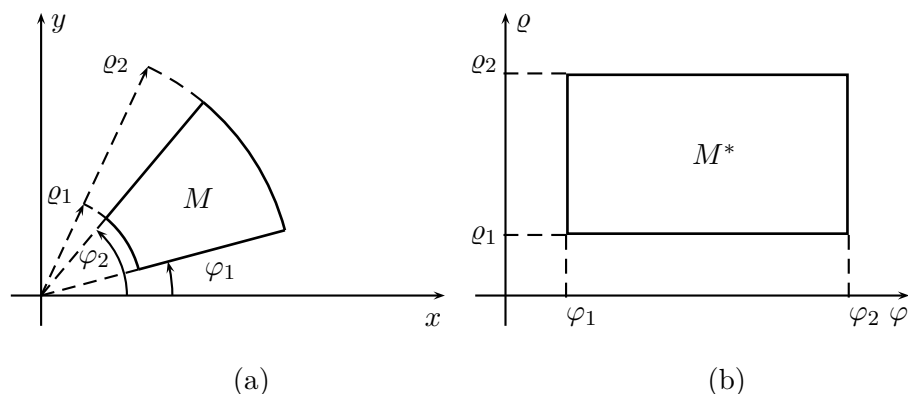
1. $\frac{64}{3}$; 2. $\frac{9}{4}$; 3. $\frac{33}{140}$; 4. $\frac{27}{2}$; 5. -2 ; 6. $\frac{1}{3}$; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9}$; 9. 0; 10. $4a$;
11. $\int_0^1 \int_{x^2}^x f \, dy \, dx$; 12. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f \, dx \, dy$; 13. $\int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f \, dx \, dy$; 14. $\int_0^4 \int_0^{y/2} f \, dx \, dy +$
 $+ \int_4^6 \int_0^{6-y} f \, dx \, dy$; 15. $\int_{-1}^0 \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f \, dx \, dy + \int_0^8 \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f \, dy \, dx$; 16. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f \, dx \, dy$;
17. $\int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f \, dx \, dy + \int_0^a \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} \right) f \, dx \, dy$; 18. $\int_0^1 \int_y^{2-y} f \, dx \, dy$;
19. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f \, dx \, dy$; 20. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{-x}^x f \, dy \, dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$; 21. $\int_0^3 \int_{-y}^y f \, dx \, dy$;
22. $\int_0^3 \int_{\sqrt{y/2}}^{y+4} f \, dx \, dy + \int_3^8 \int_{\sqrt{y/2}}^{10-y} f \, dx \, dy$; 23. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p > q$, $q > 1$; 24. $\frac{1}{2}$; 25. $-\frac{\ln 2}{4}$;
26. $\frac{1}{2}$; 27. $\frac{1}{16}$; 28. $\frac{\pi}{8}$; 29. $(\frac{12}{15}, \frac{6}{7})$; 30. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{15})$; 31. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3\pi}$, $\alpha \approx 23^\circ$; 32. $b = 3a$.

Kapitola 3

Substituce v dvojném integrálu.

Jsou dvě základní metody při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné: substituce a metoda per partes. Obojí mají svoje analogie ve vícerozměrných případech. V této kapitole budeme studovat co se stane s integrálem, když obvyklé kartézské souřadnice zaměníme za jiné. Začneme s jednoduchým příkladem.

Příklad 3.1. Máme vypočítat $\iint_M f$, kde množina M je na obr. 3.1(a). M sama je sice základní oblast, ale ať už si zvolíme pořadí integrace jakkoli, hledaný integrál bude vždy součtem tří dvojných integrálů.



Obr. 3.1.

Bod v rovině však můžeme popsat i jinak než kartézskými souřadnicemi (x, y) . V mnoha případech je výhodné užít tzv. *polární souřadnice*. Pomocí nich je bod určen dvěma parametry: vzdáleností ϱ od počátku a orientovaným úhlem φ , který svírá polohový vektor daného bodu s kladnou částí osy x , viz. obr. 3.2.

Vztah mezi (x, y) a (ϱ, φ) je dán následovně

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \varphi \\y &= \varrho \sin \varphi, \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,\end{aligned}$$

což ihned plyne z výše zmíněného obrázku.

V polárních souřadnicích má množina M obzvláště jednoduchý tvar

$$M^* = \{(\varrho, \varphi) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2\},$$

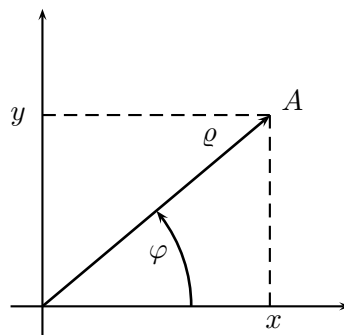
viz obr. 3.1(b). Je mnohem výhodnější integrovat přes obdélník M^* než přes původní M . Jak se ale změní dvojný integrál?

Na transformaci souřadnic je možné pohlížet jako na jisté zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ z roviny do roviny. V případě polárních souřadnic je možné tuto transformaci zapsat

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

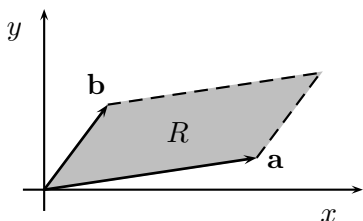
Hodnota $\Phi(\varrho, \varphi)$ je dvojrozměrný vektor. Pro úsporu místa ho píšeme jako vektor sloupcový. Význam předchozí rovnice je lehce rozpoznatelný: máme-li bod A určen parametry (ϱ, φ) , pak hodnota $\Phi(\varrho, \varphi)$ udává kartézské souřadnice bodu A .

V následujícím textu se budeme zabývat nejen přechodem k polárním souřadnicím, ale obecným zobrazením Φ představujícím obecnou transformaci souřadnic.



Obr. 3.2.

1 Geometrický význam determinantu.



Obr. 3.3.

Z lineární algebry víme, že hodnota determinantu rozhoduje o tom, zda příslušná matice je regulární či singulární. Z takového hlediska je důležité pouze, je-li determinant nulový nebo nenulový. Teď nás bude zajímat i hodnota a její význam.

Mějme v rovině dva vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Množinu

$$R = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

nazveme rovnoběžníkem generovaným vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} , viz obr. 3.3. Jeho obsah určuje následující tvrzení

Tvrzení 3.2. *Necht $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ jsou vektory v \mathbb{R}^2 . Pak obsah rovnoběžníku generovaného vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} je roven*

$$\text{obsah}(R) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Důkaz. Obsah R je velikost vektorového součinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

$$\text{obsah}(R) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\sin \theta|,$$

kde θ je úhel mezi vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Vyjádříme $\sin \theta$ pomocí $\cos \theta$, a ten pak pomocí skalárního součinu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \text{obsah}(R) &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dosadíme za normy a skalární součin jejich vyjádření ve složkách $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ a upravíme

$$\begin{aligned} \text{obsah}(R) &= ((a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2)^{\frac{1}{2}} = (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((a_1 b_2 - a_2 b_1)^2)^{\frac{1}{2}} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

□

V právě dokázaném vzorci byly složky vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} zapsány v matici jako sloupce. Napíšeme-li je do řádků, vznikne matice transponovaná k původní. Avšak determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní. Stejně tak můžeme prohodit řádky nebo sloupce v dané matici. Determinant sice změní znaménko, ale celý výraz je v absolutní hodnotě, takže na obsahu rovnoběžníku se žádná z těchto změn neprojeví.

Pro další bude nutné si připomenout jistý pojem z lineární algebry, a to pojem *lineárního zobrazení*. I když nás budou zajímat pouze prostory \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 , definici uvedeme obecně pro \mathbb{R}^n .

Definice 3.3. Zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *lineární*, jestliže platí

$$\Phi(s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = s\Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b})$$

pro každé vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a každé skaláry $s, t \in \mathbb{R}$. Je-li zobrazení ve tvaru

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \mathbf{q},$$

kde Φ_0 je lineární a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, pak se nazývá *afinní*.

Z definice vyplývá, že afinní zobrazení se liší od lineárního o konstantní posun \mathbf{q} . V případě $n = 1$ je každé lineární zobrazení funkce typu

$$\Phi(x) = kx.$$

Grafem je tedy přímka, která vždy prochází počátkem. Afinní zobrazení pro $n = 1$ je funkce tvaru

$$\Phi(x) = kx + q$$

a jejím grafem je obecná přímka v rovině s výjimkou rovnoběžky s osou y .

Platí, že každé lineární zobrazení v \mathbb{R}^n je reprezentováno (tj. zapsáno) jistou maticí \mathbb{A} typu $n \times n$:

$$(3.1) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Rozepsáno ve složkách

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix},$$

kde a_{ij} jsou prvky matice \mathbb{A} .

Mluvit o lineárních zobrazeních je tedy to samé jako mluvit o maticích. Stejně tak každé afinní zobrazení je tvaru

$$(3.2) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbb{A}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q},$$

kde matice \mathbb{A}_0 reprezentuje lineární část Φ_0 zobrazení Φ . Rozepsáno opět do složek to vypadá následovně

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + q_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + q_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + q_n \end{pmatrix},$$

kde q_i jsou složky vektoru \mathbf{q} . Pro úplnost můžeme připomenout, jak se reprezentující matice sestaví. Označme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ standardní bázi v \mathbb{R}^n . Vektory $\Phi(\mathbf{e}_1), \Phi(\mathbf{e}_2), \dots, \Phi(\mathbf{e}_n)$ tvoří pak sloupce reprezentující matice \mathbb{A} .

Než budeme pokračovat, zavedeme si jistou úmluvu v označení.

Úmluva. Je-li $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení, pak symbolem $\det \Phi$ budeme rozumět determinant matice \mathbb{A} reprezentující Φ . V případě afinního zobrazení Φ pak $\det \Phi$ bude značit determinant matice \mathbb{A}_0 příslušící lineární části Φ , viz (3.2).

Mějme lineární zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rovnoběžník R generovaný vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Jak vypadá obraz $\Phi(R)$? Rovnoběžník R se skládá z bodů tvaru

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad s, t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Díky linearitě můžeme obraz takového bodu psát jako

$$\Phi(s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = s\Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b}).$$

Odtud

$$\Phi(R) = \left\{ s\Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b}) \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle \right\},$$

což je rovnoběžník generovaný vektory $\Phi(\mathbf{a})$ a $\Phi(\mathbf{b})$.

Tvrzení 3.4. *Nechť $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je afinní zobrazení a nechť R je rovnoběžník generovaný vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Pak*

$$\text{obsah } \Phi(R) = |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(R).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení Φ je pouze lineární. Konstantní posun totiž nemění obsah množiny. Nechť reprezentující matice zobrazení Φ má tvar

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ generují rovnoběžník R . Podle Tvrzení 3.2 je

$$\text{obsah}(R) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Podívejme se ještě, jak vypadají vektory $\Phi(\mathbf{a})$ a $\Phi(\mathbf{b})$.

$$\Phi(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}a_1 + \varphi_{12}a_2 \\ \varphi_{21}a_1 + \varphi_{22}a_2 \end{pmatrix},$$

a podobně

$$\Phi(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}b_1 + \varphi_{12}b_2 \\ \varphi_{21}b_1 + \varphi_{22}b_2 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočítáme, čemu se rovná součin $|\det \Phi| \cdot \text{obsah}(R)$.

$$\begin{aligned} |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(R) &= \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \det \left[\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}a_1 + \varphi_{12}a_2 & \varphi_{11}b_1 + \varphi_{12}b_2 \\ \varphi_{21}a_1 + \varphi_{22}a_2 & \varphi_{21}b_1 + \varphi_{22}b_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Vidíme, že sloupce v poslední matici jsou tvořeny vektory $\Phi(\mathbf{a})$ a $\Phi(\mathbf{b})$. Podle Tvrzení 3.2 je determinant takové matice roven obsahu rovnoběžníku generovaného $\Phi(\mathbf{a})$ a $\Phi(\mathbf{b})$, tj. obsahu $\Phi(R)$. \square

Poznámka 3.5. Je-li $\det \Phi = 0$, znamená to, že hodnota reprezentující matice je buď 0 nebo 1 (musí být menší než 2). Hodnota je ale dimenze obrazu $\Phi(\mathbb{R}^2)$. Vidíme, že v tomto případě se rovnoběžník zobrazí buď do bodu nebo na nějakou úsečku. V obou případech je jeho obsah nulový, což souhlasí s obsahem Tvrzení 3.4.

Právě dokázané tvrzení lze napsat ve formě, která začíná připomínat náš konečný cíl, a to změnu souřadnic ve dvojném integrálu. Obsahy R a $\Phi(R)$ jsou vlastně dvojně integrály z konstantní funkce 1 přes příslušné množiny. Ukázali jsme tak, že

$$\iint_{\Phi(R)} 1 = \iint_R |\det \Phi|.$$

Naším plánem je postupné zobecňování této rovnice až ke konečnému vzorci pro substituci.

První krok spočívá v tom, že místo rovnoběžníku R uvažujeme základní oblast.

Věta 3.6. *Nechť T je základní oblast a nechť $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je afinní zobrazení. Pak*

$$\text{obsah } \Phi(T) = |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T),$$

tj. v integrálním tvaru

$$\iint_{\Phi(T)} 1 = \iint_T |\det \Phi|.$$

Poznámka 3.7. Bedlivý čtenář by teď mohl oprávněně namítnout, že je tu cosi v nepořádku. Dvojný integrál, jak jsme ho zavedli, je pouze přes základní oblast. Množina T je základní oblast, ale co $\Phi(T)$? Skutečně se může stát, že zobrazení Φ deformuje a natočí oblast T tak, že $\Phi(T)$ nebude základní oblastí. Nicméně vždy je možné množinu $\Phi(T)$ rozdělit na konečně mnoho vhodných částí, které už základními oblastmi budou. Tím i integrál přes $\Phi(T)$ bude součet integrálů přes příslušné části množiny $\Phi(T)$.

Důkaz. Nejprve se podíváme na případ $\det \Phi = 0$. Jak už bylo zmíněno v Poznámce 3.5, znamená to, že se oblast T „zploštila“ buď do úsečky nebo dokonce do bodu. V obou případech je tvrzení Věty 3.6 splněno. Zbývá případ $\det \Phi \neq 0$, tj. zobrazení Φ je prosté. Tvrzení věty dokážeme pro oblast jednoho typu, např. (a) z obr. 2.3. Pro typ (b) je důkaz zcela analogický.

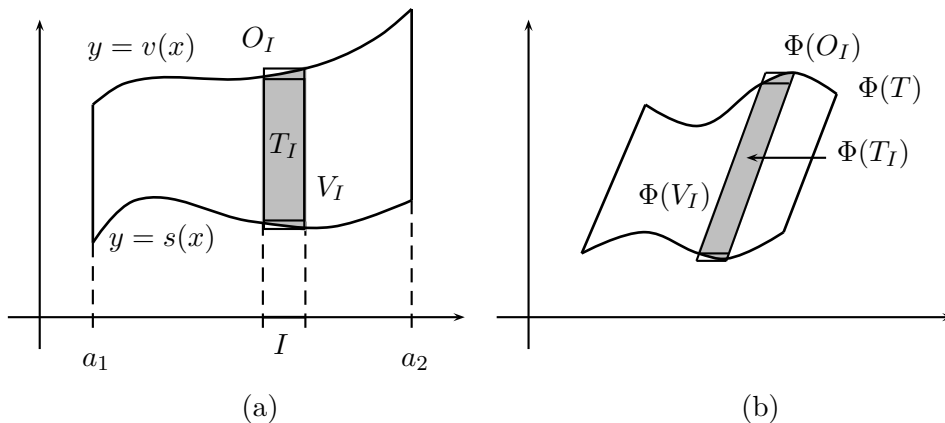
Nechť

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, s_1(x) \leq y \leq s_2(x) \right\}$$

a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme si dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$ a zavedme následující značení. Nechť $I \in \mathcal{D}$ a uvažme tu část oblasti T ležící nad I . Označíme-li ji symbolem T_I , pak její formální zápis je $T_I = T \cap (I \times \mathbb{R})$. Dále O_I a V_I je postupně obdélník opsaný a vepsaný množině T_I . Takže

$$(3.3) \quad V_I \subset T_I \subset O_I,$$

viz obr. 3.4(a).



Obr. 3.4.

Ze vztahu (3.3) nám vyplývají dvě věci. Za prvé

$$\text{obsah}(V_I) \leq \text{obsah}(T_I) \leq \text{obsah}(O_I),$$

a tedy vynásobením těchto nerovností kladným číslem $|\det \Phi|$

$$(3.4) \quad |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(V_I) \leq |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \leq |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(O_I).$$

Za druhé, zobrazíme-li celou situaci pomocí Φ , tak dostaneme

$$\Phi(V_I) \subset \Phi(T_I) \subset \Phi(O_I),$$

viz obr. 3.4(b). Tím i

$$\text{obsah } \Phi(V_I) \leq \text{obsah } \Phi(T_I) \leq \text{obsah } \Phi(O_I).$$

Obsahy $\Phi(V_I)$ a $\Phi(O_I)$ umíme spočítat podle Tvzení 3.4.

$$\begin{aligned} \text{obsah } \Phi(V_I) &= |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(V_I) \\ \text{obsah } \Phi(O_I) &= |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(O_I). \end{aligned}$$

Můžeme tak odhadnout zdola i shora obsah množiny $\Phi(T_I)$

$$(3.5) \quad |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(V_I) \leq \text{obsah } \Phi(T_I) \leq |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(O_I).$$

Protože funkce $s_1(x)$ a $s_2(x)$ jsou spojitě na $\langle a_1, a_2 \rangle$, existuje dělení \mathcal{D} tohoto intervalu dostatečně jemné, aby na každém $I \in \mathcal{D}$ byl rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou funkce $s_1(x)$ (a stejně i funkce $s_2(x)$) tak malý, jak si přejeme. My si přejeme, aby byl menší než $\frac{\varepsilon}{2|\det \Phi|(a_2 - a_1)}$. Jinými slovy to znamená, že

$$\text{vka}(O_I) - \text{vka}(V_I) < 2 \frac{\varepsilon}{2|\det \Phi|(a_2 - a_1)} = \frac{\varepsilon}{|\det \Phi|(a_2 - a_1)}.$$

Z toho ovšem vyplývá odhad pro rozdíl obsahů O_I a V_I .

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{obsah}(O_I) - \text{obsah}(V_I) &= \left(\text{vka}(O_I) - \text{vka}(V_I) \right) \text{dlka}(I) \\ &< \frac{\varepsilon}{|\det \Phi|(a_2 - a_1)} \text{dlka}(I). \end{aligned}$$

Podíváme-li se pozorně na vztahy (3.4) a (3.5), zjistíme, že obě čísla

$$|\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \quad \text{a} \quad \text{obsah } \Phi(T_I)$$

jsou kontrolována zdola i shora stejnými hodnotami, tj. leží ve stejném intervalu. Délka tohoto intervalu je díky (3.6)

$$|\det \Phi| \cdot \text{obsah}(O_I) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(V_I) < \frac{\varepsilon}{a_2 - a_1} \text{dlka}(I).$$

Proto i hodnoty „ $\text{obsah } \Phi(T_I)$ “ a „ $|\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I)$ “ se od sebe liší pouze následovně

$$(3.7) \quad \left| \text{obsah } \Phi(T_I) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \right| \leq \frac{\varepsilon}{a_2 - a_1} \text{dlka}(I).$$

Předchozí nerovnosti (3.7) platí pro každý prvek I dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$. To nyní využijeme k završení celého důkazu. Zřejmě platí, že $\text{obsah}(T) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \text{obsah}(T_I)$. Protože Φ je prosté, tak také $\text{obsah } \Phi(T) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \text{obsah } \Phi(T_I)$. Takže

$$\begin{aligned} \left| \text{obsah } \Phi(T) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T) \right| &= \left| \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\text{obsah } \Phi(T_I) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \text{obsah } \Phi(T_I) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \right|. \end{aligned}$$

S uvažováním (3.7) můžeme pokračovat v odhadování

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \text{obsah } \Phi(T_I) - |\det \Phi| \cdot \text{obsah}(T_I) \right| &\leq \sum_{I \in \mathcal{D}} \varepsilon \frac{1}{a_2 - a_1} \text{dlka}(I) = \\ &= \frac{\varepsilon}{a_2 - a_1} \sum_{I \in \mathcal{D}} \text{dlka}(I) = \frac{\varepsilon}{a_2 - a_1} (a_2 - a_1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

V důsledku libovolnosti volby čísla ε tak dostáváme dokazované tvrzení. \square

2 Jakobián.

V předchozí části jsme zjistili, jak vypočítat obsah oblasti zobrazené afinním zobrazením Φ . V dalším již opustíme omezující požadavek afinity a budeme vyšetřovat, jak se chová obsah při mnohem obecnějším Φ . Následující definice uvádí základní pojem celé kapitoly — pojem jakobiánu zobrazení.

Definice 3.8. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení,*

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Jestli všechny složky $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ mají spojité první parciální derivace podle všech proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , říkáme, že zobrazení Φ je třídy C^1 na G .

Je-li Φ třídy C^1 (na G), pak matice

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*se nazývá **Jacobiho matice** zobrazení Φ .*

Funkce

$$\Delta_\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = |\det J_\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)|$$

*se nazývá **jakobián** zobrazení Φ .*

Je-li T základní oblast, řekneme, že Φ je třídy C^1 na T , když existuje otevřená množina G obsahující T , na níž je Φ třídy C^1 .

I když máme pojem Jacobiho matice a jakobiánu definován obecně pro zobrazení n -rozměrného prostoru, nás bude pouze zajímat případ $n = 2$ a $n = 3$. Význam Jacobiho matice spočívá v tom, že pomocí ní aproximujeme složitou funkční závislost jednodušší.

Typická (matematická) ukázka aproximace je rozvoj funkce do Taylorovy řady, přičemž si z celé řady ponecháváme pouze první dva členy. Např.

$$(3.8) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x - x_0),$$

kde $R(x - x_0)$ je chyba tohoto nahrazení. Funkce

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

je afinní a v malém okolí bodu x_0 nahrazuje přesné chování f . Ve vícerozměrném případě roli derivace $f'(x_0)$ přebírá právě Jacobiho matice. Je-li $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ daný bod, pak v okolí tohoto bodu platí, že zobrazení Φ lze vyjádřit

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_0) + J_\Phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Výraz

$$(3.9) \quad \Phi(\mathbf{x}_0) + J_\Phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

je afinní zobrazení, které aproximuje původní zobrazení Φ s chybou $\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Je-li původní zobrazení Φ afinní, tj. $\Phi = \mathbb{A}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}$, pak Jacobiho matice není nic jiného než matice \mathbb{A}_0 , $J_\Phi = \mathbb{A}_0$. V tom případě je příslušný jakobián roven konstantní funkci

$$(3.10) \quad \Delta_\Phi = |\det \mathbb{A}_0| = |\det \Phi|.$$

Příklad 3.9. Necht $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má předpis

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

a necht Q je čtverec o straně ε , $Q = \langle 1 - \varepsilon, 1 \rangle \times \langle 0, \varepsilon \rangle$, viz obr. 3.5(a). Za prvé zjistíme, co je přesně množina $\Phi(Q)$. Na obr. 3.5(a) máme čtverec Q s označenými vrcholy $ABCD$. Body na straně AB jsou tvaru $(t, 0)$, kde $t \in \langle 1 - \varepsilon, 1 \rangle$. Pro ně je

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a tedy obraz úsečky AB je úsečka na ose x s krajními body $(1 - \varepsilon)^2$ a 1 (body A' a B' na obr.3.5(b)). Dále, na straně BC leží body tvaru $(1, t)$, $t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$. Tím

$$\Phi(1, t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

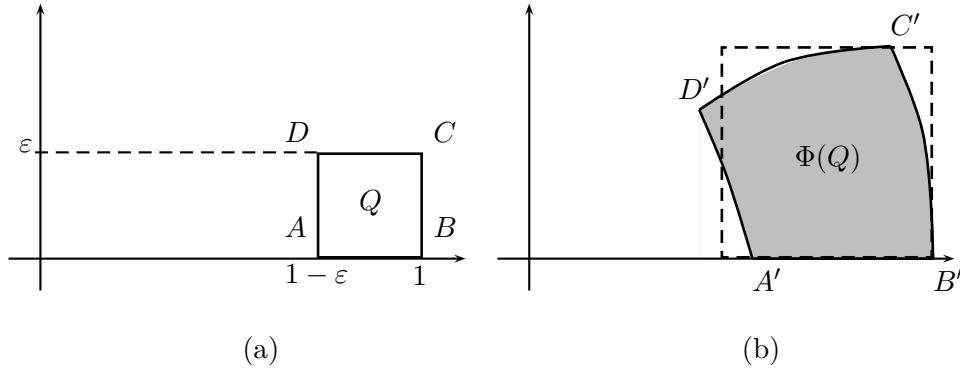
Jedná se o parametrický zápis oblouku paraboly $y = 2\sqrt{1 - x}$. Proto se úsečka BC převede na parabolický oblouk $B'C'$. Zcela stejně postupujeme pro zbylé strany. Body na úsečce CD jsou tvaru (t, ε) pro $t \in \langle 1 - \varepsilon, 1 \rangle$. Takže

$$\Phi(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} t^2 - \varepsilon^2 \\ 2t\varepsilon \end{pmatrix}.$$

To představuje parametrický zápis části paraboly $y = 2\varepsilon\sqrt{x + \varepsilon^2}$. Na obrázku je to oblouk $C'D'$. Zbývající strana DA obsahuje body typu $(1 - \varepsilon, t)$ pro $t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$, a tak

$$\Phi(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)^2 - t^2 \\ 2t(1 - \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Je to oblouk $D'A'$ na parabole $y = 2(1 - \varepsilon)\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 - x}$. Množina $\Phi(Q)$ je znázorněna na obr. 3.5(b) plnou čarou.



Obr. 3.5.

Nahradíme nyní Φ na čtverci Q afinním přiblížením. Necht $(x_0, y_0) \in Q$ je pevně zvolený bod. Položíme

$$\Phi_0(x, y) = \Phi(x_0, y_0) + J_\Phi(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Bod (x_0, y_0) může být např. jeden z vrcholů čtverce nebo jeho střed nebo jakýkoli jiný bod. Zvolíme si $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (tj. vrchol B). Protože víme, že obraz čtverce při afinním zobrazení bude rovnoběžník, stačí zjistit, kam se zobrazí vrcholy A , B , C a D . Nejprve však musíme znát přesný tvar Φ_0 . Jacobiho matice je

$$J_\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) &= \Phi(1, 0) + J_\Phi(1, 0) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dosazením tak snadno zjistíme, že

$$\Phi_0(A) = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Phi_0(D) = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

$\Phi_0(Q)$ je čtverec znázorněný na obr. 3.5(b) přerušovanou čarou.

Z předešlého obrázku je zcela jasné, že bude-li se čtverec Q zmenšovat ($\varepsilon \rightarrow 0$), bude rozdíl mezi množinami $\Phi(Q)$ a $\Phi_0(Q)$ stále nepatrnější, a tudíž bude takový i rozdíl mezi jejich obsahy. Detailnějším rozбором velikosti chyby aproximace je možné ukázat následující Tvrzení, jehož důkaz zde však nebudeme uvádět.

Tvrzení 3.10. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast a nechť $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 na T . Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že kdykoli \mathcal{D} je dělení oblasti T s normou $\|\mathcal{D}\| < \delta$, pak pro každé $R \in \mathcal{D}$ platí*

$$\left| \text{obsah } \Phi(R) - \text{obsah } \Phi_R(R) \right| < \varepsilon \text{ obsah}(R),$$

kde Φ_R je afinní aproximace zobrazení Φ v okolí bodu $\mathbf{x}_R \in R$, tj.

$$\Phi_R(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_R) + J_\Phi(\mathbf{x}_R)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_R).$$

V tuto chvíli již máme k dispozici všechny pojmy a všechna fakta potřebná k důkazu dalšího kroku v cestě za obecným vzorcem pro transformaci souřadnic.

Věta 3.11. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast a nechť $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy C^1 prosté na T . Pak*

$$\text{obsah } \Phi(T) = \iint_T \Delta_\Phi,$$

tj. v integrální formě

$$\iint_{\Phi(T)} 1 = \iint_T \Delta_\Phi.$$

Důkaz. Budeme odhadovat velikost rozdílu

$$\left| \text{obsah } \Phi(T) - \iint_T \Delta_\Phi \right|.$$

Cílem je ukázat, že tento rozdíl je libovolně malý. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Použijeme ho pro dva různé účely. Za prvé, protože Φ je třídy C^1 , je funkce Δ_Φ spojitá na T . Podle Věty 1.11 je dokonce stejnoměrně spojitá na T . Existuje tedy $\delta_1 > 0$, že

$$|\Delta_\Phi(\mathbf{x}) - \Delta_\Phi(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon,$$

kdykoli body $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in T$ mají vzdálenost menší než δ_1 . Za druhé, Tvrzení 3.10 k témuž ε dává $\delta_2 > 0$ takové, že každé dělení s normou menší než δ_2 má vlastnost popsanou v uvedeném Tvrzení. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Toto δ se tak bude hodit pro obě situace.

Nechť \mathcal{D} je dělení oblasti T s normou $\|\mathcal{D}\| < \delta$. V každém prvku $R \in \mathcal{D}$ zvolme pevně bod $\mathbf{x}_R \in R$. Na každém takovém R aproximujeme zobrazení Φ afinním zobrazením Φ_R tvaru

$$\Phi_R(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_R) + J_\Phi(\mathbf{x}_R)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_R).$$

Odtud a z (3.10) vyplývá, že jakobián Δ_{Φ_R} tohoto afinního zobrazení Φ_R je hodnota

$$(3.11) \quad \Delta_{\Phi_R} = |\det \Phi_R| = \Delta_\Phi(\mathbf{x}_R).$$

Volba δ nám zaručuje platnost těchto dvou odhadů:

- (i) $|\text{obsah } \Phi(R) - \text{obsah } \Phi_R(R)| < \varepsilon \text{ obsah}(R)$ (Tvzení 3.10)
- (ii) $|\Delta_\Phi(\mathbf{x}) - \Delta_\Phi(\mathbf{x}_R)| < \varepsilon$ pro každé $\mathbf{x} \in R$ (Věta 1.11).

Protože Φ je prosté na T , platí

$$\text{obsah } \Phi(T) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \text{obsah } \Phi(R).$$

Nyní odhadujeme:

$$(3.12) \quad \left| \text{obsah } \Phi(T) - \iint_T \Delta_\Phi \right| = \left| \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\text{obsah } \Phi(R) - \iint_R \Delta_\Phi \right) \right| \leq \\ \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \left| \text{obsah } \Phi(R) - \iint_R \Delta_\Phi \right|.$$

Teď provedeme malé odbočení. Z Věty 3.6 víme, že pro afinní zobrazení Φ_R platí

$$\text{obsah } \Phi_R(R) = \iint_R |\det \Phi_R| = \iint_R \Delta_{\Phi_R}.$$

Použitím (3.11) dostáváme

$$\text{obsah } \Phi_R(R) = \iint_R \Delta_\Phi(\mathbf{x}_R).$$

Toto číslo přičteme a odečteme k poslednímu výrazu v rovnici (3.12) a budeme pokračovat v odhadování

$$\leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \left| \text{obsah } \Phi(R) - \text{obsah } \Phi_R(R) + \iint_R \Delta_\Phi(\mathbf{x}_R) - \iint_R \Delta_\Phi \right| \leq \\ \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \left(\left| \text{obsah } \Phi(R) - \text{obsah } \Phi_R(R) \right| + \left| \iint_R \Delta_\Phi(\mathbf{x}_R) - \iint_R \Delta_\Phi \right| \right) \leq \\ \leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \left| \text{obsah } \Phi(R) - \text{obsah } \Phi_R(R) \right| + \sum_{R \in \mathcal{D}} \iint_R |\Delta_\Phi(\mathbf{x}_R) - \Delta_\Phi|.$$

Nyní nastal okamžik, abychom využili informace z (i) pro první a z (ii) pro druhou sumu. Pak lze pokračovat

$$\leq \sum_{R \in \mathcal{D}} \varepsilon \text{ obsah}(R) + \sum_{R \in \mathcal{D}} \iint_R \varepsilon = \varepsilon \sum_{R \in \mathcal{D}} \text{obsah}(R) + \varepsilon \sum_{R \in \mathcal{D}} \text{obsah}(R) = 2\varepsilon \text{ obsah}(T).$$

Shrneme-li začátek a konec celého řetězu nerovností, máme

$$(3.13) \quad \left| \text{obsah } \Phi(T) - \iint_T \Delta_\Phi \right| \leq 2\varepsilon \text{ obsah}(T).$$

Protože $\varepsilon > 0$ je libovolně malé, plyne z (3.13) výsledné tvrzení. \square

Před námi zůstává poslední krok. Zatím byla ve všech dokázaných vztazích integrovaná funkce $f = 1$. Konečný vzorec pro transformaci proměnných je uveden v následující větě.

Věta 3.12. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast a nechť $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy C^1 prosté na T . Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\Phi(T)$. Pak*

$$\iint_{\Phi(T)} f = \iint_T f(\Phi) \Delta_\Phi.$$

Důkaz. Označme si pro chvíli množinu $\Phi(T) = U$. Pak $T = \Phi^{-1}(U)$. Rovnost, kterou dokazujeme má v tomto označení tvar

$$\iint_U f = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi.$$

Uvažujme nejprve speciální případ $f \geq 0$. Pak $\iint_U f$ znamená objem tělesa s podstavou U omezeného shora grafem funkce f .

Definujme si pomocné zobrazení V_Φ , které nezáporné spojitě funkci f a základní oblasti U přiřadí číslo

$$V_\Phi(f, U) = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi.$$

Podíváme se na vlastnosti V_Φ blíže. Rozdělíme U na dvě základní oblasti $U = U_1 \cup U_2$ takové, že U_1 a U_2 nemají společný vnitřní bod. Pak

$$V_\Phi(f, U) = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi = \iint_{\Phi^{-1}(U_1)} f(\Phi) \Delta_\Phi + \iint_{\Phi^{-1}(U_2)} f(\Phi) \Delta_\Phi = V_\Phi(f, U_1) + V_\Phi(f, U_2).$$

Poslední rovnice znamená, že zobrazení V_Φ splňuje axiom aditivity, viz Definici 1.1. Ukážeme, že V_Φ vyhovuje i axiomu monotonie. Nejprve odhad shora:

$$V_\Phi(f, U) = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi \leq \max_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \iint_{\Phi^{-1}(U)} \Delta_\Phi = \max_U(f) \iint_{\Phi^{-1}(U)} \Delta_\Phi.$$

Nyní užijeme Větu 3.11 a nahradíme dvojný integrál. Dostaneme tak pokračování

$$= \max_U(f) \cdot \text{obsah}(\Phi(\Phi^{-1}(U))) = \max_U(f) \cdot \text{obsah}(U).$$

Úplně stejně se provede odhad zdola:

$$V_\Phi(f, U) = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi \geq \min_U(f) \iint_{\Phi^{-1}(U)} \Delta_\Phi = \min_U(f) \cdot \text{obsah}(U).$$

Ověřili jsme, že V_Φ splňuje axiomy (A) a (M). Podle Věty 2.9 však existuje jediné zobrazení s těmito vlastnostmi. Tudíž i $V_\Phi(f, U)$ je objem tělesa nad množinou U omezeného shora grafem funkce f . Nutně tak musí být

$$\iint_U f = \iint_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi) \Delta_\Phi.$$

Nyní máme dokázáno tvrzení v případě nezáporné funkce f . Je-li f obecná, napíšeme ji jako rozdíl kladné a záporné části, $f = f_+ - f_-$, kde

$$f_+ = \max\{f, 0\}, \quad \text{a} \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Aplikací již dokázaného tvrzení na (nezáporné) funkce f_+ a f_- dostaneme obecný případ. \square

Poznámka 3.13. Předpoklady ve Větě 3.12 bychom mohli zeslabit na to, že funkce f může být spojitá jen na vnitřku $\Phi(T)$ a transformace Φ by stačila být třídy C^1 na vnitřku T . Použili bychom stejný „nafukovací princip“ pro vyplnění množin T a $\Phi(T)$ jako na konci Kapitoly 2, viz (2.11).

Ještě než přikročíme k příkladům, vrátíme se na chvíli na začátek této kapitoly. Zavedli jsme tam polární souřadnice a protože poměrně často se s výhodou používají, vypočteme si jejich jakobián. Přejít k polárním souřadnicím reprezentuje zobrazení

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Jacobiho matice je pak

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Odtud jakobián

$$\Delta_\Phi = \det J_\Phi = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho.$$

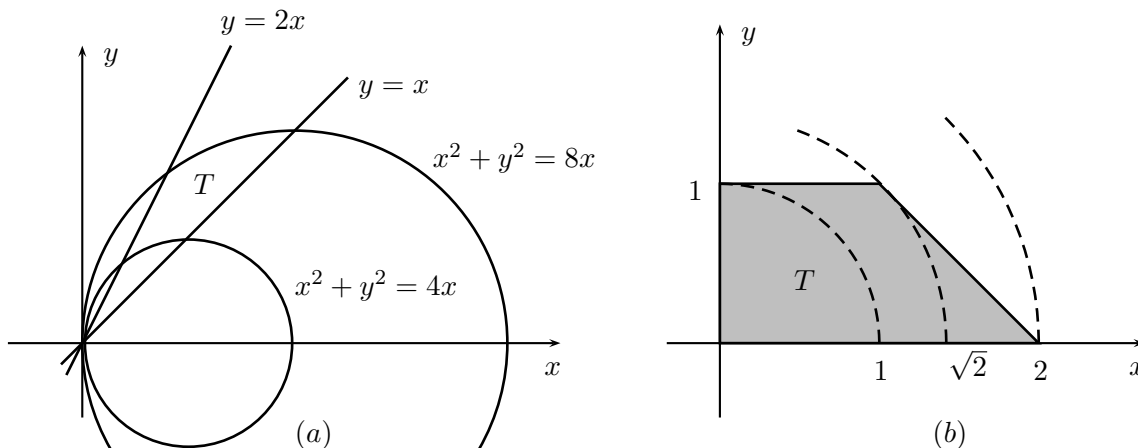
3 Cvičení.

Úloha. Vypočtete integrál

$$\iint_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2},$$

kde T je množina omezená křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$ a $y = 2x$.

Řešení. Množina T má tvar ukázaný na obr. 3.6(a).



Obr. 3.6.

Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = \varrho \cos \varphi$ a $y = \varrho \sin \varphi$, pak integrovaná funkce bude mít tvar

$$f = \frac{1}{(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{\varrho^4}.$$

Stejně tak rovnice křivek omezující množinu T budou mít v polárních souřadnicích vyjádření

$$\begin{aligned} \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi &= 4\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \varrho &= 4 \cos \varphi \\ \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi &= 8\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \varrho &= 8 \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi &= \varrho \cos \varphi & \text{tj. } \operatorname{tg} \varphi &= 1 \\ \varrho \sin \varphi &= 2\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \operatorname{tg} \varphi &= 2 \end{aligned}$$

Množina T je tak v polárních souřadnicích určena požadavky $\varphi \in \langle \arctg 1, \arctg 2 \rangle = \langle \pi/4, \arctg 2 \rangle$ a $\varrho \in \langle 4 \cos \varphi, 8 \cos \varphi \rangle$. Protože jakobián je ϱ , můžeme podle Věty 3.12 psát

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} &= \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \frac{1}{\varrho^4} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \left[-\frac{1}{2\varrho^2} \right]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \frac{3}{128 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{3}{128} [\operatorname{tg} \varphi]_{\pi/4}^{\arctg 2} = \frac{3}{128}. \end{aligned}$$

Úloha. Vyjádřete integrál

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} f \, dx \, dy$$

v polárních souřadnicích při obou možnostech pořadí integrace.

Řešení. Nejprve musíme zjistit tvar oblasti T přes kterou se integrace provádí: z tvaru mezi u vnějšího a vnitřního integrálu vidíme, že

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2 - y.$$

Takže $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2 - y\}$, viz obr. 3.6(b). Převědeme nejprve daný integrál do polárních souřadnic s pořadím integrace $d\varrho d\varphi$. Abychom popsali všechny body množiny T musíme použít úhly $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Vidíme však, že pro $\varphi \in \langle 0, \pi/4 \rangle$ je omezující hranice pro ϱ dána přímkou $x + y = 2$, zatímco pro $\varphi \in \langle \pi/4, \pi/2 \rangle$ je omezující přímkou $y = 1$. To znamená, že vnější integrál musíme rozdělit na dva. V prvním případě, kdy $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, bude horní hranice pro ϱ vypočtena z rovnice omezující přímky $x + y = 2$. Vyjádříme-li ji v polárních souřadnicích, tak dostaneme

$$\varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi = 2, \quad \text{tj.} \quad \varrho = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

V druhém případě pak z rovnice $y = 1$ získáme

$$\varrho = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Můžeme tedy psát výsledný integrál

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} f \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

Nyní zapíšeme zadaný integrál sice opět v polárních souřadnicích, ale v pořadí integrace $d\varphi d\varrho$. Význam proměnné ϱ je vzdálenost od počátku. Musíme tedy zjistit, jak daleko od počátku je nejbližší a nejvzdálenější bod z T . Jsou to zřejmě body $(0, 0)$ a $(0, 2)$ – viz obr.3.6(b). Odtud dostáváme omezení pro ϱ : $0 \leq \varrho \leq 2$. Zbývá určit meze pro φ . Máme-li zvolené ϱ , ptáme se jaký úhel φ mají body z T ležící na kružnici s poloměrem ϱ . Je-li $\varrho \in \langle 0, 1 \rangle$, tak z obrázku vidíme, že část příslušné kružnice ležící v T je ohraničena osou x a osou y . Z toho plyne, že povolené úhly jsou v intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Je-li $\varrho \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$, pak oblouk příslušné kružnice je omezen osou x a přímkou $y = 1$. Dolní hranice pro úhel je tak $\varphi = 0$ a horní musíme určit z podmínky $y = 1$. Tato rovnice přepsaná do polárních souřadnic má tvar $\varrho \sin \varphi = 1$, tj.

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\varrho}.$$

Konečně, pro $\varrho \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle$ je příslušný oblouk omezen osou x (tzn. $\varphi = 0$) a přímkou $x + y = 2$. Ta má v polárních souřadnicích vyjádření $\varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi = 2$. Umocněním na druhou dostaneme

$$\varrho^2 + 2\varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi = 4, \quad \text{tj.} \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{4 - \varrho^2}{\varrho^2}.$$

Protože $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ máme

$$\sin 2\varphi = \frac{4 - \varrho^2}{\varrho^2}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4 - \varrho^2}{\varrho^2}.$$

Nyní můžeme sestavit požadovaný integrál:

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} f \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f \, \varrho \, d\varphi \, d\varrho + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\varrho}} f \, \varrho \, d\varphi \, d\varrho + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\frac{1}{2} \arcsin \frac{4 - \varrho^2}{\varrho^2}} f \, \varrho \, d\varphi \, d\varrho.$$

Úloha. Pomocí věty o substituci vypočtěte určitý integrál $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Řešení. Označme si $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Budeme počítat pomocný dvojnásobný integrál

$$(3.14) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Integrací podle jednotlivých proměnných dostaneme

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I^2.$$

Přepíšme si nyní integrál (3.14) do polárních souřadnic. Množina, přes kterou se počítá integrál (3.14) je první kvadrant, neboť jak x tak y nabývají pouze kladných hodnot. Proto, podobně jako v předchozí úloze dostaneme

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-e^{-\varrho^2}}{2} \right]_0^\infty d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Závěrem máme $I^2 = \frac{\pi}{4}$, a proto

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Úloha. Eulerova funkce $\Gamma(p)$ je definována pro $p > 0$ integrálem

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Eulerova funkce $B(p, q)$ dvou proměnných $p, q > 0$ je definována integrálním vztahem

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Ukažte, že platí

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Řešení. Opět použijeme jako pomocný prostředek integrál

$$(3.15) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy.$$

Integrací podle proměnných x a y máme:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \left(\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \right) \cdot \left(\int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy \right) = \Gamma(p) \Gamma(q).$$

Použijeme nyní substituci do nových proměnných ϱ a φ

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos^2 \varphi \\y &= \varrho \sin^2 \varphi.\end{aligned}$$

Platí, že $x, y \geq 0$ právě tehdy když $\varrho \geq 0$ a $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Po snadném výpočtu zjistíme, že jakobián zobrazení $\Phi(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos^2 \varphi, \varrho \sin^2 \varphi)$ je roven $2\varrho \sin \varphi \cos \varphi$. Podle věty o substituci máme:

$$\begin{aligned}(3.16) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy &= 2 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\varrho} \varrho^{p+q-1} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi d\varrho = \\&= 2 \int_0^\infty e^{-\varrho} \varrho^{p+q-1} d\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi \sin \varphi d\varphi\end{aligned}$$

Použijeme-li v posledním goniometrickém integrálu substituci $t = \cos^2 \varphi$, můžeme ho po krátkém výpočtu přepsat na integrál $\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \frac{1}{2} dt$, což je polovina hodnoty funkce Beta $B(p, q)$. Tím se identita (3.16) přepíše na požadovanou identitu

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q).$$

Pomocí polárních souřadnic vypočtete dvojné integrály přes zadané základní oblasti.

$$1. \quad \iint_T x^2 + y^2 \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+2)^2 \leq 4\},$$

$$2. \quad \iint_T (h - 2x - 3y) \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$3. \quad \iint_T \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$4. \quad \iint_T \arctg \frac{y}{x} \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \geq x^2 + y^2 \geq 1, x \leq y\sqrt{3} \leq 3x\},$$

$$5. \quad \iint_T \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$6. \quad \iint_T 1 \quad T \text{ je omezena křivkou } (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \quad (\text{lemniskáta})$$

Vhodnou transformací spočtete

$$7. \quad \iint_T \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

8. $\iint_T 1$ $T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, |y| \leq x \operatorname{tg} \alpha \right\}, \alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle,$
9. $\iint_T (x+y) \cos(\pi(x-y))$ $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x+y, x \leq 1, 1+y \leq x \leq 2+y\},$
10. $\iint_T x+y$ T je omezena křivkami $x+y=4, x+y=12, y^2=2x,$
11. $\iint_T x^2+y^2$ T je omezena křivkami $x^2+y^2+2x-1=0, x^2+y^2+2x=0,$
12. $\iint_T \frac{y}{x} e^{xy}$ T je omezena křivkami $xy=2, xy=4, y=2x, y=\frac{x}{2},$
13. $\iint_T |x|+|y|$ $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\},$
- 14.* $\iint_T x^2+y^2$ $T = \{(x, y) \mid x^4+y^4 \leq 1\}.$

V následujících integrálech proveďte přechod do polárních souřadnic a výsledné integrály napište v obou pořadích:

- | | |
|--|--|
| 15. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^y f \, dx \, dy$ | 16. $\int_0^1 \int_y^{2-y} f \, dx \, dy$ |
| 17. $\int_0^1 \int_2^{\sqrt{5-x^2}} f \, dy \, dx$ | 18. $\int_1^2 \int_{y-1}^1 f \, dx \, dy$ |
| 19. $\int_0^1 \int_1^{\sqrt{9-y^2}} f \, dx \, dy$ | 20. $\int_1^2 \int_0^x f \, dy \, dx$ |
| 21. $\int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f \, dx \, dy$ | 22. $\int_{-1}^1 \int_0^{ y } f \, dx \, dy$ |

23. Vypočtěte hmotnost kruhu s poloměrem R jehož plošná hustota ρ je úměrná vzdálenosti k hranici a $\rho(0,0) = a$.

V následujících příkladech vypočtěte těžiště daných množin za předpokladu, že plošná hustota je $\rho = 1$.

24. Půlkruh s poloměrem R .

25. Kruhová výseč s poloměrem R a úhlem při vrcholu 2α .

26. Část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $y \geq 0$.

Vypočítejte momenty setrvačnosti následujících rovinných oblastí, pokládáme-li plošnou hustotu $\rho = 1$.

27. Kruh s poloměrem r vzhledem k tečné přímce.

28. Čtverec se stranou a vzhledem k vrcholu.

29. Elipsa s poloosami a , b vzhledem k jejímu středu.

30. Kruh s poloměrem r vzhledem k bodu na hraniční kružnici.

Výsledky.

1. 24π ; 2. $\pi h R^2$; 3. $\frac{2}{3}\pi R^3$; 4. $\frac{\pi^2}{6}$; 5. $\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$; 6. a^2 ; 7. $\frac{2}{3}\pi ab$, $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$; 8. $ab \operatorname{arctg}(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha)$, $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$; 9. $-1/\pi^2$, $u = x + y$, $v = x - y$; 10. $\frac{1}{5}(5^5 - 3^5) - \frac{1}{3}(5^3 - 3^3)$, $u = x + y$, $v = y$; 11. $\frac{5\pi}{2}$, $x = -1 + \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; 12. $\frac{3}{4}e^2(e^2 - 1)$, $u = xy$, $v = y/x$; 13. $\frac{4}{3}$, $u = x + y$, $v = x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; 14. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $x = \rho\sqrt{\cos \varphi}$, $y = \rho\sqrt{\sin \varphi}$;

15. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin \varphi}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\rho}} f \rho \, d\varphi \, d\rho$; 16. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\sin \varphi + \cos \varphi}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$,

$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\frac{1}{2} \arcsin(\frac{4}{\rho^2} - 1)} f \rho \, d\varphi \, d\rho$; 17. $\int_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/2} \int_{\frac{2}{\sin \varphi}}^{\sqrt{5}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_2^{\sqrt{5}} \int_{\arcsin \frac{2}{\rho}}^{\pi/2} f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

18. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_1^{\sqrt{2}} \int_{\arcsin \frac{1}{\rho}}^{\frac{1}{2} \arcsin(1 - \frac{1}{\rho^2})} f \rho \, d\varphi \, d\rho$ + $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \int_{\arccos \frac{1}{\rho}}^{\frac{1}{2} \arcsin(1 - \frac{1}{\rho^2})} f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

19. $\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{8}}} \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^3 f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\arccos \frac{1}{\rho}} + \int_{\sqrt{2}}^3 \int_0^{\arcsin \frac{1}{\rho}} f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

20. $\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^{\frac{2}{\cos \varphi}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\arccos \frac{1}{\rho}} + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\pi/4} + \int_2^{\sqrt{8}} \int_{\arccos \frac{2}{\rho}}^{\pi/4} f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

21. $\int_0^{\pi/2} \int_{\frac{2}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^2 f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin(\frac{4}{\rho^2} - 1)}^{\pi/2 - \frac{1}{2} \arcsin(\frac{4}{\rho^2} - 1)} f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

22. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \int_0^{\frac{-1}{\sin \varphi}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f \rho \, d\rho \, d\varphi$, $\int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \right) + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\arcsin \frac{1}{\rho}}^{-\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{1}{\rho}} \right) f \rho \, d\varphi \, d\rho$;

23. $\frac{\pi}{3}aR^2$; 24. $(0, \frac{4R}{3\pi})$; 25. $(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}, 0)$; 26. $(0, \frac{4b}{3\pi})$; 27. $\frac{5}{4}\pi r^4$; 28. $\frac{2}{3}a^4$;
29. $\frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2)$; 30. $\frac{3}{2}\pi r^4$.

Kapitola 4

Trojný integrál.

1 Zavedení a definice.

Způsob zavedení trojného integrálu je analogický tomu, jak jsme definovali integrál dvojný. Tato metoda je obecně použitelná pro každou dimenzi. Z hlediska úspornosti by bylo nejlepší provést celou konstrukci integrálu pouze jednou, a to v prostoru \mathbb{R}^n a pak už jen rozebírat speciální případy pro $n = 1, 2, 3$. Nevýhodou tohoto přístupu je jistá náročnost abstraktních úvah v n -rozměrném prostoru. Proto pro první seznámení s násobnou integrací není vhodný.

Připomeňme si základní princip, z něhož může vycházet definice jednoduchého i násobného integrálu. V jednorozměrném případě je to otázka, jak zjistit velikost plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ nad daným intervalem $I \subset \mathbb{R}$. Analýza vlastností aditivity a monotonie by nás pak přivedla v tomto případě k pojmu jednorozměrného integrálu

$$\int_I f.$$

Rozšíříme-li situaci o jednu dimenzi, pak otázka zní, jak spočítat objem množiny ohraničené grafem funkce $f(x, y)$ nad dvourozměrným intervalem $R \subset \mathbb{R}^2$. Řešením tohoto problému začínala Kapitola 1. Výsledkem byl pojem dvojného integrálu

$$\iint_R f.$$

Budeme-li sledovat logickou posloupnost těchto úvah i dále, můžeme motivovat trojný integrál následujícím způsobem. Jaký je (čtyřrozměrný) objem množiny omezené grafem funkce $f(x, y, z)$ definované na kvádru (= trojrozměrném intervalu) $P \subset \mathbb{R}^3$?

Protože geometrická představivost ve čtyřrozměrném prostoru není tak úplně běžná, zvolíme si jinou motivaci, která bude ekvivalentní, ale vystačí pouze se třemi rozměry.

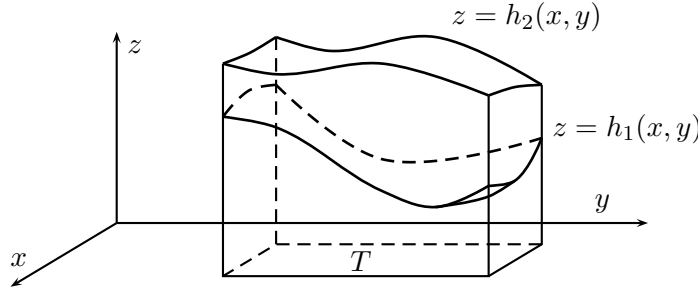
Uvažujme množinu $P \subset \mathbb{R}^3$ popsanou následovně: nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast

$$T = \left\{ (x, y) \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, s_1(x) \leq y \leq s_2(x) \right\}.$$

Těleso P bude nad základní oblastí T zdola omezeno grafem funkce $h_1(x, y)$ a shora grafem funkce $h_2(x, y)$. Přesný zápis je tento

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y) \right\}.$$

Tento typ množin budeme krátce nazývat *základní těleso*. Příklad takové množiny je na obr. 4.1, kde pro jednoduchost máme za podstavu T pouze obdélník.



Obr. 4.1.

Položme si otázku, jak spočítat hmotnost tělesa P , jehož hustota je popsána zadanou spojitou funkcí $f(x, y, z)$. Tato hmotnost je jednoznačně určena tvarem množiny P a hustotou f . Označíme ji proto $m(f, P)$. Axiomy aditivity a monotonie pro $m(f, P)$ jsou intuitivně zcela jasné: rozdělíme-li P na dvě části, $P = P_1 \cup P_2$, pak zřejmě musí pro příslušné hmotnosti platit

$$(A) \quad m(f, P) = m(f, P_1) + m(f, P_2).$$

Podobně, bude-li hustota f menší než hustota g , pak

$$m(f, P) \leq m(g, P).$$

Speciálně,

$$(M) \quad \text{objem}(P) \cdot \min_P(f) \leq m(f, P) \leq \text{objem}(P) \cdot \max_P(f).$$

Zobrazení m , které základnímu tělesu P a spojitě hustotě f přiřadí číslo $m(f, P)$ a které vyhovuje požadavkům (A) a (M), nazveme hmotnost tělesa P s hustotou f .

První, co jsme v podobné situaci museli udělat v Kapitole 1 pro objem V , bylo ověřit existenci a jednoznačnost. Tomu se nelze vyhnout ani zde, pokud chceme mít trojný integrál korektně zavedený. Nebudeme však celý postup znovu procházet. Pro nás stačí vzít na vědomí fakt, že technikou horních a dolních součtů lze analogicky dokázat následující tvrzení.

Věta 4.1. *Zobrazení m , které vyhovuje axiomům aditivity (A) a monotonie (M), existuje právě jediné.*

Nyní se opět nacházíme v situaci, že vymyslíme-li jakýkoli vzorec pro výpočet $m(f, P)$, který bude splňovat (A) a (M), tak bude správný. Využijeme proto zkušenost s dvojným integrálem a položíme

$$(4.1) \quad m(f, P) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Tento trojnásobný integrál můžeme ekvivalentně přepsat jako

$$\iint_T \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right).$$

Vnitřní integrál, který si označíme

$$(4.2) \quad \xi(x, y) = \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

závisí na x a y . Je tedy jistou funkcí v proměnných x a y a tu integrujeme přes základní oblast T . Avšak námi zavedený dvojný integrál je definován pouze pro spojitě funkce. Vše bude v pořádku, když výraz (4.2) bude spojitá funkce. V opačném případě by nebylo možné provést příslušnou trojnásobnou integraci a rovnost (4.1) by neměla žádný smysl. Naštěstí platí následující věta:

Věta 4.2. *Nechť $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce. Pak i*

$$\xi(x, y) = \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

je spojitá funkce proměnných x a y .

Důkaz je podobný důkazu Věty 2.11. Využívá opět toho, že spojitá funkce na množině P je stejnoměrně spojitá (Věta 1.11). Protože jinak už neobsahuje žádný nový krok, nebudeme ho zde uvádět. Zbývá ověřit, že trojnásobný integrál v (4.1) vyhovuje podmínkám aditivity a monotonie. I tento krok není nic nového, neboť jsme ho už prováděli v jednodušší verzi při dvojnásobné integraci. Dovolíme si proto přejít ho pouze odkazem na analogii s Větou 2.5. Jsme tak v situaci, kdy můžeme korektně definovat *trojný integrál* funkce f přes množinu P :

Definice 4.3. *Nechť P je základní těleso,*

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y) \right\},$$

kde T je základní oblast, $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, s_1(x) \leq y \leq s_2(x)\}$. Necht $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá na P . **Trojným integrálem** funkce f přes množinu P nazýváme

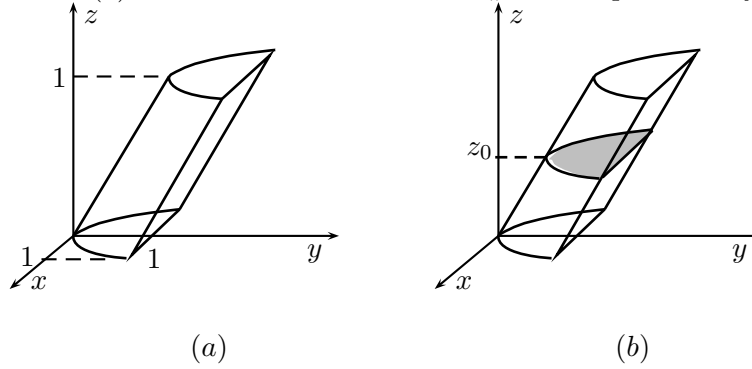
$$(4.3) \quad \iiint_P f = \iint_T \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Pořadí integrace závisí zcela na naší volbě. V případě výše uvedené množiny P je samozřejmě nejvýhodnější zvolit pořadí, které je v (4.3). Následující příklad ilustruje, jak rozdílná volba pořadí integrace může usnadnit či naopak ztížit výpočet.

Příklad 4.4. Necht množina Q je zadána nerovnostmi

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + z \leq y \leq 1 + z.$$

Její tvar je na obr. 4.2(a). Je to vlastně část šikmého „válce“ s parabolickým průřezem.



Obr. 4.2.

Vyšetříme všechna možná pořadí integrace.

- (i) Vnější integrál je podle proměnné z .

Z obr. 4.2(b) je vidět, že pro pevné z musí zbylé dva integrály vyjadřovat integraci přes vnitřek paraboly (šedá oblast). To lze udělat dvěma způsoby odpovídající volbě pořadí $dx dy$ nebo $dy dx$. Výsledné integrály jsou

$$\int_0^1 \int_z^{1+z} \int_{-\sqrt{y-z}}^{\sqrt{y-z}} f dx dy dz, \quad \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{x^2+z}^{1+z} f dy dx dz.$$

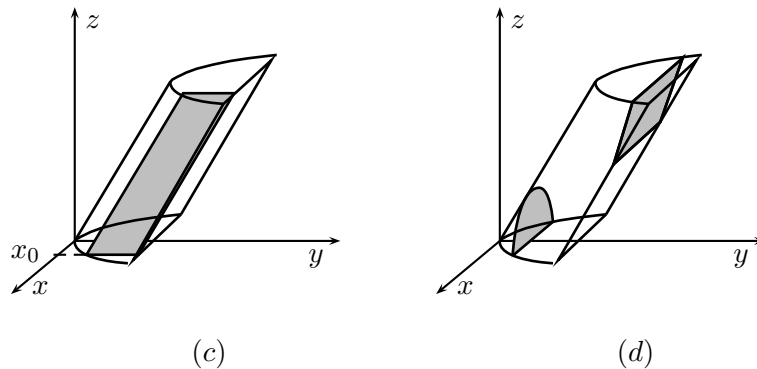
Oba výrazy jsou poměrně jednoduché. Možná bychom dali přednost druhému z nich, neboť funkce v mezích se vyskytují pouze u vnitřního integrálu.

- (ii) Vnější integrál je podle proměnné x .

Pro pevné x je řez tělesem P tvořen rovnoběžníkem – viz obr. 4.2(c). Zde již podstatně záleží na tom, jak dovolíme pořadí zbylých dvou proměnných:

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_{x^2+z}^{1+z} f dy dz dx, \quad \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \int_0^{y-x^2} f dz dy + \int_1^{1+x^2} \int_{y-1}^{y-x^2} f dz dy + \int_{1+x^2}^2 \int_{y-1}^1 f dz dy \right) dx.$$

Rozdíl oproti předchozímu případu (i) je v tom, že v (i) při strategicky dobře zvolené vnější proměnné z jsme už další volbou pořadí ve vnitřních integrálech nemohli výrazně zesložitit výsledný integrál. V případě (ii) výběr vnější proměnné nebyl už tak šťastný, ale ještě bylo možno celou situaci zachránit vhodným pořadím zbylých integrálů.



Obr. 4.2.

(iii) Vnější integrál je podle proměnné y .

Typ řezu tělesem P při pevném y se mění v závislosti na tom, je-li $y \in \langle 0, 1 \rangle$ nebo $y \in \langle 1, 2 \rangle$, viz obr. 4.2(d). Z hlediska jednoduchosti výsledného integrálu je tato volba nejméně vhodná, neboť obě pořadí zbylých integrálů vedou ke složitým výrazům:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{y-x^2} f \, dz \, dx \, dy +$$

$$+ \int_1^2 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{y-1}} \int_{y-1}^{y-x^2} f \, dz \, dx + \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} \int_{y-1}^1 f \, dz \, dx + \int_{\sqrt{y-1}}^1 \int_{y-1}^{y-x^2} f \, dz \, dx \right) dy$$

a

$$\int_0^1 \int_0^y \int_{-\sqrt{y-z}}^{\sqrt{y-z}} f \, dx \, dz \, dy + \int_1^2 \int_{y-1}^1 \int_{-\sqrt{y-z}}^{\sqrt{y-z}} f \, dx \, dz \, dy.$$

Závěrem této části ještě uvedme pro úplnost, že i pro trojný integrál je možné zavést pro funkce spojitě jen na vnitřku základního tělesa a i pro neomezená základní tělesa. Postup je analogický jako pro dvojný integrály. Poslední větu budeme tedy formulovat v této obecnosti.

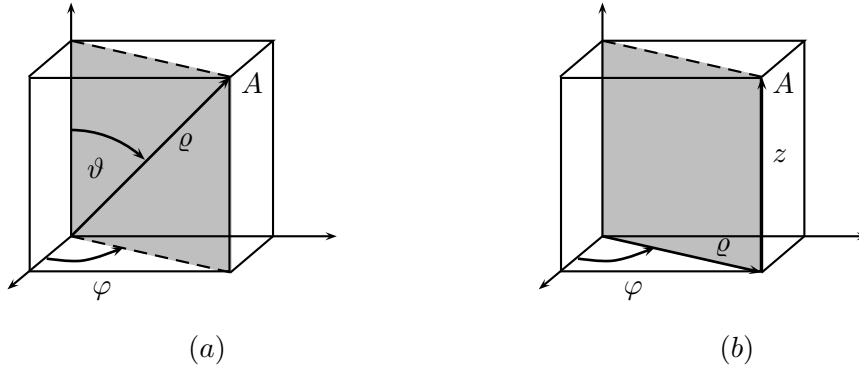
Věta 4.5. *Nechť P je základní těleso a nechť $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce spojitě na vnitřku P . Existují-li integrály $\iiint_P f$ a $\iiint_P g$, pak*

- (i) pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí $\iiint_P (\alpha f + \beta g) = \alpha \iiint_P f + \beta \iiint_P g$,
- (ii) je-li $f \geq g$ na P , pak $\iiint_P f \geq \iiint_P g$.

2 Substituce v trojném integrálu.

Nejužívanějšími souřadnicemi v \mathbb{R}^3 jsou mimo kartézských ještě dvojice: sférické a cylindrické. Ty první jsou vhodné pro popis objektů, ať již funkcí či množin, které mají výraznou kulovou symetrii. Tím máme na mysli, že jsou souměrné vzhledem k nějakému pevnému bodu v \mathbb{R}^3 , obvykle k počátku. Cylindrické souřadnice se hodí v případech, kdy příslušné objekty jsou osově symetrické.

Na obr. 4.3(a) je naznačen způsob určení polohy bodu $A \in \mathbb{R}^3$ pomocí sférických souřadnic, tj. pomocí veličin ϱ , φ a ϑ .



Obr. 4.3.

Vztah mezi souřadnicemi (x, y, z) a $(\varrho, \varphi, \vartheta)$ bodu A je dán následovně:

$$\begin{aligned}
 x &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\
 y &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\
 z &= \varrho \cos \vartheta.
 \end{aligned}
 \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$$

(4.4)

Veličina ϱ značí vzdálenost bodu A od počátku. Úhel ϑ měří odklon polohového vektoru od osy z a φ je úhel mezi osou x a průmětem polohového vektoru do roviny xy . Je možné si zvolit i jiné úhly k určení polohy bodu A : např. místo odklonu od osy z můžeme měřit odchylku polohového vektoru od roviny xy apod. Tím se samozřejmě změní i rovnice (4.4). Princip popisu vyjadřující kulovou symetrii se však zachová.

Změna souřadného systému v \mathbb{R}^3 není nic jiného než jisté zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Pro sférické souřadnice má tvar

$$\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

(4.5)

Význam Φ je snadno zjistitelný: je-li bod v prostoru určen parametry ϱ , φ a ϑ , pak $\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ jsou jeho kartézské souřadnice. Z (4.5) můžeme vypočítat příslušnou Jacobiho matici.

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \sin \vartheta \cos \varphi & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & -\varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Odtud ihned plyne, že příslušný jakobián je roven

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi} &= |-\varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta| = \\ &= \varrho^2 [\sin^3 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] = \\ &= \varrho^2 (\sin^3 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) = \varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \varrho^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na cylindrické souřadnice. Způsob určení polohy bodu je vidět na obr. 4.3(b). Matematický vztah mezi kartézskými souřadnicemi bodu a cylindrickými souřadnicemi ϱ , φ a z je následující:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ (4.6) \quad y &= \varrho \sin \varphi \quad \varrho \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tento souřadný systém vznikl vlastně tak, že jsme do roviny xy zavedli souřadnice polární a ve směru osy z zůstala souřadnice kartézská. Přejít k cylindrickým souřadnicím popisuje zobrazení

$$(4.7) \quad \Phi(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Příslušná Jacobiho matice a jakobián je pak

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{\Phi} = |\det J_{\Phi}| = \varrho.$$

Substituce v trojném integrálu je formálně shodná s Větou 3.12. Ta řešila substituci v integrálu dvojném. Z tohoto důvodu už nemusíme u následující věty uvádět důkaz, který by byl pouze opakováním celého postupu z předešlé Kapitoly.

Věta 4.6. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je základní těleso a nechť $\Phi: P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy C^1 prosté na P . Nechť $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá na $\Phi(P)$. Pak*

$$\iiint_{\Phi(P)} f = \iiint_P f(\Phi) \Delta_{\Phi}.$$

Poznámka 4.7. V duchu Poznámky 3.13 lze i zde oslabit předpoklady v tom smyslu, že funkce f může být spojitá jen na vnitřku $\Phi(P)$ a transformace Φ třídy C^1 na vnitřku P .

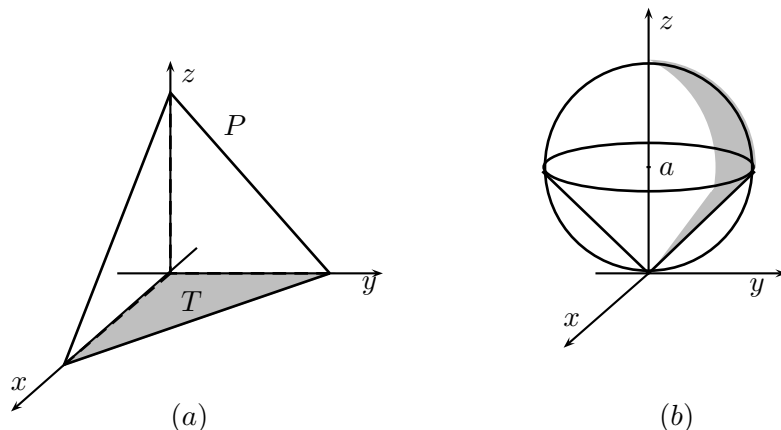
3 Cvičení.

Úloha. Spočtěte

$$\iiint_P \frac{1}{(1+x+y+z)^3},$$

kde P je množina v \mathbb{R}^3 omezená plochami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$.

Řešení. Množina P je trojboký jehlan, který je znázorněn na obr.4.4(a).



Obr. 4.4.

Zvolíme si pořadí integrace např. $dz dy dx$. Díky symetrii integrované funkce vedou všechna pořadí k integrálům stejné složitosti. Promítneme-li jehlan P do roviny xy , dostaneme trojúhelník T omezený přímkami $x=0$, $y=0$ a $x+y=1$ (Tyto podmínky jsme získali z původních rovnic tak, že jsme položili $z=0$). Nad trojúhelníkem T je jehlan omezen grafem funkce $z=1-x-y$. Máme tak

$$\iiint_P \frac{1}{(1+x+y+z)^3} = \iint_T \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right).$$

Zbývajíc dvojný integrál přes trojúhelník T je snadný:

$$\iint_T \dots = \int_0^1 \int_0^{1-x} \dots dy dx.$$

Nyní můžeme provést výpočet trojného integrálu.

$$\begin{aligned} \iiint_P \frac{1}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz dy dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte objem tělesa

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, \quad x^2 + y^2 \leq z^2\}, \quad a > 0.$$

Řešení. Vždy je výhodné mít alespoň hrubou představu o tvaru množiny P . První podmínka se dá přepsat jako $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$, tj. jde o kouli se středem $(0, 0, a)$ a poloměrem a . Druhá podmínka zadává kužel s vrcholem v počátku a osa kužele je osa z . Výsledná množina je na obrázku 4.4(b). Zavedeme sférické souřadnice. V nich budou mít nerovnosti definující množinu P následující tvar

$$\varrho^2 \leq 2a\varrho \cos \vartheta \quad \text{a} \quad \varrho^2 \sin^2 \vartheta \leq \varrho^2 \cos^2 \vartheta.$$

První znamená, že $\varrho \leq 2a \cos \vartheta$, speciálně vidíme, že $\cos \vartheta \geq 0$, neboť $\varrho \geq 0$. Odtud $\vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Druhá podmínka navíc říká, že $|\sin \vartheta| \leq |\cos \vartheta|$. Spolu s první tak dostáváme omezení

$$\vartheta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

Úhel φ se v rovnicích neobjevil, a to znamená, že nabývá všech přípustných hodnot bez omezení,

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Před sestavením výsledného trojnásobného integrálu si ještě uvědomíme, že jakobián sférických souřadnic je $\Delta_\Phi = \varrho^2 \sin \vartheta$. Podle Věty 4.6 můžeme psát

$$\begin{aligned} \iiint_P 1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \vartheta} \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \pi a^3. \end{aligned}$$

Spočtěte následující trojné integrály:

$$1. \iiint_P z \quad P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$$

$$2. \iiint_P z \quad P \text{ je omezena plochami } z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \text{ a } z = h,$$

$$3. \iiint_P x \quad P \text{ je omezena plochami } x = 0, y = 0, z = 0, z = 3 \text{ a } x + y = 2,$$

$$4. \iiint_P y \quad P \text{ je omezena plochami } x = 0, y = 0, z = 0 \text{ a } 2x + 2y + z - 6 = 0,$$

$$5. \iiint_P xyz \quad P \text{ je omezena plochami } y = x^2, x = y^2, z = xy \text{ a } z = 0.$$

Pomocí sférických, cylindrických či jiných souřadnic vypočtěte

6. $\iiint_P x^2 + y^2$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\},$
7. $\iiint_P \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$
8. $\iiint_P \frac{xyz}{x^2 + y^2}$ P je omezena plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2y,$
 $x \geq 0$ a $z \geq 0,$
9. $\iiint_P z^2$ P je omezena plochami $z = x^2 + y^2$ a $z = 2,$
10. $\iiint_P \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$
11. $\iiint_P z \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\},$
12. $\iiint_P x^2 + y^2 + z^2$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x^2, x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$
13. $\iiint_P \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\},$
14. $\iiint_P z$ P je určeno podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
a $x^2 + y^2 \geq 3z,$
15. $\iiint_P 1$ P je omezena plochami $c(x^2 + y^2) + a^2z = a^2c$
a $z = 0, a > 0, c > 0,$
16. $\iiint_P 1$ P je omezena plochami $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0,$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ a taková, že $(0, 0, 1) \in P,$
17. $\iiint_P 1$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z)^2 \leq ay, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$
Návod: $x = \varrho \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta, y = \varrho \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta, z = \varrho \cos^2 \vartheta,$
18. $\iiint_P \frac{1}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$
19. $\iiint_P \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$
20. $\iiint_P e^{-x^2-y^2-z^2}$ $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$

V následujících příkladech vypočtete těžiště daného tělesa (hustota $\rho = 1$):

21. $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$

22. $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \operatorname{tg} \alpha \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$

23. $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z\}.$

Vypočtete momenty setrvačnosti daných těles (hustota $\rho = 1$):

24. Koule s poloměrem R vzhledem k tečné přímce.

25. Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ vzhledem ke každé ze tří souřadnicových os.

26. Rotační paraboloid s výškou h a poloměrem podstavy R vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé na osu rotace (tzv. ekvatoriální moment).

27. Homogenní rotační válec má poloměr podstavy r , výšku h a hustotu ρ_0 . Pomocí Newtonova gravitačního zákona vypočtete sílu, kterou válec přitahuje bod o hmotnosti m umístěný uprostřed dolní podstavy.

28. Homogenní rotační kužel má poloměr podstavy r , výšku h a hustotu ρ_0 . Pomocí Newtonova gravitačního zákona vypočtete sílu, kterou kužel přitahuje bod o hmotnosti m umístěný ve vrcholu kužele.

29.* Necht K je koule s poloměrem r , jejíž hustota ρ se mění se vzdáleností d od středu následovně: $\rho = a - bd$, $a > 0$, $b > 0$.

a) Nalezněte hodnoty a a b , je-li známo, že hodnota ρ na povrchu je ρ_0 a střední hodnota hustoty je γ .

b) Pomocí Newtonova gravitačního zákona vypočtete, jakou silou je přitahován bod o hmotnosti m umístěný na povrchu koule K .

Vícenásobná integrace: vypočtete n -rozměrný integrál přes množinu $T = \langle 0, 1 \rangle^n$ z následujících funkcí

30. $\int \cdots \int_T x_1^2 + \cdots + x_n^2,$

31. $\int \cdots \int_T (x_1 + \cdots + x_n)^2.$

32.* Vypočtete objem

a) čtyřrozměrné koule,

- b) n -rozměrné koule s poloměrem r . Návod: využijte následujícího vztahu pro Eulerovu funkci Γ

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0.$$

Výsledky.

1. 0; 2. $\frac{1}{4}\pi h^2 R^2$; 3. 4; 4. $\frac{27}{4}$; 5. $\frac{1}{96}$; 6. $\frac{4\pi}{15}(1-r^5)$; 7. $\frac{16\pi}{3}$; 8. $\frac{a^4}{56}(\frac{1}{10} - \frac{2}{12} + \frac{1}{14})$;
 9. 4π ; 10. $\frac{4\pi}{5}abc$; 11. $\frac{20}{3}a^4$; 12. $\frac{2\pi R^5}{5}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$; 13. $\pi(3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8 + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3})$;
 14. $\frac{13}{4}\pi$; 15. $\frac{1}{2}\pi ca^2$; 16. $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 3)$; 17. $\frac{a^3}{60}$; 18. $\frac{8}{15}$; 19. $\frac{\pi}{16}$; 20. $\frac{\pi}{8}\sqrt{\pi}$, použijte
 Laplaceův integrál $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; 21. $(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}b, \frac{3}{8}c)$; 22. $(0, 0, \frac{3}{4}R \cos^2 \frac{\alpha}{2})$;
 23. $(0, 0, \frac{9a}{20})$; 24. $\frac{28}{15}\pi R^5$; 25. $\frac{4}{15}\pi abc(b^2 + c^2)$, $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + c^2)$, $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2)$; 26.
 $\frac{\pi}{12}R^4h + \frac{\pi}{36}R^2h^3$; 27. $(0, 0, 2\pi\kappa m\rho_0(r + h - \sqrt{r^2 + h^2}))$, kde κ je gravitační konstanta;
 28. $(0, 0, 2\pi\kappa m\rho_0h(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}))$, kde κ je gravitační konstanta; 29. a) $a = 4\gamma - 3\rho_0$,
 $b = \frac{4}{r}(\gamma - \rho_0)$, b) $F = \frac{4}{3}\pi\kappa r\gamma = \frac{\kappa m M}{r^2}$, kde M je hmotnost koule K a κ je gravitační
 konstanta; 30. $\frac{n}{3}$; 31. $\frac{n}{12}(3n+1)$; 32. a) $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$, b) $\frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, kde Γ je Eulerova gamma
 funkce.

Kapitola 5

Křivka a její délka

1 Motivace a základní pojmy

Křivka je pojem, který je v matematice zkoumán již od antického starověku. Intuitivně vždy vyjadřoval objekt, který vznikne spojitou deformací intervalu na reálné ose a který může být fyzikálně chápán jako dráha plynule se pohybujícího hmotného bodu. Typickým příkladem této představy je množina znázorněná na obrázku obr. 5.1.

V rozdílných etapách vývoje matematiky byla však matematická interpretace spojitosti a plynulosti jiná. Definici křivky, která by nejlépe popisovala původní intuitivní představu, proto předcházela dlouhá diskuse, která se dotkla samotných základů matematiky. Pokusme se při definování tohoto pojmu vyjít z fyzikálního pohledu.

Představme si, že množina C v rovině nebo prostoru je dráhou pohybujícího se bodu. Předpokládáme-li, že se pohyb uskutečnil v konečném časovém intervalu $\langle a, b \rangle$, je dráha popsána pomocí spojitěho zobrazení $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. To každému časovému okamžiku $t \in \langle a, b \rangle$ přiřadí bod $\varphi(t)$ v rovině nebo prostoru udávající polohu bodu v čase t . Trajektorie tohoto pohybu pak definuje křivku $C = \varphi(\langle a, b \rangle)$.

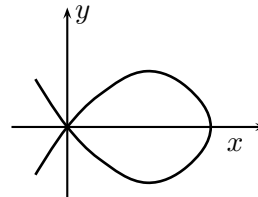
Aby měl dále pohyb hmotného bodu rozumný smysl, měli bychom mít v každém bodě definovanou rychlost. Matematicky je vektor rychlosti v čase $t \in \langle a, b \rangle$ dán derivací $\varphi'(t)$ zobrazení φ . (Zobrazení φ se derivujeme po složkách. Je-li tedy například $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, je $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$.) V souladu s fyzikální intuicí tedy dostáváme požadavek, aby v každém bodě $t \in \langle a, b \rangle$ mělo zobrazení φ spojitou derivaci. Tím bychom ovšem vyloučili takové přirozené křivky jako je např. trojúhelník nebo lomená čára. Při pohybu po trojúhelníku se totiž průchodem přes vrcholy rychlost skokem mění. Proto z tohoto striktního požadavku poněkud ustoupíme a připustíme konečně mnoho výjimek.

Začneme s velmi jednoduchým typem křivky, který budeme nazývat oblouk.

Definice 5.1. Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **oblouk**, jestliže existuje spojitě zobrazení

$$\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ na množinu C , splňující následující podmínky:



Obr. 5.1.

- (i) zobrazení φ je prosté na $\langle a, b \rangle$, s jedinou možnou výjimkou koncových bodů tj. lze připustit $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- (ii) derivace φ' je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde v krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace, a $\varphi'(t) \neq 0$ na (a, b) .

Geometrický význam vlastnosti (i) je, že oblouk neprotíná sám sebe. Jedinou výjimkou, kterou požadavek (i) připouští jsou počáteční a koncový bod, které mohou splynout.

Podmínka (ii) říká, že v každém vnitřním bodě má oblouk tečnu. Neboť právě vektor $\varphi'(t)$ je směrový vektor tečny v bodě $\varphi(t)$. Význam požadavku $\varphi'(t) \neq 0$ uvidíme později.

Definice 5.2. Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **křivka**, jestliže existuje spojitě zobrazení

$$\varphi: \langle a, b \rangle \longrightarrow C$$

takové, že existuje dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a, b \rangle$, že na každém podintervalu $I \in \mathcal{D}$ jsou splněny požadavky (i) a (ii) z Definice 5.1

Stručně řečeno, křivka vznikne napojením konečně mnoha oblouků za sebe. Zobrazení φ nazýváme *parametrizací* křivky C . Křivka C se nazývá *uzavřenou*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Body, ve kterých oblouk či křivka protíná sama sebe, nazýváme násobnými body. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný násobný bod kromě počátečního a koncového bodu $\varphi(a) (= \varphi(b))$.

Příklad 5.3. (i) Množina

$$C = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad a > 0,$$

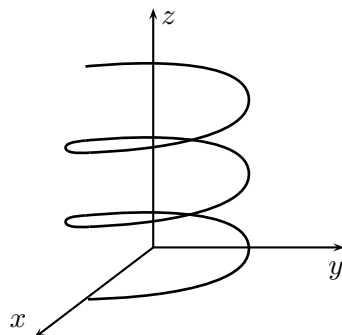
je oblouk. Jde o jednotkovou kružnici se středem $(0, 0)$. V tomto případě je možno volit parametrizaci $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Derivace $\varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$ je spojitá na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a přitom $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, neboť složky zobrazení φ nejsou v žádném bodě současně nulové. Vidíme také, že C je jednoduchá uzavřená křivka.

Křivkám ležícím v \mathbb{R}^2 budeme říkat rovinné křivky.

(ii) Množina

$$C = \left\{ \left(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t \right) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right\},$$

kde $a, h > 0$ je oblouk. Jak napovídá samotné zadání množiny C , je možno jako parametrizaci volit zobrazení $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Toto zobrazení je prosté, neboť poslední složka zobrazení φ je prostá funkce. Dále vidíme, že derivace $\varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t, \frac{h}{2\pi})$ je spojitá a nenulová v zadaném intervalu. Všechny požadavky formulované v definici jsou tedy splněny. Pohyb, který křivku vytváří si můžeme představit jako složení rovnoměrného otáčení kolem osy z ve vzdálenosti a a rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru kladné části osy z . Vznikne tak jeden závit válcové spirály znázorněné na obrázku obr.5.2.



Obr. 5.2.

(iii) Rovinná křivka znázorněná na obr. 5.1 je křivka definovaná např. parametrizací

$$x = 1 - t^2, \quad y = t(1 - t^2), \quad t \in \langle -2, 2 \rangle.$$

Jinými slovy $C = \varphi(\langle -2, 2 \rangle)$, kde

$$\varphi(t) = (1 - t^2, t(1 - t^2))$$

Parametrizace φ má pouze jediný násobný bod $(0, 0) = \varphi(1) = \varphi(-1)$. Lehkým výpočtem je možno se přesvědčit, že φ' je spojitá a nenulová ve všech bodech svého definičního oboru, tj. vektor $\varphi'(t) = (-2t, 1 - 3t^2)$ není nulový pro žádné $t \in \langle -2, 2 \rangle$.

Podle Definice 5.2 je daná množina křivkou, jestliže existuje alespoň jedna její parametrizace. Již z fyzikální intuice víme, že bod se může pohybovat po téže křivce mnoha způsoby. Očekáváme tedy, že parametrizací křivky bude více. Například jednotkovou kružnici v rovině je možno popsat pomocí zobrazení $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, stejně tak jako pomocí zobrazení $\psi(s) = (\cos s^2, \sin s^2)$, kde $s \in \langle 0, \sqrt{2\pi} \rangle$. Všimněme si, že v tomto případě jsme získali parametrizaci ψ z parametrizace φ pomocí substituce $t = s^2$. Protože takovýchto substitucí si můžeme vymyslet nekonečně mnoho, má každá křivka nekonečně mnoho parametrických vyjádření. Důležitá je otázka, jak tyto různé parametrizace spolu souvisejí. Vzhledem k tomu, že každá křivka je sjednocením konečně mnoha oblouků, budeme se touto otázkou zabývat v případě oblouku. V této situaci se ukazuje, že všechny parametrizace je možno získat z jedné pevně zvolené parametrizace pomocí vhodné substituce za její parametr.

Tvrzení 5.4. *Nechť C je oblouk s parametrizacemi $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ a $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$. Pak existuje spojitá funkce h zobrazující interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle c, d \rangle$ tak, že h převádí parametrizaci ψ na φ , tj.*

$$\varphi(t) = \psi(h(t)).$$

Navíc h má spojitou a nenulovou derivaci na (a, b) .

Důkaz. Zamysleme se nejdříve nad tím, jak vypadá funkce $h: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ splňující požadovanou rovnost $\varphi(t) = \psi(h(t))$. Vzhledem k tomu, že ψ je prosté zobrazení, je jen jediná možnost jak tuto funkci získat: $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ (nakreslete si diagram). Takto definovaná

funkce je samozřejmě prostá, neboť složení dvou prostých zobrazení φ a ψ^{-1} je opět prosté zobrazení a zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle c, d \rangle$. Protože zobrazení ψ^{-1} je spojité, je funkce h složením dvou spojitých zobrazení, a tedy spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zbývá ověřit, že h má spojitou a nenulovou derivaci. Zvolme tedy bod $t_0 \in (a, b)$ libovolně a ukážeme, že funkce h má v tomto bodě vlastní a nenulovou derivaci. Jinak řečeno máme dokázat, že funkce

$$\omega(t) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}, \quad t \neq t_0,$$

má vlastní a nenulovou limitu v bodě t_0 . Myšlenkou důkazu je využít vztahu mezi diferenčními podíly parametrizací φ, ψ na straně jedné a diferenčními podíly funkce h (což je funkce ω) na straně druhé. Zvolme si proto pomocné funkce

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}, \\ \Psi(t) &= \frac{\psi(h(t)) - \psi(h(t_0))}{h(t) - h(t_0)}, \end{aligned}$$

definované pro $t \neq t_0$. (Uvědomme si, že $h(t) \neq h(t_0)$ kdykoliv $t \neq t_0$, neboť h je prostá funkce). Protože $\varphi(t) = \psi(h(t))$, platí

$$(5.1) \quad \Phi(t) = \Psi(t) \cdot \omega(t).$$

V předchozí rovnosti není možné $\omega(t)$ přímo vyjádřit jako podíl $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$, neboť $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ jsou vektory. Musíme jít proto oklikou. Podle pravidla o limitě složené funkce je $\lim_{t \rightarrow t_0} \Psi(t) = \psi'(h(t_0)) \neq 0$, neboť ψ je parametrizace oblouku. Nenulovost této limity znamená, že alespoň jedna složka zobrazení Ψ má nenulovou limitu v bodě t_0 . Nechť je to první složka Ψ_1 . Rovnice (5.1) napsaná pro první složky má tvar $\Phi_1(t) = \Psi_1(t)\omega(t)$ pro t z jistého prstencového okolí bodu t_0 . Odtud již $\omega(t)$ můžeme vyjádřit. Věta o limitě podílu dvou funkcí pak implikuje existenci vlastní limity

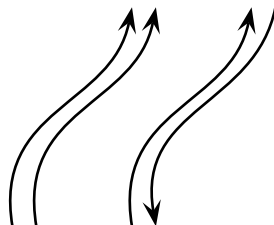
$$(5.2) \quad h'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \omega(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Phi_1(t)}{\Psi_1(t)} = \frac{\varphi'_1(t_0)}{\psi'_1(h(t_0))}.$$

V tuto chvíli jsme dokázali, že $\lim_{t \rightarrow t_0} \omega(t)$ existuje. Navíc, použijeme-li limitní přechod $t \rightarrow t_0$ v rovnici (5.1), dostaneme

$$\varphi'(t_0) = \psi'(h(t_0)) \cdot h'(t_0).$$

Z této rovnice plyne, že $h'(t_0) \neq 0$ (jinak by $\varphi'(t_0) = 0$, což není možné). Protože parametrizace φ a ψ mají spojitě derivace, je podíl jejich derivací v (5.2) spojitá funkce. Takže i h' je spojitá a důkaz je ukončen. \square

Tvrzení 5.4 říká, že parametrizaci $\varphi(t)$ je možno získat z parametrizace $\psi(s)$ substitucí $s = h(t)$. Proto se funkce h nazývá *transformací parametru* mezi parametrizacemi φ a ψ . Vzhledem k tomu, že $h'(t)$ je spojitá a nabývá pouze nenulových hodnot na intervalu (a, b) , nemění na tomto intervalu znaménko. Samotná funkce h je proto ryze monotónní. Je-li h rostoucí (resp. klesající) nazveme parametrizace φ a ψ *souhlasné* (resp. *nesouhlasné*). Souhlasné parametrizace pak odpovídají pohybu bodu po oblouku ve stejném smyslu (se stejným počátečním a koncovým bodem), zatímco nesouhlasné parametrizace indukují pohyby ve smyslu opačném, viz. obr. 5.3.



Obr. 5.3.

2 Délka křivky

Soustředme se nyní na otázku jak definovat a vypočítat délku dané křivky. Jsme ve stejné situaci jako při definici objemu obecného tělesa v Kapitole 1. Z elementární geometrie známe délky některých speciálních křivek (úsečka, kružnice), chybí nám však definice délky v obecném případě. K jejímu nalezení můžeme užít několik přístupů. Ten náš bude opět založen na axiomatické definici. Protože křivka se skládá z konečně mnoha oblouků, stačí zkoumat, jak zavést pojem délky pro oblouk.

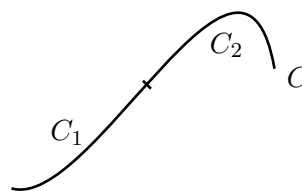
Délka daného oblouku C je jisté nezáporné číslo. Označme ho symbolem $l(C)$. Podívejme se na vlastnosti, které číslo $l(C)$ musí splňovat. Především, ve shodě s obecným názorem očekáváme, že rozdělíme-li oblouk C na dva menší úseky C_1 a C_2 ve smyslu uvedeného obrázku obr. 5.4, musí být celková délka oblouku C rovna součtu délek oblouků C_1 a C_2 , tj.

$$l(C) = l(C_1) + l(C_2).$$

Tato vlastnost se nazývá *aditivita délky*.

Další požadavek, který musí každá definice délky respektovat, vychází z následující fyzikální představy. Je-li $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ parametrizace oblouku C , je křivka realizována jako dráha pohybu částice s polohou $\varphi(t)$ v čase $t \in \langle a, b \rangle$. Norma (= velikost) vektoru rychlosti v časovém okamžiku t je rovna

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}.$$



Obr. 5.4.

Protože velikost rychlosti $\|\varphi'(t)\|$ je spojitou funkcí času t , má tato funkce maximum i minimum na intervalu $\langle a, b \rangle$. Délka oblouku $l(C)$ je rovna velikosti dráhy, kterou uvažovaný bod vykoná. Tato dráha ovšem nemůže být větší než dráha, kterou by v témže čase vykonal bod pohybující se rovnoměrně maximální rychlostí $\max_{\langle a, b \rangle}(\|\varphi'\|)$. Dostáváme tak, že

$$l(C) \leq \max_{\langle a, b \rangle}(\|\varphi'\|) \cdot (b - a).$$

Zcela analogická úvaha pro minimální hodnotu rychlosti pak vede k požadavku

$$\min_{t \in \langle a, b \rangle}(\|\varphi'(t)\|) \cdot (b - a) \leq l(C) \leq \max_{t \in \langle a, b \rangle}(\|\varphi'(t)\|) \cdot (b - a).$$

Je přirozené nazvat tuto vlastnost *monotonií délky*.

Přístupme nyní k matematické definici délky.

Definice 5.5. *Zobrazení, které každému oblouku C přiřadí nezáporné číslo $l(C)$ se nazývá délkou, jestliže splňuje následující dva axiomy*

(A) *aditivita:*

$$l(C) = l(C_1) + l(C_2),$$

kdykoliv C_1, C_2 je rozdělení oblouku C na dva na sebe navazující oblouky,

(M) *monotonie:*

$$\min_{t \in \langle a, b \rangle} (\|\varphi'(t)\|) \cdot (b - a) \leq l(C) \leq \max_{t \in \langle a, b \rangle} (\|\varphi'(t)\|) \cdot (b - a),$$

kde $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ je libovolná parametrizace oblouku C .

Poznámka 5.6. Podobně jako v předchozích kapitolách můžeme axiom (A) psát v obecnější formě $l(C) = l(C_1) + l(C_2) + \dots + l(C_n)$, kde C_1, \dots, C_n je dělení oblouku C na menší na sebe navazující části.

Čtenář, který má již jisté zkušenosti s axiomatickou definicí z Kapitoly 1 ví, že musíme dokázat existenci takového zobrazení $l: C \rightarrow \mathbb{R}$, jinak by Definice 5.5 nezaváděla vůbec žádný pojem. Dále bychom rádi ukázali, že toto zobrazení je jediné. Nesmíme se jistě s pocitem, že nějaký oblouk by měl dvě různé délky. Při hledání explicitního vyjádření $l(C)$ přitom získáme i metodu výpočtu.

Věta 5.7. *Zobrazení l z Definice 5.5 existuje a je jediné. Navíc*

$$l(C) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt,$$

kde $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ je libovolná parametrizace oblouku C .

Důkaz. Z axiomů Definice 5.5 se pokusíme ukázat, že pro pevně zvolenou parametrizaci $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ oblouku C , nemůže být $l(C)$ ničím jiným než určitým integrálem $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$.

Vraťme se proto na chvíli ke Kapitole 1. Podobným způsobem, kterým jsme došli k závěru, že objem tělesa $V(f, T)$ je dvojný integrál funkce f přes množinu T , bychom mohli postupovat i zde. Vyzkoušíme si však kratší cestu. Využijeme totiž již dokázané tvrzení o reprezentaci objemu $V(f, T)$ dvojným integrálem k tomu, abychom problém délky křivky na něj převedli.

Zobrazení $l(C)$ je zobrazení, které intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkci $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ přiřadí číslo podléhající axiomům (A) a (M). Za prvé si všimneme, že v axiomech se nevyskytuje funkce φ ale pouze norma její derivace $\|\varphi'\|$. To znamená, že číslo $l(C) = l(\varphi(\langle a, b \rangle))$ nebude záviset na φ , ale pouze na $\|\varphi'\|$.

Z intervalu $\langle a, b \rangle$ utvořme zcela formálně obdélník $T = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Na funkci $\|\varphi'(t)\|$ můžeme rovněž pohlížet jako na funkci dvou proměnných $f(t, u) = \|\varphi'(t)\|$. Vytvoříme pomocné zobrazení

$$\tilde{V}(f, T) = l(\varphi(\langle a, b \rangle)) \cdot (d - c),$$

kde $f(t, u) = \|\varphi'(t)\|$ a $T = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Ověříme, že toto zobrazení splňuje axiom aditivity pro objem:

Rozdělme obdélník T na dva T_1 a T_2 nejprve svislou úsečkou, viz obr. 2.1(a). Tím jsme interval $\langle a, b \rangle$ rozdělili číslem α na dva podintervaly. Tedy i oblouk C na dva kusy $C_1 = \varphi(\langle a, \alpha \rangle)$ a $C_2 = \varphi(\langle \alpha, b \rangle)$. Protože zobrazení l splňuje (A) máme

$$(5.3) \quad \tilde{V}(f, T) = l(C) = l(C_1) + l(C_2) = \tilde{V}(f, T_1) + \tilde{V}(f, T_2).$$

Pro rozdělení T vodorovnou úsečkou, viz obr. 2.1(b), dostaneme mnohem snadněji

$$\begin{aligned} \tilde{V}(f, T) &= l(\varphi(\langle a, b \rangle))(d - c) = \\ &= l(\varphi(\langle a, \beta \rangle))(d - \beta) + l(\varphi(\langle \beta, b \rangle))(\beta - c) = \\ &= \tilde{V}(f, T_1) + \tilde{V}(f, T_2). \end{aligned}$$

Jak to vypadá s monotonií výrazu $\tilde{V}(f, T)$? Protože l splňuje (M) můžeme toho využít:

$$(5.4) \quad \min_T(f) \text{ obsah}(T) = \min_{\langle a, b \rangle} \|\varphi'(t)\| (b - a)(d - c) \leq l(C) (d - c) = \tilde{V}(f, T) \leq \\ \leq \max_{\langle a, b \rangle} \|\varphi'(t)\| (b - a)(d - c) = \max_T(f) \text{ obsah}(T).$$

Z (5.3) a (5.4) plyne, že $\tilde{V}(f, T)$ splňuje axiomy aditivity a monotonie. Z Věty 1.9 dostáváme, že takové $\tilde{V}(f, T)$ je jediné a platí

$$\tilde{V}(f, T) = \iint_T f.$$

Ale hodnota $\tilde{V}(f, T)$ je rovna $l(\varphi(\langle a, b \rangle))(d - c)$, takže

$$l(\varphi(\langle a, b \rangle)) = \frac{\tilde{V}(f, T)}{d - c} = \frac{1}{d - c} \iint_T f = \frac{1}{d - c} \int_a^b \int_c^d \|\varphi'(t)\| \, du \, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Délkou tedy nemůže být nic jiného než integrál z normy derivace parametrizace. Avšak parametrizací je více. Musíme proto ukázat, že integrál tohoto typu nezávisí na volbě parametrizace tj., že

$$(5.5) \quad \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_c^d \|\psi'(s)\| \, ds$$

pro každou další parametrizaci $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$ oblouku C . Podle Tvzení 5.4 je možno nalézt transformaci parametrů $h: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ tak, že $\varphi(t) = \psi(h(t))$. Pak $\varphi'(t) = \psi'(h(t))h'(t)$. Takže

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \|\psi'(h(t))\| \cdot |h'(t)| \, dt.$$

Víme také z Tvzení 5.4, že h' nemění znaménko na (a, b) . Je-li tedy $h' > 0$ na (a, b) , pak není třeba psát absolutní hodnotu v posledním integrálu a užijeme substituci $s = h(t)$. Tím dostaneme

$$\int_a^b \|\psi'(h(t))\| h'(t) \, dt = \int_c^d \|\psi'(s)\| \, ds.$$

Je-li $h' < 0$ na (a, b) , pak $|h'(t)| = -h'(t)$. Zároveň ale je funkce h klesající. Při té samé substituci jako prve se změní pořadí mezi c a d :

$$\int_a^b \|\psi'(h(t))\| |h'(t)| \, dt = - \int_d^c \|\psi'(s)\| \, ds = \int_c^d \|\psi'(s)\| \, ds.$$

Ověřili jsme tak rovnost (5.5), a tedy vzorec pro délku oblouku nezávisí na zvolené parametrizaci. Tím je důkaz věty dokončen. \square

Uvažujme nyní obecnou křivku C . Pro její parametrizaci φ existuje dělení definičního oboru $\langle a, b \rangle$ na intervaly s krajními body $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b$ tak, že množiny $C_i = \varphi(\langle t_i, t_{i+1} \rangle)$, $i = 1, \dots, n$, jsou oblouky tvořící dělení křivky C . Délka $l(C)$ křivky je pak

$$l(C) = l(C_1) + l(C_2) + \dots + l(C_n).$$

Z Věty 5.7 víme, že pro oblouky C_i platí $l(C_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi'(t)\| \, dt$, a proto

$$(5.6) \quad l(C) = \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Ukažme dále, že ani hodnota $l(C)$ definovaná rovností (5.6) nezávisí na výběru parametrizace. Mějme tedy jinou parametrizaci $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$ křivky C . Ta nám dává jisté dělení intervalu $\langle c, d \rangle$, a tím i dělení křivky C na oblouky K_1, \dots, K_m obecně jiné než byly oblouky C_1, \dots, C_n . Stačí ukázat, že rozdělíme-li křivku jednou na oblouky C_1, \dots, C_n a podruhé na oblouky K_1, \dots, K_m , je $\sum_{i=1}^n l(C_i) = \sum_{j=1}^m l(K_j)$. Průnik $C_i \cap K_j$ oblouků C_i a K_j je buďto oblouk, bod nebo prázdná množina. Zřejmě $l(C_i \cap K_j) = 0$ v posledních dvou jmenovaných případech. Z aditivity máme následující vztahy platné pro všechny možné hodnoty indexů i, j :

$$l(C_i) = \sum_{j=1}^m l(C_i \cap K_j) \quad l(K_j) = \sum_{i=1}^n l(C_i \cap K_j).$$

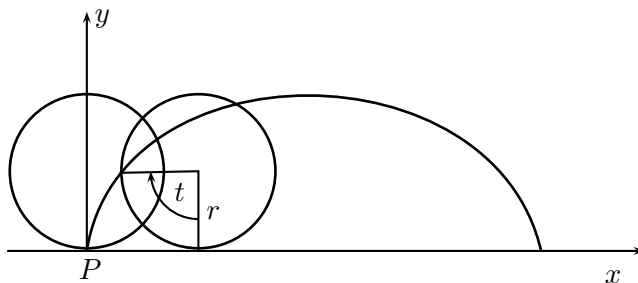
Využitím těchto vztahů s pomocí změny pořadí sumace:

$$l(C) = \sum_{i=1}^n l(C_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l(C_i \cap K_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n l(C_i \cap K_j) = \sum_{j=1}^m l(K_j).$$

Ukázali jsme, že hodnota integrálu v (5.6) je pro všechny parametrizace stejná.

Příklad 5.8. Vypočtěte dráhu l , kterou urazí střed odrazového sklíčka připevněného na obvodu jízdního kola o poloměru r , při jednom otočení kola. Předpokládáme přitom, že jízdní kolo se pohybuje po rovné cestě a bez klouzání.

Při idealizaci této úlohy se jedná o výpočet délky křivky, kterou vytvoří pevný bod P ležící na valíci se kružnici o poloměru r . Uvedená křivka se nazývá cykloida a je znázorněna na obr. 5.5.



Obr. 5.5.

Parametrizaci cykloidy lze získat pomocí parametru t udávajícího úhel, o který se bod P při svém pohybu po obvodu kružnice otočil. Otočí-li se bod P při svém pohybu o úhel t , musí střed valíce se kružnice urazit stejnou dráhu, tj. rt . Souřadnice bodu P odpovídající tomuto parametru tedy budou

$$\begin{aligned}x &= rt - r \sin t, \\y &= r - r \cos t.\end{aligned}$$

Máme k dispozici parametrizaci $\varphi(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a můžeme použít Větu 5.7.

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \|(r - r \cos t, r \sin t)\| \, dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \, dt \\&= \sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4r \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8r.\end{aligned}$$

Při uvedeném pohybu jízdního kola tedy střed odrazového sklíčka urazí dráhu $8r$. Jízdní kolo samotné se při tom posune o $2\pi r \doteq 6,28r$.

3 Cvičení

Úloha. Určete délku l asteroidy o rovnici $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

Řešení. Danou křivku můžeme parametrizovat zobrazením

$$\varphi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Ve shodě s Větou 5.7 pak máme

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \|(-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} \, dt \\ &= 3a \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| \, dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt = 6a \left[\frac{-\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte délku části kuželové spirály (n závitů) definované parametrizací

$$\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t, t),$$

kde $t \in \langle 0, 2n\pi \rangle$.

Řešení. Bezprostřední aplikací Věty 5.7 získáme délku l integrací funkce

$$\|\varphi'(t)\| = \|(-t \sin t + \cos t, t \cos t + \sin t, 1)\| = \sqrt{2 + t^2}.$$

přes interval parametrizace. Tedy

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2n\pi} \sqrt{2 + t^2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2n\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1 + u^2} \, du \\ &= 2 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^{\sqrt{2}n\pi} \\ &= \sqrt{2}n\pi \sqrt{1 + 2n^2\pi^2} + \ln(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1 + 2n^2\pi^2}). \end{aligned}$$

Úloha. Určete délku l křivky C , která je v polárních souřadnicích popsána rovnicí

$$(5.7) \quad \varrho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad a > 0, \quad \varphi \in \langle 0, 3\pi \rangle.$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, můžeme dosazením za ϱ ze vztahu (5.7) získat parametrizaci Ψ :

$$\Psi(\varphi) = \left(a \sin^3 \frac{\varphi}{3} \cos \varphi, a \sin^3 \frac{\varphi}{3} \sin \varphi \right) \quad \varphi \in \langle 0, 3\pi \rangle.$$

Pak

$$\begin{aligned}\Psi'(\varphi) &= a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \left(\cos \frac{\varphi}{3} \cos \varphi - \sin \frac{\varphi}{3} \sin \varphi, \cos \frac{\varphi}{3} \sin \varphi + \sin \frac{\varphi}{3} \cos \varphi \right) \\ &= a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{3} + \varphi \right), \sin \left(\frac{\varphi}{3} + \varphi \right) \right).\end{aligned}$$

Tedy

$$\|\Psi'(\varphi)\| = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}.$$

Podle integrálního vzorce pro délku máme

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \, d\varphi = a \int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos \frac{2}{3}\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{3}{2}\pi a - \frac{3}{4}a \left[\sin \frac{2}{3}\varphi \right]_0^{3\pi} \\ &= \frac{3}{2}\pi a.\end{aligned}$$

Úloha. Určete dráhu s pohybujícího se bodu, je-li poloha v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ dána rovnicí

$$\varphi(t) = (t, t^2, t).$$

(Bod se pohybuje po parabole v prostoru.)

Řešení. Platí

$$\|\varphi'(t)\| = \|(1, 2t, 1)\| = \sqrt{2 + 4t^2}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1 \sqrt{2 + 4t^2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + (\sqrt{2}t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + u^2} \, du = \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

1. Vypočtete délku n závitů šroubovice s poloměrem $a > 0$ a výškou závitu $h > 0$.
2. Vypočtete délku rovinné křivky zadanou parametrickými rovnicemi $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, tzv. logaritmická spirála.
3. Ukažte, že pro délku l křivky, která je grafem spojitě diferencovatelné funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$.

4. Vypočtete délku grafu funkce $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
5. Vypočtete délku řetězovky $y = \cosh x$, $x \in \langle 0, a \rangle$ ($a > 0$).
6. Odvoďte vztah

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} \, d\varphi,$$

kde l je délka křivky vyjádřené v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce definovaná na intervalu $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

7. Vypočtete délku křivky, je-li v polárních souřadnicích vyjádřena rovnicí $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
8. Rovinná křivka je charakterizována následující vlastností: vzdálenost bodu na ni ležící od počátku je nepřímo úměrná úhlu, který průvodič tohoto bodu svírá s kladnou částí osy x . Víme dále, že křivka prochází bodem $(\cos 1, \sin 1)$. Vypočtete délku té části křivky, pro kterou jsou úhly průvodiče v intervalu $\langle 3/4, 4/3 \rangle$.
9. Určete délku spirály mající v polárních souřadnicích tvar $\varrho = e^{-3\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
10. Určete délku křivky v \mathbb{R}^3 dané rovnostmi $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$, $a > 0$, přičemž krajní body této křivky jsou body $(0, 0, 0)$ a (x_0, y_0, z_0) .
11. Hmotný bod se pohybuje tak, že poloha v čase t je $(\sin t, \cos t, \frac{t^2}{2})$. Určete velikost dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
12. Rozhodněte která křivka má větší délku
 - a) kružnice o poloměru a
 - b) elipsa s poloosami $\frac{a}{2}$, $2a$.

Výsledky.

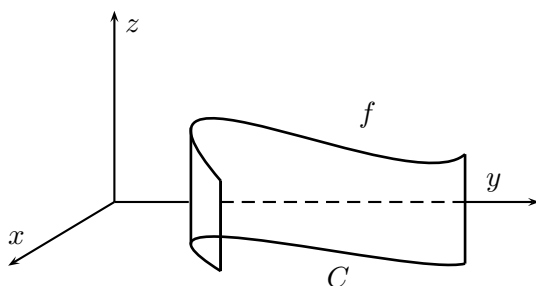
1. $2\pi n \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$; 2. $\sqrt{2}$; 4. 4; 5. $\sinh a$; 7. $8a$; 8. $\ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}$; 9. $\frac{\sqrt{10}}{3}(1 - e^{-6\pi})$; 10. $|x_0| + |z_0|$, kde $|x_0| < a$; 11. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$; 12. délka(elipsy) > délka(kružnice).

Kapitola 6

Křivkový integrál funkce

1 Definice a způsob výpočtu

Hlavním motivem pro definici určitého integrálu funkce jedné proměnné byla úloha stanovit obsah oblasti omezené grafem dané funkce a intervalem na ose x . Řada aplikací si však vyžaduje uvažovat obecnější případ, ve kterém je interval nahrazen křivkou. Tuto úlohu můžeme formulovat následovně. Je dána rovinná křivka C a nezáporná spojitá funkce $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. Jak veliký je povrch plochy, jejíž spodní okraj je tvořen křivkou C v souřadnicové rovině xy a horní okraj grafem funkce f ? (viz obr. 6.1.)

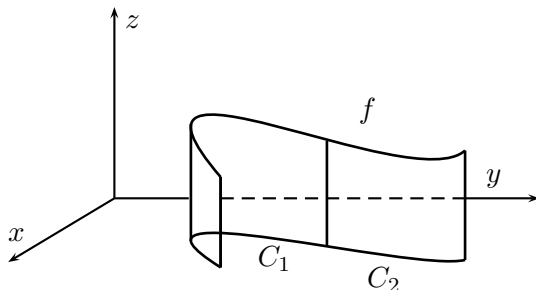


Obr. 6.1.

Označme tuto hledanou hodnotu symbolem $S(f, C)$. V „praktické“ formulaci problému je $S(f, C)$ například plocha plotu, jehož půdorys je tvořen křivkou C a který nemá všude stejnou výšku. (Výška odpovídající bodu (x, y) v půdorysu je $f(x, y)$.)

S podobnou otázkou jsme se setkali již v předchozích kapitolách při definici a výpočtu objemu tělesa a délky křivky. Opět si víme rady v některých speciálních případech (například povrch válce), postrádáme však definici obsahu pro obecnou křivku C a obecnou spojitou funkci f . Naštěstí nejen problémy, ale metody jejich řešení jsou v matematice často analogické. Inspirováni úspěšným použitím axiomatické metody při problému objemu tělesa a délky křivky, pokusíme se uplatnit stejný přístup i při stanovení obsahu uvedené plochy. Formulujme si proto pokud možno co nejjednodušší požadavky, které musí hodnota $S(f, C)$ splňovat. Především budeme místo křivky uvažovat pouze oblouk. Najdeme-li odpověď pro oblouk, pak ji budeme znát i pro křivku.

Nechť C_1, C_2 rozdělení oblouku C . Pak celkový obsah plochy nad obloukem C by měl být roven součtu obsahů nad oblouky C_1, C_2 , jak je znázorněno na obrázku obr. 6.2.

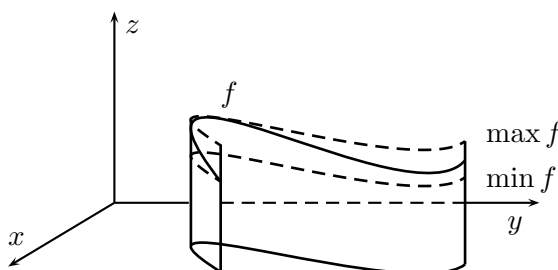


Obr. 6.2.

Vyjádřeno rovnicí:

$$S(f, C) = S(f, C_1) + S(f, C_2).$$

Tuto vlastnost nazveme *aditivitou plochy*. Vycházejí ze samozřejmé představy, že větší plocha má větší obsah, dospějeme k názoru, že hodnota $S(f, C)$ bude nejvýše rovna obsahu plochy se základnou C a konstantní výškou $\max_C(f)$. Podobně, $S(f, C)$ bude jistě nejmeně rovno obsahu plochy se základnou C a konstantní výškou $\min_C(f)$, viz. obr. 6.3.



Obr. 6.3.

Je jasné, že povrch plochy s konstantní výškou v je roven součinu $l(C) \cdot v$, délky půdorysu $l(C)$ a výšky v . Tímto můžeme náš požadavek vyjádřit nerovností

$$\min_C(f) \cdot l(C) \leq S(f, C) \leq \max_C(f) \cdot l(C).$$

Ve schodě s terminologií předchozích kapitol nazveme tuto vlastnost *monotonií obsahu plochy*. Náš seznam přirozených vlastností plochy bychom mohli dále rozšiřovat o další položky. Ukážeme si však, že aditivita a monotonie již tento pojem jednoznačně vymezují. Dostáváme tak základní tvrzení této kapitoly.

Věta 6.1. *Existuje pouze jediné zobrazení, které každému oblouku C a spojitě funkci f na C přiřadí číslo $S(f, C)$ tak, že jsou splněny následující axiomy:*

(A) *aditivita:*

$$S(f, C_1) + S(f, C_2) = S(f, C),$$

kdykoliv je C_1, C_2 rozdělení oblouku C na dva na sebe navazující oblouky.

(M) *monotonie*:

$$\min_C(f) \cdot l(C) \leq S(f, C) \leq \max_C(f) \cdot l(C).$$

Důkaz. Myšlenky tohoto důkazu jsou velice podobné důkazu Věty 1.9. Proto již budeme stručnější při komentování jednotlivých kroků.

Nejdříve ukažme, že zobrazení $S(f, C)$ (o kterém zatím ani nevíme, že existuje) je jednoznačně určeno.

Pro dané dělení $\mathcal{D} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ oblouku C a spojitou funkci f na křivce C budeme definovat následující analogie horních a dolních integrálních součtů funkce jedné proměnné:

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^n \max_{C_i}(f) \cdot l(C_i) \\ \underline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^n \min_{C_i}(f) \cdot l(C_i).\end{aligned}$$

Monotonie a aditivita zobrazení $S(f, C)$ nyní implikuje (zcela stejně jako v Tvzení 1.8), že

$$(6.1) \quad \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq S(f, C) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Skutečně,

$$\begin{aligned}S(f, C) &= S(f, C_1) + S(f, C_2) + \dots + S(f, C_n) \leq \\ &\leq \max_{C_1}(f) \cdot l(C_1) + \max_{C_2}(f) \cdot l(C_2) + \dots + \max_{C_n}(f) \cdot l(C_n) = \overline{S}(f, \mathcal{D}).\end{aligned}$$

Obrácená nerovnost se ukáže analogicky. Ze vztahu (6.1) dále vyplývá, že

$$(6.2) \quad \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq S(f, C) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}),$$

kde infima a suprema se v tomto případě uvažují vzhledem ke všem možným dělením \mathcal{D} oblouku C . Čtenář znalý postupu z první kapitoly teď jistě tuší, že se pokusíme dokázat rovnost

$$(6.3) \quad \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

To by pak podle (6.1) znamenalo jedinou možnost jak definovat $S(f, C)$. Důkaz rovnosti (6.3) je opět založen na důležité vlastnosti spojitých funkcí na uzavřených intervalech, kterou je stejnoměrná spojitost. Je-li $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ parametrizace oblouku, pak i složená funkce

$$g = f \circ \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

je opět spojitá funkce. Každá funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu je stejnoměrně spojitá. Pro předem zadané $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $|g(t_1) - g(t_2)| \leq \varepsilon$, jakmile $|t_1 - t_2| < \delta$. Zvolme nyní dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ tak jemné, že dělicí intervaly I_1, I_2, \dots, I_k mají délku menší než δ . Pak obrazy těchto intervalů $\varphi(I_1), \varphi(I_2), \dots, \varphi(I_k)$

jsou oblouky tvořící jisté dělení \mathcal{D} oblouku C . Označme $C_i = \varphi(I_i)$, $i = 1, \dots, k$. Pro jakkoliv zvolené body $\varphi(t_1), \varphi(t_2)$ na jednom z oblouků C_i pak máme

$$|f(\varphi(t_1)) - f(\varphi(t_2))| = |g(t_1) - g(t_2)| \leq \varepsilon.$$

To automaticky znamená, že oscilace funkce f na jednotlivých obloucích je menší než ε , tj.

$$\max_{C_i}(f) - \min_{C_i}(f) \leq \varepsilon,$$

pro všechny oblouky C_i , $i = 1, \dots, k$. Dostáváme tedy následující odhady

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{D}) - \underline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^k (\max_{C_i}(f) - \min_{C_i}(f)) l(C_i) \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^k l(C_i) = \varepsilon \cdot l(C). \end{aligned}$$

Protože ε můžeme volit libovolně, implikuje předchozí nerovnost, že

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \geq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Obrácená nerovnost platí vždy, tudíž

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Pro definování obsahu $S(f, C)$ tedy nemáme jinou volbu než hodnotu

$$S(f, C) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Zbývá tedy jen dokázat, že tato volba vyhovuje axiomům (A) a (M).

Nejdříve ověříme vlastnost monotonie. Zvolíme si dělení oblouku C obsahující pouze jediný prvek: $\mathcal{D} = \{C\}$. Pak totiž

$$\begin{aligned} (6.4) \quad \min_C(f) \cdot l(C) &= \underline{S}(f, \{C\}) \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \\ &= \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \{C\}) = \max_C(f) \cdot l(C), \end{aligned}$$

což je axiom (M).

Podívejme se nyní na vlastnost aditivity. Nechť $\{C_1, C_2\}$ je rozdělení oblouku C . Zvolme dělení \mathcal{D}_1 oblouku C_1 a dělení \mathcal{D}_2 oblouku C_2 . Pak $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ tvoří dělení oblouku C . Platí

$$\begin{aligned} (6.5) \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{K \in \mathcal{D}} \max_K(f) \cdot l(K) = \sum_{K \in \mathcal{D}_1} \max_K(f) \cdot l(K) + \sum_{K \in \mathcal{D}_2} \max_K(f) \cdot l(K) \\ &= \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \overline{S}(f, \mathcal{D}_2). \end{aligned}$$

Na druhé straně ze stejných důvodů

$$(6.6) \quad \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \underline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Z rovnosti (6.5) plyne

$$S(f, C) = \inf_{\mathcal{D}} \bar{S}(f, \mathcal{D}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{D}) = \bar{S}(f, \mathcal{D}_1) + \bar{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Přejdeme-li nyní na pravé straně k infimu přes všechna dělení oblouku C_1 a všechna dělení oblouku C_2 dostaneme

$$(6.7) \quad S(f, C) \leq S(f, C_1) + S(f, C_2).$$

Zcela stejně z nerovnosti (6.6) plyne

$$S(f, C) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \underline{S}(f, \mathcal{D}_1) + \underline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Přejdeme-li nyní na pravé straně k supremu přes všechna dělení částí C_1 a C_2 máme

$$(6.8) \quad S(f, C) \geq S(f, C_1) + S(f, C_2).$$

Spojení nerovností (6.7) a (6.8) okamžitě dává

$$S(f, C) = S(f, C_1) + S(f, C_2),$$

což je vlastnost aditivity kterou jsme chtěli dokázat. Tímto je důkaz uzavřen. \square

Přirozené geometrické požadavky nás přivedly k zobecnění určitého integrálu funkce jedné proměnné:

Definice 6.2. *Nechť f je spojitá funkce definovaná na oblouku C . Číslo $S(f, C)$, které získáme jako hodnotu zobrazení splňujícího axiomu (A) a (M) Věty 6.1 se nazývá **křivkový integrál funkce f podél oblouku C** . Pro jeho značení budeme používat symbol*

$$\int_C f \, ds, \quad \text{nebo stručnější zápis} \quad \int_C f.$$

Někdy se tento integrál nazývá křivkový integrál 1. druhu.

Je-li f nezáporná funkce a C rovinný oblouk, $\int_C f$ dává velikost obsahu plochy

$$M = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in C, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Poznámka 6.3. Definice 6.2 zavádí křivkový integrál pro libovolnou spojitou funkci f a oblouk C v \mathbb{R}^n . Naše geometrická motivace se týkala případu, kdy C byla rovinnou křivkou a f nezápornou funkcí. Integrál přes prostorovou křivku již tento bezprostřední geometrický význam nemá. V prostoru \mathbb{R}^3 nemáme další nezávislý směr nad křivkou C . Ledaže bychom opustily třírozměrné omezení a chápali hodnoty $\int_C f \, ds$ jako obsah plochy $M = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z) \in C, 0 \leq t \leq f(x, y, z)\}$ ve čtyřrozměrném prostoru, tj. jako

plochu hypotetického plotu, jehož základna je v třírozměrném prostoru a má tvar křivky C , přičemž výšku $f(x, y, z)$ nanášíme do čtvrtého rozměru. I takové plochy mají svůj význam, například v teorii relativity.

Křivkovému integrálu můžeme nicméně vždy přisoudit následující jasný fyzikální význam. Představme si, že oblouk C je idealizací fyzikálního tělesa, jehož dva rozměry jsou zanedbatelné vůči třetímu (např. tenký drát). Nechť funkce f popisuje hustotu rozložení hmoty na C . Ptáme se, jaká je celková hmotnost oblouku C . Označme toto zatím neznámé nezáporné číslo symbolem $m(f, C)$. Je zřejmé, že pro rozdělení C_1, C_2 oblouku C je celková hmotnost rovna součtu dílčích hmotností tj.

$$m(f, C) = m(f, C_1) + m(f, C_2).$$

Je-li C homogenní hmotný oblouk, tj. je-li hustota f konstantní funkce, pak celková hmotnost je rovna součinu délky oblouku a hustoty. Konečně, zcela přirozeně očekáváme, že zmenšením či zvětšením hustoty se stejným způsobem změní i hmotnost. Tedy číslo $m(f, C)$ vždy respektuje nerovnost

$$\min_C(f) \cdot l(C) \leq m(f, C) \leq \max_C(f) \cdot l(C).$$

Jinak řečeno, zobrazení přiřazující každému oblouku C a hustotě f hmotnost $m(f, C)$ splňuje axiomy (A) a (M). Podle Věty 6.1 je tedy nutně

$$m(f, C) = \int_C f.$$

Křivkový integrál tedy můžeme také chápat jako hmotnost křivky s danou (obecně nikoliv konstantní) hustotou.

Víme již, jak obsah plochy nad obloukem či hmotnost oblouku definovat a zajímá nás přirozeně otázka, jakým způsobem je spočítat.

Věta 6.4. *Nechť f je spojitá funkce definovaná na oblouku C . Pro každou parametrizaci $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ platí*

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Speciálně, hodnota integrálu vpravo nezávisí na parametrizaci.

Důkaz. Nechť C je oblouk s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ a nechť f je funkce spojitá na C . Nejprve ukážeme, že integrál $\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt$ nezávisí na volbě parametrizace.

Zvolme si jinou parametrizaci $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$ téhož oblouku. Podle Tvzení 5.4 existuje spojitá transformace parametru

$$h: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle,$$

že $\varphi(t) = \psi(h(t))$ a h' je spojitá a nenulová na (a, b) Tím můžeme psát

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b f(\psi(h(t))) \|\psi'(h(t))\| |h'(t)| \, dt.$$

Stejným rozбором případů $h' > 0$ a $h' < 0$ jako v důkaze Věty 5.7 dostaneme, že substitucí $s = h(t)$ máme

$$\int_a^b f(\psi(h(t))) \|\psi'(h(t))\| |h'(t)| \, dt = \int_a^b f(\psi(s)) \|\psi'(s)\| \, ds.$$

Vidíme, že hodnota zkoumaného integrálu nezávisí na parametrizaci.

Teď ovšem má smysl definovat pomocné zobrazení

$$\tilde{S}(f, C) = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt,$$

pro oblouk C a spojitou funkci f na C . Zjistíme, jaké vlastnosti má zobrazení \tilde{S} . Díky aditivě integrálu vůči integračnímu oboru máme pro dělení $C_1 = \varphi(\langle a, \alpha \rangle)$, $C_2 = \varphi(\langle \alpha, b \rangle)$ rovnost

$$\begin{aligned} \tilde{S}(f, C_1) + \tilde{S}(f, C_2) &= \int_a^\alpha f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt + \int_\alpha^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt = \\ &= \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt = \tilde{S}(f, C). \end{aligned}$$

Zobrazení \tilde{S} vyhovuje axiomu aditivity pro křivkový integrál. Dále monotonie jednorozměrného integrálu zaručí, že

$$\tilde{S}(f, C) = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt \leq \max_C(f) \cdot \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \max_C(f) \cdot l(C).$$

Zcela stejně platí i

$$\tilde{S}(f, C) = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt \geq \min_C(f) \cdot \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \min_C(f) \cdot l(C).$$

Tímto jsme odvodili, že zobrazení $\tilde{S}(f, C)$ vyhovuje axiomům (A) a (M) z Věty 6.1. Na základě jednoznačnosti uvedené ve Větě 6.1 musí platit $\tilde{S}(f, C) = S(f, C)$. Protože $S(f, C)$ je jiné označení pro křivkový integrál (viz Definici 6.2), je důkaz hotov. \square

Příklad 6.5. Určete velikost S části pláště válce $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, omezené shora rovinou $x + y + z = 2$ (znázorněte si daný útvar na obrázku).

Jedná se o plochu, jejímž půdorysem je oblouk C (jednotková kružnice v rovině xy se středem v počátku) a která je shora omezená grafem funkce $f(x, y) = 2 - x - y$. Dostáváme tak, že hledaný plášť má velikost

$$S = \int_C (2 - x - y) \, ds.$$

Volbou parametrizace $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ máme

$$S = \int_0^{2\pi} (2 - \cos t - \sin t) \, dt = 4\pi.$$

Zatím máme zaveden křivkový integrál podél oblouků. Protože každá křivka C se skládá z konečně mnoha na sebe navazujících oblouků C_1, \dots, C_n , položíme

$$(6.9) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \dots + \int_{C_n} f \, ds.$$

Toto bude definovat *křivkový integrál funkce f podél křivky C* .

Ukázali jsme, že křivkový integrál reprezentuje hmotnost křivky se zadanou funkcí hustoty. Podobně je možno pomocí křivkového integrálu $\int_C f \, ds$ stanovit celkové množství dané kvantity (náboje, tepla, apod.), známe-li funkci f popisující její koncentraci podél křivky C . Z tohoto pohledu můžeme poměr celkového množství (tj. integrálu $\int_C f \, ds$) k délce křivky chápat jako střední hodnotu funkce f na dané křivce. Následující věta říká, že střední hodnota je vždy rovna hodnotě funkce f v nějakém bodě uvažované křivky.

Věta 6.6. *Nechť f je spojitá funkce na křivce C . Pak existuje bod $(x, y, z) \in C$ tak, že*

$$\int_C f \, ds = f(x, y, z) \cdot l(C).$$

Důkaz. Nechť $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ je parametrizace křivky C . Funkce $f \circ \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která tento interval zobrazí na jistý interval $\langle c, d \rangle$, viz [1], Kapitola 4. Tedy $f(C) = \langle c, d \rangle$. Na druhé straně monotonie křivkového integrálu říká, že

$$c \cdot l(C) = \min_C(f) \cdot l(C) \leq \int_C f \leq \max_C(f) \cdot l(C) = d \cdot l(C).$$

Tedy $c \leq \frac{1}{l(C)} \int_C f \leq d$. Existuje proto alespoň jeden bod $(x, y, z) \in C$ tak, že

$$\frac{1}{l(C)} \int_C f = f(x, y, z).$$

□

2 Cvičení

Úloha. Určete $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, kde C je kružnice v rovině se středem v bodě $(1/2, 0)$ a s poloměrem $1/2$.

Řešení. Volbou parametrizace

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t \right), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

máme $\|\varphi'(t)\| = 1/2$ a tedy

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin t\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos t} \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} \, dt = \int_0^\pi |\cos u| \, du = 2. \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte obsah plotu S , jehož půdorys tvoří elipsa

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

víme-li, že výška v bodě (x, y) je rovna $\sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2}$.

Řešení. Hledaný obsah S je dán křivkovým integrálem

$$S = \int_C \sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2} \, ds.$$

Volba parametrizace $\varphi(t) = (10 \cos t, 5 \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pak dá

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2} \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25 \cos^2 t + 100 \sin^2 t} \cdot \sqrt{100 \sin^2 t + 25 \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 25 \cos^2 t + 100 \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 25 \frac{1 + \cos 2t}{2} + 100 \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = 125\pi. \end{aligned}$$

Úloha. Určete hmotnost m drátu ve tvaru oblouku cykloidy

$$C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\},$$

je-li hustota rovna druhé mocnině vzdálenosti daného bodu od osy x .

Řešení. V tomto případě je hustota dána funkcí $f(x, y) = y^2$ a celková hmotnost m je dána integrálem $\int_C f \, ds$. Výpočtem pak dostáváme

$$\begin{aligned} m &= \int_C y^2 \, ds = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 r \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = r^3 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 4 \left(\sin^4 \frac{t}{2} \right) \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \, dt \\ &= 16r^3 \int_0^{\pi} \sin^5 z \, dz = \frac{256}{15} r^3. \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte

$$\int_C xy \, ds,$$

kde $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.

Řešení. Uvedená křivka je kružnicí se středem v počátku a poloměrem 1, která leží v rovině $x + y + z = 0$. K její parametrizaci postačí znát „vnitřní“ (ortogonální) souřadnice dané roviny. Tyto souřadnice jsou dány libovolnou dvojicí \vec{v}_1, \vec{v}_2 navzájem kolmých a jednotkových vektorů, které leží v rovině $x + y + z = 0$. Např. vektor $(1, -1, 0)$ leží v dané rovině. Nalezneme nějaký k němu kolmý, který rovněž leží v té samé rovině, např. $(1, 1, -2)$. Nyní je znormujeme, aby měli velikost jedna. Tak

$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, -2).$$

Křivku C pak můžeme parametrizovat zobrazením

$$\varphi(t) = (\cos t)\vec{v}_1 + (\sin t)\vec{v}_2, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Vzhledem k tomu, že $\|\varphi'(t)\| = 1$, máme,

$$\begin{aligned} \int_C xy \, ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{6} \sin^2 t \right) dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{3}\pi. \end{aligned}$$

Úloha. Určete $\int_C xyz \, ds$, kde křivka C je dána soustavou podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}, \quad x, y, z \geq 0, r > 0.$$

Řešení. Křivka C je částí průniku válce a kulové plochy. Jedna z možných parametrizací je

$$\varphi(t) = \left(\frac{r}{2} \cos t, \frac{r}{2} \sin t, \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} \right) = \frac{r}{2} \left(\cos t, \sin t, \sqrt{3} \right), \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Tedy $\|\varphi'(t)\| = \frac{r}{2}$ a

$$\int_C xyz \, ds = \frac{r}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{4} \cos t \sin t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \, dt = \frac{r^3 \sqrt{3}}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt = \frac{r^3 \sqrt{3}}{32}.$$

Úloha. Určete střední hodnotu H funkce $f(x, y) = x$ na části paraboly $y = x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Tato střední hodnota je vlastně rovna x -ové souřadnici těžiště uvedené křivky.

Řešení. Spočítejme nejdříve délku křivky. Volba parametrizace $\varphi(t) = (t, t^2)$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$ dá

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \left[\frac{t}{2} \sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{4} \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Dále máme

$$\int_C x \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt.$$

Užitím substituce $u = 1 + 4t^2$ dostaneme

$$\int_C x \, ds = \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} \, du = \frac{1}{8} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{12} (\sqrt{125} - 1).$$

Proto

$$H = \frac{\frac{1}{12}(\sqrt{125} - 1)}{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{125} - 1}{6\sqrt{5} + 3\ln(2 + \sqrt{5})}.$$

Vypočítejte následující křivkové integrály

1. $\int_C \frac{1}{x-y} \, ds$, kde C je úsečka s krajními body $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$.
2. $\int_C xy \, ds$, kde $C = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \, x, y > 0\}$, $a \neq b$.
3. $\int_C y \, ds$, kde C je část Bernoulliho lemniskáty $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x, y > 0$.
4. $\int_C (x^{4/3} + y^{4/3}) \, ds$, kde C je asteroida o rovnici $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
5. $\int_C \sqrt{2y} \, ds$, kde C je část cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
6. $\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, ds$, kde C je závit kuželové šroubovice $\{(t \sin t, t \cos t, t) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$.

7. $\int_C x^2 \, ds$, kde C je dána rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, $x + y + z = 0$.
8. $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$, kde C je oblouk šroubovice $\{(a \cos t, a \sin t, t) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$.
9. $\int_C z \, ds$, kde C je oblouk daný soustavou rovnic $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$, který má počáteční bod $(0, 0, 0)$ a koncový $(2, 0, 2)$.
10. Základna plotu je křivka $y = \frac{x^2}{2}$, kde $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$; výška plotu nad bodem (x, y) je $\frac{1}{1+x^2}$. Určete plochu plotu.
11. Vypočítejte obsah pláště zobecněného válce $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq \frac{xy}{2r}\}$.
12. Najděte plochu části pláště válce $x^2 + y^2 = rx$, která se nachází uvnitř koule se středem v počátku a poloměrem r .
13. Určete hmotnost paraboly o rovnici $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$, $p > 0$, s hustotou $\rho(x, y) = |y|$.
14. Určete hmotnost oblouku drátu ve tvaru křivky $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$, kde $t \in \langle 0, t_0 \rangle$, za předpokladu, že hustota je nepřímě úměrná vzdálenosti od počátku souřadnic a v bodě $(1, 0, 1)$ je rovna jedné.
15. Nalezněte těžiště oblouku cykloidy $\{(a(t - \sin t), a(1 - \cos t) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$. Hustota je konstantní funkce.
16. Nalezněte těžiště homogenního obvodu sférického trojúhelníku $T = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x, y, z \geq 0\}$.
17. Určete momenty setrvačnosti závitů šroubovice $\{(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi}t) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ vzhledem k souřadnicovým osám.
18. Nalezněte moment setrvačnosti homogenní kružnice o poloměru a vzhledem k přímce procházející jejím středem
 - a) kolmé na rovinu kružnice
 - b) ležící v rovině kružnice
 - c) svírající s rovinou kružnice úhel α .

Výsledky.

1. $\sqrt{5} \ln 2$; 2. $\frac{ab(b^3 - a^3)}{3(b^2 - a^2)}$; 3. $1 - \sqrt{2}/2$; 4. $4a^{7/3}$; 5. $4\pi a^{3/2}$; 6. $\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1]$; 7. $\frac{2\pi a^3}{3}$;
8. $\frac{8\pi^3}{3a^2}\sqrt{1 + a^2}$; 9. $2(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 10. $2 \ln(2 + \sqrt{3})$; 11. $\frac{r^2}{2}$; 12. $4r^2$;
13. $\frac{2}{3}p^2[(1 + 1/p)^{3/2} - 1]$; 14. $t_0\sqrt{3}$; 15. $(\pi a, \frac{4}{3}a)$; 16. $\frac{4a}{3\pi}(1, 1, 1)$; 17. $I_x = I_y = (\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3})\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$, $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$; 18. a) $2\pi a^3$ b) πa^3 c) $\pi a^3(1 + \sin^2 \alpha)$.

Kapitola 7

Křivkový integrál vektorového pole

1 Základní pojmy

Křivkový integrál vektorového pole je modifikací křivkového integrálu skalární funkce, která vznikla z potřeb aplikací ve fyzice, chemii a ostatních přírodních vědách. Dříve, než přistoupíme k jeho podrobnějšímu výkladu, budeme se zabývat vlastnostmi vektorových polí. Vektorové pole v \mathbb{R}^n je vlastně zobrazení, které každému bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ přiřadí nějaký n -rozměrný vektor $\vec{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$.

Definice 7.1. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) se nazývá **vektorové pole** na množině A .*

Nás budou zajímat téměř výlučně případy $n = 2$ a $n = 3$ tj. rovinné a prostorové pole. Ve fyzikální interpretaci chápeme hodnotu $\vec{F}(x, y, z)$ pole \vec{F} v bodě $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ jako vektor znázorňující silové působení daného fyzikálního pole v bodě (x, y, z) . Každé vektorové pole v \mathbb{R}^3 můžeme rozložit do složek daných násobky báze vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a vyjádřit tak zápisem

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k},$$

kde F_1, F_2, F_3 jsou funkce tří proměnných, které budeme nazývat *složkami* vektorového pole \vec{F} . Jiný způsob zápisu pole $\vec{F}(x, y, z)$ je

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Základní pojmy a vlastnosti funkce více proměnných můžeme přenést i na vektorové pole. Řekneme například, že vektorové pole je spojitě, jsou-li spojitě všechny jeho složky, apod.

Příklad 7.2. Vyjádřete analyticky (tj. vzorcem) gravitační pole vytvořené hmotným bodem o jednotkové hmotnosti umístěným v počátku souřadnicového systému.

Podle Newtonova gravitačního zákona je takové pole popsáno pomocí vektoru intenzity, jehož velikost je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od počátku a který směřuje

k počátku souřadnicového systému. Tedy

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= -\frac{\kappa}{\|\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k}\|} \cdot \frac{\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k}}{\|\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k}\|} = \frac{-\kappa}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{-\kappa}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k}),\end{aligned}$$

kde κ je gravitační konstanta. Toto vektorové pole je definováno v $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Jeho první složka je funkce

$$F_1(x, y, z) = \frac{-\kappa x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Ostatní složky jsou dány analogickým vztahem. Dané vektorové pole má spojitě všechny parciální derivace ve svém definičním oboru.

Důležitým příkladem vektorového pole, který budeme potřebovat k definici vektorové verze křivkového integrálu, je tečné vektorové pole dané křivky. Začneme opět s obloukem místo křivky. Uvažujme oblouk C s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$. Derivaci parametrizace $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$ můžeme interpretovat jako vektor rychlosti, chápeme-li φ jako popis pohybu po oblouku C . Z definice oblouku víme, že vektorová funkce $\varphi(t)$ (tj. zobrazení z $\langle a, b \rangle$ do \mathbb{R}^n) je třídy C^1 . Vezměme bod $\mathbf{x} \in C$, který není ani počáteční ani koncový. To znamená, že pro něj existuje pouze jediná hodnota $t \in \langle a, b \rangle$ taková, že $\mathbf{x} = \varphi(t)$. Pak $\varphi'(t) \neq 0$.

Vektor rychlosti reprezentuje v tomto případě tečný směr k oblouku v bodě \mathbf{x} , a proto ho nazveme *tečným vektorem k C v bodě \mathbf{x}* . Normalizovaný vektor (tj. vektor s délkou jedna)

$$\vec{\tau} = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

pak nazýváme *jednotkovým tečným vektorem k oblouku C v bodě $\varphi(t)$* . Zde vidíme, že bylo vhodné uvést rovnou do definice oblouku požadavek, aby $\varphi'(t) \neq 0$. Nemusíme se nyní starat o to, abychom se při dělení vektoru $\varphi'(t)$ jeho velikostí $\|\varphi'(t)\|$ nedostali do situace, kdy dělíme nulou. Pro křivku jsou tečné vektory definovány ve všech bodech křivky až na případnou konečnou množinu výjimek. Je-li uvažovaná křivka obloukem, je tečný vektor definován v každém jeho vnitřním bodě.

Definice 7.3. *Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$. Vektorové pole $\vec{\tau}$ definované v každém bodě $\varphi(t) \in C$, kde $\varphi'(t) \neq 0$, předpisem*

$$\vec{\tau}(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|},$$

se nazývá jednotkové tečné vektorové pole křivky C (indukované parametrizací φ).

Příklad 7.4. (i) Nechť $C = \{(x, x^2) \mid x \in \langle 0, 1 \rangle\}$ je oblouk paraboly. Tento oblouk je možno parametrizovat například zobrazením

$$\varphi(t) = (t, t^2), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Počáteční bod je $\varphi(0) = (0, 0)$ a koncový $\varphi(1) = (1, 1)$. Uvedená parametrizace indukuje jednotkové tečné vektorové pole

$$(7.1) \quad \vec{\tau}_1(t, t^2) = \frac{\vec{i} + 2t\vec{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}},$$

které je definováno na celém oblouku. Lze však zvolit i jinou parametrizaci

$$(7.2) \quad \psi(s) = (1 - s, (1 - s)^2), \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

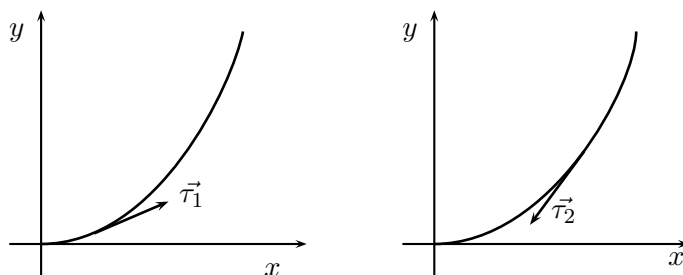
Při této parametrizaci procházíme oblouk C v opačném směru než při φ . Počáteční bod $\varphi(0) = (1, 1)$ a koncový bod $\psi(1) = (0, 0)$. Odpovídající jednotkové tečné vektorové pole bude v tomto případě pole

$$(7.3) \quad \vec{\tau}_2(1 - s, (1 - s)^2) = \frac{-\vec{i} - 2\vec{j}(1 - s)}{\sqrt{1 + 4(1 - s)^2}}.$$

Všimněme si při tom, že pro každý bod (x, x^2) na oblouku C platí

$$(7.4) \quad \vec{\tau}_1(x, x^2) = -\vec{\tau}_2(x, x^2).$$

Je-li totiž $(x, x^2) \in C$, pak v první parametrizaci mu přísluší jistá hodnota $t = x$ a ve druhé $1 - s = x$ Odtud $s = 1 - x$. Dosazením za s do (7.3) získáme (7.4). Dvojice jednotkových tečných vektorových polí $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ tak reprezentuje navzájem opačné způsoby probíhání dané paraboly, viz obr. 7.1.



Obr. 7.1.

(ii) Nechť C je obvod trojúhelníku s vrcholy $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$ a nechť $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ je jeho parametrizace. Ať už je parametrizace jakákoliv, vrcholy trojúhelníka nebudou odpovídat bodům kde φ' existuje. Tečná vektorová pole tedy nejsou definována ve vrcholech. Křivka C má právě dvě jednotková vektorová pole $\vec{\tau}$ a $-\vec{\tau}$, která odpovídají dvěma způsobům procházení obvodu. Matematicky je tečné pole $\vec{\tau}$ dáno

$$\begin{aligned} \vec{\tau}(x, y, z) &= \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \quad \text{je-li } (x, y, z) \in \overline{A_1 A_2} \\ \vec{\tau}(x, y, z) &= \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}} \quad \text{je-li } (x, y, z) \in \overline{A_2 A_3} \\ \vec{\tau}(x, y, z) &= \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} \quad \text{je-li } (x, y, z) \in \overline{A_3 A_1} \end{aligned}$$

pro $(x, y, z) \in C \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$.

V důležitém případě oblouku skutečně existují právě dvě (navzájem opačná) jednotková tečná vektorová pole. Zdůvodněme si toto tvrzení: Jsou-li $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ a $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$ dvě parametrizace oblouku C , pak existuje podle Tvrzení 5.4 transformace parametrů h zobrazující interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle c, d \rangle$ tak, že $\varphi(t) = \psi(h(t))$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Označme $\vec{\tau}_1$ a $\vec{\tau}_2$ jednotková tečná vektorová pole indukovaná parametrizacemi φ a ψ . Zvolme si bod \mathbf{x} na oblouku C . V parametrizaci φ mu přísluší jistá hodnota parametru, řekněme t : $\mathbf{x} = \varphi(t)$. V parametrizaci ψ je to obecně jiná hodnota s , tj. $\mathbf{x} = \psi(s)$. Transformace parametru h splňuje $\varphi(t) = \psi(h(t))$. Vidíme, že $s = h(t)$. Nyní

$$\vec{\tau}_1(\mathbf{x}) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}, \quad \vec{\tau}_2(\mathbf{x}) = \frac{\psi'(s)}{\|\psi'(s)\|}.$$

Ovšem, $\vec{\tau}_1(\mathbf{x})$ můžeme dále vyjádřit

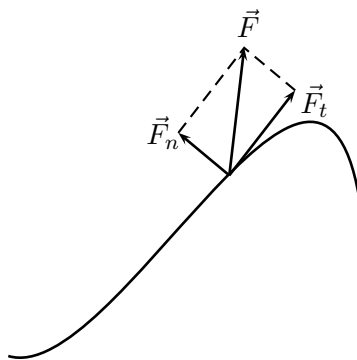
$$\vec{\tau}_1(\mathbf{x}) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{\psi'(h(t)) \cdot h'(t)}{\|\psi'(h(t))\| \cdot |h'(t)|} = \frac{\psi'(s)}{\|\psi'(s)\|} \cdot \frac{h'(t)}{|h'(t)|} = \vec{\tau}_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{h'(t)}{|h'(t)|}.$$

Vektorová pole $\vec{\tau}_1$ a $\vec{\tau}_2$ se tedy liší o výraz $\frac{h'(t)}{|h'(t)|}$, což je konstantní funkce rovna ± 1 .

Význam jednotkového tečného pole spočívá v tom, že určuje směr pohybu po dané křivce. Je tedy pro nás dodatečnou informací o tom, jakým způsobem byla křivka proběhnuta. Tuto informaci budeme nazývat orientací.

Definice 7.5. *Nechť C je křivka. Každé její jednotkové tečné pole $\vec{\tau}$ nazýváme orientací křivky C . Dvojici $(C, \vec{\tau})$ nazýváme orientovanou křivkou. Často píšeme krátce $(C, \vec{\tau}) = (C)$.*

Podle této definice je možno oblouk orientovat právě dvěma způsoby: orientace je dána tím, který ze dvou krajních bodů volíme jako počáteční a který koncový. Přistupme nyní k definici křivkového integrálu vektorového pole. Základní věcí, na kterou si musíme vždy odpovědět je otázka: Proč daný pojem zavádět? Co očekáváme od křivkového integrálu? Odpověď není příliš složitá. Chceme s jeho pomocí vypočítat práci, kterou koná hmotný bod pohybující se po dané křivce ve vektorovém poli. To je důvod zásadní a důležitý. Víme-li nyní, co má křivkový integrál znamenat, mnohem snadněji už určíme, jaká má být jeho definice. Mějme orientovanou křivku $(C, \vec{\tau})$ ve vektorovém poli \vec{F} . Z fyziky víme, že práci koná složka síly \vec{F} tečná ke směru pohybu. Je-li \mathbf{x} bod na křivce C , ve kterém je definováno jednotkové tečné vektorové pole, pak je možno vektor $\vec{F}(\mathbf{x})$ jednoznačně rozložit do směru rovnoběžného s daným jednotkovým tečným vektorem, $\vec{\tau}(\mathbf{x})$ a do směru kolmého na $\vec{\tau}(\mathbf{x})$. Viz. obr. 7.2.



Obr. 7.2.

Jinými slovy, $\vec{F}(\mathbf{x}) = \vec{F}_t(\mathbf{x}) + \vec{F}_n(\mathbf{x})$, kde $\vec{F}_t(\mathbf{x}) \perp \vec{F}_n(\mathbf{x})$, a $\vec{F}_t(\mathbf{x})$ je násobkem tečného vektoru $\vec{\tau}(\mathbf{x})$. Z analytické geometrie víme, že velikost složky $\vec{F}_t(\mathbf{x})$ je dána skalárním součinem těchto vektorů ve smyslu rovnosti

$$\vec{F}_t(\mathbf{x}) = (\vec{F}(\mathbf{x}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{x})) \vec{\tau}(\mathbf{x}).$$

Zjistili jsme, že pro náš cíl stačí znát v každém bodě \mathbf{x} na křivce velikost složky \vec{F}_t , tj. velikost skalárního součinu $\vec{F}_t \cdot \vec{\tau}(\mathbf{x})$. Místo vektoru $\vec{F}(\mathbf{x})$ v bodě křivky tak uvažujeme číslo $\vec{F}_t(\mathbf{x}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{x})$. Zredukovali jsme tak integraci pole na křivkový integrál funkce.

Definice 7.6. Necht $(C) = (C, \vec{\tau})$ je orientovaná křivka a necht \vec{F} je spojitě vektorové pole na C . **Křivkový integrál** $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s}$ z **vektorového pole** \vec{F} podél orientované křivky (C) je definován rovností

$$\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) \, ds.$$

(Výraz na pravé straně je právě integrál z funkce.) Pro označení křivkového integrálu z vektorového pole budeme též užívat stručnější symbol $\int_{(C)} \vec{F}$. Někdy se pro tento integrál používá název *křivkový integrál 2. druhu*.

Poznámka 7.7. (i) Pozorný čtenář může nyní protestovat a poukázat na jistou neko-rektnost, které jsme se v Definici 7.6 dopustili. V ní se totiž vyskytuje křivkový integrál z funkce $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$, která nemusí být spojitá ve všech bodech dané křivky. Ve vztahu (6.9) definujícím křivkový integrál z funkce f jsme požadovali, aby integrovaná funkce byla spojitá. To však $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$ být nemusí. Pro každou křivku C však existuje dělení na oblouky C_1, C_2, \dots, C_n , přičemž vektorové pole $\vec{\tau}$ je spojitě ve všech vnitřních bodech dělících oblouků. Křivkový integrál z „po částech spojitě funkce“ $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$ je pak možno definovat jako součet integrálů přes dílčí oblouky, tedy rovností

$$\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_{(C_1)} \vec{F} \, d\vec{s} + \int_{(C_2)} \vec{F} \, d\vec{s} + \dots + \int_{(C_n)} \vec{F} \, d\vec{s}.$$

Je možné ukázat, že takto definovaná hodnota integrálu nezávisí na konkrétní volbě dělení C_1, C_2, \dots, C_n . Argument je ten samý, jaký jsme použili za Větou 5.7.

(ii) Necht $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ je parametrizace křivky C , jejíž orientace je dána jednotkovým tečným vektorovým polem indukovaným touto parametrizací. Pro každé spojitě pole \vec{F} na C máme

$$(7.5) \quad \int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) \, ds = \int_a^b \left(\vec{F}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \right) \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt.$$

Hodnotu křivkového integrálu vektorového pole tedy získáme tak, že integrujeme skalární součin tohoto pole s derivací parametrizace. Pomocí vztahu (7.5) budeme hodnotu $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s}$ počítat. Způsobu výpočtu rovněž napomáhá forma zápisu často používaný ve fyzice. Např. pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ se křivkový integrál z \vec{F} značí

$$(7.6) \quad \int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_C F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz.$$

Důvod k takovému značení je následující: Necht $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$. Lze ji také zapsat pomocí tří rovnic

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \\ z &= \varphi_3(t). \end{aligned}$$

Diferenciály pak jsou

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'_1(t) \, dt \\ dy &= \varphi'_2(t) \, dt \\ dz &= \varphi'_3(t) \, dt. \end{aligned}$$

A tedy výraz v (7.5), který stojí za znaménkem integrálu je

$$\vec{F} \cdot \varphi'(t) \, dt = F_1 \cdot \varphi'_1(t) \, dt + F_2 \cdot \varphi'_2(t) \, dt + F_3 \cdot \varphi'_3(t) \, dt = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz.$$

Tímto způsobem nám tvar (7.6) naznačuje i jak integrál vypočítat.

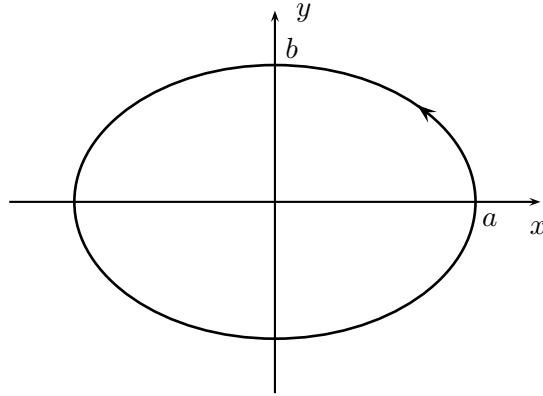
Zbývá připomenout poslední pojem svázaný s orientací uzavřené křivky.

Definice 7.8. Necht C je uzavřená jednoduchá křivka v rovině. Řekneme, že $(C, \vec{\tau})$ má **kladnou orientaci**, jestliže jednotkové tečné pole $\vec{\tau}$ je indukováno parametrizací, která při rostoucím parametru určuje pohyb po křivce C v kladném smyslu.

Příklad 7.9. Necht $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$. Vypočtěte $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s}$, kde C je kladně orientovaná horní část elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \quad y \geq 0.$$

Kladnou orientací přitom myslíme orientaci danou jednotkovým tečným vektorovým polem, které odpovídá parametrizaci definující pohyb po elipse proti směru hodinových ručiček, viz. obr. 7.3.



Obr. 7.3.

Jednou z parametrizací, která odpovídá zadané orientaci je např. parametrizace $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Jednoduchým výpočtem pak dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} &= \int_0^\pi (a^2 \cos^2 t, ab \sin t \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) \, dt \\
 &= \int_0^\pi (-a^3 \cos^2 t \sin t + ab^2 \cos^2 t \sin t) \, dt = (ab^2 - a^3) \int_0^\pi \cos^2 t \sin t \, dt \\
 &= a(b^2 - a^2) \cdot \int_{-1}^1 u^2 \, du = a(b^2 - a^2) \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} a(b^2 - a^2).
 \end{aligned}$$

V případě, kdy $a = b$ (polokružnice) je $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = 0$. Tento dílčí výsledek je možno získat i bez výpočtu, uvědomíme-li si, že vektorové pole $\vec{F} = (x^2, xy) = x(x, y)$ je v každém bodě násobek polohového vektoru, a tedy kolmé k tečnému vektorovému poli kružnice (nakreslete si obrázek).

2 Křivkový integrál jako práce

V této části si korektně potvrdíme naši motivaci křivkového integrálu pole. Opravdu reprezentuje totiž práci $A(\vec{F}, (C))$, která se vykoná v zadaném vektorovém poli \vec{F} , pohybuje-li se bod po křivce C ve smyslu její orientace. Tuto skutečnost je možno odvodit z následujících přirozených principů. Omezíme se na nejdůležitější případ, kdy (C) je orientovaný oblouk. Rozdělme oblouk C na dva orientované oblouky C_1 a C_2 tak, že orientace C_1 a C_2 jsou dány z původní orientace oblouku C . Práce odpovídající pohybu po celému oblouku C je rovna součtu prací realizovaných na dílčích úsecích dráhy C_1 a C_2 . Tedy

$$A(\vec{F}, (C)) = A(\vec{F}, (C_1)) + A(\vec{F}, (C_2)),$$

což je axiom aditivity. Jak jsme viděli dříve, vektorové pole \vec{F} je možno na křivce C vyjádřit jako součet dvou navzájem kolmých vektorových polí \vec{F}_t a \vec{F}_n , přičemž \vec{F}_t je vektorové pole rovnoběžné s tečným vektorovým polem křivky (C) . Vzhledem k tomu, že složka \vec{F}_n je vždy kolmá na směr vektoru rychlosti, bude práce $A(\vec{F}_n, (C))$ odpovídající této složce vektorového pole \vec{F} nulová. Závěrem tedy dostáváme $A(\vec{F}, (C)) = A(\vec{F}_t, (C))$. Práci koná pouze složka vektorového pole \vec{F} ve směru tečny ke křivce. Zároveň očekáváme, že práce bude tím větší, čím „více a souhlasněji“ s jednotkovým tečným polem $\vec{\tau}$ bude složka \vec{F}_t působit. Protože $\vec{F}_t = (\vec{F} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}$, je hledaná hodnota práce jistě nejvýše rovna práci, kterou vykoná vektorové pole $\vec{G} = \vec{\tau} \cdot \max_C(\vec{F} \cdot \vec{\tau})$. Podle elementární definice je práce silového pole o konstantní velikosti, jehož směr je souhlasný s vektorem rychlosti, rovna součinu velikosti síly a dráhy. Tedy

$$A(\vec{G}, (C)) = \max_C(\vec{F} \cdot \vec{\tau}) l(C).$$

To nás spolu s analogickou úvahou o minimu skalárního součinu $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$ vede k nerovnosti

$$\min_C(\vec{F} \cdot \vec{\tau}) l(C) \leq A(\vec{F}, (C)) \leq \max_C(\vec{F} \cdot \vec{\tau}) l(C).$$

Tato vlastnost vyjadřuje monotonii práce. Jinými slovy, položíme-li $f = \vec{F} \cdot \vec{\tau}$, splňuje funkce $A(\vec{F}, (C))$ axiomy (A) a (M) Věty 6.1. Musí tedy platit

$$A(\vec{F}, (C)) = \int_C f = \int_{(C)} \vec{F}.$$

Příklad 7.10. Vypočítejte práci A , která se vykoná v tíhovém poli $\vec{F}(x, y, z) = -mg\vec{k}$, při pohybu po šroubovici C s osou z a výškou závitu h . Počáteční bod pohybu je $(a, 0, 3h)$ a koncový bod $(a, 0, 0)$. (Takovouto energii získáme při sjezdu toboganu příslušných rozměrů.)

Parametrizace, která souhlasí se zadanou orientací, je

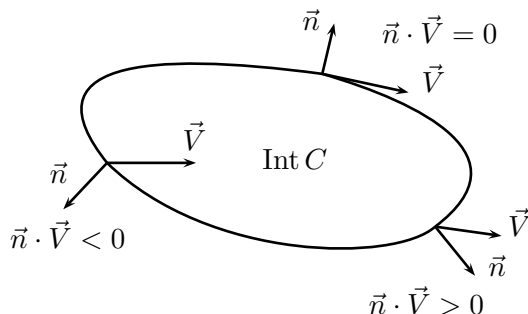
$$\varphi(t) = \left(a \cos t, -a \sin t, 3h - \frac{h}{2\pi}t \right) \quad t \in \langle 0, 6\pi \rangle.$$

(Srovnej s příkladem 5.3 (ii), kde má šroubovice opačnou orientaci.) Pak

$$\begin{aligned} A = \int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} &= -mg \int_{(C)} \vec{k} \, d\vec{s} = -mg \int_0^{6\pi} (0, 0, 1) \cdot \left(-a \sin t, -a \cos t, -\frac{h}{2\pi} \right) dt = \\ &= -mg \int_0^{6\pi} -\frac{h}{2\pi} dt = 3mgh. \end{aligned}$$

3 Křivkový integrál jako průtok

V dalším výkladu se zmíníme o jiné motivaci křivkového integrálu důležité jak z hlediska čistě matematického, tak i z hlediska aplikací. Představme si, že $C \subset \mathbb{R}^2$ je kladně orientovaná, uzavřená křivka, která tvoří hranici omezené souvislé množiny v \mathbb{R}^2 , viz obr. 7.4.



Obr. 7.4.

Tato oblast se nazývá vnitřkem křivky C a pro její označení budeme používat symbol $\text{Int } C$. Představme si nyní, že rovina je zaplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost proudění v daném bodě (x, y) je dána vektorem $\vec{V}(x, y)$. Vektorové pole \vec{V} tedy popisuje rovinné proudění. Zajímá nás přitom, jaká je celková bilance proudění v oblasti $\text{Int } C$ tj., jaké množství kapaliny (zde v metrech čtverečních) z této oblasti vyteče či do ní vteče za jednotku času. K tomu stačí určit jaké množství kapaliny proteče za jednotku času hranicí oblasti, tedy křivkou C . Označme toto, zatím hypotetické množství, symbolem $P(\vec{V}, C)$. Dohodněme se dále, že číslo $P(\vec{V}, C)$ bude kladné, jestliže kapaliny v $\text{Int } C$ ubude, tj. více vyteklo než vteklo. Pokusíme se odvodit integrální vyjádření průtoku $P(\vec{V}, C)$. Podobně jako v případě práce tak učiníme na základě čistě elementárních úvah a Věty 6.1. Opět by měl platit princip aditivity

$$P(\vec{V}, C) = P(\vec{V}, C_1) + P(\vec{V}, C_2),$$

který je matematickým vyjádřením zcela zřejmé skutečnosti, že celkový průtok křivkou C je roven součtu průtoků přes oblouky C_1 a C_2 , které tvoří její dělení. (Orientace těchto oblouků je shodná s orientací křivky C .) Pro stanovení průtoku je podstatné množství kapaliny, které proteče daným úsekem hranice ve směru kolmém na křivku. Definujme proto *jednotkové vnější normálové pole* \vec{n} křivky (C) jako vektorové pole, které každému bodu křivky (x, y) , ve kterém je definován jednotkový tečný vektor $\vec{\tau}(x, y)$, přiřadí jednotkový vektor $\vec{n}(x, y)$, který je kolmý k $\vec{\tau}(x, y)$ a míří do vnější oblasti určené křivkou C . Vektorové pole \vec{V} můžeme nyní vyjádřit ve tvaru rozkladu do dvou kolmých směrů $\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_n$, kde \vec{V}_t je vektorové pole rovnoběžné s tečným vektorovým polem $\vec{\tau}$ a \vec{V}_n je vektorové pole rovnoběžné s normálovým vektorovým polem \vec{n} .

Pole \vec{V}_t je na křivce C rovnoběžné s tečnou, a proto je průtok způsobený složkou \vec{V}_t nulový, tj. $P(\vec{V}_t, C) = 0$. Můžeme se tedy omezit na případ vektorového pole $\vec{V}_n = (\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{n}$.

Průtok tohoto proudění bude tím větší, čím větší bude skalární součin $\vec{V} \cdot \vec{n}$. Tedy tím větší, čím větší rychlostí bude kapalina proudit ve směru normály \vec{n} . Platí proto odhad:

$$(7.7) \quad P(\vec{n} \min_C(\vec{V} \cdot \vec{n}), C) \leq P(\vec{V}, C) \leq P(\vec{n} \max_C(\vec{V} \cdot \vec{n}), C),$$

Obě pole $\vec{n} \min_C(\vec{V} \cdot \vec{n})$ i $\vec{n} \max_C(\vec{V} \cdot \vec{n})$ mají konstantní velikost a směr normály. V tom případě se jedná o kapalinu, která vytéká konstantní rychlostí \vec{v} ve směru normálového vektorového pole \vec{n} . Vzhledem k nestlačitelnosti vyplní takto vyteklá kapalina plášť zobecněného válce, jehož půdorys tvoří křivka C , a jehož výška je $\|\vec{v}\|$. Zaplní tak plochu rovnou součinu délky křivky C a velikosti $\|\vec{v}\|$. Aplikací této úvahy na nerovnost (7.7) pak opět docházíme k axiomu monotonie

$$\min_C(\vec{V} \cdot \vec{n}) l(C) \leq P(\vec{V}, C) \leq \max_C(\vec{V} \cdot \vec{n}) l(C).$$

Užitím Věty 6.1 pro funkci $f = \vec{V} \cdot \vec{n}$ tedy dostáváme

$$P(\vec{V}, C) = \int_C (\vec{V} \cdot \vec{n}).$$

Je-li $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ jednotkový tečný vektor kladně orientované křivky, pak vnější normála je $\vec{n} = (\tau_2, -\tau_1)$. Tedy

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = (V_1, V_2) \cdot (\tau_2, -\tau_1) = (V_1, V_2) \cdot (\tau_2, -\tau_1) = (-V_2, V_1) \cdot \vec{\tau}.$$

Závěrem tedy dostáváme následující integrální vyjádření průtoku

$$(7.8) \quad P(\vec{V}, C) = \int_{(C)} (-V_2, V_1), \quad \text{kde } \vec{V} = (V_1, V_2).$$

Příklad 7.11. Vypočtěte jaká je bilance množství kapaliny protékající za jednotku času kruhem $x^2 + y^2 \leq r^2$, $r > 0$, je-li rychlost kapaliny v bodě (x, y) rovna $(x, 2y)$.

Podle předchozích úvah je celkové množství P dáno vztahem

$$P = \int_{(C)} (-2y, x) \, d\vec{s}$$

kde (C) je kladně orientovaná kružnice daná rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ (nakreslete si obrázek). Volbou parametrizace $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pak dostáváme

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} (-2r \sin t, r \cos t) \cdot (-r \sin t, r \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t \, dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = r^2 \int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t \, dt = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

Za jednotku času vyteče z kruhu o $3\pi r^2$ více kapaliny než vteče.

Křivkový integrál má kromě výše uvedených aplikací velký význam v teorii pole a v řadě dalších oborů. Následující příklad je jednou z mnoha ukázek jeho použití.

Příklad 7.12. Magnetické pole je tvořeno kruhovým vodičem o poloměru $a > 0$, kterým protéká konstantní proud velikosti I . Určete magnetickou indukci v ose kružnice tvořené vodičem.

Podle Biotova-Savartova zákona je vektor indukce $\vec{B}(x_0, y_0, z_0)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) , který je indukován vodičem majícím tvar křivky C , jímž protéká proud o velikosti I ve smyslu zadané orientace, dán vztahem

$$\begin{aligned}\vec{B}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{i} \int_{(C)} \frac{I}{\|\vec{r}\|^3} \left((z_0 - z) \, dy - (y_0 - y) \, dz \right) \right. \\ &\quad + \vec{j} \int_{(C)} \frac{I}{\|\vec{r}\|^3} \left((x_0 - x) \, dz - (z_0 - z) \, dx \right) \\ &\quad \left. + \vec{k} \int_{(C)} \frac{I}{\|\vec{r}\|^3} \left((y_0 - y) \, dx - (x_0 - x) \, dy \right) \right\},\end{aligned}$$

kde $\vec{r}(x, y, z) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. (Mnemotechnickou pomůckou pro tento vzorec je zápis

$$\vec{B}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(C)} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3},$$

který se často v aplikacích uvádí. Pro nás má však integrál v něm uvedený jen symbolický význam.) V našem případě je výhodné zvolit souřadnicový systém s počátkem totožným se středem kruhového závitu tak, aby vodič ležel v rovině $z = 0$. Navíc předpokládejme, že (C) je kladně orientovaná křivka v rovině xy .

Cílem je spočítat vektor indukce v bodě $(0, 0, z_0)$. Osa z je osou kruhového závitu. Volme parametrizaci $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Biotův-Savartův zákon dává, že

$$\begin{aligned}B_3(0, 0, z_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} (-y \, dx + x \, dy) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t) \, dt \\ &= \frac{Ia^2}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{Ia^2\mu_0}{2(a^2 + z_0^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Čtenář se může přesvědčit analogickým výpočtem, že v souladu s fyzikální intuicí je

$$B_1(0, 0, z_0) = B_2(0, 0, z_0) = 0.$$

Vektor indukce v ose uvedeného závitu je tedy dán vztahem

$$\vec{B}(0, 0, z_0) = \left(0, 0, \frac{Ia^2\mu_0}{2(a^2 + z_0^2)^{3/2}} \right).$$

4 Cvičení

Úloha. Určete $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s}$, kde $\vec{F} = (1, 1, 1)$ a (C) je orientovaná úsečka s počátečním bodem $(1, 2, 1)$ a koncovým bodem $(2, 3, 5)$.

Řešení. Parametrizace dané úsečky je

$$\varphi(t) = (1, 2, 1) + t(1, 1, 4), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tedy $\varphi'(t) = (1, 1, 4)$. Jednoduchým výpočtem získáme

$$\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_0^1 (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 4) \, dt = 6.$$

Všimněme si, že křivkový integrál je v tomto případě roven skalárnímu součinu směrového vektoru úsečky a (konstantní) hodnoty vektorového pole \vec{F} .

Úloha. Určete $\int_{(C)} x \, dx + y \, dy$, kde (C) je oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.

Řešení. Parametrizace souhlasná se zadanou orientací je $\varphi(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak $\varphi'(t) = (1, 2t)$. Vektorové pole, které integrujeme je $\vec{F} = (x, y)$. Tím

$$\int_{(C)} x \, dx + y \, dy = \int_0^1 (t, t^2)(1, 2t) \, dt = \int_0^1 (t + 2t^3) \, dt = 1.$$

Úloha. Vypočtěte $\int_{(C)} xyz \, dz$, kde C je průnik válce o rovnici $x^2 + y^2 = 1$ a roviny o rovnici $x + z = 1$. Orientace je dána kladnou orientací průmětu křivky do roviny xy .

Řešení. Uvedená křivka je elipsou, jejíž parametrizaci získáme nejpohodlněji pomocí cylindrických souřadnic $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$. Dosazením do rovnic zadávajících křivku dostaneme vztahy

$$\varrho = 1, \quad z = 1 - \varrho \cos \varphi.$$

To umožní parametrizovat křivku (C) pomocí zobrazení

$$\Psi(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1 - \cos \varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení pak již získáme mechanickým výpočtem

$$\begin{aligned} \int_{(C)} xyz \, dz &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi \sin^2 \varphi - \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \right) \, d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Úloha. Silové pole \vec{F} působí v každém bodě (x, y, z) , $(x, y) \neq (0, 0)$, silou nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od osy z a míří kolmo k ose z . Jaká je práce, která se vykoná při pohybu hmotného bodu po čtvrtkružnici

$$C = \left\{ (\cos t, 1, \sin t) \mid t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$$

od bodu $(1, 1, 0)$ do bodu $(0, 1, 1)$?

Řešení. Protože vzdálenost bodu (x, y, z) od osy z je $\sqrt{x^2 + y^2}$ a rovněž vektor síly má nulovou složku, je

$$\vec{F} = -\frac{k}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y, 0)$$

kde $k > 0$ je konstanta dané úměrnosti. Pro hledanou práci A máme

$$A = \int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_{(C)} -\frac{k}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y, 0) \, d\vec{s} = -k \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos^2 t + 1)^{3/2}}(-\cos t \sin t) \, dt.$$

Použijeme-li v posledním integrálu substituci $u = \cos t$, máme

$$A = k \int_0^1 \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} \, du = k \left[-(u^2 + 1)^{-1/2} \right]_0^1 = k \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Úloha. Rychlost proudění kapaliny je popsána rovinným polem $\vec{V}(x, y) = (x, 2y)$. Určete bilanci množství kapaliny V , které proteče za jednotku času množinou ohraničenou elipsou o rovnici $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Řešení. Na základě parametrizace $\varphi(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a vzorce (7.8) máme

$$\begin{aligned} V &= \int_{(C)} -V_2 \, dx + V_1 \, dy = \int_0^{2\pi} (-6 \sin t)(-2 \sin t) + 2 \cos t \cdot 3 \cos t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 12 \sin^2 t + 6 \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} (6 + 6 \sin^2 t) \, dt = 18\pi. \end{aligned}$$

Úloha. Množství tepla Q , které pohltní gram molekula ideálního plynu je dáno křivkovým integrálem (tzv. Mayerův vztah)

$$(7.9) \quad Q = \int_{(C)} \frac{c_V}{R} V \, dp + \frac{c_P}{R} p \, dV,$$

kde c_V, c_P jsou měrná tepla za stálého objemu a tlaku. Orientovaná křivka C přitom popisuje vývoj systému ve fázovém diagramu znázorňující vztah mezi tlakem p a objemem

V. Vypočítejte množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu, který necháme při stálé teplotě T_0 rozpínat z objemu V_1 na objem V_2 (isotermický děj).

Řešení. Na základě stavové rovnice

$$pV = RT$$

(R je plynová konstanta), je při isotermickém ději $p = \frac{RT_0}{V}$. Křivka C je pak částí hyperboly

$$C = \left\{ \left(V, \frac{RT_0}{V} \right) \mid V \in \langle V_1, V_2 \rangle \right\}.$$

Tomu odpovídá parametrizace

$$\varphi(V) = \left(V, \frac{RT_0}{V} \right), \quad V \in \langle V_1, V_2 \rangle.$$

Pak

$$\varphi'(V) = \left(1, -\frac{RT_0}{V^2} \right)$$

a podle výše uvedeného vztahu máme

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(C)} \frac{c_V}{R} V \, dp + \frac{c_p}{R} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \left[\frac{c_V}{R} V \left(-\frac{RT_0}{V^2} \right) + \frac{c_p}{R} \frac{RT_0}{V} \right] dV \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{(c_p - c_V)T_0}{V} dV = (c_p - c_V)T_0 [\ln V]_{V_1}^{V_2} \\ &= (c_p - c_V)T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

Vypočítejte následující křivkové integrály:

1. $\int_{(C)} (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$, kde (C) je orientovaný oblouk paraboly o rovnici $y = x^2$ s počátečním bodem $(-1, 1)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.
2. $\int_{(C)} \frac{(x+y) \, dx - (x-y) \, dy}{x^2 + y^2}$, kde (C) je kladně orientovaná kružnice v rovině xy se středem v počátku a poloměrem a .
3. $\int_{(C)} x \, dy$, kde (C) je kladně orientovaný obvod trojúhelníku tvořený osami souřadnic a přímkou o rovnici $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
4. $\int_{(C)} (2a - y, x) \, d\vec{s}$, kde (C) je oblouk cykloidy s parametrizací $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Orientace je indukována uvedenou parametrizací.

5. $\int_{(C)} \frac{-y^2 dx + x^2 dy}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, kde (C) je část asteroidy o rovnici $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, ležící v prvním kvadrantu s počátečním bodem $(a, 0)$ a koncovým $(0, a)$.
6. $\int_{(C)} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, kde (C) je orientovaná úsečka s počátečním bodem $(1, 1, 1)$ a koncovým bodem $(2, 3, 4)$.
7. $\int_{(C)} yz dx + xz dy + xy dz$, kde (C) je orientovaný oblouk šroubovice s parametrickým vyjádřením $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, b \frac{t}{2\pi})$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, jehož orientace je touto parametrizací určena.
8. $\int_{(C)} y dx + z dy + x dz$, kde (C) je průsečnice ploch o rovnicích $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, přičemž orientace je určena kladnou orientací průmětu do roviny xy .
9. $\int_{(C)} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, kde (C) je oblouk Vivianiho křivky dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, $a > 0$. Počáteční bod je bod $(a, 0, 0)$, koncový bod je bod $(0, 0, a)$, oblouk obsahuje bod $(a/2, a/2, a/\sqrt{2})$.
10. Je dáno silové pole $\vec{F}(x, y) = (x + y, 2x)$. Nalezněte práci, která se vykoná v tomto poli při pohybu po kružnici $x^2 + y^2 = a^2$ s kladnou orientací.
11. Nalezněte práci síly, která směřuje k počátku souřadnicového systému a jejíž velikost je a) přímo, b) nepřímo úměrná vzdálenosti od počátku. Bod se pohybuje po elipse o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a to od bodu $(a, 0)$ k bodu $(0, b)$.
12. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (xz - y)\vec{k}$, po oblouku křivky $\{(t^2, 2t, 4t^3) \mid t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ a to od bodu $(0, 0, 0)$ do bodu $(1, 2, 4)$.
13. Stanovte průtok kapaliny hranicí trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ za předpokladu, že rychlost proudění v bodě (x, y) je vektor $(x^2 - y^2, -x^2 - y^2)$.
14. Ukažte, že $\lim_{r \rightarrow \infty} P_r = 0$, kde P_r je průtok kapaliny kružnicí o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, je-li rychlost proudění dána vektorovým polem $\vec{V}(x, y) = \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$.
15. Magnetické pole je indukováno vodičem tvořeným n závitů solenoidu o rovnici $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{d}{2\pi} t$, $t \in \langle 0, 2\pi n \rangle$, kterým protéká proud o konstantní velikosti I . Vypočtěte složku B_3 vektoru magnetické indukce \vec{B} ve všech bodech ležících v ose solenoidu.
16. Vypočtěte množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu, jehož teplota T je nepřímo úměrná objemu, $T = \frac{k}{V}$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta úměrnosti. Plyn se přitom rozpíná z objemu V_1 na objem V_2 .

Výsledky.

1. $-\frac{14}{15}$; 2. -2π ; 3. 3; 4. $-2\pi a^2$; 5. $\frac{3}{16}\pi a^{4/3}$; 6. 13; 7. 0; 8. $-\pi$; 9. $-\frac{\pi a^3}{4} + \frac{11}{30}a^3$;
10. πa^2 ; 11. a) $k(a^2 - b^2)/2$, b) $k \ln \frac{a}{b}$; 12. $\frac{5}{2}$; 13. 0; 15. $\frac{\mu_0 I}{2d} \left(\frac{nd - z_0}{\sqrt{a^2 + (nd - z_0)^2}} + \frac{z_0}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} \right)$;
16. $\frac{k(c_p - 2c_v)(V_2 - V_1)}{V_1 V_2}$.

Kapitola 8

Plocha a její obsah

1 Definice plochy

Plochu intuitivně chápeme jako útvar v prostoru, který vznikne spojitou deformací části roviny. Z geometrického pohledu je plochu možno interpretovat jako dvojrozměrný objekt ve třírozměrném eventuelně vícerozměrném prostoru, jehož body je možné popsat dvojicí souřadnic. Například každý bod na povrchu koule můžeme popsat jeho „zeměpisnou šířkou“ a „zeměpisnou délkou“. V aplikacích se pojmu plochy používá pro modelování těles, která mají jeden rozměr zanedbatelný vůči rozměrům ostatním.

Ve srovnání s křivkami, kterými jsme se zabývali v Kapitole 5, je plocha matematicky složitější objekt. Jeho studium vyžaduje komplikovanější matematický aparát. V našem výkladu se proto omezíme na jednodušší typy ploch, které vzniknou sjednocením konečně mnoha grafů spojitě diferencovatelných funkcí. Tato restrikce není příliš omezující z hlediska inženýrských aplikací, neboť téměř všechny potřebné plochy je možno reprezentovat tímto způsobem. Čtenáře, který by se chtěl seznámit s teorií ploch v její plné obecnosti odkazujeme na učebnici [2].

Základním prototypem plochy pro nás je graf C^1 funkce dvou proměnných – tedy množina definovaná rovností $z = g(x, y)$. Jedna z takovýchto ploch je znázorněna např. na obrázku 1.1. Další příklady je možno získat záměnou souřadnic, tedy jako grafy funkcí, jejichž definičním oborem je základní oblast v rovině yz nebo xz . Takovéto plochy budeme nazývat *elementárními plochami*.

Definice 8.1. Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **elementární plochou**, jestliže platí alespoň jedna z následujících rovností

- (i) $M = \{(x, y, z) \mid z = g_1(x, y), (x, y) \in D_1\}$, kde $g_1(x, y)$ je funkce spojitá na základní oblasti $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ a třídy C^1 na vnitřku D_1 ,
- (ii) $M = \{(x, y, z) \mid x = g_2(y, z), (y, z) \in D_2\}$, kde $g_2(y, z)$ je funkce spojitá na základní oblasti $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ a třídy C^1 na vnitřku D_2 ,
- (iii) $M = \{(x, y, z) \mid y = g_3(x, z), (x, z) \in D_3\}$, kde $g_3(x, z)$ je funkce spojitá na základní oblasti $D_3 \subset \mathbb{R}^2$ a třídy C^1 na vnitřku D_3 .

Krajem $K(M)$ elementární plochy M dané grafem funkce g na oblasti D rozumíme množinu

$$K(M) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, z = g(x, y)\},$$

kde ∂D je hranice oblasti D (viz [1], Definice 1.3 nebo Definice 11.1).

Připomeňme, že vnitřek množiny $D \subset \mathbb{R}^n$ jsou všechny body $z \in D$ kromě hraničních, tj. $D \setminus \partial D$.

Tři podmínky z Definice 8.1 zní možná složitě, ale říkají přesně to, že elementární plocha je část grafu funkce dvou proměnných při vhodném natočení. Vezměme si například krychli. Její horní stěna je elementární plocha, neboť je to část grafu dokonce konstantní funkce. Pokud by v Definici 8.1 byl pouze bod (i), museli bychom vyloučit například boční stěnu této krychle z elementárních ploch. Boční stěna, co by plocha, není o nic složitější než horní. Vylučovat ji by bylo nelogické. Proto jsou do definice přidány body (ii) a (iii), které zahrnují do elementárních ploch i „nevhodně“ natočené grafy funkce $g(x, y)$.

Příklad 8.2. (i) Množina

$$M = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

je grafem funkce $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definované na základní oblasti, kterou je kruh se středem v počátku a poloměrem 1. Množina M je tedy elementární plocha (horní polosféra), jejímž krajem je kružnice

$$K(M) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

(ii) Množina

$$M = \{(x, y, z) \mid y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x, z \leq 1\}$$

je definována jako graf funkce $g(x, z) = \sqrt{1 - x^2}$, jejímž definičním oborem je jednotkový čtverec $\{(x, z) \mid 0 \leq x, z \leq 1\}$ v rovině xz . Tato plocha je částí povrchu válce s osou z a poloměrem 1. Krajem této plochy je uzavřená křivka, která vznikne sjednocením dvou rovnoběžných úseček a dvou oblouků kružnice.

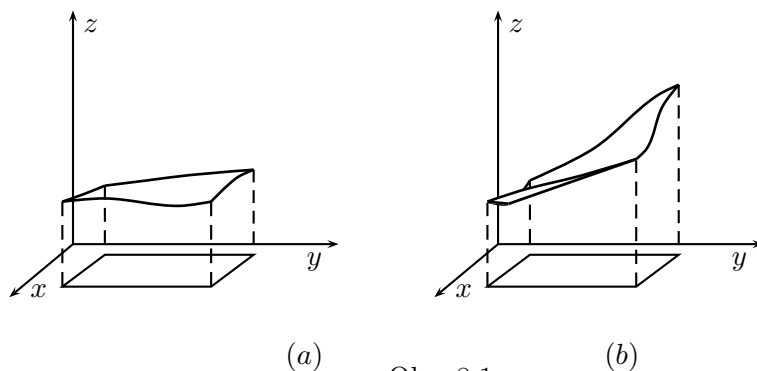
2 Definice a výpočet obsahu plochy

Hlavním cílem této části je definovat základní kvantitativní charakteristiku plochy – její obsah. Dalším úkolem bude nalézt integrální vyjádření. Tato úloha je analogická problému stanovit délku křivky. Vzhledem ke dvourozměrnému charakteru ploch nás její řešení zavede ke dvojnásobnému integrálu.

Stejně jako v předchozích kapitolách budeme obsah elementární plochy definovat axiomatically. Označme symbolem $S(g, D)$ hledaný obsah elementární plochy dané grafem funkce g na základní oblasti D . Je jasné, že zobrazení, které dvojici (g, D) přiřadí číslo $S(g, D)$ vyhovuje axiomu aditivity. Tedy

$$(A) \quad S(g, D) = S(g, D_1) + S(g, D_2),$$

kde D_1, D_2 je rozklad D na základní oblasti nemající společný vnitřní bod. Pokusme se nyní zjistit, jak se velikost obsahu plochy mění v závislosti na charakteru funkce g . Podívejme se na následující obrázek obr. 8.1.



Obr. 8.1.

Máme pocit, že obsah plochy na obrázku (b) je větší než obsah plochy na obrázku (a). Je to způsobeno tím, že jedna z ploch je grafem funkce s větším růstem. Intuitivně se tak přikláníme k názoru (exaktně ověřitelném například pro části rovin nebo rotační tělesa), že graf funkce bude mít větší obsah při větším stoupání či klesání dané funkce. Protože mírou „rychlosti změny“ funkce je velikost jejího gradientu, viz ([1]), Kapitola 5, jsme vedeni k pozorování, že

$$(M') \quad S(g, D) \leq S(h, D), \text{ kdykoliv } \|\text{grad } g\| \leq \|\text{grad } h\| \text{ na oblasti } D.$$

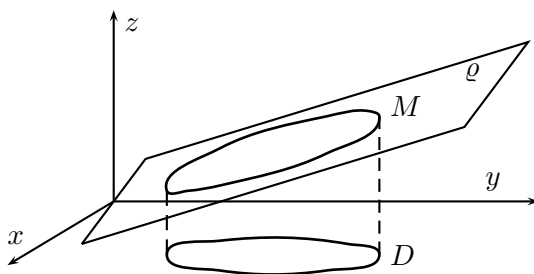
Ukážeme, že pro jednoznačné určení obsahu postačí dokonce vyžadovat nerovnost (M') v případě, kdy grafem funkce h je část roviny. Proto se pokusíme nejprve stanovit obsah $S(h, D)$. Předpokládejme tedy, že plocha M je grafem funkce

$$h(x, y) = ax + by,$$

jejímž definičním oborem je základní oblast D v rovině xy . Jedná se o rovinnou plochu, která je součástí roviny ϱ s rovnici

$$z = ax + by.$$

Typický příklad takovéto plochy je znázorněn na obr. 8.2.



Obr. 8.2.

Na plochu M se můžeme dívat jako na oblast v rovině ϱ , která vznikne promítnutím oblasti D do roviny ϱ ve smyslu rovnoběžného promítání ve směru osy z . V rovině ϱ

můžeme zavést kartézský systém souřadnic (libovolným způsobem) a chápat ji tak jako kopii dvourozměrného prostoru \mathbb{R}^2 . Označme si jako \vec{e}_1 a \vec{e}_2 jednotkové a kolmé vektory ležící v ϱ . Označme dále symbolem Φ příslušnou projekci, tj. zobrazení, jež každému bodu (x, y) základní souřadnicové roviny xy přiřadí bod na rovině ϱ , který je průmětem bodu (x, y) do roviny ϱ při rovnoběžném promítání ve směru osy z ,

$$\Phi(x, y) = (x, y, ax + by).$$

Zobrazení Φ budeme chápat jako zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$, jehož složky jsou dané rovnicí

$$(x, y, ax + by) = \Phi_1(x, y) \vec{e}_1 + \Phi_2(x, y) \vec{e}_2.$$

Z geometrické podstaty je ihned vidět, že Φ zachovává aritmetické operace s vektory, což znamená, že Φ je lineární. Linearitu lze také snadno ověřit přímo ze vzorce pro Φ . Jakobián Δ_Φ je pro lineární zobrazení konstantní funkce, viz 3.10. Dle pravidla o substituci v integrálu použité na zobrazení Φ máme

$$(8.1) \quad S(h, D) = \iint_{\Phi(D)} 1 = \iint_D \Delta_\Phi = \Delta_\Phi \cdot \text{obsah}(D),$$

Jinými slovy, obsah $\Phi(D)$ je vždy je Δ_Φ – násobek obsahu D , tedy

$$(8.2) \quad \text{obsah}(\Phi(D)) = \Delta_\Phi \cdot \text{obsah}(D).$$

Tento vztah říká, že poměr obsahů původního a promítnutého obrazce je vždy konstantní a roven jakobiánu Δ_Φ .

Představme si nyní na okamžik, že D je jednotkový čtverec $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. V tomto případě je $\Phi(D)$ rovnoběžníkem, jehož strany jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (1, 0, a) \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = (0, 1, b).$$

Z analytické geometrie víme, že obsah tohoto rovnoběžníku je velikost vektorového součinu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Tedy

$$(8.3) \quad \text{obsah}(\Phi(D)) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|(-a, -b, 1)\| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Vzhledem k tomu, že $\text{obsah}(D) = 1$ dostáváme tak z (8.2), že

$$\Delta_\Phi = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Na základě (8.2) a předchozí rovnosti máme pro obecnou základní oblast D následující vztah

$$(8.4) \quad S(h, D) = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \text{obsah}(D).$$

Po stanovení obsahu rovinné plochy se můžeme opět vrátit k principu monotonie (M') . Předpokládejme, že existuje bod (x_0, y_0) v oblasti D , ve které je velikost gradientu funkce g maximální. Tedy nechť

$$\|\text{grad } g(x_0, y_0)\| = \max_D (\|\text{grad } g(x, y)\|).$$

Položíme-li nyní funkci $h(x, y)$

$$h(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y, \quad (x, y) \in D,$$

pak $h(x, y)$ popisuje rovinu rovnoběžnou s tečnou rovinou ke grafu funkce g sestrojenou v bodě s největší velikostí $\|\text{grad } g\|$. Geometricky to znamená, že tato rovina je nejstrmější ze všech tečných rovin grafu funkce g . Podle předchozích úvah s volbou $a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ je

$$(8.5) \quad S(h, D) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2} \cdot \text{obsah}(D).$$

Víme rovněž, že $\text{grad } h(x, y) = \text{grad } g(x_0, y_0)$, a tak $\|\text{grad } g\| \leq \|\text{grad } h\|$. Podle (M') je pak $S(g, D) \leq S(h, D)$. Spojením s (8.5) máme tak konečně nerovnost

$$S(g, D) \leq \max_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D).$$

Zcela analogická úvaha pro minimum funkce $\|\text{grad } g\|$ pak v závěru implikuje nerovnosti

$$(M) \quad \min_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D) \leq S(g, D) \\ \leq \max_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D).$$

Nyní se zdá, že už máme vlastnosti (A) a (M) , které jsme hledali. Je tu však maličkost kazící dojem. V průběhu analýzy celé situace jsme v jednom okamžiku řekli: „Nechť (x_0, y_0) je bod z D , ve kterém je $\|\text{grad } g\|$ maximální.“ Takový bod ovšem nemusí existovat. Příkladem je např. horní polosféra daná funkcí

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Bezprostředním výpočtem zjistíme, že $\|\text{grad } g\|$ je na D shora neomezená funkce. Důvod našich potíží spočívá v tom, že jsme od funkce g požadovali, aby byla třídy C^1 pouze na vnitřku D . Abychom se vyhnuli této nepříjemnosti, budeme definovat obsah nejprve pro speciálnější elementární plochy a pak ho rozšíříme na všechny elementární plochy. V následující definici tak budeme požadovat, aby uvažovaná elementární plocha byla dána funkcí třídy C^1 na D . (Připomeňme si, že to znamená, že existuje otevřená množina G obsahující D , na které je funkce g třídy C^1 .) To zaručí existenci minima i maxima $\|\text{grad } g\|$ na D .

Definice 8.3. *Zobrazení, které každé elementární ploše M dané grafem funkce g třídy C^1 na základní oblasti D přiřadí číslo $S(g, D)$, se nazývá **obsah** plochy M , jestliže splňuje následující axiomy:*

(A) aditivita

$$S(g, D) = S(g, D_1) + S(g, D_2),$$

kdykoliv D_1, D_2 tvoří rozklad oblasti D na základní oblasti D_1 a D_2 bez společného vnitřního bodu;

(M) *monotonie*

$$\begin{aligned} \min_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D) &\leq S(g, D) \leq \\ &\leq \max_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D). \end{aligned}$$

Nyní, jak už jsme v axiomatické metodě zvyklí, musíme ukázat, že Definice 8.3 vůbec něco definuje.

Věta 8.4. *Zobrazení $S(g, D)$ z Definice 8.3 existuje a je jediné. Platí přitom, že pro každou elementární plochu M danou C^1 funkcí g na základní oblasti D je*

$$(8.6) \quad \text{obsah}(M) = S(g, D) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Důkaz. Existence alespoň jednoho takového zobrazení je snadná. V (8.6) máme takového kandidáta přímo uvedeného. Musíme jen ověřit, že splňuje axiomy (A) a (M).

Aditivita vyplývá z vlastnosti dvojného integrálu. Počítáme-li integrály přes D_1 a D_2 tvořící rozklad základní oblasti D , dostaneme v součtu integrál přes D . Podobně jednoduše je verifikace monotonie:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} &\leq \max_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \iint_D 1 = \\ &= \max_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \cdot \text{obsah}(D). \end{aligned}$$

Zbývá tak dokázat jednoznačnost takového $S(g, D)$. To se děje pomocí metody horních a dolních součtů. Takový postup jsme v předchozím textu prováděli detailně alespoň dvakrát a alespoň jednou ho ještě budeme provádět. Proto se nyní omezíme na konstatování, že i zde tato metoda dá jednoznačnost zobrazení $S(g, D)$. \square

Příklad 8.5. Určete obsah S kulového vrchlíku

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1/2\}.$$

Uvedená plocha je grafem funkce

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{kde } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Přitom

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

a tedy

$$1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Podle Věty 8.4 máme

$$S = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Zvolme pro výpočet tohoto integrálu polární souřadnice. Pak

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} d\varrho d\varphi = 2\pi \left[\frac{\sqrt{1 - \varrho^2}}{-2} \right]_0^{1/2} = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Před Definicí 8.3 jsme slíbili, že zjistíme, jak spočítat obsah elementární plochy bez dodatečného omezení o diferencovatelnosti integrované funkce na celé základní oblasti. Stejný trik jsme již užili v závěru Kapitoly 2.

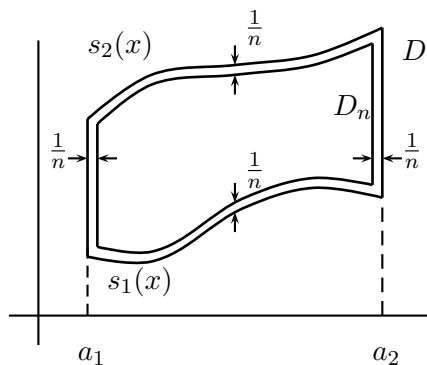
Mějme základní oblast D danou např.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, s_1(x) \leq y \leq s_2(x)\}, \quad s_1(x) < s_2(x) \text{ na } \langle a_1, a_2 \rangle,$$

která je na obrázku 2.3(a). Nechť g je funkce třídy C^1 na vnitřku D . Označíme

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left\langle a_1 + \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n} \right\rangle, s_1(x) + \frac{1}{n} \leq y \leq s_2(x) - \frac{1}{n} \right\}.$$

Pak D_n jsou základní oblasti obsažené ve vnitřku D , viz obr. 8.3.



Obr. 8.3.

Dále, $D_n \subset D_{n+1}$ a jejich sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ dá celý vnitřek základní oblasti D . Funkce g je tak třídy C^1 na každém D_n . Elementární plochy M_n dané funkcí g nad D_n se postupně zvětšují až vyplní celou plochu M až na její kraj $K(M)$. Obsahy ploch M_n se tím blíží k hledanému obsahu plochy M . Položíme tedy

$$\text{obsah}(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{obsah}(M_n).$$

Věta 8.4 dovoluje spočítat obsahy M_n , a tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{obsah}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Proto prohlásíme, že obsah elementární plochy M dané funkcí g třídy C^1 na vnitřku základní oblasti D je

$$(8.7) \quad \text{obsah}(M) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Vidíme, že vzorec je zcela stejný jako v případě elementární plochy dané C^1 funkcí na D . Rozdíl spočívá v tom, že v předešlém případě vychází obsah vždy konečný, zatímco v případě obecné elementární plochy může být obsah nekonečný.

Při výpočtu integrálu představujícího obsah plochy se často používají jiné než kartézské souřadnice. V Příkladu 8.5 jsme v průběhu výpočtu přešli k souřadnicím polárním. Protože popis plochy v jiných než kartézských souřadnicích je velice užitečný, odvodíme si v dalším výkladu vyjádření obsahu přímo pomocí nově zavedených souřadnic. Před přesnou formulací tohoto pravidla se podívejme na geometrický význam výrazu $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$, který se v integrálním vyjádření obsahu vyskytuje. Vektor $(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ je normálový vektor ke grafu funkce $g(x, y)$ směřující vzhůru. Vidíme tak, že výraz

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

není nic jiného než velikost normálového vektoru indukovaného kartézskou parametrizací dané plochy. Věta 8.4 tak vlastně říká, že obsah plochy spočítáme integrací velikosti kanonického normálového vektoru. Víme, že normálový vektor $(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ vznikl jako vektorový součin následujících dvou tečných vektorů: $(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x})$ a $(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y})$. Tedy

$$(8.8) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \left\| \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \right\|.$$

Při popisu kartézskými souřadnicemi je elementární plocha dána jako obraz $\Phi(D)$ základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, prostřednictvím zobrazení

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

Zobrazení Φ se často nazývá *kartézská parametrizace* dané plochy. Pro parciální derivace tohoto zobrazení platí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

S tímto novým značením a pomocí (8.8) můžeme integrální vyjádření obsahu přepsat do tvaru

$$(8.9) \quad S(f, D) = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|.$$

Vidíme tedy, že obsah plochy můžeme chápat jako integrál z velikosti vektorového součinu parciálních derivací její kartézské parametrizace. Nyní se podívejme na alternativní způsob popisu plochy.

Plocha M může být popsána systémem rovnic

$$x = \Phi_1(s, t), \quad y = \Phi_2(s, t), \quad z = \Phi_3(s, t), \quad (s, t) \in T.$$

Uvedeným rovnicím se říká *parametrizace* elementární plochy M vzhledem k souřadnicím (parametrům) s, t . Hodnoty dvojice parametrů (s, t) jsou brány ze zadané základní oblasti T . Často budeme užívat následující stručný zápis: Zavedeme vektor

$$\Phi(s, t) = (\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t), \Phi_3(s, t)).$$

Pak Φ je vlastně zobrazení $\Phi: T \rightarrow M$, neboť každé dvojici parametrů přiřazuje bod na ploše M . Pro elementární plochu danou grafem funkce g na základní oblasti D vždy platí

$$(8.10) \quad \Phi_3 = g(\Phi_1, \Phi_2),$$

což vznikne dosazením za x, y a z do rovnice $z = g(x, y)$. Speciálně vidíme, že první dvě složky (Φ_1, Φ_2) parametrizace Φ představují zobrazení základní oblasti T do D :

$$(\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t)) \in D \quad \text{pro každé } (s, t) \in T.$$

Následující tvrzení říká, že rovnost (8.9) platí pro parametrický popis daný jakýmkoliv jiným systémem souřadnic.

Tvrzení 8.6. *Nechť M je elementární plocha daná funkcí $z = g(x, y)$ definované v základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Nechť $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3): T \rightarrow \mathbb{R}^3$ je spojitá parametrizace plochy M . Předpokládejme, že Φ je třídy C^1 na vnitřku T a že zobrazení*

$$\theta = (\Phi_1, \Phi_2): T \rightarrow D$$

je prosté a má nenulový jakobián Δ_θ na vnitřku T . Pak

$$(8.11) \quad \text{obsah}(M) = \iint_T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

Poznámka 8.7. Kdyby elementární plocha M byla dána např. jako graf funkce typu $x = g(y, z)$, pak zobrazení θ bude vytvořeno ze složek Φ_2 a Φ_3 . Obecně bude θ vytvořeno z těch složek parametrizace Φ , které odpovídají nezávisle proměnným u funkce popisující elementární plochu.

Důkaz. Důkaz Tvzení 8.6 je založen na použití věty o substituci pro dvojný integrál. Víme, že

$$\text{obsah}(M) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Zobrazení $\theta: T \longrightarrow D$ představuje přechod od souřadnic s, t ke kartézským souřadnicím x, y

$$\theta(s, t) = (\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t)).$$

Rozepsáno ve složkách

$$x = \Phi_1(s, t) \quad y = \Phi_2(s, t).$$

První krok důkazu bude spočívat ve vyjádření výrazu $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|$ v kartézských souřadnicích. Rovnice (8.10) udává vztah mezi složkami parametrizace Φ . Proto

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, g(\Phi_1, \Phi_2)).$$

Nyní můžeme začít počítat

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right).$$

Analogicky

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right).$$

Provedeme vektorový součin obou výše uvedených vektorů. Když členy, které se navzájem odečítají již nebudeme uvádět, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \\ &= \left(\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial x}, \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right). \end{aligned}$$

Protože

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \det J_\theta,$$

můžeme poslední rovnost přepsat ve tvaru

$$(8.12) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \det J_\theta \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right).$$

Proto

$$(8.13) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = \Delta_\theta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Podle předpokladu $\Delta_\theta \neq 0$ na vnitřku D . Můžeme tak psát

$$(8.14) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\Delta_\theta} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

Dále, zobrazení θ je prosté na vnitřku D . Tím jsou splněny předpoklady Věty 3.12 o substituci pro θ . Jejím použitím spolu s uvážením (8.14) dostáváme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \text{obsah}(M) &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \iint_{\theta(T)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \\ &= \iint_T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| \cdot \frac{1}{\Delta_\theta} \cdot \Delta_\theta = \iint_T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|. \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen. \square

Při popisu geometrických útvarů, které intuitivně řadíme k plochám však s elementárními plochami nevystačíme. Kulovou plochu není například možné vyjádřit jako graf funkce žádné z dvojic proměnných. Lze ji však na druhé straně vyjádřit jako sjednocení elementárních ploch, horní a dolní polosféry. Jsme tak vedeni k myšlence definovat plochy jako sjednocení konečně mnoha ploch elementárních. Je přirozené přitom požadovat, aby jednotlivé elementární plochy na sebe navazovaly svými kraji. Formálním vyjádřením těchto požadavků je následující definice:

Definice 8.8. *Souvislá množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **plocha**, jestliže existují elementární plochy M_1, M_2, \dots, M_k takové, že*

- (i) $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$;
- (ii) *Je-li $i \neq j$, pak $M_i \cap M_j \subset K(M_i) \cap K(M_j)$, přičemž průnik $M_i \cap M_j$ je buďto křivka nebo konečná či prázdná množina;*

Množinu elementárních ploch $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ splňujících výše uvedené požadavky nazýváme rozkladem plochy M .

Rozklad plochy M na elementární plochy M_1, M_2, \dots, M_k není jednoznačný. Plochu M lze rozložit mnoha způsoby. To je však z našeho hlediska nedůležité, neboť lze dokázat, že jak obsah tak i později integrace přes takovou plochu nezávisí na způsobu rozkladu.

Příklad 8.9. (i) Kulová plocha $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, o poloměru $r > 0$, je uzavřenou plochou. Jeden z jejích rozkladů je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ M_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

- (ii) Povrch krychle se skládá ze šesti stěn, z nichž každá je elementární plochou.
- (iii) Sjednocení čtverců $M_1 = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$ a $M_2 = \{0\} \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ je plocha složená ze dvou elementárních ploch.

Každou plochu danou parametricky můžeme rozložit na elementární plochy dané parametricky. Pro tyto elementární plochy platí Tvzení 8.6. Protože součet obsahů elementárních ploch je roven obsahu plochy dostáváme z aditivity integrálu vůči integračnímu oboru obecnější tvrzení.

Věta 8.10. (*Obecná parametrizace*) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je plocha se spojitou parametrizací $\Phi: T \rightarrow M$ třídy C^1 a prostou na vnitřku základní oblasti $T \subset \mathbb{R}^2$. Pak*

$$\text{obsah}(M) = \iint_T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

Příklad 8.11. Určete obsah S povrchu koule o poloměru $r > 0$.

Daná kulová plocha je popsána rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že střed je v počátku souřadnicového systému. Pro popis této sféry je výhodné použít sférických souřadnic (φ, ϑ) . Přitom

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta \quad (= \Phi_1(\varphi, \vartheta)) \\ y &= r \sin \varphi \cos \vartheta \quad (= \Phi_2(\varphi, \vartheta)) \\ z &= r \sin \vartheta \quad (= \Phi_3(\varphi, \vartheta)), \end{aligned} \tag{8.15}$$

kde $(\varphi, \theta) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Čtenář si jistě povšiml, že jsme použili jinou variantu sférických souřadnic než v Kapitole 4, (4.4). Z geometrického významu rovnic (8.15) je vidět, že parametrizace Φ je prostá na $(0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$: Parametr θ udává „zeměpisnou délku“ a ϕ „zeměpisnou šířku“ bodu na sféře. Pokud nejsme na pólech nebo na nultém poledníku, má bod jednoznačně určené hodnoty (ϕ, θ) . Podle Věty 8.10

$$S = \iint_{\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right\|.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi \cos \vartheta, r \cos \varphi \cos \vartheta, 0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= (-r \cos \varphi \sin \vartheta, -r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= r^2 (\cos^2 \vartheta \cos \varphi, \cos^2 \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \vartheta), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right\| = r^2 \cos \vartheta. \tag{8.16}$$

Závěrem je tedy

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi r^2 [\sin \vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2.$$

Poznámka 8.12. Poznamenejme, že k výpočtu velikosti vektorového součinu se často používá identita

$$(8.17) \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}.$$

Tato rovnost umožní výpočet velikosti normálového vektoru, aniž tento vektor přímo stanovíme. Je to obzvlášť výhodné pro kolmé vektory \vec{u} a \vec{v} . Pak je $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ a

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

3 Cvičení

Úloha. Určete obsah S rovinné plochy popsané podmínkami

$$z = ax + by, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (a, b \neq 0, .$$

Řešení. Uvedená plocha je elipsa, která je průnikem roviny o rovnici $z = ax + by$ a válce zadaného nerovností $x^2 + y^2 \leq 1$. Vzhledem k tomu, že se jedná o graf funkce

$$g(x, y) = ax + by$$

definované na kruhu $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, můžeme bezprostředně využít (8.4) a dostat tak

$$S = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \text{obsah}(D) = \pi \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Úloha. Určete obsah části hyperboloidu

$$z = xy,$$

kde $x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení. Jedná se o elementární plochu, která je grafem funkce

$$g(x, y) = xy,$$

jejíž definiční obor je jednotkový kruh $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Podle Věty 8.4 je

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Pro výpočet tohoto integrálu je vhodné použít polární souřadnice

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi,$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\varrho \in \langle 0, 1 \rangle$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + \varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \varrho \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho \\ &= \frac{2}{3} \pi \left[\sqrt{(1 + \varrho^2)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Úloha. Určete obsah S stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Řešení. Přímo aplikací vztahu (8.6) dostaneme

$$(8.18) \quad S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

kde D je jednotkový kruh. Úloha vede ke stejnému integrálu jako v předchozím příkladě. Proto

$$S = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1).$$

Pro srovnání si nyní ukážeme alternativní způsob výpočtu založený na popisu zadané plochy v cylindrických souřadnicích

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z;$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\varrho > 0$. V těchto souřadnicích je plocha vymezena podmínkami

$$z = \frac{1}{2}\varrho^2, \quad \varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Pro použití vztahu (8.11) je třeba stanovit parciální derivace parametrizace

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \left(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \frac{1}{2}\varrho^2 \right).$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varrho); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0).$$

Při výpočtu vektorového součinu je možno použít vztah (8.17)

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{(1 + \varrho^2)\varrho^2 - 0^2} = \varrho\sqrt{1 + \varrho^2}.$$

Pak konečně

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho\sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho d\varphi.$$

Všimněme si, že tento integrál je vyjádřením integrálu (8.18) v polárních souřadnicích. Jeho vyčíslením tedy musíme dospět ke stejnému výsledku.

Úloha. Určete velikost plochy zadané vztahy

$$y^2 + z^2 = 4ax, \quad z \geq 0, \quad y^2 \leq ax, \quad x \leq 4a, \quad a > 0, .$$

Řešení. Nejvýhodnější způsob jak uvedený obsah spočítat je reprezentovat zadanou plochu jako graf funkce proměnných y a z , tedy funkce

$$x = h(y, z) = \frac{1}{4a}(y^2 + z^2).$$

Jejím definičním oborem D je průmět dané plochy do souřadnicové roviny yz . Pokusme se tento průmět stanovit na základě zadaných nerovností. Z podmínky $x \leq 4a$ máme

$$(8.19) \quad \frac{1}{4a}(y^2 + z^2) \leq 4a, \quad \text{a tedy} \quad y^2 + z^2 \leq 16a^2.$$

Z nerovnosti $y^2 \leq ax$ dostaneme

$$y^2 \leq \frac{a}{4a}(y^2 + z^2) = \frac{1}{4}(y^2 + z^2).$$

Po úpravě

$$(8.20) \quad \frac{3}{4}y^2 \leq \frac{z^2}{4}, \quad \text{tj.} \quad z \geq \sqrt{3}|y|.$$

Spojení podmínek (8.19) a (8.20) implikuje, že D je kruhová výseč omezená kružnicí se středem v počátku o poloměru $4a$ a dvojicí polopřímek $z = \sqrt{3}y$, $y \geq 0$; $z = -\sqrt{3}y$, $y \leq 0$. Z Věty 8.6 máme

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} = \iint_D \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2 + y^2 + z^2}.$$

Přechodem k polárním souřadnicím pak dostáváme

$$S = \frac{1}{2a} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \int_0^{4a} \sqrt{4a^2 + \varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \frac{\pi}{6a} \left[\frac{1}{3}(4a^2 + \varrho^2)^{3/2} \right]_0^{4a} = \frac{4}{9}\pi a^2(\sqrt{125} - 1).$$

Úloha. Stanovte jakou část zemského povrchu představuje oblast mezi 30° a 31° severní šířky a 20° a 21° východní délky.

Řešení. Zadaný problém budeme řešit obecně jako otázku obsahu části kulové plochy o poloměru $r > 0$, která je ve sférických souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= r \sin \vartheta \end{aligned}$$

vymezena intervaly $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\vartheta \in \langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle$. Využitím (8.16) a goniometrických identit dostáváme pro hledaný povrch S vztahy

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) r^2 [\sin \vartheta]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \\ &= (\varphi_2 - \varphi_1) r^2 \cdot 2 \cos \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Pro hledaný poměr u tedy platí

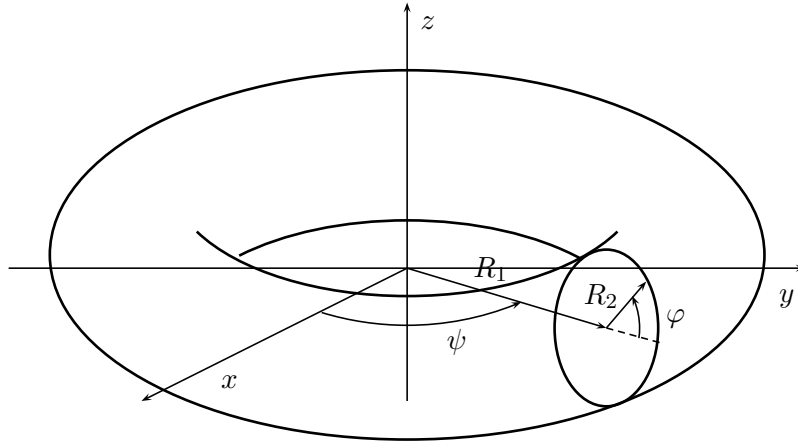
$$u = \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)r^2 \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right)}{4\pi r^2} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right)}{2\pi}.$$

Pro zadané numerické hodnoty ($\varphi_1 = \frac{20}{180}\pi$, $\varphi_2 = \frac{21}{180}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{30}{180}\pi$, $\vartheta_2 = \frac{31}{180}\pi$) je

$$u = \frac{\frac{\pi}{180} \cos \frac{61\pi}{360} \sin \frac{\pi}{360}}{2\pi} \doteq 2,0855 \cdot 10^{-5}.$$

Úloha. Nalezněte obsah povrchu S anuloidu, jehož průřez má poloměr R_2 , přičemž vzdálenost středu průřezové kružnice od jeho osy je R_1 ($R_1 > R_2$).

Řešení. K popisu této plochy se hodí souřadnice (φ, ψ) , kde φ je úhel popisující polohu bodu v průřezové kružnici a ψ je úhel určující otočení vzhledem k ose z , viz. obr. 8.4.



Obr. 8.4.

Tedy

$$\begin{aligned} x &= (R_1 - R_2 \cos \varphi) \cos \psi & (= \Phi_1(\varphi, \psi)) \\ y &= (R_1 - R_2 \cos \varphi) \sin \psi & (= \Phi_2(\varphi, \psi)) \\ z &= R_2 \sin \varphi & (= \Phi_3(\varphi, \psi)), \end{aligned}$$

kde $(\varphi, \psi) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (R_2 \sin \varphi \cos \psi, R_2 \sin \varphi \sin \psi, R_2 \cos \varphi) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} &= (-(R_1 - R_2 \cos \varphi) \sin \psi, (R_1 - R_2 \cos \varphi) \cos \psi, 0). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = R_2, \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\| = R_1 - R_2 \cos \varphi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0$$

máme

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\| = R_2(R_1 - R_2 \cos \varphi).$$

Konečně,

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2(R_1 - R_2 \cos \varphi) \, d\varphi \, d\psi = 4\pi^2 R_1 R_2.$$

Stanovte obsah následujících ploch:

1. průniku roviny o rovnici $z = 2x + y$ s eliptickým válcem daným nerovnicí $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$;
2. grafu funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ definované na množině dané nerovností $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2$ $a, b, c > 0$;
3. části kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, kterou z ní vytíná válec určený podmínkami $x^2 + y^2 \leq rx$, $z \geq 0$;
4. plochy dané parametrickým vyjádřením $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$, $(u, v) \in \langle 0, 4 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$;
5. plochy dané parametrickým vyjádřením $x = u + v$, $y = u - v$, $z = v^2$, $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$;
6. helikoidu daného parametrickým vyjádřením $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$;
7. plochy dané parametrizací $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = \frac{1}{2}u^2 \sin 2v$, $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$;
8. Předpokládejme, že f je nezáporná spojitá funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pomocí Věty 8.10 ukažte, že obsah plochy M , která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je dán vztahem

$$\text{obsah}(M) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

9. Určete obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x .
10. Stanovte obsah povrchu elipsoidu s poloosami a , a , c , kde $a < c$. (Obsah povrchu obecného elipsoidu nelze explicitně vyjádřit bez tzv. eliptických integrálů.)
11. Nechť C je rovinná křivka a $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce. Ukažte, že je-li $M = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in C, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, pak $\text{obsah}(M) = \int_C f$.

Výsledky.

1. $12\sqrt{6}\pi$; 2. $\frac{2}{3}\pi ab \left((1+c^2)^{3/2} - 1 \right)$; 3. $r^2(\pi - 2)$; 4. $\frac{\pi}{6}(65\sqrt{65} - 1)$; 5. $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;
6. $\pi \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right)$; 7. $\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$; 9. $2\pi \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right)$; 10. $2\pi a \left(\frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon + a \right)$,
kde $\varepsilon = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}$.

Kapitola 9

Plošný integrál funkce

1 Definice a výpočet

Plošný integrál funkce, kterému je věnována tato kapitola, je z jistého pohledu zobecněním integrálů dvojného a křivkového. Základním podnětem k jeho zavedení a studiu byla úloha stanovit celkové množství $P(f, M)$ dané kvantity (hmotnost, elektrický náboj, apod.) na zadané ploše M , známe-li její rozložení – tedy hustotu popsanou nezápornou funkcí f . Podívejme se nejdříve na speciální případ, kdy je plocha M rovinná: Nechť M je základní oblast v rovině xy a nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce definovaná na M . V tomto případě je celkové množství $P(f, M)$ dáno dvojným integrálem

$$(9.1) \quad P(f, M) = \iint_M f.$$

Výraz (9.1) má i geometrický aspekt. Interpretujeme-li hodnotu $f(x, y)$ jako výšku nad rovinou xy , pak je celkové množství $P(f, M)$ rovno objemu tělesa omezeného grafem funkce f , viz Kapitola 1.

Cílem dalšího výkladu bude vysvětlit jak je nutno změnit vztah (9.1), změní-li se M z rovinné plochy na obecnou. Nejdříve se pokusíme formulovat základní vlastnosti, které by měla hodnota $P(f, M)$ splňovat, ať už je plocha M jakákoliv. Vzhledem k tomu, že s matematickým popisem vlastností *kvantitativních* měr objektů máme již bohaté zkušenosti, jistě nepřekvapí, že si opět vybereme vlastnost aditivity a monotonie jako základní. A jako obvykle začneme s objektem s co možná nejjednodušším popisem – s elementární plochou M . Reprezentuje-li funkce f např. hustotu rozložení hmoty, je axiom aditivity vyjádřením samozřejmé skutečnosti, že celková hmotnost je součet hmotností částí plochy, které tvoří její rozklad a „v podstatě“ se nepřekrývají. Tedy

$$(A) \quad P(f, M) = P(f, M_1) + P(f, M_2),$$

kdykoliv elementární plochy M_1, M_2 tvoří rozklad plochy M takový, že

$$M_1 \cap M_2 \subset K(M_1) \cap K(M_2).$$

Tato podmínka slovy vyjadřuje, že plochy M_1 a M_2 se protínají pouze v krajích a tedy nemají žádný společný vnitřní bod. Axiom (M) pak postuluje pozorování, že hmotnost

plochy se bude pohybovat v rozmezí mezi $\min_M(f) \cdot \text{obsah}(M)$ a $\max_M(f) \cdot \text{obsah}(M)$, tedy mezi hmotnostmi homogenních ploch, jejichž hustota je dána extrémní funkcí f .

$$(M) \quad \min_M(f) \cdot \text{obsah}(M) \leq P(f, M) \leq \max_M(f) \cdot \text{obsah}(M).$$

V následující větě ukážeme, že axiomům (A) a (M) je možno vyhovět a to pouze jedinou volbou hodnoty $P(f, M)$. Důkaz této věty má strukturu, se kterou jsme se už setkali a jejíž vzor je v důkazu Věty 1.9.

Věta 9.1. *Existuje pouze jediné zobrazení P , které každé elementární ploše M dané funkcí g na základní oblasti D a funkci f spojitě na M přiřadí číslo $P(f, M)$ tak, že jsou splněny axiomy (A) a (M). Navíc,*

$$(9.2) \quad P(f, M) = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Důkaz. M je elementární plocha daná grafem funkce g definované na základní oblasti D . Nechť \mathcal{D} je dělení základní oblasti D . Ke každému prvku $R \in \mathcal{D}$ přiřadíme část plochy M ležící nad R . Označme tuto část symbolem M_R :

$$M_R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R, z = g(x, y) \right\}.$$

Nyní definujme následující variantu horních a dolních integrálních součtů

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \max_{M_R}(f) \cdot \text{obsah}(M_R)$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{R \in \mathcal{D}} \min_{M_R}(f) \cdot \text{obsah}(M_R).$$

Monotonie a aditivita implikují zcela stejným způsobem jako při důkazu Tvzení 1.8, že $\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq P(f, M) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D})$. Tím rovněž

$$(9.3) \quad \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq P(f, M) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}),$$

kde infima a suprema se uvažují vzhledem ke všem dělením \mathcal{D} oblasti D .

Pokusme se nyní dokázat, že dolní a horní odhady čísla $P(f, M)$ v nerovnosti (9.3) splývají. Nerovnost

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D})$$

platí automaticky díky (9.3). Budeme tedy dokazovat nerovnost obrácenou. K tomu opět využijeme vlastnost stejnoměrné spojitosti. Pomocná funkce $h(x, y) = f(x, y, g(x, y))$ je spojitá na D . Podle Věty 1.11 je stejnoměrně spojitá. Znamená to, že pro každé $\varepsilon > 0$ je možno nalézt $\delta > 0$ takové, že pro jakékoli dělení \mathcal{D} oblasti D s normou $\|\mathcal{D}\| < \delta$ platí

$$\max_R(h) - \min_R(h) \leq \varepsilon$$

pro všechna $R \in \mathcal{D}$. To je ale to samé, že oscilace funkce f na každém M_R je menší než ε , tj.

$$\max_{M_R}(f) - \min_{M_R}(f) \leq \varepsilon$$

pro všechna $R \in \mathcal{D}$. Pro rozdíl horního a dolního součtu pak máme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{D}) - \underline{S}(f, \mathcal{D}) &= \sum_{R \in \mathcal{D}} (\max_{M_R}(f) - \min_{M_R}(f)) \cdot \text{obsah}(M_R) \\ &\leq \varepsilon \sum_{R \in \mathcal{D}} \text{obsah}(M_R) = \varepsilon \text{obsah}(M). \end{aligned}$$

Odtud

$$\inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{D}) + \varepsilon \text{obsah}(M) \leq \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) + \varepsilon \text{obsah}(M).$$

Protože ε můžeme volit libovolně, získáváme obrácenou nerovnost. Celkově tak platí

$$(9.4) \quad \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Díky nerovnostem (9.3) může existovat pouze jediná hodnota $P(f, M)$ vyhovující axiomům (A) a (M) a to

$$P(f, M) = \sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

V této chvíli máme dokázáno, že existuje-li zobrazení $P(f, M)$ s požadovanými vlastnostmi, je jediné. V dalším kroku ověříme, že zobrazení $P(f, M)$ skutečně existuje a zároveň dokážeme integrální vyjádření pro $P(f, M)$. Položíme-li

$$P(f, M) = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2},$$

tak vzhledem k aditivitě integrálu vůči integračnímu oboru tím jistě vyhovíme axiomu aditivity. Na základě monotonie dvojného integrálu pak máme

$$\begin{aligned} P(f, M) &\leq \iint_D \max_D(f) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \\ &= \max_D(f) \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \max_D(f) \cdot \text{obsah}(M), \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili (8.6). Pro minimum se postupuje zcela analogicky. Tím jsme dokázali platnost axiomů (A) a (M) pro $P(f, M)$ z (9.2). Vidíme, že alespoň jedno zobrazení s vlastnostmi (A) a (M) existuje. Z první části důkazu už víme, že takových zobrazení nemůže být více. Proto $P(f, M)$ existuje právě jediné a platí (9.2) \square

Definice 9.2. Nechť f je spojitá funkce na elementární ploše M . Číslo $P(f, M)$ z Věty 9.1 nazýváme **plošný integrál funkce f vzhledem k ploše M** . K jeho označení používáme symbol

$$\iint_M f \, dS \quad \text{nebo stručněji vyjádření} \quad \iint_M f.$$

Tento integrál se někdy nazývá plošný integrál 1. druhu.

Při výše zavedeném označení nám Věta 9.1 dává vzorec pro výpočet plošného integrálu ve tvaru

$$(9.5) \quad \iint_M f \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Speciálně pro $f = 1$ má $\iint_M 1 \, dS$ hodnotu obsahu plochy M .

Příklad 9.3. Určete hmotnost m části hyperbolického paraboloidu

$$z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq r^2, \quad r > 0,$$

je-li hustota $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \cdot |z|$.

Vzhledem k tomu, že uvedená plocha je grafem funkce $g(x, y) = xy$ definované na kruhu D o poloměru r a středem v počátku máme

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Podle (9.5) je

$$m = \iint_M \sqrt{1 + x^2 + y^2} |z| \, dS = \iint_D (1 + x^2 + y^2) |xy|.$$

Přechodem k polárním souřadnicím tak dostaneme

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^r (1 + \varrho^2) \varrho^3 |\cos \varphi \sin \varphi| \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^r (1 + \varrho^2) \varrho^3 \, d\varrho \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| \, d\varphi \\ &= \left[\frac{\varrho^4}{4} + \frac{\varrho^6}{6} \right]_0^r \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi = r^4 \left(\frac{r^2}{3} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Podobně jako při výpočtu obsahu plochy je často při výpočtu plošného integrálu výhodné (ba mnohdy nutné) použít k popisu dané plochy jiné než kartézské souřadnice. Nechť M je plocha v \mathbb{R}^3 a nechť $\Phi: D \rightarrow M$ je její parametrizace. Rozložíme plochu M na elementární plochy M_1, \dots, M_n , které budou mít stejnou parametrizaci Φ uvažovanou na částech D_1, \dots, D_n základní oblasti D . Plošný integrál přes jednu elementární plochu M_i se pomocí parametrizace $\Phi: D_i \rightarrow M_i$ se vyjádří jako

$$(9.6) \quad \iint_{M_i} f \, dS = \iint_{D_i} f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

(Zde opět $f(\Phi)$ je zkrácený zápis výrazu $f(\Phi) = f(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, kde $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$). Ke vztahu (9.6) se dojde zcela stejně jako v Tvzení 8.6 použitím věty o substituci. Nebudeme toto odvození zde provádět detailně, neboť se téměř neliší od důkazu již zmíněného Tvzení 8.6. Pokročíme ale dále k následující větě:

Věta 9.4. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast a $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je spojitá parametrizace plochy M prostá a třídy C^1 na vnitřku D . Pak pro každou spojitou funkci f na M platí*

$$(9.7) \quad \iint_M f \, dS = \iint_D f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

Důkaz. Plochu M si rozložíme na elementární plochy M_1, \dots, M_n tak, že pro ně můžeme už použít vzorec (9.6). Protože příslušné D_1, \dots, D_n tvoří rozklad oblasti D , můžeme psát

$$\iint_M f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{M_i} f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(\phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = \iint_D f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|. \quad \square$$

Příklad 9.5. Vypočtěte integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2 + z) \, dS,$$

kde M je část rotačního paraboloidu

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}, \quad a > 0.$$

Z hlediska plochy i integrované funkce je výhodné vyjádřit plochu v cylindrických souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi & (= \Phi_1(\varrho, \varphi)) \\ y &= \varrho \sin \varphi & (= \Phi_2(\varrho, \varphi)) \\ z &= a^2 - \varrho^2 & (= \Phi_3(\varrho, \varphi)), \end{aligned}$$

kde $\varrho \in \langle 0, \frac{a}{2} \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vzhledem k tomu, že

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2},$$

máme

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y^2 + z) \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a/2} (\varrho^2 + a^2 - \varrho^2) \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho \, d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{a/2} \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho = \frac{\pi a^2}{6} \left[(1 + 4\varrho^2)^{3/2} \right]_0^{a/2} = \frac{\pi a^2}{6} (\sqrt{(1 + a^2)^3} - 1). \end{aligned}$$

V závěru této kapitoly uvedeme větu o střední hodnotě pro spojitě funkce na ploše.

Věta 9.6. *Nechť f je spojitá funkce na ploše $M \subset \mathbb{R}^3$. Pak existuje bod $(x, y, z) \in M$ takový, že*

$$\iint_M f \, dS = f(x, y, z) \cdot \text{obsah}(M).$$

Poznámka 9.7. Hodnotu výrazu $\frac{1}{\text{obsah}(M)} \iint_M f \, dS$ nazýváme *střední hodnota funkce f na ploše M* .

Důkaz. Podobně jako v důkazu Věty 6.6 platí

$$\min_M(f) \leq \frac{1}{\text{obsah}(M)} \iint_M f \, dS \leq \max_M(f).$$

Vzhledem k tomu, že f je spojitá funkce na souvislé množině M , je jejím oborem hodnot interval $\langle \min_M(f), \max_M(f) \rangle$. Tedy existuje alespoň jeden bod, řekněme (x, y, z) , realizující střední hodnotu ve smyslu rovnosti

$$\frac{1}{\text{obsah}(M)} \iint_M f \, dS = f(x, y, z).$$

□

Příklad 9.8. Určete jakou průměrnou teplotu by měla Země za předpokladu, že průměrná teplota je stejná ve všech místech se stejnou zeměpisnou šířkou a lineárně klesající v závislosti na zeměpisné šířce a to od 25° C na rovníku k -30° C na pólu.

V matematické formulaci je průměrná teplota dána střední hodnotou funkce T , která bodům o sférických souřadnicích (φ, ϑ) přiřadí hodnotu

$$T(\varphi, \vartheta) = 25 - |\vartheta| \frac{110}{\pi}.$$

Pro průměrnou teplotu T_0 pak dostaneme podle Poznámky 9.7

$$T_0 = \frac{\iint_M T \, dS}{S(M)},$$

kde M je povrch sféry o poloměru $r (\doteq 6378 \text{ km})$ a $S(M) = 4\pi r^2$. Provedením výpočtu ve sférických souřadnicích (viz (8.16)) dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_M T \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(25 - |\vartheta| \cdot \frac{110}{\pi} \right) r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 25S(M) - 2\pi \frac{110}{\pi} r^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = 25S(M) - 440r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$T_0 = \frac{25S(M) - 440r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{S(M)} = 25 - \frac{110}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \doteq 5,01 \text{ } (^{\circ}\text{C}).$$

2 Cvičení

Úloha. Určete $\iint_M (x + y + z) \, dS$, kde M je průnik kulové plochy a válce daný podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$ a $x^2 + y^2 \leq r^2/4$.

Řešení. Plocha M je reprezentována grafem funkce

$$g(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \text{ kde } x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}.$$

Pak

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Označíme-li $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}\}$, máme

$$\begin{aligned} \iint_M (x + y + z) \, dS &= \iint_D (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ &= r \iint_D \frac{x + y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + r \iint_D 1. \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii integrované funkce na oblasti D je

$$\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 0.$$

Závěrem tedy máme

$$\iint_M (x + y + z) \, dS = r \iint_D 1 = r\pi \frac{r^2}{4} = \frac{\pi}{4} r^3.$$

Úloha. Určete $\iint_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$, kde M je povrch koule se středem v počátku a poloměrem r .

Řešení. Podobně jako v předchozích příkladech použijeme sférických souřadnic (φ, ϑ) . Pak dle (9.7)

$$\begin{aligned} \iint_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 \cos^2 \vartheta} \, r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \\ &= 2\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = \pi^2 r^3. \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte $\iint_M z \, dS$, kde

$$M = \{(t \cos s, t \sin s, s) \mid (s, t) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle\}.$$

Řešení. Plocha M , tzv. helikoid, je sjednocením částí šroubovic, jejichž poloměr se pohybuje od 0 do a . Z geometrického názoru vidíme, že M je grafem funkce. K výpočtu však použijeme původně zadanou parametrizaci

$$\Phi(s, t) = (t \cos s, t \sin s, s) \quad (s, t) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle.$$

Pak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = (-t \sin s, t \cos s, 1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\cos s, \sin s, 0).$$

Jelikož

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right\| = \sqrt{1 + t^2}, \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

platí

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = \sqrt{(1 + t^2) - 0} = \sqrt{1 + t^2}.$$

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu zadaného integrálu

$$\begin{aligned} \iint_M z \, dS &= \int_0^a \int_0^{2\pi} s \sqrt{1 + t^2} \, ds \, dt = \int_0^{2\pi} s \, ds \cdot \int_0^a \sqrt{1 + t^2} \, dt \\ &= \frac{4\pi^2}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| \right]_0^a = \pi^2 \left(a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2}) \right). \end{aligned}$$

Úloha. Vypočtěte těžiště homogenní plochy M (tj. plochy s konstantní hustotou), je-li

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 2z, \, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Řešení. Souřadnice těžiště plochy homogenního tělesa jsou střední hodnoty vzdáleností od souřadných rovin. Pro složky $T = (x_t, y_t, z_t)$ tedy platí,

$$x_t = \frac{1}{\iint_M 1 \, dS} \iint_M x \, dS, \quad y_t = \frac{1}{\iint_M 1 \, dS} \iint_M y \, dS, \quad z_t = \frac{1}{\iint_M 1 \, dS} \iint_M z \, dS.$$

V našem případě se jedná o část rotačního paraboloidu, takže v důsledku symetrie vůči ose z platí

$$x_t = y_t = 0.$$

Stačí tedy určit souřadnici z_t . Plocha M je grafem funkce

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

definované na kruhu D se středem v počátku a poloměrem 2. Platí tedy

$$\iint_M 1 \, dS = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Přechodem k polárním souřadnicím pak máme

$$\iint_M 1 \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \varrho \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

Analogickým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_M z \, dS &= \iint_D \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \varrho^3 \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho \, d\varphi \\ &= \pi \int_0^2 \varrho^3 \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho = \pi \left(\frac{10}{3} \sqrt{5} + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

Pro hledanou souřadnici těžiště proto platí

$$z_t = \frac{1}{10} \frac{50\sqrt{5} + 2}{5\sqrt{5} - 1}.$$

Úloha. Vypočítejte hydrostatickou sílu, která působí na stěnu nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

je-li nádoba naplněna kapalinou o hustotě ρ .

Řešení. Podle Pascalova zákona jsou složky hydrostatické síly $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ působící na obecnou plochu M dány plošnými integrály

$$(9.8) \quad F_i = \rho g \iint_M h n_i \, dS, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde $h(x, y, z)$ je funkce udávající hloubku v bodě (x, y, z) a $n_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$) jsou složky vnější jednotkové normály k ploše M v bodě (x, y, z) . V našem případě je plocha M grafem funkce

$$g(x, y) = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Funkce h určující hloubku je funkce

$$h(x, y, z) = 1 - z.$$

Vnější jednotková normála je v bodě (x, y, z) dána vztahem

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1 \right)}{\left\| \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1 \right) \right\|} = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Označíme-li symbolem D jednotkový kruh, dostaneme pro složku F_3 hledané síly vztah

$$\begin{aligned} F_3 &= \rho g \iint_M (1-z)n_3(x,y,z) \, dS \\ &= \rho g \iint_D (1-x^2-y^2) \frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{4x^2+4y^2+1} \\ &= -\rho g \iint_D (1-x^2-y^2). \end{aligned}$$

Přechodem k polárním souřadnicím pak dostaneme

$$F_3 = -\rho g \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\varrho^2)\varrho \, d\varrho = -\frac{\pi\rho g}{2}.$$

Vzhledem k symetrii uvažovaného tělesa je zřejmé, že $F_1 = F_2 = 0$. (Tuto intuici si můžete ověřit výpočtem.) Celková hydrostatická síla je tedy

$$\vec{F} = (0, 0, -\frac{\pi\rho g}{2}).$$

K tomuto výsledku jsme mohli dospět i jinak. Archimédův zákon nám říká, že velikost síly F_3 se rovná tíze kapaliny uvnitř paraboloidu. Tedy $|F_3| = \rho g V$, kde V je objem paraboloidu. Výpočtem zjistíme, že $V = \pi/2$.

Úloha. Určete potenciál V gravitačního pole \vec{F} v bodě (x_0, y_0, z_0) , které je dáno homogenní kulovou plochou s rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad r > 0,$$

jejíž plošná (konstantní) hustota je ϱ .

Řešení. Gravitační potenciál v bodě (x_0, y_0, z_0) vytvořený plochou M s plošnou hustotou $\rho(x, y, z)$ je definován jako plošný integrál

$$(9.9) \quad U(x_0, y_0, z_0) = \iint_M \frac{\kappa\rho(x, y, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \, dS.$$

(Tento vzorec bezprostředně vyplývá z Newtonova gravitačního zákona, κ je gravitační konstanta.) V našem specifickém příkladě je M kulová plocha a ρ je konstantní funkce. Vzhledem k symetrii se navíc můžeme omezit na případ $x_0 = y_0 = 0, z_0 > 0$. (Volíme nový systém souřadnic tak aby kladná část osy z procházela daným bodem). Hledaný potenciál je tedy dán integrálem

$$(9.10) \quad U = \iint_M \frac{\kappa\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_0)^2}} \, dS.$$

K jeho výpočtu použijeme sférických souřadnic (φ, ϑ) . Podle Věty 9.4 dostaneme

$$\begin{aligned} U &= \iint_M \frac{\kappa\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2zz_0 + z_0^2}} dS = \kappa\rho \iint_M \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0}} dS \\ &= \kappa\rho \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos \vartheta}{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0 \sin \vartheta}} d\vartheta d\varphi = 2\pi r^2 \kappa\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0 \sin \vartheta}} d\vartheta. \end{aligned}$$

Substitucí $u = \sin \vartheta$ v daném integrálu pak dostaneme

$$\begin{aligned} U &= 2\pi r^2 \kappa\rho \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0 u}} = 2\pi r^2 \kappa\rho \left[\frac{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0 u}}{-rz_0} \right]_{u=-1}^{u=1} \\ &= 2\pi \frac{r\kappa\rho}{z_0} \left(\sqrt{r^2 + z_0^2 + 2rz_0} - \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2rz_0} \right) = 2\pi \frac{r\kappa\rho}{z_0} (|r + z_0| - |r - z_0|). \end{aligned}$$

$$\text{Závěrem tedy získáváme } U = \begin{cases} 4\pi\kappa r\rho, & z_0 \leq r \\ 4\pi \frac{r^2\kappa\rho}{z_0} & z_0 \geq r. \end{cases}$$

Vypočtete následující plošné integrály:

1. $\iint_M x^2 + y^2 dS$, M je celý povrch kužele daného nerovností $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.
2. $\iint_M \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$, kde M je povrch čtyřstěnu daného nerovnostmi $x, y, z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$.
3. $\iint_M x^2 y^2 dS$, kde M je část povrchu koule daná podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.
4. $\iint_M \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$, kde M je válcová plocha o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$ omezená rovinami s rovnicemi $z = 0$ a $z = h > 0$.
5. $\iint_M |y| dS$, kde M je část plochy o rovnici $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$), vyříznutá kuželovou plochou o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $\iint_M xy + yz + zx dS$, kde M je část povrchu kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyříznutá válcem o rovnici $x^2 + y^2 = 2ax$.

7. Necht M je plocha daná vztahem $M = C \times \langle 0, 1 \rangle$, kde $C \subset \mathbb{R}^2$ je rovinná křivka. Dokažte, že je-li $f(x, y, z) = g(x, y)$, kde g je spojitá funkce na křivce C , pak

$$\iint_M f = \int_C g.$$

8. Vypočtete hmotnost kulové skořepiny, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$, je-li plošná hustota rovna a) vzdálenosti od osy z ; b) druhé mocnině vzdálenosti od osy z .
9. Nalezněte množství náboje rozloženého na ploše dané podmínkami $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $0 \leq z \leq 1$, je-li plošná hustota $f(x, y, z) = z$.
10. Nalezněte těžiště homogenní části kuželové plochy o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, jež se nachází ve válci o rovnici $x^2 + y^2 = ax$;
11. Najděte těžiště kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, je-li hustota v každém bodě úměrná vzdálenosti od osy z .
12. Necht M je plocha s hustotou $\rho(x, y, z)$. Na základě axiomatického přístupu odvoďte, že pro moment setrvačnosti I_p plochy M vzhledem k ose p platí

$$I_p = \iint_M v^2 \rho,$$

kde hodnota funkce $v(x, y, z)$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od přímky p .

V následujících příkladech vypočtete momenty setrvačnosti uvedených ploch vzhledem k ose z . Předpokládáme, že hustota je konstantní funkce ρ .

13. povrch koule o poloměru a se středem v počátku;
14. povrch kulového vrchlíku zadaného podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $0 < h \leq z \leq r$;
15. plochy určené vztahy $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2$, $0 < z < h$;
16. plochy určené podmínkami $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$.
17. Ukažte, že pro moment setrvačnosti I_z vůči ose z homogenní rotační plochy s hustotou ρ , která vznikne rotací grafu funkce $z = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy z , platí $I_z = 2\pi\rho \int_a^b x^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.
18. Na základě axiomatických požadavků odvoďte integrální vyjádření hydrostatické síly působící na danou plochou (viz řešená úloha výše).
19. Pomocí vztahu (9.8) najděte sílu, kterou působí kapalina s konstantní hustotou ρ na dno nádoby ve tvaru eliptického paraboloidu o rovnici $z = h \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$, $-h \leq z \leq 0$.
20. Z Newtonova zákona určete jakou silou přitahuje useknutá kuželová plocha daná parametrizací $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = \varrho$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 < b \leq \varrho \leq a$ o konstantní hustotě ρ hmotný bod o hmotnosti m umístěný v bodě $(0, 0, 0)$.

21. Pomocí vztahu (9.10) najděte gravitační potenciál části pláště válce o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq h$ v bodech na ose z .

Výsledky.

1. $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$; 2. $\frac{5-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 2) \ln 2$; 3. $\frac{2\pi r^6}{15}$; 4. $2\pi \operatorname{arctg} \frac{h}{r}$; 5. $a^3(\pi + 4)$; 6. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$;
 8. a) $\frac{\pi^2 r^3}{2}$, b) $\frac{4\pi r^4}{3}$; 9. $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$; 10. $(\frac{a}{2}, 0, \frac{16}{9\pi}a)$; 11. $(0, 0, 3/4)$; 13. $\frac{8\pi a^4 \rho}{3}$;
 14. $\frac{2}{3}\pi r \rho(2r^3 - 3r^2h + h^3)$; 15. $\frac{\pi}{2}a^3\rho\sqrt{a^2 + h^2}$; 16. $\rho\frac{\sqrt{3}}{6}$; 19. $\vec{F} = -\frac{1}{2}\pi\rho abh\vec{k}$;
 20. $\vec{F} = (\pi\kappa m\rho \ln \frac{a}{b})\vec{k}$; 21. $V(0, 0, z_0) = 2\kappa\rho\pi r \ln \frac{|h-z_0+\sqrt{(h-z_0)^2+r^2}|}{|-z_0+\sqrt{z_0^2+r^2}|}$.

Kapitola 10

Plošný integrál vektorového pole

1 Definice a výpočet

Motivací pro definici plošného integrálu vektorového pole byla řada problémů v přírodních vědách – především v teorii pole a proudění. Tento integrál je variací plošného integrálu ze skalární funkce a představuje jistou analogii ke křivkovému integrálu vektorového pole.

K definici plošného integrálu vektorového pole budeme potřebovat pojem normálového pole k dané ploše. Představme si nejdříve, že M je elementární plocha daná grafem funkce g na základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Připomeňme, že normálový vektor ke grafu funkce g v bodě $(x, y, g(x, y))$ je definován jako jeden z kolmých vektorů k tečné rovině ke grafu funkce g , tj. jako jistý násobek vektoru

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right).$$

V každém bodě $(x, y, g(x, y))$ plochy M tak máme definovány právě dva jednotkové normálové vektory, které jsou opačně orientovány

$$\frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2}} \quad \text{a} \quad -\frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2}}.$$

Můžeme tedy zavést následující pojem.

Definice 10.1. *Nechť M je elementární plocha. Jednotkové normálové vektorové pole \vec{n} plochy M je spojité vektorové pole, které každému bodu $(x, y, z) \in M \setminus K(M)$ přiřadí jednotkový normálový vektor $\vec{n}(x, y, z)$ k ploše M v bodě (x, y, z) .*

Z předchozí diskuse vyplývá, že každá standardní plocha má právě dvě jednotková normálová pole s navzájem opačnou orientací.

Příklad 10.2. Nechť M je elementární plocha daná podmínkami:

$$z = x^2 - y^2, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Uvedená plocha má dvě jednotková normálová pole

$$\vec{n}_1 = \frac{(2x, -2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \quad \vec{n}_2 = -\frac{(2x, -2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Konkrétní volbou jednotkového normálové pole vlastně volíme jednu ze dvou možných stran elementární plochy. Říkáme proto, že jednotkové normálové pole určuje její *orientaci*. V případě obecné plochy je orientace dána orientací elementárních ploch, které tvoří její rozklad. Povrch krychle můžeme například vyjádřit jako sjednocení šesti stěn a orientaci této plochy můžeme chápat jako nezávislý výběr „vnějších“ nebo „vnitřních“ stran u každé z hraničních stěn. Následující definice je formálním vyjádřením této představy.

Definice 10.3. *Nechť M je elementární plocha. Dvojice $(M) = (M, \vec{n})$, kde \vec{n} je jednotkové normálové pole plochy M se nazývá **elementární orientovaná plocha**.*

*Nechť M je plocha s rozkladem $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ na elementární plochy. Množina elementárních orientovaných ploch $(M) = \{(M_1, \vec{n}_1), (M_2, \vec{n}_2), \dots, (M_n, \vec{n}_k)\}$ se nazývá **orientovaná plocha**.*

I když orientace elementární plochy jsou právě dvě, orientací obecné plochy je více. Záleží na tom, jakým způsobem si plochu M rozložíme a jaké orientace zvolíme na jednotlivých částech. V matematice se studují objekty, které jsou mnohem obecnější než elementární plochy, tzv. *variety*. V tomto jazyce je elementární plocha dvourozměrná varieta v \mathbb{R}^3 . Zatímco elementární plocha má vždy orientaci (tj. spojitě jednotkové normálové pole), varieta orientaci mít nemusí. Příkladem je známý Möbiův list, což je plocha kterou je možnou vymodelovat z proužku listu papíru otočením jedné strany o 180 stupňů a slepením. Möbiův list má pouze jednu stranu.

V případě, kdy je orientovaná plocha M hranicí základního tělesa P v prostoru \mathbb{R}^3 , přijmeme následující zjednodušenou konvenci. Řekneme, že M je *orientována vnějším normálovým polem*, jestliže každé normálové pole dílčích elementárních orientovaných ploch, jejichž sjednocením je orientovaná plocha (M) , má směr mířící vně tělesa P . Podobně, plochu M nazveme *orientovanou vnitřním normálovým polem*, jestliže normálové pole všech dílčích elementárních ploch jsou orientována do vnitřku P . Vnitřní a vnější normálová pole jsou opačná.

Příklad 10.4. *Nechť M je povrch koule s rovnicí*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Plocha M bude orientována vnějším normálovým polem, jestliže má jednotkové normálové pole

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Analogicky, M bude orientována vnitřním normálovým polem, jestliže

$$\vec{n}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Nyní můžeme přistoupit k definici plošného integrálu vektorového pole.

Definice 10.5. Necht $(M) = \{(M_1, \vec{n}_1), \dots, (M_k, \vec{n}_k)\}$ je orientovaná plocha. Necht \vec{F} je spojitě vektorové pole definované na ploše M . **Plošný integrál**

$$\iint_{(M)} \vec{F} d\vec{S}$$

pole \vec{F} vzhledem k orientované ploše (M) je definován rovností

$$\iint_{(M)} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{M_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \dots + \iint_{M_k} \vec{F} \cdot \vec{n}_k dS.$$

Pro označení plošného integrálu budeme někdy používat stručnější značení $\iint_{(M)} \vec{F}$. Tento integrál se také nazývá **tokem pole \vec{F} plochou M** nebo **plošný integrál 2. druhu**.

Poznámka 10.6. Často se také používá složkové vyjádření

$$(10.1) \quad \iint_{(M)} F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy,$$

kde F_1, F_2, F_3 jsou složky pole \vec{F} . Tento tvar má sice jisté zdůvodnění, ale pro naše účely to bude pouze alternativní způsob zápisu plošného integrálu vektorového pole.

Smyslem definice plošného integrálu vektorové pole je vyjádřit působení pole ve směru kolmém na plochu. Uvažujme pro jednoduchost orientovanou elementární plochu (M, \vec{n}) , kde \vec{n} je jednotkové normálové pole, tedy pole reprezentující kolmý směr k dané ploše. Každé vektorové pole \vec{F} definované na ploše M můžeme rozložit do složky \vec{F}_n kolmé k ploše M a složky \vec{F}_t rovnoběžné s tečnou rovinou. Tedy

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t, \quad \text{kde} \quad \vec{F}_n = (\vec{F} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad \text{a} \quad \vec{F}_n \cdot \vec{F}_t = 0.$$

Plošný integrál pole \vec{F} je definován jako plošný integrál skalárního součinu pole \vec{F} s normálovým polem \vec{n} dané plochy. Jeho hodnota bude tím větší, čím „více a souhlasněji“ bude pole \vec{F} působit ve smyslu zadaného normálového pole. To je důvod, proč se integrál $\iint_M \vec{F}$ v aplikacích nazývá tokem pole \vec{F} plochou M .

Poznámka 10.7. Necht elementární plocha M je grafem funkce g definované na základní oblasti D , přičemž orientace je dána jednotkovým normálovým polem s kladnou z -ovou složkou. Plošný integrál vektorového pole \vec{F} vzhledem k ploše M pak můžeme vyjádřit pomocí dvojného integrálu následujícím způsobem

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \iint_{(M)} \vec{F} &= \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dS. \end{aligned}$$

Tento vztah je výhodný pro výpočet v případě elementární plochy.

Příklad 10.8. Určete tok vektorového pole

$$\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^\alpha},$$

kde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $k, \alpha > 0$, kulovou plochou se středem v počátku a poloměrem $R > 0$. Orientace je přitom dána vnějším normálovým polem.

Vzhledem k tomu, že vnější normálové pole \vec{n} je určeno vztahem

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},$$

je podle Definice 10.5

$$\begin{aligned} \iint_{(M)} \vec{F} &= -k \iint_M \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^\alpha} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = -k \iint_M \frac{\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|^{\alpha+1}} = -k \iint_M \|\vec{r}\|^{1-\alpha} \\ &= -k \iint_M R^{1-\alpha} = -k R^{1-\alpha} \cdot \text{obsah}(M) = -k R^{1-\alpha} 4\pi R^2 \\ &= -4\pi k R^{3-\alpha}. \end{aligned}$$

Vektorové pole \vec{F} můžeme v tomto případě chápat jako centrální silové pole, ve kterém je velikost působící síly nepřímo úměrná $(\alpha - 1)$ -mocnině vzdálenosti od počátku. Všimněme si, že pouze pro $\alpha = 3$ je tok daného pole nezávislý na poloměru R dané sféry a má hodnotu

$$(10.3) \quad \iint_{(M)} \vec{F} = -4\pi k.$$

Tato skutečnost je jedním z důvodů pro hodnotu $\alpha = 3$ v Newtonově gravitačním zákoně.

Věnujme se nyní zobecnění vztahu (10.2) pro obecnou parametrizaci Φ dané plochy.

Tvrzení 10.9. *Nechť (M, \vec{n}) je elementární orientovaná plocha daná grafem funkce $z = g(x, y)$ definované na základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ a nechť normálové pole \vec{n} má kladnou z -ovou složku. Dále, nechť*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3): T \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

je spojitá parametrizace plochy M , která je třídy C^1 na vnitřku T . Předpokládejme, že zobrazení $\theta = (\Phi_1, \Phi_2): T \longrightarrow D$ je na vnitřku T prosté a s kladným determinantem Jacobiho matice, $\det J_\theta > 0$. Pak pro každé spojitě vektorové pole \vec{F} na M platí

$$(10.4) \quad \iint_{(M)} \vec{F} = \iint_T \vec{F}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Důkaz. Podle Věty 9.4 aplikované na funkci $f = \vec{F} \cdot \vec{n}$ můžeme psát

$$(10.5) \quad \iint_{(M)} \vec{F} = \iint_M \vec{F} \cdot \vec{n} = \iint_T \vec{F}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \cdot \vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|.$$

Zjistíme, čemu se rovná normála $\vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Využijeme toho, že $\Phi_3 = g(\Phi_1, \Phi_2)$, a tím

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right).$$

Výpočtem stejným jako v důkaze Tvzení 8.6 pak dostaneme, že

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \det J_\theta \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

Vektor na pravé straně je normálový vektor k elementární ploše mající z-tovou složku kladnou, neboť $\det J_0 > 0$. Vidíme, že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je normálový vektor se správnou orientací. Jednotkový normálový vektor je proto

$$\vec{n}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|}$$

Dosazením za $\vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ do (10.5) dostáváme dokazované tvrzení. \square

V případě obecné plochy použijeme Tvzení 10.9 na každý prvek rozkladu a příslušné integrály posčítáme. Dostaneme tak

Věta 10.10. *Nechť M je plocha se spojitou parametrizací $\Phi: D \rightarrow M$ třídy C^1 a prostou na vnitřku základní oblasti D . Předpokládejme, že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D . Nechť orientace plochy $M = \Phi(D)$ je dána jednotkovým normálovým polem*

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|}.$$

Pak

$$\iint_{(M)} \vec{F} = \iint_D \vec{F}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Příklad 10.11. Vypočtěte

$$\iint_{(M)} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + (z^2 - 1) \, dx \, dy,$$

kde M je část válcové plochy

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientované vnějším normálovým polem.

Z tvaru integrálu porovnáním s (10.1) vidíme, že pole \vec{F} , které se integruje, má složky

$$\vec{F} = (x, y, z^2 - 1).$$

Dále, uvedenou plochu můžeme popsat pomocí parametrizace v cylindrických souřadnicích

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

Vektor $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ je jednotkovým normálovým vektorem vnějšího normálového pole. Podle Věty 10.10 tak máme

$$\begin{aligned} \iint_{(M)} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + (z^2 - 1) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi, \sin \varphi, z^2 - 1) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \, d\varphi \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\varphi \, dz = 2\pi. \end{aligned}$$

2 Plošný integrál jako průtok plochou

V závěru této kapitoly se budeme věnovat důležitému aspektu plošného integrálu vektorového pole – průtoku nestlačitelné kapaliny plochou. Úloha stanovit množství kapaliny, které proteče za jednotku času danou plochou je trojrozměrnou analogií průtoku rovinnou oblastí, kterou jsme se zabývali v Kapitole 7.

Uvažujme orientovanou plochu (M) s jednotkovým normálovým polem \vec{n} . Představme si, že prostor \mathbb{R}^3 je vyplněn nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost proudění v bodě (x, y, z) je dána vektorem $\vec{V}(x, y, z)$. Budeme se snažit odvodit integrální vyjádření pro množství kapaliny, které za jednotku času proteče plochou M .

Označme hledané množství symbolem $P(\vec{V}, (M))$ a pokusme se stanovit co nejjednodušší zákonitosti, které by měly hodnoty $P(\vec{V}, (M))$ splňovat. Zřejmě je splněn princip aditivity:

$$(A) \quad P(\vec{V}, (M)) = P(\vec{V}, (M_1)) + P(\vec{V}, (M_2))$$

pro každý rozklad plochy M na plochy M_1 a M_2 , kde orientace M_1 a M_2 je určena orientací plochy M . Tento zákon říká, že celkový průtok je roven součtu průtoků přes dílčí oblasti. Podobně jako v případě rovinného proudění je dále možno vyvodit, že průtok je způsoben pouze normálovou složkou vektorového pole rychlosti, nebo-li, že

$$P(\vec{V}, (M)) = P((\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{n}, (M)).$$

Zcela přirozeně dále platí, že

$$(10.6) \quad P((\min_M (\vec{V} \cdot \vec{n}))\vec{n}, (M)) \leq P(\vec{V}, (M)) \leq P((\max_M (\vec{V} \cdot \vec{n}))\vec{n}, (M)),$$

neboť pole $(\max_M(\vec{V} \cdot \vec{n})) \vec{n}$ a $(\min_M(\vec{V} \cdot \vec{n})) \vec{n}$ jsou konstantní vektorová pole daná maximální a minimální hodnotou rychlosti proudění kapaliny ve směru normálového pole. V případě proudění s konstantní velikostí rychlosti a to ve směru pole \vec{n} , je průtok roven součinu velikosti rychlosti a povrchu plochy. Aplikací tohoto pravidla dostaneme z nerovnosti (10.6) nerovnosti

$$(M') \quad \left(\min_M(\vec{V} \cdot \vec{n})\right) \cdot \text{obsah}(M) \leq P(\vec{V}, (M)) \leq \left(\max_M(\vec{V} \cdot \vec{n})\right) \cdot \text{obsah}(M).$$

Použijeme-li nyní Větu 9.1 pro funkci $f = \vec{V} \cdot \vec{n}$ dostáváme

$$(10.7) \quad P(\vec{V}, (M)) = \iint_M \vec{V} \cdot \vec{n} = \iint_{(M)} \vec{V}.$$

Integrál $\int \int_{(M)} \vec{V}$ nám dává bilanci průtoku kapaliny plochou M . Je-li tento integrál nulový, plochou M proteče stejné množství kapaliny z jedné strany na druhou jako v opačném směru. Je-li integrál kladný, převažuje proudění ve směru normály \vec{n} . A samozřejmě, při záporné hodnotě integrálu plochou protéklo více kapaliny ve směru $-\vec{n}$ než ve směru \vec{n} .

Příklad 10.12. Vypočtete množství kapaliny, které proteče za jednotku času kulovou plochou o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ve směru vnějšího normálového pole, je-li rychlost kapaliny v bodě (x, y, z) rovna $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Podle (10.7) je

$$P(\vec{V}, (M)) = \iint_{(M)} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) d\vec{S},$$

kde (M) je zadaná kulová plocha orientovaná vnějším normálovým polem. Tedy

$$P(\vec{V}, (M)) = \iint_M (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} dS = \iint_M \|(x, y, z)\| dS = \iint_M r dS = 4\pi r^3.$$

3 Cvičení

Úloha. Určete $\iint_{(M)} \vec{F}$, kde M je částí roviny

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0,$$

orientované normálovým polem s kladnou z -tovou složkou a \vec{F} je konstantní vektorové pole

$$\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Řešení. Plochu M můžeme reprezentovat jako graf funkce

$$g(x, y) = 1 - x - y, \quad \text{definované na množině } D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

Tato plocha má konstantní jednotkové normálové pole, orientace je přitom souhlasná s polem $\vec{n} = (1, 1, 1)$, které je indukováno kartézskou parametrizací plochy. V důsledku (10.2). Máme tak

$$\iint_{(M)} \vec{F} = \iint_D (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4 \iint_D 1 = 2.$$

Všimněme si na tomto příkladu skutečnosti, že je-li \vec{F} konstantní a M je rovinná plocha, pak tok pole \vec{F} přes plochu M reprezentuje objem zobecněného válce, jehož podstavou je plocha M a jehož hrany jsou tvořeny vektorem \vec{F} .

Úloha. Určete množství kapaliny P , které proteče povrchem krychle $K = \langle 0, a \rangle^3$ orientovaným vnějším normálovým polem za jednotku času, je-li proudění kapaliny popsáno rychlostním polem

$$\vec{V}(x, y, z) = (x^2 z + 1) \vec{k}.$$

Řešení. Podle (10.7) je

$$P = \iint_{(M)} \vec{V},$$

kde (M) je povrch krychle orientovaný vnějším normálovým polem. Uvedený integrál je roven součtu integrálů přes jednotlivé stěny krychle. Vzhledem k tomu, že vektorové pole \vec{V} je rovnoběžné s osou z , k nenulovému toku dochází pouze dolní a horní stěnou. Máme tak

$$P = \iint_{(M_1)} \vec{V} + \iint_{(M_2)} \vec{V},$$

kde (M_1) je graf konstantní funkce $f(x, y) = a$ definované na čtverci $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle$, orientovaný konstantním normálovým polem \vec{k} , zatímco (M_2) je graf nulové funkce definované na stejné množině orientovaný konstantním normálovým polem $-\vec{k}$. Tedy

$$P = \int_0^a \int_0^a (x^2 a + 1)(\vec{k} \cdot \vec{k}) \, dx \, dy - \int_0^a \int_0^a \vec{k} \cdot \vec{k} \, dx \, dy = a^2 - a^2 + a \int_0^a \int_0^a x^2 \, dx \, dy = \frac{a^5}{3}.$$

Úloha. Orientovaná plocha (M) je částí hyperbolické plochy

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2, \quad z \geq 0, \quad r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2r^2, \quad r > 0,$$

orientované jednotkovým normálovým polem \vec{n} , jehož z -ová složka je stále záporná. Určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -y^2, z^2)$ plochou (M) .

Řešení: Plocha M je grafem funkce

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$$

definované na mezikruží $D = \{(x, y) \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2r^2\}$. Podle (10.2) je

$$\begin{aligned} \iint_{(M)} \vec{F} &= \iint_D (x^2, -y^2, x^2 + y^2 - r^2) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}, -1 \right) \\ &= \iint_D \left(\frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} + r^2 - x^2 - y^2 \right) = \iint_D (r^2 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že

$$\iint_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = \iint_D \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = 0,$$

díky symetrii integrovaných funkcí na dané oblasti. Řešení úlohy pak již můžeme snadno nalézt pomocí polárních souřadnic:

$$\iint_{(M)} \vec{F} = \pi r^4 - \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{2}r} \varrho^3 d\varrho d\varphi = \pi r^4 - \frac{3}{2} \pi r^4 = -\pi \frac{r^4}{2}.$$

Úloha. Vypočtete integrál

$$\iint_{(M)} z \, dx \, dy,$$

kde M je povrch elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$$

orientovaný vnějším normálovým polem

Řešení. Podle Poznámky 10.6 to znamená, že počítáme tok pole $\vec{F} = (0, 0, z)$. Pro výpočet integrálu se nejlépe hodí eliptické souřadnice, tedy parametrizace

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (a \cos \varphi \cos \vartheta, b \sin \varphi \cos \vartheta, c \sin \vartheta),$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Derivací parametrického vyjádření dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-a \sin \varphi \cos \vartheta, b \cos \varphi \cos \vartheta, 0), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= (-a \cos \varphi \sin \vartheta, -b \sin \varphi \sin \vartheta, c \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Přitom

$$(10.8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (bc \cos \varphi \cos^2 \vartheta, ac \sin \varphi \cos^2 \vartheta, ab \cos \vartheta \sin \vartheta).$$

Je-li $\vartheta > 0$, je poslední složka normálového vektoru také kladná, a tedy námi zvolená parametrizace indukuje vnější normálové pole. Podle (10.4) máme

$$\begin{aligned} \iint_{(M)} z \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c \sin \vartheta ab \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \\ &= 2\pi abc \int_{-1}^1 u^2 \, du = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Vypočtěte následující plošné integrály:

1. $\iint_{(M)} x^2 y^2 z \, dx \, dy$, kde (M) je polovina kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \leq 0$, orientována normálovým polem se zápornou složkou z ;
2. $\iint_{(M)} xz \, dy \, dz + xy \, dz \, dx + yz \, dx \, dy$, kde M je povrch jehlanu ohraničeného rovinami o rovnicích $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Orientace je dána vnitřním normálovým polem.
3. $\iint_{(M)} (z - r)^2 \, dx \, dy$, kde M je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$, $r \leq z \leq 2r$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.
4. $\iint_{(M)} (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$, kde M je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.
5. $\iint_{(M)} z^2 \, dx \, dy$, kde (M) je povrch elipsoidu s osami x, y, z , s poloosami a, b, c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.
6. $\iint_{(M)} \frac{1}{x} \, dy \, dz + \frac{1}{y} \, dz \, dx + \frac{1}{z} \, dx \, dy$, kde (M) je povrch elipsoidu s osami x, y, z , s poloosami a, b, c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.
7. $\iint_{(M)} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, kde M je kulová plocha daná rovnicí $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Orientace je dána vnějším normálovým polem.
8. Určete průtok plochou o rovnici $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x, y, z \geq 0$ orientovanou tak, že normálu má nezápornou z -ovou složku, je-li rychlost proudění $\vec{V}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

9. Vypočtete množství kapaliny, které vyteče za jednotku času z množiny $x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq a, a > 0$, je-li rychlost proudění $\vec{V}(x, y, z) = (xz, yz, xy)$.
10. Určete průtok helikoidem $M = \{(u \cos v, u \sin v, cv) \mid (u, v) \in \langle a, b \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle\}$, $0 < a < b, c > 0$, je-li rychlostní pole $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$.
11. Nechť C je uzavřená kladně orientovaná jednoduchá křivka v rovině xy . Položme $M = C \times \langle 0, 1 \rangle$. Orientace této plochy je dána vnějším normálovým polem. Ukažte, že pro každé spojitě pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je

$$\iint_{(M)} F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy = \int_{(C)} (-F_2, F_1).$$

12. Nechť $\vec{F} = \varphi(x^2 + y^2)(\vec{i} + \vec{j})$. Ukažte, že tok pole \vec{F} přes každou orientovanou elementární plochu souměrnou podle osy z je nulový.

Výsledky.

1. $\frac{2\pi a^7}{105}$; 2. $\frac{1}{8}$; 3. $\frac{\pi r^4}{2}$; 4. 0; 5. 0; 6. $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$; 7. $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)r^3$; 8. $\frac{\pi a^4}{12}$; 9. $\pi r^2 a^2$; 10. $c\pi^2(b^2 - a^2)$; 11. Využijte toho, že je-li $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ tečný vektor k C , je $\vec{n} = (\tau_2, -\tau_1, 0)$ normálů k M ; 12. Funkce g popisující plochu splňuje $g(x, y) = g(-x, -y)$.

Kapitola 11

Integrální věty

V této kapitole se seznámíme s hlubšími větami integrálního počtu, které vyjadřují souvislost mezi typy integrálů, s nimiž jsme se setkali během předchozího výkladu. Jedná se Gaussovu větu (K.F.Gauss 1777–1855) převádějící plošný integrál na integrál trojný, Greenovu větu (G.Green 1793–1841) vyjadřující křivkový integrál pomocí integrálu dvojného, a konečně Stokesovu větu (G.G.Stokes 1819–1903) dávající do souvislosti integrál plošný a křivkový. Kromě pohodlné metody výpočtu, kterou tyto integrální věty nabízejí, mají zásadní teoretický význam v přírodních vědách, především pak v teorii pole. Pro svou hloubku, eleganci i široké spektrum aplikací bývají tyto věty považovány za jedny z nejkrásnějších výsledků klasické matematické analýzy.

1 Gaussova věta

Gaussova věta dává do vztahu objemový a plošný integrál. Představme si základní těleso P v prostoru \mathbb{R}^3 , jehož hranicí je uzavřená plocha M . Je-li tato oblast umístěna v proudící kapalině, pak očekáváme, že tok kapaliny přes hranici – tedy plošný integrál přes plochu M – souvisí se změnou celkového množství kapaliny v oblasti P – tedy s trojrozměrným integrálem přes oblast P . Podobnou souvislost vyjadřuje i Archimédův zákon: Hydrostatická síla působící na povrch ponořeného tělesa (tj. plošný integrál přes jeho povrch) je rovna tíze tělesa, tedy násobku objemu (= trojrozměrnému integrálu). Analogických vztahů mezi povrchovými a objemovými charakteristikami lze najít v přírodních vědách mnoho. Jejich matematickým vyjádřením je Gaussova věta. V její formulaci se vyskytuje diferenciální operátor divergence. Je-li \vec{F} vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$, pak jeho *divergence* je skalární funkce

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Druhý pojem, který potřebujeme, je hranice a vnitřek množiny G .

Definice 11.1. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Hranicí ∂G množiny G nazveme množinu*

$$\partial G = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } \mathbf{x} \text{ platí } U \cap G \neq \emptyset \text{ a } U \setminus G \neq \emptyset \right\}.$$

Vnitřek množiny G je $G \setminus \partial G$.

Definice hranice je zcela přirozená, neboť bod hranice je takový v jehož libovolně malém okolí leží jak body z G tak i z doplňku $\mathbb{R}^n \setminus G$, viz. [1, Kapitola 1].

Věta 11.2. Gaussova věta. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je základní těleso, jehož hranice ∂P je plocha orientovaná vnějším normálovým polem. Je-li \vec{F} vektorové pole třídy C^1 na P , pak*

$$(11.1) \quad \iiint_P \operatorname{div} \vec{F} = \iint_{(\partial P)} \vec{F}.$$

Důkaz. Větu budeme dokazovat pouze pro takové základní těleso P , které leží mezi dvěma grafy funkcí a to nejen z pohledu roviny xy ale také z pohledu rovin xz a yz . Tj.

$$P = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D_1 \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \right\} \quad (1)$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid (x, z) \in D_2 \quad g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z) \right\} \quad (2)$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid (y, z) \in D_3 \quad h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z) \right\}, \quad (3)$$

kde D_1 (resp. D_2 a D_3) jsou projekce tělesa P na rovinu xy (resp. xz a yz). Tato tělesa představují poměrně širokou třídu množin. Např. koule, elipsoid, kvádr a každé konvexní těleso je tohoto typu.

Nechť \vec{F} je vektorové pole třídy C^1 na P . Začneme s výpočtem trojného integrálu:

$$\iiint_P \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_P \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) = \iiint_P \frac{\partial F_1}{\partial x} + \iiint_P \frac{\partial F_2}{\partial y} + \iiint_P \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

V každém z posledních tří integrálů použijeme vyjádření množiny P , které se pro daný integrál nejvíce hodí. Pro první to je (3), pro druhý (2) a pro třetí (1):

$$(11.2) \quad \iint_{D_3} \left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \right) + \iint_{D_2} \left(\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) + \iint_{D_1} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) =$$

$$\iint_{D_3} (F_1(h_2(y, z), y, z) - F_1(h_1(y, z), y, z)) + \iint_{D_2} (F_2(x, g_2(x, z), z) - F_2(x, g_1(x, z), z))$$

$$+ \iint_{D_1} (F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))).$$

Podívejme se například na poslední integrál. Ten si lze dále představit jako

$$(11.3) \quad \iint_{D_1} \left(0, 0, F_3(x, y, f_2(x, y)) \right) \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right)$$

$$+ \iint_{D_1} \left(0, 0, F_3(x, y, f_1(x, y)) \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right)$$

Protože $(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1)$ je vnější normálové pole ke grafu funkce f_2 , který omezuje P shora, je první integrál tok vektorového pole $(0, 0, F_3)$ touto horní plochou. Podobně $(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, -1)$ je vnější normála ke grafu f_1 , který omezuje P zdola a tak druhý integrál je tok pole $(0, 0, F_3)$ dolní plochou omezující těleso P . Protože pole $(0, 0, F_3)$ je rovnoběžné s osou z , je tok pole $(0, 0, F_3)$ bočními stěnami tělesa P automaticky nulový. Zjistili jsme tak, že výraz (11.3) je tok pole $(0, 0, F_3)$ celou hranicí ∂P . Můžeme tedy poslední integrál v (11.2) nahradit takto

$$\iint_{D_1} \left(F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y)) \right) = \iint_{(\partial P)} (0, 0, F_3).$$

Zcela stejné úvahy jen se zaměněními rolemi proměnných x, y a z vedou k závěrům

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \left(F_2(x, g_2(x, z), z) - F_2(x, g_1(x, z), z) \right) &= \iint_{(\partial P)} (0, F_2, 0) \\ \iint_{D_1} \left(F_1(h_2(y, z), y, z) - F_1(h_1(y, z), y, z) \right) &= \iint_{(\partial P)} (F_1, 0, 0). \end{aligned}$$

S uvažáním těchto faktů se výraz (11.2) rovná

$$\begin{aligned} &\iint_{(\partial P)} (F_1, 0, 0) + \iint_{(\partial P)} (0, F_2, 0) + \iint_{(\partial P)} (0, 0, F_3) \\ &= \iint_{(\partial P)} \left((F_1, 0, 0) + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3) \right) = \iint_{(\partial P)} (F_1, F_2, F_3) = \iint_{(\partial P)} \vec{F}. \quad \square \end{aligned}$$

Příklad 11.3. Nechť $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$. Určete $\iint_{(M)} \vec{F} d\vec{S}$, kde (M) je povrch krychle $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle$ orientovaný vnějším normálovým polem.

Použitím Gaussovy věty dostáváme téměř okamžitě

$$\iint_{(M)} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_{\langle 0, a \rangle^3} \operatorname{div} \vec{F} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a 6 \, dx \, dy \, dz = 6a^3.$$

Příklad 11.4. Určete tok elektrostatického pole

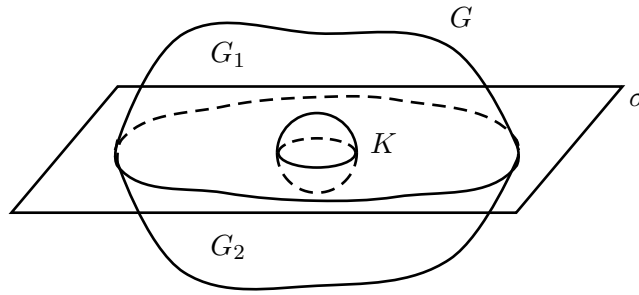
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}(x, y, z)}{|\vec{r}(x, y, z)|^3}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

kde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, přes libovolnou uzavřenou plochu (M) orientovanou vnějším normálovým polem a obklopující počátek.

Nechť G je omezená oblast, jejíž hranicí je plocha M . Jednoduchým výpočtem dostaneme, že

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Vzhledem k tomu, že pole \vec{F} není definováno v počátku, nemůžeme Gaussovu větu použít přímo. Kolem počátku však opíšeme uzavřenou kouli K o poloměru, řekněme ε , která je celá obsažena v oblasti G . V oblasti $G \setminus K$ je pak pole \vec{F} diferencovatelné a jeho divergence je nulová. Hranicí oblasti $G \setminus K$ však zase není uzavřená plocha, skládá se z původní uzavřené plochy ∂G a z hranice ∂K koule K . Splnění všech podmínek Gaussovy věty lze dosáhnout např. protnutím množiny $G \setminus K$ rovinou σ procházející počátkem. Ta nám $G \setminus K$ rozdělí na dvě části G_1 ležící nad rovinou a G_2 ležící pod rovinou, viz. obr. 11.1.



Obr. 11.1.

Hranice ∂G_1 a ∂G_2 oblastí G_1 a G_2 jsou tvořeny částmi původní plochy M , roviny σ a povrchu koule K . Podle Gaussovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{(\partial G_1)} \vec{F} &= \iiint_{G_1} \operatorname{div} \vec{F} = 0 \\ \iint_{(\partial G_2)} \vec{F} &= \iiint_{G_2} \operatorname{div} \vec{F} = 0. \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme

$$(11.4) \quad \iint_{(\partial G_1)} \vec{F} + \iint_{(\partial G_2)} \vec{F} = 0.$$

Podívejme se blíže na součet těchto integrálů. Integrály přes části hranice ležící na rovině σ mají opačné znaménko a proto se vyruší. Vnější normály oblastí G_1 a G_2 na části kulové plochy splývají s vnitřní normálou kulové plochy K . Tedy $\iint_{(G_1)} \vec{F} + \iint_{(G_2)} \vec{F} = \iint_{(M)} \vec{F} - \iint_{(\partial K)} \vec{F}$. S pomocí (11.4) máme

$$\iint_{(M)} \vec{F} = \iint_{(\partial K)} \vec{F}.$$

V příkladu 10.8 jsme už poslední integrál počítali, viz. (10.3). Použijeme ho a dostaneme, že tok

$$\iint_{(\partial K)} \vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Tok elektrostatického pole přes *libovolnou* uzavřenou plochu obsahující počátek ve své vnitřní oblasti je roven $\frac{Q}{\varepsilon_0}$.

Poznámka 11.5. V předchozím příkladě jsme ukázali modifikaci Gaussovy věty pro oblasti, které jsou ohraničeny dvěma uzavřenými plochami M_1 a M_2 , přičemž menší oblast s hranicí M_1 je částí větší oblasti s hranicí M_2 . Ve schodě s předchozím postupem vždy platí, že

$$\iint_{(M_2)} \vec{F} - \iint_{(M_1)} \vec{F} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F},$$

kde (M_1) a (M_2) jsou plochy orientované vnějším normálovým polem.

Příklad 11.6. Na základě Pascalova zákona odvoďte zákon Archimédův.

Budeme předpokládat, že těleso $G \subset \mathbb{R}^3$ má za hranici orientovanou plochu ∂G . Dále se dohodneme, že hladina kapaliny o hustotě ρ je rovina xy . Nechť je těleso G ponořeno do kapaliny, tj. $G \subset \{(x, y, z) \mid z \leq 0\}$. Podle Pascalova zákona je hydrostatická síla \vec{F} působící na oblast G dána plošnými integrály

$$\vec{F} = \left(-\rho g \iint_M z \cdot n_1 \, dS, -\rho g \iint_M z \cdot n_2 \, dS, -\rho g \iint_M z \cdot n_3 \, dS \right),$$

kde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je vnitřní jednotkové normálové pole plochy ∂G . Gaussovu větu dává

$$F_1 = -\rho g \iint_{\partial G} z \cdot n_1 \, dS = -\rho g \iint_{(\partial G)} z \vec{i} \, d\vec{S} = \rho g \iiint_G \operatorname{div}(z \vec{i}) = 0,$$

$$F_2 = -\rho g \iint_{\partial G} z \cdot n_2 \, dS = -\rho g \iint_{(\partial G)} z \vec{j} \, d\vec{S} = \rho g \iiint_G \operatorname{div}(z \vec{j}) = 0,$$

a konečně,

$$\begin{aligned} F_3 &= -\rho g \iint_M z \cdot n_3 \, dS = -\rho g \iint_{(\partial G)} z \vec{k} \, d\vec{S} \\ &= \rho g \iiint_G \operatorname{div}(z \vec{k}) = \rho g \iiint_G 1 = \rho \operatorname{objem}(G). \end{aligned}$$

Celkově $\vec{F} = (0, 0, \rho g \operatorname{objem}(G))$. Slovy: síla působící na ponořené těleso je rovna tíze kapaliny mající stejný objem jako původní těleso.

Fyzikální interpretace divergence

Pomocí Gaussovy věty je možno dát matematicky definovanému operátoru divergence jasný fyzikální význam. Rovnice

$$\iint_{(\partial G)} \vec{F} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F},$$

říká, že objemový integrál divergence je roven toku přes hranici oblasti. Můžeme proto divergenci chápat jako hustotu zdrojů pole \vec{F} . Přesněji je tato souvislost vyjádřena v následujícím tvrzení:

Tvrzení 11.7. *Nechť \vec{F} je vektorové pole spojitě diferencovatelné v jistém okolí bodu (x_0, y_0, z_0) . Označme symbolem $K(\varrho)$ uzavřenou kouli se středem v bodě (x_0, y_0, z_0) a poloměrem $\varrho > 0$. Nechť $\partial K(\varrho)$ je její hranice orientovaná vnějším normálovým polem. Pak*

$$(11.5) \quad \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{\partial K(\varrho)} \vec{F}}{\operatorname{objem}(K(\varrho))}.$$

Důkaz. Budeme odhadovat rozdíl

$$\left| \frac{1}{\operatorname{objem} K(\varrho)} \iint_{(\partial K)} \vec{F} - \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \right|.$$

Podle Gaussovy věty víme, že $\iint_{\partial K} \vec{F} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}$. Dále, $\operatorname{objem}(K(\varrho)) = \frac{4}{3} \pi \varrho^3$. Takže zkoumaný rozdíl má tvar

$$(11.6) \quad \left| \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \iiint_{K(\varrho)} \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \right|.$$

Protože $\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ je konstanta, upravíme si ji na tvar

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\iiint_{K(\varrho)} 1}{\frac{4}{3} \pi \varrho^3} = \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \iiint_{K(\varrho)} \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0).$$

(Užíváme důležitého vztahu, že $\iiint_M 1 = \operatorname{objem}(M)$!) Nyní má rozdíl (11.6) tvar

$$(11.7) \quad \left| \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \iiint_{V(\varrho)} \operatorname{div} \vec{F} - \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \iiint_{K(\varrho)} \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \right| =$$

$$= \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \left| \iiint_{K(\varrho)} (\operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)) \right| \leq \frac{3}{4 \pi \varrho^3} \iiint_{K(\varrho)} |\operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)|.$$

Protože $\operatorname{div} \vec{F}$ je spojitou funkcí, platí že $|\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) - \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon$ pro (x, y, z) z malého okolí bodu (x_0, y_0, z_0) . Je-li poloměr ϱ koule $K(\varrho)$ dostatečně malý, pak výše

zmíněná podmínka nastane a v posledním integrálu v (11.7) integrujeme funkci v absolutní hodnotě nepřevyšující ε . Můžeme pokračovat v odhadu (11.7):

$$\leq \frac{3}{4\pi\varrho^3} \iiint_{K(\varrho)} \varepsilon = \frac{3}{4\pi\varrho^3} \varepsilon \cdot \text{objem}(K(\varrho)) = \varepsilon.$$

Podle definice limity jsme dokázali $\lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{1}{\text{objem}(K(\varrho))} \iint_{(\partial K)} \vec{F} d\vec{S} - \text{div } F(x_0, y_0, z_0) = 0$, což je přesně rovnost (11.5). \square

Reprezentuje-li \vec{F} jako vektorové pole rychlostí dané kapaliny, pak podíl

$$\frac{\iint_{(\partial K(\varrho))} \vec{F} d\vec{S}}{\text{objem}(K(\varrho))}$$

můžeme chápat jako poměr mezi průtokem povrchem koule a jejím objemem. Divergence $\text{div } \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ pak udává tendenci tohoto poměru zmenšuje-li se poloměr k nule. Jinými slovy, pro malé okolí bodu (x_0, y_0, z_0) je průtok tímto okolím přibližně roven součinu divergence $\text{div } \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ a jeho objemu. Je-li dále $\text{div } \vec{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$ převládá tok směrem od bodu (x_0, y_0, z_0) . V tomto případě nazýváme bod (x_0, y_0, z_0) *zřídlem*. Je-li na druhé straně $\text{div } \vec{F}(x_0, y_0, z_0) < 0$, je celková bilance proudění v blízkosti bodu (x_0, y_0, z_0) záporná. V teorii proudění se takovýto bod nazývá *norou* (negativním zřídlem).

Je-li $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 0$ v jisté oblasti G , pak je z Gaussovy věty tok přes každou uzavřenou plochu v oblasti G nulový. (Podle vztahu (11.5) platí i opačné tvrzení.) Rovnice $\text{div } \vec{F} = 0$ tedy popisuje ustálené proudění. Z těchto důvodů se vektorové pole s nulovou divergencí nazývá *nezřídlové*. Příkladem nezřídlového pole je magnetické pole \vec{B} , které není na rozdíl od pole elektrostatického vytvářeno nábojem. Matematickou formulací tohoto fyzikálního zákona je jedna z Maxwellových rovnic

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Na závěr tohoto odstavce se budeme krátce věnovat fyzikálnímu významu Laplaceova operátoru. Připomeňme, že má-li funkce f spojitě diferencovatelné derivace druhého řádu na oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$, pak Laplaceův operátor Δf je definován vztahem

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Představme si nyní, že vektorové pole \vec{F} je dáno největším spádem funkce f , tedy necht $\vec{F} = \text{grad } f$. Tomuto typu pole se budeme podrobně věnovat v následující kapitole. V tomto případě je

$$\text{div } \vec{F} = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

Laplaceův operátor tedy můžeme chápat jako hustotu zdrojů pole \vec{F} – tok pole \vec{F} každou oblastí K v oblasti G je roven integrálu $\iiint_K \Delta f$.

Na základě dřívějších úvah můžeme odvodit rovnici pro ustálené tepelné proudění. Uvažujme oblast G v prostoru \mathbb{R}^3 . Necht $f(x, y, z)$ je teplota v bodě $(x, y, z) \in G$. K vyrovnání teplot (tepelnému proudění) v různých bodech oblasti G dochází vždy ve směru největšího teplotního rozdílu, tedy ve směru gradientu funkce f . Jinak řečeno, tepelné proudění je dáno vektorovým polem $\vec{F} = \text{grad } f$. Jestliže v oblasti G nastal stav tepelné rovnováhy, pak tepelný tok přes každou uzavřenou plochu je nulový. Znamená to, že $\text{div } \vec{F} = 0$, a tedy, jak jsme si právě uvědomili, tato podmínka je ekvivalentní s rovnicí $\Delta f = 0$. (Studiem těchto rovnic se zabývá důležitá oblast matematické analýzy—harmonická analýza.)

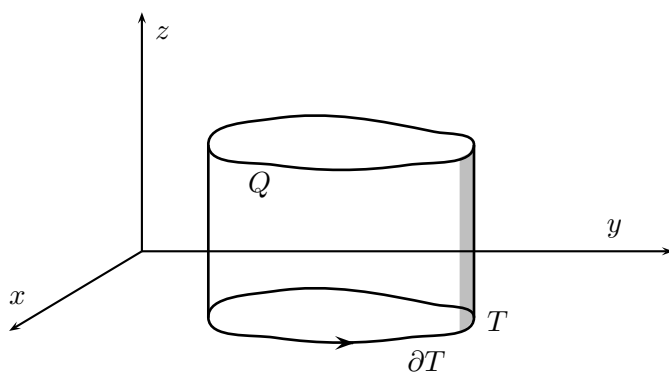
2 Greenova věta

Greenova věta vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem vektorového pole vzhledem k hranici rovinné oblasti a dvojrozměrným integrálem přes tuto oblast. Před formulací věty si musíme říci, co rozumíme kladnou orientací uzavřené jednoduché křivky v rovině vzhledem k množině. Necht $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast. Pak její hranice ∂T je uzavřená jednoduchá křivka. Řekneme, že ∂T je *kladně orientovaná vzhledem k T* , jestliže při procházení hranice ve směru parametrizace máme množinu T nalevo.

Věta 11.8. Greenova věta. *Necht $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast, jejíž hranice ∂T je kladně orientovaná vzhledem k T . Necht $\vec{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na T . Pak platí*

$$(11.8) \quad \int_{(\partial T)} \vec{F} = \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Důkaz. Důkaz Greenovy věty je založen na aplikaci věty Gaussovy. Definujme nejdříve oblast $Q = T \times \langle 0, 1 \rangle$ v prostoru \mathbb{R}^3 , která je „zobecněným válcem“ s půdorysem T a výškou 1, viz. obr.11.2.



Obr. 11.2.

Označíme si pomocné vektorové pole $\vec{H}(x, y, z) = (F_2(x, y), -F_1(x, y), 0)$. To je vektorové pole třídy C^1 na Q . Necht (∂Q) je hranice oblasti Q orientovaná vnějším normálovým polem. Podle Gaussovy věty máme

$$(11.9) \quad \iint_{(\partial Q)} \vec{H} = \iiint_Q \text{div } \vec{H}.$$

Prozkoumáme obě strany této rovnice. Začneme s pravou stranou. Rozepsáním trojného integrálu dostaneme

(11.10)

$$\iiint_Q \operatorname{div} \vec{H} = \iiint_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \iint_T \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dz \right) = \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

neboť $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ nezávisí na z . Podívejme se nyní na plošný integrál v rovnosti (11.9). Hranice ∂Q je sjednocením tří ploch – dolní podstavy, tj. množiny $\{(x, y, 0) \mid (x, y) \in T\}$; horní podstavy, tj. množiny $\{(x, y, 1) \mid (x, y) \in T\}$ a pláště, tj. plochy $P = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial T, 0 \leq z \leq 1\}$. Vzhledem k tomu, že vektorové pole \vec{H} je rovnoběžné s rovinou xy , je skalární součin tohoto pole s jednotkovým normálovým polem na horní a dolní podstavě nulový. Celý tok se tak realizuje na plášti:

$$\iint_{(\partial Q)} \vec{H} = \iint_{(P)} \vec{H} = \iint_P \vec{H} \cdot \vec{n},$$

kde \vec{n} je vnější normálové pole. Označme $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ jednotkové tečné pole ke křivce ∂T souhlasné s její orientací. Vnější normála v tomtéž bodě pak má souřadnice $(\tau_2, -\tau_1)$. Odtud ihned plyne, že vnější jednotková normála k plášti P má tvar $\vec{n} = (\tau_2, -\tau_1, 0)$. Takže

$$\begin{aligned} (11.11) \quad \iint_P \vec{H} \cdot \vec{n} &= \iint_P (F_2, -F_1, 0) \cdot (\tau_2, -\tau_1, 0) = \iint_P F_1 \tau_1 + F_2 \tau_2 = \\ &= \int_{\partial T} \left(\int_0^1 (F_1 \tau_1 + F_2 \tau_2) dz \right) = \int_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{(\partial T)} \vec{F}. \end{aligned}$$

(Využili jsme toho, že ani pole \vec{F} ani parametrizace křivky ∂T nezávisí na z -tové souřadnici.) Tato rovnost spolu s (11.10) dává dokazované tvrzení. \square

Příklad 11.9. Pomocí Greenovy věty určete integrál

$$\int_{(C)} (-y^3 + \ln x) dx + (x^3 + y^2) dy,$$

kde (C) je kladně orientovaná hranice oblasti $T \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \quad 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{3}x.$$

V daném případě je výpočet pomocí Greenovy věty jednodušší než přímý výpočet zadaného křivkového integrálu. Platí totiž

$$\int_{(C)} (-y^3 + \ln x) dx + (x^3 + y^2) dy = \iint_T (3x^2 + 3y^2).$$

Výpočtem v polárních souřadnicích pak máme (T je část kruhové výseče)

$$\iint_G (3x^2 + 3y^2) = 3 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^4 \varrho^3 \, d\varrho = 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_1^4 = \frac{255}{16} \pi.$$

Greenova věta má podobný význam pro teorii rovinného pole jako Gaussova věta pro teorii pole prostorového. Podobně jako v dřívějším výkladu tak můžeme dát fyzikální význam divergenci rovinného pole (vydatnost zdrojů rovinného proudění) i Laplaceově operátoru funkce dvou proměnných.

3 Stokesova věta

Greenovu větu je možno chápat jako vztah mezi křivkovým integrálem přes kraj (tj. hranici) rovinné plochy a plošným integrálem přes tuto rovinnou plochu. V řadě důležitých aplikací je nutno uvažovat obecnější situaci, ve které je rovinná plocha vyzdvížena do trojrozměrného prostoru a deformována. Toto „křivočaré“ zobecnění Greenovy věty je věta Stokesova. K její formulaci budeme potřebovat pojem rotace vektorového pole.

Definice 11.10. *Nechť $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je vektorové pole třídy C^1 v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Rotací vektorového pole rozumíme vektorové pole definované v G , k jehož označení používáme symbol $\text{rot } \vec{F}$, definované rovností*

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Méně korektně, ale přehledněji můžeme rotaci pole \vec{F} chápat jako symbolický vektorový součin formálního diferenciálního operátoru $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ a pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Použijeme-li k výpočtu tohoto součinu symbolický determinant, dostáváme následující mnemotechnickou pomůcku

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

Příklad 11.11. (i) Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$. Pak

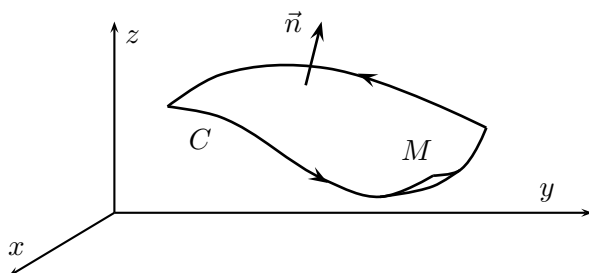
$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (2y - 2z)\vec{i} + (2z - 2x)\vec{j} + (2x - 2y)\vec{k}.$$

(ii) Je-li $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$, kde F_1 a F_2 jsou spojitě diferencovatelné v oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, pak

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y) & F_2(x, y) & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Všimněme si, že rotace tohoto, ve své podstatě rovinného vektorového pole, je dána diferenciálním výrazem $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, který se vyskytuje v Greenově větě.

Při formulaci Greenovy věty bylo důležité, že křivka $C \subset \mathbb{R}^2$ ohraničující rovinnou základní oblast T byla orientována kladně. Tento fakt můžeme vyjádřit ekvivalentně ve formě, která se více hodí pro zobecnění. Množinu T ležící v rovině xy můžeme orientovat pomocí jednotkového konstantního normálového pole \vec{k} . Jestliže se pohybujeme po křivce $C = \partial T$ v kladném smyslu a máme hlavu ve směru vektoru \vec{k} pak při tomto pohybu máme oblast T vždy po levé ruce. Řekneme, že za těchto předpokladů je křivka C orientována souhlasně s orientovanou plochou T . Touto personifikací budeme definovat i souhlasnou orientaci kraje a plochy v obecném případě. Necht (M) je orientovaná elementární plocha, jejíž kraj tvoří uzavřená, jednoduchá křivka C . Řekneme, že *orientovaná plocha* (M) a *orientovaná křivka* (C) mají *souhlasnou orientaci*, jestliže plocha M je vždy po levé straně, za předpokladu, že se pohybujeme po křivce C ve smyslu její orientace a to tak, že hlava má směr normálového pole plochy M viz. obr. 11.3.



Obr. 11.3.

Uvedené vymezení pojmu souhlasná orientace není matematická definice v rigorózním slova smyslu, neboť se opírá o personifikovaný model. Méně personifikovaně bychom to mohli říci tak, že souhlasná orientace nastane, když tečný vektor $\vec{\tau}$ a normálový \vec{n} v každém bodě kraje $K(M)$ jsou takové, že $\vec{n} \times \vec{\tau}$ generuje tečnou polopřímku k M . I tuto formulaci lze však matematicky precizovat do zcela exaktní podoby. Vzhledem k tomu, že přesná (a méně názorná) matematická definice nám v praktických situacích neřekne nic více než naše intuitivní představa, nebudeme ji uvádět.

Pomocí výše uvedených pojmů se nyní Greenova věta pro rovinnou oblast $T \subset \mathbb{R}^2$ orientovanou normálovým polem \vec{k} a se souhlasně orientovaným krajem (∂T) a pro vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ změní do tvaru:

$$\int_{(\partial T)} \vec{F} = \iint_{(T)} \text{rot } \vec{F}.$$

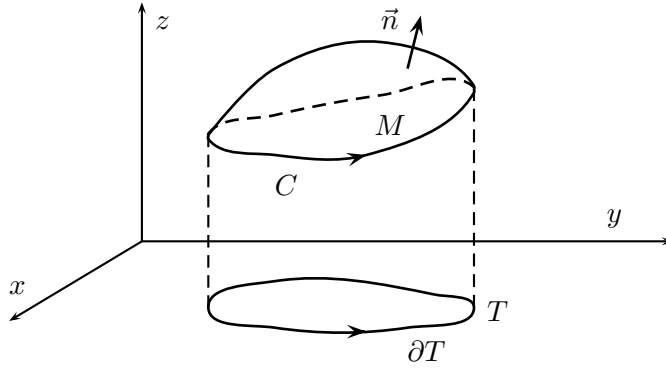
Tento vztah nás vede ke Stokesově větě. Traduje se, že důkaz této věty zadal vynikající anglický matematik G.G.Stokes v roce 1854 studentům, jako jeden z příkladů u zkoušky na Universitě v Cambridge. Myšlenka tohoto důkazu se totiž opírá o použití tehdy již dobře známé Greenovy věty. Méně známé je, že mu tento problém navrhl lord Kelvin. Autoři této učebnice však nebudou tak přísní a důkaz (alespoň ve speciálním případě) uvedou.

Věta 11.12. Stokesova věta *Necht vektorové pole \vec{F} je třídy C^1 na otevřené množině obsahující elementární orientovanou plochu M . Předpokládejme, že kraj plochy M je uza-*

vřená jednoduchá křivka $C = K(M)$. Při souhlasné orientaci plochy M a křivky C platí

$$(11.12) \quad \int_{(C)} \vec{F} = \iint_{(M)} \operatorname{rot} \vec{F}.$$

Důkaz. Nechť elementární plocha M je dána grafem funkce $g(x, y)$ na základní oblasti $T \subset \mathbb{R}^2$. Dále budeme předpokládat, že g má spojitě všechny parciální derivace druhého řádu na oblasti T , tj. je třídy C^2 na T . Nechť (∂T) je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka, viz obr. 11.4.



Obr. 11.4.

Označíme si $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0)$, $t \in \langle a, b \rangle$, parametrizaci křivky (∂T) . Liší se od $\varphi(t)$ ve třetí složce, která je zvednuta do správné výšky grafu funkce $g(x, y)$. Budeme-li předpokládat, že plocha M je orientována normálovým polem s kladnou složkou z , pak kraj (C) plochy (M) bude s touto plochou souhlasně orientován, použijeme-li přirozenou parametrizaci

$$\psi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Ta se liší od parametrizace $\varphi(t)$ ve třetí složce, neboť příslušný bod leží na ploše M . Podle definice je

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \vec{F} &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_a^b \vec{F}(\psi) \cdot \psi' \, dt \\ &= \int_a^b F_1(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) \cdot \varphi'_1 + F_2(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) \cdot \varphi'_2 \\ &\quad + F_3(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) \left(\frac{\partial g}{\partial x} \varphi'_1 + \frac{\partial g}{\partial y} \varphi'_2 \right) \, dt \\ &= \int_a^b \left[F_1(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot F_3(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) \right] \cdot \varphi'_1 + \\ &\quad + \left[F_2(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot F_3(\varphi_1, \varphi_2, g(\varphi_1, \varphi_2)) \right] \cdot \varphi'_2 \, dt. \end{aligned}$$

Zavedeme si nové rovinné vektorové pole $\vec{G} = (G_1, G_2)$ vztahy

$$(11.13) \quad G_1(x, y) = F_1(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial g}{\partial x} F_3(x, y, g(x, y)),$$

$$(11.14) \quad G_2(x, y) = F_2(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial g}{\partial y} F_3(x, y, g(x, y)).$$

Pak poslední integrál se zjednoduší do tvaru

$$\int_a^b G_1(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_1' + G_2(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_2' \, dt = \int_{\partial T} \vec{G} \cdot \vec{\tau} = \int_{(\partial T)} \vec{G}.$$

Takže zatím máme

$$(11.15) \quad \int_{(C)} \vec{F} = \int_{(\partial T)} \vec{G}.$$

Pro toto nové rovinné pole \vec{G} použijeme Greenovu větu:

$$(11.16) \quad \int_{(\partial T)} \vec{G} = \iint_T \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

Zbývá vyjádřit výraz za dvojným integrálem pomocí původního pole \vec{F} . K tomu uijeme převodní vztahy (11.13) a (11.14). Odtud

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} F_3 + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} F_3 - \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= \iint_T -\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \iint_T \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

V tomto tvaru již poznáváme vnější normálu $\vec{n} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$. Druhý člen je ovšem rotace pole \vec{F} . Dostali jsme tak

$$(11.17) \quad \iint_T \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = \iint_T \operatorname{rot} \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y, g(x, y)) = \\ = \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} = \iint_{(M)} \operatorname{rot} \vec{F}.$$

Spojení (11.15), (11.16) a (11.17) zakončuje důkaz. \square

Na závěr si uvědomme, že máme-li dokázanu Stokesovu větu pro případ elementárních ploch daných grafy funkcí se spojitými derivacemi druhého řádu, můžeme tuto větu lehce dokázat i pro plochy, které mají rozklad na elementární plochy tohoto typu. Křivkové integrály přes společné části hranic dílčích ploch mají opačné znaménko, a tak sečtením rovností (11.12) platných pro všechny dílčí plochy získáme Stokesův vzorec i pro tento obecný případ.

Příklad 11.13. Pomocí Stokesovy věty vypočítejte

$$\int_{(C)} y \, dx + z \, dy + x \, dz,$$

kde C je průnik kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a roviny $x + y + z = 1$. Křivka je orientována tak, že průmět do roviny xy se pohybuje v kladném smyslu.

Pole, které se zde vyskytuje je $\vec{F} = (y, z, x)$. Křivka C je kružnice, která je okrajem kruhu M ležícího v rovině o rovnici $x + y + z = 1$ a mající střed v bodě $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Z elementární analytické geometrie můžeme zjistit, že poloměr tohoto kruhu je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Orientujeme-li M pomocí normálového pole

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

dostaneme podle Stokesovy věty

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \vec{F} &= \iint_{(M)} \operatorname{rot} \vec{F} = \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} = \\ &= \iint_M (-1, -1, -1) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_M 1 = -\sqrt{3} \frac{2}{3} \pi = -\frac{2}{\sqrt{3}} \pi. \end{aligned}$$

Fyzikální význam rotace

Stokesova věta vysvětluje fyzikální význam rotace vektorového pole. Předpokládejme, že pole \vec{F} je spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0) . Necht $C(\varrho)$ a $K(\varrho)$ jsou kružnice a kruh se středem v bodě (x_0, y_0, z_0) a poloměrem $\varrho > 0$, které leží v pevně zvolené rovině σ . Necht \vec{n} je (konstantní) jednotkové normálové pole plochy $K(\varrho)$ určující její orientaci. Předpokládejme dále, že $(C(\varrho))$ a $(K(\varrho))$ mají souhlasnou orientaci. Následující tvrzení dává analogii vztahu (11.5).

Tvrzení 11.14. *Při splnění výše uvedených předpokladů platí*

$$(11.18) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{\int_{(C(\varrho))} \vec{F}}{\operatorname{obsah}(K(\varrho))} = \operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}.$$

Důkaz. Ze Stokesovy věty máme

$$\int_{(C(\varrho))} \vec{F} = \iint_{(K(\varrho))} \operatorname{rot} \vec{F} = \iint_{K(\varrho)} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}.$$

Podle Věty 9.6 existuje bod $(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho) \in K(\varrho)$ tak, že

$$\iint_{K(\varrho)} (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}) = (\operatorname{rot} \vec{F}(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho) \cdot \vec{n}) \operatorname{obsah}(K(\varrho)).$$

Tedy

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{\int_{C(\varrho)} \vec{F}}{\operatorname{obsah}(K(\varrho))} = \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \operatorname{rot} \vec{F}(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho) \cdot \vec{n} = \operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}.$$

□

Interpretujeme-li integrál $\int_{(C)} \vec{F}$ jako práci pole \vec{F} při pohybu po kružnici $C(\varrho)$, můžeme poměr v limitě rovnosti (11.18) chápat jako poměr mezi energií pohybu po dané křivce a obsahem oblasti, kterou křivka vymezuje. Skalární součin $\operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}$ tak na základě (11.18) vyjadřuje tendenci těchto poměrů pro poloměry konvergující k nule. Je-li ϱ malé, pak je práce pole po křivce $C(\varrho)$ přibližně rovna součinu $(\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}) \cdot \operatorname{obsah}(K(\varrho))$. Hodnotu skalárního součinu $\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ tak můžeme chápat jako míru „vířivosti“ pole \vec{F} v bodě (x_0, y_0, z_0) kolem osy dané vektorem \vec{n} . Tato charakteristika bude v absolutní hodnotě největší, bude-li \vec{n} násobkem vektoru $\operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ a nejmenší, tj. nulová, bude-li \vec{n} vektor kolmý k vektoru $\operatorname{rot} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$. Vektor rotace tak udává směr osy největší vířivosti pole \vec{F} . Volněji můžeme výsledky předchozích úvah demonstrovat následujícím příkladem. Představme si, že \vec{F} je rychlostní pole proudící kapaliny, do které ponoříme lopatkový mlýnek. Pak energie mlýnku bude největší, nastavíme-li osu mlýnku ve směru $\operatorname{rot} \vec{F}$ v daném bodě. Volíme-li naopak osu kolmou na vektor rotace, bude energie nulová.

Vektorové pole, pro které platí, že $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^3$, se nazývá *nevírové*. Takovéto vektorové pole má nulovou energii otáčení kolem jakékoliv osy. Těmito typy vektorových polí se budeme zabývat v následující kapitole.

4 Cvičení

Úloha. Pomocí Gaussovy věty určete integrál

$$\iiint_{(M)} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientovaná vnějším normálovým polem.

Řešení. Jedná se o pole $\vec{F} = (x, y, z)$ a jeho tok plochou M . Podle Gaussovy věty aplikované na kouli G se středem v počátku a poloměrem a máme

$$\iiint_{(M)} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_G 3 = 4\pi a^3.$$

Tento příklad je typickou ukázkou použití Gaussovy věty - vektorové pole má konstantní divergenci a tedy hledaný integrál je roven součinu této divergence s objemem tělesa známým z elementární geometrie.

Úloha. Určete tok pole $\vec{F} = (xz, xy, yz)$ povrchem M válce daného nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 8.$$

Orientace je dána vnitřním normálovým polem.

Řešení. Označíme-li symbolem V daný válec, pak

$$\iint_{(M)} \vec{F} = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = - \iiint_V (z + x + y) = - \iiint_V z,$$

neboť jsme využili nulovosti některých integrálů na základě symetrie dané oblasti. Výpočet můžeme pohodlně dokončit v cylindrických souřadnicích

$$- \iiint_V z = - \int_0^8 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \varrho z \, d\varrho d\varphi dz = -2\pi \int_0^3 \varrho d\varrho \int_0^8 z dz = -288\pi.$$

I v tomto případě bylo použití Gaussovy věty výhodné, neboť integraci polynomu stupně dva v proměnných x, y, z převedla na integraci polynomu stupně jedna.

Úloha. Nechť G je základní oblast v prostoru \mathbb{R}^3 , jejíž hranicí je uzavřená plocha ∂G . Ukažte, že pro objem V oblasti G platí

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(\partial G)} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

za předpokladu, že ∂G je orientována vnějším normálovým polem.

Řešení. Bezprostřední aplikací Gaussovy věty pro vektorové pole $\vec{F} = \frac{1}{3}(x, y, z)$ získáváme

$$\frac{1}{3} \iint_{(\partial G)} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_G 1 = V.$$

Úloha. Na základě předchozího příkladu určete objem V elipsoidu daného nerovností

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a, b, c > 0.$$

Řešení. Použijeme-li pro popis povrchu elipsoidu zobecněných sférických souřadnic, tzv. eliptických souřadnic, máme parametrizaci

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (a \cos \varphi \cos \vartheta, b \sin \varphi \cos \vartheta, c \sin \vartheta) \quad \text{kde} \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

Využitím vztahu (10.8) a předchozího příkladu máme

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \iiint_{(M)} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (abc \cos^2 \varphi \cos^3 \vartheta + abc \sin^2 \varphi \cos^3 \vartheta + abc \cos \vartheta \sin^2 \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta = \\
 &= \frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^3 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\
 &= \frac{2}{3} \pi abc [\sin \vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3} \pi abc.
 \end{aligned}$$

Úloha. Podle Gaussovy věty z elektrostatiky platí pro vektor intenzity \vec{E} elektrostatického pole a objemovou hustotu náboje ρ vztah

$$(11.19) \quad \iint_{(\partial T)} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_T \rho,$$

kde T je základní těleso v \mathbb{R}^3 , jehož hranicí ∂T je uzavřená plocha orientovaná vnějším normálovým polem. (Tento vzorec je vlastně spojitou verzí diskrétního případu z Příkladu 10.8.) Odvoďte diferenciální podobu tohoto zákona.

Řešení. Předpokládejme, že \vec{E} je vektorové pole třídy C^1 v jisté otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$ a ρ je funkce spojitá v G . Zvolme bod $(x_0, y_0, z_0) \in G$. Pro libovolnou kouli $K(r) \subset G$ se středem v bodě (x_0, y_0, z_0) a poloměrem r , jejíž hranice $\partial K(r)$ je orientována vnějším normálovým polem, platí podle Gaussovy věty

$$\iint_{(\partial K(r))} \vec{E}(x, y, z) = \iiint_{K(r)} \operatorname{div} \vec{E}(x, y, z).$$

Z (11.19) dostaneme

$$\iiint_{K(r)} \left(\operatorname{div} E(x, y, z) - \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \right) = 0.$$

Protože uvedená identita platí pro každé $r > 0$ dostatečně malé, musí být funkce $\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ vzhledem ke své spojitosti nulová. Hledanou ekvivalentní podobou uvedené integrální rovnice je tedy vztah

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \text{ pro všechna } (x, y, z) \in G.$$

Na podobném principu je založeno i odvození ostatních Maxwellových rovnic.

Úloha. Pomocí Greenovy věty vypočtěte následující křivkové integrály

$$((i)) \quad \int_{(C)} (3x - xy - y^3) \, dx - (2xy - x^2) \, dy,$$

kde C je kladně orientovaná hranice čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

$$((ii)) \quad \int_{(\partial D)} e^x(1 - \cos y) \, dx - e^x(y - \sin y) \, dy,$$

kde hranice ∂D oblasti $D = \{(x, y) \mid x \in \langle 0, \pi \rangle, 0 \leq y \leq \sin x\}$ je kladně orientovaná.

Řešení. (i)

$$\begin{aligned} \int_{(C)} (3x - xy - y^3) \, dx - (2xy - x^2) \, dy &= \int_0^1 \int_0^1 [(2x - 2y) - (-x - 3y^2)] \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (3x - 2y + 3y^2) \, dx \, dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \int_{(\partial D)} e^x(1 - \cos y) \, dx - e^x(y - \sin y) \, dy &= \\ &= \iint_D (e^x(\sin y - y) - e^x \sin y) \, dx \, dy = - \iint_D e^x y \, dx \, dy = \\ &= - \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} e^x y \, dy \right) \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1). \end{aligned}$$

Všimněme si, že v příkladě (i) bylo použití Greenovy věty výhodné, zatímco v případě (ii) dokonce nezbytné. (Zkuste začít výpočet integrálu v (ii) přímou metodou.)

Úloha. Ukažte, že je-li C jednoduchá uzavřená křivka v \mathbb{R}^2 , pak obsah P omezené oblasti v \mathbb{R}^2 s kladně orientovanou hranicí (C) je možno vyjádřit pomocí následujících křivkových integrálů

$$(11.20) \quad P = \int_{(C)} x \, dy,$$

$$(11.21) \quad P = - \int_{(C)} y \, dx,$$

$$(11.22) \quad P = \frac{1}{2} \int_{(C)} -y \, dx + x \, dy.$$

Vypočtete pomocí těchto vztahů obsah rovinného útvaru omezeného osou x a částí cykloidy

$$\varphi(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t), \quad a > 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení. Zvolíme např. (11.20). Vektorové pole, o které se v integrálu jedná, je $\vec{F} = (0, x)$. Pak $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ a dle Greenovy věty

$$\int_{(C)} x \, dy = \iint_D dx \, dy = P,$$

kde D je vnitřní oblast křivky C . Ostatní vztahy se dokáží zcela analogicky volbami $\vec{F} = (-y, 0)$ a $\vec{F} = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$.

Pro výpočet druhé části příkladu je nejvýhodnější použít vzorec $P = \int_{(C)} x \, dy$. Hranice se totiž skládá z oblouku cykloidy a intervalu na ose x . Přes úsek na ose x je však daný křivkový integrál nulový. Získáme takto

$$\begin{aligned} P &= \int_{(C)} x \, dy = - \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a \sin t \, dt = -a^2 \int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t) \, dt = \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Úloha. Pomocí Stokesovy věty určete integrál

$$\int_{(C)} (x + y) \, dx + (2 + x) \, dy + (x + y) \, dz,$$

kde křivka C je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad y = z.$$

Orientace je definována tak, že průmět bodu do roviny xy se pohybuje v kladném smyslu. (Návod: Při výpočtu použijte vztah pro obsah plochy omezené elipsou).

Řešení. Křivka C je elipsa, která je průnikem válcové plochy o rovnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$ s rovinou o rovnici $y = z$. Pro vektorové pole $\vec{F} = (x + y, 2 + x, x + y)$ máme

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y & 2 + x & x + y \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0).$$

Křivku C můžeme chápat jako okraj rovinného elipsoidu M ležícího v rovině dané rovnicí $y = z$. Souhlasné orientace dosáhneme, orientujeme-li plochu konstantním normálovým polem

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}}.$$

Na základě elementární geometrie je možno stanovit, že elipsa má poloosy 1 a $\sqrt{2}$ a tedy obsah příslušného elipsoidu je $\pi\sqrt{2}$. (Nakreslete si průmět do roviny yz !) Bezprostřední

aplikací Stokesovy věty pak máme

$$\begin{aligned} \int_{(C)} (x+y) \, dx + (2+x) \, dy + (x+y) \, dz &= \iint_{(M)} (1, -1, 0) \, d\vec{S} \\ &= \iint_M (1, -1, 0) \cdot \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}} \, dS = \iint_M \frac{1}{\sqrt{2}} \, dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \sqrt{2} = \pi. \end{aligned}$$

Uvedený příklad je typickou situací pro použití Stokesovy věty – rotace integrovaného vektorového pole je konstantní, plocha má konstantní normálové pole (tj. leží v jedné rovině) a má obsah známý z elementární geometrie. V tomto případě je výsledek (v absolutní hodnotě) roven součinu obsahu dané plochy s hodnotou skalárního součinu rotace zadaného pole a pole normálového.

Úloha. Určete $\int_{(C)} \vec{F}$, kde

$$\vec{F} = -y\vec{i} + (x - z^2 \sin y)\vec{j} + (z^3 + 2z \cos y)\vec{k}$$

a křivka C je průnikem dvou kolmých válcových ploch popsáným vztahy $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. (Znázorněte si zadání obrázkem!) Křivka C je orientována tak, že průmět do roviny xy se pohybuje v kladném směru.

Řešení: Křivka C je okrajem plochy M , kterou je možno popsat jako graf funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ definované v kruhu D daného nerovností $x^2 + y^2 \leq 1$. Pro rotaci vektorového pole \vec{F} platí

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x - z^2 \sin y & z^3 + 2z \cos y \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 2\vec{k}.$$

Vnější normála je $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0, 1\right) = \frac{x\vec{i}}{\sqrt{1-x^2}} + \vec{k}$. Standardním použitím Stokesovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \vec{F} &= \iint_{(M)} 2\vec{k} = \iint_D 2\vec{k} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\vec{i} + \vec{k}\right) = \\ &= \iint_D 2 = 2\pi. \end{aligned}$$

Úloha: Určete

$$\int_{(C)} (y^2 + z^2) \, dx + (x^2 + z^2) \, dy + (x^2 + y^2) \, dz,$$

kde C je průnik kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$ a válce o rovnici $x^2 + y^2 = 2ax$, $0 < a < b$, $z \geq 0$. Orientace je dána kladnou orientací průmětu do roviny xy .

Řešení. Křivka C je krajem plochy M , která je průnikem povrchu koule se středem v bodě $(b, 0, 0)$ a poloměrem b s válcem se středem v bodě $(a, 0, 0)$ a poloměrem a . Pro rotaci zadaného vektorového pole máme

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 2(y - z, z - x, x - y).$$

Pomocí Stokesovy věty dostaneme

$$\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = 2 \iint_{(M)} (y - z, z - x, x - y) d\vec{S}.$$

Jelikož plocha M je grafem funkce $g(x, y) = \sqrt{2bx - x^2 - y^2}$, jejímž definičním oborem je kruh $D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 = a^2\}$, je normálové pole indukované kartézskou parametrizací (a přitom souhlasné se zadanou orientací)

$$\vec{n}(x, y, z) = \left(\frac{x - b}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} 2 \iint_{(M)} (y - z, z - x, x - y) d\vec{S} &= \\ &= 2 \iint_D \left(\frac{(y - \sqrt{2bx - x^2 - y^2})(x - b)}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}} + \frac{(\sqrt{2bx - x^2 - y^2} - x)y}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}} + x - y \right) = \\ &= 2b \iint_D \left(1 - \frac{y}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}} \right) = 2b \iint_D 1 = 2b\pi a^2. \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme díky symetrii položili rovnou $\iint_D \frac{y}{\sqrt{2bx - x^2 - y^2}} = 0$.

Úloha. Pro stacionární pole magnetické indukce \vec{B} a hustotu elektrického proudu \vec{i} v dané oblasti platí

$$c^2 \int_{(C)} \vec{B} d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_{(M)} \vec{i} d\vec{S},$$

kde c je rychlost světla (Faradayův zákon). Předpokládá se při tom, že C a M jsou libovolná křivka a plocha v dané oblasti, které splňují předpoklady Stokesovy věty. Odvoďte diferenciální podobu tohoto zákona.

Řešení. Při obvyklých předpokladech na spojitost vektorových polí \vec{B} a \vec{i} v dané otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$ máme podle Stokesovy věty

$$c^2 \int_{(C(\varrho))} \vec{B} d\vec{s} = c^2 \iint_{(S(\varrho))} \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S},$$

pro jakýkoliv kruh $S(\varrho) \subset G$ se středem v pevně zvoleném bodě (x_0, y_0, z_0) a poloměrem $\varrho > 0$ a pro jeho kraj $C(\varrho)$. Jinými slovy

$$\iint_{(S(\varrho))} \left(c^2 \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\vec{i}}{\varepsilon_0} \right) d\vec{S} = 0$$

pro malé každé $\varrho > 0$. Stejnou úvahou jakou jsme použili již výše máme

$$\left(c^2 \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\vec{i}}{\varepsilon_0} \right) \cdot \vec{n} = 0,$$

kde \vec{n} je normálový vektor plochy $S(\varrho)$. Protože \vec{n} i bod (x_0, y_0, z_0) lze volit libovolně máme

$$c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\vec{i}}{\varepsilon_0},$$

což je hledaná diferenciální rovnice ekvivalentní Faradayově zákonu.

Úloha. Necht \vec{F} je vektorové pole třídy C^1 v \mathbb{R}^3 . Ukažte, že $\iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ pro jakoukoliv kulovou plochu S .

Řešení. Rozdělme danou sféru S na „severní“ a „jižní“ polokouli S_1 a S_2 s příslušnými orientacemi pomocí vnější normály. Necht R je rovník orientovaný souhlasně s polosférou S_1 . Podle Stokesovy věty je

$$\iint_{(S_1)} \operatorname{rot} \vec{F} = \int_{(R)} \vec{F} \quad \text{a} \quad \iint_{(S_2)} \operatorname{rot} \vec{F} = - \int_{(R)} \vec{F}.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{F} = \int_{(R)} \vec{F} - \int_{(R)} \vec{F} = 0.$$

Úloha. Necht \vec{F} je vektorové pole spojitě diferencovatelné v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Pomocí integrálních vět (tj. bez přímého výpočtu) ukažte, že

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu je $\iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$, kde $S \subset G$ je libovolná kulová plocha. Z Gaussovy věty plyne

$$\iiint_K \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0,$$

pro každou kouli K v oblasti G . To implikuje, že $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ v G .

1. Ukažte, že tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hranicí každého tělesa splňující předpoklady Gaussovy věty je roven trojnásobku objemu tohoto tělesa.
2. Nechť P je těleso vyhovující předpokladům Gaussovy věty, které je středově souměrná vzhledem k počátku. Ukažte, že pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ má nulový tok přes hranici ∂P .

Pomocí Gaussovy věty vypočítejte následující integrály:

3. $\iint_{(M)} x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k} d\vec{S}$, kde M je povrch krychle $\langle 0, a \rangle^3$, orientovaný vnějším normálovým polem;
4. $\iint_{(M)} x \vec{i} + 2y \vec{j} + (3z - x^2) \vec{k} d\vec{S}$, kde M je povrch elipsoidu se středem v počátku, osami x, y, z a poloosami a, b, c . Orientace je dána vnějším normálovým polem;
5. $\iint_{(M)} xz dy dz + xy dz dx + yz dx dy$, kde M je povrch jehlanu omezeného rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$. Orientace je dána vnějším normálovým polem;
6. $\iint_{(M)} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, kde M je povrch koule o poloměru a a středem v počátku orientovaná vnějším normálovým polem;
7. $\iint_{(M)} (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$,
kde $M = \{(x, y, z) \mid |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$. Orientace je dána vnějším normálovým polem. (Návod: integrál je roven trojnásobku objemu M . Pro výpočet objemu užíjte nové souřadnice $u = x - y + z, v = x + y - z$ a $w = -x + y + z$.)
8. Nechť plocha omezující těleso A má ve sférických souřadnicích typu (8.15) rovnici $\varrho = f(\varphi, \vartheta)$, $(\varphi, \vartheta) \in D$. Ukažte, že $\text{objem}(A) = \frac{1}{3} \iint_D f^3 \cos \vartheta$.
9. Na základě předchozí úlohy stanovte objem tělesa, jehož hranice má ve sférických souřadnicích vyjádření $\varrho = a \cos \vartheta$.
10. Nechť f a g jsou funkce třídy C^2 na základním tělese $P \subset \mathbb{R}^3$, jehož hranice je plocha orientovaná vnější normálou \vec{n} . Označme

$$\frac{df}{d\vec{n}} = (\vec{n} \cdot \text{grad } f) \vec{n}$$

projekci vektoru gradientu do normálového směru v bodech hranice. Ukažte pomocí Gaussovy věty aplikované na $\vec{F} = \text{grad } f$, že platí tzv. Greenovy formule

$$\text{a) } \iint_{(\partial P)} \frac{df}{d\vec{n}} = \iiint_P \Delta f.$$

$$\text{b) } \iint_{(\partial P)} f \frac{dg}{d\vec{n}} = \iiint_P f \Delta g + \iint_G \text{grad } f \cdot \text{grad } g.$$

11. Necht u je funkce třídy C^2 v \mathbb{R}^3 , pro kterou platí $\Delta u = 0$. Ukažte, že $\iint_{(S)} \frac{du}{d\vec{n}} = 0$ pro každou uzavřenou plochu S s jednotkovým normálovým polem \vec{n} , která splňuje předpoklady Gaussovy věty. Je nějaký fyzikální význam tohoto faktu?
12. Kapalina proudí v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Její rychlostní vektorové pole \vec{V} nemá zřídla ani nory. Necht $\rho(x, y, z, t)$ je hustota kapaliny v bodě (x, y, z) a čase t . Odvoďte rovnici proudění $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$. (Návod: Změna hmotnosti v daném objemu se rovná hmotnosti kapaliny proteklé hranicí, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_M \rho = - \iint_{(\partial M)} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}.$$

13. Nalezněte tok vektorového pole $\vec{F} = \sum_{i=1}^k \operatorname{grad} \left(\frac{-q_i}{4\pi r_i} \right)$, kde r_i je funkce udávající vzdálenost bodu od zřídla (x_i, y_i, z_i) , přes uzavřenou plochu orientovanou vnějším normálovým polem, která obsahuje všechny body (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, n$, ve své vnitřní oblasti.
14. Ukažte, že $\int_{(C)} (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy = 0$, jeli $C \subset \mathbb{R}^2$ libovolná jednoduchá uzavřená křivka středově souměrná podle počátku.
15. Dokažte, že $\int_{(\partial D)} (2xy - y) dx + x^2 dy = \operatorname{obsah}(D)$, kde D je základní oblast v \mathbb{R}^2 , jejíž hranice je orientovaná uzavřená jednoduchá křivka.

Pomocí Greenovy věty vypočítejte následující křivkové integrály

16. $\int_{(C)} y^2 dx + x dy$, kde (C) je kladně orientovaná hranice čtverce $\langle -1, 1 \rangle^2$;
17. $\int_{(C)} (3x^2 \cos y - y^3) dx + (x^3 - 3x^2 \sin y) dy$, kde (C) je jednotková kružnice se středem v počátku a kladnou orientací;
18. $\int_{(C)} x e^{-y^2} dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy$, kde (C) je kladně orientovaný obvod čtverce $\langle -a, a \rangle^2$;
19. $\int_{(C)} (x + y) dx - (x - y) dy$, kde (C) je kladně orientovaná elipsa s poloosami a, b a středem v počátku;
20. $\int_{(C)} (e^x \sin y - 16y) dx + (e^x \cos y - 16) dy$, kde C je polokružnice daná podmínkami $x^2 + y^2 = ax$, $y \geq 0$, s počátečním bodem $(a, 0)$ a koncovým bodem $(0, 0)$. Návod: Doplňte polokružnici úsečkou na uzavřenou křivku.

V následujících úlohách nalezněte obsah oblasti omezené zadanou křivkou

21. elipsou s poloosami a, b ;
22. $x = t \ln t$, $y = t - t^2$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$;
23. smyčkou Descarteova listu o rovnici $x^3 + y^3 = 3axy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > 0$; (Návod: Descarteův list je možno parametrizovat funkcemi $x = \varrho \cos^{2/3} \varphi$, $y = \varrho \sin^{2/3} \varphi$.)

24. křivkou o rovnici $y^2 = x^2 - x^4$.
25. Pomocí Stokesovy věty odvoďte, že $\int_{(C)} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = 0$ pro každou uzavřenou křivku C , která je krajem orientované plochy v \mathbb{R}^3 .

V následujících úlohách spočítejte uvedené integrály s použitím Stokesovy věty.

26. $\int_{(C)} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz$, kde C je řez povrchu krychle $J = \langle 0, a \rangle^3$ rovinou $x + y + z = 3\frac{a}{2}$. Orientace je určena pořadím bodů $(\frac{a}{2}, 0, a)$, $(a, 0, \frac{a}{2})$, $(a, \frac{a}{2}, 0)$;
27. $\int_{(C)} (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz$, kde C je elipsa s parametrickým vyjádřením $\varphi(t) = a(\sin^2 t, 2 \sin t \cos t, \cos^2 t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Orientace je indukována uvedenou parametrizací.
28. $\int_{(C)} y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + x^2 \vec{k} \, d\vec{s}$, kde (C) je obvod trojúhelníka s vrcholy $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$. Orientace je určena uvedeným pořadím vrcholů;
29. $\int_{(C)} y^2 z^2 \, dx + x^2 z^2 \, dy + x^2 y^2 \, dz$, kde C je uzavřená křivka s parametrizací $\varphi(t) = (a \cos t, a \cos 2t, a \cos 3t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Orientace je dána zadanou parametrizací.
30. $\int_{(C)} x^2 y^3 \, dx + \, dy + \, dz$, kde $C = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$. Orientace je kladná.

V následujících úlohách vypočítejte $\iint_{(M)} \text{rot } \vec{F}$, kde

31. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Normálové pole určující orientaci má přitom nezápornou z -tovou složku;
32. $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \vec{i} + xy \vec{j} + xz \vec{k}$ a $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Normálové pole určující orientaci má přitom nezápornou z -tovou složku;
33. $\vec{F}(x, y, z) = xz \vec{i} - y \vec{j} + x^2 \vec{k}$ a M je tvořena třemi stěnami čtyřstěnu ohraničeného rovinou s rovnicí $3x + y + 3z = 6$ a souřadnicovými rovinami. Plocha přitom neobsahuje stěnu v rovině xy a je orientována vnitřní normálou.
34. Odhadněte absolutní hodnotu integrálu $\int_{(C)} (x^2 + 2xyz) \vec{i} + z^3 x \vec{j} + (y^2 - z^2) \vec{k}$, kde C je kružnice daná podmínkami $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \varepsilon^2$, $x + y + 2z = 4$ a ε je malé?
35. Necht orientovaná křivka (C) a orientovaná plocha (M) splňují předpoklady Stokesovy věty. Ukažte, že $\int_{(C)} f \, \text{grad } g = \iint_{(M)} (\text{grad } f \times \text{grad } g)$, kde f, g jsou spojitě diferencovatelné funkce.

Výsledky

3. $3a^4$; 4. $8\pi abc$; 5. $1/8$; 6. $12\pi \frac{a^5}{5}$; 7. 1; 9. $\frac{\pi^2 a^3}{4}$; 13. $\sum_{i=1}^n q_i$; 16. 4; 17. $\frac{3}{2}\pi$; 18. 0; 19. $-2\pi ab$; 20. $2\pi a^2$; 21. πab ; 22. $1/36$; 23. $\frac{3}{2}a^2$; 24. $4/3$; 26. $\frac{-9a^3}{2}$; 27. 0; 28. $-a^3$; 29. 0; 30. $-\frac{\pi r^6}{8}$; 31. $-\pi$; 32. 0; 33. 0; 34. $\frac{\pi \varepsilon^2}{\sqrt{6}}$.

Kapitola 12

Potenciál vektorového pole

1 Definice a výpočet

Důležitým typem vektorového pole je pole \vec{F} , pro které existuje spojitě diferencovatelná funkce f tak, že \vec{F} je pole gradientů funkce f , tedy $\vec{F} = \text{grad } f$. Funkce f má v mnoha ohledech vlastnosti „primitivní funkce“ k poli \vec{F} a reprezentuje tak jeho „neurčitý integrál“. Z geometrického pohledu je pole \vec{F} indukováno vektory největších spádů funkce f a má tak směr kolmý na konstantní hladiny funkce. Neméně důležitý je i fyzikální aspekt. Vektorové pole \vec{F} totiž reprezentuje silové pole, jehož siločáry tj. křivky, jejichž tečna souhlasí v každém bodě s tečným polem \vec{F} , mají směr kolmý na konstantní hladiny funkce f . Tyto hladiny můžeme chápat jako hladiny stejné energie a f jako potenciál vektorového pole \vec{F} . Z matematického i fyzikálního hlediska je proto užitečné rozhodnout, zda dané vektorové pole je gradientem jisté funkce a nalézt pak i metodu jeho výpočtu. Při zkoumání těchto otázek se ukáže, že úzce souvisejí s křivkovým integrálem a jeho nezávislosti na zvolené křivce.

Definice 12.1. *Nechť \vec{F} je vektorové pole definované v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže existuje funkce f spojitě diferencovatelná v G tak, že*

$$\vec{F} = \text{grad } f,$$

*na G , pak se funkce f nazývá **potenciálem pole \vec{F}** a vektorové pole \vec{F} se nazývá **potenciální**.*

Příklad 12.2. Nechť

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-\kappa}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z); \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Pole \vec{F} reprezentuje gravitační pole bodu o jednotkové hmotnosti umístěného v počátku. Funkce

$$f(x, y, z) = \kappa \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

je potenciálem vektorového pole \vec{F} v oblasti $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Platnost tohoto tvrzení ověříme jednoduchým výpočtem gradientu f a srovnáním s \vec{F} .

V předchozím příkladě bylo \vec{F} tzv. centrální vektorové pole (je násobkem polohového vektoru a velikost závisí pouze na vzdálenosti od počátku). V následujícím tvrzení dokážeme, že takováto vektorová pole jsou vždy potenciální.

Tvrzení 12.3. *Nechť $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Centrální vektorové pole v \mathbb{R}^n*

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|) \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

má potenciál

$$f(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

kde G je primitivní funkce k funkci $x\varphi(x)$ na intervalu $(0, \infty)$.

Důkaz. Tvrzení je možno ověřit přímým výpočtem. Je-li $G'(x) = x\varphi(x)$, pak podle věty o derivaci složené funkce máme pro každé $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = G'(\|\mathbf{x}\|) \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{x}\| \varphi(\|\mathbf{x}\|) \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} = \varphi(\|\mathbf{x}\|) x_i.$$

Tedy $\text{grad } f = \varphi(\|\mathbf{x}\|) \mathbf{x} = \vec{F}(\mathbf{x})$. Tím je důkaz ukončen. \square

Vrátíme se nyní k Příkladu 12.2. Z pohledu Tvrzení 12.3, je \vec{F} centrální silové pole s funkcí $\varphi(x) = \frac{-\kappa}{x^3}$. Tedy $G(x) = \int \frac{-\kappa}{x^2} dx = \kappa \frac{1}{x} + c$. V důsledku toho

$$f(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{\kappa}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Z teorie funkcí jedné proměnné víme, že rozdíl dvou primitivních funkcí k jedné a téže funkci je konstantní na každém intervalu. Analogické tvrzení platí i pro potenciál.

Tvrzení 12.4. *Nechť \vec{F} je spojitě vektorové pole v otevřené a souvislé $G \subset \mathbb{R}^n$. Nechť f a g jsou potenciály pole \vec{F} . Pak rozdíl $f - g$ je konstantní funkce na G .*

Důkaz. Nechť $h = f - g$. Pro funkci h platí, že $\text{grad } h = \text{grad } f - \text{grad } g = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$ na G . Podle [1, Kapitola 4] je pak h konstantní funkce. Tím je důkaz ukončen. \square

Tvrzení 12.4 říká, že potenciál pole \vec{F} je jednoznačně určen předepsáním hodnoty v jednom zvoleném bodě.

Z fyzikální interpretace potenciálu víme, že práce, kterou vykonáme pohybem v potenciálním poli je rovna rozdílu potenciálů v počátečním a koncovém bodě pohybu. Uvážíme-li, že práce je matematicky vyjádřena křivkovým integrálem, jsme vedeni k těsné souvislosti mezi potenciálem a křivkovým integrálem, který je pro teorii potenciálu zásadní.

Věta 12.5. *Nechť \vec{F} je spojitě vektorové pole definované v otevřené a souvislé $G \subset \mathbb{R}^n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní*

- (i) \vec{F} je potenciální,

- (ii) Necht (C_1) , (C_2) jsou orientované křivky ležící v G se stejným počátečním a koncovým bodem. Pak

$$\int_{(C_1)} \vec{F} = \int_{(C_2)} \vec{F}.$$

(Slovy: Křivkový integrál nezávisí na cestě.)

- (iii) Pro každou uzavřenou jednoduchou orientovanou křivku (C) ležící v G platí

$$\int_{(C)} \vec{F} = 0.$$

Navíc, je-li f potenciál pole \vec{F} , pak

$$(12.1) \quad f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \int_{(C)} \vec{F},$$

kde C je libovolná křivka ležící v G s počátečním bodem $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ a koncovým bodem $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. (i) \implies (ii): K tomu abychom dokázali, že integrál z potenciálního pole nezávisí na cestě, postačí dokázat rovnost (12.1). Zvolme tedy křivku C ležící v G s počátečním bodem \mathbf{u} a koncovým bodem \mathbf{v} . Necht $\varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, je parametrizace této křivky. Užitím rovnosti $\vec{F} = \text{grad } f$ máme

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \vec{F} &= \int_a^b \text{grad } f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) \varphi'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t)) \varphi'_2(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(t)) \varphi'_n(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\varphi(t))) \, dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

(ii) \implies (iii): Každou uzavřenou jednoduchou křivku $C \subset G$ můžeme volbou dvou bodů P a Q rozdělit na dvě křivky C_1 a C_2 mající počáteční bod P a koncový bod Q , (viz obr. 12.1(a)). Podle (ii) je $\int_{(C_1)} \vec{F} = \int_{(C_2)} \vec{F}$. Při volbě orientací naznačené na obrázku je přitom

$$\int_{(C)} \vec{F} = \int_{(C_1)} \vec{F} - \int_{(C_2)} \vec{F} = 0.$$

Nejtěžší (a nejzajímavější) částí tvrzení je implikace (iii) \implies (i): Zvolme pevný bod $\mathbf{x}_0 \in G$. Ze souvislosti existuje pro každý jiný bod $\mathbf{x} \in G \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ lomená čára $L_{\mathbf{x}}$ ležící v G s počátečním bodem \mathbf{x}_0 a koncovým bodem \mathbf{x} . Definujme funkci

$$(12.2) \quad f(\mathbf{x}) = \int_{(L_{\mathbf{x}})} \vec{F}.$$

Než s touto funkcí začneme pracovat, musíme ověřit, že je definována korektně. Ve vzorci (12.2) je totiž jistá libovůle. Do bodu \mathbf{x} se totiž můžeme dostat mnoha lomenými čarami $L_{\mathbf{x}}$. Integrály podél různých lomených čar mohou vycházet jinak a není jasné, kterou z možných hodnot prohlásit za hodnotu $f(\mathbf{x})$. Naštěstí tato nepříjemná komplikace odpadá, neboť integrály podél všech lomených čar $L_{\mathbf{x}}$ vycházejí stejně: Mějme dvě takové lomené čáry spojující \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Označíme je $L_{\mathbf{x}_0}$ a $\tilde{L}_{\mathbf{x}}$. Jejich sjednocení $L_{\mathbf{x}_0} \cup (-\tilde{L}_{\mathbf{x}})$ je uzavřená křivka. (U $\tilde{L}_{\mathbf{x}}$ jsme napsali znaménko $-$, abychom zdůraznili, že se po $\tilde{L}_{\mathbf{x}}$ vracíme proti její orientaci.) Podle (iii) je

$$\int_{L_{\mathbf{x}_0} \cup (-\tilde{L}_{\mathbf{x}})} \vec{F} \, ds = 0.$$

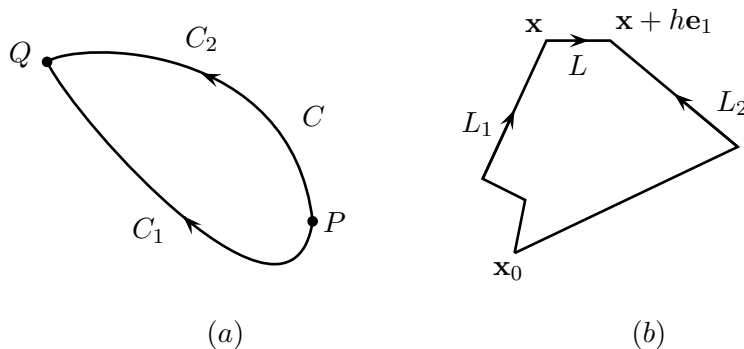
Zároveň

$$\int_{L_{\mathbf{x}_0} \cup (-\tilde{L}_{\mathbf{x}})} \vec{F} \, ds = \int_{L_{\mathbf{x}_0}} \vec{F} + \int_{-\tilde{L}_{\mathbf{x}}} \vec{F} = \int_{L_{\mathbf{x}_0}} \vec{F} - \int_{\tilde{L}_{\mathbf{x}}} \vec{F}.$$

Odtud plyne, že

$$\int_{L_{\mathbf{x}_0}} \vec{F} = \int_{\tilde{L}_{\mathbf{x}}} \vec{F}.$$

Ukážeme, že takto definovaná funkce f je potenciál vektorového pole \vec{F} . Za tímto účelem vypočteme parciální derivace funkce f .



Obr. 12.1.

Nechť $\mathbf{x} \in G \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ je libovolný. Zvolíme-li $h > 0$ dostatečně malé, bude i bod $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1 \in G$ a můžeme je spojit úsečkou L ležící v G ($\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$). Jsou-li $L_1 = L_{\mathbf{x}}$, $L_2 = L_{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_1}$ disjunktní lomené čáry ležící v G a vycházející z bodu \mathbf{x}_0 , pak podle definice f máme

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}) = \int_{(L_2)} \vec{F} - \int_{(L_1)} \vec{F}.$$

Doplňme křivky L_1 a L_2 úsečkou L na uzavřenou jednoduchou křivku (obr. 12.1 (b)). Podle (iii) je integrál přes tuto křivku nulový a tak máme

$$\int_{(L_2)} \vec{F} - \int_{(L)} \vec{F} - \int_{(L_1)} \vec{F} = 0.$$

Odtud

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}) = \int_{(L)} \vec{F}.$$

Pomocí parametrizace $\varphi(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_1$, $t \in \langle 0, h \rangle$, úsečky L získáváme z předchozího vztahu

$$(12.3) \quad f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}) = \int_0^h \vec{F}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \, dt = \int_0^h F_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) \, dt.$$

Vzhledem ke spojitosti funkce F_1 existuje pro každé $\varepsilon > 0$ tak malé $\delta > 0$, že pro $0 < t < \delta$ je

$$|F_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - F_1(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Odtud máme i následující odhad. Je-li $0 < h < \delta$, tak s pomocí (12.3) můžeme psát

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{h} - F_1(\mathbf{x}) \right| &= \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h F_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) \, dt - F_1(\mathbf{x}) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_0^h (F_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - F_1(\mathbf{x})) \, dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h |F_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1) - F_1(\mathbf{x})| \, dt < \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon \, dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím jsme ovšem podle definice limity ukázali, že

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{h} = F_1(\mathbf{x}).$$

Pro limitu zleva (tj. $h < 0$) postupujeme úplně stejně, dostaneme nakonec

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}).$$

Protože nebylo vůbec důležité, že jsme použili posun ve směru \mathbf{e}_1 , dostaneme zcela stejně $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$. Závěrem tedy máme, že

$$\text{grad } f = \vec{F}.$$

Důkaz je tímto ukončen. □

Poznámka 12.6. (i) Použijeme-li značení důkazu Věty 12.5, pak funkce $f(\mathbf{x}) = \int_{(L_{\mathbf{x}})} \vec{F}$ je jediný možný kandidát na potenciál vektorového pole \vec{F} , jehož hodnota v referenčním bodě \mathbf{x}_0 je nulová. Jestliže tato funkce f není potenciálem, nemůže být pole \vec{F} potenciální.

(ii) Pro označení vektorových polí splňujících podmínku (ii) Věty 12.5 se ve fyzice často používá termín *konzervativní vektorové pole*. Pole, které není konzervativní se pak nazývá *disipativní*. Ukážeme v dalším, že pokud uvažujeme dané vektorové pole v otevřené jednoduše souvislé množině, pak konzervativní je synonymem slova potenciální.

Příklad 12.7. Určete práci A , která se vykoná v gravitačním poli daném jednotkovým hmotným bodem umístěným v počátku při pohybu od bodu $(1, 2, 3)$ do bodu $(7, 3, 8)$.

Hledaná práce A je dána křivkovým integrálem $A = \int_{(C)} \vec{F}$ kde

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-\kappa}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z); \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

a C je libovolná křivka vycházející z bodu $(1, 2, 3)$ a končící v bodě $(7, 3, 8)$. V Příkladu 12.1 jsme zjistili, že \vec{F} je potenciální pole v oblasti $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ s potenciálem

$$f(x, y, z) = \frac{\kappa}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Práce je tak rovna

$$A = \int_{(C)} \vec{F} = \kappa \left(\frac{1}{\|(7, 3, 8)\|} - \frac{1}{\|(1, 2, 3)\|} \right) = \kappa \left(\frac{1}{\sqrt{122}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \right).$$

V závěru této kapitoly se budeme věnovat pohodlnému početnímu kritériu existence potenciálu založeném na testování nevírovosti pole. Připomeňme, že vektorové pole \vec{F} třídy C^1 v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$ je nevírové, jestliže $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ v G . Doplňme nyní tuto definici i o dvojrozměrný případ. Řekneme, že vektorové pole $\vec{F}(x, y)$ je *nevírové* v $G \subset \mathbb{R}^2$, jestliže je třídy C^1 a platí-li

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

v G . Nevírovost pole je vždy nutnou podmínkou existence potenciálu. To nám ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 12.8. *Nechť \vec{F} je vektorové pole třídy C^1 v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Je-li \vec{F} potenciální, pak je nevírové.*

Důkaz. Provedeme důkaz v \mathbb{R}^3 . Nechť $\vec{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ v G . Přímým výpočtem rotace $\text{rot } \vec{F}$ obdržíme její nulovost. \square

Příklad 12.9. Rozhodněte, zda pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, zx)$ je potenciální v \mathbb{R}^3 .

Bezprostředním výpočtem dostaneme $\text{rot } \vec{F} = (0, -z, 0)$, což je nenulové vektorové pole v \mathbb{R}^3 . Na základě Tvrzení 12.8 není zadané pole potenciální v \mathbb{R}^3 .

Poznámka 12.10. Nechť

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Výpočtem se můžeme přesvědčit, že pole \vec{F} je nevírové v oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Na druhé straně, je-li (C) kladně orientovaná jednotková kružnice s parametrizací

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

pak

$$\int_{(C)} \vec{F} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Podle bodu (iii) Věty 12.5 tedy \vec{F} není potenciální. Uvedený příklad demonstruje skutečnost, že nevírovost pole \vec{F} ještě neznamená, že pole má potenciál. Podmínka nevírovosti je tedy nutná, nikoliv však postačující pro existenci potenciálu. Použitím integrálních vět však můžeme ukázat, že v důležitých oblastech jsou oba pojmy ekvivalentní.

Věta 12.11. *Nechť \vec{F} je vektorové pole třídy C^1 v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Předpokládejme, že G je jednoho z následujících typů*

- (a) $G \subset \mathbb{R}^2$ a pro každou jednoduchou uzavřenou křivku C ležící v G platí, že její vnitřek je částí množiny G . V tomto případě říkáme, že G je **jednoduše souvislá**. (Typickou představou jednoduše souvislé množiny je „množina bez děr“.)
- (b) $G \subset \mathbb{R}^3$ a ke každé uzavřené křivce $C \subset G$ existuje plocha $M \subset G$, jejíž kraj je křivka C . Takováto oblast se nazývá **plošně jednoduše souvislá**.
- (c) $G \subset \mathbb{R}^3$ a existuje bod $(x_0, y_0, z_0) \in G$ takový, že pro každý jiný bod $(x, y, z) \in G$ je úsečka spojující (x, y, z) a (x_0, y_0, z_0) částí oblasti G . Oblasti tohoto typu budeme nazývat **hvězdicovitě souvislé**. (Bod (x_0, y_0, z_0) je tzv. středem hvězdicovité souvislosti.)

Pak \vec{F} je potenciální v G právě tehdy, když \vec{F} je nevírové vektorové pole.

Důkaz. Vzhledem ke Tvzení 12.8 postačí ukázat pouze implikaci: je-li \vec{F} nevírové pak je potenciální. Předpokládejme tedy, že \vec{F} je nevírové v G .

(a) Nechť G je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Je-li C jednoduchá uzavřená křivka, která je hranicí omezené oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, pak podle Greenovy věty máme

$$\int_{(C)} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = 0.$$

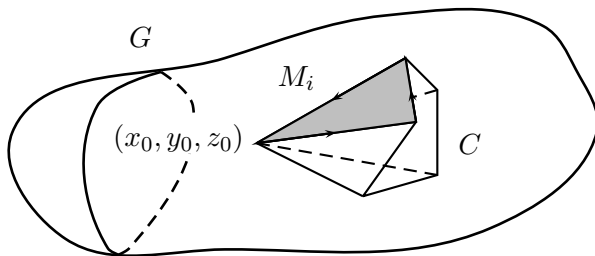
Pole \vec{F} je tedy potenciální podle Věty 12.5 (iii).

(b) Necht G je plošně jednoduše souvislá. Je-li opět $C \subset G$ uzavřená jednoduchá křivka, pak existuje plocha $M \subset G$ s $K(M) = C$ a Stokesova věta zaručí, že

$$\int_{(C)} \vec{F} = \iint_{(M)} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Pole \vec{F} je tedy opět potenciální.

(c) Předpokládejme, že G je hvězdovitě souvislá oblast. Ukážeme, že $\int_{(C)} \vec{F} = 0$, pro jakoukoliv jednoduchou uzavřenou lomenou čáru C ležící v oblasti G . Necht $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je střed hvězdovitě souvislosti.



Obr. 12.2.

Pak C je okrajem plochy M , která je tvořena trojúhelníky M_1, M_2, \dots, M_k , jejichž jeden vrchol je vždy v bodě (x_0, y_0, z_0) a další vrcholy jsou krajními body úseček tvořících lomenou čáru C (viz obr. 12.2.). Z hvězdovitě souvislosti plyne, že $M_i \subset G$ pro $i = 1, \dots, k$. Použijeme-li Stokesovu větu na každou plochu M_i dostaneme

$$\int_{(\partial M_i)} \vec{F} = \iint_{(M_i)} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

pro všechna $i = 1, \dots, k$. Nyní

$$\int_{(C)} \vec{F} = \int_{(\partial M_1)} \vec{F} + \int_{(\partial M_2)} \vec{F} + \dots + \int_{(\partial M_k)} \vec{F} = 0.$$

Protože potenciál je možno zkonstruovat z křivkových integrálů podle lomených čar (viz. důkaz Věty 12.5), implikují předchozí úvahy, že \vec{F} je potenciální vektorové pole. \square

Příklad 12.12. Vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

je potenciální v oblasti $G = \{(x, y) \mid y > 0\}$. Tento fakt je důsledkem skutečnosti, že \vec{F} je nevírové pole a G je jednoduše souvislá oblast. (Srovnej s Poznámkou 12.10.)

2 Cvičení

Úloha. Necht $\vec{F}(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x, y, z)$, kde $(x, y, z) \neq 0$. Určete potenciál pole \vec{F} a pomocí něho vypočtete integrál $\int_{(C)} \vec{F}$, kde (C) je orientovaná křivka neprocházející počátkem s počátečním bodem $(1, 1, 1)$ a koncovým bodem $(2, 2, 2)$.

Řešení. Pole \vec{F} je centrální vektorové pole a jako takové má potenciál

$$f(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

kde G je primitivní funkce k funkci $x \ln x$. Protože

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c,$$

máme pro hledaný potenciál vztah

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Na základě (12.1) vidíme dále, že

$$\int_{(C)} \vec{F} = f(2, 2, 2) - f(1, 1, 1) = 3 \ln 12 - \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{9}{4}.$$

Úloha. Necht

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}} \right)$$

je vektorové pole definované v oblasti $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. Určete potenciál pole \vec{F} .

Řešení. Výpočtem můžeme ověřit, že $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ v G . Vzhledem k tomu, že G není žádnou z oblastí typu (a), (b), (c) z Věty 12.11, nemůže na základě nulovosti říci, že \vec{F} je potenciální. Při zkoumání existence potenciálu tedy musíme vyjít z Poznámky 12.6. Zvolme referenční bod, řekněme bod $(0, 0, 2)$ v oblasti G . Necht $(x, y, z) \in G$ je takový bod, který můžeme s bodem $(0, 0, 2)$ spojit úsečkou ležící v G . Parametrická rovnice takovéto úsečky $L_{(x, y, z)}$ je

$$\varphi(t) = (xt, yt, 2 + (z - 2)t) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Definujme nyní funkci

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{(L_{(x, y, z)})} \vec{F} = \int_0^1 \frac{x^2 t + y^2 t + (2 + (z - 2)t)(z - 2)}{\sqrt{x^2 t^2 + y^2 t^2 + (2 + (z - 2)t)^2 - 1}} \, dt \\ &= \left[\sqrt{x^2 t^2 + y^2 t^2 + (2 + (z - 2)t)^2 - 1} \right]_0^1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že funkce

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} + c$$

je skutečně potenciálem daného vektorového pole \vec{F} v celé oblasti G . Zkouška je v tomto případě součástí řešení a namůžeme ji pominout, protože jsme za $L_{(x,y,z)}$ ve výpočtu brali pouze úsečky. A není ani možné se z bodu $(0, 0, 2)$ dostat do všech ostatních bodů v G tak, aby celá úsečka zůstala v množině G . Jestliže by nám nevyšlo, že $\text{grad } f = \vec{F}$ v jistém bodě z G , pak by to nevyšlo ani pro žádnou jinou funkci f a vektorové pole \vec{F} by potenciální nebylo.

Úloha. Necht

$$\vec{F}(x, y, z) = (4x^3 + 2y^2z + 2xz^2, 4xyz, 2xy^2 + 2x^2z).$$

Stanovte potenciál pole \vec{F} v \mathbb{R}^3 (existuje-li).

Řešení. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$. Podle Věty 12.11 ((b) i (c)) tak máme zaručenu existenci potenciálu. K jeho výpočtu použijeme vztah (12.1). Referenčním bodem bude počátek a lomená čára $L_{(x,y,z)}$ bude úsečka spojující počátek s bodem (x, y, z) . Její parametrizace je

$$\varphi(t) = (xt, yt, zt) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pro hledaný potenciál $f(x, y, z)$ platí

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{(L_{(x,y,z)})} \vec{F} \\ &= \int_0^1 (4t^3x^3 + 2t^3y^2z + 2t^3xz^2)x + (4t^3xyz)y + (2t^3xy^2 + 2t^3x^2z)z \, dt = \\ &= (4x^4 + 8xy^2z + 4x^2z^2) \int_0^1 t^3 \, dt = x^4 + 2xy^2z + x^2z^2. \end{aligned}$$

Nalezený potenciál vyhovuje podmínce $f(0, 0, 0) = 0$ a ostatní potenciály pole \vec{F} v \mathbb{R}^3 se od něho liší o konstantní funkci.

Úloha. Nalezněte potenciál (existuje-li) vektorového pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} \right)$$

v oblasti \mathbb{R}^3 , pro který platí, že $f(0, 0, 0) = 0$.

Řešení: Postup výpočtu bude stejný jako v předchozím příkladu. Rovnost $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ nám opět říká, potenciál existuje. K jeho výpočtu zvolíme křivku $L_{(x,y,z)}$, jejíž počáteční

bod je počátek, koncový bod (x, y, z) , a která se skládá ze tří úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Nechť L_1 je první úsečka daná parametrizací $\varphi_1(t) = (t, 0, 0)$ $t \in \langle 0, x \rangle$, druhá, L_2 , má parametrizaci $\varphi_2(t) = (x, t, 0)$, $t \in \langle 0, y \rangle$ a třetí L_3 je dána parametrizací $\varphi_3(t) = (x, y, t)$, $t \in \langle 0, z \rangle$. Snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{(L_{(x,y,z)})} \vec{F} &= \int_{(L_1)} \vec{F} + \int_{(L_2)} \vec{F} + \int_{(L_3)} \vec{F} \\ &= \int_{(L_3)} \vec{F} = \int_0^z \frac{xy}{1+t^2x^2y^2} dt = [\operatorname{arctg}(txy)]_0^z = \operatorname{arctg} xyz. \end{aligned}$$

Hledaným potenciálem je tedy funkce

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xyz).$$

1. Nechť $\vec{F} = -k^2(x, y, z)$, $k > 0$. (\vec{F} je silové pole síly pružnosti.) Ukažte, že \vec{F} je potenciální v \mathbb{R}^3 a nalezněte jeho potenciál. Vypočítejte pak práci při pohybu s počátečním bodem $(0, 0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1, 1)$.

2. Stanovte potenciál vektorového pole

$$\vec{F} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$$

pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Určete potenciály následujících vektorových polí v uvedených oblastech (existují-li).

3. $\vec{F} = (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$ v \mathbb{R}^3 ;
4. $\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$ v \mathbb{R}^3 ;
5. $\vec{F} = (25x^4y - 3y^2)\vec{i} + (5x^5 - 6xy - 5)\vec{j}$ v \mathbb{R}^2 ;
6. $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $G = \{(x, y) \mid y > 0\}$;
7. $\vec{F} = (3x^2y^2z^3 + z + 1, 2x^3yz^3 + 6yz + 2, 3x^3y^2z^2 + x + 3y^2 - 1)$ v \mathbb{R}^3 ;
8. $\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$ v \mathbb{R}^3 ;

9. Stanovte parametr c tak, aby vektorové pole $\vec{F} = (z, y^2 + cz, cx + y)$ bylo potenciální v \mathbb{R}^3 .

10. Necht f je spojitě diferencovatelná funkce na \mathbb{R} . Nalezněte potenciál vektorového pole $\vec{F} = f(xyz)(yz, xz, xy)$ v \mathbb{R}^3 .
11. Ukažte, že lineární kombinace potenciálních polí je opět potenciální pole. Určete potenciál gravitačního pole tvořeného n hmotnými body jednotkové hmotnosti umístěnými v bodech (i, i, i) , $i = 1, 2, \dots, n$.
12. Zjistěte zda je integrál $\int_{(C)} \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \right) dx - \frac{1}{x+z} dy + \frac{y}{(x+z)^2} dz$ nezávislý na cestě v oblasti $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x+z \leq 0\}$. Stanovte pak tento integrál pro křivku $C \subset G$ s počátečním bodem $(1, 1, 0)$ a koncovým bodem $(x, y, z) \in G$.
13. Necht $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je pevně zvolený bod. Zjistěte, zda je integrál $\int_{(C)} (\vec{r} - (x_0, y_0, z_0))$, kde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, nezávislý na cestě.
14. Dokažte, že množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu při přechodu od stavu s objemem V_1 a tlakem p_1 do stavu s objemem V_2 a tlakem p_2 nezávisí pouze na těchto parametrech. (Návod: Použijte Mayerův vztah (7.9)).
15. Určete práci, která se vykoná v poli $\vec{F} = \frac{2}{\sqrt{y+z}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{j} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{k}$ při pohybu po křivce ležící v ležici v definičním oboru pole \vec{F} s počátečním bodem $(1, 1, 3)$ a koncovým bodem $(2, 4, 5)$.
16. Kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ je nabitá nábojem o konstantní plošné hustotě ρ . Stanovte práci, která bude vykonána v příslušném elektrostatickém poli při pohybu od bodu (x_1, y_1, z_1) do bodu (x_2, y_2, z_2) a) uvnitř b) vně dané koule. (Návod: Využijte potenciálu jednoduché vrstvy odvozeném v Kapitole 9, (9.9).)
17. Nalezněte funkci $f(x, y, z)$, jejíž diferenciál je zobrazení

$$df(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) = (3x^2y^2 - 2z^4)h_1 + 2x^3yh_2 - 8xz^3h_3.$$

18. Je dána diferenciální rovnice $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$, kde p a q jsou spojitě diferencovatelné funkce v jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Ukažte, že vektorové pole $\vec{F} = (p(x, y), q(x, y))$ je potenciální právě tehdy, když $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ v G . Ukažte dále, že je-li f potenciál pole \vec{F} , pak každá diferencovatelná funkce $y(x)$, pro kterou je $f(x, y(x))$ konstantní funkce, je řešením výše uvedené diferenciální rovnice.

Využijte předchozí úlohy k řešení následujících Cauchyových úloh:

19. $2xy^2 + 3x^2 + 2x^2yy' = 0$, $y(1) = 1$;
20. $e^x \sin y + e^x \cos y \cdot y' = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Výsledky.

(Potenciály jsou uváděny bez aditivní konstanty.) 1. $-\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, $A = \frac{3k^2}{2}$; 2. $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 3. $-xy^2 - x^2z + y^2z$; 4. $xyz(x + y + z)$; 5. $5x^5y - 3xy^2 - 5y$; 6. $-\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; 7. $x^3y^2z^3 + xz + 3y^2z + x + 2y - z$; 8. $y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z$; 9. $c = 1$; 10. $F(xyz)$, kde F je primitivní funkce f ; 11. $\kappa \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(x-i)^2 + (y-i)^2 + (z-i)^2}}$; 12. Je nezávislý, $x^3 - \frac{y}{x+z}$; 13. Je nezávislý; 14. Obecně je $c_p \neq c_V$; 15. $\frac{1}{3}$; 16.a) 0, b) $4\pi\kappa \frac{r^2\rho}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right)$; 17. $x^3y^2 - 2xz^4$; 18. Podmínka $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ plyne z Věty 12.11(a). Druhá část plyne derivováním rovnice $f(x, y(x)) = c$. 19. $y^2 = \frac{2}{x^2} - x$; 20. $y = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-x} \right)$.

Literatura

- [1] J. Hamhalter, J. Tišer *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta FEL ČVUT
- [2] J. Malý, J. Lukeš *Míra a integrál*, skripta MFF UK