Cvičení 4 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Nejprve si připomeňme dva základní součty/rozvoje, které bychom měli bezpečně znát a ovládat, a to:*

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \textit{pro } |z|<1 \tag{GEOM}$$

a

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \textit{pro každé } z\in\mathbb{C}. \tag{EXP}$$

(a) *Nejprve řadu upravíme, abychom mohli využít známý součet* (EXP). *Jest*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^{n+2}}(z+6)^{4n+3}=\frac{-(z+6)^3}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}(z+6)^{4n}=\frac{-(z+6)^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!}.$$

S využitím (EXP) *jest*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!}=e^{\frac{-(z+6)^4}{2}} \quad \textit{pro každé } z\in\mathbb{C}.$$

A tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^{n+2}}(z+6)^{4n+3}=\frac{-(z+6)^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!}=\frac{-(z+6)^3}{4}e^{\frac{-(z+6)^4}{2}}$$

pro každé $z\in\mathbb{C}$ (poloměr konvergence je tedy $R=\infty$, střed řady je -6).

(b) *Kdyby se v řadě nevyskytoval faktor $2n+2$ ve jmenovateli, byli bychom řadu schopni sečíst pomocí* (GEOM). *Tohoto faktoru ve jmenovateli se tedy zbavíme derivací (vhodně upravené) řady, zderivovanou řadu sečteme a nakonec integrací zjistíme hledaný součet. Jest*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}z^{2n+6}}{2n+2}=z^4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}z^{2n+2}}{2n+2}. \tag{1}$$

Derivací řady člen po člen a za využití (GEOM) *dostaneme*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}z^{2n+2}}{2n+2}\right)'&=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}(2n+2)z^{2n+1}}{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+2}z^{2n+1}=9z\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n}\\&=9z\sum_{n=0}^{\infty}\left(3z^2\right)^n=9z\frac{1}{1-3z^2}=\frac{9z}{1-3z^2}\end{aligned}$$

pro

$$\begin{aligned}|3z^2|&<1\\|z|^2&<\frac{1}{3}\\|z|&<\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Jelikož

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}z^{2n+2}}{2n+2}\right)'=\frac{9z}{1-3z^2},$$

jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}z^{2n+2}}{2n+2}=\int \frac{9z}{1-3z^2}\,\mathrm{d}z=-\frac{9}{6}\int \frac{-6z}{1-3z^2}\,\mathrm{d}z=-\frac{9}{6}\ln(1-3z^2)+C.$$

Konstantu C dopočítáme dosazením středu řadu:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2}\Big|_{z=0} &= -\frac{3}{2}\ln(1-3z^2) + C\Big|_{z=0} \\ 0 &= 0 + C \\ C &= 0.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} = -\frac{3}{2}\ln(1-3z^2). \tag{2}$$

Takže dosazením (2) *do* (1) *dostaneme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+6}}{2n+2} = -\frac{3z^4}{2}\ln(1-3z^2)$$

pro $|z| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ *(poloměr konvergence je* $\frac{\sqrt{3}}{3}$*, střed řady je* 0*).*

(c) *Kdyby se v řadě nevyskytoval faktor* $n+2$ *v čitateli, byli bychom řadu schopni sečíst pomocí* (EXP)*. Tohoto faktoru v čitateli se tedy zbavíme integrací (vhodně upravené) řady, zintegrovanou řadu sečteme a nakonec derivací zjistíme hledaný součet. Jest*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+5}}{n!} = (z-2i)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!}. \tag{3}$$

Integrací řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!}$ *člen po člen dostaneme řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!},$$

kterou sečteme za využití (EXP)*:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!} &= \frac{(z-2i)^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(z-2i)^n}{n!} = \frac{(z-2i)^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z-2i)}{4}\right)^n}{n!} \\ &= \frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}}\end{aligned}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$*. Takže*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!} &= \left(\frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}}\right)' \\ &= \frac{z-2i}{2} e^{\frac{-(z-2i)}{4}} - \frac{1}{4}\frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}} \\ &= \frac{z-2i}{2}\left(1 - \frac{z-2i}{8}\right) e^{\frac{-(z-2i)}{4}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Dosazením (4) *zpět do* (3) *tedy dostaneme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+5}}{n!} = \frac{(z-2i)^5}{2}\left(1 - \frac{z-2i}{8}\right) e^{\frac{-(z-2i)}{4}}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$ *(poloměr konvergence je tedy* $R = \infty$*, střed řady je* $2i$*).*