Domácí cvičení 12

(nevlastní integrál, aplikace určitého integrálu)

12/1) Vypočtěte:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_{-2}^3 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d) } \int_{-2}^3 \frac{1}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x.$$

12/2) Vypočtěte:

$$\text{a) } \int_8^\infty \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_{10}^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d) } \int_7^\infty \frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}\,\mathrm{d}x.$$

12/3) Vypočtěte:

$$\text{a) } \int_{-4}^0 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_0^2 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d) } \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

12/4) Vypočtěte:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{-3} \frac{-3x+5}{(x^2-1)(x-1)}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_1^3 \frac{2x^2+x+5}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_{-3}^{-1} \frac{2x^2+x+5}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{d) } \int_2^\infty \frac{2x^2+x+5}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

12/5) Vypočtěte:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_{\ln 4}^\infty \frac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-4}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-4}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x.$$

12/6) Určete, zda konvergují integrály:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_0^2 \frac{x+5}{4x^2-x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c) } \int_1^\infty \frac{3+\cos x}{\sqrt[3]{x}+5}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{d) } \int_5^\infty \frac{3\,\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

12/7) Najděte primitivní funkci F k funkci f takovou, že a) $F(-1)=0$, b)$F(-1)=2$, je-li

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (-\infty,-1), \\ 1/(x+2), & x \in \langle -1, 3), \\ (\mathrm{e}^{x-3})/5, & x \in \langle 3, \infty). \end{cases}$$

12/8) Zjistěte, v kterých bodech má lokální extrémy funkce $F(x) = \displaystyle\int_1^x \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{d}t.$

12/9) Vypočtěte obsah plochy omezené parabolou $2y = x^2$ a přímkou $2x+2y-3=0$.

12/10) Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ na intervalu $\langle 4, 16\rangle$.

12/11) Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy omezené grafy funkcí $f(x)=4$ a $g(x)=x^2$.

12/12) Vypočtěte obsah rotační plochy vzniklé rotací kolem osy x grafu funkce $f(x)=\cosh x+2$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

– –

Výsledky:

I je opět hledaný integrál. Jako dříve neuvádím úplný popis substituce.

12/1) Všechny integrály jsou nevlastní vlivem funkce.

a) $I = \left[\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_0^1 = \dfrac{3}{2}$ (integrál konverguje),

b) $I = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^5 = 4$ (integrál konverguje),

c) $I = [\ln|x+2|]_{-2}^3 = \left\langle\!\!\left\langle \ln 5 - (-\infty) \right\rangle\!\!\right\rangle = +\infty$ (integrál diverguje k $+\infty$),

d) $I = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x-3)^2}\right]_{-2}^{3} = \left\langle\!\left\langle -\dfrac{1}{2}\left(\infty - \dfrac{1}{25}\right)\right\rangle\!\right\rangle = -\infty$ (integrál diverguje k $-\infty$).

12/ 2) Všechny integrály jsou nevlastní vlivem meze.

a) $I = \left[\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_8^\infty = \left\langle\!\left\langle \infty - 12\right\rangle\!\right\rangle = +\infty$ (integrál diverguje k $+\infty$),

b) $I = \left[2\sqrt{x-1}\right]_{10}^\infty = \left\langle\!\left\langle \infty - 6\right\rangle\!\right\rangle = +\infty$ (integrál dinverguje k $+\infty$),

c) $I = [\ln|x+2|]_{-\infty}^{-3} = \left\langle\!\left\langle 0 - \infty\right\rangle\!\right\rangle = -\infty$ (integrál diverguje k $-\infty$),

d) $I = -2\left[\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\right]_7^\infty = -2\left(0 - \dfrac{1}{2}\right) = 1$ (integrál konverguje).

12/ 3) Všechny integrály jsou nevlastní vlivem funkce.

a) $I = \left\langle\!\left\langle \int_{-4}^{-2} + \int_{-2}^{0}\right\rangle\!\right\rangle = [\ln|x+2|]_{-4}^{-2} + [\ln|x+2|]_{-2}^{0} = \left\langle\!\left\langle(-\infty - \ln 2) + (\ln 2 - (-\infty))\right\rangle\!\right\rangle = \langle\!\langle -\infty + \infty\rangle\!\rangle$ – integrál neexistuje,

b) $I = \left\langle\!\left\langle \int_0^1 + \int_1^2\right\rangle\!\right\rangle = 3\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 + 3\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_1^2 = 3(0-1) + 3(1-0) = 0$ (integrál konverguje),

c) $I = \left\langle\!\left\langle \int_1^2 + \int_2^3\right\rangle\!\right\rangle = 3[\sqrt[3]{(x-2)}\,]_1^2 + 3[\sqrt[3]{(x-2)}\,]_2^3 = 3(0-(-1)) + 3(1-0) = 6$ (integrál konverguje).

d) $I = \left\langle\!\left\langle \int_0^2 + \int_2^3\right\rangle\!\right\rangle = \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]_0^2 + \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]_2^3 = \left(\left(-\infty + \dfrac{1}{8}\right) + \left(-\dfrac{1}{2} - (-\infty)\right)\right) =$
$= \langle\!\langle -\infty + \infty\rangle\!\rangle$ – integrál neexistuje.

12/ 4) Integrály a) a d) jsou nevlastní vlivem meze, integrály b) a c) vlivem funkce.

a) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{-3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1}\right]_{-\infty}^{-3} = \left(2\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - (0-0) =$
$= \dfrac{1}{4} - 2\ln 2$ (integrál konverguje),

b) $I = \displaystyle\int_1^3\left(-\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{x+1} + 2\ln|x-1|\right]_1^3 = \left\langle\!\left\langle\left(\frac{3}{4} + 2\ln 2\right) - \left(\frac{3}{2} + 2(-\infty)\right)\right\rangle\!\right\rangle =$

$= +\infty$ (integrál diverguje k $+\infty$),

c) $I = \displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{x+1} + 2\ln|x-1|\right]_{-3}^{-1} = \left\langle\!\left\langle(-\infty + 2\ln 2) - \left(-\frac{3}{2} + 2\ln 4\right)\right\rangle\!\right\rangle =$

$= -\infty$ (integrál diverguje k $-\infty$),

d) $I = \displaystyle\int_2^\infty\left(-\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{x+1} + 2\ln|x-1|\right]_2^\infty = \left\langle\!\left\langle(0+\infty) - (1+0)\right\rangle\!\right\rangle = +\infty$

(integrál diverguje k $+\infty$).

12/ 5) Integrály a), c) jsou nevlastní vlivem funkce, integrál b) vlivem meze, integrál d) je vlastní, substitucí však dostáváme integrál nevlastní vlivem mezí.

a) $I = \left\langle\!\left\langle t = \cos x\right\rangle\!\right\rangle = -\displaystyle\int_1^0 \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_0^1 = \left\langle\!\left\langle +\infty - 0\right\rangle\!\right\rangle =$

$= +\infty$ (integrál diverguje k $+\infty$),

b) $I = \left\langle\!\left\langle t = \mathrm{e}^x\right\rangle\!\right\rangle = \displaystyle\int_4^\infty \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_4^\infty\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_4^\infty = 0 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3$

(integrál konverguje),

c) $I = \left\langle\!\left\langle t = \mathrm{e}^x\right\rangle\!\right\rangle = \displaystyle\int_2^4 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_2^4\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_2^4 = \left\langle\!\left\langle \ln\frac{1}{3} - (-\infty)\right\rangle\!\right\rangle = +\infty$

(integrál diverguje k $+\infty$),

d) $I = \left\langle\!\left\langle t = \operatorname{tg} x\right\rangle\!\right\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\frac{3}{1+t^2}+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \dfrac{\pi}{2}$ (integrál konverguje)

12/6) Integrály a), b) jsou nevlastní vlivem funkce, integrály c), d) vlivem meze.

a) Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\,\rangle$ je $0 \le \sin x$, tedy $\left|\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sin x}\right| = \dfrac{x^{\frac12}}{x+\sin x} \le \dfrac{x^{\frac12}}{x} = x^{-\frac12}$; integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac12}\,\mathrm{d}x$ konverguje, tedy konverguje i daný integrál.

b) Na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ je $0 < x^2(4-x) \le 4x^2$, tedy $\dfrac{x+5}{4x^2-x^3} = \dfrac{x+5}{x^2(4-x)} \ge \dfrac{x+5}{4x^2} \ge \dfrac{5}{4x^2}$; integrál $\displaystyle\int_0^2 \frac{5}{4x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, tedy k $+\infty$ diverguje i daný integrál.

c) Na intervalu $\langle 1, \infty)$ je $3+\cos x \ge 2$ a $\sqrt[3]{x}+5 \le \sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x} = 6\sqrt[3]{x}$, tedy $\dfrac{3+\cos x}{\sqrt[3]{x}+5} \ge \dfrac{2}{6\sqrt[3]{x}} = \dfrac13\,x^{-\frac13}$; integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac13\,x^{-\frac13}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, tedy k $+\infty$ diverguje i daný integrál.

d) Na intervalu $\langle 5, \infty)$ je $\left|\dfrac{3\,\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x-1}}\right| = \dfrac{3+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x-1}} = \mathrm{e}\,\dfrac{3+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x} \le \mathrm{e}\,\dfrac{4}{\mathrm{e}^x} = (4\,\mathrm{e})\,\mathrm{e}^{-x}$; integrál $\displaystyle\int_5^\infty (4\,\mathrm{e})\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, tedy konverguje i daný integrál.

12/7) V obou případech je nalezená funkce primitivní funkcí k f na celém $\mathbb{R}$. Používáme větu o integrálu jako funkci horní meze (viz Větu 8.8 na stránce P8.5 přednášek).

a) $$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-1}^x \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t = [\ln|t+2|]_{-1}^x = \ln|x+2| - 0 = \ln(x+2), & x \in \langle -1, 3),\\ \int_{-1}^3 \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t + \int_3^x \frac{\mathrm{e}^{t-3}}{5}\,\mathrm{d}t = \ln 5 + \left[\frac{\mathrm{e}^{t-3}}{5}\right]_3^x = \ln 5 + \frac{\mathrm{e}^{x-3}}{5} - \frac15, & x \in \langle 3, \infty),\\ \int_{-1}^x (t+2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_{-1}^x = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac32, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

b) Tentokrát $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t + 2$, tedy podle a): $$F(x) = \begin{cases} \ln(x+2) + 2, & x \in \langle -1, 3),\\ \ln 5 + \frac{\mathrm{e}^{x-3}}{5} + \frac95, & x \in \langle 3, \infty),\\ \frac{x^2}{2} + 2x + \frac72, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

12/8) Máme $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-1}$, tedy stacionární body funkce F jsou ± 1. Dále je $F''(x) = \left(\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-1}\right)' = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. V bodě -1 máme $F''(-1) = 2\,\mathrm{e}^{-1} > 0$, tedy v tomto bodě F nabývá svého lokálního minima. V bodě 1 máme $F''(1) = -2\,\mathrm{e}^{-1} < 0$, tedy v tomto bodě F nabývá svého lokálního maxima. (Použili jsme větu o integrálu jako funkci horní meze.)

12/9) Pro parabolu máme $y = \dfrac{x^2}{2} \overset{\text{ozn.}}{=} f(x)$, pro přímku $y = \dfrac32 - x \overset{\text{ozn.}}{=} g(x)$. Vyřešením rovnice $f(x) = g(x)$ dostaneme, že průsečíky paraboly a přímky mají první souřadnice -3 a 1. Přitom $f \le g$ na $\langle -3, 1\rangle$. Tedy
$$S = \int_{-3}^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^1 \left(\frac32 - x - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}.$$

12/10) $$\ell = \int_4^{16} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_4^{16} \sqrt{1+(\sqrt{x-1})^2}\,\mathrm{d}x = \int_4^{16} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = = \left[\frac23\sqrt{x^3}\right]_4^{16} = \frac{112}{3}.$$

12/11) Vyřešením rovnice $f(x) = g(x)$ tentokrát dostaneme, že první souřadnice průsečíků grafů jsou -2 a 2. Na $\langle -2, 2\rangle$ přitom máme $g \le f$ (nakreslete si obrázek). Označíme-li V_1 resp. V_2 objem tělesa vzniklého rotací části roviny mezi osou x a grafem funkce f resp. grafem funkce g na $\langle -2, 2\rangle$ kolem osy x, bude pro hledaný objem V platit $V = V_1 - V_2$. Tedy $V = \pi\displaystyle\int_{-2}^2 4^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-2}^2 x^4\,\mathrm{d}x = \pi\,(4^2\cdot 4) - \frac{\pi}{5}(32 - (-32)) = \frac{256\pi}{5}.$

12/12) Máme $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \cosh x$. Odtud
$$Q = 2\pi\int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-1}^1 (\cosh^2 x + 2\cosh x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-1}^1 \left(\frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}{4} + 2\cosh x\right)\mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi\int_{-1}^1 \left(\frac12\,(1+\cosh 2x) + 2\cosh x\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac12\,x + \frac14\,\sinh 2x + 2\sinh x\right]_{-1}^1 = \pi(2 + \sinh 2 + 8\sinh 1).$$