## Zkouška z předmětu A7B01LAG

Jméno a příjmení:
Podpis:
dne 01-17-2017, od 14:45 do 15:15, v místnosti Z4:B2-351.

Máte-li nárok na ústní zkoušku a nedostavíte-li se na ni dne 01-17-2017 do 15:00 do místnosti Z4:B2-351, bude Vám zapsána známka podle bodového hodnocení.

K možné ústní zkoušce je nutné se dostavit: dne 01-17-2017, od 14:45 do 15:00, do místnosti Z4:B2-351.

Část A	Část B	Část C	$\Sigma_1$	Bonus	$\Sigma_2$	Ústní	$\Sigma_3$	Hodnocení	Zkoušející

## Před zahájením práce

• Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.

- Poznamenejte si své identifikační číslo (jeho zkrácená verze je v pravém horním rohu) a termín možného náhledu písemky a ústní zkoušky.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon vypněte.

## Požadavky na vypracování

- Pište na nečtverečkované/nelinkované (atd.) jednotlivé listy papíru formátu A4, jinak písemka nebude přijata. Příklady, ve kterých použijete tužku nebo červenou barvu, budou hodnoceny 0 body.
- U každého příkladu můžete mít uveden jen jeden způsob řešení.
- Pokus o podvod (přenos informací mezi studenty nebo z jiného zdroje) během zkoušky je klasifikován známkou F (nedostatečně).
- Na jedné straně papíru můžete mít jen jeden příklad.
- Definice pište českou (slovenskou) oznamovací větou (případně několika větami).
- Odpovědi pište českou (slovenskou) oznamovací větou.
- U každého výpočtu je třeba (drobný) komentář.

## A7B01LAG

Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

**Část A** (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

- 1. Nechť má matice  $\mathbf{A}$  5 řádků a 4 sloupce, defekt  $def(\mathbf{A}) = 2$ . Pak nutně platí:
  - (a) Sloupce matice A tvoří lineárně nezávislý seznam vektorů.
  - (b) Úpravy matice A Gaussovou eliminační metodou mohou defekt zvýšit.
  - (c)  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{A})) \geq 2$ .
  - (d) Každá nehomogenní soustava (pro libovolné  $\mathbf{b}$ )  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má nekonečně mnoho řešení.
- 2. Budiž **B** matice typu  $3 \times 3$ , nechť soustavy  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$  a  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$  mají každá právě jedno řešení (popořadě  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  a  $\mathbf{a}_3$ ). Pak *musí být nutně pravda*:
  - (a) Seznam vektorů  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  je lineárně závislý.
  - (b)  $\det(2 \cdot \mathbf{B}) = 0$ .
  - (c)  $\det(\mathbf{B}^3) > 0$ .
  - (d) K matici B existuje matice inversní.
- 3. Ať **A** je regulární čtvercová matice typu  $m \times m$ , ať **B** je matice s n lineárně nezávislými sloupci typu a m řádky, kde  $m \neq n$ . Vyberte nutně pravdivé tvrzení.
  - (a) Součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  není definován.
  - (b) Součin  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  nemá lineárně nezávislé sloupce.
  - (c)  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ .
  - (d) B je epimorfismus (surjektivní lineární zobrazení).
- 4. Uvažujme lineární prostor  $\mathbb C$  nad tělesem  $\mathbb C$ . Vyberte nepravdivé tvrzení.
  - (a) Seznam vektorů (1,i)z $\mathbb C$  je lineárně nezávislý.
  - (b)  $\dim(\mathbb{C}) < 3$ .
  - (c) V zadaném lineárním prostoru existuje právě jeden nulový vektor.
  - (d) Seznam vektorů (1+i,1-i) z  $\mathbb C$  je lineárně závislý.

**Část B** (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Dokažte, že pokud má reálná matice  $\mathbf{A}$  typu  $2 \times 2$  vlastní vektory  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  příslušné různým nenulovým vlastním číslům  $a_1$  a  $a_2$ , pak je  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  lineárně nezávislý seznam vektorů v  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$ .

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V tomto příkladu pracujeme s lineárním prostorem  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$  se standardním skalárním součinem. Mějme vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$ , které mají vzhledem k uspořádané bázi  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ) souřadnice  $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ) a  $\mathbf{coord}_B(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ). Ať  $\mathbf{A}$  je matice typu  $2 \times 2$  se sloupci  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , kde  $\mathbf{a}_1$  je kolmá projekce vektoru  $\mathbf{v}$  na přímku zadanou rovnicí y = x, a  $\mathbf{a}_2$  je kolmá projekce vektoru  $\mathbf{w}$  na přímku zadanou rovnicí y = x. Jaký je determinant matice  $\mathbf{A}$ ? (Nápověda: nejdříve si nakreslete obrázek situace.)