## MA 7-22

- 1. Vypočtěte vzdálenost hyperboly  $x^2 + 3xy + y^2 = 125$  od počátku (0,0).
- 2. Přepište následující integrál

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{2-x} f \, dy \, dx.$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích v pořadí  $d\rho \, d\varphi$ .

- 3. Jaká je hmotnost válce  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \le r^2, \ 0 \le z \le h\}$ , je-li hustota rovna druhé mocnině vzdálenosti od bodu (r, 0, 0)?
- 4. Určete funkci  $\beta(x)$  tak, aby pole  $\vec{F} = (ye^{xy} + 2xy, xe^{xy} + \beta(x))$  bylo potenciální a příslušný potenciál vypočtěte.
- 5. U mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}x^{n-1}.$$

nalezněte poloměr konvergence a pomocí integrace nebo derivace určete její součet. Jakou hodnotu má řada v bodě x = -3?

## Řešení.

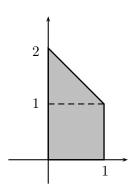
1. Budeme hledat minimum funkce  $f(x,y)=x^2+y^2$  při vazebné podmínce  $x^2+3xy+y^2-125=0$ . Lagrangeova funkce je

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3xy + y^2 - 125).$$

Dostaneme dva stacionární body  $\pm(5,5)$ , a tak vzdálenost hyperboly od počátku je  $5\sqrt{2}$ .

2. Opačné pořadí je  $\int_0^1 \int_0^1 f \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f \, dx dy \text{ a v polárních souřadnicích}$ 

$$\begin{split} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} & f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho\,d\varphi \,+ \\ & + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2/(\sin\varphi+\cos\varphi)} & f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho\,d\varphi. \end{split}$$



3. Hustota je  $f(x,y,z)=(x-r)^2+y^2+z^2$ . V cylindrických souřadnicích je hmotnost např.

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h (\varrho^2 - 2r\varrho\cos\varphi + r^2 + z^2)\varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi = \pi h r (\frac{1}{3}h^2 + \frac{3}{2}r^2).$$

- 4. Pole  $\vec{F}$  je potenciální pro  $\beta(x)=x^2$  a potenciál je  $f=e^{xy}+x^2y+K.$
- 5. Poloměr konvergence je R=2. Integrací dostaneme geometrickou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2-x}.$  Její derivací získáme hledaný součet  $\frac{2}{(2-x)^2}$ . V bodě x=-3 řada nekonverguje.