MA 4-24

1. Určete všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z.$$

   Nalezněte bod, pokud takový existuje, ležící na ose y, ve kterém funkce f nabývá hodnoty menší než -2024.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(1-y)^2}} f \, dx \, dy$$

   nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok pole $\vec{F} = (x^3, z^2 + 2zx, 1 + 3zy^2)$ hranicí tělesa

$$P = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le a + x\big\}.$$

4. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce definované $f(x) = -x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$. Ověřte, že pro $x = \pi/2$ dává Fourierova řada možnost zjistit součet řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

   a hodnotu součtu nalezněte.

5. (a) Definujte pojem norma vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a vysvětlete geometrický význam normy. Jaká je spojitost normy a skalárního součinu. Co je trojúhelníková nerovnost a jak souvisí s trojúhelníkem?

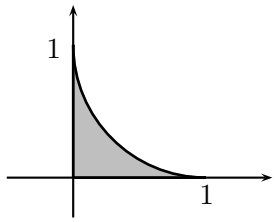
   (b) Dokažte větu, že má-li funkce f v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ diferenciál, je v bodě $\mathbf{x}$ spojitá.

Řešení.

1. Z rovnic $3x^2 + 6y = 0$, $2y + 6x = 0$ a $2z - 4 = 0$ dostaneme stacionární body $(0,0,2)$ a $(6,-18,2)$. První je sedlový bod a druhý je bod lokálního minima. Bod na ose y má obecný tvar $(0,y,0)$, a tak $f(0,y,0) = y^2 \ge 0$. Hledaný bod neexistuje.

2. Opačné pořadí je $\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(1-x)^2}} f\, dy, dx$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}} f\,\varrho\, d\varrho d\varphi.$$



Horní mez u vnitřního integrálu vznikla z rovnice $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, kam dosadíme za x a y z polárních souřadnic. Vznikne tak kvadratická rovnice pro ϱ: $\varrho^2 - 2\varrho(\sin\varphi+\cos\varphi)+1=0$.

3. Protože $\operatorname{div}\vec{F} = 3(x^2+y^2)$, máme při použití cylindrických souřadnic

$$\iiint_P \operatorname{div} F = \int_0^{2\pi}\int_0^a \int_0^{a+\varrho\cos\varphi} 3\varrho^3\, dz\, d\varrho\, d\varphi = \frac{3}{2}\,\pi a^5.$$

4. Funkce f je lichá, proto její Fourierova řada bude obsahovat jen sinové členy.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\, dx = \frac{2(-1)^k}{k}.$$

Fourierova řada má tvar $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k}\sin kx$. V bodě $x=\pi/2$ je $\sin(k\pi/2)=0$ pro sudé k, takže sudé členy řady jsou nulové a řada má tvar

$$2(-1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\cdots) = f(\pi/2) = -\pi/2.$$

Odtud máme, že hledaný součet roven $\pi/4$.

5. (a) Norma vektoru $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. Souvislost normy a skalárního součinu je $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$. Trojúhelníková nerovnost pro normu má tvar

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Udává, že v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ je součet délek dvou stran větší než délka strany třetí.

(b) Máme dokázat, že $\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = 0$. Tento výraz upravíme následovně:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \\
&\quad = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x})[\mathbf{h}]}{\|\mathbf{h}\|}\ \|\mathbf{h}\| + df(\mathbf{x})[\mathbf{h}] \\
&\quad = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x})[\mathbf{h}]}{\|\mathbf{h}\|}\ \|\mathbf{h}\| + \lim_{\mathbf{h}\to 0} df(\mathbf{x})[\mathbf{h}].
\end{aligned}$$

První limita je nulová z definice diferenciálu a druhá proto, že diferenciál je spojité lineární zobrazení v proměnné $\mathbf{h}$.