MA 3-24

1. Mějme v rovině přímku $x - y = 0$ a parabolu $y = (x - \frac{3}{4})^2$. Zjistěte, zda se v nějakém průsečíku přímka a parabola protínají pod pravým úhlem.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Jaká je hmotnost válce s poloměrem podstavy r a výškou h, je-li hustota v bodě (x, y, z) rovna vzdálenosti tohoto bodu od podstavy válce? Pro jakou hodnotu výšky h je hmotnost válce číselně rovna jeho objemu?

4. U mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n \, (x-1)^{n-1}$ nalezněte poloměr konvergence a pomocí integrace nebo derivování určete součet řady. Jaké hodnoty má řada v bodě $x = 0$ a v bodě $x = 1$?

5. (a) Definujte pojem otevřená množina a uzavřená množina. Ukažte příklad množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud existuje, která není ani otevřená ani uzavřená.

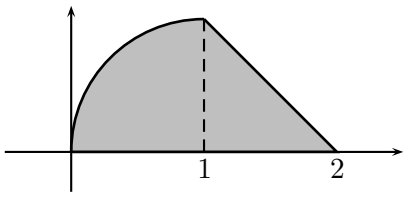
   (b) Dokažte větu, že posloupnost uzavřených intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, které jsou do sebe vnořené, tj. $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$ mají neprázdný průnik: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle \neq \emptyset$.

Řešení.

1. Průsečíky jsou dva $A = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a $B = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$. V průsečíku A se přímka s parabolou protíná v pravém úhlu.

2. Opačné pořadí je $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f \, dy, dx$ v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2/(\sin\varphi+\cos\varphi)} f \, \varrho \, d\varrho d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Hustota $f(x,y,z) = z$. Výpočet provedeme v cylindrických souřadnicích.

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r z\varrho \, d\varrho \, dz \, d\varphi = \frac{\pi}{2} r^2 h^2.$$

Pro určení výšky h řešíme rovnici $\pi r^2 h^2/2 = \pi r^2 h$, tj. $h = 2$. (Řešení $h = 0$ je také matematicky správné, ale fyzikálně nezajímavé.)

4. Poloměr konvergence je $R = \frac{1}{3}$ a střed řady $x_0 = 1$. Řada proto konverguje na intervalu $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Integrací získáme geometrickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-1)^n = \frac{1}{1-3(x-1)} - 1.$$

Derivací dostaneme hledaný součet $\dfrac{3}{(3x-4)^2}$. V bodě $x = 0$ řada diverguje a v bodě $x = 1$ má řada řada součet 3.

5. (a) Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá otevřená, pokud neobsahuje žádný svůj hraniční bod. Ekvivalentně: pokud každý bod $\mathbf{x} \in M$ má okolí U, které je obsažené v M, tj. $U \subset M$. Množina je uzavřená, pokud obsahuje všechny své hraniční body. Množina $A \subset \mathbb{R}$, která není ani otevřená, ani uzavřená je např. $\langle 0, 1)$.

   (b) Položíme $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a \le b_n$ a $a_n \le b$ a navíc $a \le b$. Odtud plyne, že $\langle a, b\rangle \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle$. Proto je průnik neprázdný.