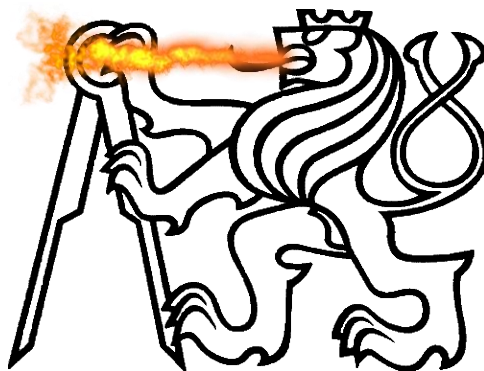


Jak dát LAG alespoň na E aneb lineární algebra typu *easy*



Autor: Matouš Pikous

Aktualizováno: 28. 8. 2020

Obsah

ÚVOD	3
DEFINICE	4
DEFINICE DO PRVNÍHO TESTU	4
DEFINICE OD PRVNÍHO DO DRUHÉHO TESTU.....	7
DEFINICE PO DRUHÉM TESTU	9
PŘÍMÝ DŮKAZ	11
TEORETICKÉ OTÁZKY	13
TEORETICKÉ ODPOVĚDI	19
LINEÁRNÍ TRÍČKY U OTÁZKY C	25
<i>Dodatek: Zobrazení vůči jiné bázi.....</i>	<i>26</i>

Úvod

Motto: „Kdo umí číst, má výhodu.“

Mgr. Jiří Jansa

Tento dokument je věnován studentům FEL ČVUT, kteří by rádi prošli alespoň do druhého ročníku, ale v cestě jim brání lineární algebra. Text vznikl jako snaha o zabítí času na Strahovských kolejích v průběhu sv. Valentýna. Dílo je volně stažitelné a šiřitelné, avšak upozorňuji na to, že lineární algebru jsem měl pouze půl roku. Tudiž ne všechny postupy a výsledky musí být správné. Pokud naleznete nějakou chybu a oznámíte mi ji, možná bude v další aktualizaci opravena. Další valentýn mám v diáři ještě volno. Pro důkladnější pochopení látky a při snaze projít s lepší známkou, než se známkou E vřele doporučuji skripta „Abstraktní a konkrétní lineární algebra“ od doc. RNDr. Jiřího Velebila Ph.D., dostupná z: <http://math.feld.cvut.cz/velebil/akla.html>.

Značení je přebráno právě z těchto skript a z přednášek LAG/LAGA. Definice a důkazy jsou opět (doufám) totožné s těmi, které se můžete dočíst v Akle, nebo dozvědět o přednášce. Text by měl sloužit pouze jako záchranný materiál pro studenty, kteří se potřebují naučit LAG za poslední víkend zkouškového období, popřípadě jsou naprosto ztraceni v definicích a v příkladech. Text by měl zejména „zkuchařkovatět“ matematické postupy lineární algebry a převést komplikované problémy na typ *easy*.

Velká část dokumentu je věnována řešení teoretických příkladů, protože jich je pomálu k dostání oproti příkladům výpočetních. A ještě méně jich je s řešením, ačkoli právě na praktických příkladech se lineárka nejlépe ukazuje. Důležitější než samotné řešení, je však zdůvodnění, proč je toto řešení jediné správné a ostatní NE.

Hodně štěstí!

Definice

Definice jsou ke splnění zkoušky důležitější než schopnost umět počítat matice, nebo hledat determinant. Když se naučíte definice, tak máte ve zkoušce jistých deset bodů v části B + využijete je k důkazům a v části A. Definice píšeme zásadně „CELOU VĚTOU“, porušení a použití matematických symbolů je pak trestáno drastickým snížením bodů a případným neuděláním zkoušky. Hlavní smysl ale je, že když se definice napíše „lidsky“, mnohem lépe se s ní pracuje

Vypsána hesla byla vybrána podle četnosti v proběhlých zkouškách a podle jejich důležitosti v celém předmětu. Jsem si jist, že vynechané definice jste schopni formulovat sami na základě vaší zkušenosti. ☺

Definice do prvního testu

Těleso (Není potřeba umět definici napsat) – Těleso (značíme \mathbb{F}) je množina prvků, která má dvě funkce: „+“ a „. \cdot “,

kde $+$ je $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ a \cdot je $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ a pro kterou platí následujících 9 axiomů.

Axiomy sčítání:

- 1) Pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ platí $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- 2) Pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ platí $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- 3) Pro všechna α existuje právě jedno β tak, že $\alpha + \beta = 0$
- 4) Existuje $0 \in \mathbb{F}$ tak, že pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ platí $\alpha + 0 = \alpha$

Axiomy násobení:

- 5) Pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ platí $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- 6) Pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ platí $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- 7) Existuje $1 \in \mathbb{F}$ tak, že pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ platí $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Axiomy sčítání a násobení:

- 8) Pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ platí $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$

Axiom nuly:

- 9) Pro všechna $\alpha \in \mathbb{F}$ platí $\alpha \neq 0$ IFF (právě tehdy když) existuje α^{-1} (inverze k α , což je takový prvek, že platí $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$). (Neexistuje-li inverze k α , pak nutně platí, že $\alpha = 0$)

(Tělesa jsou např. zbytky po dělení libovolným prvočíslem, reálná čísla, racionální čísla. Tělesem nejsou např. celá čísla, ani čísla přirozená.)

Lineární prostor (Není potřeba umět definici napsat) – Lineární prostor (značíme L) je množina prvků, která má dvě funkce: „+“ a „ \cdot “, kde $+$ je $L \times L \rightarrow L$ a \cdot je $\mathbb{F} \times L \rightarrow L$ a pro kterou platí následujících 8 axiomů.

Axiomy sčítání:

- 1) Pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ platí $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- 2) Pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ platí $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- 3) Pro všechna \mathbf{x} existuje právě jedno \mathbf{y} tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{o}$
- 4) Existuje $\mathbf{o} \in L$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in L$ platí $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$

Axiomy násobení:

- 5) Pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a $\mathbf{x} \in L$ platí $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$
- 6) Pro všechna $\mathbf{x} \in L$ platí $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Axiomy sčítání a násobení:

- 7) Pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a $\mathbf{x} \in L$ platí $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\beta \cdot \mathbf{x})$
- 8) Pro všechna $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ platí $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\alpha \cdot \mathbf{y})$

(Všimněme si, že lineárním prostorem může být cokoliv, co splňuje výše vypsané axiomy. Lineární prostor tedy může být jak prostor orientovaných úseček (takové ty šipky ze SŠ), tak prostor polynomů, funkcí či prostor obsahu penálu volně ležícího v šatní skřínce 56 na FEL ČVUT, když vhodně nadefinujeme operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Nesmíme se tedy divit, že někdy operace mohou být poněkud neintuitivní.)

Vektor – Vektor je libovolný prvek lineárního prostoru

Seznam – Seznam vektorů je uspořádaná množina vektorů, která je buď prázdná, anebo ne.

Lineární kombinace – Lineární kombinace seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ a skalárů

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ je vektor \mathbf{v} , kde $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{x}_i$

Lineární nezávislost – Seznam vektorů $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ je lineárně nezávislý (LN) IFF

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$ právě tehdy když $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$ nebo je-li seznam prázdný.

Lineární závislost – Seznam vektorů $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ je lineárně závislý (LZ) IFF není lineárně nezávislý.

Lineární obal – Lineární obal seznamu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, (značíme $\text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$), je množina vektorů tak, že: 1) lineární obal prázdného seznamu je \mathbf{o} , 2) lineární obal seznamu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ je množina všech lineárních kombinací seznamu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Lineární podprostor – Lineární podprostor W prostoru L je taková množina vektorů z L , že $\text{span}(W) = W$

Množina generátorů – Mějme lineární prostor L a množinu M , řekneme, že množina M je množina generátorů L IFF $\text{span}(M) = L$

Báze – Báze prostoru L je taková LN množina, pro kterou platí $\text{span}(M)$ je L

Dimenze – Mějme prostor L a bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dimenze L je potom n . ($\dim(L) = n$)

Souřadnice – Souřadnice vektoru \mathbf{v} vzhledem k bázi \mathbf{B} jsou potom takové $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, že platí $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{b}_i$. Značíme $\text{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Lineární zobrazení – Zobrazení f z L_1 do L_2 je lineární IFF $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ a zároveň $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$ pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$

Jádro – Mějme lineární zobrazení f z L_1 do L_2 . Jádro zobrazení f ($\ker(f)$) je potom množina všech $\mathbf{x} \in L_1$, takových $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

Image (obraz) – Mějme lineární zobrazení f z L_1 do L_2 . Image zobrazení f ($\text{im}(f)$) je potom množina všech $\mathbf{y} \in L_2$, takových, že existuje nějaké $\mathbf{x} \in L_1$, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Monomorfismus – Lineární zobrazení f z L_1 do L_2 je monomorfismus IFF pro každé $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L_1$ platí, když $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, potom $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$.

Epimorfismus – Lineární zobrazení f z L_1 do L_2 je epimorfismus IFF pro každé $y \in L_2$ existuje $x \in L_1$ takové, že platí $f(x) = y$.

(pomůcka „nasurepi“ -na, surjekce, epimorfismus jsou víceméně ekvivalentní pojmy)

(Epimorfismus **NENÍ** opak monomorfismu. (Velmi častá chyba.))

Isomorfismus – Lineární zobrazení f z L_1 do L_2 je isomorfismus IFF je epimorfismus a monomorfismus zároveň.

Regulární matice – Matice A je regulární (invertibilní, isomorfismus) IFF existuje matice A^{-1} taková, že platí $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$

(Regulární matice je vždy čtvercová. Na regulární matice se mohu dívat ze dvou úhlů, buď jako na deformaci nějakého objektu, nebo jako na transformaci souřadnic.)

Singulární matice – Matice je singulární IFF není regulární

Definice od prvního do druhého testu

Permutace – Permutace množiny M je prosté zobrazení π na množinu M . (Bijekce – každému různému prvku z M přiřadí jeden prvek z M)

Symetrická grupa permutací (nebude potřeba) – Mějme množinu M čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a operaci skládání permutací. Všechny permutace množiny M společně s operací skládání se nazývá symetrická grupa permutací.

Determinant čtvercové matice – Mějme čtvercovou matici A typu $n \times n$ nad tělesem \mathbb{F} , $\det(A)$ je potom takové číslo z \mathbb{F} , pro které platí:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n}$$

(Kde S_n je právě symetrická grupa permutací „políček matice“ – tohle k definici nepišťte)

(Když jsem definici viděl poprvé, tak jsem z ní také nebyl moc nadšený, proto se pokusím o nějaké přátelské vysvětlení. Napřed se vypořádám s tou grupou a tím π . Ve zkratce nejde o nic jiného, že pokaždé když násobím ta áčka, tak je to π jiná permutace, která ještě nebyla. Áčka jsou posice v matici, kde druhé číslo určuje sloupec a první π (nějaké číslo) určuje řádek. π (nějaké číslo) se mění v závislosti na tom, jaké číslo permutace π přiřadí číslu v závorkách. $\text{sign}(\pi)$ je znamínko permutace, což znamená, než že číslo, které dostanu

z těch áček vynásobím číslem $(-1)^{\text{na počet překřížení strun v diagramu}}$. Determinant je tedy číslo, které získám součtem všech těchto dílčích součinů.)

Vlastní hodnota, vlastní vektor a vlastní podprostor – Mějme lineární zobrazení f z L do L a nějaké $\lambda \in \mathbb{F}$ a $\mathbf{x} \in L$, pro která platí $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ a λ je různé od nuly, \mathbf{x} je nenulový vektor. λ potom nazýváme vlastní číslo, \mathbf{x} nazýváme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ a $\text{span}(\mathbf{x})$ nazýváme vlastní podprostor L příslušný vlastnímu číslu λ . Značíme $\text{eigen}_\lambda(\mathbf{x})$.

Charakteristický polynom – Mějme čtvercovou matici A . Charakteristický polynom matice A je potom $\det(A - x \cdot E)$ a značíme ho $\text{char}_A(x)$. (E je jednotková matice stejného počtu řádků jako A ; vyjde něco typu $ax^3 + bx^2 + cx + d$, nebo hůř.)

Podobnost matic – Matice A je podobná nějaké matici B , pokud existují matice transformace souřadnic T a T^{-1} , tak že platí $A = T^{-1}BT$. Značíme $A \approx B$.

Diagonální matice – Matice, která mimo diagonálu samý nuly. (Na diagonále mohou být nuly, takže např. nulová matice je diagonální.)

Diagonalisovatelná matice – Libovolná matice podobná nějaké diagonální matici. (Nulová matice je diagonalisovatelná, protože $O = E \cdot O \cdot E$; mohu ji obložit například jednotkovými maticemi.)

Nilpotentní matice a index nilpotence – Matice A je nilpotentní, když existuje k takové, že A^k je nulová matice, k se potom nazývá index nilpotence. (Nulová matice je nilpotentní.)

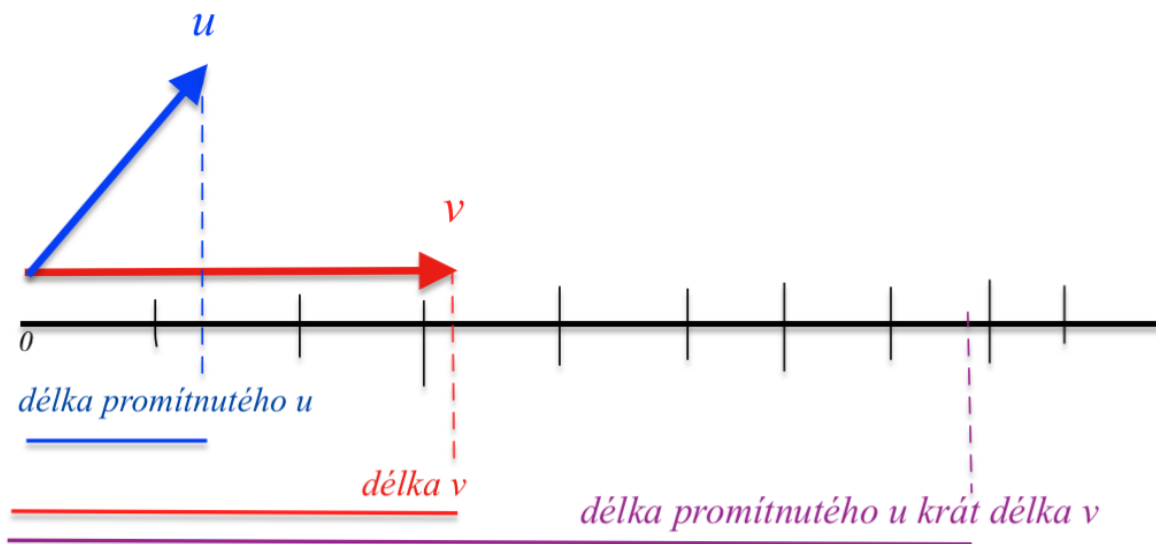
(Ačkoli to někoho může mrzet, nejsou zde vypsány definice adjungované matice a algebraického doplňku.)

Definice po druhém testu

Abstraktní skalární součin – Skalární součin $\langle \text{něco} | \text{něco} \rangle$ je zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí reálné číslo, pro které platí:

- 1) $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$
- 2) $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{y} \rangle$
- 3) $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$ IFF $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (nulový vektor)

(Velmi důležitý a zajímavý fakt, který nám pomůže v praktických úlohách viz obr. č. 1. Mějme vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} a chceme znát jejich skalární součin $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$. Vezmu-li vektor \mathbf{u} a kolmo ho promítnu na vektor \mathbf{v} , změřím jeho délku a vynásobím délkou vektoru \mathbf{v} , pak mám stejné číslo, jako $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$. Je jedno, jestli promítnu \mathbf{u} na \mathbf{v} , nebo opačně. Vztah lze nádherně využít na výpočet projekce.)



Obr. č. 1 Znáznornění skalárního součinu.

Projekce \mathbf{u} na \mathbf{v} by měla být hračka. Chci vektor o velikosti promítnutého \mathbf{u} ve směru \mathbf{v} . $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ mi dá velikost promítnutého \mathbf{u} krát velikost \mathbf{v} . Tak vydělím $\frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$, čímž dostanu velikost promítnutého \mathbf{u} . Teď ještě dostat správný směr, proto vynásobím $\frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v}$. Na neštěstí ale vektor \mathbf{v} nemusí být dlouhý jeden dílek, tak pro jistotu ještě vydělím jeho velikostí $\frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v}$, čímž získám finální vztah:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}$$

Positivně definitní matice – Čtvercová matice A typu $n \times n$ je pozitivně definitní, když ji můžeme napsat jako $A = R^T R$, kde R má všechny sloupce LN.

Norma vektoru – Norma vektoru \mathbf{v} (značíme $\|\mathbf{v}\|$) je reálné číslo, pro které platí

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$$

Metrika – Metrika vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} (značíme $\text{dis}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) je reálné číslo, pro které platí

$$\text{dis}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

Ortogonalita (kolmost) vektorů – Vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou ortogonální (na sebe kolmé) IFF platí

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = 0$$

Ortogonální báze – Báze lineárního prostoru L je ortogonální, IFF pro každou dvojici bázevých vektorů $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ platí $\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle = 0$

Gramův determinant – Mějme matici $A = (a_1, a_2, \dots, a_k): \mathbb{R}_k \rightarrow \mathbb{R}_n$, kde $k < n$. potom $\det(A^T A)$ se nazývá Gramův determinant a značí se $\text{Gram}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

($A^T A$ je tzv. Gramova matice a je symetrická podle hlavní diagonály. Je také nadupaná

skalárními součiny na každé posici. $\begin{pmatrix} \langle a_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_1 | a_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_k | a_1 \rangle & \dots & \langle a_k | a_k \rangle \end{pmatrix}$. Více informací v Akle;

<http://math.feld.cvut.cz/velebil/akla.html>).

Vektorový součin – Mějme lineární prostor \mathbb{R}_n a seznam vektorů $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$. Vektorový součin tohoto seznamu, značíme prefixově $\times(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$, je potom takový vektor \mathbf{v} , pro který platí $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$, pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$.

(Je dobré si uvědomit, že vektor \mathbf{v} je opravdu kolmý na vektory $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$, protože: mějme \mathbf{x}_j , kde $j \leq n$, $\langle \mathbf{v} | \mathbf{x}_j \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j) = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j) = 0$, protože determinant má dva sloupce stejný, musí být nulový. Protože je determinant 0, musí být i skalární součin $\langle \mathbf{v} | \mathbf{x}_j \rangle$ rovný 0, a proto je \mathbf{v} kolmý na nějaké \mathbf{x}_j , kde $j \leq n$.)

Přímý důkaz

V této kapitole bych se rád věnoval méně oblíbené části algebry, ačkoli jde o nejlehčí část zkoušky. Matematické věty jsou v obyčejném jazyce „vztahy“. Je hezké znát pojmy, hezčí je však umět pojmy použít. Přesně o tom je pak druhá část části B ve zkoušce. Všimněme si, jak elegantně se tvoří přímé matematické důkazy. (Kromě přímých důkazů existují i důkazy sporem, což jsou důkazy toho, že neplatí opak toho, co platí (zjednodušeně) a třeba důkazy indukcí, což jsou důkazy toho, co víme, protože víme, že něco víme. Je vidět, že tyto důkazy jsou ve skutečnosti něco mezi logikou a šarlatánstvím, proto se zaměřím na přímé důkazy.)

Přímý důkaz kopíruje tuto velmi jednoduchou strukturu, kterou stačí dodržovat, dokud nedojdeme k cíli. S tímto šestikrokovým algoritmem bychom měli být schopni vyřešit drtivou většinu důkazů.

- 1) Napíšeme si definice toho, co máme zadané.
- 2) Napíšeme si definici toho, co chceme dokázat.
Jsme připraveni na důkaz, můžeme začít.
- 3) Napíšeme hlavní definici z podmínek
- 4) Použijeme nějaký vztah (větu), nebo jinou definici.
- 5) Opakujeme krok 4, dokud nedojdeme definici toho, co chceme dokázat.
- 6) QED – „Quad erat demonstratum.“

Příklad:

Mějme lineární zobrazení f z L_1 do L_2 , dokažte, že image f je lineární podprostor L_2 .

- 1) Zobrazení f z L_1 do L_2 je **lineární** IFF $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ a zároveň $f(\alpha.\mathbf{x}) = \alpha . f(\mathbf{x})$ pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$

Image (obraz) – Mějme lineární zobrazení f z L_1 do L_2 . Image zobrazení f ($\mathbf{im}(f)$) je potom množina všech $\mathbf{y} \in L_2$, takových, že existuje nějaké $\mathbf{x} \in L_1$, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

- 2) **Lineární podprostor** – Lineární podprostor W prostoru L je taková množina vektorů z L , že $\text{span}(W) = W$

- 3) Mějme lineární zobrazení f z L_1 do L_2 . Image zobrazení f ($\text{im}(f)$) je potom množina všech $y \in L_2$, takových, že existuje nějaké $x \in L_1$, že $f(x) = y$.
- 4) Použiju vztah: $\text{im}(f)$ je podmnožinou L_2 , proto „dědí“ některé vlastnosti sčítání a podobně. Pro důkaz, že jde o podprostor, stačí dokázat:
- a) $\text{im}(f)$ je neprázdná a obsahuje \mathbf{o} .
 - b) $\text{im}(f)$ je uzavřená na sčítání
 - c) $\text{im}(f)$ je uzavřená na násobení
- a) 5) Použiju definici lineárního zobrazení. $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže \mathbf{o} je v $\text{im}(f)$ a $\text{im}(f)$ je neprázdná.
- b) 5) Použiju definici lineárního zobrazení. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ z $\text{im}(f)$.
Libovolný součet vektorů z $\text{im}(f)$ je součtem nějakých $f(\mathbf{x})$ a $f(\mathbf{y})$, což je $f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, a to můžu převést na nějaké $f(\mathbf{z})$. Množina je uzavřená na sčítání.
- c) 5) Použiju definici lineárního zobrazení. $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{v}$ z $\text{im}(f)$.
Vynásobím-li vektor \mathbf{v} nějakým skalárem, tak je to jako vynásobit nějaké $f(\mathbf{x})$, což je rovno $f(\alpha \cdot \mathbf{x})$. $\text{im}(f)$ je uzavřená na násobení.
- 6) QED

Příklad 2:

Dokažte, když A je digonalisovatelná, pak A^2 je také digonalisovatelná.

1) **Diagonalisovatelná matice** – Libovolná matice podobná nějaké diagonální matici.

Podobnost matic – Matice A je podobná nějaké matici B , pokud existují matice transformace souřadnic T a T^{-1} , tak že platí $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$. Značíme $A \approx B$.

2) $A^2 = T^{-1} \cdot D \cdot T$ (Tehle vztah by se měl objevit na konci, NESMÍME ho ale použít v průběhu. Vždy můžeme použít jen to, co víme, že je správně. tzn. objeví se až po bodu 3)

3) $A = T^{-1} \cdot D \cdot T$, kde D je diagonální.

4) $A^2 = A \cdot A$

5) $A^2 = T^{-1} \cdot D \cdot T \cdot T^{-1} \cdot D \cdot T$

5) $T^{-1} \cdot D \cdot T \cdot T^{-1} \cdot D \cdot T = T^{-1} \cdot D \cdot E \cdot D \cdot T$

5) $T^{-1} \cdot D \cdot T \cdot T^{-1} \cdot D \cdot T = T^{-1} \cdot D^2 \cdot T$

5) D^2 je diagonální, protože D je diagonální a násobením diagonálních matic se násobí jen čísla na diagonále.

5) $A^2 = T^{-1} \cdot D_{\text{nová}} \cdot T$ Přeznačím $D^2 = D_{\text{nová}}$

6) QED

Teoretické otázky

(1)

Matice \mathbf{Q} má 13 sloupců a 9 řádků. Její defekt je 5. Potom platí:

- (a) Hodnost matice \mathbf{Q} je rovna 4.
- (b) Hodnost matice \mathbf{Q} je rovna 8.
- (c) Matice \mathbf{Q} je monomorfismus.
- (d) O hodnosti matice \mathbf{Q} v tomto případě nelze rozhodnout.

(2)

Ať \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou čtvercové matice typu $n \times n$. Obě tyto matice jsou regulární. Pak je nutně regulární i následující matice.

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- (c) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2$
- (d) $(\mathbf{A} + \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{B}$

(3)

Ať \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou čtvercové matice typu 3×3 , a ať pro tři různé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí rovnosti

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}$. Potom:

- (a) Nemůže platit rovnost $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (b) Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} mají nutně totožná jádra.
- (c) Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou nutně totožné.
- (d) Ani jedna z výše uvedených třech možností není pravdivá.

(4)

Ať \mathbf{A} je čtvercová matice reálná matice typu 3×3 s vlastními čísly 1, 2 a 3. Potom *nutně* platí:

- (a) Matice \mathbf{A} je regulární a diagonalisovatelná.
- (b) Matice \mathbf{A} je regulární, ale není diagonalisovatelná.
- (c) Matice \mathbf{A} není regulární, ale je diagonalisovatelná.
- (d) Matice \mathbf{A} není ani regulární, ani diagonalisovatelná.

(5)

Matice \mathbf{A} je nilpotentní a platí $\mathbf{A}^6 = \mathbf{O}$. Vyberte *nutně pravdivé* tvrzení.

- (a) Matice \mathbf{A} má inverzi.
- (b) $\mathbf{A}^5 = \mathbf{O}$
- (c) $\mathbf{A}^7 = \mathbf{O}$
- (d) Matice \mathbf{A}^0 nemá inverzi.

(6)

Je dáno lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a v \mathbb{R}^3 tři různé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ takové, že $\mathbf{f}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{f}(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$. Hodnost zobrazení \mathbf{f} *nemůže být*:

- (a) 3.
- (b) 2.
- (c) 1.
- (d) 0.

(7)

At' \mathbf{A} je reálná matice typu 2×2 , at' každá ze soustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ má řešení. Pak *nutně* platí:

- (a) $\det(\mathbf{A})=0$
- (b) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ má právě jedno řešení.
- (c) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ má nekonečně mnoho řešení.
- (d) Existuje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ takový, že soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení.

(8)

Mějme čtvercovou matici \mathbf{A} typu $n \times n$. potom *nutně* platí:

- (a) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26^n \cdot (\det(\mathbf{A}))^n$
- (b) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26 \cdot \det(\mathbf{A})$
- (c) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26 \cdot (\det(\mathbf{A}))^n$
- (d) $\det(26 \cdot \mathbf{A}) = 26^n \cdot \det(\mathbf{A})$

(9)

Mějme dvě čtvercové matice \mathbf{A} , \mathbf{B} typu $n \times n$. Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou si podobné. Potom *nutně* platí:

- (a) Matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ si nemohou být podobné.
- (b) Matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ si nemohou být podobné.
- (c) Matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ a \mathbf{B} si nemohou být podobné.
- (d) Neplatí ani jedno z výše uvedených

(10)

Mějme lineární zobrazení $\mathbf{f} : V \rightarrow W$. Vyberte *nepravdivé* tvrzení:

- (a) Je možné, že $\text{rank}(\mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f})$.
- (b) Pokud je \mathbf{f} isomorfismus, pak $\ker(\mathbf{f})$ je prázdná množina.
- (c) Pokud je V konečně dimensionální, pak $\dim(V) \geq \text{def}(\mathbf{f}) - \text{rank}(\mathbf{f})$.
- (d) Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ nemůže být zadáno jako $\mathbf{f}(x) = 4 \cdot x + 2$. (Tj. v tomto případě volíme $V = W = \mathbb{R}^1$.)

(11)

Vektor \mathbf{v} lineárního prostoru \mathbb{R}^8 nad \mathbb{R} má vzhledem k uspořádané bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_8)$ souřadnice $(1, 1, \dots, 1)^T$. Potom vektor $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{v}$ má vzhledem k uspořádané bázi $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_8 + \mathbf{b}_1)$ souřadnice:

- (a) $(1, 1, \dots, 1)^T$
- (b) $(2, 2, \dots, 2)^T$
- (c) $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)^T$
- (d) Souřadnice nelze určit, protože $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_8 + \mathbf{b}_1)$ není uspořádaná báze.

(12)

At' L_1, L_2, L_3 jsou konečně dimensionální prostory, $f: L_1 \rightarrow L_2$ je isomorfismus a $g: L_2 \rightarrow L_3$ je monomorfismus. Potom nutně platí:

- (a) Pro libovolný vektor $w \in L_3$ existuje vektor $v \in L_1$ takový, že $(g \circ f)(v) = w$.
- (b) $g \circ f: L_1 \rightarrow L_3$ je epimorfismus.
- (c) $\dim(L_1) \leq \dim(L_3)$.
- (d) Zobrazení g je epimorfismus.

(13)

Symbolem $R[x]$ označujeme lineární prostor všech reálných polynomů s reálnými koeficienty. Následující podmnožina množiny $R[x]$ je lineárním podprostorem lineárního prostoru $R[x]$:

- (a) Množina všech polynomů sudého stupně společně s nulovým polynomem.
- (b) Množina všech polynomů nemajících reálný kořen.
- (c) Množina všech polynomů stupně přesně 2019 spolu s nulovým polynomem.
- (d) Množina všech polynomů s nulovými koeficienty u sudých mocnin.

(14)

V lineárním prostoru V mějme lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u, v, w\}$. Následující množina vektorů je lineárně závislá:

- (a) $\{v, w+u, w-v+u\}$.
- (b) $\{v+w, w+u, u+v\}$.
- (c) $\{v, v-w, v+w+u\}$.
- (d) $\{2 \cdot v, 2 \cdot w, 2 \cdot u\}$.

(15)

Mějme lineární prostor V , lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$, a dva lineárně nezávislé vektory $v \in V, w \in V$, které jsou vlastními vektory lineárního zobrazení f příslušnými vlastnímu číslu λ . Potom platí:

- (a) $f(v) = \lambda \cdot w$
- (b) Vektor $2 \cdot v$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2 \cdot \lambda$.
- (c) Vektor $f(v)$ je vlastní vektor lineárního zobrazení f příslušný vlastnímu číslu $2 \cdot \lambda$.
- (d) Pro nenulové skaláry α a β je i vektor $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ vlastním vektorem lineárního zobrazení f .

(16)

At' A je čtvercová matice typu 3×3 a at' $\det(A) = 3$. Potom nutně platí (E_3 je jednotková matice typu 3×3):

- (a) $\det(-A) = -3$
- (b) $\det(A + E_3) = 3 + 1 = 4$
- (c) $\det(A + A) = 3 + 3 = 6$
- (d) $\det(A^3) = 3 \times 3 = 9$

(17)

Nechť $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení. Vyberte nutně pravdivé tvrzení:

- (a) Pokud je f monomorfismus, pak je f i isomorfismus.
- (b) Pokud má f jádro celé \mathbb{R}^3 , pak matice zobrazení f není diagonalizovatelná.
- (c) Zobrazení $x \rightarrow f(x) + e_1$ je také lineární.
- (d) Pokud je f nilpotentní, pak má f hodnotu 3.

(18)

Nechť je $S = (s_1, \dots, s_m)$, $2 \leq m \leq n$, lineárně nezávislý seznam vektorů z \mathbb{R}^n . Vyberte nutně pravdivé tvrzení.

- (a) Seznam S nemůže být bází \mathbb{R}^n .
- (b) Seznam S nemůže generovat \mathbb{R}^n .
- (c) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam lineárně nezávislý.
- (d) Ať ze seznamu S odebereme jakýkoli vektor, bude nově vzniklý seznam generovat \mathbb{R}^n .

(19)

Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s čtvercovou maticí \mathbf{A} . Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí:

- (a) Pokud má soustava více řešení, podle Cramerovy věty nalezneme řešení nulové.
- (b) Pokud má soustava právě jedno řešení, pak má i soustava $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení.
- (c) Pokud soustava nemá řešení, může mít řešení soustava $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (d) Determinant matice \mathbf{A} je nutně nulový.

(20)

Mějme dán lineární prostor \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem a v něm uspořádanou ortogonální bází $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Potom platí:

- (a) Vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ jsou nutně jednotkové.
- (b) Nikdy nemůže platit rovnost $\sqrt{\langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle} = 0$.
- (c) Existuje vektor z \mathbb{R}^3 , který lze zapsat dvěma různými způsoby jako lineární kombinace vektorů z báze B .
- (d) Projekce vektoru \mathbf{b}_3 na rovinu zadanou vektory \mathbf{b}_1 a \mathbf{b}_2 je nutně nenulová.

(21)

Ať pro čtvercovou matici \mathbf{Q} platí rovnost $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$. Pak nutně platí:

- (a) $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.
- (b) Pro libovolné \mathbf{b} má rovnice $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nekonečně mnoho řešení.
- (c) Matice \mathbf{Q}^2 je singulární.
- (d) Platí rovnost $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$.

(22)

V této otázce je tělesem skalárů množina reálných čísel. Ať $\mathbf{f}: L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, mějme vektor $\mathbf{b} \in L_2$. Pak pro množinu $M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$ nutně platí:

- (a) Množina M tvoří lineární podprostor prostoru L_1 .
- (b) Množina M obsahuje nulový vektor.
- (c) Množina M obsahuje vektor \mathbf{b} .
- (d) Když $x_1 \in M$ a $x_2 \in M$, pak i $(2 \cdot x_1 - x_2) \in M$.

(23)

Ať \mathbf{A} je čtvercová reálná matice. Vyberte pravdivé tvrzení.

- (a) Pokud má \mathbf{A} nulové vlastní číslo, pak \mathbf{A} je regulární.
- (b) Pokud je \mathbf{A} regulární, pak je \mathbf{A} diagonalizovatelná.
- (c) Pokud je \mathbf{A} diagonalizovatelná, pak je \mathbf{A} singulární.
- (d) Matice \mathbf{A} má nulové vlastní číslo právě tehdy, když je \mathbf{A} singulární.

(24)

Mějme matici $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$, na prostorech: \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 jsou standardní skalární součiny. Potom platí:

- (a) Pro libovolné $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení.
- (b) Matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární.
- (c) Vektor $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na podprostor $\ker(\mathbf{A})$.
- (d) Matice \mathbf{A} zachovává nutně skalární součin.

(25)

Víme, že pro $\mathbf{A}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení pro libovolné \mathbf{b} . Pak nutně platí:

- (a) \mathbf{A} má více sloupců než řádků.
- (b) \mathbf{A} má nenulový determinant.
- (c) \mathbf{A} je isomorfismus.
- (d) $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq n$.

(26)

Máme dáno lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Víme, že pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ platí, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3 \cdot \mathbf{x}$. Potom také platí:

- (a) $\text{def}(\mathbf{f}) = 3$.
- (b) Existuje nestandardní báze prostoru \mathbb{R}^3 , vzhledem ke které má zobrazení \mathbf{f} vlastní číslo 9.
- (c) Matice zobrazení \mathbf{f} vzhledem ke standardním bázím má determinant 3.
- (d) Vlastní vektory zobrazení \mathbf{f} příslušné číslu 3 spolu s nulovým vektorem tvoří vlastní podprostor, kterým je celé \mathbb{R}^3 .

(27)

Ať \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou čtvercové matice typu 4×4 , dále ať platí $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ a $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$. Pak $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ *nemůže* být:

- (a) 0.
- (b) 1.
- (c) 2.
- (d) 3.

(28)

Čtvercová reálná matice \mathbf{A} typu 2×2 má determinant $\det(\mathbf{A}) = -1$. Potom platí:

- (a) \mathbf{A} nemůže měnit normu vektorů v \mathbb{R}^2 (normu odvozenou ze skalárního součinu).
- (b) \mathbf{A} je matice projekce.
- (c) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má vždy triviální řešení.
- (d) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = -1$.

(29)

At' B je uspořádaná báze lineárního prostoru \mathbb{R}^3 a M at' je matice obsahující jako sloupce vektory z B (zapsané jako souřadnice vzhledem ke kanonické bázi \mathbb{R}^3). Potom *nutně* platí:

- (a) Soustava lineárních rovnic $M^n \cdot x = c$ má řešení pro libovolné přirozené n .
- (b) Matice M je podobná jednotkové matici.
- (c) Matice M je pozitivně definitní.
- (d) Determinant matice $M \cdot M^{-1}$ je nulový.

(30)

At' je $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení. Pak nutně platí:

- (a) Pokud $\text{def}(f) > 0$, pak je f projekce na nějaký podprostor prostoru \mathbb{R}^3 .
- (b) Pokud je f^3 nulové zobrazení, pak $\text{def}(f) \geq 2$.
- (c) At' A a B jsou matice zobrazení f , každá vzhledem k jiné bázi. Přesto platí $\det(A) = \det(B)$.
- (d) $\dim(\text{im}(f) \cap \ker(f))$ může být 3.

(31)

Mějme seznam vektorů $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ($n \geq 2$) z lineárního prostoru L nad \mathbb{R} . Pak *neplatí*:

- (a) Pokud je V lineárně nezávislý, pak $\dim(L) \geq n$.
- (b) Seznam V je lineárně nezávislý, pokud platí že každý jeho o jeden vektor kratší podseznam je lineárně nezávislý.
- (c) Pokud V generuje L , přesto nemusí nutně být bází L .
- (d) Existuje lineární kombinace vektorů z V , která je rovna nulovému vektoru.

(32)

Mějme matice $A, B: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 3$. Pak platí:

- (a) Matice $A \cdot B$ může být maticí kolmé projekce na podprostor v \mathbb{R}^5 .
- (b) $\text{rank}(A \cdot B)$ může být 0.
- (c) $\text{rank}(A + B)$ nemůže být 5.
- (d) $\text{rank}(A \cdot B) = \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

Teoretické odpovědi

1)

- (a) Necht' matice Q je nulová, potom její hodnota je 0. (Neplatí)
- (b) Matice Q je zobrazení z L_1 do L_2 . $\text{rank}(Q) + \text{def}(Q) = \dim(L_1)$; $8 + 5 = 13$. (Platí)
- (c) $\text{def}(Q) > 0$, takže musí existovat 2 různé vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} , které se zobrazí na $Q \cdot \mathbf{v} = Q \cdot \mathbf{w}$. (Neplatí)
- (d) $\dim(L_1) - \text{def}(Q) = \text{rank}(Q)$ (Neplatí)

2)

- (a) Necht' A a B mají na každé pozici opačné číslo (např. jednotková matice a matice se samými -1 na hlavní diagonále.) $A + B$ je potom nulová matice - \rightarrow singularní (Neplatí)
- (b) Složení dvou isomorfních zobrazení je isomorfní zobrazení. $A \cdot B$ je regulární. $(A \cdot B) \cdot A^{-1}$ je regulární. (Platí)
- (c) Necht' A a B jsou jednotkové matice, pak $A - B$ je nulová matice, tedy singularní. Nulová matice krát nulová matice je pořád nulová matice. (Neplatí)
- (d) Necht' $A = -1 \cdot E_n$, pak v závorce je nulová matice. (Neplatí)

3)

- (a) Když $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a A a B jsou nulové matice, tak vše funguje. (Neplatí)
- (b) Necht' $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ mají v první položce čísla 1, 2, 3 a ve zbylých dvou položkách samé nuly. Potom matice A může být jednotková matice a matice B může být jakákoliv jiná diagonální matice, které má v prvním řádku a prvním sloupci číslo 1 (Neplatí)
- (c) !!! Když by platilo (c), muselo by platit i (b). Když je jen jedna správná odpověď, tohle to určitě nebude.

Když mají 2 matice jiná jádra, pak nejsou stejné. (Neplatí)

- (d) Triviálně (Platí)

4)

- (a) A má tři různá vlastní čísla, kterým jsou příslušné 3 vlastní prostory, jedná se tedy pouze o protažení ve třech osách (různých, nikoliv souřadnicových). Proto nepřijde o žádnou dimenzi a A musí být regulární. Když pootočíme osy protahování tak, aby souhlasily se souřadnicovými osami, tak nalezneme transformaci, která vytvoří z matice A matici diagonální. (Platí)
- (b) Triviálně (Neplatí)
- (c) Triviálně (Neplatí)
- (d) Triviálně (Neplatí)

5)

- (a) Je-li A nilpotentní, pak $\text{def}(A) > 0$, nejde o isomorfismus, není regulární. Nemá inverzi. (Neplatí)
- (b) Když $A^6 = \mathbf{0}$, tak ale A^5 nemusí být $\mathbf{0}$, ale matice, která by se stala nulovou až při příští iteraci. (Neplatí)
- (c) $A^6 = \mathbf{0}$, $A^7 = A^6 \cdot A = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$ (Platí)
- (d) $A = E$ (Jednotková matice), $E^{-1} = E$ (Neplatí)

6)

- (a) Hodnota zobrazení by byla 3 pouze, pokud by se na nulu zobrazily jen nulové vektory. Protože mají být všechny různé, 2 z nich nejsou nulové. (Správná odpověď)
- (b) Jeden vektor může být nulový, druhý se může zobrazit na nulu a třetí může být jeho násobek, takže se zobrazí také na nulu. (Špatná odpověď)
- (c) Jeden vektor může být nulový a zbylé dva mohou být lineárně nezávislé. (Špatná odpověď)
- (d) Všechny 3 vektory mohou být (Špatná odpověď)

7)

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde \mathbf{b} je libovolný vektor, by měla nekonečně mnoho řešení, nebo by neměla ani jedno jen pokud by měla determinant rovný nule. Necht' \mathbf{A} je jednotková matice, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$ jsou vyřešené rovnice. Determinant \mathbf{A} je přitom různý od nuly. Proto neplatí (a). Protože jsme našli takovou matici, pro kterou mají všechny soustavy řešení, pak neplatí (d). Zároveň také neplatí (c), protože $\det(\mathbf{A})$ není 0 a tak jsou jednoznačně určena všechna řešení. Proč platí (b) je trochu těžší, ale ne o moc. Protože \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 jsou lineárně nezávislé vektory, $\text{rank}(\mathbf{A})$ musí být alespoň 2. Protože jde o matici 2×2 , tak i hodnota musí být přesně 2, což je stejně, jako je prostor, ze kterého zobrazujeme. Matice \mathbf{A} musí tedy být isomorfismu. Pak tedy každému vektoru z $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ přiřadí právě jeden vektor. $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ je ve $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Proto platí (b).

8)

- (a) Naprosto nevidím důvod, proč by se měl determinant umocňovat. (Neplatí)
- (b) Na příkladu není moc co ukazovat. Snad jen proti příklad. Mějme matici 2×2 s 26 na diagonále a jinak samými nulama. Její determinant je 676. Když bych vytknul jen 26 a doufal tak, že z matice vytvořím jednotkovou matici, tak determinant jednotkové matice je 1. 1 krát 26 není 676. (Neplatí)
- (c) (Neplatí)
- (d) Determinant je lineární v každé položce. Abych vytknul před matici, musím vytknout ze všech řádků. Řádků je n , proto 26^n . (Platí)

9)

- (a) Protipříklad jsou 2 jednotkové matice. (Neplatí)
- (b) Protipříklad jsou 2 jednotkové matice. (Neplatí)
- (c) Protipříklad jsou 2 jednotkové matice. (Neplatí)
- (d) (Platí)

10)

- (a) Když by bylo zobrazení dáno maticí 2×2 , kde by byly oba sloupceky lin. závislé, pak by měla $\text{rank}(\mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f})$. (Špatná odpověď)
- (b) $\mathbf{0}$ se vždy zobrazí na $\mathbf{0}$, proto má $\ker(\mathbf{f})$ vždy alespoň jeden prvek. (Správná odpověď)
- (c) Věta o dimenzi jádra a obrazu říká: $\dim(V) = \text{def}(\mathbf{f}) + \text{rank}(\mathbf{f})$, pak tedy platí: $\dim(V) \geq \text{def}(\mathbf{f}) - \text{rank}(\mathbf{f})$. (Špatná odpověď)
- (d) Zobrazení opravdu není lineární. (Špatná odpověď)

11)

Mějme seznam $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ pro názornost ve 4D prostoru. Nový seznam vzniklý

sečtením jednotlivých bázevých vektorů vypadá takto $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Na první pohled je

nový seznam lineárně závislý. V 8D prostoru se budou vektory chovat podobně a opět vytvoří lineárně závislý seznam. Neintuitivní ale je, že např. ve 3D by sečtení bázevých vektorů dle pravidla $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_1)$ vytvořilo bázi. Každý prostor je hold „úplně jiné zvířátko“.

- (a) (Špatná odpověď)
- (b) (Špatná odpověď)
- (c) (Špatná odpověď)
- (d) (Správná odpověď)

12)

Víme, že složení isomorfismů je isomorfismus. Složení epimorfismů je epimorfismus. Složení monomorfismů je monomorfismus. Isomorfismus je monomorfismus a epimorfismus zároveň. Zobrazení g je monomorfismus, to nám ale neříká, že by mělo být epimorfismus. Proto (b) a (d) neplatí. Když $g \circ f$ nahradíme jiným písmenem, tak máme přesnou definici pro monomorfismus, proto (a) neplatí. $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, protože f je isomorfismus. $\dim(L_2) = \dim(L_3)$ protože g je monomorfismus (viz definice). $\dim(L_1) = \dim(L_2) = \dim(L_3)$, takže $\dim(L_1) \leq \dim(L_3)$ platí. (Ale pozor $\dim(L_1) < \dim(L_3)$ neplatí.)

- (a) (Neplatí)
- (b) (Neplatí)
- (c) (Platí)
- (d) (Neplatí)

13)

Nulový polynom má podle definice stupeň $-\infty$. (Jde o jakýkoliv násobek 0. *Jje prostě nula.*) Nulový polynom je nulový vektor lin. prostorech polynomů. U otázek, jestli je něco podprostor, stačí dokázat uzavřenost na sčítání, násobení skalárem a existenci nulového prvku.

- (a) Mějme polynomy $x^4 + 2x + 1$ a $x^4 + 1$. Oba polynomy mají sudý stupeň. $(x^4 + 2x + 1) - (x^4 + 1) = 2x$, tento polynom má ale už lichý stupeň. Množina není uzavřena na sčítání. (Neplatí)
- (b) Mějme polynomy $x^2 + 1$ a $2x^2 + 1$, oba nemají reálný kořen. $(2x^2 + 1) - (x^2 + 1) = x^2$ už ale reálný kořen má. Množina není uzavřena na sčítání. (Neplatí)
- (c) Mějme polynomy $x^{2019} + 2x + 1$ a $x^{2019} + 1$. Dál pokračujeme jako v prvním případě. (Neplatí)
- (d) Mějme polynomy tvaru $a \cdot x^{(2n+1)} + b \cdot x^{(2m+1)} + \dots + k \cdot x$. Sčítání polynomů provádíme sčítáním koeficientů u příslušných mocnin. \rightarrow Buď je koeficient u liché mocniny nula, nebo ne. Nicméně, protože koeficienty u sudých mocnin jsou vždycky nula, nemůžeme dostat polynom sudého stupně. Násobení polynomů skalárem provádíme násobením koeficientů u všech mocnin. Opět, protože máme polynomy jen lichého stupně, nemůžeme dostat polynom sudého stupně. (*Není povolené vynásobit polynom $(x^3 + 1)$ například x , abychom získali sudý stupeň.*) Množina obsahuje např. $0 \cdot x^3 = 0$, což je nulový vektor. (Platí)

14)

- (a) $\mathbf{w} - \mathbf{v} + \mathbf{u}$ dostanu jako $-1 \cdot (\mathbf{v}) + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$. Množina je LZ. (Platí)
- (b) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ jsou „hrany“ v nějaké zdeformované krychli, $\{\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ jsou pak přepony v této krychli. Ty jsou taky LN. (Neplatí)
- (c) Z 1. vektoru nenakombinuji 2., z 1. a 2. nenakombinuji 3. Vektory jsou LN. (Neplatí)
- (d) Roznásobím-li jiným skalárem, než 0, vektory zůstávají nezávislé. (Neplatí)

15)

- (a) $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, o \mathbf{w} ale v tomto ohledu nic nevíme. (Neplatí)
- (b) Vektor $2 \cdot \mathbf{v}$ je také příslušný vlastnímu číslu λ , jinak by zobrazení \mathbf{f} nebylo lineární. $\mathbf{f}(2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot (2 \cdot \mathbf{v})$, což není $(2 \cdot \lambda) \cdot (2 \cdot \mathbf{v})$. (Neplatí)
- (c) $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, ale chce se po nás tvrzení, že $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v})) = 2 \cdot \lambda \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v})$, pro což není naprosto žádný důvod.
- (d) $\text{span}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ je vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ , kde (\mathbf{v}, \mathbf{w}) je báze prostoru. Lineární kombinace bázevých vektorů zůstává v prostoru. (Platí)

16)

- (a) $-1_n \cdot \det(\mathbf{A}) = -1 \cdot 3 = -3$
- (b) Není důvod. Když sečtu 2 matice, jejich determinanty se nemusí sčítat. Sečtením matic mohou klidně získat singulární matici. (Neplatí)
- (c) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{A}) = 2_n \cdot \det(\mathbf{A})$, protože determinant je lineární v každé položce. (Neplatí)
- (d) $\det(\mathbf{A}^3) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (Neplatí)

17)

(a) Zobrazení je isomorfismus, je-li monomorfismus a epimorfismus **zároveň**. Protože je zobrazení **f** monomorfismus (*neslepuje žádné vektory*) a zároveň oba prostory mají stejnou dimenzi, takže pro každý obraz najdu nějaký vzor, musí být zobrazení **f** i epimorfismus. Pak ale nutně musí být isomorfismus. (Platí)

(b) Nulová matice je diagonální, je tedy diagonalizovatelná. (Neplatí)

(c) Zobrazení není lineární, protože by se nula zobrazila na \mathbf{e}_1 . (Neplatí)

(d) Matice **A** je nilpotentní, když existuje k takové, že A_k je nulová matice. Když má zobrazení **f** : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hodnotu 3, pak nikdy „*neslepi*“ žádné dimenze. To ale znamená, že pro žádné k neexistuje k takové, že A_k je nulová matice. (Neplatí)

18)

(a) Když $m = n$, tak může. (Neplatí)

(b) Když $m = n$, tak může. (Neplatí)

(c) Když nejsem schopen nakombinovat nějaký vektor ze seznamu zbylými vektory, tím spíš se mi ho nepodaří nakombinovat méně vektory. (platí)

(d) Máme $m \leq n$ a chceme, ať vždy platí $(m-1) = n$, což nikdy nenastane. (Neplatí)

19)

Je-li determinant matice **A** nulový, soustava má Více řešení, nebo žádné. Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jednoznačné řešení, když $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}})$, kde $\tilde{\mathbf{A}}$ je rozšířená matice soustavy.

(a) Když by měla soustava více řešení, byl by determinant nulový a my bychom nemohli Cramerovo pravidlo ani použít. (Neplatí)

(b) Má-li soustava jen jedno řešení, pak **A** je regulární matice (*čtvercová a její determinant není 0*). Matice **A** je tedy maticí nějakého isomorfismu. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ je potom také isomorfismus. $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ (Platí)

(c) Když soustava nemá řešení, pak platí $\text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}})$. Pro matici $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ platí: $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}})$, proto také nemůže mít řešení. (Neplatí)

(d) Prostě ne. (Neplatí)

20)

(a) Vektory by byly jednotkové, kdyby báze byla ortonormální, což ale není psáno. (Neplatí)

(b) Ten strašlivý výraz je ve skutečnosti jiný zápis pro velikost. Velikost bázevého vektoru nemůže být nula, protože kdyby byla, tak by se jednalo o nulový vektor. Nulový vektor ale nemůže být bázevým vektorem. Proto velikost bázevého vektoru nikdy není 0. (Správná odpověď)

(c) Kdyby šlo napsat nějaký vektor dvěma způsoby pomocí vektorů z báze, vektory v bázi by musely být LZ, což je ve zporu s definicí báze. (Neplatí)

(d) Protože jsou vektory ortogonální (*kolmé na sebe navzájem*), pak platí $\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_3 \rangle = 0$ a $\langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_3 \rangle = 0$. Projekce je tedy vždy nulová a to dokonce pro libovolný násobek \mathbf{b}_3 . (Neplatí)

21)

Determinant transponované matice je stejný jako matice netransponované.

(a) $1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^T) \cdot \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{Q})$ a proto $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$. (Platí)

(b) $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dá přepsat na $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak existuje jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, (Neplatí)

(c) Protipříklad by byl třeba $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$. Rád bych ale případ lépe vysvětlil. Matici \mathbf{Q}^T můžeme chápat jako transformaci souřadnic takovou, že **Q** převedeme na jednotkovou matici. Jedná se tedy o inverzní matici. Protože ale **Q** má k sobě inverzní matici, nemůže být singulární. Pak ani $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}$ není singulární. (*Spojení isomorfismů je isomorfismus.*) (Neplatí)

(d) $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$ přepíšeme na $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$, což lze zjednodušit na $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Q}^{-1}$ a dále na $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Víc se nám ale nepodaří dostat. (Neplatí)

22)

$M = \{x \mid f(x) = b\}$ v češtině znamená: M je množina takových x , která když zobrazím zobrazením f , tak dostanu b .

- (a) Když by existovalo jen jedno $x = o$, které by se zobrazilo na b , tak by nešlo o lin. prostor. (Neplatí)
- (b) Množina M by obsahovala nulový vektor, jen kdyby b byl nulový vektor. (Neplatí)
- (c) $b \in L_2$, nic nás ale nevede k tomu, že by $b \in L_1$. (Neplatí)
- (d) Protože je zobrazení $f(x)$ lineární, můžeme provést následující úpravy: $f(2 \cdot x_1 - x_2) = f(2 \cdot x_1) - f(x_2) = 2 \cdot f(x_1) - f(x_2) = 2 \cdot b - b = b$. Proto $(2 \cdot x_1 - x_2) \in M$. (Platí)

23)

- (a) Protipříklad by byla např. jednotková matice s nulou místo nějaké jedničky. Určitě není regulární. (Neplatí)
- (b) Matice rotace o 90° nemá žádná vlastní čísla a proto ani vlastní vektory (v \mathbb{R}), přitom je regulární. Protože neexistují vlastní vektory, neexistuje báze, ve které by byla matice diagonální. Matice není diagonalizovatelná. (Neplatí)
- (c) Protipříklad by byla např. jednotková matice. Je diagonalizovatelná, ale není singulární. (Neplatí)
- (d) Když má matice nulové vlastní číslo, znamená to, že vůči nějaké bázi se chová jako „slepení“ nějakých dvou prostorů, má tedy alespoň jeden LZ sloupec. Je singulární. (Platí)

24)

- (a) Soustavy rovnic mají i geometrickou interpretaci. Tato soustava rovnic se dá interpretovat jako „kdy se protnou 2 přímky ve 3D prostoru.“ Samozřejmě není průnik zaručen. Můžeme Také použít Frobeniovu větu. $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(\bar{A})$, ale chtěli bychom $\text{rank}(A) = \text{rank}(\bar{A})$, když $\text{rank}(\bar{A}) = 3$, tak máme smůlu. (Neplatí)
- (b) Je to drsný. Necht' $x \in \ker(A)$, pak $A \cdot x = 0$, pak ale i $A^T \cdot A \cdot x = 0$. Takže $\ker(A) \subseteq \ker(A^T \cdot A)$. Necht' $x \in \ker(A^T \cdot A)$, pak $A^T \cdot A \cdot x = 0$, roznásobím x^T zleva. $x^T \cdot A^T \cdot A \cdot x = 0$. Použiju identitu a upravím na $(A \cdot x)^T \cdot A \cdot x = 0$ takže $A \cdot x = 0$ (Ta transpozice mi s tím uvnitř závorky nic neudělá.) $\ker(A^T \cdot A) = \ker(A)$, pak ale $\text{def}(A^T \cdot A) = \text{def}(A)$ z čehož vyplývá $\text{rank}(A^T \cdot A) = \text{rank}(A)$. Doporučuji si ale tento vztah zapamatovat. (Platí)
- (c) Protože matice A není regulární, tak ani neexistuje inverzní matice A^{-1} . (Neplatí)
- (d) Když matice A pošle jeden vektor na dvojnásobek a druhý zůstane stejný, tak skalární součin je dvojnásobný. (Neplatí)

25)

Frobenius: Soustava má řešení, když $\text{rank}(A) = \text{rank}(\bar{A})$. Je-li A regulární, existuje jednoznačné řešení. (A je regulární, když A je isomorfismus) Nikdo neříká, že by mělo být řešení jednoznačné, proto můžeme vyloučit (b) i (c). Počet sloupců nijak nemusí ovlivnit existenci řešení, např. když A bude matice samých nul. Vyloučíme proto i (a). Jediné, co chceme je $\text{rank}(A) = \text{rank}(\bar{A})$, to znamená, že vektor b při rozšíření matice nemůže zvýšit rank . A už tedy musí mít n nezávislých sloupců. $\text{rank}(A) = n$, proto platí $\text{rank}(A) \geq n$.

- (a) (Neplatí)
- (b) (Neplatí)
- (c) (Neplatí)
- (d) (Platí)

26)

- (a) $\text{def}(f)=3$ by mělo zobrazení, které by poslalo každý vektor na 0, což ale f nedělá. (Neplatí)
- (b) Zobrazení vůči libovolné bázi má stále stejná vlastní čísla. (Neplatí)
- (c) Matice zobrazení f je matice velikosti 3×3 s číslem 3 na hlavní diagonále a jinak samými nulama. $\det(f) = 27$ (Neplatí)
- (d) Ano, každému vektoru přidělí jeho trojnásobek. Nikde tedy nedojde ke „slepení“ vektorů.

27)

$\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B}))$

- (a) (Špatná odpověď)
- (b) (Špatná odpověď)
- (c) (Špatná odpověď)
- (d) (Správná odpověď)

28)

(a) $\det(\mathbf{A}) = -1$ a matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, přitom vektor \mathbf{e}_1 se zobrazí na $2 \cdot \mathbf{e}_1$ a tedy jeho velikost musí

být dvojnásobná. (Neplatí)

(b) Matice projekce je vždy singulární (vždy musí „slepit“ nějaké vektory), takže její determinant je vždy 0. (Neplatí)

(c) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má triviální řešení, jen když je \mathbf{b} nulový vektor.

(d) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A}) = 1/-1 = -1$ (Platí)

29)

(a) \mathbf{M} má 3 LN sloupce, $\text{rank}(\mathbf{M}) = 3$, matice \mathbf{M} tedy není nilpotentní. $\text{rank}(\mathbf{M}^n) = 3$, $\text{rank}(\mathbf{M}^n)$ se rovná hodnotě rozšířené matice soustavy. Proto rovnice $\mathbf{M}^n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení pro libovolné přirozené n . (Platí)

(b) Stačí, aby \mathbf{M} měla jiná vlastní čísla než \mathbf{E} a už si nebudou podobné. (Nepatí)

(c) Naprosto není důvod. (Nepatí)

(d) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}$ $\det(\mathbf{E}) = 1$ (Neplatí)

30)

(a) Pokud $\text{def}(\mathbf{f}) > 0$, pak je \mathbf{f} složením projekce, protažení a rotace v prostoru (a možná ještě něčeho jiného). Jen kdyby bylo prodloužení $1 \times$ a rotace o 0 stupňů, šlo by o projekci. (Neplatí)

(b) Stačí aby $\text{def}(\mathbf{f}) = 1$, aby \mathbf{f}^3 bylo nulové zobrazení. (Neplatí)

(c) $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T}$ potom $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{T}) = 1/\det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{T}) = 1 \cdot \det(\mathbf{B})$, proto $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ (Platí)

(d) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, potom $\dim(\text{im}(\mathbf{f})) + \dim(\text{ker}(\mathbf{f})) = 3$ (Věta o dimenzi jádra a obrazu).

$\dim(\text{im}(\mathbf{f}) \cap \text{ker}(\mathbf{f}))$ by mohly být 3, jen kdyby $\dim(\text{im}(\mathbf{f})) = 3$ a $\dim(\text{ker}(\mathbf{f})) = 3$ (Což je podmínka nutná, nikoliv dostačující.) Pak bychom ale potřebovali 6-dimenzionální prostor, což nemáme. (Neplatí)

31)

(a) Pokud je V lineárně nezávislý, pak je V bází podprostoru, pak $\dim(L) \geq \dim(V) = n$. (Špatná odpověď)

(b) Protipříklad: $V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Každý jeho o jeden vektor kratší podseznam je LN, ale seznam je LZ. (Správná odpověď)

(c) Pokud $\dim(L) < n$, pak je toto tvrzení pravdivé, protože $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ může být LZ seznam vektorů. (Špatná odpověď)

(d) Vždy existuje triviální kombinace, když sečteme 0 násobky vektorů. (Špatná odpověď)

32)

(a) Ano, např. když \mathbf{A} je „skoro“ jednotková matice, která má jedničky jen na prvních 3 pozicích a \mathbf{B} na posledních 3 pozicích. (Platí)

(b) $\min(\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})) \geq \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \geq \text{rank}(\mathbf{B}) - \text{def}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$ (Neplatí)

(c) $\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ může být 5, když vhodně zvolím matice \mathbf{A} a \mathbf{B} . Pro sčítání a odčítání matic a jejich hodnoty nemáme žádná použitelná pravidla. (Neplatí)

(d) $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B}))$ (Neplatí)

Lineární tříčky u otázky C

Polovina zkouškových úloh je typu: „Najděte matici divného zobrazení.“ Je-li tomu tak, téměř vyhráno. Ačkoli na první pohled vypadá zadání velmi divoce, až neřešitelně, jsem vybaveni mocným nástrojem, skládáním zobrazení. Hned předvedu. „Najděte matici rotace vůči nějakému vektoru \mathbf{v} prostoru \mathbb{R}^3 .“ Rotaci umím v kanonické bázi, třeba kolem osy z , ale neumím ji vůči nějakému vektoru. Tak, co kdybych předstíral, že budu provádět rotaci kolem osy z a potom svůj „podvod“ zamaskoval? A přesně tohle je správné řešení. Výsledná matice \mathbf{M} se najde jako $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T}$, transformuju souřadnice, aby báze rotovaného prostoru vypadala jako kanonická báze. Pak provedu rotaci a všechno vrátím zpět. Úplně stejně by se postupovalo při hledání matice projekce, na nějaký divný prostor, matice zrcadlení vůči nějakému prostoru (např. rovině), matice protažení ve směru nějakého vektoru atd.

Když už jsem nastínil náš postup, bylo by fér, kdybych ukázal způsob, jak najít transformaci \mathbf{T} . Mám tedy vektor \mathbf{v} , okolo kterého mám rotovat prostor v \mathbb{R}^3 . Jeden bazový vektor \mathbb{R}^3 už tedy má, stačí najít zbylé dva. Jedním vektorem (tzv. normálovým) mohu zadat rovinu, na kterou je vektor kolmý. No to je přesně to, co potřebuju. (Teď přijde algoritmus, který mi vyhodí vektory kolmé na můj vektor \mathbf{v} , což je strašná nuda. Převrátím vektor \mathbf{v} a předstírám, že je to soustava jedné rovnice o třech neznámých a na pravé straně mám 0. Vyjde mi nějaké řešení, plus span dvou vektorů. Tyto dva vektory jsou ty zbylé 2, co jsem hledal. Označím je \mathbf{k} a \mathbf{l}) Nyní musím vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} ortogonalisovat a ortonormalisovat, čímž vzniknou vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} . Matice \mathbf{T} vznikne ze sloupců $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{v})$. Matice rotace je triviální

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Jeden vektor nechávám, se zbytkem točím.})$$

(Jedno staré čínské přísloví praví: „Když nevíš, tak ortonormalisuj.“ Pravidlo platí téměř vždy, protože když není potřeba ortonormalisovat, a někde jsem si vybíral nějaké vektory, tak jsem si klidně mohl vybrat už ty „normální“ a výsledek by měl vyjít nezávisle na výběru. Když je potřeba ortonormalisovat, tak jsem vyhrál. S ortogonalisací obezřetněji.)

Dodatek: Zobrazení vůči jiné bázi

Část o „jiných bázích“ původně nebyla součástí tohoto díla, protože jsem ani moc nevěděl, jak přesně mám „jiné báze“ chápat. Naštěstí, protože jsme v lineární algebře, je vše jednoduché. Stačí jen zapomenout vše co umíme, a začít znovu. Problém „jiných bází“ (všechny báze jsou stejné) začíná u pojmu souřadnice. Připomeňme si tedy: (Ctr + C; Ctr + V) *Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B jsou potom takové $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,*

že platí $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot b_i$. Značíme $\text{coord}_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ Dobře si prosím všimněte, že se

nemluví o žádných speciálních bázích. Co je třeba taková nespeciální báze? Nespeciální báze je například: $B = (\sin(\omega t), \sin(2\omega t), \sin(3\omega t))$, kde ω bývá označováno jako úhlová rychlost a t nejčastěji reprezentuje čas. Pro naše potřeby stačí vědět, že ω je konstanta a t je proměnná. Báze B je báze v lineárním prostoru funkcí. Ověření, že jde o bázi nechám na Vás. Mějme tedy například funkci:

$f(t) = 2 \cdot \sin(\omega t) + 3 \cdot \sin(2\omega t) + 4 \cdot \sin(3\omega t)$, jaké má funkce f souřadnice vůči B ?

$\text{coord}_B(f(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Easy? Mějme bázi $C = (x^3 + x^2 + x, x^3, x^2)$, a funkci $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$,

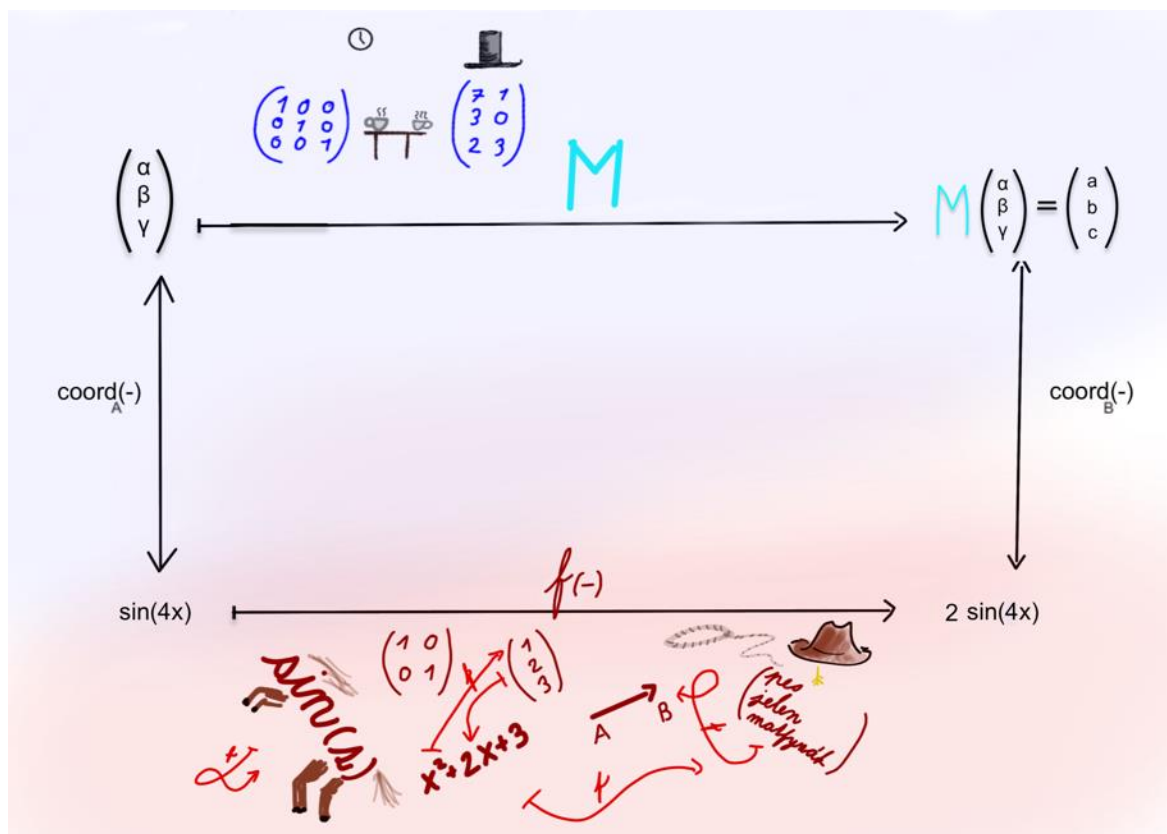
jaké má funkce $g(x)$ souřadnice vůči bázi C ? $\text{coord}_C(g(x)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, což je asi samozřejmé,

protože: $x^3 + x^2 + x = 2 \cdot (x^3 + x^2 + x) + (-1) \cdot x^3 + (-1) \cdot (x^2)$. Mimochodem funkce $g(x)$ se občas nazývá polynom, ale báze C negeneruje lineární prostor polynomů stupně 3, ani maximálně stupně 3, protože negeneruje konstantní členy. Báze C generuje pouze prostor funkcí nějakého hezkého tvaru, jen aby zmátla nepříteli. Nyní můžeme přejít k maticím.

I přesto, že lineární prostory jsou lineární (pěkné) jsou stále velmi divoké, plné nepřátelských funkcí, šipek, matic, seznamů slov, polynomů a to jsou jen ty nejzákladnější a nejtriviálnější. Protože bychom museli podobná zobrazení v každém prostoru popisovat zvlášť podle toho, jak se chová vůči vektorům onoho prostoru, i když se chovají v zásadě stejně, je mnohem jednodušší popisovat zobrazení pomocí změny souřadnic. Oproti divokému západu panujícím mezi vektory a zobrazeními, nově vybudovaný svět matic bude distingovaná anglická rodina, se kterou se bude dobře pracovat.

Obrázek č. 2 jste viděli už nespočetněkrát. Protože zkouška je již příští týden, je načase se konečně zamyslet nad tím, co v obrázku probíhá. V levém dolním rohu se nachází nějaký vektor, např. $\sin(4x)$, který chceme nějakým lineárním zobrazením f zobrazit. Protože

tahat se přes samotné lineární zobrazení je těžké, najdeme si souřadnice našeho vektoru, např. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. a dostáváme se do levého horního rohu. Pronásobíme maticí M , která reprezentuje zobrazení f a dostáváme se tak do pravého horního rohu. Máme souřadnice např. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektoru, který je náš výsledek např. $f(\sin(4x)) = 2 \cdot \sin(4x)$. Hned se podíváme na korektnější příklad.



Obr. č. 2 Zadat matici je to stejné, jako zadat lineární zobrazení, i když se jedná o fundamentálně jinou úlohu. Matice se zajímají jen o souřadnice (čísla) a je jim jedno, jestli jde o zobrazení mezi funkcemi, polynomy, čísly, nebo křídami v ruce.

Korektní příklad: Mějme báze polynomů $B = (2x, 3)$, $C = (2, x)$ a zobrazení f dané maticí $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, kde matice M bere vektory vůči bázi B a vrací vůči bázi C . Najděte $f(4x + 6)$.
Napřed najdeme souřadnice vektoru $4x + 6$ vůči bázi B . $\text{coord}_B(4x + 6) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Teď máme vektor souřadnic pronásobit maticí M . Získáváme tedy $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, což jsou souřadnice našeho výsledku, vůči bázi C . Takže $f(4x + 6) = 6 \cdot 2 + 10 \cdot x = 10x + 12$ Easy? Samozřejmě vše se zjednodušuje, když B a C jsou stejné báze, což většinou ale nejsou.

Co kdybychom měli najít matic zobrazení \mathbf{M} , když víme, jak se zobrazení hledá vůči vektorům. Podíváme-li se zpět na obrázek 2, vidíme, že hledání souřadnice je oboustranný proces. Něco nám tedy napovídá, že když půjdeme v diagramu nahoru a doprava, tak dojdeme na stejné místo, jako když bychom se vypravili doprava a nahoru. Mějme tedy obdobné zadání, jako před chvílí. Jsou zadány báze polynomů $\mathbf{B} = (2x, 3)$, $\mathbf{C} = (2, x)$ a zobrazení \mathbf{f} dané třeba $\mathbf{f}(2x) = 2x + 2$; $\mathbf{f}(3) = 3x + 4$. Máme tedy zadanou spodní část, nyní zjistíme přechody nahoru. $\text{coord}_{\mathbf{B}}(2x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\text{coord}_{\mathbf{B}}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tohle bylo jednoduché.

$\text{Coord}_{\mathbf{C}}(2 + 2x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\text{coord}_{\mathbf{C}}(2 + 3x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Následně musíme splnit $\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ říkají, že vyzobnu jen vybraný sloupec). Očividně tedy $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Stejně to platí obecně i pro všechny matice, v \mathbf{n} -tém sloupci mají položky souřadnic $\mathbf{f}(\mathbf{v}_n)$ vůči bázi \mathbf{C} . (Často se setkáváme s úlohou, že víme jak se chová zobrazení vůči vektorům a chceme najít jeho matici vůči **jedné** nějaké bázi. Z příkladu je vidět, že matice \mathbf{M} žere v jedné bázi a plive v jiné. Je tedy potřeba přidat transformaci souřadnic z nějaké strany podle zadání.)

Nyní můžeme přejít k zobrazení vůči „jiné bázi“. Máme zobrazení dané maticí $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ vůči kanonické bázi, najděte matic zobrazení \mathbf{N} , vůči bázi $\mathbf{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix})$. Buď se můžeme snažit rovnou dopočítat matici \mathbf{N} přes soustavy rovnic, což nedoporučuji, protože jsem zatím viděl, že jen jednou se podařilo studentovi matici dopočítat správně a navíc se ani nedají smlouvat body za postup :(Úlohu budeme řešit tak, že si najdeme transformační matice $\mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}}$ a $\mathbf{T}_{\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{B}}$ a zasendvičujeme matici \mathbf{M} . ($\mathbf{T}_{\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{B}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}}$) Čteme odzadu: Napřed přejdeme z báze \mathbf{B} do kanonické báze \mathbf{K} , pak provedeme \mathbf{M} a nakonec zameteme stopy a přejdeme zpět do \mathbf{B} . Jediná práce kterou musíme udělat je najít $\mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}}$, zbytek už je manuální práce. Nojo, ale tuhle úlohu jsme již řešili v předchozím příkladu, musíme splnit:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} \text{ a také } \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a tím najdeme } \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{B}} = \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ \pi & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_{\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{B}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}} = \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ \pi & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & e \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$$

Ať si zbytek dopočítá cvičící za tak blbé zadání :D

