



ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ KATEDRA FYZIKY

LABORATORNÍ CVIČENÍ Z FYZIKY

Jméno Jakub Klášterka		Datum měření 13.5.2024
Semestr Letní	Ročník 1.	Datum odevzdání 19.5.2024
Studijní skupina 108	Laboratorní skupina 108	Klasifikace
Číslo úlohy 1	Název úlohy Určení modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou a stanovení momentu setrvačnosti	

Obsah

1. ÚKOL MĚŘENÍ	2
2. SEZNAM POUŽITÝCH PŘÍSTROJŮ	2
3. TABULKY NAMĚŘENÝCH HODNOT, ZPRACOVÁNÍ	3
3.1 STANOVENÍ MODULU PRUŽNOSTI	3
3.1.1 MĚŘENÍ POČÁTEČNÍCH ÚDAJŮ	3
3.1.2 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI VÁLCOVÉ DESKY	4
3.1.3 MĚŘENÍ TORZNÍCH KYVŮ DESKY	4
3.1.4 VÝPOČET MODULU PRUŽNOSTI OCELOVÉ STRUNY	5
3.1.5. VÝPOČET KOMBINOVANÉ STANDARTNÍ NEJISTOTY MODULU PRUŽNOSTI VE SMYKU MATERIÁLU STRUNY	6
3.1.5.1 Výpočet nejistoty momentu setrvačnosti válcové desky	6
3.1.5.2 Výpočet kombinované standartní nejistoty modulu pružnosti	6
3.2. MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI ROTORU ELEKTROMOTORU	8
3.2.1 MĚŘENÍ TORZNÍCH KMITŮ	8
3.2.2 VÝPOČET DOBY KYVU SOUSTAVY	8
3.2.3 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI ROTORU ELEKTROMOTORU	9
3.2.4 VÝPOČET KOMBINOVANÉ STANDARTNÍ NEJISTOTY MOMENTU SETRVAČNOSTI ROTORU	9
4. ZHODNOCENÍ VÝSLEDKU MĚŘENÍ	11
5. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	12

1. Úkol měření

1. Změření modulu pružnosti ve smyku ocelové struny.
2. Určení momentu setrvačnosti rotoru elektromotoru metodou torzních kmitů.

2. Seznam použitých přístrojů

1. Torzní kyvadlo – tvořené ocelovou strunou, ($l = 89$ cm)
2. Válcová deska – sloužící jako setrvačník, ($d = 213,1$ mm, $m = 5,13$ kg)
3. Rotor elektromotoru
4. Mikrometr – nejistota $u_{mk} = 0,002$ mm
5. Stopky – krajní chyba měření $t = 0,4$ s
6. Aparatura pro zavěšení kyvadla
7. Svinovací metr - nejistota $u_m = 0,5$ mm
8. Posuvné měřítko – nejistota $u_p = 0,15$ mm

3. Tabulky naměřených hodnot, zpracování

3.1 Stanovení modulu pružnosti

3.1.1 Měření počátečních údajů

Nejprve došlo ke změření ocelové struny. Původní hodnota byla stanovena na 87 cm, nicméně bylo potřeba přičíst prodloužení struny v místě závěsu. Tato velikost byla po přepočtu stanovena na 2 cm, tedy výsledná délka struny odpovídá 89 cm.

Následně bylo prováděno měření průměru ocelové struny. Pro dosažení co nejpřesnějších výsledků bylo provedeno 10 nezávislých měření, jehož hodnoty byly naneseny do níže uvedené tabulky 1 a následně zprůměrovány. Výsledná hodnota je výsledkem aritmetického průměru τ získaných hodnot, tj. $d_s = 1,2$ mm

$$\tau = \frac{\sum_{k=1}^{10} d_k}{n}$$

Kde n je počet měření a d_k je k -té měření

Průměr struny	
měření	d_k [mm]
1.	1,24
2.	1,18
3.	1,18
4.	1,18
5.	1,17
6.	1,19
7.	1,32
8.	1,19
9.	1,18
10.	1,18

Tabulka 1 - Měření průměru struny

Dále bylo provedeno měření průměru a hmotnosti válcové desky. Získané hodnoty byly $m = 5,13$ kg, $d_v = 213,1$ mm.

3.1.2 Výpočet momentu setrvačnosti válcové desky

Pro výpočet momentu setrvačnosti byl použit vzorec

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$R = \frac{d_v}{2}$$

po dosazení dostáváme hodnotu

$$J = \frac{1}{2} 5,13 \cdot \left(\frac{0,2131}{2} \right)^2 = 0,02912 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.1.3 Měření torzních kyvů desky

Nejprve bylo provedeno měření doby 10 a 20 kyvů. Při měření byla uvažována krajní chyba měření o velikosti $t = 0,4$ s. Po aplikaci omezovací metody byla ještě naměřena doba pro 40 kyvů. Všechny naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce číslo 2.

Měření torzních kyvů desky	
počet kyvů n	čas T [s]
10	40,3
20	81,25
40	163,85

Tabulka 2 - Měření doby torzních kyvů

Pro určení hodnoty jednoho kyvu byl využit algoritmus omezovací metody.

Během prvního měření jsme získali hodnotu

$$10 T_K = 40,3 \text{ s}$$

Odtud byla odhadnuta doba 1 kyvu, tj.

$$1 T_K = 4,03 \text{ s}$$

Následně byl získán interval pro 10 kyvů, který počítá s krajní chybou měření 0,4 s.

$$39,9 \text{ s} < 10 T_K < 40,7 \text{ s}$$

Na základě tohoto údaje byl odhadnut interval 20 kyvů.

$$79,8 \text{ s} < 20 T_K < 81,4 \text{ s}$$

Poté došlo k výpočtu střední hodnoty intervalu pro dobu 20 kyvů.

$$(81,4 - 79,8) = 1,6 \text{ s}$$

$$1,6 < 1 T_K$$

Z tohoto údaje je patrné, že střední hodnota intervalu je užší než doba jednoho kyvu T_K .

Poté bylo provedeno další měření a stanoven interval pro 20 kyvů. Naměřená doba byla 81,25 s, viz *tabulka 2*.

$$79,85 \text{ s} < 20 T_K < 81,65 \text{ s}$$

$$(81,65 - 79,85) = 1,8 \text{ s}$$

$$1,8 < 1 T_K$$

Následně jsme opět odhadnuli interval pro 40 kyvů.

$$159,7 \text{ s} < 40 T_K < 163,3 \text{ s}$$

$$(163,3 - 159,7) = 3,6 \text{ s}$$

$$3,6 < 1 T_K$$

Z těchto hodnot byl vytvořen finální interval pro dobu 1 kyvu T_K

$$3,99 \text{ s} < T_K < 4,08 \text{ s}$$

$$(4,08 - 3,99) = 0,09 \text{ s}$$

Skutečná hodnota T_K je s nejvyšší pravděpodobností $(4,08 \pm 0,09) \text{ s}$.

Standartní nejistota byla vypočítána dle vztahu $uT_K = \frac{0,09}{\sqrt{3}} = 0,052 \text{ s}$

3.1.4 Výpočet modulu pružnosti ocelové struny ve smyku

$$G = \frac{32 \pi \cdot l \cdot J}{d_s^4 T_K^2} [\text{Pa}]$$

$$G = \frac{32 \pi \cdot 0,89 \cdot 0,02912}{0,0012^4 \cdot 4,08^2} = 7,548 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Tabulková hodnota pro modul pružnosti ve smyku ocelové struny:

$$G_T = 8,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 85 \text{ GPa}$$

Výpočet procentuální odchylky naměřené hodnoty od hodnoty tabulkové:

$$\frac{|G_T - G|}{G_T} \cdot 100 = 11,2 \%$$

kde G_T je tabulková hodnota modulu pružnosti ve smyku a G je hodnota naměřená.

3.1.5. Výpočet kombinované standartní nejistoty modulu pružnosti ve smyku materiálu struny

Pro výpočet kombinované nejistoty je potřeba určit nejistoty vstupních parametrů. Delta označuje přesnost měření, v případě svinovacího metru $\Delta = 1 \text{ mm}$, τ je aritmetický průměr, N označuje počet měření a x_i i-té měření.

$$u_l = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,577 \text{ mm}$$
$$u_{ds} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \tau)^2}{N \cdot (N - 1)} = 0,003402 \text{ mm}$$
$$u_{Tk} = 0,4 \text{ s}$$
$$u_m = 0,01 \text{ kg}$$

3.1.5.1 Výpočet nejistoty momentu setrvačnosti válcové desky

Provedli jsme parciální derivaci momentu setrvačnosti dle všech proměnných

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{1}{2} R^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial R} = mR$$

$$R = \frac{d_s}{2}$$

Poté vypočteme nejistotu pro J

$$u_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m} \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial R} \cdot u_{ds}\right)^2}$$
$$u_J = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{0,0012}{2}\right)^2 \cdot 0,01\right)^2 + \left(5,13 \cdot \left(\frac{0,0012}{2}\right) \cdot 0,000003402\right)^2}$$
$$u_J = 1,06549 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.5.1.2 Výpočet kombinované standartní nejistoty modulu pružnosti

Pro získání hodnoty nejistoty provedeme parciální derivace G dle všech proměnných.

$$\frac{\partial G}{\partial l} = \frac{32 \pi \cdot J}{d_s^4 T_K^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial J} = \frac{32 \pi \cdot l}{d_s^4 T_K^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial d_s} = -4 \frac{32 \pi \cdot l \cdot J}{d_s^5 T_K^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial T_K} = -2 \frac{32 \pi \cdot l \cdot J}{d_s^4 T_K^3}$$

Následně spočítáme výslednou standartní kombinovanou nejistotu

$$u_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial l} \cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial J} \cdot u_J\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d_s} \cdot u_{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T_K} \cdot u_{Tk}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial l} \cdot u_l\right)^2 = \left(\frac{32\pi \cdot 0,02912}{0,0012^4 \cdot 4,08^2} \cdot 0,000577\right)^2 = 2,39 \cdot 10^{15}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial J} \cdot u_J\right)^2 = \left(\frac{32\pi \cdot 0,89}{0,0012^4 \cdot 4,08^2} \cdot 1,06549 \cdot 10^{-8}\right)^2 = 7,628 \cdot 10^8$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial d_s} \cdot u_{ds}\right)^2 = \left(-4 \cdot \frac{32\pi \cdot 0,89 \cdot 0,02912}{0,0012^5 \cdot 4,08^2} \cdot 0,000003402\right)^2 = 7,327 \cdot 10^{17}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T_K} \cdot u_{Tk}\right)^2 = \left(-2 \cdot \frac{32\pi \cdot 0,89 \cdot 0,02912}{0,0012^4 \cdot 4,08^3} \cdot 0,4\right)^2 = 2,19 \cdot 10^{20}$$

$$u_{G=} = \sqrt{2,39 \cdot 10^{15} + 7,628 \cdot 10^8 + 7,327 \cdot 10^{17} + 2,19 \cdot 10^{20}}$$

$$u_{G=} = 14,8235 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

3.2. Měření momentu setrvačnosti rotoru elektromotoru

3.2.1 Měření torzních kmitů

Měření torzních kyvů rotoru elektromotoru bylo prováděno stejným postupem jako předchozím měření válcové desky. Krajiní chyba měření byla opět 0,4 s.

Měření torzních kyvů rotoru	
počet kyvů n	čas t [s]
10	10,35
20	20,05
50	52,02

Tabulka 3 - Měření kyvů rotoru

3.2.2 Výpočet doby kyvu soustavy

Pro výpočet doby jednoho kyvu byla opět využita omezovací metoda. Krajiní chyba měření dosahovala opět hodnoty 0,4 s.

$$10 T_K = 10,35 \text{ s}$$

Odhadovaná doba jednoho kyvu

$$T_K = 1,035 \text{ s}$$

Náš odhadovaný interval pro 20 kyvů

$$20,3 \text{ s} < 20 T_K < 21,1 \text{ s}$$

$$(21,1 - 20,3) = 0,8 \text{ s}$$

$$0,8 \text{ s} < 1 T_K$$

Po změření a přepočtení nám vyjde výsledný rozsah pro 20 kyvů

$$19,65 \text{ s} < 20 T_K < 20,45 \text{ s}$$

$$(20,45 - 19,65) = 0,8 \text{ s}$$

Při výpočtu intervalu na 50 kyvů by došlo k překročení velikosti jednoho kyvu. Z tohoto důvodu jsme omezili výpočet $1 T_K$ pouze na základě naměřené hodnoty 20 kyvů.

$$49,125 \text{ s} < 50 T_K < 51,125 \text{ s}$$

$$(51,125 - 49,125) = 2 \text{ s}$$

$$2 \text{ s} > 1 T_K$$

Dle výše uvedených výpočtů jsme stanovili dobu jednoho kyvu jako

$$1 T_K = (1,0025 \pm 0,09) \text{ s}$$

3.2.3 Výpočet momentu setrvačnosti rotoru elektromotoru

Pro výpočet momentu setrvačnosti byl nejprve využit vzorec pro modul pružnosti, vzhledem k neschopnosti přímého výpočtu momentu setrvačnosti na základě poloměru a hmotnosti rotoru.

$$G = \frac{32 \pi \cdot l \cdot J}{d_s^4 T_K^2}$$

Vyjádřili jsme si veličinu J

$$J = \frac{G \cdot d_s^4 T_K^2}{32 \pi \cdot l}$$

Po dosažení vypočítaných a naměřených hodnot jsme získali výsledek

$$J_E = \frac{7,548 \cdot 10^{10} \cdot 0,0012^4 \cdot 1,0025^2}{32 \pi \cdot 0,89} = 1,758 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.2.4 Výpočet kombinované standardní nejistoty momentu setrvačnosti rotoru

Pro výpočet nejistoty využijeme výše uvedený vzorec pro výpočet J , který parciálně zderivujeme.

$$J = \frac{G \cdot d_s^4 T_K^2}{32 \pi \cdot l}$$

$$\frac{\partial J}{\partial G} = \frac{d_s^4 T_K^2}{32 \pi \cdot l}$$

$$\frac{\partial J}{\partial d_s} = 4 \cdot \frac{G \cdot d_s^3 T_K^2}{32 \pi \cdot l}$$

$$\frac{\partial J}{\partial T_K} = 2 \cdot \frac{G \cdot d_s^4 T_K}{32 \pi \cdot l}$$

$$\frac{\partial J}{\partial l} = -\frac{G \cdot d_s^4 T_K^2}{32 \pi \cdot l^2}$$

Nyní dosadíme do vzorce pro kombinovanou nejistotu u_J

$$u_{J_E} = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial G} \cdot u_g\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial d_s} \cdot u_{d_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T_K} \cdot u_{T_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial l} \cdot u_l\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial G} \cdot u_g\right)^2 = \left(\frac{0,0012^4 \cdot 1,0025^2}{32 \pi \cdot 0,89} \cdot 14,8235 \cdot 10^9\right)^2 = 1,192 \cdot 10^{-7}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial d_s} \cdot u_{d_s}\right)^2 = \left(3 \cdot \frac{7,548 \cdot 10^{10} \cdot 0,0012^3 \cdot 1,0025^2}{32 \pi \cdot 0,89} \cdot 0,000003402\right)^2 = 2,236 \cdot 10^{-10}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial Tk} \cdot u_{Tk}\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{7,548 \cdot 10^{10} \cdot 0,0012^4 \cdot 1,0025^1}{32 \pi \cdot 0,89} \cdot 0,4\right)^2 = 1,969 \cdot 10^{-6}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial l} \cdot u_l\right)^2 = \left(-\frac{7,548 \cdot 10^{10} \cdot 0,0012^4 \cdot 1,0025^2}{32 \pi \cdot 0,89^2} \cdot 0,000577\right)^2 = 1,299 \cdot 10^{-12}$$

$$u_{J_E} = \sqrt{1,192 \cdot 10^{-7} + 2,236 \cdot 10^{-10} + 1,969 \cdot 10^{-6} + 1,299 \cdot 10^{-12}}$$

$$u_{J_E} = 1,445 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

4. Zhodnocení výsledku měření

Měřením torzních kmitů ocelové struny jsme stanovili její modul pružnosti ve smyku a následně jsme využili tuto hodnotu k určení momentu setrvačnosti rotoru elektromotoru, u kterého by bylo obtížné zjistit přesně rozměry a hmotnost. Proto byl jeho moment setrvačnosti vypočítán pomocí jiného, zobecněného tělesa, kterým byla válcová deska.

Modul pružnosti ve smyku ocelové struny

$$G = (7,548 \pm 1,482) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Moment setrvačnosti rotoru elektromotoru

$$J_E = (1,7318 \pm 1,445) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Tabulková hodnota pro modul pružnosti ve smyku ocelové struny

$$G_T = 8,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 85 \text{ GPa}$$

Po porovnání je naměřené a tabulkové hodnoty vyšel rozdíl 11,2 %.

Tento rozdíl může být způsoben několika faktory, včetně delší reakční doby experimentátora při měření času kyvů, případné nekonzistence materiálu struny nebo dalších experimentálních chyb, jako jsou nepřesnosti při měření délky struny a průměru desky.

5. Seznam použité literatury

- 1) Zadání laboratorní úlohy:
<https://planck.fel.cvut.cz/praktikum/downloads/navody/torze.pdf>
- 2) Tabulkové hodnoty pro modul pružnosti
10.7 Modul pružnosti v tahu E a modul pružnosti v šmyku G. Online. In: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre. Dostupné z:
<http://dl.slpk.sk/fyzika2/docs/tabulky7.pdf>. [cit. 2024-05-18].