Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Matice $\mathbf{A}$ je typu 6×6. Determinantem matice $\mathbf{A}$ je z definice součet jistých $6! = 720$ členů. Kolik z nich je jistě nulových, pokud $a_{15} = 0$?
   (a) 0.
   (b) 120.
   (c) 360.
   (d) 720.

2. Vyberte pravdivé tvrzení.
   (a) Součinem dvou nediagonálních matic je vždy matice nediagonální.
   (b) Součinem dvou horních trojúhelníkových matic může být matice, která není horní trojúhelníkovou.
   (c) Součinem dvou symetrických matic je vždy matice symetrická.
   (d) Součinem dvou čtvercových matic může být matice nečtvercová.

3. Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolný vektor $\mathbf{b}$. Pak je pravda:
   (a) Zobrazení $\mathbf{A}$ je epimorfismus.
   (b) $\ker(\mathbf{A})$ obsahuje pouze nulový vektor.
   (c) Matice $\mathbf{A}$ má hodnost nutně rovnou počtu svých sloupců.
   (d) Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří bázi prostoru $\mathrm{im}(\mathbf{A})$.

4. Matice $\mathbf{A}$ typu 3×3 má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, jim příslušné vlastní vektory jsou $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pak *nutně* platí:
   (a) $\det(\mathbf{A}) = 4$.
   (b) Třetí sloupec matice $\mathbf{A}$ je nulový.
   (c) Matice $\mathbf{A}$ není diagonalisovatelná.
   (d) $\ker(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3$.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Nechť $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ je lineárně nezávislý seznam vektorů v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$ a ať $\vec{b} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 + 3 \cdot \vec{v}_3$. Dokažte, že platí $\mathsf{span}(\vec{v}_1, \vec{b}, \vec{v}_3) \subseteq \mathsf{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Spočtěte kolmou projekci vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na rovinu $x + 2 \cdot y - 5 \cdot z = 0$. (Kolmou projekcí se myslí kolmá projekce vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^3$.)

Závěrečnou odpověď zapište celou větou.