

Domácí cvičení 8

(primitivní funkce)

8/1) Najděte derivace následujících funkcí:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } f(x) = \ln 3x, & \text{b) } f(x) = \ln \frac{x}{3}, & \text{c) } f(x) = \ln(3x + 6), & \text{d) } f(x) = \ln \frac{x+6}{3}, \\
\text{e) } f(x) = \ln 5x, & \text{f) } f(x) = \ln \frac{x}{5}, & \text{g) } f(x) = \ln(5x - 8), & \text{h) } f(x) = \ln \frac{x-8}{5}, \\
\text{i) } f(x) = \ln(-2x), & \text{j) } f(x) = \ln\left(-\frac{x}{2}\right), & \text{k) } f(x) = \ln(-2x + 5), & \text{l) } f(x) = \ln \frac{x+5}{-2}.
\end{array}$$

(Praxe v určování derivací funkcí tohoto typu se vám bude velmi hodit při hledání primitivních funkcí.)

8/2) Vypočtěte:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } \int x^2(2x^2 - 1)^2 dx, & \text{b) } \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx, & \text{c) } \int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx, \\
\text{d) } \int (5^x + 2 \cdot 3^{-x} - 4 \cos x) dx, & \text{e) } \int \frac{x^2 + 3}{5 + 5x^2} dx &
\end{array}$$

8/3) Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int x \ln x dx, & \text{b) } \int e^x (x^3 - 2x) dx
\end{array}$$

8/4) Vypočtěte:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int \sin 7x dx, & \text{b) } \int e^{-2x} dx, & \text{c) } \int \cos(-8x) dx, & \text{d) } \int \cosh 6x dx, \\
\text{e) } \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx, & \text{f) } \int \frac{1}{\sin^2(-5x)} dx, & \text{g) } \int \frac{1}{1 + (3x)^2} dx, & \text{h) } \int \frac{1}{\sqrt{1 - (-2x)^2}} dx, \\
\text{i) } \int \sin \frac{x}{7} dx, & \text{j) } \int e^{\frac{x}{-2}} dx, & \text{k) } \int \cos\left(\frac{x}{-8}\right) dx, & \text{l) } \int \cosh \frac{x}{6} dx, \\
\text{m) } \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx, & \text{n) } \int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{-5}\right)} dx, & \text{o) } \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx, & \text{p) } \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{-2}\right)^2}} dx
\end{array}$$

8/5) Vypočtěte (pomocí lineárních substitucí, tedy bez umocnění v integrandu!):

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int (2x + 1)^3 dx, & \text{b) } \int (1 - 7x)^8 dx, & \text{c) } \int \left(\frac{4-x}{3}\right)^2 dx, & \text{d) } \int \left(5 + \frac{x}{4}\right) dx, \\
\text{e) } \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx, & \text{f) } \int \frac{1}{(1-7x)^8} dx, & \text{g) } \int \frac{1}{\left(\frac{4-x}{3}\right)^2} dx, & \text{h) } \int \frac{1}{\left(5 + \frac{x}{4}\right)} dx, \\
\text{i) } \int e^{2x+1} dx, & \text{j) } \int \frac{1}{1 + (1-7x)^2} dx, & \text{k) } \int \sin\left(\frac{4-x}{3}\right) dx, & \text{l) } \int \frac{1}{\cos^2\left(5 + \frac{x}{4}\right)} dx
\end{array}$$

8/6) Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int (5x^4 + 6x^2 - 6x) \ln 4x dx, & \text{b) } \int (2x^2 - 3x) \sin \frac{x}{3} dx \\
\text{c) } \int (x^2 + 5) \cos 2x dx, & \text{d) } \int (-x^2 + 4x - 7) e^{\frac{x}{2}} dx
\end{array}$$

Výsledky:

$$\begin{array}{llll}
8/1) & \text{a) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{b) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{c) } f'(x) = \frac{3}{3x+6}, & \text{d) } f'(x) = \frac{1}{x+6}, \\
& \text{e) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{f) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{g) } f'(x) = \frac{5}{5x-8}, & \text{h) } f'(x) = \frac{1}{x-8}, \\
& \text{i) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{j) } f'(x) = \frac{1}{x}, & \text{k) } f'(x) = \frac{-2}{-2x+5}, & \text{l) } f'(x) = \frac{1}{x+5}.
\end{array}$$

- 8/2) a) $\frac{4}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + c$ na \mathbb{R} (integrand roznásobte)
- b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 12\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c$ na $(0, \infty)$ (integrand roznásobte a odmocniny převed'te na mocniny)
- c) $\frac{3}{2}\arcsin x + c$ na $(-1, 1)$ (ve jmenovateli vytkněte $2 = \sqrt{4}$ ven z odmocniny)
- d) $\frac{5^x}{\ln 5} - 2\frac{3^{-x}}{\ln 3} - 4\sin x + c$ na \mathbb{R}
- e) $\frac{1}{5}(x + 2\operatorname{arctg} x) + c$ na \mathbb{R} (použijte přepis integrandu $f(x) = \frac{1}{5}\frac{x^2+3}{1+x^2} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{2}{1+x^2}\right)$)
- 8/3) a) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$ na $(0, \infty)$ ($1 \times$ per partes, derivujeme logaritmus)
- b) $e^x(x^3 - 3x^2 + 4x - 4) + c$ na \mathbb{R} ($3 \times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom)
- 8/4) Z prostorových důvodů je uvedena vždy jen jedna z primitivních funkcí (pro k vždy platí $k \in \mathbb{Z}$):

- | | |
|---|--|
| a) $-\frac{1}{7}\cos 7x$ na \mathbb{R} , | b) $-\frac{1}{2}e^{-2x}$ na \mathbb{R} , |
| c) $-\frac{1}{8}\sin(-8x)$ na \mathbb{R} , | d) $\frac{1}{6}\sinh 6x$ na \mathbb{R} , |
| e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$ na $(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})$, | f) $\frac{1}{5}\operatorname{cotg}(-5x)$ na $(k\frac{\pi}{5}, (k+1)\frac{\pi}{5})$, |
| g) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x$ na \mathbb{R} , | h) $-\frac{1}{2}\arcsin(-2x)$ na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, |
| i) $-7\cos\frac{x}{7}$ na \mathbb{R} , | j) $-2e^{-\frac{x}{2}}$ na \mathbb{R} , |
| k) $-8\sin\left(\frac{x}{-8}\right)$ na \mathbb{R} , | l) $6\sinh\frac{x}{6}$ na \mathbb{R} , |
| m) $3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ na $(-\frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \frac{3\pi}{2} + 3k\pi)$, | n) $5\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{5}\right)$ na $(5k\pi, 5(k+1)\pi)$, |
| o) $3\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$ na \mathbb{R} , | p) $-2\arcsin\left(\frac{x}{-2}\right)$ na $(-2, 2)$ |

(Zkuste integrály ještě jednou přepočítat bez vypisování substituce. Např. v a) můžete uvažovat takto: Primitivní funkcí k funkci $\sin t$ je funkce $-\cos t$, primitivní funkcí k funkci $\sin 7x$ tedy bude nějaký násobek funkce $-\cos 7x$. Kdybychom funkci $-\cos 7x$ zderivovali, dostali bychom funkci $7\sin 7x$. My však máme z této funkce jen sedminu, tedy primitivní funkcí bude sedmina funkce $-\cos 7x$. (Nebo: „Když se při derivování konstantou u x násobí, musí se při integraci, která je inverzní operací k derivaci, konstantou u x vydělit.“))

8/5) Z prostorových důvodů je uvedena vždy jen jedna z primitivních funkcí (pro k platí $k \in \mathbb{Z}$):

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{1}{8}(2x+1)^4$ na \mathbb{R} , | b) $-\frac{1}{63}(1-7x)^9$ na \mathbb{R} , |
| c) $-\left(\frac{4-x}{3}\right)^3$ na \mathbb{R} , | d) $2\left(5+\frac{x}{4}\right)^2$ na \mathbb{R} , |
| e) $-\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+1)^2}$ na $(-\infty, -\frac{1}{2})$ a na $(-\frac{1}{2}, \infty)$, | f) $\frac{1}{49}\frac{1}{(1-7x)^7}$ na $(-\infty, \frac{1}{7})$ a na $(\frac{1}{7}, \infty)$, |
| g) $3\frac{1}{\left(\frac{4-x}{3}\right)}$ na $(-\infty, 4)$ a na $(4, \infty)$, | h) $4\ln\left 5+\frac{x}{4}\right $ na $(-\infty, -20)$ a na $(-20, \infty)$, |
| i) $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ na \mathbb{R} , | j) $-\frac{1}{7}\operatorname{arctg}(1-7x)$ na \mathbb{R} , |
| k) $3\cos\left(\frac{4-x}{3}\right)$ na \mathbb{R} , | l) $4\operatorname{tg}\left(5+\frac{x}{4}\right)$ na $((4k-2)\pi-20, (4k+2)\pi-20)$ |

(Jako v předchozím příkladu zkuste integrály ještě jednou přepočítat bez vypisování substituce.)

- 8/6) a) $(x^5 + 2x^3 - 3x^2)\ln 4x - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$ na $(0, \infty)$ ($1 \times$ per partes, derivujeme logaritmus)
- b) $(-6x^2 + 9x + 108)\cos\frac{x}{3} + (36x - 27)\sin\frac{x}{3} + c$ na \mathbb{R} ($2 \times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom)
- c) $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}\right)\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + c$ na \mathbb{R} ($2 \times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom)
- d) $(-2x^2 + 16x - 46)e^{\frac{x}{2}} + c$ na \mathbb{R} ($2 \times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom)