MA 12-21

1. Na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nalezněte bod, kde výraz $x - 2y + 2z$ je největší možný.

2. Přepište následující integrál

$$\int_{-1}^{0} \int_{-x^2}^{0} f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Uvažujme pole $\vec{F} = (y^2, \alpha x^2 + 2xy)$. Pomocí Greenovy věty zjistěte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které vychází integrál z pole $\vec{F}$ přes pozitivně orientovanou hranici množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \le y \le 2 - x^2,\ x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \right\}$$

nulový.

4. Která z následujících tří polí jsou potenciální: $\vec{F_1} = (-x + 2y, y^2 - x)$, $\vec{F_2} = (x + 3y, y^2)$ a $\vec{F_2} - \vec{F_1}$? U potenciálních polí nalezněte jejich potenciál.

5. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ 2, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

Řešení.

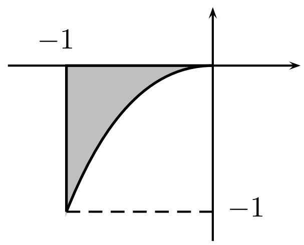
1. Lagrangeova funkce je $L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$. Pro její stacionární body musí platit

$$1 = 2\lambda x, \quad -2 = 2\lambda y, \quad 2 = 2\lambda z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Řešením této soustavy jsou dva body $A_1 = (1, -2, 2)$ a $A_2 = -A_1$. Největší hodnoty nabývá zadaný výraz v bodě A_1.

2. Opačné pořadí je $\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-\sqrt{-y}} f \; dx\, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{\pi}^{5\pi/4}\int_{-\sin\varphi/\cos^2\varphi}^{-1/\cos\varphi} f\varrho\, d\varrho d\varphi.$$



3. Podle Greenovy věty je

$$\int_{(\partial M)} \vec{F} d\vec{s} = \iint_M \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{1-\frac{1}{2}x^2}^{2-x^2} 2\alpha x \, dydx = 0$$

pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Potenciální je pouze pole $\vec{F}_2 - \vec{F}_1$ a má potenciál $f = x^2 + xy$.

5. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$ pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $x = k\pi$ má řada hodnotu průměru 1.