Základy matematické analýzy

ZS 2012/2013

Vzorová zadání písemné části zkoušky

Varianta 1

1. Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{16x^2+9}-5}{x-1}, \quad x_0 = 1.$$

(6 bodů) $[\,\frac{16}{5}\,]$

2. Vypočtěte

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(6 bodů) $[\,-\frac{1+\ln x}{x}+c$ na $(0,\infty)$ (per partes)$\,]$

3. Vypočtěte

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{10\cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$$

(8 bodů) $[\,2\pi + 2\ln 3 \quad (t = \operatorname{tg} x)\,]$

4. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)\,.$$

(6 bodů) [konvexní na $\langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\rangle$; konkávní na $(-\pi, -\frac{3}{4}\,\pi\rangle$ a na $\langle \frac{1}{4}\,\pi, \pi)$; inflexe v bodech $-\frac{3}{4}\,\pi$, $\frac{1}{4}\,\pi$]

5. Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} + \operatorname{arctg} x.$$

(6 bodů) [$x = 0$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$]

6. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = t^2 + 2t - 1\,, \qquad y(0+) = -1\,, \quad y'(0+) = 0\,.$$

(10 bodů) [$y(t) = \frac{1}{2}\,t^2 - 1$, $t \geq 0$]

7. Uveďte definici funkce nerostoucí na množině M. Podle této definice rozhodněte, zda funkce $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ je nerostoucí na intervalu $(-\infty, 1)$.
(8 bodů) [ANO – f je nerostoucí na $(-\infty, 1)$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Varianta 2

1. Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \cdot \Big(\operatorname{cotg}(\pi x)\Big)^2, \quad x_0 = 2$$

(6 bodů) [neexistuje pro $x \to 2$; $+\infty$ pro $x \to 2^-$; $-\infty$ pro $x \to 2^+$]

2. Najděte Taylorův polynom řádu 4 funkce f v bodě $-\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\pi + 2x} \cdot \cos x - 1\,.$$

(6 bodů) [$T(x) = -1 + (x + \frac{\pi}{2}) + 2(x + \frac{\pi}{2})^2 + \frac{11}{6}\,(x + \frac{\pi}{2})^3 + (x + \frac{\pi}{2})^4$]

3. Vypočtěte

$$\int_0^2 \arcsin \tfrac{x}{2}\ \mathrm{d}x.$$

(8 bodů) [$\pi - 2 \ \ \Big(= [x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}]_0^2 \Big)$ (per partes)]

4. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^6 + 2x^2 - 4 \operatorname{arctg}(x^2).$$

(10 bodů) [rostoucí na $\langle -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0\rangle$ a $\langle \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$ a $\langle 0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$;
lokální maximum: $f(0) = 0$, lokální minima: $f(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = \frac{7\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{3}\pi$]

5. Najděte Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{e}^{3t}\cos t + t^2\,\mathrm{e}^{4t}\big) + \int_0^t \cos(3u)\,\mathrm{d}u + t \sin 2t\,.$$

(6 bodů) [$p\left(\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{2}{(p-4)^3}\right) - 1 + \frac{1}{p^2+9} + \frac{4p}{(p^2+4)^2},\ p > 4$]

6. Najděte funkci $f(t)$, jejímž Laplaceovým obrazem je funkce

$$F(p) = \frac{p + 7}{p^2 + 2p + 5} \ + \ \frac{1}{p^3}\,\mathrm{e}^{-2p}.$$

(6 bodů) [$f(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + 3 \sin 2t)H(t) + \frac{1}{2}(t - 2)^2\,H(t - 2)$]

7. Uveďte definici derivace funkce f v bodě x_0. Podle této definice najděte derivaci funkce $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (\cosh x + \sinh x)$ v bodě $x_0 = 1$.
(8 bodů) [$f'(1) = 2\,\mathrm{e}$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Některé další typy zkouškových příkladů

- Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}+3}, \quad x_0 = 0$$

(6 bodů) $[\,\mathrm{e}^2\,]$

- Vyšetřete limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} \cdot \big(\ln|\cos(n\pi)|\big)\,.$$

(6 bodů) $[\,0\,]$

- Vypočtěte

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$$

(8 bodů) $[\,\ln 3 \quad (t=\sqrt{x+1})\,]$

- Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce f:

$$f(x) = -5\,x^6 + 3\,x^2 - \sqrt{5}\,x\,.$$

(6 bodů) [konvexní na $\langle -\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\rangle$; konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt5}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{\sqrt5}, \infty)$; inflexe v bodech $-\frac{1}{\sqrt5}$, $\frac{1}{\sqrt5}$;]

- Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce

$$f(x) = (x+4)\,|x| + 2.$$

(10 bodů) [rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,+\infty)$, klesající na $\langle -2,0\rangle$; lokální maximum: $f(-2)=6$, lokální minimum: $f(0)=2$]

- Najděte nejmenší a největší hotnotu funkce f na intervalu $I=\langle 1,\infty)$:

$$f(x) = \frac{\ln(\mathrm{e}\cdot x)}{\sqrt{x}}\,.$$

(10 bodů) [největší hodnota f na I: $f(\mathrm{e}) = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; nejmenší hodnoty f na I nenabývá]

- Najděte Laplaceův obraz funce

$$f(t) = \begin{cases} -2\,, & t\in\langle 0,1)\,,\\ t^2-2\,, & t\in\langle 1,+\infty)\,, \end{cases}.$$

(6 bodů) $[\,F(p) = -\frac{2}{p} + \frac{2+2p+p^2}{p^3}\,\mathrm{e}^{-p},\ p>0\,]$

- Pomocí Laplaceovy transformace řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -\,y_1 + 3y_2\,, & \qquad y_1(0+) &= 4\,,\\ y_2' &= \quad y_1 - 3y_2 - \mathrm{e}^{-t}\,, & \qquad y_2(0+) &= 1\,. \end{aligned}$$

(10 bodů) $[\,y_1(t) = 3+\mathrm{e}^{-t},\ \ y_2(t)=1,\ t\ge 0\,]$

- Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$y' + 4y + 13\int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = 0\,, \qquad y(0+) = 1\,.$$

(10 bodů) $[\,y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t),\ t\ge 0\,]$

- Uveďte větu o Laplaceově obrazu derivace. Podle této věty odvoďte z Laplaceova obrazu funkce $f(t) = -\cos t$ Laplaceův obraz funkce $g(t) = \sin t$.

(8 bodů) $[\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{p^2+1} \quad \big(\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{p}{p^2+1}\big)\,]$

Více typů příkladů najdete ve vzorových testech, domácích cvičeních a v materiálech k přednáškám na
`http://math.feld.cvut.cz/veronika/vyuka/vyuka.htm` a `.../vyuka/blany112.htm`.