MA 3-23

1. Mějme v rovině přímku $2x - y = 0$ a elipsu $x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, kde $b > 0$ je zadaný parametr. Zjistěte všechny hodnoty parametru b, při kterých se přímka a elipsa protínají pod pravým úhlem,

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Jaká je hmotnost válce $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$, je-li hustota rovna druhé mocnině vzdálenosti od osy z?

4. Nalezněte Fourierovu řadu pro 2π-periodické rozšíření funkce

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ -a & x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je zadaný parametr. Ve kterých všech bodech se Fourierova řada rovná hodnotám funkce f?

5. (a) Jak zní Sylvestrovo kritérium pro zjištění, zda je matice pozitivně definitní, negativně definitní nebo indefinitní?

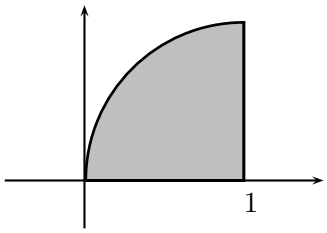
   (b) Dokažte větu: Má-li funkce $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0$ lokální maximum a existuje-li v bodě $\mathbf{x}_0$ diferenciál, pak je nulový. (Využijte analogickou větu pro funkci jedné proměnné.)

Řešení.

1. Normálový vektor k přímce je $\vec{n}_1 = \operatorname{grad}(2x - y) = (2, -1)$ a k elipse $\vec{n}_2 = \operatorname{grad}(x^2 + y^2/b^2 - 1) = (2x, 2y/b^2)$. Protože musí být na sebe kolmé, je jejich skalární součin nulový: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4x - 2y/b^2 = 0$. Dosadíme-li sem za x (nebo za y) z rovnice přímky, dostaneme, že $b = 1$. Elipsa je tak kružnice.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f \, dy \, dx$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



3. Hustota je $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. V cylindrických souřadnicích je hmotnost
$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h \varrho^3 \, dz \, d\varrho \, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi h r^4.$$

4. Funkce f je lichá, proto stačí počítat jen sinové koeficienty.
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin kx \, dx = \frac{2a}{\pi k}(1 - (-1)^k).$$
Fourierova řada je:
$$\frac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx = \frac{4a}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\Big)$$
Hodnotám funkce f se rovná ve všech bodech kromě $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Mějme čtvercovou matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Hlavní subdeterminaty D_k jsou determinanty typu
$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$
Matice je pozitivně definitní, když jsou všechny $D_k > 0$, negativně definitní, když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, $\ldots$, $(-1)^n D_n > 0$. Matice je indefinitní, pokud $\det\mathbb{A} \neq 0$ a neplatí žádné z předchozích pravidel.

(b) Zvolme libovolný směr $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ a položme $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$. Funkce $\varphi(t)$ má lokální maximum v bodě 0, proto $\varphi'(0) = 0$. Protože
$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}], \end{aligned}$$
je $df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}] = 0$ pro každé $\mathbf{h}$, a tedy diferenciál je nulový.