Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte.
Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Ať má čtvercová soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{R}$ alespoň jedno řešení. Potom *nutně* platí:
   (a) matice $\mathbf{A}$ má inversi,
   (b) soustava $(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení (kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice příslušných rozměrů),
   (c) vektor $\mathbf{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$,
   (d) matice $\mathbf{A}$ má nulový determinant.
2. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu 4×4 a $\det(\mathbf{A}) = 3$. Potom platí:
   (a) $\det(-\mathbf{A}) = -3$,
   (b) $\det(\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{A})) = 9$,
   (c) $\det(3 \cdot \mathbf{A}) = 9$,
   (d) $\det(\mathbf{A} - 3\mathbf{A}) = -6$.
3. Ať je B uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{M}$ ať je matice obsahující jako sloupce vektory z B (zapsané jako souřadnice vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$). Potom *nutně* platí:
   (a) rozdíl $\mathbf{M} - \mathbf{E}_3$ je nulová matice,
   (b) matice $\mathbf{M}$ má nenulový determinant,
   (c) matice $\mathbf{M}$ je positivně definitní,
   (d) sloupce matice $\mathbf{M} + \mathbf{M}$ nemohou tvořit bázi.
4. Ať L_1, L_2 a L_3 jsou konečně dimensionální lineární prostory nad tělesem $\mathbb{F}$, $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je isomorfismus a $\mathbf{g} : L_2 \to L_3$ je epimorfismus. Potom platí:
   (a) $\dim(L_1) \leq \dim(L_3)$,
   (b) pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in L_3$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in L_1$ takový, že $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$,
   (c) $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \to L_3$ je epimorfismus,
   (d) zobrazení $\mathbf{g}$ je monomorfismus.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Definujte pojem *jádro a obraz lineárního zobrazení* $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$. Dokažte, že obraz lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ tvoří lineární podprostor prostoru L_2.
(Definice a znění vět pište celými oznamovacími větami. Poznámka: pojem *podprostor lineárního prostoru* musíte definovat také. Všechny lineární prostory jsou nad pevným tělesem $\mathbb{F}$.)

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V závislosti na parametru a rozhodněte o průniku tří rovin

$$2x + 2ay + 2z = 2, \quad 2ax + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 2az = a,$$

v prostoru $\mathbb{R}^3$. Připomenutí: a je *reálné* číslo, odpovědět byste měli *celou oznamovací větou* (případně *celými oznamovacími větami*).