Cvičení 2 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *S jednotlivými členy se vypořádáme postupně. Zaprvé, jest* $2z^2 = 2(x+iy)^2 = 2x^2-2y^2+4xyi$. *Dále* $\overline{z-i} = \overline{x+iy-i} = x-iy+i = x+(1-y)i$. *Tedy*

$$\begin{aligned}\frac{2z^2}{\overline{z-i}} &= \frac{2x^2-2y^2+4xyi}{x+(1-y)i} = \frac{2x^2-2y^2+4xyi}{x+(1-y)i}\cdot\frac{x-(1-y)i}{x-(1-y)i}\\ &= \frac{(2x^2-2y^2)x-4(1-y)xy-(2x^2-2y^2)(1-y)i+4x^2yi}{x^2+(1-y)^2}\\ &= \frac{(2x^2-2y^2)x-4(1-y)xy}{x^2+(1-y)^2} - \frac{(2x^2-2y^2)(1-y)-4x^2y}{x^2+(1-y)^2}i.\end{aligned}$$

Zadruhé, máme $z-2+i = x+iy-2+i = x-2+(y+1)i$, *takže*

$$i|z-2+i|^2 = i\left((x-2)^2+(y+1)^2\right).$$

Nakonec $i^{13}z = iz = i(x+iy) = -y+ix$, *takže*

$$\operatorname{Re}\left(i^{13}z\right) = -y.$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{(2x^2-2y^2)x-4(1-y)xy}{x^2+(1-y)^2} - \frac{(2x^2-2y^2)(1-y)-4x^2y}{x^2+(1-y)^2}i + i\left((x-2)^2+(y+1)^2\right) - y\\ &= \frac{(2x^2-2y^2)x-4(1-y)xy}{x^2+(1-y)^2} - y + \left((x-2)^2+(y+1)^2 - \frac{(2x^2-2y^2)(1-y)-4x^2y}{x^2+(1-y)^2}\right)i.\end{aligned}$$

Takže

$$u(x,y) = \frac{(2x^2-2y^2)x-4(1-y)xy}{x^2+(1-y)^2} - y$$

a

$$v(x,y) = (x-2)^2+(y+1)^2 - \frac{(2x^2-2y^2)(1-y)-4x^2y}{x^2+(1-y)^2}.$$

Úloha 2. *Začneme tím, že určíme reálnou a imaginární část funkce* $f(z)$. *Jest* $\operatorname{Im}(\bar z) = \operatorname{Im}(x-iy) = -y$, $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(x^2-y^2+2xyi) = 2xy$ *a* $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2-y^2+2xyi) = x^2-y^2$, *takže*

$$f(z) = -\beta^2y - 4xy + i\alpha(x^2-y^2+2y^2) = -\beta^2y-4xy+i\alpha(x^2+y^2).$$

Tedy $u(x,y) = -\beta^2y-4xy$ *a* $v(x,y) = \alpha(x^2+y^2)$. *Připomeňme si, že funkce* $f(z)$ *má v bodě* $-\frac{1}{2}-2i$ *derivaci právě tehdy, když jsou splněny zároveň obě Cauchyovy-Riemannovy podmínky:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-\frac{1}{2},-2) = \frac{\partial v}{\partial y}(-\frac{1}{2},-2) \tag{CR1}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(-\frac{1}{2},-2) = -\frac{\partial v}{\partial x}(-\frac{1}{2},-2). \tag{CR2}$$

Podmínka (CR1) *nám tedy dává*

$$\begin{aligned}-4y &= 2\alpha y\big|_{x=-\frac{1}{2},y=-2}\\ 8 &= -4\alpha\\ \alpha &= -2.\end{aligned}$$

Podmínka (CR2) *nám dává*

$$\begin{aligned}-\beta^2-4x &= -2\alpha x\big|_{x=-\frac{1}{2},y=-2}\\ -\beta^2+2 &= \alpha.\end{aligned}$$

Dosazením $\alpha = -2$ *tedy*

$$\beta^2 = 4,$$

takže $\beta = \pm 2$. Funkce je tedy diferencovatelná v bodě $-\frac{1}{2} - 2i$ pro $\alpha = -2$ a $\beta = \pm 2$. Pro tyto hodnoty parametrů dále platí

$$f'(-\frac{1}{2} - 2i) = \frac{\partial u}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -2) + i\frac{\partial v}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -2) = -4y - 4xi\Big|_{x=-\frac{1}{2}, y=-2} = 8 + 2i.$$

Úloha 3. *Připomeňme si, že $u(x, y)$ je harmonická, jestliže*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \equiv 0 \quad \textit{pro} \text{ všechny } x, y \in \mathbb{R}.$$

Spočteme nejdříve tyto parciální derivace. Jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\alpha x^2 y^3 + y^5 + 5x^4 y + 2e^{2x}\cos(\beta y)\right) = 6\alpha x y^3 + 20x^3 y + 4e^{2x}\cos(\beta y)$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3\alpha x^3 y^2 + 5xy^4 + x^5 - \beta e^{2x}\sin(\beta y)\right) = 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x}\cos(\beta y).$$

Hledáme tedy parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$6\alpha xy^3 + 20x^3 y + 4e^{2x}\cos(\beta y) + 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x}\cos(\beta y) \equiv 0$$
$$(6\alpha + 20)xy^3 + (20 + 6\alpha)x^3 y + (4 - \beta^2)e^{2x}\cos(\beta y) \equiv 0$$

pro každé *$x, y \in \mathbb{R}$. Vidíme, že zvolíme-li $\alpha = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$, pak jsou první dva členy konstantě nulové (a jiná možnost zřejmě není). Dále vidíme, že zvolíme-li $\beta = \pm 2$, pak je i třetí člen konstatně nulový. Zde bychom si měli uvědomit, že jiná možnost není. Neexistuje totiž volba parametru β taková, aby $\cos(\beta y) \equiv 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$ (stačí zvolit $y = 0$, potom zřejmě $\cos(\beta \cdot 0) = 1 \neq 0$ pro libovolné $\beta \in \mathbb{R}$).*

Funkce $u(x, y)$ je tedy harmonická právě tehdy, když $\alpha = -\frac{10}{3}$ a $\beta = \pm 2$.