MA 7-21

1. Nalezněte tři reálná čísla, jejichž součet je 9 a součet jejich čtvrtých mocnin je nejmenší možný.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pomocí Greenovy věty a pole $\vec{F} = (0, x)$ vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou s parametrizací $\varphi(t) = (\sin^3 t, \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

4. Mějme pole $\vec{F} = (yz, xz, xy + xz^2)$. Nalezněte, pokud existuje, funkci $g(z)$, aby pole $\vec{G} = (g(z), 0, 0)$ mělo vlastnost, že $\vec{F} + \vec{G}$ je potenciální.

5. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické funkce f, pro kterou platí $f(x) = \pi - x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ a zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

Řešení.

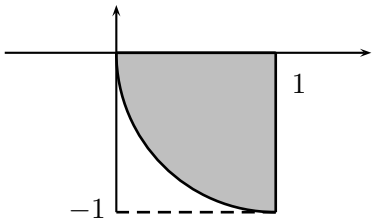
1. Lagrangeova funkce je $L = x^4 + y^4 + z^4 - \lambda(x + y + z - 9)$. Stacionární body získáme jako řešení rovnic

$$4x^3 = \lambda, \quad 4y^3 = \lambda, \quad 4z^3 = \lambda, \quad x + y + z = 9.$$

Soustava má jediné řešení $x = y = z = 3$. Protože hodnota výrazu $x^4 + y^4 + z^4$ je za podmínky $x + y + z = 9$ shora neomezená, je bod $(3, 3, 3)$ minimum.

2. Opačné pořadí je $\int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f \; dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \int_0^{2\cos\varphi} f \varrho \, d\varrho d\varphi \; + \int_{-\pi/4}^0 \int_0^{1/\cos\varphi} f \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



3. Množinu ohraničenou zadanou křivkou si označíme M. Pak pro pole $\vec{F} = (0, x)$ máme

$$S = \iint_M 1 = \iint_M \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}\big(1 - 2\cos 2t + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4t)\big) \, dt = \tfrac{3}{4}\pi.$$

4. Protože $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = (0, g'(z) - z^2, 0)$ je funkce $g(z) = \frac{1}{3}z^3 + C$.

5. $\pi - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ a řada reprezentuje funkci ve všech bodech různých od $(2k+1)\pi$, $k \in Z$.