Cvičení 6 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Nejprve určíme, kolika násobný kořen jmenovatele je* 0. *Jest:*

$$\sin(z^2) - 2 + 2\cos z\Big|_{z=0} = 0 - 2 + 2 = 0$$

$$\big(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z\big)'\Big|_{z=0} = 2z\cos(z^2) - 2\sin z\Big|_{z=0} = 0$$

$$\big(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z\big)''\Big|_{z=0} = \big(2z\cos(z^2) - 2\sin z\big)'\Big|_{z=0} = 2\cos(z^2) - 4z^2\sin(z^2) - 2\cos z\Big|_{z=0}$$
$$= 2 - 2 = 0$$

$$\big(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z\big)'''\Big|_{z=0} = \big(2\cos(z^2) - 4z^2\sin(z^2) - 2\cos z\big)'\Big|_{z=0} = -4z\sin(z^2) - 8z\sin(z^2) - 8z^3\cos(z^2) + 2\sin z\Big|_{z=0}$$
$$= -12z\sin(z^2) - 8z^3\cos(z^2) + 2\sin z\Big|_{z=0} = 0$$

$$\big(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z\big)^{(4)}\Big|_{z=0} = \big(-12z\sin(z^2) - 8z^3\cos(z^2) + 2\sin z\big)'\Big|_{z=0}$$
$$= -12\sin(z^2) - 24z^2\cos(z^2) - 24z^2\cos(z^2) + 16z^4\sin(z^2) + 2\cos z = 2 \neq 0$$

Bod 0 *je tedy* 4*-násobný kořen jmenovatele. Co se týče čitatele, jest:*

$$\sin z - \cos z - e^z + 2\Big|_{z=0} = 0 - 1 - 1 + 2 = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)'\Big|_{z=0} = \cos z + \sin z - e^z\Big|_{z=0} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)''\Big|_{z=0} = (\cos z + \sin z - e^z)'\Big|_{z=0} = -\sin z + \cos z - e^z\Big|_{z=0} = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)'''\Big|_{z=0} = (-\sin z + \cos z - e^z)' = -\cos z - \sin z - e^z\Big|_{z=0} = -1 - 0 - 1 = -2 \neq 0$$

Bod 0 *je tedy* 3*-násobný kořen čitatele.*

Porovnáním násobností kořene v čitateli a jmenovateli dostaneme, že bod 0 *je pól řádu* $4 - 3 = 1$.

Úloha 2. *Nejprve potřebujeme zjistit, co jsou izolované singularity funkce* f. *Jest*

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}iz} &= -i \\ e^{\frac{\pi}{2}iz} &= e^{-\frac{\pi}{2}i} \\ \frac{\pi}{2}iz &= -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \\ z &= -1 + 4k \end{aligned}$$

pro $k \in \mathbb{Z}$. *Všechny izolované singularity jsou tedy body* $z = -1 + 4k$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$. *Máme*

$$e^{\frac{\pi}{2}iz} + i\Big|_{z=-1+4k} = 0$$

$$(e^{\frac{\pi}{2}iz} + i)'\Big|_{z=-1+4k} = \frac{\pi}{2}ie^{\frac{\pi}{2}iz}\Big|_{z=-1+4k} = \frac{\pi}{2}i(-i) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Body $z = -1 + 4k$ *jsou* 1*-násobné kořeny* $e^{\frac{\pi}{2}iz} + i$, *a tedy* $4 \cdot 1 = 4$*-násobné kořeny* $(e^{\frac{\pi}{2}iz} + i)^4$.

Vidíme, že bod $z = -5$, *což odpovídá* $k = -1$, *je jednonásobný kořen* $(z + 5)$. *Dále*

$$\sin(2\pi z)\Big|_{z=-1+4k} = \sin(-2\pi + 8k\pi) = 0$$

$$\big(\sin(2\pi z)\big)'\Big|_{z=-1+4k} = 2\pi\cos(2\pi z)\Big|_{z=-1+4k} = 2\pi\cos(-2\pi + 8k\pi) = 2\pi \neq 0,$$

takže jsou to 1*-násobné kořeny* $\sin(2\pi z)$, *a tedy* $3 \cdot 1 = 3$*-násobné kořeny* $\sin^3(2\pi z)$. *Co se týče čitatele, zjistili jsme tedy, že bod* -5 *je* $1+3 = 4$*-násobný kořen čitatele a body* $-1+4k$ *pro* $k \neq -1$ *jsou* 3*-násobné kořeny čitatele.*

Celkem tedy: bod -5 *je* 4*-násobný kořen čitatele i jmenovatele, a je to tedy odstranitelná singularita; body* $-1 + 4k$ *pro* $k \neq -1$ *jsou* 3 *násobné kořeny čitatele a* 4*-násobné kořeny jmenovatele, takže jsou to póly řádu* $4 - 3 = 1$.

Úloha 3. *Máme*

$$\frac{\alpha}{(z+i)^k}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2(z+i)^{2n-7}=\frac{\alpha}{(z+i)^k}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\frac{9}{(z+i)^3}+\frac{16}{z+i}+\cdots,$$

kde $+\cdots$ *již obsahuje pouze nezáporné mocniny* $(z+i)$*. Zvolíme-li tedy* $k=1$*, jest*

$$\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{\alpha}{z+i}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2(z+i)^{2n-7}\right)=\alpha-2+16=\alpha+14.$$

Potřebujeme tedy zvolit

$$\begin{aligned}\alpha+14&=3\\ \alpha&=-11.\end{aligned}$$