به نام خدا

سوال ۲)

a)

نشان می‌دهیم به صورت کلی برای کره d بعدی، $d+1$ است.

برهان: فرض کنید که دسته S را با $d+2$ نقطه قابل شکسته کردن باشد؛ داشتیم ۲ دسته A, B باید وجود داشته باشد و متمم نظیر آن

خلف

۲ کره S_1، S_2 به طوری که: $A = S_1 \cap S$ و $B = S_2 \cap S$.

حال ممکن است که S_1 و S_2 همدیگر را قطع کنند اما هیچ نقطه‌ای در این تقاطع وجود ندارد.

حال به راحتی می‌توان دید که یک ابرصفحه می‌تواند A و B را به راحتی از همدیگر جدا کند ⇐ ✗

برای اثبات اینکه $d+1$ را می‌توان شکسته کرد

فرض کنید که A یک زیرمجموعه از این $d+1$ نقطه باشد، مرکز کره را جمع بردارهای این مجموعه قرار می‌دهیم.

برای هر بردار دلخواه در درون A، فاصله تا مرکز برابر با $\sqrt{|A|-1}$ و در خارج برابر با $\sqrt{|A|+1}$ است.

در نتیجه جداپذیر است. ✓

به نام خدا

سوال ۲)

b)

برای اثبات حجم مکعب n بعدی، از فرض مکعب ۱-n بعدی داریم که در راستای بعد n ام از آن انتگرال می‌گیریم

$$V_{(n)} = \int V_{(n-1)}\, dx_n = V_{(n-1)} \times 2 \Rightarrow \text{بازگشتی}: V_n = 2^n \checkmark$$

حال برای اینکه کره را مماس کنیم ۲ حالت خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{\sum_j^d x_j^2} \pm 1 = \sqrt{d} \pm 1 \quad \begin{cases} \sqrt{d} + 1 & \text{مماس بیرونی} \\ \sqrt{d} - 1 & \text{مماس داخلی} \end{cases}$$

چون عملا مرکز کره (۰،۰،...،۰) است. در تمامی راستاها کره مماس بیرونی همواره از مکعب بیرون است. اما کره مماس داخلی بستگی به این دارد که $\sqrt{d} - 1 \le 1 \Rightarrow d \le 4$. تنها در این صورت است که داخل مکعب قرار دارد، و گرنه از مکعب بیرون می‌زند.

$$\frac{V_{\text{مماس داخلی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\pi^{n/2} \cdot \frac{(\sqrt{d}-1)^n}{(n/2)!}}{2^n} = \left(\frac{\sqrt{\pi}(\sqrt{d}-1)}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n/2)!} \overset{n=2k}{=} \left(\left(\frac{\sqrt{\pi}\,(\sqrt{d}-1)}{2}\right)^2\right)^k \cdot \frac{1}{(k!)}$$

$$= \left(\frac{\pi(\sqrt{d}-1)^2}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \left(\frac{\pi}{2}(d+1-2\sqrt{d})\right)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\log\left(\frac{V_{\text{مم}}}{V_{\text{مک}}}\right) = K \log\left(\frac{\pi}{2}(d+1-2\sqrt{d})\right) - (K+1)\log(K+1) + K$$

$$\overset{d=2k=n}{=} K \log\left(\frac{\pi}{2}(2K+1-2\sqrt{2K})\right) - (K+1)\log(K+1) + K$$

$$= K\left(\log(\pi K + \pi/2 - \pi\sqrt{2K}) + 1\right) - (K+1)\log(K+1)$$

$$= K \times C\left(\log(K + 1/2 - \sqrt{2K}) + 1\right) - (K+1)\log(K+1)$$

اگر $\log(1+x) \simeq x$ (منطقی نیست چون $k \gg 0$)

$\simeq$

$$ck\left(\log\left(\left(k-\sqrt{2k}+1\right)-\tfrac{1}{4}\right)+1\right)-(k+1)\log(k+1)$$

$$\simeq ck\left(\left(k-\sqrt{2k}-\tfrac{1}{4}\right)+1\right)-(k+1)k$$

$$\simeq ck\left(k-\sqrt{2k}+\tfrac{1}{4}\right)-k(k+1)$$

$$=k\left(ck-c\sqrt{2k}+\tfrac{c}{4}-k-1\right)=k\left(c(k-1)-c\sqrt{2k}+\left(\tfrac{c}{4}-1\right)\right)$$

چه در این تقریب بیاید اشتباه و چه در تقریب دقیق مشتق ... با افزایش k به جمع که سایز داخلی بزرگ و بزرگتر می‌شود
برای سایز خارجی نیز عیناً همین معادله می‌شود ولی با ضریب‌های $(-\sqrt{2k})$.