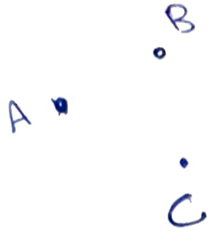
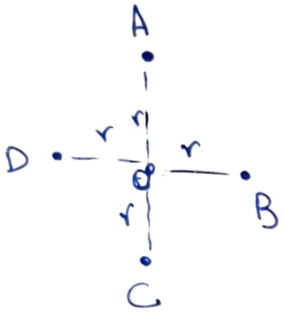
سوال ۱

a) $VC(\text{circle}) = 3$



۳ نقطه را در نظر می‌گیریم: می‌توانیم در حالت‌ها به وسیله دایره‌ای طراحی کنیم که A, B را در شود

ولی از ۴ نقطه به شکلی نمی‌توان این ۴ را از یکدیگر جدا کرد



حال حالت زیر را در نظر بگیرید فرض کنید که

$A, C \in C_1$

$B, D \in C_2$

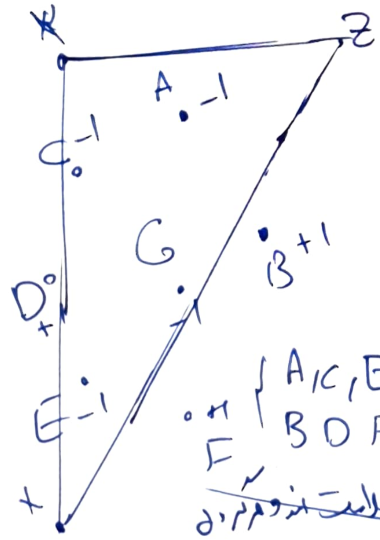
در این حالت باید A, C در یک طرف دایره باشند و D و B در طرف دیگر

اما این کار غیرممکن است چرا که

$O'A < r'$

$O'C < r' \Rightarrow O'B$ یا $O'D < r' \Rightarrow$ ✗

b) ۷ نقطه را در نظر بگیرید



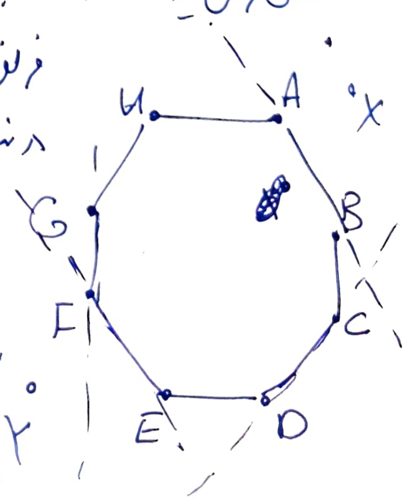
$X\hat{Y}Z \Rightarrow$ shatters ✓

$\left\{ \begin{array}{l} A, C, E, G \in C_1 \\ B, D, F, H \in C_2 \end{array} \right\}$ ✓

حال فرض کنید نقاط ما به شکل مقابل به صورت ۸ ضلعی چیده شده‌اند.

~~فرض کنید که X داخل ۸ ضلعی ما باشد ABC نیز هم علامت است و در~~

~~درنتیجه X و Z باید خارج از آن ضلعی باشند حال چون~~



فرض کنید که X در بیرون AB قرار داشته باشد حال برای پوشش G و E، Y و X هم

در داخل ۸ ضلعی باشد چون باید پشت GF و FE باشد حال دیگر هم نمی‌تواند Z

نمی‌تواند باشد در هر نقطه و منطقه‌ای باشد حداقل یکی از راس‌های نقاط دیگر را

۲ شامل می‌شود.

سوال ۲

متغیر رادماخر تایی $\varepsilon \begin{cases} 1 & P=0.5 \\ -1 & P=0.5 \end{cases}$, $P\left(\sum x_i > t\sqrt{\sum x_i^2}\right)$

را در نظر بگیر

$$= P\left(\frac{\sum x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}} > t\right)$$

چرنوف : $P\left(\frac{\sum x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}} > t\right) \leq e^{-\lambda t} E\left(\exp\left(\lambda \frac{\sum x_i}{\|x_i\|_2}\right)\right)$

راستا :

$$\to e^{-\lambda t} \underset{x\varepsilon}{E}\left(\exp\left(\lambda \frac{\sum x_i}{\|x_i\|_2}\right)\right) = e^{-\lambda t} E_x E_\varepsilon \left(\exp\left(\lambda \frac{\sum x_i}{\|x_i\|_2}\right)\right)$$

$$= e^{-\lambda t} E_x\left(\prod E_\varepsilon \left(\exp\left(\lambda \frac{\sum x_i}{\|x_i\|_2}\right)\right)\right)$$

$$= e^{-\lambda t} E_x\left(\prod\left(\tfrac{1}{2}\exp\left(\frac{\lambda \sum x_i}{\|x_i\|_2}\right) + \tfrac{1}{2}\exp\left(\frac{-\lambda \sum x_i}{\|x_i\|_2}\right)\right)\right)$$

$$\leq e^{-\lambda t} E_x\left(\prod \exp\left(\frac{\lambda^2 x_i^2}{2\|x_i\|_2}\right)\right) = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda^2/2} \leq e^{(-\lambda t + \lambda^2/2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{e^{(-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2})}\right\} = 0 \quad -t + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{t = \lambda}$$

$$e^{-\lambda t + \lambda^2/2} = e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow c = \tfrac{1}{2}$$

سوال ۳

a)

$1 < p \leq q \leq \infty$

$N_p(F, \alpha, x^n) \leq N_q(F, \alpha, x^n)$

$$\left(\frac{1}{n}\sum |f(x_t) - x_t|^p\right)^{1/p} = \left(\left(\frac{1}{n}\sum |f(x_t) - x_t|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\frac{1}{n}\sum |f(x_t) - x_t|^{p \cdot q/p}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum |f(x_t) - x_t|^q\right)^{1/q} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow N_p(F, \alpha, x^n) \leq |V| \leq N_q(F, \alpha, x^n) \checkmark$$

b) $\sigma_i \sim Rad(1/2)$

$$\hat{R}(F) = E_\sigma\left(\sup\left\{\frac{1}{x}\sum \sigma_i f(x_i)\right\}\right)$$

$$= E\left(\sup\left\{\frac{1}{x}\sum \sigma_i (f(x_i) - \eta_i(f)) + \frac{1}{x}\sum \sigma_i \eta_i(f)\right\}\right)$$

$$\leq E_\sigma\left(\sup\left(\frac{1}{n}\sum \sigma_i (f(x_i) - g(f))\right)\right) + E_\sigma\left(\sup\left(\frac{1}{n}\sum G(f)\sigma_i\right)\right)$$

سوال ۴

$$H = \cup H_i \Rightarrow |H \cap \{x_1, \dots, x_n\}| \leq \sum |H_i \cap \{x_1, \dots x_n\}|$$

$$\leq \sum \left(\frac{en}{VC(H_i)}\right)^{VC(H_i)} \leq ۲\left(\frac{en}{d}\right)^d$$

$$VC(H) = n \Rightarrow |H \cap \{x_1, \dots, x_n\}| = ۲^n$$

$$\Rightarrow ۲^n \leq ۲\left(\frac{en}{d}\right)^d$$

$$n = ۴d \log(۲d) + ۴\log(۲)$$

$$\Rightarrow (۲d)^{۴d} \times ۲^۴ \leq ۲\left(e\log(۲d) + \frac{۲e\log(۲)}{d}\right)^d$$

$$\Rightarrow \quad ۲ \leq \left(۲e\frac{\log ۲d}{(۲d)^۴} + \frac{۲e\log ۲}{d(۲d)^۴}\right)^d$$

$$VC(H_1 \cup H_2) \geq ۲d+۱ \Rightarrow |H \cap \{x_1, \dots, x_n\}| \leq \sum |H_i \cap \{x_1, \dots, x_n\}|$$

$$\leq ۲\sum \binom{۲d+۲}{i}$$

$$= ۲^{۲d+۲} - \binom{۲d+۲}{d+۱}$$

$$< ۲^{۲d+۲}$$

$$VC(H_1 \cup H_2) \leq ۲d + ۲ - ۱ = ۲d+۱ \checkmark$$

سوال ۵

(a

فرض کنید f_0 برای همه جا صفر است ← هر تابع خطی را از عبارت پایه است.

حال فرض کنید H تابع خطی شامل f_0, f_1 باشد که روی x_i ها مقادیر ۱ و ۰ می‌گیرند دسته‌ای که تمامی باشد که روی B صفر و خارج آن ۱ باشد.

پس برای هر x_i انتخاب این است که چون B با شکستن ... به ازای هر x_i مقدار آنی را می‌دهد که در $x_1, \dots, x_k$ که باشد روی شکسته

$$\boxed{\dim_{VC} = \dim N} \leftarrow n_{max} > VC$$

(b

تعداد اعضای خطی که شکسته شدند:

$$|H| \le \sum_{i}^{n d_i} \binom{|X|}{i} k^i \le k^{n\dim(H)} |X|^{n\dim(H)}$$

$\underline{\underline{V.1}}$

(a

$B\{\|x\|<1\} \to g(B)=\sqrt{\log n}\,,\ r(B)=1$

$r(B)=E\sup\langle\varepsilon,t\rangle \leq E\sup\|x\| = E(1)=1$

$g(B)=E\sup\langle g,t\rangle = E(\max|g_i|)\sim\sqrt{\log n}$

(b

$T_0 \subset T_1+T_2 : g(T_1)\leq a_0 \to r(T)\leq a$

$\sup_{t\in T_2}\|t\| \leq a$

$\underset{\varepsilon}{E}\ \sup_{t\in T}\langle\varepsilon,t\rangle = E(\sup(\langle\varepsilon,t_1\rangle+\langle\varepsilon,t_2\rangle))$

$\leq E(\sup\langle\varepsilon,t_1\rangle)+E(\sup\langle\varepsilon,t_2\rangle)$

$\leq r(T_1)+\sup_{t\in T_2}\|t\| \leq a+a = 2a$ ✓

(c

$|a_1|,\dots,|a_n|\leq 1\ ,\ E(\sup\sum\varepsilon_k t_k a_k) \underset{\text{convexity}}{\leq} E(\sup\sum\varepsilon_k t_k$

(d

$a_i = \frac{g_i}{\varepsilon_i} \to \max|a_i| \leq \max|g_i| \leq \sqrt{\log n}$

شرطی $\to E(\sup(\sum g_i t_i)) \leq \sqrt{\log n}\ E\sup\sum\varepsilon_i t_i$

$\Rightarrow g(T)\leq\sqrt{\log n}\ r(T)$

(e

$$E(\sup \sum g_k f(x_k)) = E(\sup \sum g_k \varepsilon_k f(x_k))$$

$$\leq E(\sup |\varepsilon_k f(x_k)| |g_k|)$$

$$= \int_0^\infty E(\sup \sum \varepsilon_k 1_{|g_k| \geq x}) \, dx$$

$$\leq \int_0^\infty E_\varepsilon (\sup E g_k \sum \varepsilon_k f(x_k))$$

$$\leq \int_0^\infty E_\varepsilon (\sup \sum \varepsilon_k f(x_k)) \checkmark$$

$$\leq n P(|g_k| \geq x)$$ cf

$$\leq \int f(n P(|g_1| \geq x)) \, dx$$

$$cn^\alpha = \int_0^\infty cn^\alpha \phi(|g_1| \geq x) \, dx$$

$$= C \cdot \phi(n) \checkmark$$