سوال ۴

(a

$$|\hat{\mu}(u) - \mu(u)| = \left|\left(\frac{1}{n}\sum X_i^T - E(X^T)\right)u\right|$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{LNR: } O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$

همچنین برای $\hat{R}$:

$$|\hat{R}(u) - R(u)| = u^T \left| \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \hat{X})(X_i - \hat{X})^T - \Sigma \right| u$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{LNR: } O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$

$$E(\hat{\Sigma}) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum E(X_i X_i^T) - E(X_i)\hat{X}_i^T + E(X_i)^T + E(\hat{X}\hat{X}^T)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum \Sigma - \frac{2}{n}\Sigma + \frac{1}{n^2}\Sigma = \Sigma \checkmark$$

(b

برای ست تعداد ثابت n $\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_2 \approx \sqrt{\frac{\log d}{n}}$

در تعریف $\hat{D}$ داریم برای $\hat{D} = \text{diag}(\hat{\Sigma})$ داریم:

$$P\left(\|\hat{D} - D\|_2 / \sigma^2 \geq C_0 \sqrt{\frac{\log d}{n}} + \delta\right) \geq C_1 e^{-C_2 n \min\{\delta, \delta^2\}}$$

[illegible]: $\Sigma = DRD$

$$R \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{\text{cov}(i,j)}{D_{(i,i)} D_{(j,j)}} & i \neq j \end{cases}$$

$\longrightarrow$ tail bound و $P(\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_2 > \delta) \leq 2d \exp\left(\frac{-n\delta^2}{2b(\|\Sigma\|_2 + \delta)}\right)$

با پیدا کردن δ مناسب برای تعیین n هست.