دانشکده‌ی مهندسی برق

آنالیز احتمالاتی در ابعاد بالا	بهار ۱۴۰۲
تمرین سری سوم	
مدرس: دکتر محمد حسین یاسائی	موعد تحویل: ۲۲ اردیبهشت

۱ نسخه‌ی با احتمال بالای کران دودلی

فرض کنید $(X_t)_{t\in T}$ یک فرآیند تصادفی روی فضای متریک (T,d) باشد. مشابه با کران دودلی، فرض کنید $X_t - X_s$ فرآیندی زیرگوسی با پارامتر $d(s,t)$ است. نشان دهید که برای هر $u \geq 0$، نامساوی

$$\sup_{s,t\in T} |X_t - X_s| \leq CK\Big[\int_0^\infty \sqrt{\log \mathcal{N}(T,d,\epsilon)}d\epsilon + u\,\mathrm{diam}(T)\Big] \tag{۱}$$

با احتمال حداقل $1-2\exp(-u^2)$ برقرار است.

۲ نسخه‌ی لوکال کران دودلی

فرض کنید $\{X_t\}_{t\in T}$ یک فرآیند زیرگوسی روی فضای متریک (T,d) باشد. نشان دهید که برای هر $x,\delta \geq 0$ داریم

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{s,t\in T, d(t,s)\leq\delta} \{X_t - X_s\} \geq C\int_0^\delta \sqrt{\log \mathcal{N}(T,d,\epsilon)}\epsilon + x\Big] \leq Ce^{-\frac{x^2}{C\delta^2}}.$$

۳ چینینگ فرآیندهای با دم دلخواه

روش Chaining تنها به فرآیندهای زیرگوسی محدود نمی‌شود. فرض نمایید که $\{X_t\}_{t\in T}$ فرآیندی تصادفی با میانگین صفر بوده و برای هر $s,t\in T$ و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم

$$\log \mathbb{E}\Big[e^{\frac{\lambda\{X_t - X_s\}}{d(t,s)}}\Big] \leq \psi(\lambda).$$

که در آن ψ تابعی محدب است و $\psi(0)=\psi'(0)=0$. نشان دهید

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in T} X_t\Big] \leq C\int_0^\infty {\psi^*}^{-1}\Big(2\log\big(\mathcal{N}(T,d,\epsilon)\big)\Big)$$

که در آن $\psi^*(x) = \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \psi(\lambda)\}$ است.

۴ نابهینه بودن کران دودلی

(امتیازی) در این تمرین قصد داریم نشان دهیم که نامساوی دودلی در یک مسئله‌ی خاص، tight نیست. فرض کنید $e_1, e_2, \ldots, e_n$ پایه‌ی استاندارد (کانونی) فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعه‌ی T را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \Big\{ \frac{e_k}{\sqrt{1+\log(k)}},\ k=1,\dots,n \Big\}$$

نشان دهید:

- نامساوی زیر برای عرض گوسی مجموعه‌ی T محدود است.
- نشان دهید انتگرال دودلی واگراست، یعنی

$$\int_0^\infty \sqrt{\log(\mathcal{N}(T,d,\epsilon))}d\epsilon \to \infty.$$

۵ اصلاح کران دودلی برای فرآیندهای لیپشیتز

فرض کنید $\{X_t\}_{t\in T}$ یک فرآیند تصادفی لیپشیتر و زیرگوسی باشد، یعنی

$$\forall s,t\in T \quad \mathbb{E}[\exp(\lambda(X_t - X_s))] \le \exp\Big(\frac{\lambda^2 d^2(s,t)}{2}\Big)$$

و با احتمال یک

$$\forall s,t\in T \quad |X_t - X_s| \le Cd(s,t).$$

- نشان دهید

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t\in T} X_t\big] \le \inf_{\delta>0} \Big\{2\delta C + 32\int_\delta^\infty \sqrt{\log(\mathcal{N}(T,d,\epsilon))}d\epsilon\Big\}.$$

رهنمایی: با توجه به زیرگوسی بودن، فرآیند چینینگ را انجام دهید و از خاصیت لیپشیتز بودن فرآیند تصادفی برای کران‌زدن یکی از جملات استفاده کنید.

۶ فاصله‌ی واسراشتاین

متغیرهای تصادفی $X_1,\dots,X_n$ به صورت iid که با توزیع P از مربع $[0,1]^2$ انتخاب می‌شوند. توزیع تجربی متناظر نقاط را با P_n نشان می‌دهیم. فاصله‌ی واسراشتاین این دو توزیع به این صورت تعریف می‌شود:

$$W_1(P_n,P) = \sup_{f:1-Lipschitz} \mathbb{E}_{P_n}[f] - \mathbb{E}[f]$$

برای سادگی، فرض کنید لیپشیتز بودن نسبت به نرم ∞ سنجیده می‌شود، یعنی f تابعی ۱-لیپشیتز است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y داشته باشیم

$$|f(x)-f(y)| \le ||x-y||_\infty.$$

قرار دهید $\mathcal{F}_0 = \{f : 1-Lip, f(0)=0\}$.

- نشان دهید

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}_0, ||.||_\infty, \epsilon) \le \exp\big(\frac{c}{\epsilon^2}\big).$$

- نشان دهید که انتگرال دودلی در این مسئله واگراست و کرانی روی فاصله‌ی واسراشتاین نمی‌دهد.
- با استفاده از تمرین قبل، نشان دهید

$$\mathbb{E}[W_1(P_n,P)] \le n^{-1/2}\log(n).$$

۷ عرض گاوسی

عرض گاوسی را برای یک مجموعه‌ی $T \subset \mathbb{R}^n$ به شکل

$$w(T) = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in T}\langle g, t\rangle\right]$$

تعریف می‌شود که در آن $g \sim \mathcal{N}\left(0, I_{n\times n}\right)$.

- نشان دهید

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \operatorname{diam}(T) \le w(T) \le \frac{\sqrt{n}}{2}\cdot \operatorname{diam}(T)$$

که $\operatorname{diam}(T) = \sup\left\{\|x-y\|_2 : x, y \in T\right\}$

- نشان دهید برای هر ماتریس مانند A داریم

$$w(AT) \le \|A\|_{op} w(T)$$

- نشان دهید برای هر $1 \le p \le \inf$ داریم

$$w\left(B_p^n\right) \le C\min\left\{\sqrt{p'}n^{1/p'}, \sqrt{\log n}\right\}, B_p^n = \left\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p \le 1\right\}$$

که $1/p + 1/\prime p = 1$

۸ کوچکترین مقدار تکین

سوال ۲.۶ از کتاب ون هندل در مورد کوچکترین مقدار تکین را حل کنید.

۹ نرم ماتریس تصادفی

فرض کنید M یک ماتریس $m\times$ باشد که هر کدام از درایه‌های آن متغیر تصادفی نرمال استاندارد مستقلی باشد. قبل‌تر با کمک استدلال پوششی دیدیم که ضریب ثابتی مثل C وجود دارد که $\mathbf{E}\|M\| \le C\sqrt{n+m}$. این نتیجه زمانی که درایه‌ها زیرگاوسی باشند نیز درست است. در این تمرین می‌خواهیم در مورد حالتی که درایه‌ها گاوسی هستند دید بهتری به دست آوریم.

- استفاده از استدلال پوششی به کران بالایی می‌رسد که مشخص نیست چفت است یا خیر. از قضیه‌ی سوداکو استفاده کنید و نشان دهید که در حالت گاوسی کران پایین مشابهی وجود دارد. در واقع نشان دهید. C هست که $\mathbf{E}\|M\| \ge C\sqrt{n+m}$.
- به طور معمول استفاده از استدلال‌های پوششی و یا چینینگ به کران‌های چفت، با فاصله‌ی ضریب ثابت، منجر می‌شود. اما اگر در مورد ضریب ثابت اهمیت بدهیم، می‌توان از تکنیک‌های دیگر استفاده کرد. با استفاده از لم اسلپین نشان دهید

$$\mathbf{E}\|M\| \le \sqrt{n} + \sqrt{m}$$

در واقع این نتیجه زمانی که ابعاد ماتریس با هم متناسب باشند و به بی‌نهایت بروند به طور مجانبی بهینه است. به طور دقیق‌تر، بگیرید $Z \sim N\left(0, I_n\right)$ و $Z \sim N\left(0, I_m\right)$ دو بردار گاوسی استاندارد و مستقل باشند و برای هر $(v, w) \in S^{n-1}\times S^{m-1}$ تعریف کنید

$$X_{v,w} = \langle v, Mw\rangle, Y_{v,w} = \langle v, Z\rangle + \langle w, Z'\rangle$$

و نشان دهید

$$\forall v, v, w, w : \mathbf{E}\left|Y_{v,w} - Y_{v',w'}\right|^2 \ge \mathbf{E}\left|X_{v,w} - X_{v',w'}\right|^2$$

و سپس با کمک لم اسلپین نتیجه بگیرید که

$$\mathbf{E}\|M\| \le \sqrt{n} + \sqrt{m}$$