دانشکده‌ی مهندسی برق

آنالیز احتمالاتی در ابعاد بالا | بهار ۱۴۰۲

تمرین سری پنجم

مدرس: دکتر محمد حسین یاسائی | موعد تحویل: ۲ تیر

۱ پارامتر ماتریس‌های زیرگوسی

ماتریس تصادفی $Q = gB$ را در نظر بگیرید که $g \in \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی زیرگوسی با پارامتر σ می‌باشد.

الف. فرض کنید g یک توزیع متقارن حول صفر دارد و $B \in \mathbb{S}^{d\times d}$ یک ماتریس غیرتصادفی است. نشان دهید Q یک ماتریس زیرگوسی با پارامتر $V = c^2\sigma^2 B^2$ است که c یک ثابت دلخواه است.

ب. فرض کنید g یک توزیع متقارن حول صفر دارد و $B \in \mathbb{S}^{d\times d}$ یک ماتریس تصادفی و مستقل از g است که $\|B\|_2 \le b$. نشان دهید Q یک ماتریس زیرگوسی با پارامتر $V = c^2\sigma^2 b^2 I_d$ است که c یک ثابت دلخواه است.

۲ کران روی میانگین نرم

دنباله ماتریس‌های تصادفی متقارن dـبعدی با میانگین صفر $\{Q_i\}_{i=1}^n$ را درنظر بگیرید که ماتریس Q_i با پارامتر V_i زیرگوسی است.

الف. ثابت کنید:

$$\mathbb{E}\left[\lambda_{\max}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)\right] \le \sqrt{\frac{2\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i\|_2 \log d}{n}}$$

ب. ثابت کنید:

$$\mathbb{E}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right\|_2 \le \sqrt{\frac{2\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i\|_2 \log 2d}{n}}$$

۳ کران برن‌اشتاین روی ماتریس‌ها با نرم بی‌کران

دنباله ماتریس‌های تصادفی $d_1 \times d_2$ـبعدی $\{A_i\}_{i=1}^n$ را درنظر بگیرید که ماتریس $A_i = g_i B_i$ به طوری که $g_i \in \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی با میانگین صفر است و B_i یک ماتریس تصادفی مستقل است. فرض کنید $\mathbb{E}[g_i^j] \le \frac{j!}{2} b_1^{j-2}\sigma^2$ برای $j = 2, 3, \ldots$ و $\|B_i\|_2 \le b_2$ است. نشان دهید برای هر $\delta > 0$ داریم:

$$\mathbb{P}\left[\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i\right\|_2 \ge \delta\right] \le (d_1 + d_2)\exp\left(-\frac{n\delta^2}{2(\sigma^2 b_2^2 + b_1 b_2 \delta)}\right)$$

۴ تخمین ماتریس کواریانس قطری

دنباله بردارهای dـبعدی $\{x_i\}_{i=1}^n$ را درنظر بگیرید که به صورت i.i.d. از یک توزیع با میانگین صفر و ماتریس کواریانس قطری D تولید شده‌اند. فرض کنید تخمینی که برای ماتریس کواریانس می‌سازیم به صورت $\widehat{D} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i x_i^T\right)$.

الف. اگر هر کدام از بردارهای x_i زیرگوسی با پارامتر σ باشند. برای هر $\delta > 0$ نشان دهید:

$$\mathbb{P}\left[\frac{\|\widehat{D}-D\|_2}{\sigma^2} \geq c_0\sqrt{\frac{\log d}{n}} + \delta\right] \leq c_1 e^{-c_2 n \min\{\delta,\delta^2\}}$$

ب. حال به جای فرض زیرگوسی بودن x_iـها، فرض کنید برای یک $m \geq 2$ که زوج است و برای هر $i = 1,2,\ldots,n$ و $j = 1,2,\ldots,d$ ثابت c_4 وجود دارد که داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left(x_{ij}^2 - D_{jj}\right)^m\right] \leq c_4$$

نشان دهید برای هر $\delta > 0$ داریم:

$$\mathbb{P}\left[\|\widehat{D}-D\|_2 \geq 4\delta\sqrt{\frac{d^{\frac{2}{m}}}{n}}\right] \leq c_5\left(\frac{1}{2\delta}\right)^m$$

راهنمایی: برای متغیرهای تصادفی مستقل و با میانگین صفر Z_i که $\|Z_i\|_m < +\infty$ ثابت k وجود دارد به طوری که:

$$\left\|\sum_{i=1}^n Z_i\right\|_m \leq k\left\{\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[Z_i^2\right]\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|Z_i|^m\right]\right)^{1/m}\right\}$$

نیازی به اثبات قضیه‌ی گفته شده در راهنمایی نیست.

۵ تخمین ماتریس به کمک نمونه‌برداری تصادفی

ماتریس مربعی و dـبعدی B به فرم $B = \sum_{i=1}^N B_i$ است را در نظر بگیرید. هدف در این سوال تخمین ماتریس B است در حالتی که به طور مستقیم به B_iـها دسترسی نداریم و فقط می‌توانیم از آن‌ها به طور تصادفی نمونه انتخاب کنیم. به این منظور توزیع گسسته‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad \text{and} \quad p_i > 0 \quad \text{for} \;\; i = 1,\ldots,N$$

متغیر تصادفی R را به این صورت تعریف می‌کنیم که با احتمال p_i مقدار آن برابر با $p_i^{-1}B_i$ باشد. حال برای تخمین ماتریس B از تخمین‌گر $\bar{R}_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m R_k$ استفاده می‌کنیم که R_k یک سمپل از توزیع R می‌باشد و در واقع میانگین m سمپل مستقل از توزیع R را $\bar{R}_m$ نامیده‌ایم. به کمک نامساوی برن‌اشتاین ماتریسی کران بالایی برای $\mathbb{P}[\|\bar{R}_m - B\|_2 \geq \delta]$ برحسب p_iـها و B_iـها و بقیه پارامترهای مسئله بدست آورید.