

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_{i-j} \Rightarrow \hat{x}_{ij} = 1 \\ x_i \neq j \Rightarrow \hat{x}_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$ML = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k (p_j)^{\hat{x}_{ij}}$$

الف

الف

$$\rightarrow \log ML = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \hat{x}_{ij} \log(p_j)$$

$$\rightarrow \text{مشتق جزئی} : \frac{\partial \log ML}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\sum_{i=1}^n p_i = 1 \right) \lambda \Rightarrow p_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^k p_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{ik}}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^k \hat{x}_{ik} \Rightarrow p_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^k \hat{x}_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^k \hat{x}_{ik}}$$

ب

$$E(TV(\hat{p}^{MLE}, p)) \stackrel{MLE}{=} \sum E|\hat{p}_i - p_i|$$

$L_1 < L_2 = \text{var(per)}$

$$n p_i \pm \sqrt{n p_i (1-p_i)} \Rightarrow \sum E|\hat{p}_i - p_i| \leq \frac{1}{n} \sum \sqrt{n p_i (1-p_i)} \stackrel{(p_i \leq 1)}{\leq} \frac{\sqrt{n}}{n} \sum \sqrt{p_i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \sqrt{p_i} \Rightarrow \left(\sum \sqrt{p_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^k 1^2 \sum_{i=1}^k p_i \leq k \times 1 = k$$

$$\Rightarrow \sum \sqrt{p_i} \leq \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow E(TV(\hat{p}^{MLE}, p)) \leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{k}{n}}$$

از طرفی $TV \leq 1$ همیشه است. \Rightarrow همواره $\sqrt{\frac{k}{n}} \leq 1$

ب با ماوردی با ماوردی

$$P(\hat{p} \neq p)?$$

ت) در هر دو حالت از یک سطح معنی داری نمی توانیم استفاده کنیم زیرا در هر دو حالت سطح معنی داری متفاوت است.