به نام خدا

رادمهر کرمانیان ۹۸۱۰۵۲۵۸۱

(۲)

الف /

$$V(P_X \| Q_X) = \sup_f E_P(f) - rE_Q(f) - s\log E_Q(\exp(\alpha f)) - t\log E_Q(\exp(\beta f))$$

الف / $f(x) = c$ ،

$$V(P_X \| Q_X) = \sup_f E_P(f) - rE_Q(f) - s\log E_Q(\exp(\alpha f)) - t\log E_Q(\exp(\beta f))$$

$$= \sup_c c - r \times c - s\log e^{\alpha c} - t\log e^{\beta c}$$

$$= \sup_c c - rc - s\alpha c - t\beta c = \sup_c c(1 - r - s\alpha - \beta t)$$

اگر $r+\alpha s+\beta t=1$ باشد در صورت، اگر $L=1-r-\alpha s-\beta t$ باشد و $L\neq 0$ آنگاه طبق تحلیل اسلایدها به ازای یا M

قطعا c ای وجود دارد که آن را باطل.

$$\sup_f \geq \sup_c \geq \sup_{c=0} \Rightarrow \sup_f (E_P(f) - rE_Q(f) - s\log E_Q(\exp(\alpha f)) - t\log E_Q(\exp(\beta f))$$

$$\geq \sup_c c(1-r-\alpha s-\beta t) \geq 0 \times (1-r-\alpha s-\beta t) = 0 \Rightarrow V \geq 0$$

ب /

$$\sup_f E_P(f) - rE_Q(f) - s\log E_Q(\exp(\alpha f)) - t\log E_Q(\exp(\beta f))$$

$$\leq \sup E_P(f) - rE_Q(f) - sE_Q(\log(\exp(\alpha f))) - tE_Q(\log(\exp(\beta f)))$$

$$= \sup_f E_P(f) - rE_Q(f) - sE_Q(\alpha f) - tE_Q(\beta f) = \sup_f E_P(f) - (r+\alpha s+\beta t)E_Q(f)$$

$$Q=P, \quad \sup_f (1-\underbrace{(r+\alpha s+\beta t)}_{0})E_P(f) = \sup_f 0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} V \geq 0 \quad \text{پیش‌تر} \\ V \leq 0 \quad \text{پس} \end{array} \right. \rightarrow V(P_X \| P_X) = 0 \checkmark$$

برای اثبات عکس کافیست در حالتی که ۲ توزیع‌ها فرق دارند، مقداردهی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -C & Q > P \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Q > P : S_1 \\ Q = P : S_2 \\ Q < P : S_3 \end{array}$$

$$\rightarrow V(P \| Q) \geq -C\,P(S_1) + rC\,Q(S_1) - s\log\left(Q(S_1)e^{-\alpha C} + (1-Q(S_1))e^{\alpha \times 0}\right)$$

$$- t\log\left(Q(S_1)e^{-\beta C} + (1-Q(S_1))e^{\beta \times 0}\right)$$

$$\geq -C\,P(S_1) + rC\,Q(S_1) - sQ(S_1)\left(e^{-\alpha C} - 1\right) - tQ(S_1)\left(e^{-\beta C} - 1\right)$$

$$= C\left(rQ(S_1) - P(S_1)\right) - \left(sQ(S_1)e^{-\alpha C} + tQ(S_1)e^{-\beta C}\right)$$

$$+ sQ(S_1) + tQ(S_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial C} := rQ(S_1) - P(S_1) + \alpha s Q(S_1) e^{-\alpha C} + \beta t Q(S_1) e^{-\beta C}$$

$$C=0: \quad = \underbrace{\overset{1}{\cancel{(r + \alpha s + \beta t)}}\, Q(S_1) - P(S_1)}_{\text{فرض: } Q(S_1) > P(S_1)} > 0$$

پس اگر $P \neq Q$ باشد تابعی می‌توان f ساخت که sup را اثبات شد.

$$V(P_{X,Y} \| Q_{X,Y}) = \sup_{f(x,y)} E_{P_{X,Y}}(f(x,y)) - r E_{Q_{X,Y}}(f(x,y)) - s \log E_{Q_{X,Y}}(e^{\alpha f(x,y)})$$

$$- t \log E_{Q_{X,Y}}(e^{\beta f(x,y)})$$

$$\geq \sup_{f(x)} E_{P_{X,Y}}(f(x)) - r E_{Q_{X,Y}}(f(x)) - s \log E_{Q_{X,Y}}(\exp \alpha f(x)) - t \log E_{Q_{X,Y}}(\exp \beta f(x))$$

$$= E_{P_X} E_{P_{Y|X}}(f(x)) \qquad = E_{Q_X} E_{Q_{Y|X}}(f(x)) \qquad = E_{Q_X} E_{Y|X}(\exp(\alpha f(x)) \qquad = E_{Q_X} E_{Y|X}(\exp(\beta f(x)$$

$$= E_{P_X}(f(x)) \times 1 \qquad = E_{Q_X}(f(x)) \times 1 \qquad = E_{Q(x)}(\exp(\alpha f(x)) \times 1 \qquad = E_{Q(x)}(\exp(\beta f(x)$$

$$\geq E_{P_X}(f(x)) - r E_{Q_X}(f(x)) - s \log E_{Q_X}(\exp(\alpha f(x)) - t \log E_{Q_X}(\exp(\beta f(x))$$

$$= V(P_X \| Q_X) \checkmark$$

$$V(P_X W_{Y|X} \| Q_X V_{W|X}) = \sup_{f(x,y)} E_{P_X W_{X|Y}}(f) - r E_{Q_X P_{W|Y}}(f) - s \log(E_{P_X W_{Y|X}}(\exp \alpha f)) - t \log(E_{Q_X W_{Y|X}}(\exp(\beta f))$$

$$= \sup_f E_{P_X} E_{W_{X|Y}}(f) - r E_{Q_X} E_{W_{X|Y}}(f) - s \log E_{Q_X} E_{W_{Y|X}}(\exp \alpha f) - t \log(E_{Q_X} E_{W_{Y|X}}(\exp(\beta f))$$

$$\Rightarrow E_{W_{Y|X}}(\exp(\alpha f)) \geq \exp(E_{W_{Y|X}}(\alpha f)) \Rightarrow E_{Q_X}(E_{W_{Y|X}}(\exp(\alpha f)) \geq E_{Q_X}(\exp(E_{W_{Y|X}}(\exp(\alpha f)))$$

$$\Rightarrow -s \log E_{Q_X}(E_{W_{Y|X}}(\exp(\alpha f))) \leq -s \log E_{Q_X}(\exp(E_{W_{Y|X}}(\alpha f)))$$

$$\Rightarrow V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X}) \leq \sup_f E_P \underbrace{E_{W_{X|Y}}(f)}_{f^*} - r E_Q E_{W_{X|Y}}(f) - s \log E_{Q_X}(\exp(E_{W_{Y|X}}(\alpha f)))$$

$$- t \log E_{Q_X}(\exp(E_{W_{Y|X}}(\beta f)))$$

$$\Rightarrow V(P^{w}_{XY|X} \| Q^{w}_{XY|X}) \le \sup_{f^*} E_{P_X}(f^*) - rE_{q_X}(f^*) - sE_q(\exp(\alpha f^*)) - tE_q(\exp(\beta f^*))$$

اگر $\sup_f$ بگیریم مقدار بیشتری از $\sup_{f^*}$ بگیریم پس

$$V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X}) \le V(P_X \| Q_X) \rightarrow \text{روی } f^*$$

سمت دیگر نامساوی یعنی $V(P_X \| Q_X) \le V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X})$ بر طبق ادامه‌ی سوال قبل نتیجه می‌شود

نتیجه از این ۲ نامساوی:

$$V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X}) = V(P_X \| Q_X)$$

محدب برقرار است چرا که:

$$D(\lambda P_X + (1-\lambda) P_X \| \lambda Q_X + (1-\lambda) Q_X) \le \lambda D(P\|Q) + (1-\lambda) D(P\|Q)$$

اثبات: نوشتن نامساوی‌ها مبنا از تمرین‌های قبل است که معرفی نیز کردم (ضمیمه است :))

خ)

اثبات ، $f(x,y) = f(x) + f^*(y)$

$$\Rightarrow \tilde{V}(P_{XY} \| Q_X Q_Y) = \sup_{f(x,y)} E_{P_{XY}}\left(f(x)+f^*(y)\right) - r E_{Q_X Q_Y}\left(f(x)+f^*(y)\right)$$

$$- s \log E_{Q_X Q_Y}\left(\exp(\alpha(f(x)+f^*(y)))\right) - t \log E_{Q_X Q_Y}\left(\exp(\beta(f(x)+f^*(y)))\right)$$

$$= \left[E_{P_X}(f(x)) + E_{P_Y}(f^*(y))\right] - r\left[E_{Q_X}(f(x)) + E_{Q_Y}(f^*(y))\right]$$

$$- s\log\left(E_{Q_X}(e^{\alpha f(x)}) \cdot E_{Q_Y}(e^{\beta f^*(y)})\right) - t\log\left(E_{Q_X}(e^{\beta f(x)}) \cdot E_{Q}(e^{\beta f^*(y)})\right)$$

$$= \left[E_{P_X}(f(x)) - r E_{Q_X}(f(x)) - s\log(E_Q(e^{\alpha f(x)})) - t\log(E_Q(e^{\beta f(x)}))\right]$$

$$+ \left[E_{P_Y}(f^*(x)) - r E_{Q_Y}(f^*(x)) - s\log(E_Q(e^{\alpha f^*(y)})) - t\log(E_Q(e^{\beta f^*(y)}))\right]$$

$$= \tilde{V}(P_X \| Q_X) + \tilde{V}(P_Y \| Q_Y) \checkmark$$

د)

$$\tilde{V}_{\alpha, 0, 1-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, 0} = \sup_f E_P(f(x)) - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right) E_Q(f(x)) - \frac{1}{\alpha^2}\log E_Q(e^{\alpha f(x)})$$

$$\alpha \to 0 \Rightarrow e^{\alpha f(x)} = \sum_{m=0} (\alpha f(x))^m / m! \Rightarrow -\frac{1}{\alpha^2}\log E_Q\left(1 + \sum_{m=1}^{m} \frac{\alpha f(x)^m}{m!}\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}\log\left(1 + E_Q\left(\sum_{m=1} \frac{\alpha f(x)^m}{m!}\right)\right) \Rightarrow \alpha \to 0 \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{-\alpha^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} E_Q\left(\sum_{m=1}^{m} \frac{\alpha f(x)^m}{m!}\right)^{n+1} \rightarrow \quad m=1 \rightarrow \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)E_Q(f(x)) \rightarrow$$ این هم از قسمت الف

$$V = \sup_f E_P(f(x)) - E_Q(f(x)) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(E_Q(f(x)^2) - E_Q(f(x))^2\right)}_{= \mathrm{Var}_Q(f(x))} \checkmark$$

ح)

داریم: $\lim_{\alpha \to 0} w_\alpha(P\|Q) = \sup_f E_P(f(x)) - E_Q(f(x)) - \frac{1}{2} var_Q(f(x)) \geq 0$

$$\cancel{w_{\alpha \to 0}(P\|Q)} = \sup_f \frac{E_P(f(x)) - E_Q(f(x))}{var_Q(f(x))} \geq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{(E_P(f(x)) - E_Q(f(x)))^2}{var_Q(f(x))} \geq \frac{1}{2}(E_P(f(x)) - E_Q(f(x)))$$

چون سوپریمم f هست برای
نوشت

$$\chi^2(P\|Q) \geq \frac{1}{2}(E_P(x) - E_Q(x))$$

$var(x) \geq 0$ ،

$$\chi^2(P\|Q) \geq \frac{1}{2}(E_P(x) - E_Q(x) - \frac{1}{2} var_Q(x))$$

$$\chi^2(P\|Q) \geq \frac{1}{2} w_{\alpha \to 0}(P\|Q)$$

از بخش های بالا می‌توان دوباره نتیجه گرفت که $\chi^2(P\|Q) = \frac{1}{2} w(P\|Q)$ ،

حال با تست تمل اثبات را کامل می‌کنیم.