

第二问

LL

2020 年 3 月 8 日

在第二问中,研究的主体是沙堡底座,为了寻找最佳水沙比例,我们引入了水沙体积比 V_f ,根据文献 The shear modulus of wet granular matter,我们得知水沙体积比可以通过作用于砂砾与砂砾之间的桥接力来达到影响整个沙堡底座的稳定性的效果。故我们在原来模型的基础上进行了一些改进:

我们从上面的公式可以得到砂砾之间的桥接力可以近似表为:

$$F_{cap} = 2\pi R\gamma$$

但是从公式的角度看, V_f 作为值域为0到1的一个缩放因子,直接将其硬结合入公式中会出现问题。因为从实际来看沙堡底座的稳定性并不是随着水沙体积比的增大而增大的,而是存在着一个范围,在这个范围内存在着最佳水沙体积比因此我们将 $g(V_f)$ 考虑为水沙体积比 V_f 的一个函数,需要说明的是该函数的值域也在0到1之间,故我们将模型改造如下:

$$F_{cap} = 2\pi R\gamma g(V_f)$$

进一步,根据The shear modulus of wet granular matter 我们通过式可以得到沙堡控制自身稳定性的力G的改进的表达式:

$$G = 0.054R^{-\frac{1}{3}}E^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}g(V_f) \quad (1)$$

为了使结果更加清晰,我们把我们的数据集 G' 进行了缩放,缩放的因子如下:

$$R_f = 0.054R^{-\frac{1}{3}}E^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

根据文献 Relationship Between Coefficient of Seawater Surface Tension and Concentration, Temperature 我们得知海水的表面张力与温度有着近似线

性的关系,同时我们也了解到在 $20^{\circ}C \sim 40^{\circ}C$ 的范围内,海水表面张力的变化范围为 $70.36mN/m \sim 75.18mN/m$,这里我们约定 $\gamma = 72$ 。通过查阅资料我们得知沙粒的杨氏模量为 $68GPa$,沙粒的平均半径为 $0.1mm$,所以这里 $E = 68GPa$, $R = 0.1mm$,

由于收集到的数据集 G' 的大小很小,故我们使用三次样条插值来补充数据集,最终我们可以画出 G'/R_f 与 liquid volume fraction 之间的关系图:

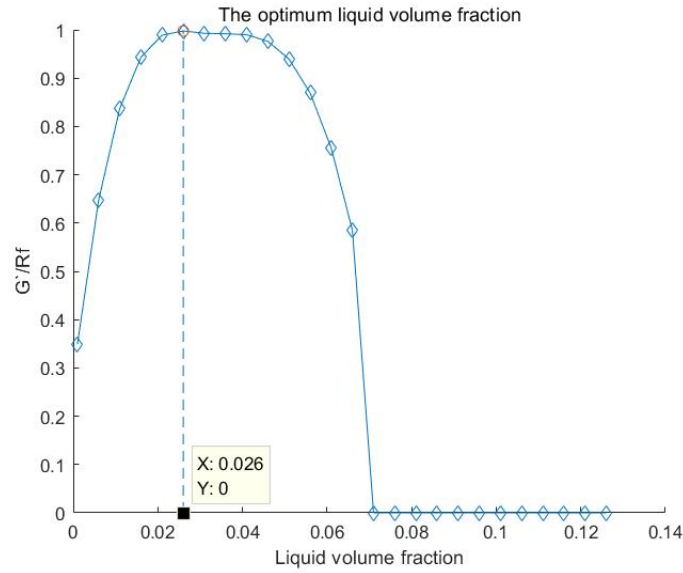


图 1: The optimum liquid volume fraction

Fig.1中落在 x 轴上的点表示没有这点的数,由于三次样条插值存在的误差,我们将不和常理的数据过滤掉了。同时在Fig.1 中我们可以看到最佳水沙比例出现在2% ~ 4%之间,且最佳水沙比例为2.6%。

另外,结合公式(1),(2)也可得到该关系其实表示了函数 $g(V_f)$,而且其值域也符合0 ~ 1的表述。