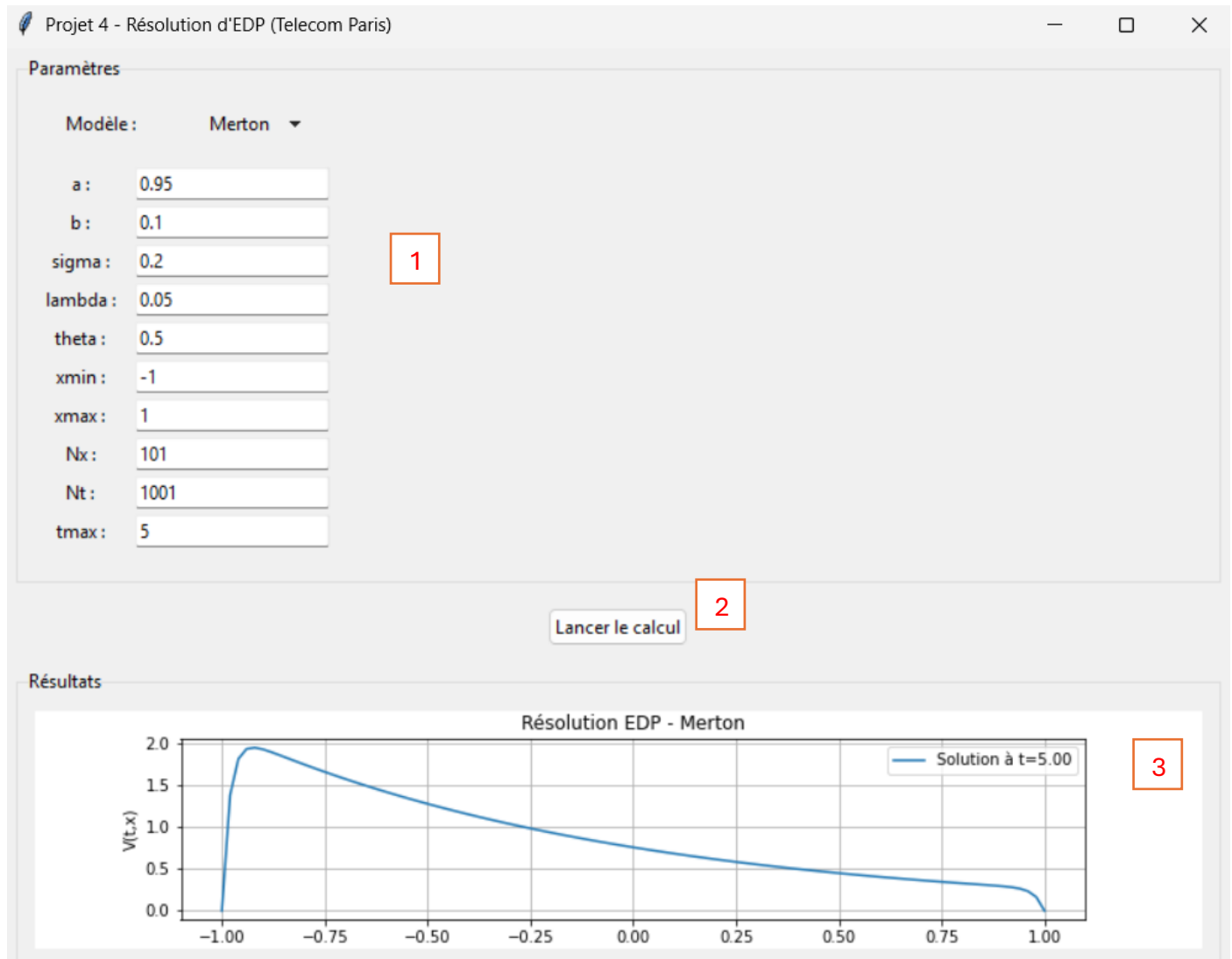


Projet 4 – présentation

Note : Il faut exécuter le code python pour que la fenêtre s'ouvre. Les détails des modèles sont décrits en annexe 1. L'algo de résolution est montré en annexe 2.



1: Choix des paramètres et du modèle choisi.

Black & Scholes

- **K** : Prix d'exercice de l'option (par défaut : 100).
- **sigma** : Volatilité de l'actif sous-jacent (par défaut : 0.20).
- **tau** : Temps jusqu'à l'échéance en années (par défaut : 0.25).
- **r** : Taux d'intérêt sans risque (par défaut : 0.08).
- **b** : Coût de portage (par défaut : -0.04).
- **theta** : Paramètre de la méthode de Crank-Nicholson, entre 0 et 1 (par défaut : 0.5).
- **xmin** : Valeur minimale de l'actif sous-jacent (par défaut : 50).
- **xmax** : Valeur maximale de l'actif sous-jacent (par défaut : 150).
- **Nx** : Nombre de points dans la grille spatiale (par défaut : 201).
- **Nt** : Nombre de points dans la grille temporelle (par défaut : 1000).

SIMON Louis

DEMIR Siran

CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

- **kappa** : Vitesse de retour à la moyenne (par défaut : 0.8).
- **theta** : Niveau moyen de long terme du taux d'intérêt (par défaut : 0.10).
- **sigma** : Volatilité du taux d'intérêt (par défaut : 0.5).
- **lambda** : Prime de risque (par défaut : 0.05).
- **theta_solver** : Paramètre de Crank-Nicholson (par défaut : 0.5).
- **xmin** : Valeur minimale du taux d'intérêt (par défaut : 0).
- **xmax** : Valeur maximale du taux d'intérêt (par défaut : 1).
- **Nx** : Nombre de points dans la grille spatiale (par défaut : 51).
- **Nt** : Nombre de points dans la grille temporelle (par défaut : 101).
- **tmax** : Temps maximal en années (par défaut : 5).

Merton

- **a** : Vitesse de retour à la moyenne (par défaut : 0.95).
- **b** : Niveau moyen ajusté (par défaut : 0.10).
- **sigma** : Volatilité (par défaut : 0.2).
- **lambda** : Prime de risque (par défaut : 0.05).
- **theta** : Paramètre de Crank-Nicholson (par défaut : 0.5).
- **xmin** : Valeur minimale (par défaut : -1).
- **xmax** : Valeur maximale (par défaut : 1).
- **Nx** : Nombre de points dans la grille spatiale (par défaut : 101).
- **Nt** : Nombre de points dans la grille temporelle (par défaut : 1001).
- **tmax** : Temps maximal en années (par défaut : 5).

2: Bouton Lancer Calcul.

3. Graphe de résolution.

1 Annexe 1 : Description des Graphes Affichés et Fonctionnement Interne

Pour ce projet nous avons recherché les formules sur internet car nous n'avions pas accès aux slides du cours. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes basés sur les formules mathématiques qui suivent. De plus nous avons eu recours à des IA génératives pour nous aider dans l'implémentation des calculs et la compréhension des formules, et surtout pour la présente documentation.

Pour chaque modèle, un graphique est affiché dans l'interface Tkinter après le calcul. Il représente la solution $V(t, x)$ à la maturité (i.e., $t = t_{\max}$ ou $t = \tau$), où x est la variable spatiale (prix de l'actif pour Black & Scholes, taux d'intérêt pour CIR et Merton). Voici les détails pour chaque modèle :

1.1 Black & Scholes

1.1.1 Graphe Affiché

- **Axe X** : Prix de l'actif sous-jacent S (de x_{\min} à x_{\max}).
- **Axe Y** : Valeur de l'option $V(\tau, S)$ à l'échéance τ .
- **Description** : Le graphique montre le profil de la valeur d'une option (call européen par défaut) en fonction du prix de l'actif à $t = \tau$. Il ressemble à une droite brisée avec un point d'inflexion autour de $S = K$, reflétant la condition initiale $\max(S - K, 0)$.

1.1.2 Explication

- **EDP** :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + bS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- **Coefficients** :

- $a(t, S) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2$ (terme de diffusion).
- $b(t, S) = bS$ (terme de dérive).
- $c(t, S) = r$ (taux d'actualisation).
- $d(t, S) = 0$ (terme source).

- **Conditions aux Limites** :

- Initiale : $V(0, S) = \max(S - K, 0)$ (payoff d'un call).

- $S = x_{\min} : V(t, x_{\min}) = 0$ (option sans valeur si S est très bas).
- $S = x_{\max} : V(t, x_{\max}) = \max(x_{\max} - K, 0)$ avec dérivée $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$.
- **Méthode** : Crank-Nicholson discrétise l'EDP en un système tridiagonal résolu à chaque pas de temps.

1.2 CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

1.2.1 Graphe Affiché

- **Axe X** : Taux d'intérêt r (de x_{\min} à x_{\max}).
- **Axe Y** : Valeur $V(t_{\max}, r)$ à $t = t_{\max}$.
- **Description** : Le graphique montre la valeur d'une obligation à coupon zéro à $t = t_{\max}$ (condition initiale $V(0, r) = 1$). La courbe décroît avec r , reflétant l'actualisation par un taux stochastique.

1.2.2 Explication

- **EDP** :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sqrt{r}] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

- **Coefficients** :

- $a(t, r) = \frac{1}{2}\sigma^2 r$ (diffusion dépendante de r).
- $b(t, r) = \kappa(\theta - r) - \lambda\frac{\sqrt{r}}{\sigma}$ (dérive ajustée par la prime de risque).
- $c(t, r) = r$ (taux d'actualisation variable).
- $d(t, r) = 0$.

- **Conditions aux Limites** :

- Initiale : $V(0, r) = 1$ (valeur d'une obligation à $t = 0$).
- $r = x_{\min}$ et $r = x_{\max}$: Pas de condition explicite supplémentaire (extrapolation naturelle).
- **Méthode** : Crank-Nicholson avec prise en compte de la racine carrée dans $\sigma\sqrt{r}$ (stabilisée par $\max(r, 0)$).

1.3 Merton

1.3.1 Graphe Affiché

- **Axe X** : Taux d'intérêt ou variable x (de x_{\min} à x_{\max}).
- **Axe Y** : Valeur $V(t_{\max}, x)$ à $t = t_{\max}$.
- **Description** : Similaire à CIR, le graphique montre une décroissance liée à l'actualisation, mais avec une volatilité constante et une dynamique de type Vasicek.

1.3.2 Explication

- **EDP** :
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a(b' - x) \frac{\partial V}{\partial x} - xV = 0$$
où $b' = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.
- **Coefficients** :
 - $a(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2$ (diffusion constante).
 - $b(t, x) = a(b' - x)$ (dérive linéaire).
 - $c(t, x) = x$ (taux d'actualisation variable).
 - $d(t, x) = 0$.
- **Conditions aux Limites** :
 - Initiale : $V(0, x) = 1$ (obligation à coupon zéro).
 - $x = x_{\min}$ et $x = x_{\max}$: Pas de condition explicite (extrapolation).
- **Méthode** : Crank-Nicholson avec une volatilité constante, simplifiant la discrétisation par rapport à CIR.

1 Annexe 2 : Algorithme de Résolution (Crank-Nicholson)

L'algorithme de Crank-Nicholson résout l'EDP $\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial V}{\partial x} + cV = d$ par différences finies :

- **Grille** : Temps $t_n = t_{\min} + n\Delta t$, espace $x_i = x_{\min} + i\Delta x$.
- **Méthode** : Moyenne entre explicite et implicite ($\theta = 0.5$), formant un système tridiagonal $AV^{n+1} = b$.
- **Résolution** : Résolu avec `numpy.linalg.solve` à chaque pas de temps.

Simple et stable, il s'adapte aux trois modèles.