

แอปพลิเคชันจัดตารางเวรพยาบาล
(Application for Nursing shift scheduling)

นายสิริวิชญ์ คำชุ่ม

ภาคนิพนธ์เสนอมหาวิทยาลัยพะเยา เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
หลักสูตรปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยพะเยา

อาจารย์ที่ปรึกษาและประธานหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร มหาวิทยาลัยพะเยา ได้พิจารณาภาคินพนธ์ เรื่อง “แอปพลิเคชันจัดตารางเวรพยาบาล (Application for Nursing shift scheduling)” เห็นสมควรรับ เป็นส่วนหนึ่งของ การศึกษารายวิชา 225492 วิศวกรรมวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2567 มหาวิทยาลัยพะเยา

.....
(ดร.ศุภกร จันเลน)
ประธานกรรมการสอบ

.....
(ดร.พงศพัศ แแรงดี)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

.....
(ดร.วัชรวุฒิ กฤตินิธรรม)
กรรมการ

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชยันต์ บุญยรักษ์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
ตุลาคม 2565
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยพะเยา

กิตติกรรมประกาศ

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ...

สิริวิชญ์ คำชุ่ม

ชื่อเรื่อง	แอปพลิเคชันจัดตารางเวรพยาบาล
ผู้ศึกษาค้นคว้า	สิริวิชญ์ คำชุ่ม
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.พงศพัศ แรงดี
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.ชลธิชา กฤษณ์เพชร
วิทยาศาสตร์บัณฑิต	สาขาวิชาฟิสิกส์, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา, 2565
คำสำคัญ	แก๊สแชปไลน์, พลังงานมืด, สนามสเกลาร์, เอกภพที่เร่งออก

บทคัดย่อ

บทคัดย่อภาษาไทย เขียนตรงนี้

Title	APPLICATION FOR NURSING SHIFT SCHEDULING
Author	Sirawit Kamchoom
Advisor	Dr.Phongsaphat Rangdee
Co-Advisor	Dr.Chonticha Kritpetch
Bachelor of Science	Department of Physics, School of Science, University of Phayao, 2565
Keywords	Chaplygin Gas, Dark Energy, Accelerating Universe, Phantom Power-Law

ABSTRACT

Our universe today is under the accelerating expansion phase. Most physicists and cosmologists believe that this behavior is due to an unknown form of energy known as dark energy. There are many models proposed to explain this behavior of the universe. In our work, we consider the two different cosmological models in the scenario of canonical and phantom power-law cosmology.

First, the tachyonic scalar field-driven late universe with dust matter content is considered. The cosmic expansion is modeled with power-law and phantom power-law expansion at late time, i.e. $z \lesssim 0.45$. WMAP7 and its combination with other data are used to constraint the model. The forms of potential and the field solution are different for quintessence and tachyonic cases. Power-law cosmology model (driven by either quintessence or tachyonic field) predicts an equation of state parameter that does not match the observed value and hence the power-law model is excluded for both quintessence and tachyonic field. In the opposite, the phantom power-law model predicts agreeing valued of equation of state parameter with the observational data for both quintessence and tachyonic cases, i.e. $w_{\phi,0} = -1.49^{+11.64}_{-4.08}$ (WMAP7+BAO+ H_0) and $w_{\phi,0} = -1.51^{+3.89}_{-6.72}$ (WMAP7). The phantom-power law exponent β must be less than about -6, so that the $-2 < w_{\phi,0} < -1$. The phantom power-law tachyonic potential is reconstructed. We found that dimensionless potential slope variable Γ at present is about 1.5. The tachyonic potential reduces to $V = V_0\phi^{-2}$ in the limit $\Omega_0 \rightarrow 0$.

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

ภาพ

หน้า

บทที่ 1

การวิเคราะห์เวกเตอร์

โดยทั่วไปในทางฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ได้ถือว่าเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักฟิสิกส์สามารถทำความเข้าใจกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้มากยิ่งขึ้น โดยเริ่มตั้งแต่คณิตศาสตร์พื้นฐาน ตัวอย่างเช่น การดำเนินการทางสเกลาร์ (scalar), เวกเตอร์ (vector) และเทนเซอร์ (tensor) ไม่ว่าจะเป็น เกรเดียนต์ (gradient), ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) หรือ เคิร์ล (curl) จนกระทั่งการดำเนินการขั้นสูง ตัวอย่างเช่น การหาอนุพันธ์ การอินทิเกรต สมการเชิงอนุพันธ์ หรือแม้แต่การนำฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น สมการเลอจองด์ (Legendre Equation) สมการพัวซอง (Poisson's Equation) ที่เอาไปประยุกต์ใช้กับวิชาฟิสิกส์ขั้นสูง อย่างวิชากลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) เป็นต้น [?, ?, ?]

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ จะแนะนำให้รู้จักกับพื้นฐานเกี่ยวกับปริมาณทางฟิสิกส์ ได้แก่ สเกลาร์, เวกเตอร์ และเทนเซอร์เบื้องต้น ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian Coordinate) รวมถึงการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังจะแนะนำเกี่ยวกับการแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉาก (x, y, z) ไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก (Circular Cylinder Coordinate) หรือไปเป็นระบบพิกัดแบบทรงกลม (Spherical Polar Coordinate) พร้อมทั้งการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในระบบพิกัดดังกล่าวเหล่านั้นด้วยเช่นกัน [?, ?]

1.1 การดำเนินการพื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์

ในทางวิทยาศาสตร์ ปริมาณพื้นฐานทั่วไปจะแบ่งได้เป็น ปริมาณที่มีแต่ขนาด หรือบอกแค่ขนาดก็มีความหมายที่สมบูรณ์ ปริมาณนั้นเราเรียกว่า *ปริมาณสเกลาร์* (scalar) เช่น เวลา อุณหภูมิ ความยาว เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทาง จึงจะมีความหมายสมบูรณ์ ปริมาณนั้นเรียกว่า *ปริมาณเวกเตอร์* (vector) เช่น ความเร็ว ความเร่ง ระยะกระจัด เป็นต้น ซึ่งปริมาณพื้นฐานเหล่านี้สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ร่วมกันได้

ถ้ามีเวกเตอร์ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และเวกเตอร์ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ เมื่อ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ที่ชี้ไปในทิศทางตามแนวแกน x, y , และ z ตามลำดับ แล้วเราสามารถหาขนาดของเวกเตอร์ \vec{A} ได้จาก

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1.1)$$

และยังสามารถทำการบวกและลบเวกเตอร์ระหว่างสองเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} \pm (A_y + B_y)\hat{j} \pm (A_z + B_z)\hat{k} \quad (1.1.2)$$

สำหรับการคูณเวกเตอร์นั้นมี 2 แบบ คือ การคูณแบบดอท (dot product) และการคูณแบบครอส (cross product) ดังนี้

1.1.1 การคูณแบบดอท (Dot Product)

เป็นการคูณของเวกเตอร์สองตัวที่ให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ โดยเราสามารถเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การคูณแบบสเกลาร์ (scalar product) ก็ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x(\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_xB_y(\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_xB_z(\hat{i} \cdot \hat{k}) \\ &\quad A_yB_x(\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_yB_y(\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_yB_z(\hat{j} \cdot \hat{k}) \\ &\quad A_zB_x(\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_zB_y(\hat{k} \cdot \hat{j}) + A_zB_z(\hat{k} \cdot \hat{k}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

โดยในการนี้ เราใช้การหาขนาดของการคูณเวกเตอร์แบบดอท คือ

$$\begin{aligned} |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= AB \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

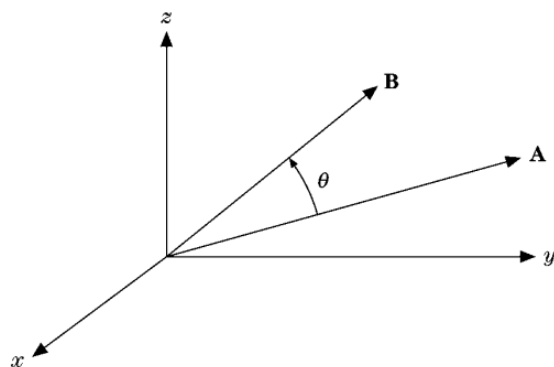
เมื่อ θ เป็นมุมที่เกิดขึ้นระหว่างเวกเตอร์ \vec{A} และเวกเตอร์ \vec{B} ดังรูปที่ ?? และ $A = |\vec{A}|$, $B = |\vec{B}|$ เป็นขนาดของเวกเตอร์ \vec{A} และเวกเตอร์ \vec{B} ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ แต่ละตัวจะมีขนาดเป็น 1 และมุมระหว่างเวกเตอร์หน่วยเดียวกันเป็น 0 องศา และมุมระหว่างเวกเตอร์หน่วยที่ต่างกันเป็น 90 องศา ทำให้ $\cos 0 = 1$ และ $\cos 90 = 0$ ดังนั้น สำหรับเวกเตอร์หน่วยที่ดอทกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

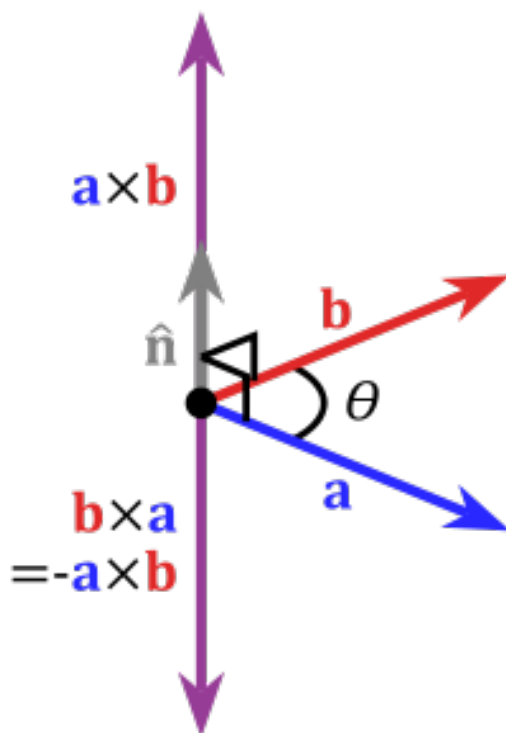
ดังนั้น เมื่อเรานำเวกเตอร์สองตัวมาดอทกันจึงได้ผลลัพธ์ดังแสดงในสมการ (??) หากการคูณแบบดอทนี้เป็นการคูณกันระหว่างเวกเตอร์ตัวเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.1.6)$$

และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A} = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$



ภาพที่ 1.1: การคูณเวกเตอร์แบบดอท $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$ (ภาพจาก Arfken 2005)



ภาพที่ 1.2: การคูณเวกเตอร์แบบครอส $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta$ (ภาพจากอินเทอร์เน็ต)

1.1.2 การคูณแบบครอส (Cross Product)

เป็นการคูณที่ให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณเวกเตอร์ และเวกเตอร์ใหม่ที่ได้นั้น ก็จะมีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ทั้งสองที่นำมาครอสกัน หรือเราสามารถเรียกได้อีกอย่างว่า การคูณแบบเวกเตอร์ (vector product) ก็ได้ นั่นคือ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad (1.1.7)$$

เราจะได้ว่า \vec{C} จะมีทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ ดังรูปที่ ?? โดยขนาดของเวกเตอร์ $\vec{C} = C$ สามารถหาได้จาก

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (1.1.8)$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ \vec{A} และเวกเตอร์ \vec{B} นอกจากนี้ เรายังสามารถเขียนเวกเตอร์ \vec{C} ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \vec{C} \\ &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

โดยอาศัยคุณลักษณะของการครอสของเวกเตอร์หน่วย ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

ทำนองเดียวกัน หากเราทำการสลับตำแหน่งของเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ เราจะได้ว่า

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \quad (1.1.11)$$

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณเวกเตอร์แบบครอส แต่จะมีทิศตรงกันข้าม ดังแสดงในรูปที่ ?? ในทำนองเดียวกัน หากเป็นการคูณแบบครอสของเวกเตอร์เดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)

การคูณเวกเตอร์แบบครอสยังสามารใช้กระบวนการทางเมตริกซ์ (matrix) เพื่อหาผลคูณได้เช่นกัน โดยอาศัยการจัดเวกเตอร์ที่ครอสกันในรูปแบบของเมตริกซ์แล้วทำการหาดีเทอร์มิแนนท์ (determinant of matrix หรือ det) ซึ่งมีรูปแบบดัง

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k} \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\
 &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

1.1.3 ผลคูณสามเวกเตอร์ (Triple Product)

เป็นการคูณของเวกเตอร์สามตัว ซึ่งเราเรียกว่า *ผลคูณสามเวกเตอร์* (triple product) ซึ่งประกอบไปด้วย

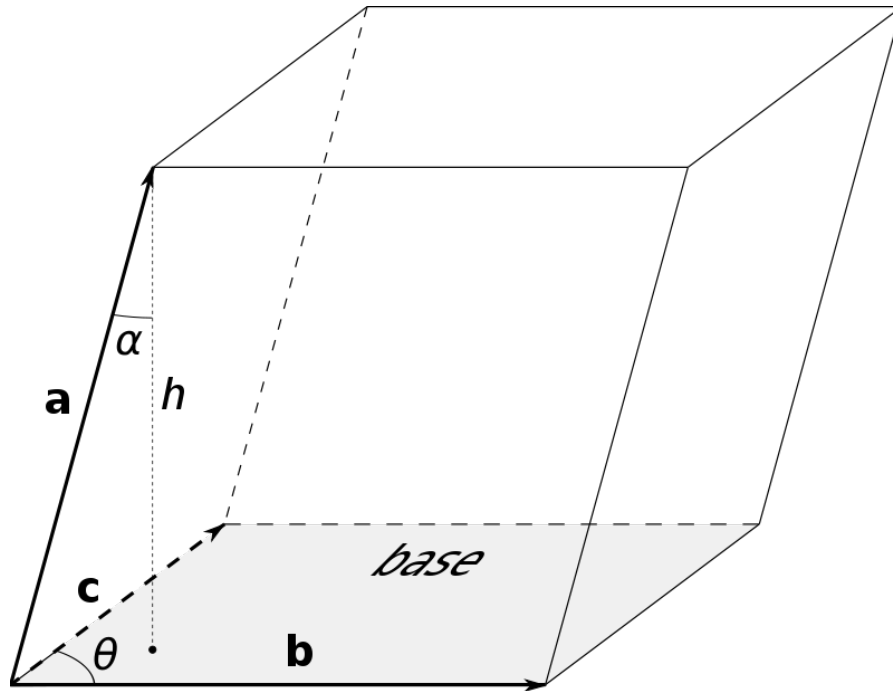
1.1.3.1 ผลคูณสามเวกเตอร์แบบสเกลาร์ (scalar triple product).

เป็นการคูณที่มีทั้งการคูณแบบดอทและแบบครอสผสมกันอยู่ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ โดยในการหาผลคูณต้องทำการหาผลคูณแบบครอสก่อนเสมอแล้วจึงทำการหาผลคูณแบบดอทเป็นลำดับสุดท้าย ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot [(B_y C_z - B_z C_y) \hat{i} + (B_z C_x - B_x C_z) \hat{j} \\
 &\quad + (B_x C_y - B_y C_x) \hat{k}] \\
 &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\
 &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x)
 \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

และผลลัพธ์ที่ได้มีขนาดเท่ากับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ทั้งสามประกอบเป็นด้านทั้งสามของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ ?? และการคูณแบบนี้ยังสามารถหาแบบเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\
 &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\
 &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x)
 \end{aligned} \tag{1.1.14}$$



ภาพที่ 1.3: การคูณสามเวกเตอร์แบบสเกลาร์ $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะมีขนาดเท่ากับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ภาพจากอินเทอร์เน็ต)

การคูณแบบนี้ยังมีคุณลักษณะพิเศษที่สามารถเรียงสลับกันได้โดยผลคูณที่ได้ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งเราเรียกคุณลักษณะนี้ว่า การเรียงลำดับหมุนวน (cyclic order permutation) และสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (1.1.15)$$

นอกจากนี้ก็จะมีคุณสมบัติ แอนไทคอมมิวทีว (anticommutativity) ดังนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{cases} -\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B} \\ -\vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C} \\ -\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} \end{cases} \quad (1.1.16)$$

1.1.3.2 การคูณสามเวกเตอร์แบบเวกเตอร์ (vector triple product).

ในการคูณแบบนี้เราสามารถหาผลคูณได้จากสมการ

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.1.17)$$

การคูณแบบนี้เรียกว่า การกระจายผลคูณสามเวกเตอร์ (triple product expansion) หรือ สูตรลากรองจ์ (Lagrange's formula) ซึ่งมักจะมีการจำแบบง่ายๆว่า “BAC ลบ CAB” นอกจากนี้ยังมีสมบัติที่น่าสนใจ ดังนี้

- แอนไทคอมมิวทีว (Anticommutativity)

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} + (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \quad (1.1.18)$$

- คุณสมบัติของจาโคบี (Jacobi identity)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (1.1.19)$$

- สมการรูปแบบอื่นๆที่น่าสนใจ

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) - \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{C}) \quad (1.1.20)$$

แบบฝึกหัด

1. ถ้าเรามีเวกเตอร์ $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ จงพิสูจน์กฎของโคไซน์ (law of cosine)

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

2. พิจารณาเวกเตอร์ \vec{A} , \vec{B} , และ \vec{C} ดังต่อไปนี้

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

จงคำนวณหาค่าของ $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ และ $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$

1.2 การดำเนินการขั้นสูงกับเวกเตอร์

การดำเนินการขั้นสูงกับเวกเตอร์นั้นประกอบไปด้วยการดำเนินการทั้งสิ้น 3 รูปแบบ คือ เกรเดียนท์ (gradient, ∇), ไดเวอร์เจนซ์ (divergence, $\nabla \cdot$) และเคิร์ล (curl, $\nabla \times$) ดังนี้

1.2.1 เกรเดียนท์ (Gradient, ∇)

ถ้าเรามีสเกลาร์ฟังก์ชันใดๆ $F(x, y, z)$ แล้วเกรเดียนท์ของฟังก์ชัน $F(x, y, z)$ นี้สามารถเขียนได้เป็น $\text{grad } F(x, y, z)$ หรือ $\nabla F(x, y, z)$ และสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{grad } F(x, y, z) &= \nabla F(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) F(x, y, z) \\ &= \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \hat{k} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

เมื่อ grad (อ่านว่า แกรด) หรือ ∇ (อ่านว่า เดล) เขียนได้เป็น

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (1.2.2)$$

เกรเดียนต์มีคุณลักษณะเหมือนกันกับเวกเตอร์ทั่วไป คือ มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยที่ เกรเดียนต์ ∇F จะมีทิศทางที่ชี้ไปยังทิศที่มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นมากที่สุดของฟังก์ชัน F และนอกจากนี้ ขนาดของเกรเดียนต์ $|\nabla F|$ จะเป็นค่าความชัน (ด้วยอัตราการเพิ่มขึ้น) ตามทิศทางที่ให้ค่าสูงสุดนั้น เราสามารถจินตนาการว่าเรายืนอยู่ตีนเขา และเมื่อมองไปรอบๆ เราจะมองเห็นทางที่สูงขึ้นไปบนเขา ซึ่งนั่นก็คือ ทิศทางของเกรเดียนต์ และเมื่อทำการวัดความชันในทิศทางนั้น (ขึ้นเขา) นั่นก็คือ ขนาดของเกรเดียนต์ นั่นเอง

1.2.2 ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence, $\nabla \cdot$)

เป็นการดำเนินการแบบเวกเตอร์เมื่อมีเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ แล้วไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ \vec{V} สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V} &= \text{div } \vec{V} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot (V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นปริมาณสเกลาร์ นอกจากนี้ ยังสามารถดำเนินการแบบผสม คือ มีสเกลาร์ฟังก์ชันกับเวกเตอร์ฟังก์ชันอยู่ด้วยกัน ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

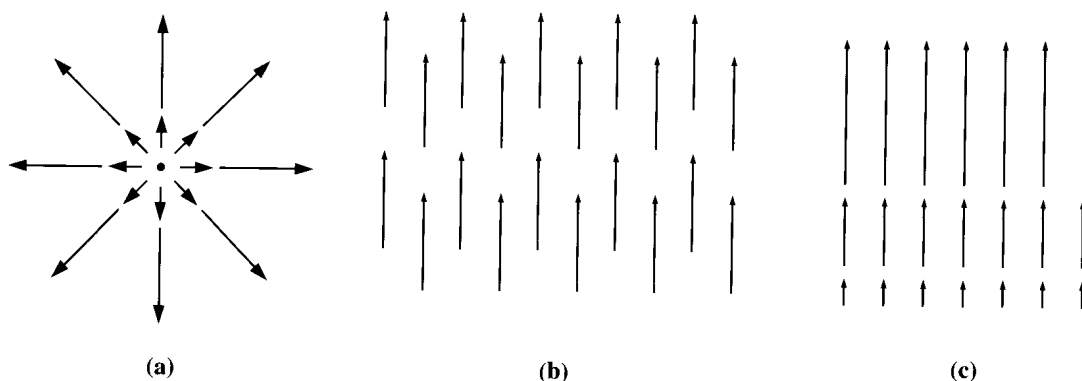
$$\nabla \cdot (F\vec{V}) = (\nabla F) \cdot \vec{V} + F\nabla \cdot \vec{V} \quad (1.2.4)$$

เมื่อ $F = F(x, y, z)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน และถ้าไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชันใดเป็นศูนย์ คือ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ เราจะเรียกเวกเตอร์ฟังก์ชันนั้นว่าเป็นฟังก์ชันโซลีนอยด์ ซึ่งถ้าเมื่อเวกเตอร์ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันโซลีนอยด์ เวกเตอร์ฟังก์ชันนั้นสามารถเขียนในรูปของเคิร์ล (curl) ของเวกเตอร์อื่นได้ และเรียกเวกเตอร์อื่นได้นั้นว่าเป็นเวกเตอร์ศักย์ (vector potential)

ในการอธิบายเชิงกายภาพของไดเวอร์เจนซ์ เราจะพิจารณา $\nabla \cdot \vec{V}$ เป็นการวัดว่าเวกเตอร์ \vec{V} จะพุ่งกระจาย (spreads out or diverges) จากจุดอ้างอิงได้มากน้อยเท่าไร จากรูปที่ ?? ภาพ (a) จะเห็นว่ามีไดเวอร์เจนซ์บวกเพราะลูกศรพุ่งออกและมีขนาดเพิ่มขึ้น (ถ้าลูกศรพุ่งเข้าและมีขนาดลดลงเรื่อยๆ จะเรียกว่าเป็นไดเวอร์เจนซ์ลบ) ทำนองเดียวกันกับภาพ (c) ก็จะมีไดเวอร์เจนซ์บวก เช่นเดียวกันกับภาพ (a) ส่วนภาพ (b) ไม่มีไดเวอร์เจนซ์ หรือเรียกว่า ไดเวอร์เจนซ์ศูนย์ (zero divergence)

ในกรณีของไดเวอร์เจนซ์เราสามารถเขียนไดเวอร์เจนซ์ซ้อนกับเกรเดียนต์ ได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \psi(x, y, z) &= \nabla^2 \psi \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (1.2.5)$$



ภาพที่ 1.4: ไตเวอร์เจนซ์ $\nabla \cdot \vec{V}$ (a) มีไตเวอร์เจนซ์บวก (b) มีไตเวอร์เจนซ์ศูนย์ (c) มีไตเวอร์เจนซ์บวก (ภาพจาก Griffiths 1999)

โดย ∇^2 อ่านว่า ลาปลาเซียน (Laplacian)

1.2.3 เคิร์ล (Curl, $\nabla \times$)

เป็นการดำเนินการแบบเวกเตอร์ ที่ให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนได้เป็น

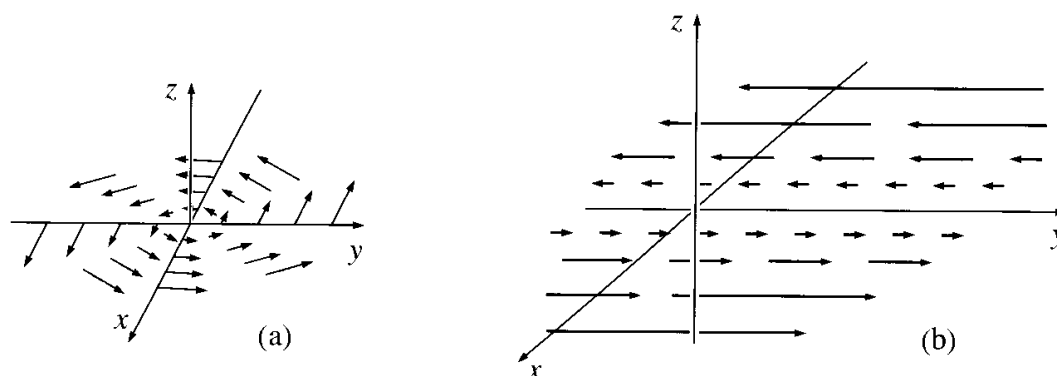
$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{V} &= \text{curl } \vec{V} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) \hat{j} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

หรือสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) \hat{j} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับสมการที่ (??) และถ้ามีเคิร์ลของเวกเตอร์ \vec{V} ใดๆเป็นศูนย์ นั่นคือ $\nabla \times \vec{V} = 0$ เราจะเรียกเวกเตอร์ \vec{V} นี้ว่า ไม่สามารถหมุนได้ (irrotational)

ในการอธิบายเชิงกายภาพของเคิร์ล เราจะพิจารณา $\nabla \times \vec{V}$ เป็นการวัดปริมาณการหมุนวนของเวกเตอร์ \vec{V} รอบจุดอ้างอิง ดังแสดงในรูปที่ ?? จะเห็นว่ามี การหมุนวนรอบแกน z ซึ่งเป็นทิศทางของ $\nabla \times \vec{V}$ นั่นเอง



ภาพที่ 1.5: เคิร์ล $\nabla \times \vec{V}$ ภาพทั้งสองแสดงการหมุนวนของเวกเตอร์ \vec{V} มีผลให้ $\nabla \times \vec{V}$ พุ่งไปในทิศทางตามแนวแกน z (ภาพจาก Griffiths 1999)

แบบฝึกหัด

1. จากสเกลาร์ฟังก์ชัน $V(r) = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ จงหาเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชันนี้

คำแนะนำ ใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ช่วย ดังนี้

$$\frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

2. จงแสดงวิธีการพิสูจน์สมการที่ (??)
3. สำหรับอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยวงโคจรที่เป็นไปตามสมการ

$$\vec{r} = r \cos(\omega t) \hat{i} + r \sin(\omega t) \hat{j}$$

และกำหนดให้รัศมีวงโคจร r และอัตราเร็วเชิงมุม ω มีค่าคงที่

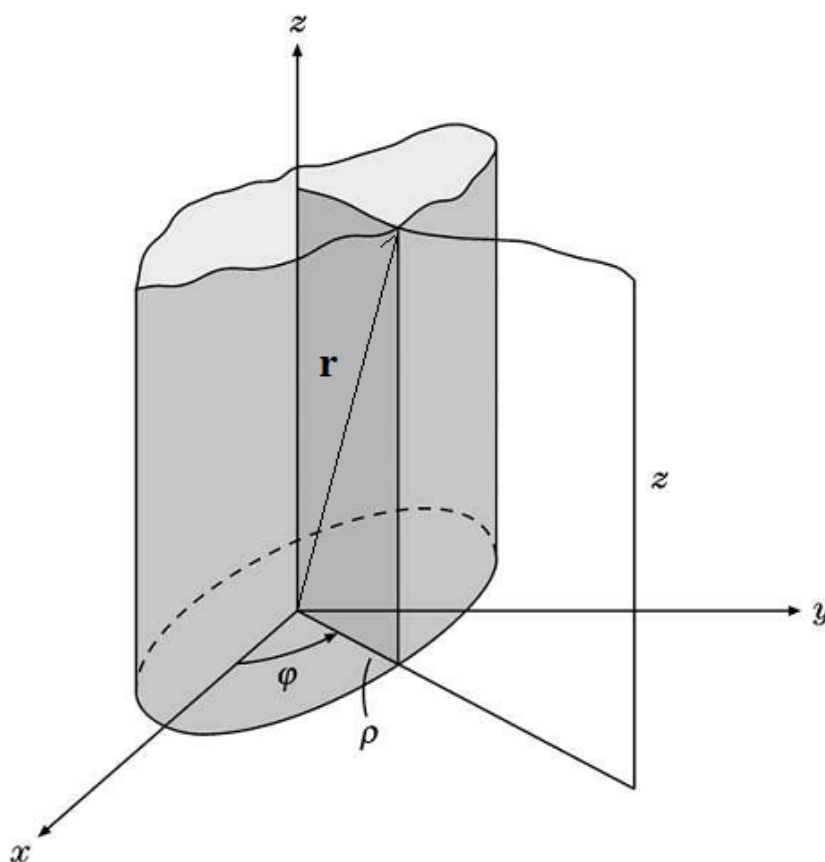
$$3.1 \text{ จงหา } \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \text{ เมื่อ } \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$3.2 \text{ จงแสดงว่า } \ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0 \text{ เมื่อ } \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

4. ถ้า (1) $\vec{V} = V_x(x, y) \hat{i} + V_y(x, y) \hat{j}$ และ (2) $\nabla \times \vec{V} \neq 0$ จงแสดงว่า $\nabla \times \vec{V}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ \vec{V}

1.3 ระบบพิกัด และการแปลงพิกัด

โดยทั่วไประบบพิกัดที่เราใช้ส่วนใหญ่จะเป็นระบบพิกัดที่เรียกว่า ระบบพิกัดฉาก (Cartesian Coordinate System) ซึ่งเป็นระบบพิกัดที่มีแกนทั้งสามตั้งฉากซึ่งกันและกัน และแต่ละแกน เราสามารถระบุพิกัดได้เป็น (x, y, z) และมีเวกเตอร์หน่วยเป็น $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ตามลำดับ แต่ในบางครั้งการคำนวณหรือกระบวนการดำเนินการทาง



ภาพที่ 1.6: ภาพแสดงระบบพิกัดทรงกระบอก ที่ระบุพิกัดด้วย (ρ, φ, z) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจาก Arfken 2005)

คณิตศาสตร์และฟิสิกส์ ไม่สะดวก หรือมีความซับซ้อนมากเมื่อทำการคำนวณหรือดำเนินการในระบบพิกัดฉาก และจะง่ายกว่ามากเมื่อทำการคำนวณหรือดำเนินการในระบบพิกัดอื่น ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงได้แนะนำระบบพิกัดแบบอื่นๆ นอกเหนือจากระบบพิกัดฉาก

1.3.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Circular Cylinder Coordinate System)

ในระบบพิกัดทรงกระบอกนี้ เราจะระบุพิกัดด้วย (ρ, φ, z) โดยที่ค่าของแต่ละแกนจะอยู่ในช่วงต่างๆ ดังนี้

$$0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \quad (1.3.1)$$

สำหรับค่า $\rho = 0$ จะทำให้ φ ไม่นิยาม และจากรูปที่ ?? เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของระบบ

พิกัดทรงกระบอกกับระบบพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\varphi) \\y &= \rho \sin(\varphi) \\z &= z\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนพิกัดทรงกระบอกในรูปของระบบพิกัดฉากได้เป็น

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constant}\tag{1.3.3}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\tag{1.3.4}$$

ในส่วนของเวกเตอร์ \vec{V} สามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{V} = V_\rho \hat{\rho} + V_\varphi \hat{\varphi} + V_z \hat{z}\tag{1.3.5}$$

เวกเตอร์กระจัด \vec{r} กับอนุพันธ์ของมันสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}\tag{1.3.6}$$

$$d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}\tag{1.3.7}$$

ในทำนองเดียวกัน การดำเนินการชั้นสูงสำหรับการหาอนุพันธ์สำหรับ ∇ ได้เป็น

$$\nabla \psi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z}\tag{1.3.8}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\tag{1.3.9}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \psi &= \nabla^2 \psi \\&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}\tag{1.3.11}$$

โดยที่เวกเตอร์หน่วยของพิกัดทรงกระบอกสัมพันธ์กับเวกเตอร์หน่วยในพิกัดฉากดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{z} &= \hat{k}\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

ในทำนองเดียวกันเราก็สามารถเขียนเวกเตอร์หน่วยของพิกัดฉากในรูปของระบบพิกัดทรงกระบอก ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\phi} \\ \hat{j} &= \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\phi} \\ \hat{k} &= \hat{z}\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลลัพธ์ของสมการไฮโดรไดนามิกส์ของ Navier-Stokes ที่มีเทอมไม่เชิงเส้น คือ $\nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$ เมื่อ \vec{v} คือความเร็วของของไหล สำหรับของไหลที่ไหลผ่านท่อทรงกระบอกไปตามแนวแกน z ตามสมการ $\vec{v} = v(\rho)\hat{z}$
2. จงหาองค์ประกอบของความเร่งและความเร็วของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ในระบบพิกัดทรงกระบอก เมื่อเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่ขึ้นกับเวลาเป็นไปตามสมการ

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \rho(t)\hat{\rho}(t) + z(t)\hat{z} \\ &= [\cos \varphi(t)\hat{x} + \sin \varphi(t)\hat{y}] \rho(t) + z(t)\hat{z}\end{aligned}$$

เมื่อ $\dot{\rho} = d\rho/dt$, $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$

3. จงแก้สมการลาปลาซ $\nabla^2\psi = 0$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกเมื่อ $\psi = \psi(\rho)$

1.3.2 ระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม (Spherical Polar Coordinate System)

ในระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลมจะระบุตำแหน่งด้วยพิกัด (r, θ, ϕ) ซึ่งแสดงให้เห็นดังรูปที่ ??

และพิกัดเหล่านี้สัมพันธ์กับระบบพิกัดฉาก โดยที่ขนาดของเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} สามารถเขียนได้เป็น

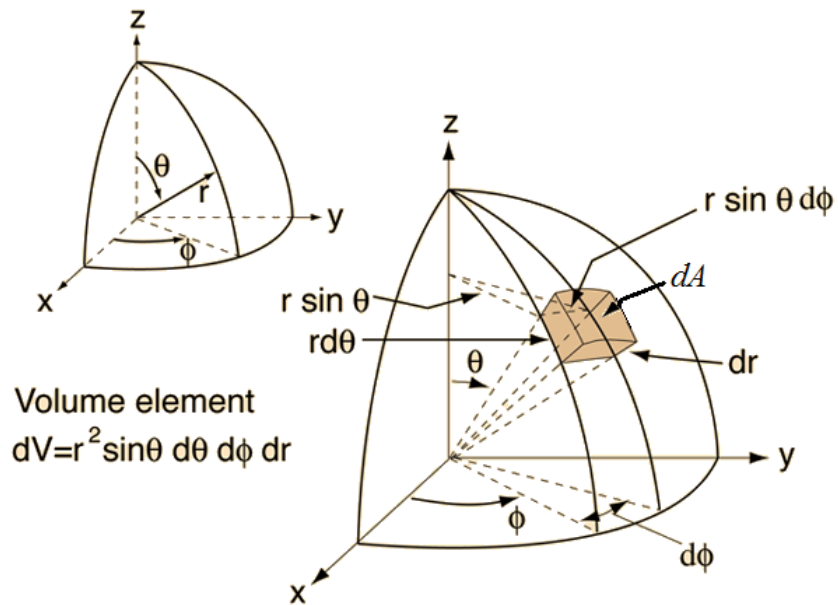
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{constant} \quad (1.3.14)$$

มุม θ ที่ทำกับแกน z หาได้จากความสัมพันธ์

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) = \text{constant} \quad (1.3.15)$$

และมุม ϕ บนระนาบ xy สามารถหาได้จากสมการ

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{constant} \quad (1.3.16)$$



ภาพที่ 1.7: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนต่อมาได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่ง

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \hat{r} \\ &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \\ &= r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k} \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

และอนุพันธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งเขียนได้เป็น

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (1.3.19)$$

นอกจากนี้ยังมีส่วนของพื้นที่น้อยๆ (area element, dA) ที่มีรัศมี r คงที่ และส่วนของมุมตัน (solid angle, $d\Omega$) ที่รองรับพื้นที่ dA นี้ สามารถเขียนได้ดังนี้ ตามลำดับ

$$dA = d\sigma_{\theta\phi} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.3.20)$$

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.3.21)$$

และการอินทิเกรตตลอดทั้งพื้นผิวทรงกลม จะได้ว่า

$$\int d\Omega = 4\pi \quad (1.3.22)$$

นอกจากนี้ยังมีส่วนของปริมาตรน้อยๆ (volume element) ของพิกัดเชิงขั้วทรงกลมเขียนได้เป็น

$$d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega \quad (1.3.23)$$

ในส่วนของเวกเตอร์หน่วยในระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ สามารถเขียนความสัมพันธ์กับระบบพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

และในทางกลับกันเราก็จะได้

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{j} &= \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{k} &= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

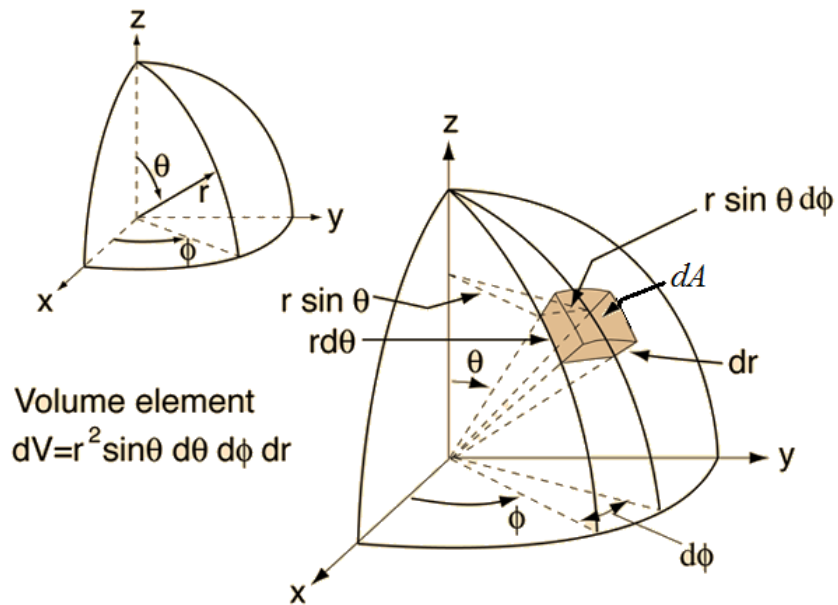
ส่วนของการดำเนินการขั้นสูงเกี่ยวกับ ∇ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (1.3.26)$$

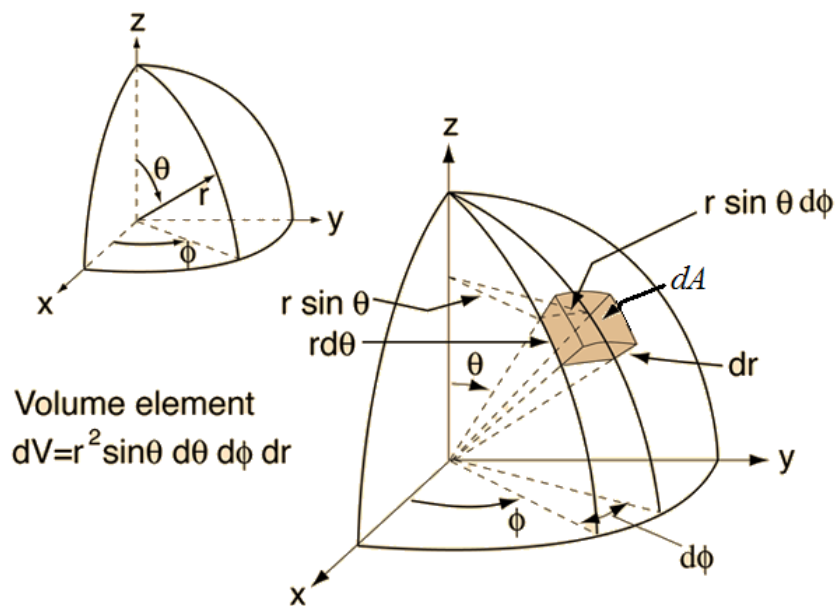
$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (1.3.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \psi &= \nabla^2 \psi \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\phi \end{vmatrix} \quad (1.3.29)$$



ภาพที่ 1.8: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

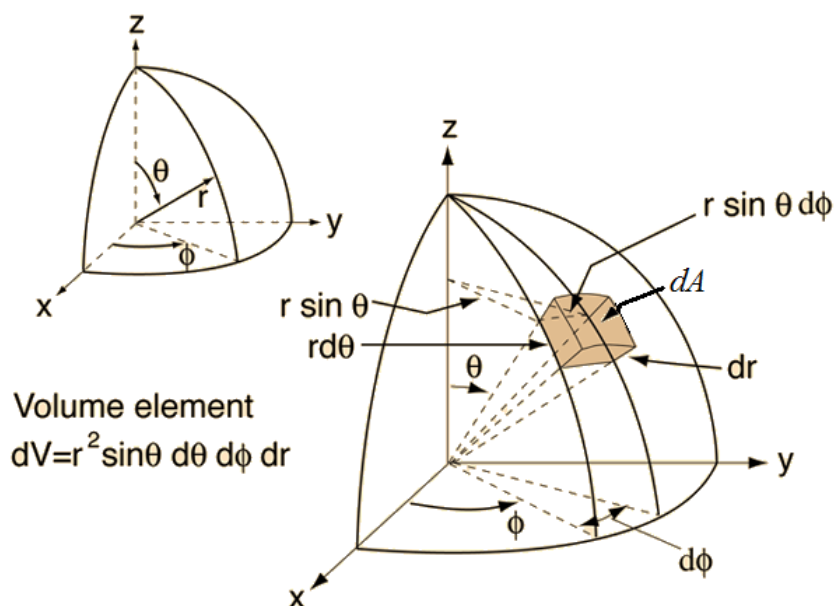


ภาพที่ 1.9: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

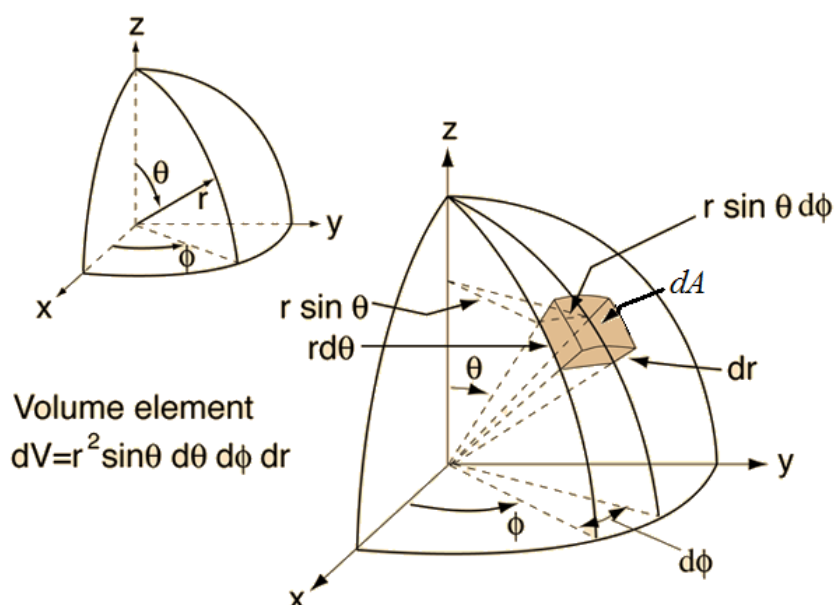
แบบฝึกหัด

1. จากสมการ

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times [\nabla \times A_\phi(r, \theta) \hat{\phi}] \quad (1.3.30)$$



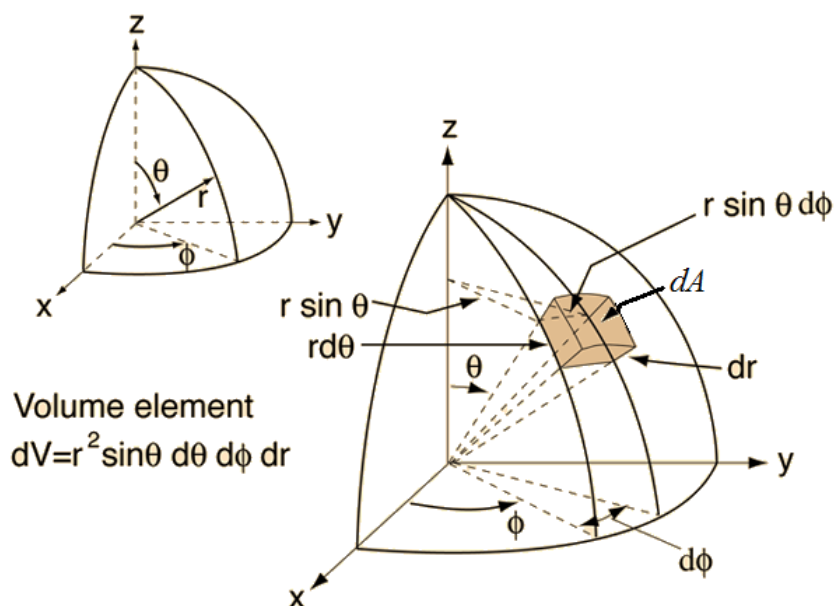
ภาพที่ 1.10: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)



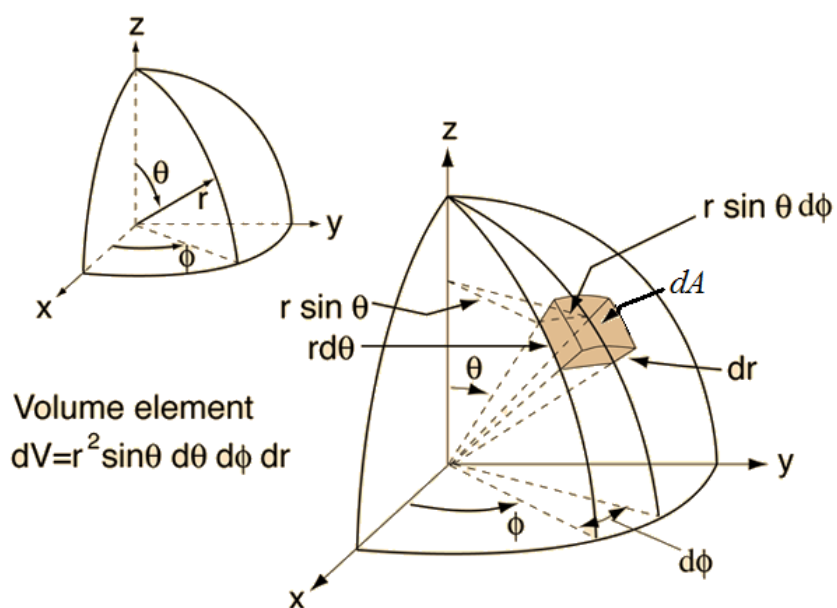
ภาพที่ 1.11: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

จงหาผลลัพธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ข้อแนะนำ ให้ทำการหาเคิร์ลในระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลมสองครั้ง

2. จงหาองค์ประกอบของความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ในระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม โดย



ภาพที่ 1.12: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

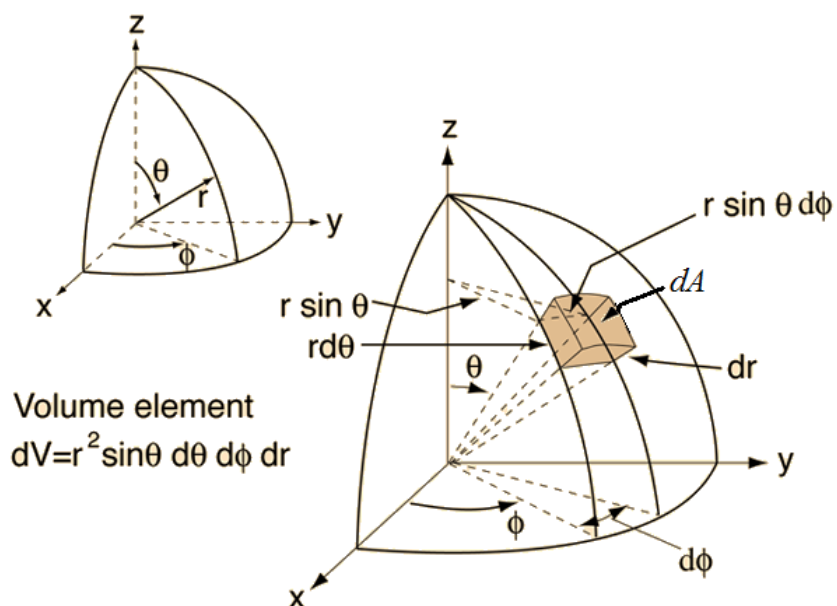


ภาพที่ 1.13: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

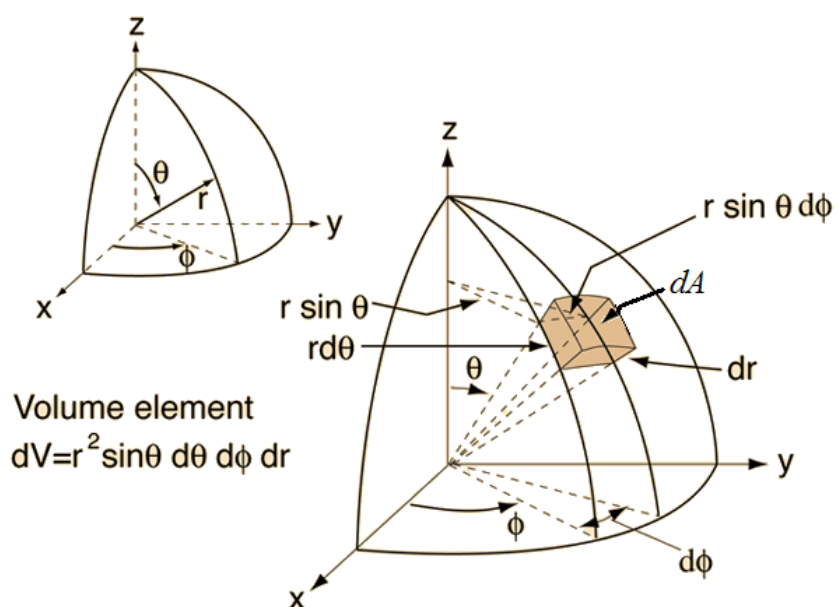
เวกเตอร์ตำแหน่งเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \hat{r}(t) \\ &= r(t) \left[\sin \theta(t) \cos \phi(t) \hat{i} + \sin \theta(t) \sin \phi(t) \hat{j} + \cos \theta(t) \hat{k} \right] \end{aligned}$$

โดยที่ $\dot{r} = dr/dt$, $\dot{\theta} = d\theta/dt$, $\dot{\phi} = d\phi/dt$



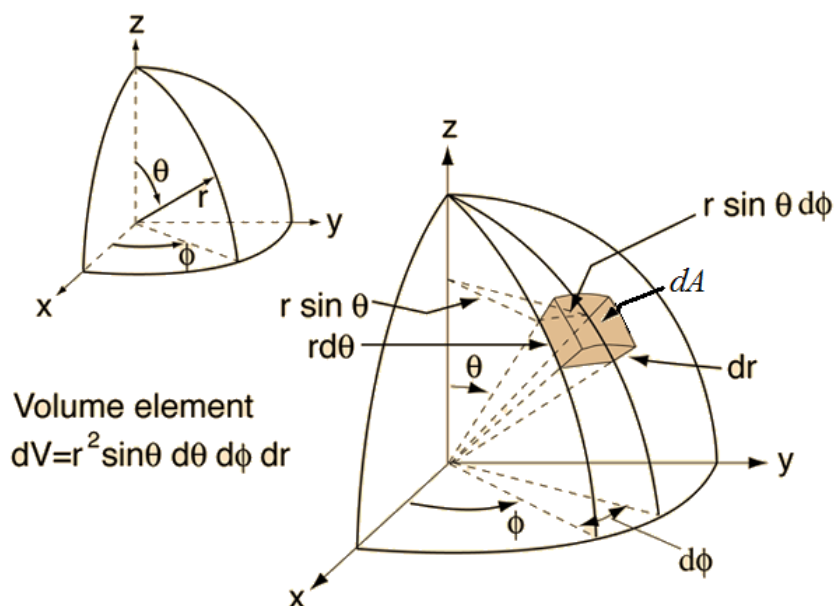
ภาพที่ 1.14: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)



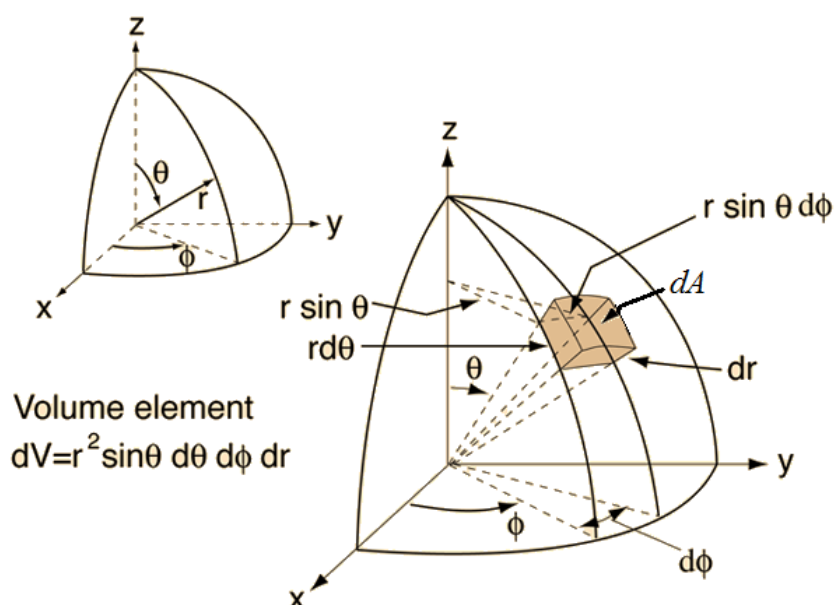
ภาพที่ 1.15: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

1.4 เทนเซอร์เบื้องต้น

เทนเซอร์ (tensor) เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ชนิดหนึ่ง ซึ่งมีความสำคัญทางฟิสิกส์เป็นอย่างยิ่ง ปริมาณ



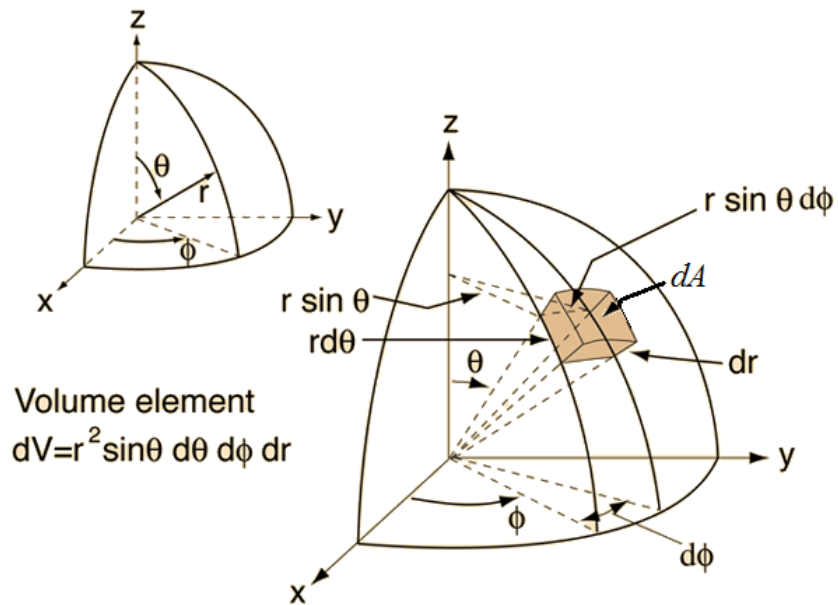
ภาพที่ 1.16: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)



ภาพที่ 1.17: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

สเกลาร์ และเวกเตอร์ ก็เป็นกรณีเฉพาะของเทนเซอร์เช่นเดียวกัน นั่นคือ สเกลาร์เป็น เทนเซอร์แรงค์ศูนย์ (tensor of rank 0) ส่วนเวกเตอร์เป็น เทนเซอร์แรงค์หนึ่ง (tensor of rank 1) โดยในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์มีองค์ประกอบทั้งหมด $3^1 = 3$ ตัว และถ้าเป็นเทนเซอร์แรงค์ n จะมีองค์ประกอบทั้งหมด 3^n ตัว¹

¹ในระบบพิกัด N มิติ สำหรับเทนเซอร์แรงค์ n จะมีองค์ประกอบทั้งหมด N^n ตัว



ภาพที่ 1.18: ภาพแสดงระบบพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ที่ระบุพิกัดด้วย (r, θ, ϕ) (ตกแต่งภาพเพิ่มเติมจากอินเทอร์เน็ต)

1.4.1 การแปลงเทนเซอร์ (Tensor Transformation) พิจารณาการแปลงของเทนเซอร์แรงค์หนึ่ง หรือการแปลงเวกเตอร์ (vector transformation) เราสามารถเขียนได้เป็น

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad (1.4.1)$$

เมื่อ a_{ij} เป็น cos ของมุมระหว่างแกน x'_i กับแกน x_j หรือเขียนในรูปของอนุพันธ์ได้เป็น

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.4.2)$$

โดยที่ $a_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$ ดังนั้นเมื่อเราใช้นิยามของ a_{ij} ดังนี้แล้ว เราจึงสามารถเขียนการแปลงเวกเตอร์จากสมการ (??) ได้ใหม่เป็น

$$A'^i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j \quad (1.4.3)$$

และเรียกว่าเป็น *คอนทราวาเรียนเวกเตอร์* (contravariant vector) ซึ่งเป็นการเขียนอินเดกซ์ของเวกเตอร์เป็นตัวอินเดกซ์บน (superscript index) และในกรณีนี้สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก เราจะกำหนดให้ $x^i = x_i$ นับตั้งแต่นี้ไป นอกจากนี้ยังมีกรณีที่เขียนอินเดกซ์ของเวกเตอร์เป็นตัวอินเดกซ์ล่าง (subscript index) ซึ่งเขียนได้เป็น

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \quad (1.4.4)$$

และเรียกว่า *โควาเรียนท์เวกเตอร์* (covariant vector) และในเฉพาะระบบพิกัดฉากเท่านั้น เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = a_{ij} \quad (1.4.5)$$

สำหรับเทนเซอร์ตั้งแต่แรงค์สอง (tensor of rank 2) ขึ้นไป เราสามารถที่จะเขียนอินเดกซ์ได้ทั้งแบบ โควาเรียนท์, คอนทราวาเรียนท์ หรือแบบผสมก็ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl} \\ B_j^i &= \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B_l^k \\ C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} C_{kl} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า

เทนเซอร์เป็นปริมาณที่องค์ประกอบของมันมีการจัดการด้วยอินเดกซ์หนึ่งตัวหรือมากกว่านั้น โดยจำนวนของอินเดกซ์เราเรียกว่าแรงค์ของเทนเซอร์ (rank of tensor) เช่น เทนเซอร์แรงค์ศูนย์ (สเกลาร์) A , เทนเซอร์แรงค์หนึ่ง (เวกเตอร์) A^i , เทนเซอร์แรงค์สอง A^{ij} หรือ A_j^i หรือ A_{ij} เป็นต้น

1.4.2 สมบัติของเทนเซอร์ (Tensor Properties)

สำหรับการบวก การลบ ของเทนเซอร์เราสามารถเขียนได้เป็น

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij} \quad (1.4.7)$$

นอกจากนี้ยังมีสิ่งที่เรียกว่า ธรรมเนียมปฏิบัติการบวก (summation convention) ซึ่งหมายถึงการบวกเทนเซอร์โดยไม่เขียนเครื่องหมาย การบวก \sum และถือว่ามีครบทุกอัน กรณีที่มีอินเดกซ์ซ้ำกัน ตัวอย่างเช่น จากการแปลงเทนเซอร์ ในสมการ (??) เราสามารถเขียนได้เป็น

$$B_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B_l^k \quad (1.4.8)$$

จะเห็นว่ามีครบทุกอันผ่านอินเดกซ์ที่ซ้ำกันทางด้านขวา คือ อินเดกซ์ k และ l และนี่เป็นสิ่งที่เรียกว่า ธรรมเนียมปฏิบัติการบวกของไอน์สไตน์ (Einstein's summation convention) หรือเรียกสั้นๆว่า ธรรมเนียมปฏิบัติการบวก ในการนี้เราสามารถโยงเข้ากับโครเนคเกอร์เดลต้าฟังก์ชัน δ_l^k ได้ดังนี้

$$\delta_l^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \quad (1.4.9)$$

และจากนิยามของไครนเนคเกอร์เดลต้า เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta_j^i \quad (1.4.10)$$

ดังนั้น สำหรับการแปลงของไครนเนคเกอร์เดลต้าฟังก์ชัน สามารถเขียนได้เป็น

$$\delta_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \delta_l^k \quad (1.4.11)$$

กรณีที่อินเดกซ์ซ้ำกันนอกจากจะหมายถึงการบวกกันแล้ว เรายังสามารถทำการยุบอินเดกซ์ (index contraction)

ได้อีกด้วย โดยผ่านการใช้ไครนเนคเกอร์เดลต้าฟังก์ชัน

$$B_i^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} B_l^k = \frac{\partial x^l}{\partial x^k} B_l^k \quad (1.4.12)$$

ในกรณีนี้ ส่วนสุดท้ายจะมีการลดรูปของอินเดกซ์และเขียนในรูปไครนเนคเกอร์เดลต้า คือ $\delta_i^i = 1$ แต่ละไว้ในฐานที่เข้าใจ หรือสามารถเขียนให้ชัดเจนได้เป็น

$$B_i^i = \delta_i^i \delta_k^l B_l^k = \delta_k^l B_l^k = B_k^k \quad (1.4.13)$$

หรือสามารถเขียนพิจารณาได้ง่ายๆ จากเทนเซอร์แรงค์ n ดังนี้

$$A^{ijklm}_{klmst} \dots^{tuv}_{\dots vw} = A^{ij}_{\dots s} \dots^u_{\dots w} \quad (1.4.14)$$

นั่นคือ มีการใช้ธรรมเนียมปฏิบัติการบวก หรือใส่ไครนเนคเกอร์เดลต้าฟังก์ชันเข้าไปสำหรับอินเดกซ์ที่ซ้ำกัน คือ $\delta_k^k = 1$ นั่นเอง ซึ่งจากสมการข้างบนจะเห็นว่าการยุบอินเดกซ์ (index contraction) เนื่องจากการใส่ไครนเนคเกอร์เดลต้าฟังก์ชันเข้าไปสำหรับอินเดกซ์ k, l, m, t , และ v จึงทำให้เกิดการลดรูปของเทนเซอร์จากเทนเซอร์แรงค์ n เป็นเทนเซอร์แรงค์ $n - 10$ เพราะอินเดกซ์มีการยุบหายไป 10 ตัวนั่นเอง

นอกจากนี้การเขียนสลับอินเดกซ์จะสามารถเขียนสลับได้และจะให้ค่าเหมือนเดิมหรือต่างออกไป ดังนี้

$$A^{mn} = A^{nm} \quad (1.4.15)$$

ซึ่งเราเรียกว่าเป็น *เทนเซอร์แบบสมมาตร* (symmetric tensor) และอีกรูปแบบหนึ่ง

$$A^{mn} = -A^{nm} \quad (1.4.16)$$

ซึ่งเรียกว่า *เทนเซอร์แบบอสมมาตร* (antisymmetric tensor) และเราสามารถเขียนเทนเซอร์แรงค์สองในแบบผสมทั้งกรณีสมมาตรและอสมมาตรได้ดังนี้

$$A^{mn} = \frac{1}{2} (A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2} (A^{mn} - A^{nm}) \quad (1.4.17)$$

โดยที่ในวงเล็บแรกทางขวามือเป็นส่วนของเทนเซอร์แบบสมมาตร และในวงเล็บที่สองของทางขวามือเป็นส่วนของเทนเซอร์แบบอสมมาตร

บทที่ 2

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

2.1 กลศาสตร์คลาสสิก

วิชากลศาสตร์ (Mechanics) เป็นการศึกษาว่าสิ่งต่างๆมีการเคลื่อนที่ได้อย่างไร เช่น ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์ได้อย่างไร, นักสกีเคลื่อนที่ลงทางลาดชันได้อย่างไร, หรืออิเล็กทรอนิกส์เคลื่อนที่รอบนิวเคลียสในอะตอมได้อย่างไร เป็นต้น นานมาแล้วเราทราบว่าชาวกรีกเป็นชนกลุ่มแรกที่เกี่ยวข้องกับวิชากลศาสตร์อย่างจริงจังมากกว่า สองพันปีก่อน วิชากลศาสตร์ของชาวกรีกได้แสดงให้เห็นขั้นตอนของการวิวัฒนาการของวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ อย่างเป็นขั้นตอน แต่อย่างไรก็ตาม แนวคิดของชาวกรีกในยุคนั้นก็ยังมิข้อผิดพลาดที่ร้ายแรงตามมาตรฐานของยุคสมัยใหม่ แต่เราก็จะไม่สนใจในเอกสารนี้ การพัฒนาของวิชากลศาสตร์ที่เรารู้จักกันในปัจจุบันเริ่มต้นจากงานของกาลิเลโอ (Galileo) (ค.ศ. 1564 - ค.ศ. 1642) และนิวตัน (Newton) (ค.ศ. 1642 - ค.ศ. 1727) และจากการคิดกฎการเคลื่อนที่สามข้อของนิวตัน ซึ่งนั่นจะเป็นจุดเริ่มต้นของเราในเอกสารนี้

ในช่วงปลายของศตวรรษที่ 18 และตอนต้นของศตวรรษที่ 19 การพัฒนาวิชากลศาสตร์ได้มีสองแนวทางที่แตกต่างจากวิชากลศาสตร์ของนิวตัน ซึ่งได้เรียกตามชื่อของผู้คิดค้น ได้แก่ นักคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ชาวฝรั่งเศส “ลากรางจ์” (Lagrange) (ค.ศ. 1736 - ค.ศ. 1813) เรียกว่า “กลศาสตร์ลากรางจ์” และนักคณิตศาสตร์ชาวไอร์แลนด์ “ฮามิลตัน” (Hamilton) (ค.ศ. 1805 - ค.ศ. 1865) เรียกว่า “กลศาสตร์ฮามิลตัน” สำหรับแนวทางของกลศาสตร์ลากรางจ์ และกลศาสตร์ฮามิลตันนั้นมีความสอดคล้องกับกลศาสตร์นิวตัน แต่แนวทางทั้งสองนี้สามารถจัดการแก้ปัญหาต่างๆที่มีความสลับซับซ้อนได้ดีกว่ากลศาสตร์นิวตัน และยังมีการเปลี่ยนแปลงในหลากหลายด้านในการพัฒนาแนวคิดยุคใหม่ ในบริบทของคำว่า “กลศาสตร์คลาสสิก” (Classical Mechanics) นั้นบางครั้งก็ยังคงไม่ชัดเจน แต่ตามความเข้าใจโดยทั่วไป ก็จะหมายความว่ากลศาสตร์ทั้งสามแนวทางนี้

จนกระทั่งในช่วงเริ่มต้นของศตวรรษที่ยี่สิบ ดูเหมือนว่า กลศาสตร์คลาสสิก จะกลายเป็นส่วนหนึ่งในวิชากลศาสตร์เท่านั้น พุดให้ถูกต้องคือ เฉพาะส่วนที่อธิบายถึงการเคลื่อนที่ทุกชนิดที่เป็นไปได้นั่นเอง ในภายหลัง ในช่วงยี่สิบปีนับตั้งแต่ปี ค.ศ. 1905 ถึง ค.ศ. 1925 เป็นที่ทราบกันอย่างชัดเจนว่ากลศาสตร์คลาสสิกไม่สามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีการเคลื่อนที่ ด้วยอัตราเร็วใกล้อัตราเร็วของแสงได้อย่างถูกต้อง และยังไม่สามารถอธิบายถึงอนุภาคขนาดเล็ก (microscopic particles) ภายในอะตอมและโมเลกุลได้อย่างถูกต้องเช่นกัน ผลของมันทำให้เกิดการพัฒนาทฤษฎีรูปแบบใหม่สองแนวทางที่สมบูรณ์แบบขึ้นมา นั่นคือ กลศาสตร์

สัมพัทธภาพ (Relativistic Mechanics) สำหรับใช้อธิบายการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วสูง และกลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) สำหรับใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคขนาดเล็ก

แม้ว่ากลศาสตร์คลาสสิกจะถูกแทนที่ด้วยกลศาสตร์สัมพัทธภาพ และกลศาสตร์ควอนตัมในแต่ละแนวทาง แต่ยังมีช่วงของความสนใจ และปัญหาที่น่าสนใจที่กว้างขวาง ซึ่งกลศาสตร์คลาสสิกสามารถใช้อธิบายได้อย่างสมบูรณ์และถูกต้องในเรื่องการเคลื่อนที่เหล่านั้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับการมาถึงของทฤษฎีความยุ่งเหยิง (Chaos Theory) ในช่วงสิบยี่สิบปีล่าสุดนี้ การศึกษาวิจัยด้านกลศาสตร์คลาสสิกมีความเข้มข้นมากขึ้น และหัวข้อเหล่านั้นก็ได้รับความสนใจอย่าง มากในวงการฟิสิกส์

2.2 อวกาศและเวลา

กฎการเคลื่อนที่สามข้อของนิวตันได้มีแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญอยู่สี่อย่าง คือ แนวคิดเกี่ยวกับอวกาศ (space), เวลา (time), มวล (mass) และแรง (force) ในหัวข้อนี้เราจะทำการพูดถึงสองสิ่งแรกก่อน นั่นคือ อวกาศกับเวลา โดยจะอธิบายถึงมุมมองแบบคลาสสิกเกี่ยวกับอวกาศและเวลา ซึ่งจะทบทวนเรื่องของเวกเตอร์เล็กน้อยก่อนที่จะพูดถึงการระบุจุดในอวกาศ

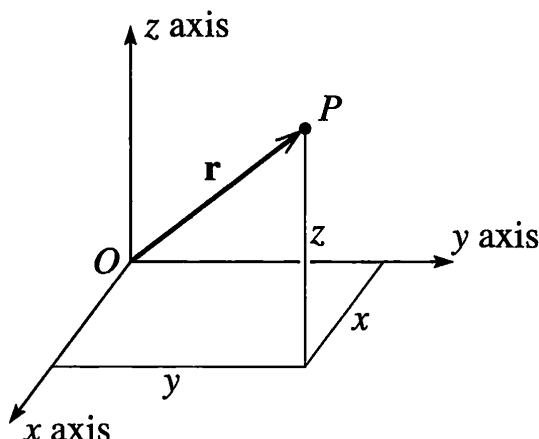
2.2.1 อวกาศ

แต่ละจุด P ในอวกาศสามมิติที่เราอาศัยอยู่นี้ สามารถระบุได้โดยเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} ซึ่งสามารถระบุขนาดและทิศทางของจุด P จากจุดกำเนิด O ดังรูปที่ ?? การระบุเวกเตอร์นี้สามารถทำได้หลายวิธี แต่วิธีหนึ่งที่คุ้นเคยกันดีคือการบอกในรูปของพิกัด (x, y, z) ในระบบพิกัดฉาก วิธีการที่นิยมก็มักจะระบุค่าพร้อมกับเวกเตอร์หน่วย (unit vector) คือ \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} ที่มีทิศทางชี้ไปตามแนวแกนทั้งสามของระบบพิกัดฉาก และเราสามารถเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งได้ดังนี้

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (2.2.1)$$

ในงานพื้นฐาน มันจะดีกว่าถ้าเราเลือกใช้สัญลักษณ์อย่างที่ใช้ในสมการที่ (??) และใช้มันไปเรื่อยๆ สำหรับในงานที่มีระดับที่ยากขึ้นไป มันแทบจะเป็นไปไม่ได้เลยที่จะหลีกเลี่ยงการใช้สัญลักษณ์ที่แตกต่างกันมากมาย ผู้แต่งตำราต่างก็มักจะมีการใช้สัญลักษณ์ที่แตกต่างกันไปด้วย (ตัวอย่างสัญลักษณ์ของเวกเตอร์หน่วยที่นิยมกันแบบอื่น คือ การใช้ในรูปแบบ \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} แต่ในเอกสารนี้จะใช้รูปแบบ \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} ยิ่งกว่านั้น สัญลักษณ์แทบทุกแบบมักมีข้อบกพร่องของมันเอง ซึ่งสามารถทำให้มีความไม่เหมาะสมในการใช้งานในบางโอกาส

²ในที่นี้ผู้แปลจะใช้สัญลักษณ์ \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} แทนเวกเตอร์หน่วย เช่นเดียวกับกับตำราต้นฉบับ สำหรับเนื้อหานับจากนี้เป็นต้นไป ซึ่งอาจจะแตกต่างจากเนื้อหาในบทแรก ที่มีการใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์หน่วยด้วย \hat{i} , \hat{j} , \hat{k}



ภาพที่ 2.1: จุด P ถูกระบุด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} ซึ่งบอกถึงระยะของจุด P เทียบกับจุดกำเนิด O โดยเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} สามารถระบุได้ด้วยพิกัด (x, y, z) สัมพันธ์กับแกน $Oxyz$

บางครั้ง จะเป็นการสะดวกกว่า ถ้าเราจะเขียนการบอกเวกเตอร์ตำแหน่งแบบย่อๆ จากสมการที่ (??) สามารถเขียนย่อได้เป็น

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (2.2.2)$$

จะเห็นว่าสัญลักษณ์นี้ไม่สอดคล้องกับสมการที่ (??) เท่าไรนัก แต่มันก็สมบูรณ์แบบชัดเจน และยืนยันได้ว่า \vec{r} เป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบเป็น x, y, z จริงๆ เมื่อสัญลักษณ์ดังสมการที่ (??) มีความสะดวกมากกว่า เราก็จะใช้ในรูปแบบนี้เป็นหลัก สำหรับปริมาณเวกเตอร์ทั้งหลาย เราจะระบุองค์ประกอบแต่ละแนวแกนด้วยตัวห้อย x, y, z เช่น เวกเตอร์ความเร็ว \vec{v} จะมีองค์ประกอบแต่ละแนวแกนเป็น v_x, v_y, v_z , เวกเตอร์ความเร่ง \vec{a} จะมีองค์ประกอบแต่ละแนวแกนเป็น a_x, a_y, a_z เป็นต้น

เมื่อสมการของเรามีความซับซ้อนมากขึ้น มันคงไม่สะดวกถ้าเราจะเขียนองค์ประกอบของ สมการทั้งสามในรูปการบวกกันแบบสมการที่ (??) ดังนั้นส่วนใหญ่มักใช้เครื่องหมายสัญลักษณ์การบวก \sum แทนเพื่อให้สามารถเขียนได้ในพจน์เดียว ในการนี้บางครั้งสำหรับองค์ประกอบทั้งสามในแนวแกน x, y, z ของเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} จะถูกเขียนใหม่ในรูป r_1, r_2, r_3 และเวกเตอร์หน่วยทั้งสาม $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ก็จะถูกเขียนใหม่เป็น $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ด้วยเช่นกัน นั่นคือ เราจะนิยามองค์ประกอบ

$$r_1 = x, \quad r_2 = y, \quad r_3 = z, \quad (2.2.3)$$

และเวกเตอร์หน่วย

$$\hat{e}_1 = \hat{x}, \quad \hat{e}_2 = \hat{y}, \quad \hat{e}_3 = \hat{z} \quad (2.2.4)$$

เมื่อสัญลักษณ์ \hat{e} นี้ใช้แทนเวกเตอร์หน่วย (e นี้มาจากภาษาเยอรมันจากคำว่า “eins” ซึ่งแปลว่า “หนึ่ง”) และ

จากการใช้สัญลักษณ์แบบนี้ สมการที่ (??) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 r_i\hat{e}_i \quad (2.2.5)$$

จากสมการที่มีรูปแบบง่ายๆ ดังสมการที่ (??) นั้นไม่ได้มีประโยชน์มากกว่าสมการที่ (??) เลย เพียงแต่มีความสะดวกในการเขียนมากกว่าเท่านั้นเอง

2.2.2 การดำเนินการทางเวกเตอร์

ในการเรียนวิชากลศาสตร์ เราจะได้เจอการดำเนินการหลายแบบซ้ำๆ ที่ดำเนินการกับเวกเตอร์ ถ้า \vec{r} และ \vec{s} เป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบ เป็น $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ และ $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ แล้วการบวก (หรือการหาผลลัพธ์) ของ $\vec{r} + \vec{s}$ จะหาได้จากการบวกขององค์ประกอบแต่ละแนวแกน นั่นคือ

$$\vec{r} + \vec{s} = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3) \quad (2.2.6)$$

ตัวอย่างสำคัญของการบวกเวกเตอร์ คือ การหาแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุ คือ เมื่อมีแรงสองแรง \vec{F}_a และ \vec{F}_b กระทำต่อวัตถุชิ้นหนึ่ง ผลที่ได้จะเหมือนกับมีแรงหนึ่งแรง ที่เรียกว่าแรงลัพธ์ (resultant force) ที่เกิดจากการบวกเวกเตอร์แรง

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b \quad (2.2.7)$$

ซึ่งจะเหมือนเช่นเดียวกันกับกฎการบวกเวกเตอร์ สมการที่ (??)

ถ้า c เป็นปริมาณสเกลาร์ (หรือก็คือ ตัวเลขใดๆ) และ \vec{r} เป็นปริมาณเวกเตอร์ ผลคูณ $c\vec{r}$ สามารถหาได้จาก

$$c\vec{r} = (cr_1, cr_2, cr_3) \quad (2.2.8)$$

นั่นหมายความว่า $c\vec{r}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน³กับเวกเตอร์ \vec{r} และมีขนาดเท่ากับค่าของ c คูณกับขนาดของเวกเตอร์ \vec{r} ตัวอย่างที่สำคัญอันหนึ่งคือตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน แรงลัพธ์ \vec{F} ที่กระทำกับวัตถุจะมีค่าเท่ากับผลคูณ $m\vec{a}$ เสมอ ดังสมการที่ (??)

การหาผลคูณแบ่งออกเป็นสองวิธีการที่สำคัญ ซึ่งสามารถสร้างได้จากสองเวกเตอร์ใดๆ คือ การคูณแบบสเกลาร์ หรือ ก

³ทั้งนี้ถ้าค่าของสเกลาร์ c มีค่าเป็นลบ ผลคูณ $c\vec{r}$ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ \vec{r}

⁴สามารถดูรายละเอียดได้จากบทที่ 1 ในหัวข้อ 1.1.1 การคูณแบบดอท

ซึ่งถ้าเรามีเวกเตอร์ \vec{r} กับเวกเตอร์ \vec{s} เราจะหาผลคูณจากการคูณแบบนี้ได้เป็น

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{s} &= rs \cos \theta \\ &= r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 \\ &= \sum_{n=1}^3 r_n s_n\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

เมื่อ r กับ s เป็นขนาดของเวกเตอร์ \vec{r} และเวกเตอร์ \vec{s} , θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง ตัวอย่างเช่น ถ้ามีแรง \vec{F} กระทำให้วัตถุมีการกระจัดเป็นระยะทางน้อยๆ $d\vec{r}$ แล้วงานที่ทำเนื่องจากแรงนี้ก็ทำได้จากการคูณแบบสเกลาร์ของ $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ แล้วจะให้ผลลัพธ์ดังสมการที่ (??) นั่นเอง นอกจากนี้ การคูณแบบสเกลาร์ยังใช้เพื่อหาขนาดของเวกเตอร์ เช่น การหาขนาด (หรือความยาว) ของเวกเตอร์ \vec{r} ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{r}|$ หรือ r , จากการใช้ทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras's theorem) ขนาดของเวกเตอร์ \vec{r} จะให้ผลลัพธ์เป็น $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ และจากสมการที่ (??) เราสามารถเขียนได้คล้ายๆ กันดังนี้

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} \quad (2.2.10)$$

การหาผลคูณแบบสเกลาร์ของ $\vec{r} \cdot \vec{r}$ มักจะเขียนย่อเป็น r^2

การคูณแบบที่สองของสองเวกเตอร์ใดๆ \vec{r} และ \vec{s} คือ การคูณแบบเวกเตอร์ หรือ การคูณแบบครอส (vector product) โดยผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ตัวใหม่ คือ $\vec{p} = \vec{r} \times \vec{s}$ และมียกประกอบแต่ละแนวแกนเป็น

$$\begin{aligned}p_x &= r_y s_z - r_z s_y \\ p_y &= r_z s_x - r_x s_z \\ p_z &= r_x s_y - r_y s_x\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

หรือสามารถเขียนในรูปของการหาดีเทอร์มิแนนต์ (determinant หรือ det) ได้ดังนี้

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} \quad (2.2.12)$$

ซึ่งเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้งเวกเตอร์ \vec{r} และเวกเตอร์ \vec{s} ดังรูปที่ ?? ของบทที่ 1 โดยมีทิศทางเป็นไปตามกฎมือขวา (right-hand rule) และขนาดมีค่าเป็น $rs \sin \theta$ การคูณแบบเวกเตอร์นี้มีความสำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบหมุน ตัวอย่างเช่น เมื่อมีแรง \vec{F} กระทำที่จุดหนึ่งของวัตถุ และจุดนั้น

⁵สามารถดูรายละเอียดได้จากบทที่ 1 ในหัวข้อ 1.1.2 การคูณแบบครอส

มีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น \vec{r} จากจุดกำเนิด O แล้วทำให้วัตถุนั้นมีการหมุนรอบจุด O เราเรียกผลของแรงที่ทำให้เกิดการหมุนนี้ว่า ทอร์ก (torque, Γ) ซึ่งนิยามมาจากการคูณแบบครอส คือ $\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$

2.2.3 อนุพันธ์ของเวกเตอร์

กฎทางฟิสิกส์ส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับปริมาณเวกเตอร์ และส่วนใหญ่ของกฎเหล่านี้เกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ (derivatives) ของเวกเตอร์ การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์นั้นมีหลากหลายวิธี และมีวิชาที่ว่าด้วยเรื่องเหล่านี้ทั้งหมด เราเรียกว่า วิชาแคลคูลัสของเวกเตอร์ (vector calculus) สำหรับตอนนี้ เราจะพิจารณาในส่วนของการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์อย่างง่าย ๆ เท่านั้น เช่น การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเทียบกับเวลา ซึ่งในที่นี้ ได้แก่ ความเร็ว (velocity) $\vec{v}(t)$ ของอนุภาค หาได้จากการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค $\vec{r}(t)$ นั่นคือ $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ หรือทำนองเดียวกันกับเวกเตอร์ความเร่ง ซึ่งหาได้จากการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ความเร็ว นั่นคือ $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

นิยามของการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์จะคล้ายกับของสเกลาร์ เราจะพิจารณาว่า ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่ขึ้นกับเวลา t แล้วเราสามารถนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์ได้ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2.13)$$

เมื่อ $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ เป็นการเปลี่ยนแปลงของ x เมื่อเวลาผ่านไปจาก t เป็น $t + \Delta t$ เช่นเดียวกันกับเวกเตอร์ใดๆ $\vec{r}(t)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ขึ้นกับเวลา t เราจะนิยามอนุพันธ์ของมัน ดังนี้

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.2.14)$$

เมื่อ

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (2.2.15)$$

ซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ในที่นี้ปริมาณเวกเตอร์ทั้งหมดที่เราพิจารณาจะถือว่าเป็นปริมาณที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) และการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ก็จะมีสมบัติที่น่าสนใจ ตัวอย่างเช่น ถ้าเรามีเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ และเวกเตอร์ $\vec{s}(t)$ ซึ่งเวกเตอร์ทั้งสองนั้นขึ้นอยู่กับเวลา t แล้วอนุพันธ์ของผลบวกของเวกเตอร์ทั้งสอง คือ

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} + \vec{s}) = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (2.2.16)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ แล้วอนุพันธ์ของผลคูณ $f(t)\vec{r}(t)$ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d}{dt}(f\vec{r}) = f \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{df}{dt}\vec{r} \quad (2.2.17)$$

ผลลัพธ์หนึ่งที่ควรกล่าวถึง เกี่ยวกับองค์ประกอบของการหาอนุพันธ์ทั้งสามของเวกเตอร์ โดยจะสมมติว่าเวกเตอร์ \vec{r} มีองค์ประกอบเป็น x, y, z ซึ่งเป็นตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไป และสมมติว่าเราต้องการทราบความเร็วของอนุภาค $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ เมื่อต้องการหาอนุพันธ์ของ

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (2.2.18)$$

จากสมการที่ (??) ทำให้สามารถหาอนุพันธ์ของผลบวกทั้งสามเทอมได้ และจากสมการที่ (??) ทำให้ทราบว่าแต่ละเทอมจากการบวก จะให้สองเทอมจากกฎของการหาอนุพันธ์ของการคูณ รวมแล้วจะให้พจน์ทั้งหมดหกเทอม แต่อย่างไรก็ตาม สำหรับเวกเตอร์หน่วย $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ไม่ได้ขึ้นกับเวลา ดังนั้นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์หน่วยทั้งสามมีค่าเป็นศูนย์ และทำให้เหลือเพียงสามเทอม ดังนี้

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \quad (2.2.19)$$

เทียบกับเวกเตอร์ความเร็ว

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \quad (2.2.20)$$

เราพบว่า

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.2.21)$$

จะเห็นว่าองค์ประกอบของแต่ละแนวแกนในระบบพิกัดฉากของ \vec{v} นั้นสอดคล้องกับองค์ประกอบในแต่ละแนวแกนของเวกเตอร์ \vec{r} และผลที่ได้เหล่านี้จะนำไปใช้แก้ปัญหาทางกลศาสตร์พื้นฐาน ในที่นี้จะพบว่าเงื่อนไขที่กล่าวถึงในสมการที่ (??) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อเวกเตอร์หน่วย $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ เป็นค่าคงที่ทั้งหมด ทำให้อนุพันธ์ของพวกเวกเตอร์หน่วยเหล่านี้หายไป สำหรับในระบบพิกัดอื่น อย่างเช่น ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system) เวกเตอร์หน่วยจะไม่เป็นค่าคงที่ และจะทำให้การเขียนเวกเตอร์ฟังก์ชันความเร็ว และความเร่งในพจน์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} ทำได้ยากมาก

2.2.4 เวลา

ในมุมมองทางคลาสสิกจะมองว่าเวลาเป็นปริมาณสากลเดี่ยวๆ t ที่ซึ่งผู้สังเกตทั้งหลายเห็นเหมือนกันทั้งสิ้น นั่นคือ ถ้าผู้สังเกตหลายคนสวมนาฬิกาที่มีความแม่นยำสูงอยู่กับตัว และทั้งหมดมีการเชื่อมต่อกัน เช่นนั้นแล้ว พวกเขาจะรับรู้ถึงเวลาของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นสอดคล้องกัน แน่แน่นอนเราทราบว่า มุมมองแบบนี้ไม่ถูกต้องอย่างแท้จริง ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ ผู้สังเกตสองคนที่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน จะเห็นเวลาไม่สอดคล้องกัน แต่อย่างไรก็ตาม ในมุมมองของกลศาสตร์คลาสสิก ที่อัตราเร็วของทุกสิ่งน้อยกว่าอัตราเร็วแสงมาก ดังนั้นการวัดเวลาที่แตกต่างกันนั้นก็สามารถละทิ้งได้ เมื่อเป็นแบบนี้ต่อไปจะถือเป็นข้อสมมุติฐานของกลศาสตร์คลาสสิกที่จะใช้เวลาเป็นค่าสากลเพียงค่าเดียว เท่านั้น เว้นเสียแต่จะเห็นความกำกวมในการเลือกต้นกำเนิดของเวลา (โดย

ทั่วไปตอนเริ่มต้น เรามักกำหนดให้เวลา $t = 0$) เพราะฉะนั้น ในที่นี้เป็นต้นไป ผู้สังเกตทุกท่านจะเห็นพ้องต่อการใช้เวลาที่มีค่าเดียวกันสำหรับในทุกๆ เหตุการณ์ที่เกิดขึ้น

2.2.5 กรอบอ้างอิง

ปัญหาทางกลศาสตร์คลาสสิกเกือบทั้งหมดเกี่ยวข้องกับการเลือก (ที่ชัดเจน หรือไม่ชัดเจน) *กรอบอ้างอิง* นั่นคือ การเลือกตำแหน่งของจุดกำเนิด และแกน เพื่อระบุตำแหน่งดังเช่นในรูปที่ ?? และการเลือกจุดเริ่มต้นชั่วคราวสำหรับการวัดเวลา ความแตกต่างระหว่างกรอบสองกรอบนั้นน้อยมาก ซึ่งอาจจะแตกต่างเฉพาะการเลือกจุดเริ่มต้นของเวลา เช่น ขณะที่กรอบหนึ่งเลือกระบุ $t = 0$ และอีกกรอบหนึ่งอาจจะระบุเป็น $t' = t_0 \neq 0$ เป็นต้น หรือกระทั่งกรอบทั้งสองมีจุดเริ่มต้นร่วมกันทั้งอวกาศและเวลา แต่แตกต่างกันในการวางตัวในอวกาศทั้งสามแนวแกน ด้วยการเลือกอย่างระมัดระวังในการเลือกกรอบอ้างอิง จะสามารถสร้างความแตกต่างที่เป็นไปได้เหล่านี้ขึ้น ซึ่งคุณอาจจะสามารถทำให้งานของคุณนั้นง่ายขึ้นได้ ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับบล็อกที่เลื่อนที่ลงบนพื้นเอียง มันมักจะทำให้เราเลือกแกนหนึ่งซึ่งลงตามแนวพื้นเอียง เป็นต้น

ความแตกต่างที่สำคัญที่เกิดขึ้นเมื่อกรอบทั้งสองมีการเคลื่อนที่สัมพันธ์กัน นั่นคือ เมื่อจุดกำเนิดของกรอบหนึ่งเคลื่อนที่สัมพันธ์กับอีกกรอบหนึ่ง ในหัวข้อ ?? เราจะพบว่าไม่ใช่กรอบทุกกรอบที่จะมีความสอดคล้องทางกายภาพ⁶ ในกรอบพิเศษบางกรอบ จะเรียกว่า **กรอบเฉื่อย** (inertial frames) กฎพื้นฐานจะถูกต้องเสมอบนกรอบนี้ ที่อยู่ในรูปแบบที่ง่ายๆ (ทั้งนี้เพราะกฎพื้นฐานบนกรอบนี้ คือกฎข้อแรกของนิวตัน เรียกว่ากฎความเฉื่อย จึงเป็นที่มาของชื่อ กรอบเฉื่อย) ถ้ากรอบที่สองมีความเร่ง หรือ *การหมุน* สัมพันธ์กับกรอบเฉื่อย แล้วกรอบที่สองนี้จะเป็นกรอบไม่เฉื่อย (noninertial frame) ในกลศาสตร์คลาสสิก เราควรจะหาว่าความแตกต่างระหว่างกรอบเฉื่อยและกรอบไม่เฉื่อยนั้นคืออะไร ซึ่งมันจะปรากฏอย่างชัดเจนในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

2.3 มวลและแรง

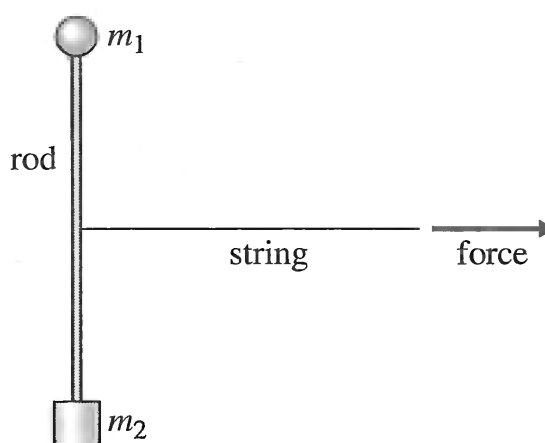
แนวคิดของมวลและแรงเป็นศูนย์กลางในการศึกษากลศาสตร์คลาสสิก นิยามที่เหมาะสมสำหรับแนวคิดเหล่านี้ได้มีนักปรัชญาวิทยาศาสตร์มากมายที่ยึดถือไว้ และเป็นวิชาที่มีการเรียนรู้ทางตำรา และเราไม่ต้องการที่จะสนใจมากนัก เกี่ยวกับปัญหาที่ละเอียดอ่อนเหล่านี้ตอนนี้ ตามเนื้อหาของบทเรียนพื้นฐานในวิชาฟิสิกส์ทั่วไป เราน่าจะมีความคิดที่ดีที่เหมาะสมกับคำถามที่ว่ามวล และแรงคืออะไร และมันง่ายต่อการอธิบายว่าตัวแปรเหล่านี้จะนิยาม และวัดได้อย่างไรในหลายๆ เหตุการณ์จริง

2.3.1 มวล

มวลของวัตถุจะบ่งบอกถึงคุณลักษณะของความเฉื่อยของวัตถุนั้น ซึ่งมันจะต้านการเร่งของวัตถุ เช่น

⁶ข้อความนี้ยังคงถูกต้อง แม้จะใช้ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

หินขนาดใหญ่จะยากต่อการทำให้เร่ง และมวลของมันก็จะมีมาก ส่วนหินก้อนเล็กๆจะง่ายต่อการเร่ง และมวลของมันก็น้อย ในการทำแนวคิดที่เป็นธรรมชาติเหล่านี้สามารถวัดได้ เราต้องนิยามหน่วยของมวล และกำหนดวิธีการวัดมวลของวัตถุใดๆในพจน์ของหน่วยวัดที่เลือก หน่วยของมวลที่ได้รับการเห็นชอบในระดับนานาชาติคือหน่วย “กิโลกรัม” (kilogram, kg) และได้นิยามก้อนมวลหนึ่งกิโลกรัมที่สร้างจากแพลทตินัมผสมอิริเดียม (platinum-iridium) และได้เก็บรักษาไว้ที่ สำนักงานมวลและการวัดนานาชาติ (International Bureau of Weights and Measures) นอกเมืองปารีส ฝรั่งเศส การวัดมวลของวัตถุใดๆ เราต้องทำการเทียบมวล โดยหลักการแล้วสามารถทำได้ด้วยเครื่องชั่งสมดุลความเฉื่อย (inertial balance) ดังแสดงในรูปที่ ?? วัตถุสองชิ้นได้ถูกเปรียบเทียบกัน โดยทำให้ติดอยู่กับปลายของแท่งลวดเบา และแข็ง ซึ่งเมื่อออกแรงดึงตรงกลางเส้นลวดนี้แล้ว ถ้ามวลทั้งคู่เท่ากัน มวลทั้งคู่จะเร่งด้วยอัตราเดียวกัน และเส้นลวดนี้จะเคลื่อนที่โดยไม่มีการหมุน แต่ถ้ามวลทั้งสองไม่เท่ากัน วัตถุที่มวลมากกว่าจะมีการเร่งน้อยกว่า และเส้นลวดนี้จะเกิดการหมุนทันทีที่มันเคลื่อนที่



ภาพที่ 2.2: เครื่องชั่งสมดุลความเฉื่อย (inertial balance) เปรียบเทียบมวล m_1 และมวล m_2 ของวัตถุสองชิ้นที่ติดอยู่ตรงปลายทั้งสองข้างของแท่งลวดแข็งเกร็ง มวลทั้งคู่จะเท่ากันก็ต่อเมื่อแรงที่ให้กระทำกับเส้นลวดตรงกึ่งกลาง จะทำให้มวลทั้งคู่เกิดการเร่งในอัตราที่เท่ากัน นั่นคือเส้นลวดนี้ต้องไม่มีการหมุนเกิดขึ้น

2.3.2 แรง

2.4 กฎข้อหนึ่งและข้อสองของนิวตันในกรอบเฉื่อย

2.5 กฎข้อสามและการอนุรักษ์โมเมนตัม

2.6 กฎข้อสองของนิวตันในระบบพิกัดฉาก

2.7 ระบบพิกัดเชิงขั้วสองมิติ

บรรณานุกรม

- [1] Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D* 15, 1753-1936. [<http://arxiv.org/abs/hep-th/0603057>].
- [2] Ade, P. A. R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C. et al. [Planck Collaboration]. (2015). *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. [<http://arxiv.org/abs/1502.01589>].
- [3] Hinshaw, G., Larson, D., Komatsu, E., Spergel, D. N., Bennett, C. L., Dunkley, J. et al. (WMAP Collaboration). (2012). Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 208(2), 19. [arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO]].
- [4] Gumjudpai, B. (2013). Quintessential power-law cosmology: dark energy equation of state. *Mod. Phys. Lett. A*, 28, 1350122. [arXiv:1307.4552 [astro-ph.CO]].
- [5] Liddle, A. (2015). *An Introduction to Modern Cosmology* (3rd). London:Wiley.
- [6] Colin Barschel. (2007). *Structure Formation in the Universe*.
- [7] Dodelson, S., Gates, E., Turner, M. S. (1996). Cold Dark Matter Models. *Science*, 274, 69-75. <https://doi.org/10.1126/science.274.5284.69> [arXiv:astro-ph/9603081].
- [8] Carlyle, T., & Essayist, S. (1795-1881) The Big Bang Theory and Expansion of the Universe. <http://eldora.as.arizona.edu/~yshirley/Arizona/AST202/BigBang.pdf>
- [9] บุรินทร์ กำจัดภัย. (2563).จักรวาลวิทยา: ปฐมบท (พิมพ์ครั้งที่ 3). ร้านพิชญ์โลกดอทคอม.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก คณิตศาสตร์ที่จำเป็น

ก.1 [สัญกรณ์วิทยาศาสตร์]สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (Scientific Notation) เนื่องจากปริมาณบางอย่างมีค่ามากมายมหาศาล เช่น อัตราเร็วแสงในสุญญากาศเท่ากับ $c = 300\,000\,000\text{ m/s}$ หรือปริมาณบางอย่างก็มีค่าน้อยมากๆ เช่น ความยาวคลื่นแสงสีแดงจากเลเซอร์นีออนเท่ากับ $0.000\,000\,632.8\text{ m}$ เป็นที่ชัดเจนว่าการเขียนปริมาณที่มีค่ามากหรือน้อย ใดๆ ในลักษณะนี้ เป็นเรื่องที่ไม่สะดวกเป็นอย่างมาก ดังนั้นเราจึงเขียนตัวเลขเหล่านี้ด้วย “ตัวเลขแบบวิทยาศาสตร์” หรือเรียกเป็นทางการว่า “สัญกรณ์วิทยาศาสตร์” ซึ่งมีหลักการดังนี้

ตัวเลขในรูปตัวเลขแบบวิทยาศาสตร์สามารถเขียนในรูปของจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 แต่น้อยกว่า 10 คูณกับเลขยกกำลังฐาน 10 ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$A \times 10^n \quad (\text{ก.1})$$

เมื่อ A เป็นจำนวนจริง โดยที่ในกรณีที่ A เป็นจำนวนจริงบวก เราให้ $1 \leq A < 10$ และในกรณีที่ A เป็นจำนวนจริงลบ เราให้ $-10 < A \leq -1$ สำหรับเลขชี้กำลัง n เป็นเลขจำนวนเต็ม การเขียนในรูปแบบตัวเลขวิทยาศาสตร์นอกจากจะเพิ่มประสิทธิภาพการเขียนตัวเลขที่มีค่ามากหรือน้อยแล้ว ยังเป็นตัวช่วยระบุจำนวนเลขนัยสำคัญได้อีกด้วย เช่น วัดระยะทางได้ $1,500\text{ km}$ เราไม่แน่ใจว่ามันมีตัวเลขนัยสำคัญกี่ตัว แต่ถ้าเราเขียนปริมาณนี้แบบเลขวิทยาศาสตร์เราสามารถกำหนดตัวเลขนัยสำคัญได้เลย ในกรณีที่เราให้มีเลขนัยสำคัญ 2 ตัว เราเขียน $1.5 \times 10^3\text{ km}$ กรณีที่ต้องการเลขนัยสำคัญ 4 ตัว เราเขียน $1.500 \times 10^3\text{ km}$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 [สัญกรณ์วิทยาศาสตร์] การเขียนเลขในรูปแบบสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

- $432\,000 = 4.32 \times 10^5$
- $4\,734\,539.342 = 4.734539342 \times 10^6$
- $0.000000000232 = 2.32 \times 10^{-10}$
- $(6 \times 10^3)(4 \times 10^6) = 2.4 \times 10^{10}$
- $\frac{(1.2 \times 10^3)(3 \times 10^4)}{2.5 \times 10^{10}} = 1 \times 10^{-3}$

ก.2 เลขยกกำลัง เลขยกกำลังคือรูปแบบการเขียนตัวเลขในรูปการคูณกันของ “เลขฐาน; a ” จำนวน n ครั้ง เราเรียก n ว่า “เลขชี้กำลัง” ดังนี้

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}} \quad (\text{ก.2})$$

เลขชี้กำลัง n เป็นจำนวนใดๆ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 2 [เลขยกกำลัง] ตัวอย่างการเขียนเลขให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

- $4 = 2^2 = (-2)^2$
- $8 = 2^3$
- $-8 = (-2)^3$
- $9 = 3^2 = (-3)^2$
- $16 = 4^2 = (-4)^2 = 2^4 = (-2)^4$
- $25 = 5^2 = (-5)^2$
- $27 = 3^3$
- $-27 = (-3)^3$
- $\pm 2 = 4^{\frac{1}{2}}$
- $\pm 3 = 9^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1}{16} = 4^{-2}$
- $-\frac{1}{27} = (-3)^{-3}$

ในตัวอย่างด้านบนจะเห็นว่าบางปริมาณมีเลขชี้กำลังเป็นตัวเศษส่วน เราเรียกปริมาณเหล่านี้ว่า “ราก (root)” โดย “รากที่ m ของ x มีค่าเท่ากับ $x^{\frac{1}{m}}$ ” หรือนิยามอีกอย่างว่า a เป็นรากที่ m ของ x ก็ต่อเมื่อ $a^m = x$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3 [ราก] ตัวอย่างของค่ารากที่ m ของ x

- $4^{\frac{1}{2}} = \pm 2$ ดังนั้นรากที่ 2 ของ 4 คือ +2 และ -2
- $27^{\frac{1}{3}} = 3$ ดังนั้นรากที่ 3 ของ 27 คือ 3
- $16^{\frac{1}{2}} = \pm 4$ ดังนั้นรากที่ 2 ของ 16 คือ +4 และ -4
- $16^{\frac{1}{4}} = \pm 2$ ดังนั้นรากที่ 4 ของ 16 คือ +2 และ -2
- $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ ดังนั้นรากที่ 3 ของ -8 คือ -2

เรานิยมเขียนรากที่ m ด้วยสัญลักษณ์ $m\sqrt{}$ เรียกว่า “กรณฑ์ที่ m ” เช่น กรณฑ์ที่ m ของ x แทนด้วยสัญลักษณ์ กรณฑ์คือ $m\sqrt{x}$ เช่น กรณฑ์ที่ 3 ของ 27 เขียนเป็น $\sqrt[3]{27}$ ยกเว้นกรณฑ์ที่ 2 นิยมเขียน \sqrt{x} สัญลักษณ์ $m\sqrt{x}$

เปรียบเสมือนฟังก์ชัน $f(x)$ อันหนึ่ง ดังนั้นถ้าเราเขียนกรณีที่ m ด้วยสัญลักษณ์นี้คำตอบที่ได้ต้องมีคำตอบเดียวตามนิยามของฟังก์ชัน และต้องพิจารณาโดเมนและเรนจ์ด้วย ตัวอย่างถัดไปเป็นการเขียนรากที่สองและกรณีที่ 2

ตัวอย่างที่ 4 [รากที่สองและกรณีที่สอง] แสดงรากที่สองและกรณีที่สอง

- รากที่ 2 ของ 4 คือ $4^{1/2} = \pm 2$ กรณีที่ 2 ของ 4 คือ $\sqrt{4} = +2$
- รากที่ 2 ของ 16 คือ $16^{1/2} = \pm 4$ กรณีที่ 2 ของ 4 คือ $\sqrt{16} = +4$
- รากที่ 2 ของ $\frac{1}{9}$ คือ $(\frac{1}{9})^{1/2} = \pm \frac{1}{3}$ กรณีที่ 2 ของ $\frac{1}{9}$ คือ $\sqrt{\frac{1}{9}} = +\frac{1}{3}$
- รากที่ 2 ของ $\frac{1}{25}$ คือ $(\frac{1}{25})^{1/2} = \pm \frac{1}{5}$ กรณีที่ 2 ของ $\frac{1}{25}$ คือ $\sqrt{\frac{1}{25}} = +\frac{1}{5}$

จะเห็นว่ากรณีที่ 2 ของ x เขียนด้วยสัญลักษณ์ $f(x) = \sqrt{x}$ โดยมีค่าโดเมน $x \geq 0$ และเรนจ์ $f(x) \geq 0$ เสมอสำหรับระบบจำนวนจริง

บ่อยครั้งที่เราแก้สมการแล้วได้คำตอบสุดท้ายเป็นรากที่สอง ซึ่งให้คำตอบออกมาสองคำตอบ

ตัวอย่างที่ 5 [การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่] รถยนต์เคลื่อนที่ด้วยจากหยุดนิ่งความเร่งคงที่ 5 m/s^2 จะใช้

เวลาเท่าใดจึงจะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 100 m

วิธีทำจากสมการการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ เราได้ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ แทนค่า

$$100 \text{ m} = \frac{1}{2}(5 \text{ m/s}^2)t^2$$

ดังนั้น

$$t^2 = 40 \text{ s}^2$$

ยกกำลัง $1/2$ ทั้งสองข้างของสมการเราได้คำตอบคือรากที่สองของ 40 นั่นเอง

$$t = 40^{1/2} \text{ s} = \pm \sqrt{40} \text{ s}$$

และเราต้องเลือกคำตอบที่เป็นบวกนั่นคือเราได้คำตอบสุดท้ายคือ $t = \sqrt{40} \text{ s}$

ก.2.1 คุณสมบัติของเลขยกกำลัง. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m, n เป็นจำนวนเต็มจะได้

- $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

- $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

- $(a^m)^n = a^{mn}$

- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ภาคผนวก ข อักษรกรีก

Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ
Nu	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

ภาคผนวก ค ธาตุและมวลอะตอม

กำหนดให้ Z คือเลขอะตอม A คือเลขมวล และมวลอะตอมอยู่ในหน่วย u

Z	ธาตุ	สัญลักษณ์	A	มวลอะตอม
0	(Neutron)	n	1	1.008 665
1	Hydrogen	H	1	1.007 825
	Deuterium	D	2	2.014 102
	Tritium	T	3	3.016 049
2	Helium	He	3	3.016 029
			4	4.002 603
			5	5.012 22
			6	6.018 886
3	Lithium	Li	6	6.015 121
			7	7.016 003
4	Beryllium	Be	7	7.016 930
			8	8.005 305
			9	9.012 182
5	Boron	B	10	10.012 937
			11	11.009 305
6	Carbon	C	11	11.011 433
			12	12.000 000
			13	13.003 355
			14	14.003 242
7	Nitrogen	N	13	13.005 739
			14	14.003 074
			15	15.000 109
8	Oxygen	O	15	15.003 065
			16	15.994 915
			18	17.999 159
9	Fluorine	F	19	18.998 403
10	Neon	Ne	20	19.992 435
			21	20.993 843
			22	21.991 384
11	Sodium	Na	22	21.994 435
			23	22.989 767
			24	23.990 961

<i>Z</i>	ธาตุ	สัญลักษณ์	<i>A</i>	มวลอะตอม
12	Magnesium	Mg	24	23.985 042
13	Aluminium	Al	27	26.981 541
14	Silicon	Si	28	27.976 928
			29	28.976 495
			31	30.975 364
15	Phosphorus	P	31	30.973 763
			32	31.973 908
16	Sulfur	S	32	31.972 072
			35	34.969 033
17	Chlorine	Cl	35	34.968 853
			37	36.965 903
18	Argon	Ar	40	39.962 383
19	Potassium	K	39	38.963 798
			40	39.964 000
20	Calcium	Ca	40	39.962 591
21	Scandium	Sc	45	44.955 914
22	Titanium	Ti	48	47.947 947
23	Vanadium	V	51	50.943 963
24	Chromium	Cr	52	51.940 510
25	Manganese	Mn	55	54.938 046
26	Iron	Fe	54	53.939 612
			56	55.934 939
			57	56.935 396
27	Cobalt	Co	59	58.933 198
			60	59.933 820
28	Nickel	Ni	58	57.935 347
			60	59.930 789
			64	63.927 968
29	Copper	Cu	63	62.929 599
			64	63.929 766
			65	64.927 792
30	Zinc	Zn	64	63.929 145
			66	65.926 035
31	Gallium	Ga	69	68.925 581
32	Germanium	Ge	72	71.922 080
			74	73.921 179

<i>Z</i>	ธาตุ	สัญลักษณ์	<i>A</i>	มวลอะตอม
33	Arsenic	As	75	74.921 596
34	Selenium	Se	80	79.916 521
35	Bromine	Br	79	78.918 336
36	Krypton	Kr	84	83.911 506
			89	88.917 563
37	Rubidium	Rb	85	84.911 800
38	Strontium	Sr	86	85.909 273
			88	87.905 625
			90	89.907 746
39	Yttrium	Y	89	88.905 856
40	Zirconium	Zr	90	89.904 708
41	Niobium	Nb	93	92.906 378
42	Molybdenum	Mo	98	97.905 405
43	Technetium	Tc	98	97.907 210
44	Ruthenium	Ruu	102	101.904 348
45	Rhodium	Rh	103	102.905 50
46	Palladium	Pd	106	105.903 48
47	Silver	Ag	107	106.905 095
			109	108.904 754
48	Cadmium	Cd	114	113.903 361
49	Indium	In	115	114.903 88
50	Tin	Sn	120	119.902 199
51	Antimony	Sb	121	120.903 824
52	Tellurium	Te	130	129.906 23
53	Iodine	I	127	126.904 477
			131	130.906 118
54	Xenon	Xe	132	131.904 15
			136	135.907 22
55	Cesium	Cs	133	132.905 43
56	Barium	Ba	137	136.905 82
			138	137.905 24
			144	143.922 673
57	Lanthanum	La	139	138.906 36
58	Cerium	Ce	140	139.905 44
59	Praseodymium	Pr	141	140.907 66
60	Neodymium	Nd	142	141.907 73
61	Promethium	Pm	145	144.912 75
62	Samarium	Sm	152	151.919 74

<i>Z</i>	ธาตุ	สัญลักษณ์	<i>A</i>	มวลอะตอม
63	Europium	Eu	153	152.921 24
64	Gadolinium	Gd	158	157.924 11
65	Terbium	Tb	159	158.925 35
66	Dysprosium	Dy	164	163.929 18
67	Holmium	Ho	165	164.930 33
68	Erbium	Er	166	165.930 31
69	Thulium	Tm	1699	168.934 23
70	Ytterbium	Yb	174	173.938 87
71	Lutecium	Lu	175	174.940 79
72	Hafnium	Hf	180	179.946 56
73	Tantalum	Ta	181	180.948 01
74	Tungsten	W	184	183.950 95
75	Rhenium	Re	187	186.955 77
76	Osmium	Os	191	190.960 94
			192	191.961 49
77	Iridium	Ir	191	190.960 60
			193	192.962 94
78	Platinum	Pt	195	194.964 79
79	Golg	Au	197	196.966 56
80	Mercury	Hg	202	201.970 63
81	Thallium	Tl	205	204.974 41
			210	209.990 056
82	Lead	Pb	204	203.973 044
			206	205.974 46
			207	206.975 89
			208	207.976 64
			210	209.984 16
			211	210.988 74
			212	211.991 88
			214	213.999 80
83	Bismuth	Bi	209	208.980 39
			211	210.987 26
84	Polonium	Po	210	209.982 86
			214	213.995 19
85	Astatine	At	218	218.008 70
86	Radon	Rn	222	222.017 574
87	Francium	Fr	223	223.019 734
88	Radium	Ra	226	226.025 406
			228	228.031 069

<i>Z</i>	ธาตุ	สัญลักษณ์	<i>A</i>	มวลอะตอม
89	Actinium	Ac	227	227.027 751
90	Thorium	Th	228	228.028 73
			232	232.038 054
91	Protactinium	Pa	231	231.035 881
92	Uranium	U	232	232.037 14
			233	233.039 629
			235	235.043 925
			236	236.045 563
			238	238.050 786
			239	239.054 291
93	Neptunium	Np	239	239.052 932
94	Plutonium	Pu	239	239.052 158
95	Americium	Am	243	243.061 374
96	Curium	Cm	245	245.065 487
97	Berkelium	Bk	247	247.070 03
98	Californium	Cf	249	249.074 849
99	Einsteinium	Es	254	254.088 02
100	Fermium	Fm	253	253.085 18
101	Mendelevium	Md	255	255.091 1
102	Nobelium	No	255	255.093 3
103	Lawrencium	Lr	257	257.099 8
104	Unnilquadium	Rf	261	261.108 7
105	Unnilpentium	Ha	262	262.113 760
106	Unnihexium		263	263.118 4
107	Unnilseptium		261	261
109				

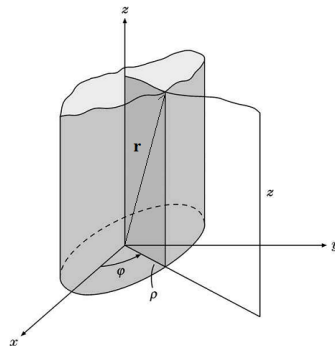
ภาคผนวก ง หน่วยในระบบ SI

หน่วยฐาน

ปริมาณทางฟิสิกส์	หน่วย	สัญลักษณ์
ความยาว	เมตร	m
มวล	กิโลกรัม	kg
เวลา	วินาที	s
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์	A
อุณหภูมิ	เคลวิน	K
ปริมาณสาร	โมล	mol
ความเข้มการส่องสว่าง	แคนเดลลา	cd

หน่วยอนุพันธ์ (บางส่วน)

ปริมาณทางฟิสิกส์	หน่วย	สัญลักษณ์	รูปหน่วยฐาน	รูปอื่น
มุมในระนาบ	radian	rad	m/m	
ความถี่	hertz	Hz	s ⁻¹	
แรง	newton	N	kg · m/s ²	J/m
ความดัน	pascal	Pa	kg/m · s ²	N/m ²
พลังงาน, งาน	joule	J	kg · m ² /s ²	N · m
กำลัง	watt	W	kg · m ² /s ³	J/s
ประจุไฟฟ้า	coulomb	C	A · s	
ศักย์ไฟฟ้า	volt	V	kg · m ² /A · s ³	W/A
ความจุ	farad	F	A ² · s ⁴ /kg · m ²	C/V
ความต้านทานไฟฟ้า	ohm	Ω	kg · m ² /A ² · s ³	V/A
ฟลักซ์แม่เหล็ก	weber	Wb	kg · m ² /A · s ²	V · s
ความเข้มสนามแม่เหล็ก	tesla	T	kg/A · s ²	Wb/m ²
ความเหนี่ยวนำ	henry	H	kg · m ² /A ² · s ²	Wb/A



ประวัติผู้ศึกษาวิจัย

ชื่อ-นามสกุล	นายสิริวิชญ์ คำชุ่ม	
วันเดือนปีเกิด	26 มิถุนายน 2540	
สถานที่เกิด	จังหวัดพะเยา, ประเทศไทย	
ที่อยู่ปัจจุบัน	เลขที่ 19 หมู่ 2 ตำบลแม่กา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา	
เบอร์ติดต่อ	081-2345679	
อีเมลล์	myemail@mymail.com	
ประวัติการศึกษา		
- มัธยมศึกษาตอนต้น	โรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา	จบปี พ.ศ. 2552
- มัธยมศึกษาตอนปลาย	โรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา	จบปี พ.ศ. 2555