Информатика. Упражнение 3
Прямой, обратный и дополнительный коды двоичных целых чисел

Цель работы: познакомиться со способами замены операции вычитания операцией сложения.

Для упрощения и удешевления арифметико-логического устройства (АЛУ) разработано много специальных методов. Одним из таких методов является использование специальных способов кодирования чисел, позволяющих исключить в АЛУ операцию вычитания.

Алгоритмы сложения и вычитания двоичных чисел сильно отличаются друг от друга. Чтобы наглядно убедиться в этом, выполним следующие действия:

1) сложение 7 + 2 = 9,
   в двоич. сист.счисления:

```
 + 1 1 1
   0 1 0
 -------
 1 0 0 1
```

2) вычитание
   а) Уменьшаемое больше вычитаемого: 7 - 2 = 5,
      в двоич. сист.счисления:

```
 _ 1 1 1
   0 1 0
   -----
   1 0 1
```

   б) Уменьшаемое меньше вычитаемого: 2 - 7 = -5.
      Операция состоит из трёх действий:
      1. меняем местами уменьшаемое и вычитаемое и их знаки,
      2. повторяем пункт а)

```
 _ 1 1 1
   0 1 0
   -----
   1 0 1
```

      3. меняем знак разности и в итоге получаем
         1 0 - 1 1 1 = -1 0 1

Вычитание, в отличие от сложения, не обладает свойством коммутативности. При сложении образуется единица переноса влево, а при вычитании слева занимается единица.

Обратный код

Для простоты будем рассматривать четырёхбитный формат целого числа:

↑
знак числа (0 - +; 1 - минус)

Обозначим количество разрядов в формате числа через n. В n входит и знаковый разряд.

Определение 1.
Обратный код положительного числа - само число.
Обратный код отрицательного числа *a* вычисляется по формуле

$$a_{обр} = 2^n - 1 - |a| \ ,$$

или получается инвертированием всех разрядов модуля *a*, т.е. заменой всех единиц в двоичном коде |a| на нули и нулей на единицы.

Рассмотрим применение обратного кода на примере. Вычислим разность *5 - 2*. Заменим -2 на обратный код:

$$-2_{обр} = (2^4 - 1 - 2)_{10} = (10000 - 1 - 10)_2 =$$
$$= (1111 - 10)_2 = 1101_2$$

Вычислим сумму *5 +* $(-2_{обр})$:

```
 +0 1 0 1          +0 1 0 1
  1 1 0 1   =>        1 1 0 1
 1 0 0 1 0          0 0 1 1   = 3
 |_____↑
  циклический перенос единицы
```

Сумму *5 +* $(-2_{обр})$ можно записать так:

$$5 + 2^4 - 1 - 2 > 2^4$$

Это неравенство является условием необходимости циклического переноса. Заменив 2^4 на единицу, получим

$$5 + 1 -1 -2 = 5 - 2 = 3$$

В общем случае, если $a > 0$, $b > 0$, и $a > b$, то сложение в обратном коде выглядит так:

$$a + 2^n -1 - b = a + 1 -1 -b = a - b$$
↑ заменяем на 1, так как $a + 2^n -1 - b > 2^n$ или $a - b > 1$

Итак, в общем случае условием необходимости циклического переноса служит неравенство

$$a - b \geq 1 \ .$$

К сожалению, общий алгоритм замены вычитания в прямом коде сложением в обратном коде распадается на несколько случаев. Рассмотрим часть из них.

1) Случай $a - b$ при $a > 0, b > 0, a > b$ уже рассмотрен.

2) $a - b$ при $a > 0, b > 0, b > a$. Пусть $a =2$ $b = 5$.

$$-5_{обр} = 1010$$

$$\begin{array}{r} {}_{+}0\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,0} \\ 1\,1\,0\,0 \end{array}$$ перевод в прямой код => 1 0 1 1 = -3

Результат получился в обратном коде:

$2 + 2^4 -1 - 5 = 2^4 -1 - (5 -2) < 2^4$

В общем случае условие получения результата в обратном коде:

$a + 2^n -1 - b < 2^n$, или $a - b < 1$.

3) **Переполнение** может произойти, если оба слагаемых имеют одинаковые знаки. Найдём сумму 5 + 7 :

$$\begin{array}{r} {}_{+}0\,1\,0\,1 \\ \underline{0\,1\,1\,1} \\ 1\,1\,0\,0 \end{array}$$

Признаком переполнения служит несовпадение знака слагаемых со знаком суммы. Сложим -5 и -7 :

$$\begin{array}{r} {}_{+}1\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,0\,0\,0} \\ 1\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Получился положительный знак суммы при отрицательных слагаемых.

4) При использовании обратного кода нуль в прямом коде представляется двумя способами: +0 и -0. Отрицательный нуль получается при замене вычитания сложением в обратном коде. Отрицательному нулю, имеющему в прямом коде вид *1000*, соответствует обратный код *1111*. Вычтем из двух два:

в прямом коде

$$\begin{array}{r} {}_{-}0\,0\,1\,0 \\ \underline{0\,0\,1\,0} \\ 0\,0\,0\,0 \end{array}$$ или +0

в обратном коде

$$\begin{array}{r} {}_{+}0\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 1\,1\,1\,1 \end{array}$$ и, преобразовав в прямой код, получаем 1 0 0 0 или -0

5) Оба слагаемых отрицательные. Возможны два способа вычисления суммы.
а) Сложить модули чисел и присвоить сумме знак *минус*.
б) Сложить в обратном коде. В этом случае нужно учесть две особенности:

- так как знаковые разряды обоих слагаемых равны 1, то нужен циклический перенос;
- если после циклического переноса знаковый разряд равен 0, то произошло переполнение.

Пусть $a<0$ и $b<0$. Тогда

1

$a_{обр} + b_{обр} = 2^n - 1 - |a| + 2^n - 1 - |b| =$

$= 2^n - 1 - (|b| + |a|) = (a + b)_{обр},$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть a = -2 и b = -3. Подставим эти значения в формулу сложения в обратном коде:

1

$2^4 - 1 - 2 + 2^4 - 1 - 3 = 2^4 - 1 + 2^4 - 1 - (3 + 2) =$

1

$= 2^4 - 1 - 5 = -5_{обр} = 1010_2.$

Непосредственно складывая в обратном коде, получим

```
 +1 1 0 1
  1 1 0 0
 1 1 0 0 1  =>   1 0 1 0   => 1101 =-5
 |_____↑
   циклический перенос единицы
```

Дополнительный код

В обратном коде, если в результате сложения появляется единица слева от знакового разряда, то нужно делать циклический перенос. В дополнительном коде циклический перенос делать не нужно, а единица слева от знакового разряда отбрасывается.

Определение 2.
Дополнительный код положительного числа равен самому числу.
Дополнительный код отрицательного числа больше обратного на единицу:

$$a_{доп} = a_{обр} + 1 = 2^n - |a| .$$

Пример 1. Найдём a + b при a = 5 и b = -2:

$b_{обр} = 1101$

$b_{доп} = 1101 + 1 = 1110$

```
 +0 1 0 1
  1 1 1 0
 1 0 0 1 1  = 3
 ↑
 отбрасывается
```

Пример 2. Найдём a + b при a = -5 и b = 2:

$a_{обр} = 1010$

$a_{доп} = 1010 + 1 = 1011$

```
 +1 0 1 1
  0 0 1 0
  1 1 0 1  => прямой код 1011 = -3
```

В отличие от обратного кода в дополнительном коде при вычитании a - a получается +0. Положим a = 2 и вычислим

```
 +0 0 1 0
  1 1 1 0
```

1 0 0 0 0 => прямой код 0000 = +0

Задание

1. Получите у преподавателя номер варианта набора чисел (табл. 1)

2. Нужно для каждой из заданных шести пар чисел выполнить сложение и вычитание в прямом, обратном и дополнительном кодах, используя следующий 6-битный формат числа:

±					

Табл. 1. Варианты заданий

№ варианта	ПАРЫ ЧИСЕЛ					
1	12; 5	-7; 21	17; 19	-5; -5	25; -4	-7; -9
2	18; 7	-2; 11	15; 20	-15; -15	27; -2	-17; -9
3	11; 15	-3; 24	14; 21	-7; -7	26; -5	-7; -19
4	21; 1	-7; 22	13; 22	5; 5	27; -4	-6; -20
5	23; 4	-5; 13	12; 23	-2; -2	28; -3	-5; -21
6	4; 15	-1; 20	-11; -24	-3; -3	29; -1	-4; -22
7	11; 9	-10; 21	10; 25	3; 3	30; -1	-3; -23
8	13; 6	-8; 15	9; 26	-4; -4	15; -14	-2; -24
9	17; 5	-9; 16	-8; -27	-25; -25	16; -14	-8; -21
10	27; 4	-4; 23	7; 28	-17; -17	17; -12	-1; -29
11	25; 6	-3; 25	6; 29	15; 15	18; -13	-17; -10
12	11; 1	-17; 1	5; 30	-8; -8	19; -10	-18; -9
13	19; 5	-13; 2	41; 9	-9; -9	20; -9	-19; -6
14	10; 9	-10; 25	10; 25	3; 3	22; -1	-7; -23
15	17; 7	-7; 20	-17; -23	-10; -10	21; -5	-27; -3
16	16; 5	-6; 21	16; 19	-1; -1	26; -4	-6; -10

17	18; 9	-2; 11	15; 20	-15; -15	27; -2	-17; -9
18	12; 14	-4; 23	12; 22	-6; -6	25; -6	-7; -14
19	21; 6	-11; 20	16; 18	21; 21	27; -4	-6; -20
20	23; 7	-5; 11	13; 21	-12; -12	26; -5	-1; -25
21	4; 15	-1; 20	-11; -24	-3; -3	29; -1	-4; -22
22	11; 10	-10; 21	10; 25	3; 3	30; -1	-3; -23
23	14; 6	-8; 15	9; 26	-4; -4	15; -14	-2; -24
24	15; 7	-9; 16	-8; -27	-25; -25	16; -14	-8; -21
25	27; 2	-5; 25	4; 28	-6; -6	17; -12	-2; -28
26	24; 7	-3; 25	3; 29	15; 15	18; -13	-17; -10
27	11; 1	-17; 1	2; 30	-18; -18	19; -11	-18; -1
28	11; 12	-14; 2	26; 9	19; 19	20; -9	-19; -6
29	14; 7	-7; 20	-14; -23	10; 10	21; -5	-26; -3
30	18; 5	-2; 11	12; 21	17; 17	27; -2	-17; -8

Пример выполнения задания для пары чисел 7; 12

В 6-битном формате

$7_{пр}$ = 000111 $12_{пр}$ = 001100 $-12_{пр}$ = 101100
$7_{обр}$ = 000111 $12_{обр}$ = 001100 $-12_{обр}$ = 110011
$7_{доп}$ = 000111 $12_{доп}$ = 001100 $-12_{доп}$ = 110100

В прямом коде

7+12   7-12=-(12-7)
000111   101100
+001100   -000111
010011 = 19   100101 = -5

В обратном коде

7+12

000111

+001100

010011 = 19

7-12=7+(-12)

000111

+110011

$111010_{обр} = 100101_{пр} = -5$

В дополнительном коде

7+12

000111

+001100

010011 = 19

7-12=7+(-12)

000111

+110100

$111011_{доп} = 111010_{обр} = 100101_{пр} = -5$