

**PRÁCTICA FMF:  
MODELOS CONTINUOS  
DIFERENCIAS FINITAS**



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
DE MADRID**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
MÁSTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

ASIGNATURA: Fundamentos de Matemática Financiera

ALUMNA: Siria Catherine Íñiguez Brito

PROFESOR: Juan Antonio Infante

CURSO: 2025-2026

Madrid, Febrero de 2026

# Contents

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>2 MODELO DE BLACK–SCHOLES</b>	<b>3</b>
<b>3 VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS</b>	<b>4</b>
3.1 Análisis de Resultados: Escenario Constante . . . . .	4
3.1.1 Valoración y Ajuste al Payoff . . . . .	4
3.1.2 Distribución del Error . . . . .	5
3.1.3 Comparación entre Métodos Numéricos . . . . .	6
3.2 Resultados de la Simulación Dinámica . . . . .	7
<b>4 VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS</b>	<b>9</b>
4.1 Validación numérica . . . . .	9
4.2 Frontera de ejercicio óptimo . . . . .	10
<b>5 ALGORITMO DE COBERTURA</b>	<b>11</b>
5.1 Resultados de la replicación y convergencia . . . . .	12
5.2 Distribución del error . . . . .	13
5.3 Seguimiento de trayectorias . . . . .	13

# 1 INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo recoge el desarrollo y los resultados de la práctica correspondiente a la asignatura **Fundamentos de Matemática Financiera - Parte 2**. El objetivo principal es el estudio y la implementación de métodos numéricos para la valoración de opciones financieras, así como el análisis de un algoritmo de replicación dinámica basado en la cobertura delta.

Para la resolución de los problemas planteados se han desarrollado diversos códigos programados en MATLAB. El trabajo se estructura en dos principales bloques:

1. **Valoración de opciones:** Implementación de métodos de diferencias finitas para opciones de estilo europeo y americano, permitiendo que el tipo de interés, la volatilidad y la tasa de dividendos sean funciones dependientes del tiempo.
2. **Cobertura delta:** Desarrollo de un algoritmo de replicación dinámica con el fin de analizar la eficacia de la cobertura frente al valor teórico del derivado bajo distintas discretizaciones temporales.

## 2 MODELO DE BLACK–SCHOLES

La valoración de derivados financieros en este trabajo se fundamenta en la teoría de arbitraje en tiempo continuo. Se supone que el precio del activo subyacente  $S_t$  evoluciona según un movimiento browniano geométrico bajo la medida neutral al riesgo donde los parámetros de mercado son funciones conocidas del tiempo.

Bajo estas hipótesis, y en ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor de cualquier opción financiera  $V(S, t)$  debe satisfacer la siguiente **ecuación en derivadas parciales de Black–Scholes**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\frac{\partial V}{\partial S} = r(t)V. \quad (1)$$

En esta expresión:

- $V(S, t)$  denota el valor de la opción en función del precio del activo subyacente  $S$  y del tiempo  $t$ .
- $r(t)$  es la tasa de interés libre de riesgo.
- $\sigma(t)$  representa la volatilidad del activo subyacente.
- $q(t)$  es la tasa de dividendos continua pagada por el activo.

La ecuación anterior se plantea como un problema de evolución regresivo en el tiempo, ya que la condición final viene determinada por el *payoff* de la opción en el instante de vencimiento  $T$ . Además, se añaden condiciones de contorno en los extremos del dominio espacial, que se considera acotado a un intervalo  $S \in [0, S_{\max}]$  por razones computacionales.

### 3 VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS

El objetivo de este apartado es implementar la valoración de una opción **call europea** sobre un activo que paga dividendos de forma continua. Se asume que el tipo de interés  $r(t)$ , la volatilidad  $\sigma(t)$  y la tasa de dividendos  $q(t)$  son funciones conocidas dependientes del tiempo.

La valoración se realiza resolviendo numéricamente la ecuación en derivadas parciales de Black–Scholes mediante tres métodos de diferencias finitas cuyo código se recoge en el fichero `FMF_EjercicioFinal1a.m`:

- **Esquema explícito:** Método condicionalmente estable, ya que la estabilidad del esquema exige que los coeficientes de la discretización espacial sean no negativos. Esto impone una restricción sobre el tamaño del paso temporal  $\Delta t$ , que depende del tamaño de la malla espacial y de la volatilidad del activo subyacente. Presenta un orden de convergencia teórico de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio,  $O(\Delta t + \Delta S^2)$ .
- **Esquema implícito:** Método incondicionalmente estable. Presenta un orden de convergencia teórico de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio,  $O(\Delta t + \Delta S^2)$ , al emplear una discretización implícita en tiempo y centrada en el espacio.
- **Esquema de Crank–Nicolson:** Esquema semi-implícito basado en el promedio de los métodos explícito e implícito. Es incondicionalmente estable y alcanza un orden de convergencia de segundo orden en el tiempo,  $O(\Delta t^2 + \Delta S^2)$ .

Con el fin de validar la correcta implementación de los esquemas numéricos, se procede inicialmente a estudiar un escenario con parámetros constantes, en el que se dispone de una solución analítica de referencia. Posteriormente, se analiza un escenario dinámico con coeficientes dependientes del tiempo, para el cual la validación se realiza mediante la comparación cruzada de los distintos métodos.

#### 3.1 Análisis de Resultados: Escenario Constante

Con el objetivo de analizar la consistencia numérica se comparan los resultados obtenidos mediante los distintos esquemas de diferencias finitas con la solución analítica proporcionada por el comando `blsprice`, en un escenario de parámetros constantes.

Es importante recalcar que esta comparación no constituye una validación formal del modelo, sino que permite comprobar que los esquemas reproducen adecuadamente un caso de referencia, descartando errores de implementación antes de abordar escenarios con coeficientes dependientes del tiempo.

##### 3.1.1 Valoración y Ajuste al Payoff

Las pruebas realizadas muestran un buen ajuste entre los esquemas y la solución de referencia (Figura 4), evidenciado por el solapamiento de la solución en  $t = 0$  (línea roja discontinua) sobre la curva teórica azul.

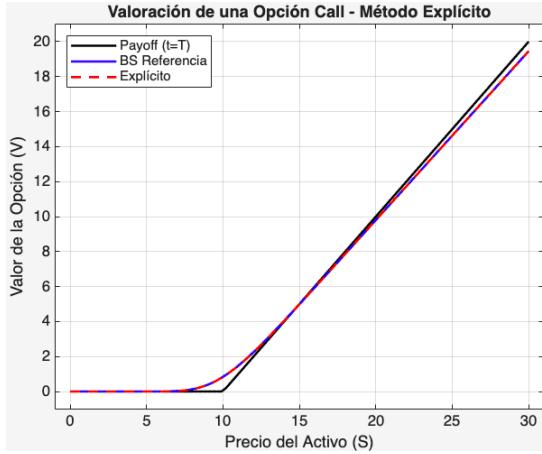


Figure 1: Ajuste: Método Explícito.

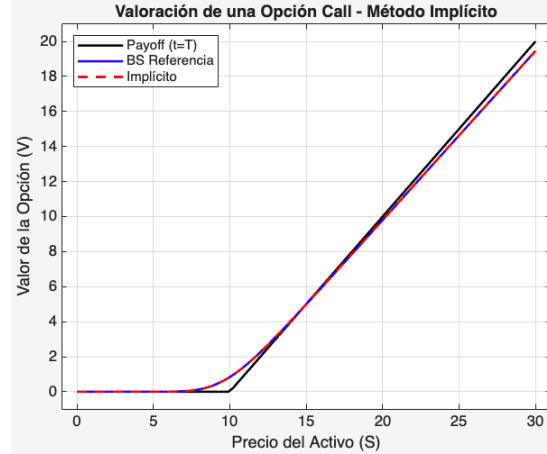


Figure 2: Ajuste: Método Implícito.

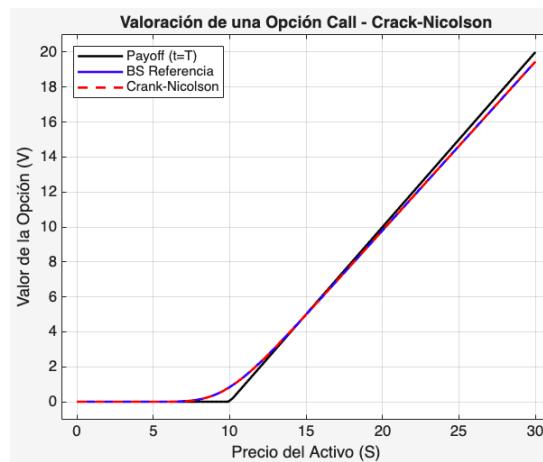


Figure 3: Ajuste: Crank-Nicolson.

Figure 4: Comparativa de convergencia para los tres métodos.

### 3.1.2 Distribución del Error

Para analizar la precisión local de los esquemas de diferencias finitas, se comparan las soluciones numéricas obtenidas mediante los métodos explícito, implícito y Crank–Nicolson con la solución analítica del modelo de Black–Scholes, calculada mediante el comando `blsprice`. El estudio se realiza en un escenario de parámetros constantes y sobre una malla fija con  $M = 100$  nodos espaciales y  $N = 1000$  pasos temporales, considerando  $K = 10$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.05$  y  $q = 0.035$ .

La Figura 5 muestra la distribución del error absoluto en función del precio del activo. Se observa que el error no es uniforme en el dominio espacial y que, para los tres esquemas considerados, los valores máximos se concentran en las proximidades del precio de ejercicio ( $S \approx K$ ). Fuera de esta región, el error disminuye de manera apreciable, manteniéndose en niveles reducidos tanto para valores bajos como elevados del subyacente.

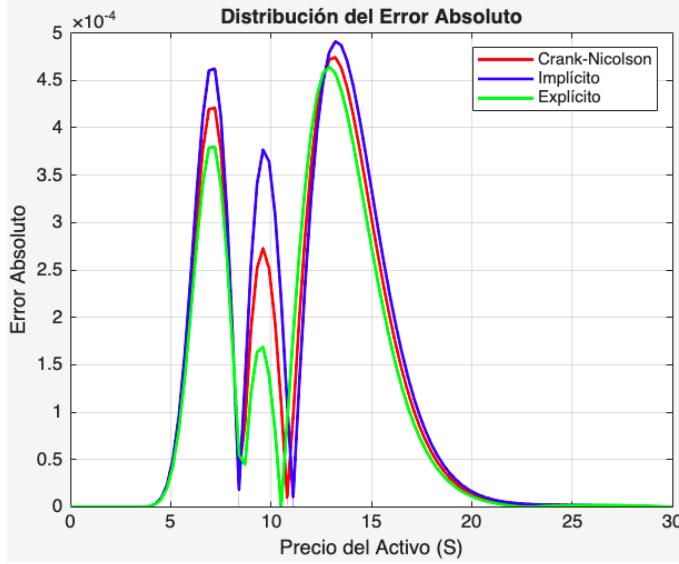


Figure 5: Distribución del error absoluto en función del precio del activo  $S$ .

Como medida global de la precisión, se ha calculado el error máximo en norma infinito ( $\|E\|_\infty$ ), que proporciona una cota superior del error cometido en toda la malla. Los valores obtenidos se recogen en la Tabla 1.

Método Numérico	$\ E\ _\infty$
Explícito	$4.64 \times 10^{-4}$
Crank–Nicolson	$4.74 \times 10^{-4}$
Implícito	$4.91 \times 10^{-4}$

Table 1: Error máximo en norma infinito para cada esquema numérico.

### 3.1.3 Comparación entre Métodos Numéricos

Con el objetivo de evaluar el comportamiento relativo de los tres esquemas implementados, se realizó una comparación del error máximo frente a la solución analítica de Black–Scholes para distintos niveles de refinamiento.

**Comparación para diferentes mallas** En este primer escenario, se evaluó la convergencia incrementando simultáneamente el número de nodos espaciales  $M$  y los pasos temporales  $N$ , asegurando que los parámetros sean válidos para mantener la estabilidad del esquema explícito. Concretamente, se tomó el siguiente conjunto de mallas:

$$(M, N) \in \{(10, 100), (20, 400), (40, 1600), (80, 6400)\}$$

La Tabla 2 recoge los errores máximos obtenidos.

$M$	$N$	Error Explícito	Error Implícito	Error CN
10	100	$5.83 \times 10^{-2}$	$5.76 \times 10^{-2}$	$5.79 \times 10^{-2}$
20	400	$1.20 \times 10^{-2}$	$1.22 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$
40	1600	$3.09 \times 10^{-3}$	$3.09 \times 10^{-3}$	$3.09 \times 10^{-3}$
80	6400	$7.06 \times 10^{-4}$	$7.19 \times 10^{-4}$	$7.12 \times 10^{-4}$

Table 2: Comparación de errores con refinamiento coordinado en espacio y tiempo.

Se observa que los tres métodos presentan errores prácticamente idénticos. Aunque el error para el método explícito es ligeramente inferior en todos los casos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que se han forzado los parámetros  $M$  y  $N$  para asegurar en todo momento la estabilidad del método explícito, por lo tanto, es posible, por ejemplo, que el método de Crank–Nicolson alcance una error similar pero utilizando menos pasos, para ello se lleva a cabo la siguiente comparación.

**Comparativa de precisión frente a esfuerzo computacional** Para analizar la eficiencia, se contrastó el método explícito frente al método Crank–Nicolson, cuya estabilidad incondicional permite modificar el parámetro  $N$  sin restricciones. Los resultados se detallan en la Tabla 3.

$M$	Error Explícito ( $N_{exp}$ )	Error Crank–Nicolson ( $N_{cn}$ )
40	$3.051 \times 10^{-3}$ ( $N = 64$ )	$3.083 \times 10^{-3}$ ( $N = 40$ )
80	$6.712 \times 10^{-4}$ ( $N = 256$ )	$7.105 \times 10^{-4}$ ( $N = 80$ )
160	$1.788 \times 10^{-4}$ ( $N = 1024$ )	$1.827 \times 10^{-4}$ ( $N = 160$ )
320	$4.330 \times 10^{-5}$ ( $N = 4096$ )	$4.432 \times 10^{-5}$ ( $N = 320$ )

Table 3: Eficiencia Explícito vs CN.

Los datos revelan una ventaja computacional a favor de Crank–Nicolson. Mientras que para  $M = 320$  el esquema explícito debe realizar **4096 iteraciones** para evitar la divergencia, Crank–Nicolson alcanza el mismo orden de error con tan solo **320 pasos**. Esto supone una reducción drástica del esfuerzo computacional sin comprometer la precisión de la valoración.

**Conclusión comparativa** Desde una perspectiva de precisión, los tres esquemas son equivalentes bajo un refinamiento adecuado. No obstante, en términos prácticos y eficiencia, el método Crank–Nicolson parece ser superior debido a su estabilidad incondicional.

### 3.2 Resultados de la Simulación Dinámica

Para el análisis del escenario con parámetros dependientes del tiempo se ha utilizado una malla con  $M = 150$  nodos espaciales y  $N = 2500$  pasos temporales. Esta elección permite garantizar que el esquema explícito opere dentro de su región de estabilidad, incluso en presencia de variaciones temporales en la volatilidad  $\sigma(t)$ .

En la Figura 6 se representa la valoración de la opción obtenida mediante los esquemas explícito, implícito y Crank–Nicolson. Se observa que las tres aproximaciones numéricas producen resultados muy próximos entre sí a lo largo de todo el dominio del precio del activo, sin apreciarse discrepancias significativas a escala gráfica. Este comportamiento sugiere una respuesta coherente de los esquemas ante la introducción de coeficientes variables en el tiempo.

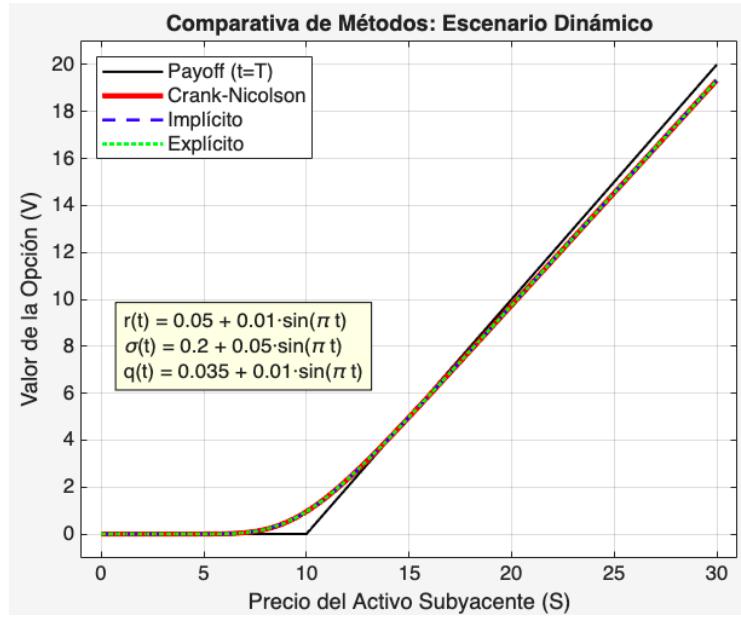


Figure 6: Comparativa de métodos en escenario dinámico con parámetros dependientes del tiempo.

Dado que en este escenario no se dispone de una solución analítica cerrada que sirva como referencia, se ha llevado a cabo una validación cruzada entre los distintos esquemas numéricicos. Para ello, se han calculado las diferencias máximas en norma infinito ( $\|\cdot\|_\infty$ ) entre las soluciones obtenidas por cada par de métodos, cuyos resultados se recogen en la Tabla 4.

Comparativa de Métodos	Diferencia Máxima
Crank–Nicolson vs. Implícito	$5.49 \times 10^{-5}$
Crank–Nicolson vs. Explícito	$5.49 \times 10^{-5}$
Implícito vs. Explícito	$1.10 \times 10^{-4}$

Table 4: Resultados de la validación cruzada en el escenario con parámetros variables.

A partir de estos resultados se observa que las discrepancias entre los distintos esquemas se mantienen acotadas en valores del orden de  $10^{-5}$ – $10^{-4}$ , lo que indica un alto grado de consistencia entre las aproximaciones numéricas. Asimismo, la diferencia entre los esquemas implícito y explícito resulta aproximadamente el doble de la diferencia observada entre cada uno de ellos y el esquema de Crank–Nicolson.

## 4 VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS

El objetivo de este apartado es implementar la valoración de una opción **call americana** sobre un activo subyacente que paga dividendos de forma continua. El problema se formula como un problema de complementariedad lineal, en el que la solución debe satisfacer la restricción

$$V(S, t) \geq (S - K)^+,$$

garantizando en todo instante que el valor de la opción no sea inferior al valor de ejercicio inmediato.

El problema se resuelve mediante un esquema de **Crank–Nicolson**, combinado con un método de **relajación con proyección (PSOR)**. La discretización se realiza sobre un dominio acotado  $[0, S_{\max}] \times [0, T]$ , imponiendo ciertas condiciones de contorno.

La implementación cuyo código se encuentra en el archivo `FMF_EjercicioFinal1b.m` permite obtener el valor de la opción y la política óptima de ejercicio. A continuación, se presentan los dos resultados clave del análisis: la **validación numérica** del esquema y la determinación de la **frontera de ejercicio óptimo**.

### 4.1 Validación numérica

La validación se lleva a cabo en el caso de coeficientes constantes, considerando una tasa de interés  $r = 0.05$ , una volatilidad  $\sigma = 0.2$  y una tasa de dividendos continua  $q = 0.035$ , permitiéndonos comparar el esquema implementado con el proporcionado por MATLAB mediante el comando `binprice`. Para coeficientes dependientes del tiempo no se dispone de una referencia numérica directa, por lo que la validación se restringe al caso constante, si bien el algoritmo ha sido implementado de forma completamente general para funciones arbitrarias del tiempo.

Los parámetros empleados en la simulación y los resultados obtenidos en la validación se resumen en la Tabla 5.

Parámetro / Métrica	Configuración / Resultado
Nodos espaciales ( $M$ )	1000
Pasos temporales ( $N$ )	500
Factor de relajación ( $\omega$ )	1.20
Tolerancia PSOR	$1.0 \times 10^{-6}$
Error en Norma Infinito ( $\ \cdot\ _\infty$ )	$7.0323 \times 10^{-04}$

Table 5: Parámetros y resultados de validación para la opción americana.

En la Figura 7 se presenta la comparativa entre la solución obtenida mediante el esquema **CN-PSOR** y la referencia de MATLAB, observándose una coincidencia muy buena en todo el dominio de precios del activo.

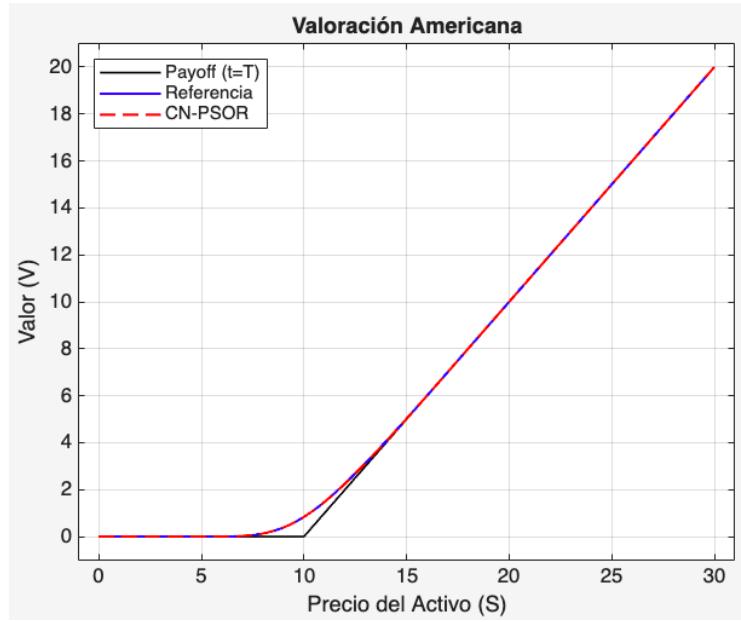


Figure 7: Comparativa entre el método de referencia y el esquema CN-PSOR.

## 4.2 Frontera de ejercicio óptimo

A partir de la solución numérica obtenida, se determina la frontera de ejercicio óptimo  $S^*(t)$  identificando, para cada instante de tiempo, el valor crítico del activo que delimita la región de ejercicio.

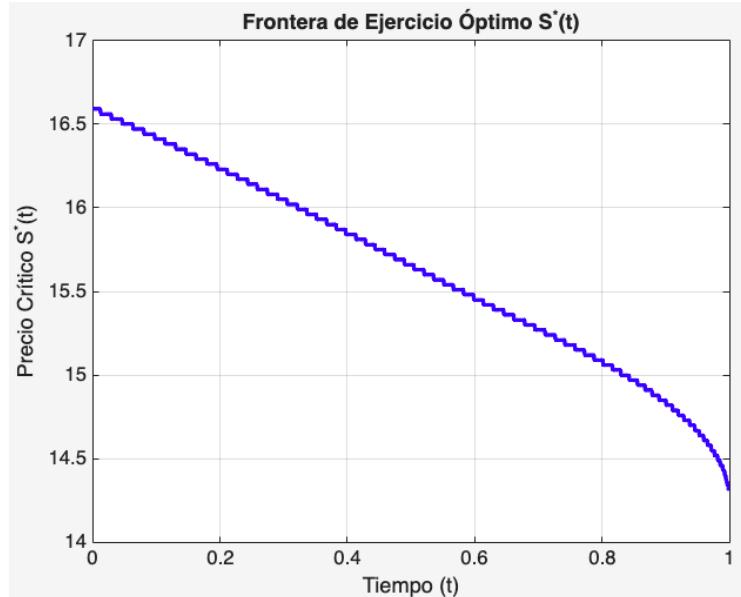


Figure 8: Frontera de ejercicio óptimo  $S^*(t)$  para la Call americana.

Se observa que  $S^*(t)$  presenta un comportamiento monótono, estableciendo la separación entre la región de ejercicio y la región de continuación.

## 5 ALGORITMO DE COBERTURA

El objetivo de este apartado es analizar la **cobertura dinámica** de una opción **call europea** sobre un activo que paga dividendos continuos, bajo el modelo de Black–Scholes generalizado con coeficientes dependientes del tiempo  $r(t)$ ,  $\sigma(t)$  y  $q(t)$ .

La implementación se encuentra recogida en el fichero `FMF_EjercicioFinal2.m` y los pasos fundamentales son los siguientes:

### 1. Resolución de la EDP.

Se resuelve la ecuación de Black–Scholes generalizada mediante el esquema de Crank–Nicolson sobre una malla uniforme con  $M = 1000$  nodos espaciales en  $[0, S_{\max}]$  y  $N$  subdivisiones temporales del intervalo  $[0, T]$ . La solución numérica se almacena en una matriz bidimensional `matriz` tal que

$$\text{matriz}_{i,j} \approx V(S_i, t_j).$$

### 2. Cálculo de la Delta.

Se aproxima

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

mediante diferencias finitas de segundo orden: esquema centrado en nodos interiores y esquema descentrado en las fronteras. Se obtiene así una matriz `Mdelta` que aproxima  $\Delta(S_i, t_j)$ .

### 3. Simulación del subyacente.

El modelo de precios de la acción viene dado por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = 0.25 dt + 0.2 dW_t.$$

Se utiliza un esquema de discretización:

$$S_{t+1} = ((0.25 * \tau + \sqrt{\tau} * 0.2 * Z) + 1)S_{t_j}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

con  $\tau = T/N$ . Se generan  $10^4$  trayectorias independientes.

### 4. Estrategia autofinanciada.

Se considera una cartera

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + d_t,$$

En discretización temporal, la actualización utilizada es

$$\Pi_{t_j} = \Delta_{t_{j-1}} S_{t_j} e^{q(t_{j-1})\Delta t} + d_{t_{j-1}} e^{r(t_{j-1})\Delta t},$$

y el nuevo saldo en la cuenta bancaria viene dado por

$$d_{t_j} = (\Delta_{t_{j-1}} e^{q(t_{j-1})\Delta t} - \Delta_{t_j}) S_{t_j} + d_{t_{j-1}} e^{r(t_{j-1})\Delta t}.$$

## 5.1 Resultados de la replicación y convergencia

Para la validación del algoritmo y el análisis de convergencia, se han definido los parámetros del modelo detallados en la Tabla 6. Se ha considerado un escenario con parámetros constantes aunque el código está preparado para manejar funciones dependientes del tiempo.

Parámetro	Valor
Precio inicial ( $S_0$ )	90
Precio de ejercicio ( $K$ )	100
Tiempo al vencimiento ( $T$ )	0.5 años
Volatilidad ( $\sigma$ )	0.20
Tasa libre de riesgo ( $r$ )	0.06
Tasa de dividendos ( $q$ )	0.035
Límite espacial ( $S_{\max}$ )	300 (3K)
Nodos espaciales ( $M$ )	1000

Table 6: Parámetros del modelo para la valoración y cobertura de una call europea.

Se han realizado  $10^4$  simulaciones de la trayectoria del activo para los tres niveles de discretización temporal indicados ( $N = \{100, 1000, 10000\}$ ). Para cada caso se ha calculado el error final de replicación y se ha estimado el Error Medio Absoluto (EMA) junto con el error máximo. En la Tabla 7 se recogen las métricas obtenidas:

Pasos ( $N$ )	EMA	Error Máximo
100	0.3050	2.5898
1000	0.0975	0.9324
10000	0.0314	0.3578

Table 7: Estadísticas del error de replicación para los distintos niveles de discretización temporal.

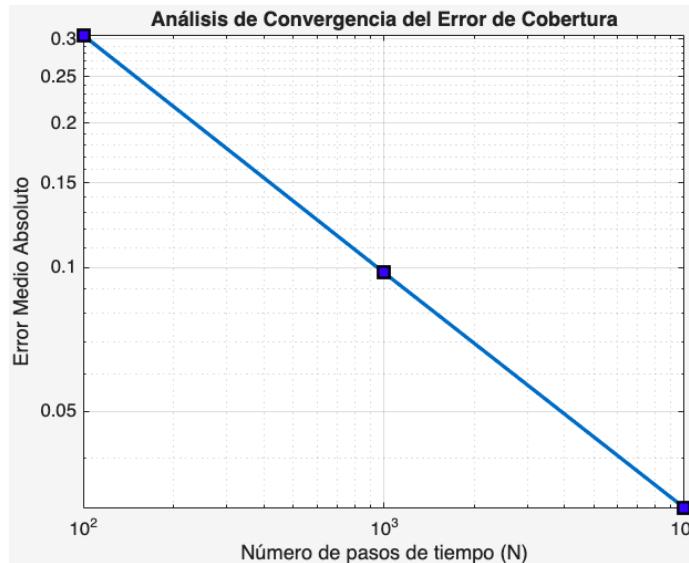


Figure 9: Análisis de convergencia del EMA en función del número de pasos  $N$ .

Se observa que el EMA disminuye al aumentar  $N$ . Esta relación se visualiza en la Figura 9, donde se representa el EMA frente a  $N$  en escala log–log. La tendencia lineal confirma que la precisión de la cobertura mejora conforme la frecuencia de ajuste se aproxima al tiempo continuo.

## 5.2 Distribución del error

La distribución del error de replicación ( $\Pi_T - \text{Payoff}$ ) permite verificar la robustez de la estrategia. En la Figura 10 se comparan los histogramas obtenidos. Se observa que al aumentar el número de pasos  $N$ , el error se concentra en torno a cero, lo que confirma que la replicación discreta converge a la teórica.

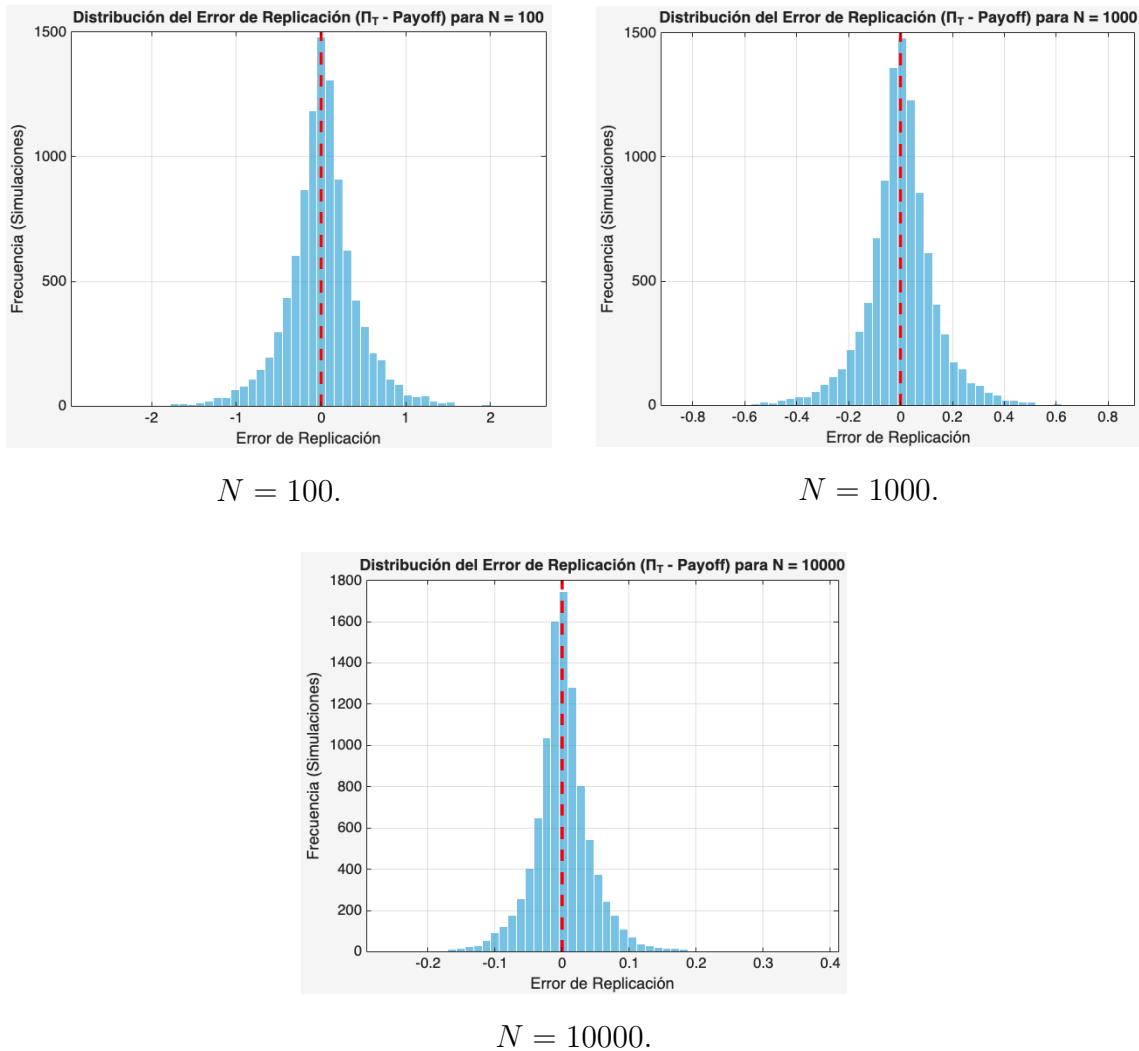


Figure 10: Distribución del error de replicación para los distintos valores de  $N$ .

## 5.3 Seguimiento de trayectorias

En la Figura 11 se presenta una comparativa entre la evolución de cinco trayectorias del activo subyacente  $S_t$  (gráfica superior) y el valor correspondiente de sus carteras de réplica  $\Pi_t$  (gráfica inferior) para  $N = 1000$ .

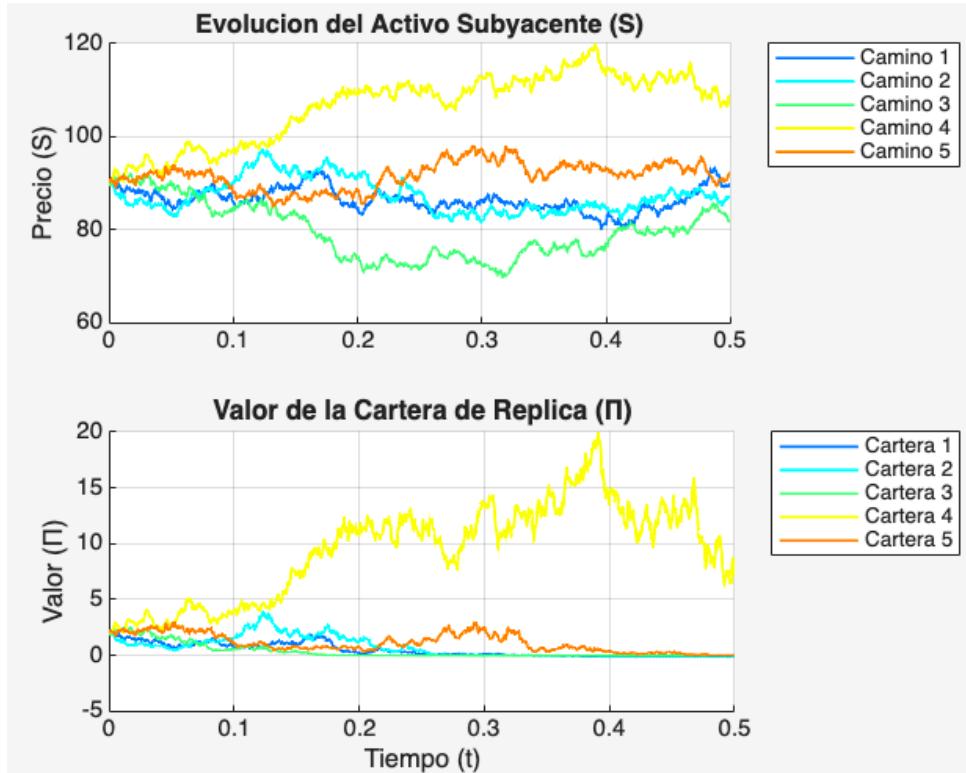


Figure 11: Evolución del activo subyacente (arriba) y del valor de la cartera de réplica  $\Pi_t$  (abajo) para cinco trayectorias simuladas con  $N = 1000$ .

Del análisis visual de las simulaciones se extraen lo siguiente:

- **Valor inicial y evolución:** Todas las carteras comienzan con un valor positivo similar (alrededor de 2–3 unidades). A medida que pasa el tiempo, su valor va cambiando según cómo evoluciona el precio del activo en cada trayectoria.
- **Camino 4 (amarillo):** En esta trayectoria el precio del activo aumenta de forma notable y supera claramente el nivel 100. En la gráfica inferior se observa que la cartera asociada también crece de manera significativa, alcanzando valores claramente positivos.
- **Camino 3 (verde):** En este caso el activo desciende y se mantiene en niveles más bajos durante buena parte del periodo. La cartera correspondiente va disminuyendo progresivamente hasta situarse muy cerca o prácticamente ser cero al final.