

PRÁCTICA 8: PROGRAMACIÓN LINEAL FRACCIONAL EN 2 VARIABLES



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
MÁSTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

PROFESOR: Ángel Felipe Ortega

ASIGNATURA: Técnicas Avanzadas en Optimización

ALUMNA: Siria Catherine Íñiguez Brito

CURSO: 2025-2026

Madrid, 17 de Diciembre de 2025

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
2. FORMULACIÓN GENERAL DE PLF EN DOS VARIABLES	3
2.1. Resultados Fundamentales Utilizados	5
3. IMPLEMENTACIÓN EN PYTHON	6
3.1. Módulo de Lectura de Datos	6
3.2. Cálculo de Vértices del Poliedro	6
3.3. Evaluación de la Función Objetivo Fraccional	6
3.4. Verificación de Propiedades Teóricas	7
3.5. Resolución de Condiciones KKT	7
3.6. Generación de Resultados	8
4. APLICACIÓN A UN PROBLEMA CONCRETO	9
4.1. Verificación de Supuestos	10
4.2. Evaluación de la Función Objetivo	11
4.3. Análisis de Optimalidad mediante KKT	11
4.3.1. Mínimo Global	12
4.3.2. Máximo Global	12
5. CONCLUSIONES	13
6. BIBLIOGRAFÍA	14

1. INTRODUCCIÓN

La programación lineal fraccional (PLF) extiende la programación lineal clásica mediante una función objetivo que es cociente de dos funciones afines. Gracias a esta estructura se permite modelar relaciones de productividad, rentabilidad y eficiencia en diversos campos como economía e ingeniería.

Este trabajo desarrolla una implementación computacional en Python para resolver problemas de PLF en \mathbb{R}^2 , siguiendo el marco teórico establecido en el documento de referencia [1]. La metodología combina el análisis mediante condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, la validación gráfica con Geogebra y la implementación algorítmica, proporcionando una herramienta integral para la resolución y comprensión de este tipo de problemas de optimización.

2. FORMULACIÓN GENERAL DE PLF EN DOS VARIABLES

Un problema programación lineal fraccional bidimensional se formula matemáticamente como:

$$\begin{aligned} \text{Min/Max}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \quad f(\mathbf{x}) &= \frac{N(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \\ N(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \alpha = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \alpha \\ D(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + \beta = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \beta \\ \text{Sujeto a: } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

En notación matricial compacta, las restricciones se expresan como $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

La función objetivo presenta una estructura fraccional lineal caracterizada por:

- **Numerador y denominador afines:** Tanto $N(\mathbf{x})$ como $D(\mathbf{x})$ son funciones afines en \mathbb{R}^2 , con vectores de coeficientes $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ y términos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Región factible:** Las restricciones lineales definen una región factible que puede adoptar diversas configuraciones geométricas:
 - **Polígono convexo acotado:** Cuando las restricciones definen una región cerrada y acotada.
 - **Polígono convexo no acotado:** Cuando la región se extiende infinitamente en alguna dirección.
 - **Región degenerada:** Cuando las restricciones son redundantes o inconsistentes, pudiendo resultar en:
 - Un único punto (cuando $m \geq 2$ y todas las restricciones se intersecan en un punto)
 - Una línea o semirrecta
 - Un conjunto vacío (problema infactible)
 - Todo el plano \mathbb{R}^2
- **Dominio y supuestos:** Se requiere $D(\mathbf{x}) \neq 0$ en Ω . Incluso más, se comprobará que $D(\mathbf{x})$ mantiene signo constante en Ω para así poder garantizar las propiedades de pseudolinealidad necesarias para el análisis teórico y los métodos de solución.

Propiedades de Diferenciabilidad La suposición fundamental de signo constante para $D(\mathbf{x})$ en Ω no solo garantiza la pseudolinealidad de $f(\mathbf{x})$, sino también su diferenciabilidad en todo el dominio de optimización. En efecto:

- Al ser $N(\mathbf{x})$ y $D(\mathbf{x})$ funciones afines, son infinitamente diferenciables.

- La condición $D(\mathbf{x}) \neq 0$ y signo constante en Ω implica que el cociente $f(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x})$ es diferenciable.

Por lo tanto el gradiente y la matriz hessiana de $f(\mathbf{x})$ presentan las siguientes formas:

1. Gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{[D(\mathbf{x})]^2} [D(\mathbf{x})\mathbf{p} - N(\mathbf{x})\mathbf{q}]$$

2. Hessiana:

$$H_f(\mathbf{x}) = \frac{2}{[D(\mathbf{x})]^3} [N(\mathbf{x})\mathbf{q}\mathbf{q}^\top - D(\mathbf{x})\mathbf{q}\mathbf{p}^\top]$$

Estas expresiones serán fundamentales para la formulación de las condiciones de optimidad de Karush-Kuhn-Tucker.

Propiedades de Convexidad Generalizada y Pseudolinealidad La función objetivo pertenece a la clase de funciones **pseudolineales**, lo que significa que es simultáneamente pseudoconvexa y pseudocóncava bajo la condición de signo constante del denominador. Esta característica tiene implicaciones fundamentales:

- **Convexidad de conjuntos de nivel:** Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ y $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq c\}$ son convexos.
- **Globalidad de óptimos:** Todo óptimo local es automáticamente un óptimo global.
- **Localización de soluciones:** Los óptimos globales se alcanzan siempre en la frontera del poliedro factible, específicamente en vértices o en aristas completas.

Transformación a Programación Lineal (Charnes-Cooper) Una propiedad notable de los problemas PLF es que pueden transformarse en problemas equivalentes de programación lineal mediante el cambio de variables:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{D(\mathbf{x})}, \quad t = \frac{1}{D(\mathbf{x})} > 0$$

Esta transformación, válida cuando $D(\mathbf{x}) > 0$ en la región factible, convierte el problema original en:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar: } \mathbf{p}^\top \mathbf{y} + \alpha t \\ &\text{Sujeto a: } A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}t \\ &\quad \mathbf{q}^\top \mathbf{y} + \beta t = 1 \\ &\quad t > 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

que es un problema de programación lineal estándar en las variables (\mathbf{y}, t) .

2.1. Resultados Fundamentales Utilizados

Teorema 2.1 (Construcción de PLF con segmentos óptimos [1]). *Sea $f(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$ con $x \in \mathbb{R}^2$, donde $p = (a, b)^t$, $\alpha = c$, $q = (d, e)^t$, $\beta = 1$. Supóngase que:*

1. $ae - bd = 1$ (condición de normalización)
2. Se definen $p_0 = b - ce$, $q_0 = cd - a$ con $p_0 < 0$, $q_0 > 0$
3. $q^t x + \beta > 0 \forall x$ en la región factible

Sea $E = (p_0, q_0)$ el centro de las curvas de nivel. Construyamos un cuadrilátero $ABDC$ tal que:

- $A = (m, n)$, $C = (u, v)$ con $p_0v = q_0u$ (C alineado con E y el origen)
- $B = A + t(A - E)$, $D = C + s(C - E)$, con $t, s > 0$
- $d_1 > b_1$ (orden horizontal)

Entonces:

- Todos los puntos del segmento \overrightarrow{AB} son mínimos globales.
- Todos los puntos del segmento \overrightarrow{CD} son máximos globales.
- $f(A) = f(B) < f(C) = f(D)$.

Además, cada punto de estos segmentos satisface las condiciones KKT.

Lema 2.2 (Signo constante del denominador en un poliedro). *Sea $f(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$ y S un poliedro convexo acotado. Si el denominador $D(x) = q^t x + \beta$ tiene el mismo signo en todos los vértices de S , entonces $D(x)$ mantiene ese signo en todo S .*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $D(x) > 0$ en todos los vértices de S . Dado que S es un poliedro convexo acotado, cualquier punto $x \in S$ puede expresarse como combinación convexa de sus vértices:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Evaluamos $D(x)$:

$$D(x) = q^t x + \beta = q^t \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \right) + \beta = \sum_{i=1}^k \lambda_i (q^t v_i + \beta) = \sum_{i=1}^k \lambda_i d(v_i).$$

Como cada $D(v_i) > 0$ y $\lambda_i \geq 0$, con al menos un $\lambda_i > 0$, se tiene que $D(x) > 0$ para todo $x \in S$. El caso $D(x) < 0$ es análogo. \square

Nota: El **Lema 1** de [1] considera $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$, que es un poliedro convexo. Demuestra que si $q^t x + \beta \neq 0$ para todo $x \in S$, entonces necesariamente $q^t x + \beta$ mantiene signo constante. Esta propiedad garantiza que f es pseudoconvex y pseudocónica en S . El lema anterior extiende este criterio a poliedros convexos acotados: basta verificar el signo en los vértices para asegurar que el denominador nunca se anula y mantiene signo constante.

3. IMPLEMENTACIÓN EN PYTHON

La implementación computacional desarrollada en Python se encuentra en el archivo `Practica8.py` el cual se intenta alinear con la teoría presentada en el documento *PL-Fraccional* [1] según la metodología descrita en las páginas 9-13 para resolver problemas de programación lineal fraccional.

3.1. Módulo de Lectura de Datos

La función `Leer_Datos()` procesa archivos que contiene la información del problema y extrae los vectores p, q, b , la matriz A , y las constantes α y β .

- Coeficientes del numerador: a, b, α donde $p'x + \alpha = ax_1 + bx_2 + \alpha$
- Coeficientes del denominador: d, e, β donde $q'x + \beta = dx_1 + ex_2 + \beta$
- Matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ y vector $b \in \mathbb{R}^4$ de restricciones $Ax \leq b$

3.2. Cálculo de Vértices del Poliedro

La función `Calcular_Vertices()` implementa el algoritmo geométrico para encontrar todos los vértices de un poliedro en \mathbb{R}^2 . El algoritmo sigue los siguientes pasos:

1. Para cada par de restricciones (i, j) resolver el sistema lineal $A_{[i,j]}x = b_{[i,j]}$.
2. Verificar si la solución x satisface **todas** las restricciones $Ax \leq b$.
3. Eliminar soluciones duplicadas (dentro de una tolerancia numérica).
4. Retornar el conjunto de vértices únicos.

Este algoritmo considera todas las $\binom{m}{2}$ combinaciones posibles de restricciones y verifica la factibilidad del punto de intersección con **todas** las restricciones, asegurando que solo se incluyan vértices válidos del poliedro. La complejidad computacional es $O(m^3)$ donde m es el número de restricciones.

3.3. Evaluación de la Función Objetivo Fraccional

La función objetivo $f(x) = \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta}$ se implementa siguiendo un definición general.

```
1 def Funcion_f(p, q, alpha, beta, x):  
2     numerador = np.dot(p, x) + alpha  
3     denominador = np.dot(q, x) + beta  
4     if abs(denominador) < 1e-12:  
5         return float('inf')  
6     return numerador / denominador
```

Listing 1: Implementación de la función objetivo fraccional `def Funcion_f(...)`

Para el gradiente, se implementa la siguiente fórmula:

$$\nabla f(x) = \frac{(q'x + \beta)p - (p'x + \alpha)q}{(q'x + \beta)^2} \quad (1)$$

```

1 def gradiente_f(p, q, alpha, beta, x):
2     D = np.dot(q, x) + beta
3     if abs(D) < 1e-12:
4         return np.array([float('inf'), float('inf')])
5     N = np.dot(p, x) + alpha
6     return (D * p - N * q) / (D**2)

```

Listing 2: Cálculo del gradiente de $f(x)$ según fórmula teórica

3.4. Verificación de Propiedades Teóricas

La verificación de las diferentes propiedades teórica se realiza mediante la función `Verificar_Propiedades_Teoricas(p, q, alpha, beta, vertices)`:

1. **Condición** $ae - bd = 1$: Verifica la relación fundamental.
2. **Cálculo del centro** $E = (p, q)$: Calcula el punto alrededor del cual giran las curvas de nivel:

$$p = b - ce, \quad q = cd - a$$
3. **Positividad del denominador**: Verifica que $q'x + \beta > 0 \forall x \in S$ haciendo uso del Lema 2.2.
4. **Fórmulas simplificadas del gradiente**: Cuando $ae - bd = 1$, el gradiente se simplifica a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2 - q}{h^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-x_1 + p}{h^2}$$

donde $h = dx_1 + ex_2 + 1$.

5. **Detección de segmentos constantes**: Identifica segmentos opuestos donde $f(x)$ es constante.

3.5. Resolución de Condiciones KKT

Para cada vértice y segmento del cuadrilátero:

1. **Restricciones activas**: Se detectan con tolerancia 10^{-8} con `Identificar_Restricciones()`, que mapea restricciones a aristas.
2. **Multiplicadores**:
 - **Vértices**: Se resuelve exactamente $\nabla f(x) + A_{act}^T \lambda = 0$ mediante `np.linalg.solve()`.
 - **Segmentos**: Se calcula $\lambda = -\frac{\nabla f(x) \cdot \nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2}$ para la restricción activa.

- **Adicionalmente**, si $ae - bd = 1$, se calculan también los valores analíticos del PDF para comparación.

3. Verificación:

- Mínimo: $\lambda \geq -10^{-8}$
- Máximo: $\lambda \leq 10^{-8}$

Segmentos constantes: Se identifican cuando $|f(v_i) - f(v_j)| < 10^{-8}$ en vértices adyacentes. Para cada segmento, se analiza el punto medio.

3.6. Generación de Resultados

1. **Problema:** $f(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$ y verificación $ae - bd = 1$. **Salida:** INFORMACIÓN DEL PROBLEMA con condición teórica y propiedades.
2. **Vértices:** Resolución de sistemas 2×2 de restricciones. **Salida:** VÉRTICES DEL CUADRILÁTERO: $V_1: (x.xxxxxxx, y.yyyyyyy)$.
3. **Evaluación:** Cálculo en vértices con 12 decimales y signo del denominador. **Salida:** $V_i: f = x.xxxxxxxxxxxxxx$ ($D(x) = x.xxxxxxx > 0$).
4. **Óptimos:** Identificación de mínimo y máximo globales. **Salida:** MÍNIMO GLOBAL: $f = x.xxxxxxxxxxxxxx$ En: $x = (x.xxxxxxx, y.yyyyyyy)$ Vértice: V_i .
5. **KKT:** Cálculo y verificación de multiplicadores λ_i . **Salida:** Sección SOLUCIONES KKT PARA MÍNIMO/MAXIMO con tabla de λ_1 a λ_4 .
6. **Conclusiones:** Identificación de segmentos constantes y resumen. **Salida:** Segmento(s) de MÍNIMO/MAXIMO y verificación final KKT.

4. APLICACIÓN A UN PROBLEMA CONCRETO

Los datos que se han utilizado para resolver un problema concreto de programación lineal fraccional se encuentran en el archivo Datos8.dat cuyo contenido es el siguiente:

```
f(x) = (103*x1 + 137*x2 + 36) / (3*x1 + 4*x2 + 1)
A11 =      -5    A12 =      -7    b1 =      0
A21 =      -9    A22 =       1    b2 =   -136
A31 =      -3    A32 =      23    b3 =    136
A41 =       7    A42 =       3    b4 =    476
```

Figura 1: Contenido del archivo Datos8.dat.

Por lo tanto, el problema queda completamente definido de la siguiente manera:

$$\text{Min/Max } f(\mathbf{x}) = \frac{103x_1 + 137x_2 + 36}{3x_1 + 4x_2 + 1}$$

s.a.:

$$-5x_1 - 7x_2 \leq 0 \quad (\text{R1})$$

$$-9x_1 + x_2 \leq -136 \quad (\text{R2})$$

$$-3x_1 + 23x_2 \leq 136 \quad (\text{R3})$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 476 \quad (\text{R4})$$

Para una primera aproximación, se graficó la región factible haciendo uso de Geogebra (véanse Figuras 2 y 3):

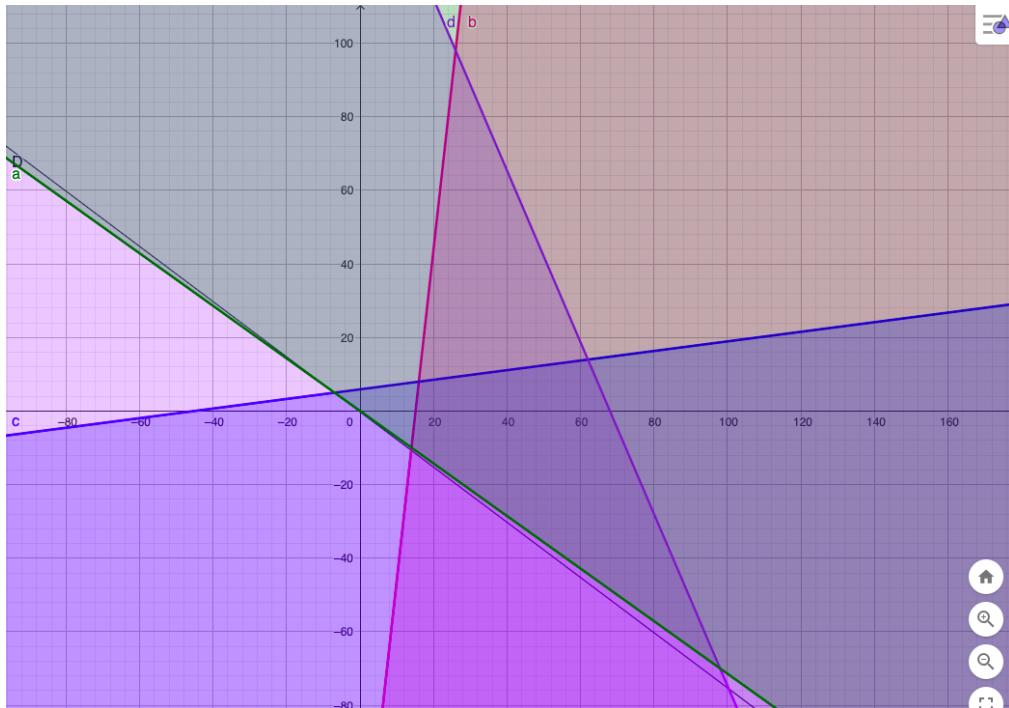


Figura 2: Representación geométrica de la región factible.

Atendiendo a la Figura 3 se aprecia que la recta D correspondiente al denominador no interseca a la región factible definida por el cuadrílatero sombreado en color amarillo.

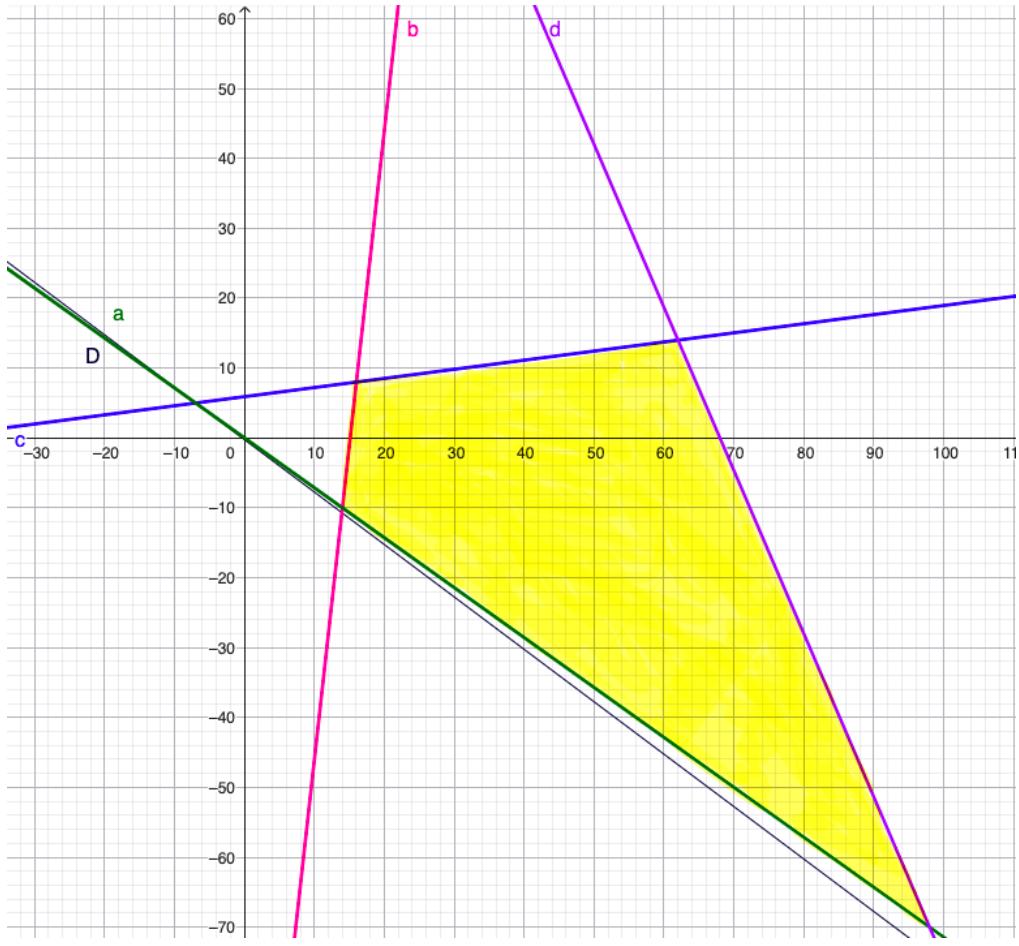


Figura 3: Representación geométrica de la región factible con curvas de nivel.

Representación Matricial:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 103 \\ 137 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 36, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \beta = 1, \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -9 & 1 \\ -3 & 23 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -136 \\ 136 \\ 476 \end{bmatrix}$$

4.1. Verificación de Supuestos

Los resultados obtenidos mediante la implementación en Python (archivo de salida `Solucion8.sol`) permiten verificar rigurosamente los supuestos teóricos del problema.

Primera Condición: Se va a verificar que se cumple la siguiente igualdad $ae - bd = 1$. Para nuestro caso:

$$a \cdot e - b \cdot d = 103 \times 4 - 137 \times 3 = 412 - 411 = 1$$

Esta condición, confirmada en `Solucion8.sol`, indica que el problema sigue la estructura teórica descrita en el documento de referencia.

Positividad del denominador en la región factible El archivo `Solucion8.sol` muestra que el denominador $D(x) = 3x_1 + 4x_2 + 1$ es positivo en todos los vértices:

Vértice	Coordenadas	$D(x)$
V_1	(98,000000, -70,000000)	15,000000 > 0
V_2	(62,000000, 14,000000)	243,000000 > 0
V_3	(16,000000, 8,000000)	81,000000 > 0
V_4	(14,000000, -10,000000)	3,000000 > 0

Por el **Lema del signo constante en poliedros**, dado que $D(x) = q^t x + \beta$ es una función afín y Ω es un poliedro convexo acotado, se cumple que si $D(v_i) > 0$ para todos los vértices v_i de Ω , entonces $D(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Evaluando en los vértices del cuadrilátero:

$$\min_{v \in \text{vértices}(\Omega)} D(v) = \min\{3, 81, 243, 15\} = 3 > 0$$

Por tanto, $D(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, lo que garantiza que $f(x)$ está bien definida en toda la región factible. Además, por el **Lema 1 del PDF [1]**, esta positividad implica que $f(x)$ es pseudoconvexa y pseudocóncava en Ω .

Vértices del cuadrilátero El programa identifica los cuatro vértices del poliedro:

$$\begin{aligned} V_1 &= (98,000000, -70,000000) \quad (\text{intersección R1 y R4}) \\ V_2 &= (62,000000, 14,000000) \quad (\text{intersección R3 y R4}) \\ V_3 &= (16,000000, 8,000000) \quad (\text{intersección R2 y R3}) \\ V_4 &= (14,000000, -10,000000) \quad (\text{intersección R1 y R2}) \end{aligned}$$

Estos vértices coinciden con los calculados analíticamente y forman un cuadrilátero convexo, como se aprecia en las Figuras 2 y 3.

4.2. Evaluación de la Función Objetivo

Según `Solucion8.sol`, los valores de $f(x)$ en los vértices son:

Vértice	Coordenadas	$f(x)$
V_1	(98,000000, -70,000000)	36,00000000000000
V_2	(62,000000, 14,000000)	34,320987654321
V_3	(16,000000, 8,000000)	34,320987654321
V_4	(14,000000, -10,000000)	36,00000000000000

Se observa un patrón importante: vértices opuestos tienen el mismo valor de $f(x)$, lo que sugiere la existencia de segmentos constantes:

- V_2 y V_3 comparten $f = 34,320987654321$
- V_4 y V_1 comparten $f = 36,00000000000000$

4.3. Análisis de Optimalidad mediante KKT

Los resultados detallados en `Solucion8.sol` proporcionan un análisis completo de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

4.3.1. Mínimo Global

Valor y ubicación

$$f_{\min} = 34,320987654321 \quad \left(\text{equivalente a } \frac{2780}{81} \right)$$

El mínimo global se alcanza en todo el **segmento** V_2-V_3 , correspondiente a la restricción R3 activa:

$$-3x_1 + 23x_2 = 136$$

Multiplicadores de Lagrange

- **Vértice V_2** (restricciones activas R3 y R4):

$$\lambda = (0, 0, 5,08053 \times 10^{-5}, 0) \quad \text{Satisface KKT}$$

- **Vértice V_3** (restricciones activas R2 y R3):

$$\lambda = (0, 0, 1,52416 \times 10^{-4}, 0) \quad \text{Satisface KKT}$$

Los multiplicadores asociados a R3 son positivos, confirmando que el segmento completo es mínimo global.

4.3.2. Máximo Global

Valor y ubicación

$$f_{\max} = 36,000000000000$$

El máximo global se alcanza en todo el **segmento** V_4-V_1 , correspondiente a la restricción R1 activa:

$$-5x_1 - 7x_2 = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

- **Vértice V_1** (restricciones activas R1 y R4):

$$\lambda = (-0.066, 0, 0, 0) \quad \text{Satisface KKT}$$

- **Vértice V_4** (restricciones activas R1 y R2):

$$\lambda = (-0.333, 0, 0, 0) \quad \text{Satisface KKT}$$

Los multiplicadores negativos son **consistentes con un máximo global**, ya que para problemas de maximización las condiciones KKT requieren $\lambda_i \leq 0$.

5. CONCLUSIONES

La implementación algorítmica genera resultados para el problema de programación lineal fraccional en \mathbb{R}^2 , en particular para los datos concretos expuestos con anterioridad en la Sección 4, identificando para el mínimo global $f_{\min} = 2780/81$ en el segmento V_2-V_3 y el máximo global $f_{\max} = 36$ en el segmento V_4-V_1 . Los multiplicadores de Lagrange calculados son consistentes con la teoría: para el mínimo se obtienen $\lambda_i \geq 0$, satisfaciendo las condiciones KKT para minimización; para el máximo se obtienen $\lambda_i \leq 0$, satisfaciendo las condiciones KKT para maximización. La documentación en `Solucion8.sol` presenta un análisis completo que integra verificación teórica, representación gráfica y validación computacional.

6. BIBLIOGRAFÍA

Referencias

- [1] Ortega, Ángel Felipe. *Programación Lineal Fraccional*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 2023.