Apéndice: Idealización de pérdida de masa siguiendo una dirección $\vec{q}$.

En la modelización de algunos problemas (por ejemplo en navegación aeroespacial) un cuerpo es idealizado como una única partícula $P(t)$ pero con una masa $m(t)$, variable con el tiempo, que es controlada a distancia haciendo que parte de esa masa salga expulsada en alguna dirección estratégica para la navegación $\vec{q}(t)$. Un problema típico (aplicado en la práctica, en 1969) es el del alunizaje de una cápsula espacial sobre la superficie de la Luna para alcanzarla con velocidad nula y así evitar el deterioro de la nave por un indeseado choque brusco.

Veamos que en este tipo de problemas la aplicación de las leyes de Newton no se reduce a expresar la fuerza externa como variación del vector momento lineal

(1) $$\frac{d}{dt}\left(m(t)\vec{v}(t)\right) = \vec{f}(t)$$

como indicó Euler (con posterioridad a Newton) sino que el balance adecuado debe formularse como

(2) $$\frac{d}{dt}\left(m(t)\vec{v}(t)\right) = \vec{f}(t) + \dot{m}(t)\left[\vec{v}(t) + \vec{q}(t)\right].$$

La hipótesis simplificadora de esa compleja realidad (en la que habría que acudir incluso a la Mecánica de Fluidos para una mayor exactitud a la hora de analizar el movimiento de los gases expulsados, el fluido que rodea a la nave y otros muchos detalles técnicos que aquí se van a simplificar) es que:

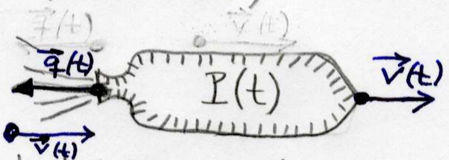
(H) { En un pequeño intervalo temporal $[t, t+h]$ el vector momento lineal de la masa expulsada $m(t)-m(t+h)$ tiene como dirección $\vec{q}(t)+\vec{v}(t)$ (e.d. independiente de h).

Por tanto, gracias a (H)

$$\lim_{h\to 0} \frac{m(t)-m(t+h)}{h}\left(\vec{v}(t)+\vec{q}(t)\right) = -\dot{m}(t)\left(\vec{v}(t)+\vec{q}(t)\right) =$$

(3) $$= -\frac{d}{dt}\left(m(t)\vec{v}(t)\right) + m(t)\dot{\vec{v}}(t) - \dot{m}(t)\,\vec{q}(t).$$

Si suponemos, en particular, el caso ideal en el que ese punto material (la nave espacial) estuviese perfectamente aislado y exento de la aplicación de fuerza alguna (ni siquiera la gravitatoria hacia la Luna o el Sol) y si pusiéramos un sistema de referencia relativo $\hat{R}(t)$ sobre la nave veríamos que la "velocidad de arrastre" de la nave sería $\vec{q}(t)+\vec{v}(t)$



(de hecho, el control del movimiento se basa en que $\vec{q}\neq 0 \Rightarrow \vec{v}\neq 0$).

Por la tercera ley de Newton, en el periodo $[t, t+h]$ el vector momento lineal generado por la expulsión de gases es (gracias a (H)) $(m(t)-m(t+h))\vec{q}(t)$ y a esa variación le debe corresponder otra variación (en sentido opuesto) del vector momento lineal $m(t)\vec{v}(t)-m(t+h)\vec{v}(t+h)$ y que, en línea con la hipótesis (H), se puede "aproximar" como $m(t)\left[\vec{v}(t)-\vec{v}(t+h)\right]$.

Por tanto

(4) $$\dot{m}(t)\vec{q}(t) = m(t)\dot{\vec{v}}(t)$$

(obsérvese que se está suponiendo que $\dot{m}(t)\leq 0$ y por tanto (4) implica un cambio de sentido entre los vectores $\vec{q}(t)$ y $\vec{v}(t)$).

La relación (4) se puede escribir equivalentemente como

(5) $$\dot{\vec{v}}(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\,\vec{q}(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ln}(m(t))\,\vec{q}(t) \qquad (\mathrm{Ln} \equiv \text{logaritmo})$$

que expresa cuantitativamente el efecto que la expulsión de masa provoca sobre la velocidad. En el caso concreto en el que $\vec{q}(t) = q(t)\vec{e}$ y $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}$ (con $\vec{e}$ vector unitario independiente de t), la fórmula (5) equivale a

(6) $$\dot{v}(t) = -\,q(t)\frac{d}{dt}(\mathrm{Ln}\, m(t)).$$

Si ahora suponemos el caso general, en el que existe una fuerza total externa $\vec{f}(t)$ aplicada sobre el punto en movimiento se ve que la adecuada "interpretación de la 2ª ley de Newton" en este caso es la dada por (2), lo que también podemos leer como

(7) $$\vec{f}(t) = m(t)\dot{\vec{v}}(t) - \dot{m}(t)\,\vec{q}(t),$$

al utilizar (2) y (4). Obsérvese que con esta interpretación el caso hipotético de $\vec{q} \equiv \vec{0}$ conduce a una expresión que contradice la conservación del momento lineal en caso de ausencia de fuerzas, pues si $\vec{f} = \vec{0}$ entonces (7) implicaría que

(8) $$m(t)\dot{\vec{v}}(t) = \vec{0}, \quad \text{y no a,} \quad \frac{d}{dt}(m(t)\,\vec{v}(t)) = \vec{0}.$$

Modelizar el gobierno de la navegación de la partícula mediante la acción de $\vec{q}(t)$ obliga a utilizar (2) y por tanto al contraste mencionado en (8).

Referencias. Ver por ejemplo, J. S. Meditch, "On the problem of optimal thrust programming for a Lunar soft landing", IEEE Transactions on Automatic Control, A-C-9, 477-484 (1964), y sus citas bibliográficas.