

R 软件作业 4

2016 年 3 月 25 日

1. 设随机变量 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 1)$, 且相互独立, 试估计 $E(|X_1 - X_2|)$ 和 $D(|X_1 - X_2|)$ 。
2. 画出函数

$$f(x) = \frac{\log(1 + \log(x))}{\log(1 + x)}$$

在 $x \in (1, 10)$ 的图像, 并用合适的优化函数求其在该区间内的极值点和极值。

3. 设随机变量 X 服从参数为 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 的伽马分布 $\text{Ga}(\alpha, \beta)$, 其密度为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

- (1) 设置种子数100, 产生100个来自 $\text{Ga}(4, 2)$ 的随机数。
 - (2) 设上述随机数为来自某伽马分布的样本, 求其中未知参数 α , β 的矩估计。
 - (3) 设上述随机数为来自某伽马分布的样本, 试用合适的函数求其中未知参数 α , β 的最大似然估计。注: R 函数 `digamma` 可用以求 $\log \Gamma(x)$ 的导数。
4. (1) 编写一函数, 能够求出单个正态总体均值未知时, 方差的水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间。
 - (2) 模拟一组来 $N(2, 4)$ 的随机数, 然后假设均值和方差未知, 用上述函数估计未知方差, 取 $\alpha = 0.05$ 。
 - (3) 重复上述过程 200 次, 得到 200 个方差的置信区间, 这 200 个区间中, 有多少个包含真值 4? 并将上述置信区间用图形显示出来。
5. (1) 编写一函数, 能够求出单个正态总体均值的水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间。
 - (2) 模拟一组来 $N(2, 4)$ 的随机数, 然后分别假设方差已知和未知, 用上述函数求均值的置信区间, 并比较区间长度。取 $\alpha = 0.05$ 。
 - (3) 重复上述过程 200 次, 得到 200 个方差已知时均值的置信区间和 200 个方差未知时均值的置信区间, 并将对应的区间长度作比较。在一张图上画出这些置信区间。有什么结论?