MATEMATİKSEL İSTATİSTİK-II

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

DENİZ BALCI

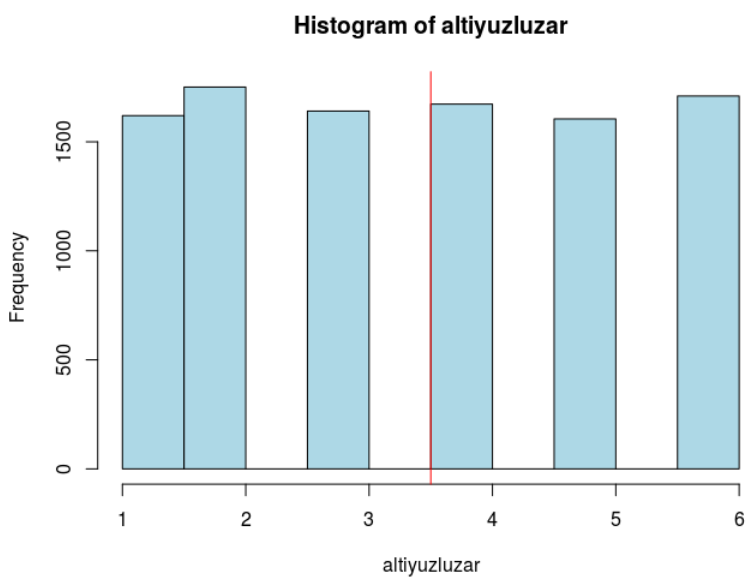
1 MERKEZİ LİMİT TEOREMİ NEDİR ?

Büyük bir sayıda olan bağımsız ve aynı dağılım gösteren rassal değişkenlerin (eğer sonlu varyans değerleri bulunuyorsa) aritmetik ortalamasının, yaklaşık olarak normal dağılım (yani Gauss dağılımı) göstereceğini ifade eden bir teoremdir.

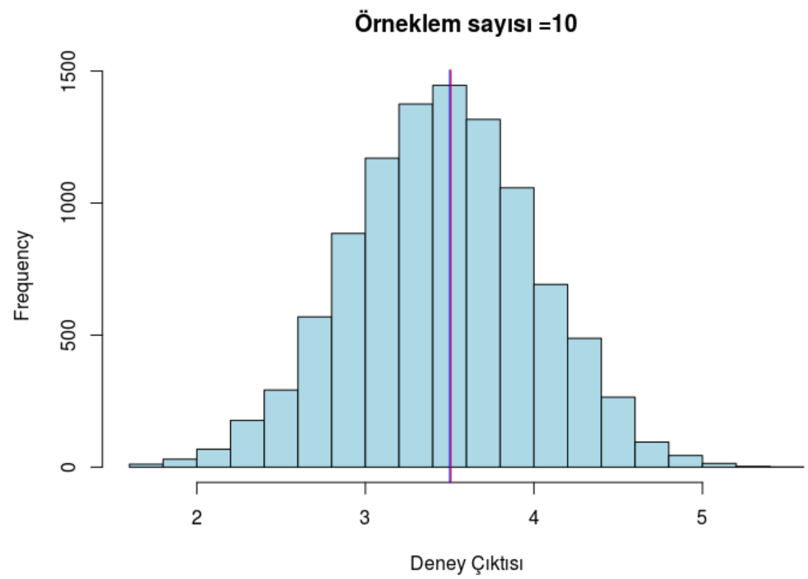
Kısacası :örneklem ortalamasının dağılımının limiti n(örnek sayısı) sonsuza giderken normal dağılıma benzemesidir.

1.1 Grafiksel örnekler

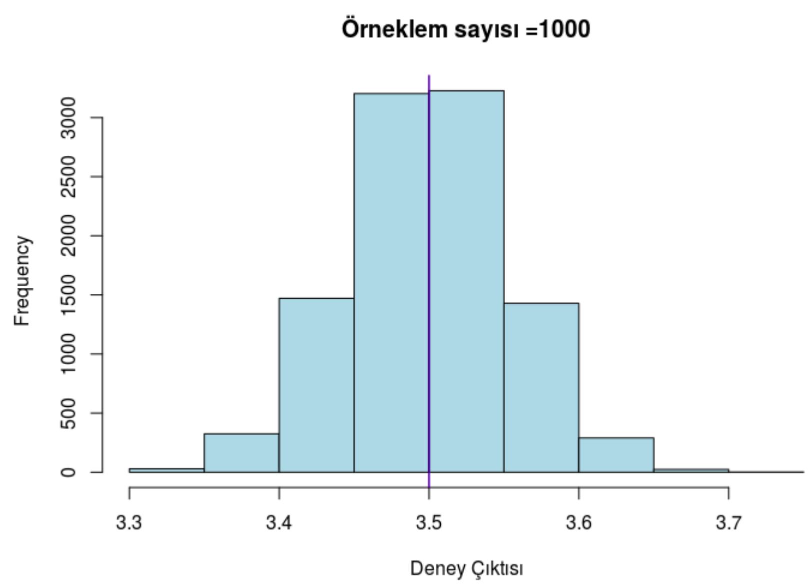
Şimdi bu tanımı görsel bir örnekle açıklayalım.6 yüzlü hilesiz bir zarımız olsun.Bu zarı 10000 defa atalım ve histogram üzerinde sıklıklarını gösterelim.



Şimdi ise örneklem ortalaması üzerinden 10 ve 1000 kadar örneklem ile deneyelim. Aşağıdaki grafiktaki örneklem sayısı 10 kadardır.



Şimdi ise örneklem sayısımızı 1000 kadar yapıp sonucu görelim



Şekil olarakta görüleceği üzere basit bir zar deneyinde bile grafikleri kullanarak bu teoremi grafikler ile gözlemleyebiliyoruz.

2 MERKEZİ LİMİT TEOREMİNİN İSPATI

Şimdi ise merkezi limit teoremini kanıtlayalım.$X_1, X_2, ..., X_n$ her biri birbirinden bağımsız, Beklenen Değeri μ ,varyansı σ^2 olan değişkenler olsun ,Örneklem ortalaması $\bar{X}_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) olsun..$

Not :$Mx(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3)$

Şimdi ise bir rassal değişken tanımlayalım $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ ve beklenen değer,varyansını hesaplayalım.

$E(\frac{X_i-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}[E(X_i) - E(\mu)] = 0$ olur çünkü $E(X_i) = \mu \quad ve \quad E(\mu)] = \mu$ dır.

$V(\frac{X_i-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}[V(X_i) - V(\mu)] = \frac{1}{\sigma^2}.\sigma^2 = 1$olur çünkü $V(X_i) = \sigma^2$ ve $V(\mu) = 0$ dır.
$M_{Zi}(t) = 1 + tE(Zi) + \frac{t^2}{2!}E(Zi^2) + \frac{t^3}{3!}E(Zi^3) + \frac{t^4}{4!}E(Zi^4)$ ve $V(Zi) = E(Zi^2) - E(Zi)^2 = 1$ olduğundan $E(Zi^2) = 1$, $E(Zi)^2 = 0$ olur.
$M_{Zi}(t) = 1 + t.0 + \frac{t^2}{2!}1 + \frac{t^3}{3!}\mu^3 + \frac{t^4}{4!}\mu^4 ...$
$M_{Zi}(t)) = 1 + +\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\mu^3 + \frac{t^4}{4!}\mu^4 ....$

Şimdi ise başka bir değişken tanımlayalım ,$U_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ve $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$
$U_n = \sqrt{n}\frac{n^{-1}\sum X_i - \mu}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{n}\sum(\frac{X_i-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Zi$
$\frac{M_{Zi}}{\sqrt{n}} = E(e^{t\frac{Zi}{\sqrt{n}}}) = E(e^{Zi\frac{t}{\sqrt{n}}}) = M_{zi}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ şeklinde düzenleme yaparsak
$M_{Un(t)} = \prod_{i=1}^{n} M_{Zi}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ $M_{Un(t)}$'nın moment üreten fonksiyonunu bu şekilde buluruz.
$M_{Un(t)} = [1 + \frac{1}{2!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2 + \frac{\mu_3}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 + \frac{\mu_4}{4!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^4]^n$
$nln(M_{Un(t)}) = [1 + \frac{1}{2!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2 + \frac{\mu_3}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 + \frac{\mu_4}{4!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^4]$

ln(1+x)=$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 ...$ ve x=$\frac{1}{2!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2 + \frac{\mu_3}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 + \frac{\mu_4}{4!}(\frac{t}{\sqrt{n}})^4$ şeklinde seri açılımını düşünebiliriz.

$$ln[M_{Un(t)}] = n[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}] - \frac{n}{2}[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}]^2 + \frac{n}{3}[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}]^3..$$

şimdi ise n leri içeri alalım
$ln[M_{Un(t)}] = n[[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}]^2 + \frac{1}{3}[\frac{1}{2n}t^2 + \frac{\mu_3}{3!n^{3/2})+..}]^3..]$

$\lim_{n\to\infty} ln[M_{Un(t)}] = \frac{1}{2}t^2$ ve $e^{ln[M_{Un(t)}]} = e^{\frac{1}{2}t^2}$ şeklinde düzenlersek $e^{\frac{t^2}{2}}$ = stan dart normal dağılımın moment üreten fonksiyondur.

3 ÖRNEK SORU

128 kişilik bir organizasyon planladığımızı düşünelim.Konuklara ikram etmek üzere belirli sayıda sandviç hazırlanacaktır ve 0,1,2 sandviç isteme olasılıkları $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}ve\frac{1}{4}$dır.Ve konukların talebi birbirinden bağımsızdır.

$Y = X_1 + X_2 + ... + X_128 \quad P(X <= x) = 0.95$

$Exi = \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 = 1 \quad Exi = \frac{1}{4}.0^2 + \frac{1}{2}.1^2 + \frac{1}{4}.2^2 = \frac{3}{2}$

$Var(Xi) = E(xi^2) - E(xi)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad ve \quad \sqrt{\sigma_{xi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$E(y) = 128.1 = 128 \quad Var(Y) = 128.\frac{1}{2} = 64 \quad \sigma_y = 8$

$P(X <= x) = P(\frac{X-128}{8}) = 0.95$ ve $Z_{0.95} = 1.64$ olduğundan

$1.64.8 = 13.12 + 128 = 141.12$ ihtiyaç duyulan sandviç miktarıdır