Örnek sorular :https://endustri.eskisehir.edu.tr/Ders.aspx?dersId=182
ilhan hocanın kullandığı notlar :http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/ist101.html

İSPATLAR

ÜRETİCİ FONKSİYONLAR

Rassal Değişken: Bir olay matematiksel olarak açıklamamızı sağlayan fonksiyondur. Ω örnek uzaydaki olayları bilinen bir uzaya aktarmayı sağlayan fonksiyondur.

DAĞILIM FONK: Bir RD en iyi karakterize eden fonksiyondur.

a) Azalmayan bir fonksiyon $F(x_1) < F(x_2)$

b) F sağdan sürekli

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Olasılık Fonksiyonu / Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Dağılım fonksiyonundan elde edilen bir R.D karakterize eden fonksiyondur.

Kesikli Dağ (of)

$$P(X=x) = f(x) = \begin{cases} F(x^+) - F(x^-) & x \in D_x \\ 0 & dd \end{cases}$$

i) $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$

ii) $\sum f(x) = 1$

Sürekli Dağ R.D (OYF)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{dF(x)}{dx} & f(x)\text{'in türevlendiği yerler} \\ 0 & dd \end{cases}$$

i) $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Beklenen Değer

$$\sum_{x \in D_x} x \cdot f(x)dx \qquad \int_{x \in D_x} x f(x)dx$$

$E(x^k) = 0$ etrafındaki k'ıncı moment

Moment üreten fonk

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \begin{cases} \sum e^{xt} f(x)dx \\ \int_{x \in D_x} e^{xt} f(x)dx \end{cases}$$

$E[x^k]$'i bulur. $\dfrac{d^n M_x(t)}{dt^n}$

$$\int^{x} f(x) = F(x)$$

alt sınır

Kümilant üreten fonksiyonu

X r.d $M_X(t)$'si var ise $k_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \ln(M_X(t))$

$E(X-E(X))^k$ ortalama etrafındaki momenti bulmaya yarar.

$k_1 = E(x)$ $k_2 = Var(x)$ $k_3 = E(x^3) - 3E(x^2)E(x) + 2E(x)^3$

$k_4 = E(x^4) - 4E(x^3)E(x) - 3(E(x^2))^2 + 12E(x^2)(E(x))^2 - 6(E(x))^4$

KARAKTERİSTİK FONKSİYON

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \begin{cases} \sum e^{itx} P(X=x) & \text{kesikli} \\ \int e^{itx} f(x)dx \end{cases}$$

Çarpımsal moment: $E(x(x-1)(x-2)\ldots(x-(k+1))$ değerine k'ıncı çarpımsal momenti denir.

Çarpımsal Moment üreten fonksiyon

$$E(X(X-1)(X-2)\ldots(X-(k+1))) = \frac{d^k N_X(t)}{dt^k}$$

$$N_X(t) = E(t^X) = \begin{cases} \sum_{x \in R} t^x f(x) \\ \int_{x \in R} t^x f(x)dx \end{cases} \quad t=1$$

SERİLER

finite (sonlu seri)

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$ $c \neq 1$
- $\sum_{x=1}^{N} x^4 = \frac{6N^5 + 15N^4 + 10N^3 - N}{30}$

Binomial Series (Binom Serileri)

$\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\quad \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$ $\quad \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

VANDERMONDE'S ÖZDEŞLİĞİ (Identity)

$\cdot \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{k}$

Binom teoremi / Binomial Theorem

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$

$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \sum_{i=0}^{n} \bar{x} = n.x$

Sonsuz seriler

$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \frac{p}{1-p} \quad |p|<1$

$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} k p^{k-1} = \frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{(1-p)^2} \quad |p|<1$

$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k = (1-x)^{-r} \quad r \in N^+$ $\quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} p^k = (1+p)^{\alpha}$

$|p|<1, \ \alpha \in C$

BEKLENEN DEĞER VARYANS ÖZELLİKLERİ

a) $a,b \in R$ için $E[aX+b] = aE[X]+b$ $\qquad E[E(X)] = E(X)$

b) $a,b \in R$ için $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

c) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2 - \mu^2 = E(X-E(X))^2$

d) $E[(\cancel{X} - E(X))^3] = \mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu^3$

a) $E[aX+b] = \int_{x\in R} (aX+b) f(x)\,dx = \int_{x\in R} aX f(x)\,dx + \int_{x\in R} b f(x)\,dx = aE(x)+b$

b) $Var(aX+b) = E[(x-E(x))^2] = E[(aX+b-E(aX+b))^2]$
$= \int_{x\in R} (aX+b-aE(x)+b)^2 f(x)\,dx = \int_{x\in R} (aX-aE(x))^2 f(x)\,dx$

c) $\mu_2 = E(x^2) \quad E(x) = \mu \quad E(x)^2 = \mu^2 \quad Var(x) = \mu_2 - \mu^2$

$Var(X+Y) = Var(x) + Var(y) + 2cov(x,y)$ $\qquad p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$Var(X-Y) = Var(x) + Var(y) - 2cov(x,y)$

d) $\mu = E(x)$, $E[(x-E(x))^3]$, $E[(x-\mu)^3]$

1
1 − 1
1 − 2 + 1
1 − 3 + 3 − 1

$= E[x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3]$

$= E[x^3] - 3E(x^2)E(x) + 3E(x)E(x^2) - E(x^3)$

$= \mu - 3\mu^2 + 3\mu^3 - \mu^3 = \mu - 3\mu^2 + 2\mu^3$

e) $E[E(x)] = E[x]$, $E[E[x]] = \int E[x] f(x) d_x$

$\int x \cdot f(x)\, f(x) d_x = \int x \cdot f(x) dx \cdot \underbrace{\int f(x)\, dx}_{1} = \int x f(x) d_x = E(x)$

$E(x) = \sum_{x \in D_x} x f(x)$ $\quad E[E[x]] = \sum_{x \in D_x} x f(x)\, f(x) = \sum_{x \in D_x} x f(x) = E(x)$

~~Ma~~ EŞİTSİZLİKLER

MARKOV EŞİTSİZLİĞİ

X bir rassal değişken $g: R \to R^+$ g negatif değerler olmayan bir fonksiyon $r \in R^+$ için

$P(g(x) > r) \leq \dfrac{E(g(x))}{r}$ eşitliği geçerlidir.

$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) d_x = \int_{g(x)>r} g(x) f(x) d_x + \int_{g(x)<r} g(x) f(x) d_x \geq \int_{g(x)>r} g(x) f(x)\, d_x$

$\geq \int_{g(x)>r} r f(x) dx = r \int_{g(x)} f(x)\, dx$ $\quad E(g(x)) \geq r \int_{g(x)>r} f(x)\, d_x$

$E \dfrac{(g(x))}{r} \geq P(g(x) > r)$

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

$\mu = E(x)$ $\quad \sigma^2 = Var(x)$ $\quad Var(x) = E(x^2 - E(x)^2)$ $\quad E(x-\mu)^2$

$P(g(x) > r) \leq \dfrac{E(g(x))}{r}$ $\quad P(g(x) > k^2) \leq \dfrac{E(g(x))}{k^2}$

$g(x) = \dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$

$P\left(\dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} > r\right) \leq E\dfrac{(x-\mu)^2}{k^2}$ $\quad P((x-\mu)^2 > k^2\sigma^2) < \dfrac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$

$P(|x-\mu| > \sigma k) < \dfrac{1}{k^2}$

BERNOULLI DAĞILIMI

O.F

$$f(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & dd \end{cases}$$

Dağılım fonk

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

BEKLENEN DEĞER (E(x))

$$E[X] = \sum_{x=0}^{1} x \cdot p^x (1-p)^{1-x}$$

Bütün Momentler p'ye eşittir.

$$E[x^r] = p$$

$$\text{Varyans} = E[x^2] - E[x]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$M_x(t) = M_x(t) = E[e^{xt}] = \sum_{x=0}^{1} e^{xt} \cdot p^x q^{1-x} = e^t p + (1-p)$$

Karakteristik fonksiyon

$$\varphi_X(t) = E[e^{ixt}] = \sum_{x=0}^{1} e^{ixt} p^x q^{(1-x)} = e^{it} p + (1-p)$$

Çarpımsal Moment üreten Fonk

$$\eta_X(t) = E[t^x] = \sum_{x=0}^{1} t^x \cdot p^x q^{1-x} = (1-p) + pt$$

Kümilant üreten fonk

$$k_n(t) = \frac{d^n(\ln(M_x(t)))}{dt^n} = \frac{d^n(\ln(e^t p + (1-p)))}{dt^n} \Bigg|_{t=0}$$

$$\frac{1}{pe^t + q} \cdot pe^t \Big|_{t=0} = \frac{p}{p+q}$$ min des

Çarpıklık (skewness)

$$\frac{k_3(t)}{(Var(x))^{3/2}} = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[(x-E(x))^3]}{(Var(x))^{3/2}} = \frac{E[(x-E(x))^3]}{(p(1-p))^{3/2}}$$

$$= \frac{E[p^3 - 3p^2 E[x] + 3p E[x^2] + E[x]^3]}{(p(1-p))^{3/2}} = \frac{p - 3p^3 + 3p^2 + p^3}{(p(1-p))^{3/2}}$$

$$= \frac{p - 3p^2(1-p) + p^3}{(p(1-p))^{3/2}} = \frac{p(1-p^2) + 3p^2(1-p)}{p(1-p)^{3/2}} = \frac{p(1-p)(1+p) + 3p^2(1-p)}{p(1-p)^{3/2}}$$

$$\frac{p(1-p) \mid (1-p) + 3p^2}{p(1-p)^{3/2}} = \frac{(1-p) + 3p}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

BERNOULLI BASIKLIK

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E(x-E(x))^4}{(Var(x))^2} = \frac{E(x^4 - 4x^3E(x) + 6x^2E(x^2) - 4xE(x^3) + E(x^4))}{(p(1-p))^2}$$

$$= \frac{E[x^4 - 4x^3p + 6x^2p^2 - 4xp^3 + p^4]}{(p(1-p))^2} = \frac{E[x^4] - 4E[x^3]p + 6E[x^2]p^2 - 4p^3E[x] + p^4}{(p(1-p))^2}$$

$$= \frac{p - 4p^2 + 6p^3 - 4p^4 + p^4}{(p(1-p))^2} = \frac{p(1 - 4p + 6p^2 - 3p^3)}{(p(1-p))^2} = \frac{p(1-p)(3p^2-3p-1)}{(p(1-p))^2}$$

$$= \frac{(3p^2-3p-1)}{p(1-p)}$$

BINOM DAĞILIMI

O.F

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & dd \end{cases}$$

Dağılım Fonk

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \sum_{s=0}^{x} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} & 0 \le x \le n \\ 1 & x>n \end{cases}$$

E(X)

1. yol $E(x) = E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = p + p + \ldots + p = np$ n kadar bernoulli deneyi

2. yol $E(x) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \qquad x-1 = y, \quad n-1 = m$$

$$= np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y q^{m-y} = np \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y q^{m-y} = (p - (1-p))^m$$

$E(x) = np$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \qquad x^2 = x(x-1) + x$$

$x-2 = y \quad n-2 = m$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} \frac{x\,n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \qquad E(x) = np$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)\,n!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x-2)!} p^{x-2} q^{(n-2)(x-2)!}$$

$$\sum_{x=0} \frac{}{(y!(n-y)!}$$

$$np+n(n-1)p^2 = E(x^2)$$

$$\text{Varyans} = np+n(n-1)p^2-(np)^2 =$$

$$= np+(n^2-n)p^2-(np)^2 = np+(n^2p^2-np^2)-(np)^2$$

$$= p^2(n^2-1)+np(1-np)n \qquad = np(1-p) = npq$$

Moment üreten fonk

$$E[e^{xt}] = \sum_{x=0}^{n} e^{xt}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x e^{xt} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} (pe^t)^x \cdot q^{n-x} = [pe^t+q]^n$$

Kümülant üreten fonk

$$K(t) = \frac{d^n \ln(M_x(t))}{dt^n} = \frac{d^n \ln[pe^t+q]^n}{dt^n} = n\ln[pe^t+q]$$

Karakteristik Fonk

$$E[e^{ixt}] = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(ep^{it})^x q^{n-x} = [pe^{it}+q]^n$$

Çarpımsal Moment fonk

$$N_x(t) = E[t^x] = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pt)^x \cdot q^{n-x} = [pt+q]^n$$

Bernoulli ~ Binom Bağlantısı

Birbirinden bağımsız n bernoulli denemesi için X, her bir denemede başarı olasılığı p başarısızlık olasılığı q olan binom rastgele değişkeni ise X'in 0 y 1

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots n$$

Başarı oran n tanede x tadar başarı olur.

GEOMETRİK DAĞILIM

O.f

$$f(x) = \begin{cases} p \cdot q^{x-1} & x = 1,2,3,\dots n \\ 0 & dd \end{cases}$$

Dağılım fonk

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-(1-p)^{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

E(x)

$$E(x) = \sum_{n=1}^{x} x \, p \, q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{n} x \, q^{x-1} = p \frac{d}{dq}\left(\sum_{x=1}^{n} q^x\right) = p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) =$$

$$= \frac{1-1-q}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \, p \, q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{d}{dq}(q^x) = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^x$$

$$= p\left[\frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1+1}\right] = p \frac{d}{dq}\left[q \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^x\right] = p \frac{d}{dq}\left[q\left(\frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x\right)\right]$$

$$= p \cdot \frac{d}{dq}\left[q \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)\right] = p \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right] = \frac{1+q}{p^2}$$

$$Var(x) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Moment üreten fonk

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{n} e^{tx} \cdot p \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{q} e^{tx} \cdot q^x \cdot \frac{1}{q}$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{n} \underbrace{(e^t q)^x}_{r} = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-e^t q} - 1\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{1-1-e^t q}{1-e^t q}\right) = \frac{pe^t}{1-e^t q}$$

Kümilant üreten fonk

$$\frac{\partial^n \ln\left(\frac{pe^t}{1-e^t q}\right)}{\partial t^n}$$

Karakteristik fonk

$$\varphi_X(t)=E[e^{ixt}]=\sum_{x=1}^{n} e^{ixt}\cdot p\cdot q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{n} e^{ixt} q^{x-1}$$

$$=p\sum_{x=1}^{n} e^{ixt}\cdot q^x\cdot\frac{1}{p}\qquad \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{n}(e^{it}q)^x=\frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-e^{it}q}-1\right)$$

$$=\frac{p}{q}\left(\frac{1-1-e^{it}q}{1-e^{it}q}\right)=\frac{pe^{it}}{1-e^{it}q}$$

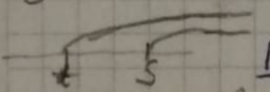
ÇARPIMSAL MOMENT

$$N_X(t)=E[t^X]=\sum_{x=1}^{n} t^x\cdot p\cdot q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{n} t^x\cdot p\cdot q^x\frac{1}{q}$$

$$=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{n}(tq)^x=\frac{1}{1-tq}-1\qquad \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-tq}-1-tq\right)=\frac{pt}{(1-tq)}$$

Hafızasızlık özelliği

$X\sim Ged(p)$ $p(X>s\mid X>t)=p(X>s-t)$ $(s>t$ için$)$ özelliğine hafızasızlık denir. X'in dnın s değerinden büyük olması (koşulu) k değerinden büyük olmasını dikkate almaksızın X'nin s-t büyük olmasına eşittir



ISPAT $\qquad \sum_{x=0}^{n-1} q^x=\frac{|1-q|^{n-1+1}}{1-x}\qquad \sum_{x=0}^{n} c^x=\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$

$$p(X>n)=\sum_{x=n+1}^{\infty} p^{x-1}\text{ gitmez}\quad 1-p(X\leq n)=1-\sum_{x=1}^{n} f(x)=$$

$$1-\sum_{x=1}^{n} p\, q^{x-1}$$! x-1=y diyelim çünkü $\sum_{x=0}^{n} c^x=\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$ ben zatta

$$1-\sum_{y=0}^{n-1} p\,x^y=1-p\sum_{y=0}^{n-1} x^y=1-p\left[\frac{q-1^{n-1+1}}{q-1}\right]=1-p\left[\frac{q-1^n}{q-1}\right]$$

$$1-(1-q)\left[\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\right]=1-(1-q^n)=1-1+q^n=q^n=p(X>n)=q^n$$

$$=\frac{p(X>s)}{p(X>t)}=\frac{q^s}{q^t}=q^{s-t}=p(X>s-t)$$

Sürekli Dağ.

üstel Dağılımlar

Negatif Binom Dağılımı

K kadar başarı sayısı

$f(x)\binom{x-1}{k-1}p^{x}(1-p)^{x-k}$ $\mu=E(x)=\frac{k}{p}$

$\sigma^2 = \frac{kq}{p^2}$

Negatif Binom - Geometrik Dağ

$X \sim Binom(n,p)$ ve $Y \sim NB(k,p)$

X deki başarı sayısı Y k başarı

$P(Y \leq n) = P(X \geq k)$ ve $P(Y > n) = P(X < k)$

Y k başarı elde edinceye kadar yapılan deneme sayısı

Binom - Negatif Binom

$X \sim Binom(n,p)$ $Y \sim NB(k,p)$

$P(Y \leq n) = P(X \geq k)$

$P(Y > n) = P(X < k)$

NEGATİF BİNOM DAĞILIMI

$f(x) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^{x}(1-p)^{x-k} =$ Binomdan $\binom{n}{x}p^{x} \cdot q^{n-x}$

$(n-1)$ $(x-1)$'li hali $\binom{n-1}{x-1}p^{x-1} \cdot q^{n-1-x-1}$

$= \left[\binom{n-1}{x-1}p^{x-1} \cdot q^{n-x}\right] P$

Y son deneme

Bütün denemeler / ilk $n-1$ deneme

Geo $f(x)$ $\frac{1}{p}$

Beklenen Değer $\frac{X}{P}$ $Var(x) = \frac{kq}{p^2}$

Geo $Var(x)$ q/p^2

K başarının n. kadar deneme

Geo. Dağ. Beklenen Değer İspatı

$E(x_i) = Y = X_1 + X_2 + X_3 \ldots k$ k tane Geometrik Dağılım $E(x)$'i

$E(x_1)$

$\downarrow$

$\frac{1}{p}$ olduğundan $E(x_i) = \frac{n}{p}$

Geo $E(x)$

$\frac{1}{p}$

GEO Dağ Varyans İspatı

$V(y) = V(x_1) + V(x_2) + \ldots V(x_k) = \frac{n \cdot q}{p^2}$

$Y = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + k$

Geo $Var(x)$

$\frac{q}{p^2}$

Geo Dağ ~~Kümülant~~ Moment ü. fonk

$M_x(t) = \frac{p^k \cdot e^{tk}}{(1-e^t q)^k}$

Geo $M_x(t)$

$\frac{pe^t}{1-e^t q}$

Geo Dağ Kümülant üreten fonk

$k(t) = \ln\left(\left(\frac{pe^t}{1-e^t q}\right)\right)^k = k\ln\left(\frac{pe^t}{1-e^t q}\right)$

ÇOK TERİMLİ DAĞILIM

(Binom Dağ Genelleştirilmiş hali)

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \, x_2! \ldots x_n} p_{x_1}^{x_1} \cdot p_{x_2}^{x_2} \ldots p_k^{x_k} & x_i = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$

$E(x) = np_i$, $Var(x) = n_i q_i$

n kadar denemede X_i in kaç defa gözlendiğini modeller.

HİPERGEOMETRİK DAĞILIM

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ & , x \le a \\ & n-x < N-a \end{cases}$$

n birimlik öge içinde a özelliği taşıyan, N anakütleli bir olasılık

BEKLENEN DEĞER

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x \binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} \frac{x\, a!}{x!\,(a-x)!} \binom{N-a}{n-x} = \frac{1}{\binom{N}{n}} a \sum_{x=1}^{n} \frac{x\,(a-1)!}{x\,(x-1)!\,(a-1-x-1)!} \binom{N-a}{n-x}$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} a \sum_{x=1}^{n} \frac{(a-1)!}{(x-1)!\,(a-1-x-1)!} \binom{N-a}{n-x} = \frac{a}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{a-1}{x-1}\binom{N-a}{n-x}$$

$x-1=y$ şeklinde değişken değiştirelim.

$$\frac{a}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-1} \binom{a-1}{y}\binom{N-a}{n-y-1} = \frac{a}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-1} \binom{N-1}{n-1}$$

$$\frac{a}{N!/n!\,(N-n)!} \quad \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!} = \frac{na}{N}$$

VARYANS

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=0}^{n} \frac{[x(x-1)+x]\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} + \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x} + \frac{na}{N}$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)\,a(a-1)}{x(x-1)(x-2)!\,(a-x)!} \binom{N-a}{n-x} + \frac{na}{N}$$

$$\frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{(a-2)!}{(x-2)!\,(a-x)!} \binom{N-a}{n-x} + \frac{na}{N}$$

$y = x-2$, $x = y+2$ şeklinde değişken değiştirelim

$$\frac{(a(a-1))}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-2} \binom{a-2}{x-2}\binom{N-a}{n-x} + \frac{na}{N} = \frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-2} \binom{a-2}{y}\binom{N-a}{n-(y+2)}$$

$$+ \frac{na}{N} = \frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} + \frac{na}{N}$$

$$= \frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{na}{N} = \frac{na[(a-1)(n-1)(N-1)]}{N(N-1)}$$

$$Var(x) = \frac{na(na-a-n+N)}{N(N-1)} - \frac{n^2a^2}{N^2} = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{na}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)$$

POİSSON DAĞILIMI

O.F

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{için } x \in R \\ 0 & \text{d.d} \end{cases}$$

Beklenen Değer

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x \,\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} x \,\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1} x$$

$$\frac{\lambda^{x-1}}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda . e^{\lambda} = \lambda$$

Varyans

$$E(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty} x\frac{\lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

MOMENT ÜRETEN FONK

$$M_x(t) = E[e^{xt}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e\lambda^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Kümilant ÜRETEN FONK

$$K(t) = \frac{\ln(M_x t)}{n} = \frac{d^n \ln(M_x t)}{dt^n} = \lambda(e^t-1)$$

ÇARPIMSAL ~~KARAKTERİSTİK~~ FONK $t=1$

$$N_x(t) = E(t^x) = \sum_{x\in R} t^x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x\in R}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

$$\frac{d^n N_x(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{\lambda(t-1)}\right)\Big|_{t=1} = \lambda^n$$

ÇARPIKLIK

$$\frac{k^3(t)}{k^2(t)} = \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

BASIKLIK KURTOSIS

$$K_4(t) \neq E((x-E(x))^4)$$

Hepsini aç.

$E[x^4]-4E[x^3]E[x]+6E(x^2)(E(x))^2-3(E(x))^4$

$$=\frac{\lambda+3\lambda^2}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}+3$$

Bir birim zaman veya alanda X rd λ parametresi ile poisson dağılıyor ise a birim zaman'nda yada alanda X rd $a.\lambda$ parametresi ile poisson Dağılır.

UNIFORM (DÜZGÜN DAĞILIM)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & dd\end{cases}$$

şeklinde verilmiş ise X rd (a,b) kapalı aralığında düzgün veya uniform dağ sahiptir denir.

i) $x\in(a,b)$ ise $f(x)=\frac{1}{b-a}>0$ $b>a$ old göre

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}=\frac{x}{b-a}\Big|_{x=a}^{b}=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1$

O.y.f ispatı

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_{x=a}^{b}=\frac{b^2-a^2}{2(a-b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{2(a-b)}$$

$$=\frac{a+b}{2}$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}=\frac{x^3}{3}\frac{1}{b-a}\Big|_{x=a}^{b}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$=\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$var(x)=\underset{(4)}{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}-\underset{(3)}{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

SORULAR

soru 4 üst yüzlerinde 1,2,3 sabarları yazılı olan 3 yüzlü olan 6 tane zarın aynı anda atılıyor. üst yüze gelen yüzeylerin aynı olma olasılığı

zar(1) = 1 2 3 (111 - 112 - 113 - 121 - 122 - 123 - 131 - 132 - 133

zar 2 = 1 2 3 (211 - 212 - 213 - 221 - 222 - 223 - 231 - 232 - 233

zar 3 = 1 2 3 (311 - 312 - 313 - 321 - 323 - 331 - 332 - 333

$3/27 = 1/9$

soru 5 X nd Bernolli Dağılımına sahip rassal değişkenin beklenen değer ve varyansını bulunuz. $(p = 0{,}24)$

$f(x) = \{ p^x . q^{1-x} \quad x = 0,1$

1. yol ezber $E(x) = p \quad Var(x) = p\,q$

2. yol ispat

$\sum_{x=0}^{1} x . p^x . q^{1-x} = 0 . p^0 . q^{1-0} + p = p = E(x)$

$E(x^2) - E(x)^2$

$= p - p^2 = p(1-p)$

$p . q$

$\sum_{x=0}^{1} x^2 p^x . q^{1-x} = 0 . p^0 . q^0 + 1 . p^1 = p = E(x^2)$

$q = 0{,}76 \qquad p = 0{,}24$

soru 6 X nd. ovst yoğunluk gibidir. $f(x) = \{ k e^{-4(x-3)}, x > 3$; 0 dd

$\int_3^{\infty} k e^{-4(x-3)} dx = k \int_3^{\infty} e^{-4(x-3)} dx = k \int_3^{\infty} e^{-4x} . e^{12} dx = k e^{12} \int_3^{\infty} e^{-4x} dx$

$k e^{12} \int_{3}^{\infty} e^{-4x} dx = \frac{k e^{12}}{4} \int_{3}^{\infty} e^{-u} dx = - e^{-4x} \Big|_3^{\infty} = \lim_{x \to \infty} - [0 - e^{-12}] = e^{-12}$

$u = 4x$
$du = 4dx$
$\frac{du}{4} = dx$

$\frac{k . e^{12} . e^{-12}}{4} = \frac{k}{4} = 1 \qquad k = 4$

Örnek $M_x(t)$'si $= e^{-3}e^{3e^t}$ şeklinde olan X rd için $P(X<2)$ olasılığını $Var(-3x-4)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$Var(ax+b)=a^2 Var(x)$

1\) $M_x(t)\ e^{-3}e^{3e^t} = e^{3(e^t-1)} = \quad \lambda=3$ poisson dağılımı

$Var(-3x-4) = 9 \underbrace{Var(x)}_{3} = 27$

2\. yol ($M_x t$ ile)

$\frac{d}{dx} e^{-3}e^{3e^t} = \frac{d}{dt} e^{3(e^t-1)} = 3e^t e^{3(e^t-1)}\Big|_{t=0} = 3$

$Var(x) = \frac{d}{dt} 3e^t \cdot e^{3(e^t-1)} = \underbrace{3e^t e^{3(e^t-1)}}_{3} + \underbrace{3e^t e^{3(e^t-1)} \cdot 3e^t}_{9}\Big|_{t=0} = 12\ E(x^2)$

$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 12 - 9 = 3 \Rightarrow 9\,Var(x) = 27$

Örnek X rd kümilant üreten fonksiyonu $K_m(t) = 2e^t - 2$ olan bir rassal değişkenin $P(X\geq 2)$ değerini bulunuz.

Not: burada dağılım bilmek zorundayız

1\. yol $2e^t-2$ direk poisson $2=\lambda$

2\. yol $y = 2e^t - 2$

$e^y = e^{2e^t-2}$

poisson $2=\lambda$

$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2)$

$f(x) = \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!}$

$P(X=0) = 0.1353$

$P(X=1) = 0.2706$

$+$ ―――

0.4059

$1 - P(X<2)$

$1 - 0.4059 = 0.5941$

Soru 3 $P((\bar{A}\cap B)\cup(A\cup\bar{B})) = ?$ $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$ ve $P(\bar{A}|B)=\frac{3}{8}$

$= ?$

Soru 9

$f(x) = \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & k \end{array}$ olasılık fonk. sahip bir Rd olsun.

a) $P(1.5<X<3.5)$, b) $P((X-2)^2 \geq 1/4)$ c) $E(x)$, $Var(x)$

1. adım k'yı bulalım.

$f(x) = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1/16 & 1/4 & k & 1/4 & 1/16 \\ & (4) & & (4) & \end{array}$

$\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + k + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} + k = 1$

$k = \frac{6}{16}$

a) $P(1.5<X<3.5) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16}$

b) $P((x-2)^2 > \frac{1}{4}) = P(x-2 > \sqrt{0.25}) = P(x > 2+\sqrt{0.25})$

2 tarafın kare kökünü al $\quad 0.25 = \frac{1}{4}$

$= 1 - P(X \leq \underbrace{2+\sqrt{0.25}}_{2.5})$

$= 1 - P(X<2.5)$

$P(X<2.5) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$, $1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$

$E(x) = \sum_{x=0}^{4} x \cdot f(x) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$

$E(x^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot f(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{6}{16} + 9 \cdot \frac{4}{16} + 16 \cdot \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = E(x^2)$

$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{80}{16} - 4 = 1$