İSTATİSTİK TEORİSİ 2.ÖDEV SUNUM

NUR ALTAY

DENİZ BALCI

Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı geniş bir uygulama alanına sahip sürekli bir olasılık dağılımıdır. İlk kez Frechet (1927) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu dağılım, Rosin ve Rammler (1933) tarafından taneciklerin parçacık dağılımını (moleküller ile ilgili bir çalışma) modellemek için ve dağılıma ismini veren İsveçli fizikçi profesör Waloddi Weibull (1939) tarafından malzemenin (kopuncaya veya kırılıncaya kadar dayanabildiği en yüksek) çekme geriliminin dağılımını açıklamak için kullanılmıştır. Weibull dağılımının uygulanabilirliğinin ve çok yönlülüğünün vurgulanması, ancak dağılımın özelliklerinin ayrıntılı olarak tanımlandığı Waloddi Weibull (1951)'ın çalışması ile olmuştur.

Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı özellikle güvenilirlik analizinde başarısızlık olarak adlandırılan ve genellikle bozulma ya da ölüm ile sonuçlanan olayların meydana gelmesine kadar geçen sürenin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, hava tahmini,biyolojik ve tıbbi uygulamalarda örneğin insan veya laboratuvar hayvanlarında ortaya çıkan tümörlerin meydana gelme zamanlarının modellenmesi, üretilen ürünlerin ömürleri veya dayanıklılık sürelerinin modellenmesi gibi kullanım alanlarına sahip bir olasılık dağılımıdır.

Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı üstel dağılımın genelleştirilmiş halidir. Birçok durumda üstel dağılımın zamana karşı dayanma modeli olarak yetersiz kalması bozulma oranı fonksiyonunun sabit olmasından kaynaklanmaktadır. Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonunun zamana bağlı olarak değişmesi nedeni ile daha genel ve esnek bir dağılım olması uygulamada üstel dağılımdan daha fazla tercih edilmesini sağlamaktadır (Saygı, 2007).

Weibull Dağılımı

Literatürde kullanım alanlarına göre iki veya üç parametreli Weibull dağılımları ile sıkça karşılaşılmaktadır. Bunlar ;

Üç Parametreli Weibull Dağılımı : Weibull dağılımının klasik en genel şekli üç parametreli Weibull dağılımıdır. Üç Parametreli Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır ;

$$f(x;k,\lambda,\beta) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right)^{k}}, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$$

Weibull Dağılımı

- Burada; $k > 0$ olmak üzere şekil parametresidir ve dağılımın kuyruğunun şeklini, diğer bir ifade ile dağılımın çarpıklığını belirler.
- $\lambda > 0$ olmak üzere ölçek parametresidir ve karakteristik yaşam (ömür) parametresi olarak da isimlendirilir.
- $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere β konum parametresidir.

Üç parametreli oyf, parametrelerin tahmininde yaşanan zorluklardan dolayı pek fazla tercih edilmez. Bu sebepten dolayı konum parametresinin değeri sıfır olarak kabul edilir.

3 PARAMETRELİ WEİBULL DAĞILIMI ÖZELLİKLERİ

$$F(t,\alpha,\beta,\eta) = \begin{cases} 1 - e^{-((t-\alpha)/\eta)^{\beta}} & t > \alpha \\ 0 & t \leq \alpha \end{cases}$$

$$\mu = \eta\Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) + \alpha$$

$$f(t,\alpha,\beta,\eta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta}(\frac{t-\alpha}{\eta})^{\beta-1} e^{-((t-\alpha)/\eta)^{\beta}} & t > \alpha \\ 0 & t \leq \alpha \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \eta^2[\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})]$$

3 PARAMETRELİ WEİBULL DAĞILIMI ÖZELLİKLERİ

Sürekli tipteki t rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk

fonksiyonu,

$$f(t;\gamma,\sigma,\eta)=\frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^{\eta-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^{\eta}\right] \quad t\rangle\gamma\rangle 0 \quad \sigma\rangle 0 \quad \eta\rangle 0$$

ise t rastgele değişkenine g , s ve h parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir.
Burada g , s ve h parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

3 PARAMETRELİ WEİBULL DAĞILIMI ÖZELLİKLERİ

Üç parametreli Weibull dağılımının R(T / t) ile gösterilen

koşullu güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(T/t) = \frac{\exp\left\{-\left(\frac{T+t-\gamma}{\sigma}\right)^{\eta}\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^{\eta}\right\}}$$

3 PARAMETRELİ WEİBULL DAĞILIMI ÖZELLİKLERİ

Üç parametreli Weibull dağılımının R(t) ile gösterilen güvenilirlik/sağ kalım fonksiyonu ;

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^{\eta}\right\}$$

KULLANILAN TESTLER VE BİLGİ KRİTERLERİ

Tahmin edici ve optimizasyon yöntemlerinden önce ,Tahmin edicileri ölçmek için kullanılan testleri açıklamamız gereklidir.

AIC BİLGİ KRİTERİ

AIC(Akaike information criteria) bir modelin (tahmin edicinin)tahmin gücünü ve karmaşıklığını değerlendirmek için kullanılan bir bilgi kriteridir.AIC değeri ne kadar düşükse, modelin tahmin gücü ve genelleme performansı o kadar iyidir.

$$AIC = 2k - 2ln(\hat{L})$$

K=modeldeki tahmin edilen parametre sayısı

L=model için olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri

K-S TEST (Kolmogorov–Smirnov test)

Bu test bir uyum iyiliği testidir. Testin amacı gözlenen frekanslar ile beklenen frekansların birbirine ne düzeyde benzeştiğine dayanır. Bu yöntemde ise kümülatif (birikimli) frekansların dağılışının birbirine benzerliği araştırılır.

D=max [F0(x)-Sn(x)] burada en büyük değeri kullanırız.

TAHMİN EDİCİLER

Maximum Likehood Estimation

X1,X2,. . ....,Xn olasılık(yoğunluk) fonksiyonu $f(x,\theta)$' θ parametresine sahip bir dağılımdan rastgele bir örnek olsun.

Eğer xi rassal değişkenlerimiz kesikli olursa likehood fonksiyonumuz aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n; \theta) \\ &= P_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta). \end{aligned}$$

Eğer xi rassal değişkenlerimiz sürekli olursa likehood fonksiyonumuz aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = f_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$$

Burada likehood fonksiyonumuzun ln'nini alma sebebimiz ise tam olarak şu,maximizasyon işlemi yaptığımız için ln'nini alıyoruz

$$\ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$$

Bu aşamadan sonra tahmin edeceğimiz parametreyi maksimum yapan değeri bulmamız gereklidir.2 farklı yöntem mevcuttur.

1.yol:fonksiyon grafiğini çizip maksimum yapan değeri bulmak

2.yol: fonksiyonun türevlerini alıp maksimum değerini elde etmek.(1.türev ile kritik noktayı

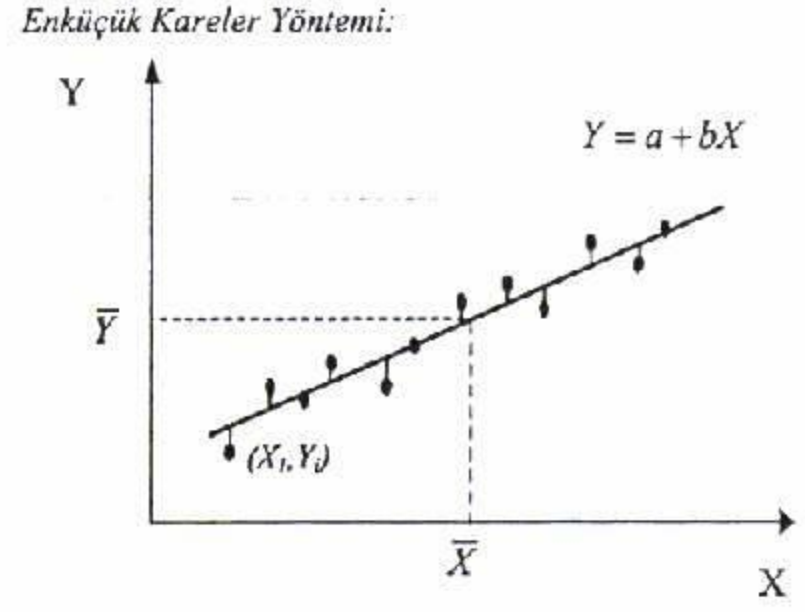
elde ederiz.2.türev aldıktan sonra kritik değeri yerine yazdığımızda ,2.türevin değeri her zaman negatif oluyorsa ,bulduğumuz kritik değer maksimum nokta oluyor.)

$$\frac{\sigma l(\theta)}{\sigma(\theta)} ln(L(\theta,(x1,x2,..xn)))$$

$$\frac{\sigma l(\theta)}{\sigma^2(\theta)} ln(L(\theta,(x1,x2,..xn)))$$

Least Square Regression

En Küçük Kareler (EKK) yöntemi, regresyon çözümlemesinde en yaygın olarak kullanılan, daha sonra ele alınacak bazı varsayımlar altında çok aranan istatistiki özelliklere sahip yöntemdir.

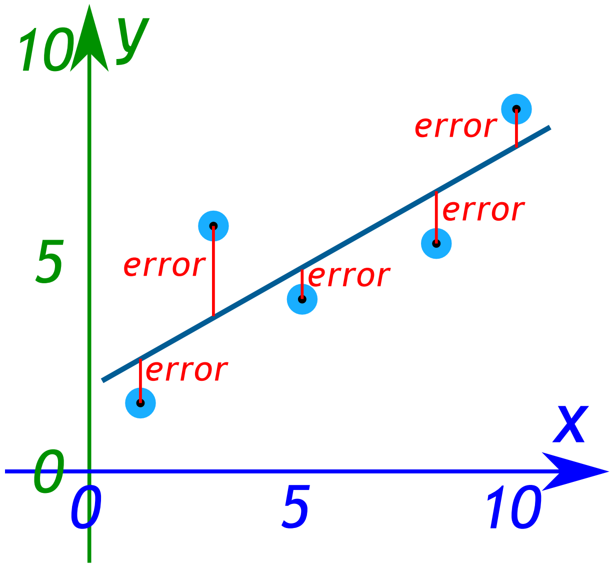


y=a+bX

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \frac{\sum y - \hat{\beta}\sum x}{N}$$

En küçük kareler yöntemi



Lineer İlişki: En küçük kareler yöntemi, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasında lineer bir ilişkinin varlığını varsayar. Yani, verilerin bir doğru veya bir düzlem üzerinde ifade edilebilecek bir ilişki içinde olduğu düşünülür.

Bağımsızlık: Gözlemler birbirinden bağımsız olmalıdır. Yani, bir gözlemin sonucu diğer gözlemleri etkilememelidir.

Homoscedasticity (Homojen Dağılım): Hataların varyansı (dalgalanma miktarı) tüm bağımsız değişken seviyelerinde aynı olmalıdır. Bu, hataların veri seti içinde tutarlı bir şekilde dağıldığı anlamına gelir.

Normal Dağılım: Hataların (gözlemler arasındaki farklar) normal olarak dağılım göstermesi istenir. Bu, hata terimlerinin genellikle ortalaması sıfır olmalı ve normal bir dağılım izlemelidir.

Bağımsız Değişkenlerin Lineer Bağımsızlığı: Eğer modelde birden fazla bağımsız değişken varsa, bu değişkenler arasında lineer bağımsızlık olmalıdır. Yani, bir bağımsız değişken diğerlerini tam olarak tahmin edememelidir.

Ağırlıklı En küçük kareler yöntemi

- Sıradan en küçük kareler yöntemi, hatalarda sabit varyans olduğunu varsayar (buna homoscedasticity denir). Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ise hatalarda sabit varyans olmadığı taktirde kullanılabilen bir yöntemdir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 / wi)$$

$$\bar{x_w} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \bar{y_w} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$$

$$S_w(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y_w} - \hat{\beta}_1 \bar{x_w}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum wi(xi - \bar{x_w})(yi - \bar{y_w})}{\sum wi(xi - \bar{x_w})^2}$$

Ağırlıklı En küçük kareler yöntemi

- Sıradan en küçük kareler yöntemi, hatalarda sabit varyans olduğunu varsayar (buna homoscedasticity denir). Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ise hatalarda sabit varyans olmadığı taktirde kullanılabilen bir yöntemdir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2/wi)$$

$$S_w(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$$\bar{x_w} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \bar{y_w} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y_w} - \hat{\beta}_1 \bar{x_w}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum wi(xi - \bar{x_w})(yi - \bar{y_w})}{\sum wi(xi - \bar{x_w})^2}$$

Ağırlıklı En küçük kareler yöntemi

Bergman’s equation ,Faucher & Tyson’s equation

Bu eşitlikler ise ağırlık seçimi için oluşturulmuş eşitliklerdir.Bu eşitliklerin kullanılma sebebi ise ağırlıkları kullanarak varyansları eşitlemektir.

Bergman eşitliği

$$W(t_{(i)}) = [(1 - \hat{F}(t_{(i)}))ln((1 - \hat{F}(t_{(i)}))]^2$$

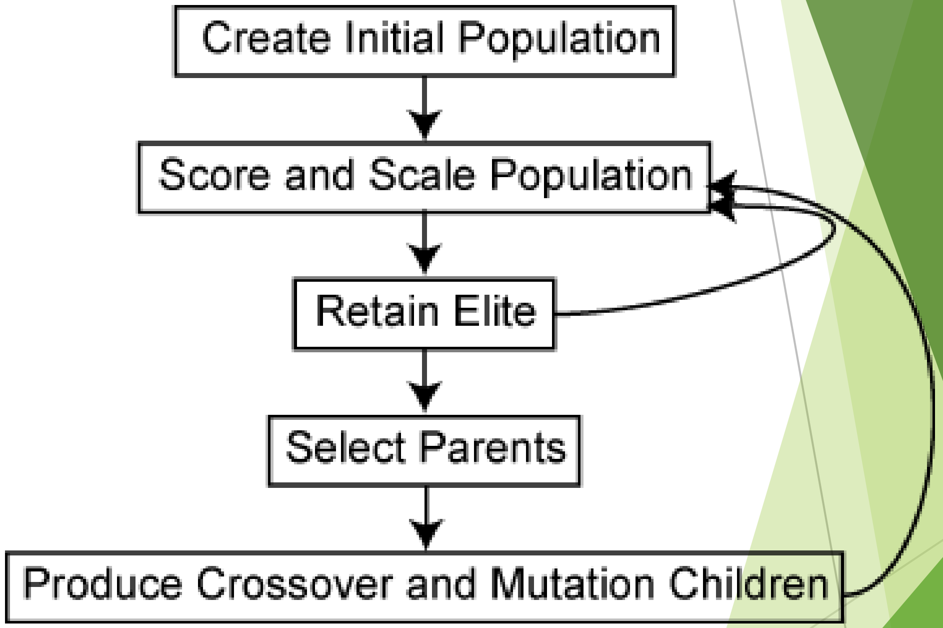
Faucher & Tyson

$$W(t_{(i)}) = 3.3F(t_{(i)}) - 27.5[1 - (1 - F(t_{(i)}))^{0.025}]$$

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

Makalede bulunduğu için optimizasyon tekniklerinede değineceğiz.Makalede genetic algoritmalar ile beraber tahmin ediciler kullanıldığı için değindik.

Genetik algoritmalar ise bizim makalemizde tahmin edicilerle birlikte parametre tahmini ve optimizasyon için kullanılıyor.



CMA-ES

- Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy (CMA-ES), özellikle sayısal optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan bir evrimsel algoritma ve optimizasyon tekniğidir. Diğer genetik algoritmalardan en büyük farkı kovaryans matrisini kullanarak değişimlerin yönünü ve büyüklüğünü hesaba katar.

$$C^{(g+1)} = (1 - c_{\text{cov}}) \cdot C^{(g)} + c_{\text{cov}} \cdot p_c^{(g+1)} \left(p_c^{(g+1)}\right)^T$$

$$x_k^{(g+1)} = m^{(g)} + \sigma^{(g)} N\left(0, C^{(g)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \lambda$$

set λ // number of samples per iteration, at least two, generally > 4
initialize m, σ, $C = I$, $p_\sigma = 0$, $p_c = 0$ // initialize state variables
while *not terminate* **do** // iterate
    for i **in** $\{1 \ldots \lambda\}$ **do** // sample λ new solutions and evaluate them
        x_i = sample_multivariate_normal(mean $= m$, covariance_matrix $= \sigma^2 C$)
        $f_i = \text{fitness}(x_i)$
    $x_{1\ldots\lambda} \leftarrow x_{s(1)\ldots s(\lambda)}$ with $s(i) = \text{argsort}(f_{1\ldots\lambda}, i)$ // sort solutions
    $m' = m$ // we need later $m - m'$ and $x_i - m'$
    $m \leftarrow$ update_m$(x_1, \ldots, x_\lambda)$ // move mean to better solutions
    $p_\sigma \leftarrow$ update_ps$(p_\sigma, \sigma^{-1} C^{-1/2}(m - m'))$ // update isotropic evolution path
    $p_c \leftarrow$ update_pc$(p_c, \sigma^{-1}(m - m'), \|p_\sigma\|)$ // update anisotropic evolution path
    $C \leftarrow$ update_C$(C, p_c, (x_1 - m')/\sigma, \ldots, (x_\lambda - m')/\sigma)$ // update covariance matrix
    $\sigma \leftarrow$ update_sigma$(\sigma, \|p_\sigma\|)$ // update step-size using isotropic path length
return m or x_1

Kaynakça

1. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/2018931
2. https://downloads.hindawi.com/journals/mpe/2019/6281781.pdf
3. https://www.qualitygurus.com/three-parameters-weibull-distribution/
4. https://online.stat.psu.edu/stat415/lesson/1/1.2
5. https://openaccess.firat.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/11508/17911/432868.pdf?sequence=1
6. https://libratez.cu.edu.tr/tezler/6349.pdf
7. https://acikbilim.yok.gov.tr/bitstream/handle/20.500.12812/679307/yokAcikBilim_10303127.pdf?sequence=-1&isAllowed=y
8. (Gupta ve Kundu, 2001; Lai 2014).
9. (Rinne, 2008).
10. (Lawless, 2003; Abernethy, 2004).
11. https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/130795/mod_resource/content/0/3-%20Tahmin.pdf
12. https://www.mathsisfun.com/data/least-squares-regression.html
13. https://online.stat.psu.edu/stat501/lesson/13/13.1

Kaynakça

1. https://core.ac.uk/download/pdf/48632891.pdf
2. Ağırlıklar
3. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/1707233
4. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/75465
5. https://online.stat.psu.edu/stat501/lesson/13/13.1
6. https://ms.mcmaster.ca/canty/teaching/stat3a03/Lectures7.pdf
7. https://arxiv.org/pdf/1604.00772.pdf
8. https://en.wikipedia.org/wiki/CMA-ES