ZAMAN SERİSİ

TEMEL KAVRAMLAR

Stokastik Süreç: iki bileşkeli bir fonksiyondur. $X(t,w)$ ile gösterilir. $\{w \in \Omega, t \in T\}$ Burada tau(t) bir indis kümesi, omega(Ω) ise stokastik sürecin örnek uzayı(ensamble) olarak adlandırılır.

★ örnek uzay(ensamble) Ω olasılıktaki örnek uzay gibi düşünebilirsin.(Bir zar atmadaki bütün olasılıklar gibi)

Bu durumda skoastik sürecin örnek uzayı (Ω omega) bir süreç tarafından üretilebilen mümkün tüm zaman serilerin bir kümesidir.

★ Burada amaç zaman serisini oluşturan süreci modellemektir.

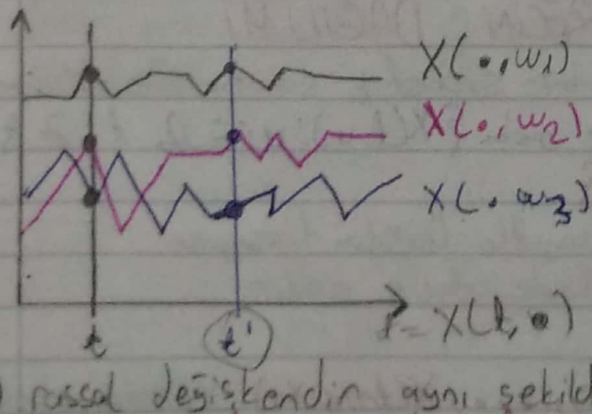
T(tau)(indis kümesi): Doğal sayılar ya da tam sayılardan oluşuyorsa skoastik süreç kesiklidir. (kesikli skoastik süreç)

- Reel sayılar kümesinden oluşuyor ise (sürekli skoastik süreç) olarak adlandırılır.

Bir skoastik süreç sabit bir t değeri için $X(t,\cdot)$ Bir R.D ailesini ifade eder. $\{X(t)\}$ ya da $\{X_t\}$ $\{X_t\}$ ile gösterilir.

★ Matematikte 2 değişkenli bir fonksiyonda, değişen bir değişken için $\cdot$ konulur. $X(t,\cdot)$ fonksiyonunda t sabit, $\cdot$ değişen değişkendir.

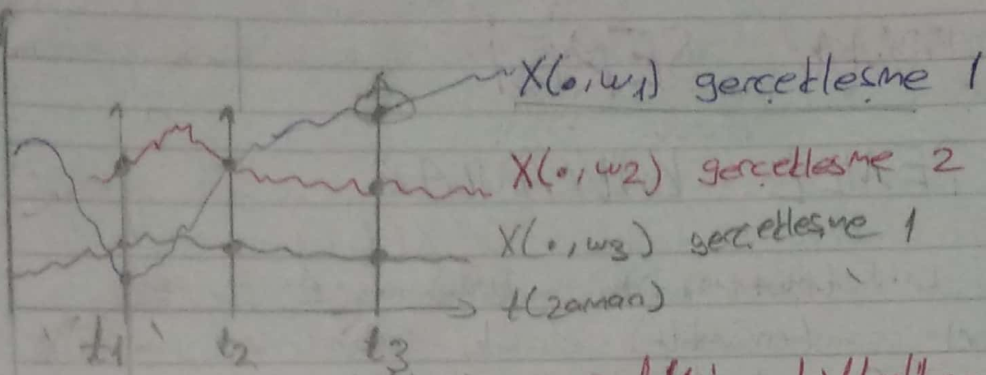
Sabit bir (w) değeri için ise $X(\cdot,w)$ bu skoastik sürecin gerçekleşmesi (Realization) olarak adlandırılır. (Bu $w \in \Omega$)



$X(t)$ rassal değişkendir aynı şekilde $X(t')$ R.D'dir.

★ Skoastik süreçte $\forall t$ değiştikçe Rassal Değişkeni oluşturur.

Bir skoastik sürecin 1 defa gerçekleşmesine zaman serisi denir.



$X(t_1,\cdot)$
Rassal Değişken

$X(t_2,\cdot)$ → t'yi sabitledikçe gerçekleşmeler değişir.

$$\{X(t,w),\ w\in\Omega,\ t\in T\}$$

$X(t,w)$: stoastik süreç, Ω: gerçekleşmesi mümkün olan tüm olaylar
t: indis

Şekilden görüldüğü gibi gerçekte gözlemlediğimiz şey, bilinmeyen bir stoastik sürecin gerçekleşmeleridir ve bir stoastik sürecin tek gerçekleşmesine zaman serisi denir.

Zaman serisinin amacı ise bu veriyi üreten stoastik süreç tek bir gerçekleşmesinden yola çıkarak, O stoastik sürecin temel yapısını modellemektir.

Amaç: O veriyi üreten o stoastik süreci belirlemektir.

STOASTİK SÜRECİN YAPISI

Bir stoastik sürecin temel yapısını modellemekse, stoastik süreç Rassal değişken ailesi olduğu için onun dağılımsal özelliği Çok Boyutlu Rassal değişkende gördüklerimizle benzer olacaktır.

STOLASTİK SÜRECİN DAĞILIMI

T kümesi tam sayılar kümesi olan bir stoastik süreç ele alalım.

$\{X(t,w): w\in\Omega\ t: 0,\mp1,\mp2,\ldots\}$ yada $\{X(t,w): w\in\Omega,\ t: Z\}$

$\{X_{t_1}, X_{t_2},\ldots,X_{t_n}\}$

Bu durumda bu stoastik sürecin n boyutlu Dağılım fonksiyonu

$\underbrace{F_{X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n}}}_{R.D}\underbrace{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}_{\text{aldığı değerler}}$ şeklinde ifade edilir.

olasılık: $P(w: X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2,\ \ldots,\ X(t_n)\le x_n)$ şeklinde olasılık ifade edilir.

n=2 için birçok Dağ. fonksiyonları elde edilebilir $\binom{100}{2}$

CamScanner ile tarandı

moment fonk $= E(X)$

Bir skoastik süreç için $n=1,2,3,\ldots$ buna bağlı her t için sonlu boyutlu olasılık dağılım fonk. larının bir ~~R.D~~ ailesi oluşur.
o.d.f fonk ailesi

Böylece bir skoastik süreç sonlu boyutlu o.d.f. ların aile tarafından modellenir.

Nasıl ki R.D leri onların momentleriyle karakterize edebiliyorsak bir skoastik süreçte moment fonklarını ile karakterize edilebilir.

★ Moment üreten fonk. ile karıştırma

En basit moment ortalama değer fonksiyonu ile tanımlanır ve aşağıdaki gibi gösterilir

$M(t) = E(X(t)) \rightarrow$ ortalama Değer fonksiyonudur. (ilk momenti gösterini)

★ moment fonksiyonu. t'ye bağlı fonk.dur. t ise RD'ni belirler.

Eğer R.D sürekli ise $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x_t)\,dx$

Eğer örneklem kümesi kesikli ise $\sum x . f(x_t)dx$

O. değer skolastik sürecin ilk momentidir

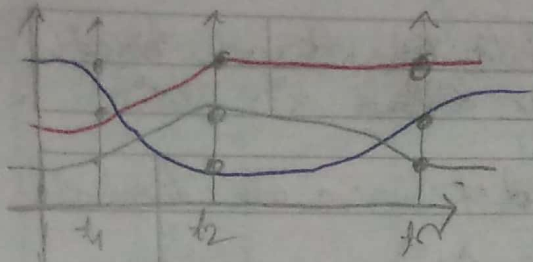
Varyans fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır. $\sigma^2 t = E[X(t) - M(t)]^2$

Otokovaryans fonk ise $\gamma(t_1,t_2) = cov(X(t_1), X(t_2))$
(ikinci moment) gösterimi gamma
$= E[(X(t_1) - M(t_1))(X(t_2) - M(t_2)]^2$

! Burada $t_2 = t_2 = t$ olduğunda $\gamma(t,t) = \sigma^2(t)$ {varyansa dönüşür}

Böylece sürecin 2. momenti belirlenmiş
Bir başka deyişle sürecin ortalama değer fonk ve otokovaryans fonksiyonu sürecin 2. dereceden moment gösterimini oluşturur.

CamScanner ile tarandı



100 tane t ve $n=2$ olduğunda $\binom{100}{2}$ tane olay gerçekleşir.

Momentler t'ye bağlı bir fonksiyondur.

STOASTİK SÜRECİN ÖZELLİKLERİ

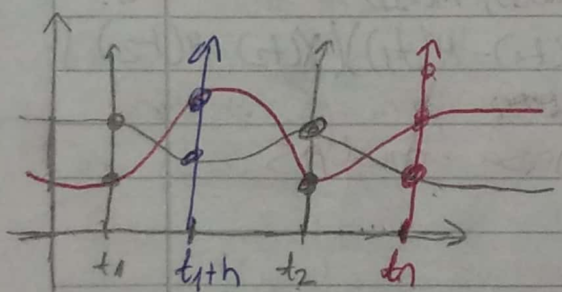
Bir stoastik sürecin en önemli özelliklerinden biri durağanlıktır.

GÜÇLÜ DURAĞAN (STRONG STATIONARY)

Bir stoastik sürecin sonlu boyutlu tüm dağılımları zamandaki (t'de) değişimlerde değişmez kalabiliyorsa o süreç güçlü durağandır.
Bir başka deyişle her n ($\forall n$), ve $\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ her h için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa stoastik süreç güçlü durağandır.

☆ Dağılım fonksiyonları değişmez ama bunun gerçekleşmesi pek mümkün değildir.

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_3+h})}(x_1, \ldots, x_n)$$



örnek

$n=2$, $h=1$

$(t_1, t_2) =$ Dağ fonk $= (t_2, t_3)$

$(t_{89}, t_{90}) =$ " " $= (t_{90}, t_{91})$

$h=2$ alalım

(t_1, t_2) dağ fonk $= f(t_3, t_4)$

Zayıf Durağanlık (weak stationary)

Bir stoastik sürecin ilk k tane momenti zamandaki değişimlerde kalıyorsa o stoastik süreç, k'ıncı dereceden zayıf durağan olarak adlandırılır.

☆ Genelde zaman serilerinde durağanlıkta zayıf durağanlık bahsedilir.

Böylece $E[X_{(t)}] = \mu(t) = \mu$ zamandaki değişimlerde değişimlerden etkilenmeyecek ve (γ=otokovaryans fonksiyonu) sadece h'a bağlı

olacak (tüm t ve h'lar için) γ Yukarıdaki bu iki eşitlik (tüm t ve h'lar için) etkili oluyorsa bu stokastik süreç 2. dereceden zayıf durağan (kovaryans durağan)'dır.

$$E[X_{(t)}] = \mu < \infty \qquad \sigma^2(t) = \sigma^2$$

$$\gamma(h) = E[(X(t_1) - \mu)(X(t_1+h) - \mu)]$$

h: $t_1 - t_2$

cov

Stokastik

Zayıf durağanlık, ilk iki momenti zaman boyunca sabit olması otokovaryans fonksiyonunun ise sadece zaman farkından h'a bağlı olmasıdır.

BAZI STOKASTİK SÜREÇLER

1- Normal Süreçler

Bu süreçte Rassal Değişkenler normal dağılırsa bu sürece normal süreç denir.

Bir s(stokastik) sürecin n boyutlu dağılım fonk. $\forall n$ için çok boyutlu normal dağılıma sahip oluyorsa bu süreç Normal (Gaussian) süreç olarak adlandırılır. Ç.D.N.B ($\bar{M}$ vektörü, var-cov matrisi), ilk 2 momenti bunu belirler.

Bir normal süreç, ort. değer fonk ve otokovaryans fonk ile tamamıyla belirlenebilir.

$$\mu(t_i) = E[X_{(t_i)}], \quad \gamma_{r(\text{gamma})}(t_i, t_j) = Cov(X(t_i), X(t_j)) \quad t_i \neq t_j$$

$$= E[(X(t_i) - \mu(t_i))(X(t_j) - \mu(t_j))]$$

$$\Rightarrow M = (\mu(t_1), \mu(t_2), \dots, \mu(t_n))^T \quad \underset{\text{var-cov matrisi}}{\Sigma} = \{\gamma(t_i, t_j)\} \quad X = \underset{\sim}{x} = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cancel{det}(\Sigma)^{1/2}} e^{\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-M)\}}$$

Normal süreçler için zayıf durağanlık, güçlü durağanlıkla eşdeğerdir.

* Parametreler sabit kaldığı için ve ilk 2 momentinin de eşit olmasıyla Durağanlığa ulaşılır.

CamScanner ile tarandı

Çünkü normal dağılımlar ilk 2 momentiyle tanımıyla betimlenir/karakterize edilebildikleri için momentlerin sabitliği ve eşitliği dağılımların eşit olması anlamına gelir.
(Güçlü durağanlık koşulu gibi)

2-White Noise Süreci

Bir stokastik sürecin $\{\varepsilon_t\}$'si aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ona white noise süreci denir.

i) $E[\varepsilon_t]=0$ ii) $E[\varepsilon_t^2]=\sigma^2$ → sabit iii) $Cov[(\varepsilon_t, \varepsilon_\tau)]=0$ $(t \neq \tau)$ için
(otokorelasyon ve değişen varyans içerir
Bu şart sağlanmaz ise)

DURAĞAN OLMAYAN STOKASTİK SÜREÇLER

Bilindiği gibi bir sürecin durağan olmaması, ortalama ve varyans'ın zamana bağlı değişmesi demektir. Dolayısıyla durağan olmayan bir süreçten elde edilmiş veriler öngörülemez, modellenemez ve tahmin edilemez verilerdir. Bunun yanı sıra durağan olmayan zaman serileri kullanılarak 2 değişken arasında var olmayan, sahte bir ilişkiyi göstererek yanıltabilir.

Bu yüzden tutarlı ve güvenilir sonuçlar elde edebilmek için durağan olmayan serilerin durağanlaştırılması gereklidir.
Bilindiği üzere d. olmayan süreçlerin aksine durağan süreçler zamandan bağımsız bir var. dönme eğilimindedirler.

Dolayısıyla durağan olmayan zaman serilerini durağanlaştırmaya geçmeden önce farklı tipte durağan olmayan süreçleri işleyip bu süreçlere daha iyi dönüşüm teknikleri uygulanır.
En sık rastlanan durağan olmayan süreç, (Random Walk) olarak adlandırılan Rassal yürüyüş süreçleridir.

1) (Pure Random Walk) SAF RASSAL YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN$(white noise)$(0, \sigma^2)$

Y_t bir önceki sürece Y_{t-1} ve Rassal şoklar $\{\varepsilon_t\}$'ye bağlıdır.
Bu süreç öyle bir süreçtir ki, sabit bir ortalamaya dönemez.
Ve zamana bağlı bir varyansa sahiptir. Şimdi bu sürecin ist. öz. inceleyelim

$t=1 \Rightarrow y_1 = y_0 + \varepsilon_1$

$t=2 \Rightarrow y_2 = y_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$t=3 \Rightarrow y_3 = y_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$\vdots$

$t=t \Rightarrow y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ genel denklemi elde edilmiş olur.

Her 2 tarafın beklenen değeri alındığında

$E[(y_t)] = E[y_0] + E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n] \rightarrow WN$ varsayımından
$= y_0 + 0$ görüldüğü üzere saf rassal yürüyüş sürecinde
ortalama sabittir.

WN VARYANSININ İNCELEMMESİ

$Var(y_t) = E[(y_t - E(y_t))^2] = E[(y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i - y_0)^2] = E[(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i)^2]$

$Var(y_t) = \sigma^2 t$ olur.

$E[(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i)^2] = \underbrace{E(\varepsilon_1^2)}_{\sigma^2} + \underbrace{E[(\varepsilon_2)^2]}_{\sigma^2} + \dots + \underbrace{E[(\varepsilon_t)^2]}_{\sigma^2} = t\sigma^2$

$Var(y_t) = t.\sigma^2$ yani zamana bağlı bir varyans olmuş olur.

2'li çarpımların beklenen değer kovaryansları verdiği
kovaryansların 0 olması nedeniyle 2'li çarpımlar gider.
2'li çarpımların beklenen değeri 0 olur.

Sonuç: Saf rassal yürüyüş varyansı zamana bağlı olarak elde edilmiş olur. Bir çok zaman serisi hisse senetleri döviz kurları saf rassal yürüyüş sürecine örnektir.

2) {DRIFT} SABİTLİ RASSAL YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

$y_t = a_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$ a_0 : sürükleyici parametre (drift parametre) / sabit

Şeklinde ifade edilir, a_0'ın negatif ya da pozitif olmasına göre y_t süreci yukarı ya da aşağı sürüklenmiş olacağından bu a_0 sabitine sürükleyici parametre

$t=1 \rightarrow y_1 = a_0 + y_0 + \varepsilon_1$

$t=2 \rightarrow y_2 = a_0 + y_1 + \varepsilon_2 = a_0 + a_0 + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$t=3 \rightarrow y_3 = a_0 + y_2 + \varepsilon_3 = a_0 + 2a_0 + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$y_3 = 3a_0 + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_t = ta_0 + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

Sab Ras Y. S özellikleri (ortalaması, varyansı)

$E[y_t] = ta_0 + y_0 + E[\varepsilon_1]^0 + E[\varepsilon_2]^0 + \dots + E[\varepsilon_t]^0$

$E[y_t] = ta_0 + y_0$

- Varyans

$Var[y_t] = E[(y_t - E[y_t])^2]$

$= E[(ta_0 + y_0 + \Sigma\varepsilon_i - ta_0 - y_0)^2]$

$Var[y_t] = E[(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i)^2] = t\sigma^2$

3) DETERMİNİSTİK TRENDLİ SÜREÇ

$y_t = a_0 + \beta t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$ görüldüğü gibi βt trendi ile birlikte Rassal şoklar süreç üzerinde etkilidir.

Bu sürece baktığımızda ortalamasını $E[y_t] = a_0 + \beta t$ olarak ifade edilir. Buradaki βt trendin t'sidir. varyansını elde edelim. Bu süreç genellikle sabitli Rassal Yürüyüş ile karıştırılır.

Çünkü ikisindede a_0 sürükleyici parametresiyle (WN) white noise bileşkesini içerir fakat t anındaki değer rassal yürüyüş sürecinde bir önceki (periyottaki) değerle ilişki iken (y_{t-1}) deterministik trendli süreçte βt zaman trendiyle ilişkilidir.

Görüldüğü gibi deterministik trendli süreç sabit bir trend etrafında büyüyen bir ortalamaya sahiptir.

Varyansı ise sabittir.

$$Var[\beta t] = E[(y_t - E(y_t))^2] = E[(a_0 + \beta t + \varepsilon_t - a_0 - \beta t)^2]$$

$$Var[\beta t] = E[(\varepsilon_t)^2] = \sigma^2$$

4) Sabitli ve trendli Rassal Yürüyüş Süreci
(Random walk drift and trend)

$$y_t = a_0 + \beta t + y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$t=1 \Rightarrow a_0 + \beta t + y_0 + \varepsilon_1$$

$$t=2 \Rightarrow a_0 + \beta t + y_1 + \varepsilon_2 = a_0 + a_0 + \beta t + \beta t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + y_0$$

$$y_2 = 2a_0 + 2\beta t + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$y_t = t a_0 + y_0 + t\beta t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$$E[y_t] = t a_0 + y_0 + t\beta t$$

$$Var[y_t] = E[(y_t - E(y_t))^2] = [t a_0 + y_0 + t\beta t + \sum \varepsilon_i - (t a_0 + y_0 + t\beta t)]^2$$

$$Var[y_t] = E((\sum \varepsilon_i)^2) = t\sigma^2$$ $\beta t \Rightarrow$ trend değişkeni

DURAĞANLAŞTIRMA İŞLEMLERİ
(Fark Durağan ve Trend Durağan Süreçler)

Bilindiği gibi trend, zaman serilerindeki uzun dönemli artış ya da azalış hareketleridir. Trend Deterministik ve stokastik olmak üzere 2'ye ayrılır.

- Deterministik trend kesin ya da kesine yakın tahmin edilebilen (bilinebilen) trenddir. (zam oranı biliyorsak, gelecek aylı maaş hesaplanabilir.)

- Stokastik trend rassal trenddir, kesin olmayan öngörülemeyen trenddir. Şimdi durağan olmayan trenddir. Şimdi durağan olmayan süreci durağanlaştırıp 4 durumda inceleyelim

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

DURUM 1: $a_0 = \beta = 0$, $a_1 = 1$ olsun. $Y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
(Saf rassal yürüyüş süreci

$$\Delta y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$
$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

Sürecin 1. dereceden farkı Δy_t ile gösterilmiştir.
$\Delta y_t = \varepsilon_t$ 'ye eşit olması ise ($\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$) olması sebebi ile sürecin 1. farkının durağanlaşması anlamı gelir.
* Dolayısıyla bu sürece fark durağan süreci denir.

Durum 2: $a_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, $a_1 = 1$ olsun.
$y_t = a_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\underbrace{y_t - y_{t-1}}_{} = a_0 + \varepsilon_t \Rightarrow E(\Delta y_t) = a_0$$
$$\Delta y_t = a_0 + \varepsilon_t \qquad Var(\Delta y_t) = E((a_0 + \varepsilon_t - a_0)^2) = \sigma^2$$

DURUM 3: (Deterministik trendli süreç elde edilecek.

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),\ a_0 \neq 0;\ a_1 = 0,\ \beta \neq 0$$
$y_t = a_0 + \beta t + \varepsilon_t \Rightarrow$ Deterministik Trendli süreç $E[(y_t)] = a_0 + \beta t$

$y_t = a_0 + \beta t + \varepsilon_t$ Not! ε_t White noise dan kaynaklı durağanlaşır.

$$y_t - E[(y_t)] = a_0 + \beta t + \varepsilon_t - a_0 + \beta t = \varepsilon_t$$

Görüldüğü gibi y_t sürecinde kendi ortalamalarımızdan arındırdığımızda ε_t için WN süreci elde edilir. Ve süreç durağanlaştırılmış dur. Dolayısıyla ortalamasından arındırılarak durağan hale gelen süreçlere trend durağan süreç denir.

$$\Delta x_t = Y_t - Y_{t-2}.$$

DURUM 4: $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

$a_1 = 1, \beta \neq 0, a_0 \neq 0$

① $y_t = a_0 + y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$ ② $\overbrace{y_t - y_{t-1}}^{\Delta y_t} = a_0 + \beta t + \varepsilon_t$

deterministik sürece dönüştürünüz

③ $E[\Delta y_t] = E[a_0 + \beta t + \varepsilon_t] = a_0 + \beta t$

④ $\Delta y_t - E[\Delta y_t] = a_0 + \beta t + \varepsilon_t - a_0 + \beta t$ → WN sürecinden dolayı durağanlaştı

Görüldüğü gibi 1. farkı alındıktan sonraki süreç $\{\Delta y_t\}$ deterministik trendli sürece dönüşmüş olur.
Durum 3'te gösterildiği gibi ortalamadan arındırılarak durağanlaştırılmış olur. Dolayısıyla sabit terimli ve trendli rassal yürüyüş sürecini durağanlaştırmak için önce 1. dereceden fark almak sonra fark alınmış, Δy_t serisini ortalamasından arındırmak gerekebilir.

Sonuç: Durağan olmayan zaman serileri ile kurulan modellerin güvenilmez ve sahte sonuçlar üreteceğini bunun da geleceğe yönelik zayıf tahminlere yol açacağına

★ Bu problemi çözmek için zaman serisi değerlerini durağanlaştırma işlemlerinin uygulandığında

- Eğer süreç sabitli veya saf rassal yürüyüş süreci ise durağanlaştırmak fark alma işlemi gerçekleşir.
- Eğer süreç deterministik süreç ise durağandışı ortalamadan arındırma (detrending) gerçekleştirilir.

- Bazende süreç hem stokastik, hem deterministik bileşenler içerdiğindede hem fark alma, hemde ortalamadan fark alma uygulaması gerekmektedir.

- Ve fark alma işleminde varyanstaki trendi (artışı) yok edecek, ortalamadan arındırma işlemi ile deterministik trendi (yok edecek sürecin durağanlaştırıldığını öğrenmiş olduk.

BÜTÜNLEŞİK SÜREÇLER (Integrated)

Bir önceki konuda gördük ki, durağan olmamakla birlikte 1. farkı alınarak durağan hale gelmektedir.
Bu durumda böyle bir sürece 1. dereceden bütünleşik süreç denir ve $Y_t \sim I(1)$ şeklinde gösterilir.
not: ~~[illegible]~~ 2. fark alınırsa 2. der... . . .

Durağan süreçler ise 0'ıncı dereceden bütünleşik süreçlerdir $Y_t \sim I(0)$ şeklinde gösterilir.
Böylece genel olarak bir zaman serisini durağan hale gelmesi için 'd' kez farkını almak gerekiyorsa bu seri, d'inci dereceden bütünleşik süreç olarak adlandırılır $Y_t \sim I(d)$
Ve burada Y_t sürecinin d. dereceden farkı $\Delta^d y_t$ olarak ifade edilir.

Buradaki bütünleşik kavramı (Integrated) anlamına gelir ve rassal şokların kümile (toplanması) anlamındadır.

BÜTÜNLEŞİK SÜREÇLERİN ÖZELLİKLERİ

1) X_t, Y_t, Z_t; eğer $X_t \sim I(0)$, $Y_t \sim I(1)$ ise $Z_t = (X_t + Y_t) \sim I(1)$ dir.
Yani durağan ve d'inci dereceden durağan olmayan süreçlerin doğrusal bileşimi genel olarak durağan olmaz.
! Genel denmesi dışındaki duruma coIntegrated denir.

2) a ve b herhangi bir sabit olmak üzere, eğer X_t zaman serisi $X_t \sim I(d)$ ise $Z_t = (a + bX_t) \sim I(d)$, bir başka deyişle d'inci dereceden bütünleşik zaman serisinin dağılımı bilindiğinde d'inci dereceden zaman serisini verir.
Bu nedenle durağan zaman serilerin bileşimi durağan zaman serisidir. ~~[illegible]~~.

3) Eğer $X_t \sim I(d_1)$, $Y_t \sim I(d_2)$ ise $(d_2 > d_1)$ olmak üzere $Z_t = (aX_t + bY_t) \sim I(d_2)$ dur.

Yani 2 bütünleşik sürecin doğrusal bileşimi, yüksek dereceli sürecin derecesinden " olur.

4) Eğer X_t süreci $\tilde{I}(d)$, $Y_t \sim I(d)$ olsun. $Z_t = (aX_t + bY_t) \sim I(d)$

$d^* < d$ Aynı dereceden bütünleşik 2 doğrusal sürecin bileşimi daha düşük dereceden bütünleşik olabilir.

Burada $d^* = 0$, $d = 1$ olduğunda cointegrated (eş bütünleşik olur)

$$\begin{matrix} X_t \sim I(d) \\ Y_t \sim I(d) \end{matrix} \Rightarrow Z_t = (aX_t + bY_t) \sim I(d^*) \quad (d^* < d)$$

GECİKMELİ ZAMAN SERİLERİ VE GECİKME İŞLEMCİSİ

Zaman serileri verileri ile çalışan ekonometriciler sıklıkla geciktirilmiş zaman serilerini kullanırlar. ~~ör~~ yıllık büyüme oranlarının hesaplanmasında t dönemindeki y'nin değeri (y_t) ile (y_{t-1}) bir yıl önceki değeri ile karşılaştırılır.

- Eğer veri çeyrek yıllık (3 aylık) frekanslarda toplanmış ise 4 çeyreklik bir gecikmenin elde edilmesi gerekli ve bu durumda y_t ile y_{t-4} karşılaştırılır. Genel olarak gecikme notasyonu y_{t-i} $(i = 1, \dots, k)$ ile gösterilir. Tabloda veri gecikme işlemcisinin nasıl çalıştığını göstermek için aşağıdaki tabloda verilmiş zaman serisi üzerinde gecikmeli değerler hesaplanabilir.

Cari Değer (Current)	(y_t)	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}	$\frac{\Delta_4 y_4}{y_{t-4}}$	y_{t+1}	y_{t+2}	y_{t+3}	y_{t+4}
	–	–	–	–	–	–	110	125	130	140
$y_1 = 100$	100	–	–	–	10/100	–	125	130	140	120
$y_2 = 110$	110	100	–	–	15/110	–	130	140	120	160
$= 125$	125	110	100	–	5/125	–	140	120	160	165
$= 130$	130	125	110	100	10/130	40/100	120	160	165	150
$= 140$	140	130	125	110	-20/140	10/110	160	165	150	145
$= 120$	120	140	130	125	40/120	35/125	165	150	145	–
$= 160$	160	120	140	130	5/160	10/140	160	145	–	–
$= 165$	165	160	120	140	-15/165	25/120	145	–	–	–
$= 150$	150	165	160	120	-5/150			–	–	–
$= 145$										

y_t y_{t-1} y_{t-2} y_{t-3} y_{t-4} $\frac{\Delta y_t}{y_{t-1}}$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta_4 Y_4 = Y_t - Y_{t-4}$$

{ilerletilmiş zaman serisi}
forward

GECİKME İŞLEMCİSİ (LAG OPERATOR)

Zaman serileri analizinde gecikme işlemcisinin kullanılması yapılan işlemleri kullanmasını sağlayan bir araçtır.
Bir zaman serisi işlemci kullanılarak yeni bir zaman serisine dönüştürülmüş olur.

1) $y = \beta x_t$ çarpım işlemcisi 2) $\cancel{Z}_t = x_t + y_t$ toplamsal işlemci

3) Dağılma özelliği $y_t = \beta(x_t + y_t) = \beta x_t + \beta y_t$

L (lag operator) gecikme operatörü

$L(x_t) = x_{t-1}$, $L(L(x_t)) = L(x_{t-1}) = x_{t-2}$

Kısaca $L^2(x_t) = x_{t-2}, \ldots, L^p(x_t) = x_{t-p}$

$x_t \xrightarrow{\beta} \beta x_t \xrightarrow{L} \beta x_{t-1} \Rightarrow L(\beta x_t) = \beta L(x_t)$ olur.

$x_t \xrightarrow{L} x_{t-1} \xrightarrow{\beta} \beta x_{t-1}$

görüldüğü gibi gecikme işlemcisinin, çarpım işlemcisinin üzerine değişme özelliği vardır. Benzer bir şekilde 2 grup zaman serisi alındığında Aşağıdaki işlemler geçerli olur.

$(x_t, w_t) \xrightarrow{T} (x_t + w_t) \xrightarrow{L} x_{t-1} + w_{t-1}$ $\quad L(x_t + w_t) = L(x_t) + L(w_t)$

$= x_{t-1} + w_{t-1}$

$(x_t, w_t) \xrightarrow{L} (x_{t-1}, w_{t-1}) \xrightarrow{T} x_{t-1} + w_{t-1}$ görüldüğü gibi geçerlidir.

Örn/ $y_t = (a + bL)Lx_t \Rightarrow aLx_t + bL^2x_t \Rightarrow ax_{t-1} + bx_{t-2}$

Gecikme işlemcisinin özellikleri

1) Sabitin gecikmesi sabittir: $LC = C$

2) Dağılma özelliği vardır $(L^i + L^j)y_t = L^i y_t + L^j y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$

3) Çarpımsalda birleşim öz vardır. $L^i L^j y_t = L^{i+j} y_t = y_{t-(i+j)}$

4) Negatif kuvvet alındığında ileri gözlem elde edilmesi $L^{-i} y_t = y_{t+i}$

GECİKME POLİNOMU

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} + V_t$$

$$y_t - a_1 L y_t - a_2 L^2 y_t - \cdots - a_p L^p y_t = a_0 + b_0 \varepsilon_t + b_1 L \varepsilon + b_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots b_q L^q \varepsilon_t + V_t$$

$$\underbrace{y_t (1 - a_1 - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p)}_{y_t A(L)} = a_0 + \varepsilon_t \underbrace{(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_q L^q)}_{\varepsilon_t B(L)} + V_t$$

epsilon

$y_t A(L)$ → gecikme polinomu

$\varepsilon_t B(L)$ → gecikme polinomu

$$y_t A(L) = a_0 + B(L) \varepsilon_t + V_t$$

tekrar bak

Fark işlemcisi (Δ)

fark işlemcisi Δ ile gösterilir. $\Rightarrow \Delta x_t = X_t - X_{t-1}$

$\Rightarrow \Delta x_t = X_t - L X_t$

$\Rightarrow \Delta x_t = x_t (1 - L)$

$\Delta = 1 - L$

Mevsimsel Fark işlemcisi

$\Delta_S^c = 1 - L^S$ ile gösterilir $\qquad S = 4,\ 1 - L^4$ $\qquad$ üst indise dikkat

$\Delta_4 y_t = (1 - L^4) y_t$

$\Delta_y y_4 = y_t - y_{t-4}$

Toplam işlemcisi (Σ)

Σ ile gösterilir. ve işlemci fark işlemcisinin tersi olarak ifade edilir.

$$\Sigma = \Delta^{-1} = (1-L)^{-1} = \frac{1}{1-L}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_{t-i} = x_t + x_{t-1} + X_{t-2} + \cdots$$

$$= X_t + L X_t + L^2 X_t + \cdots \Rightarrow X_t \underbrace{(1 + L + L^2 + \cdots)}_{\frac{1}{1-L}} = \Delta^{-1} X_t$$

OTOKOVARYANS VE OTOKORELASYON FONKSİYONU

Bir stokastik süreç $\{X_t\}$ için otokovaryans fonksiyonu
$\gamma_{xx}(t_1,t_2)=\gamma(t_1,t_2) \Rightarrow Cov[X(t_1),X(t_2)]$ olarak tanımlanır.
Burada sürecin varyansı : $\sigma^2(t)=\gamma(t,t)$ t'lerin eşit olduğu durumdur

Benzer şekilde otocorrelation fonksiyonu $\rho_{x_1x_2}(t_1,t_2)=\dfrac{\gamma_{xx}(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_1)\ \sigma^2(t_2)}}$

Eğer süreç (X_t stokastik süreç) durağan ise bu durumda bu fonksiyonların (t_2-t_1) farkının bir fonksiyonu olurlar.
Eğer bu farkı τ ile gösterirsek durağan bir süreç için otokorelasyon fonksiyonu

$\gamma(\tau)=cov[X(t),X(t+\tau)]$ şeklinde ifade edilir.

Otokorelasyon fonksiyonu $\rho_{xx}(\tau)=\rho(\tau)=\dfrac{\gamma(\tau)}{\sqrt{\sigma^2(t_1)}\sqrt{\sigma^2(t_2)}}=\dfrac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$

* $WN(0,\sigma^2)$ olduğundan $\sigma^2(t_1)=\sigma^2$ olur.
Dolayısıyla $\rho(0)=\dfrac{\gamma(0)}{\gamma(0)}=1$ olur.

2 STOKASTİK SÜREÇ

$\{X(t)\}$ ve $\{Y(t)\}$ süreci ele aldığımızda bu cross-cov ifade edilir

$\gamma_{xy}(t_1,t_2)=Cov[X(t_1),Y(t_2)]=E[(X(t_1)-E(X(t_1)))(Y(t_1)-E(Y(t_1)))]$

Cross-otocorr $(C(F)) \Rightarrow \rho_{xy}(t_1,t_2)=\dfrac{\gamma_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1)\ \sigma_y^2(t_2)}}$

Yine süreç durağan ise

$\Rightarrow \rho_{xy}(\tau)=\dfrac{\gamma_{xy}(\tau)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1)\ \sigma_y^2(t_2)}}$ $\qquad \gamma_{xy}(\tau)=cov(X(t),Y(t+\tau))$

$\Rightarrow \rho_{xy}=\dfrac{\gamma_{xy}(\tau)}{\sqrt{\gamma_{xx}(0)\ \gamma_{yy}(0)}}$ şeklinde yazılır.

DURAĞAN SÜREÇLER İÇİN OTOKOVARYANS FONKSİYON ÖZELLİKLERİ

$\{X_t\}$ skoastik süreci, otokovaryans fonksiyonu $\gamma(\tau)$ olan süreç olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$ Yani otokovaryan fonksiyonu simetriktir.

2) $[\gamma(\tau)] = \gamma(0)$ herhangi bir τ değerin 0'dan $\leq$ tir.

3) $\gamma(\tau)$, otokovaryans fonksiyonu negatif olmayan için tanımlıdır.

1) İSPAT

$\gamma(\tau) = Cov[(X(t), X(t+\tau)] \rightarrow t+\tau = s$

$= Cov[X(s), X(s-\tau)] \Rightarrow \gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$

DURAĞAN SKOASTİK SÜREÇ İÇİN OTOKORELASYON ÖZELLİĞİ

$\{X_t\}$ durağan skoastik sürecin otokorelasyon fonksiyonu $P(\tau)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $P(\tau) = P(-\tau)$ otocorr. fonksiyonu gecikme sayısı $s=0$'a göre simetriktir. Bu nedenle paket programı çizilen otocorr grafikleri (ACF) sadece pozitif değişken için gösterilir.

2) $|P(\tau)| \leq 1$ non-negatif, negatif olmayan tanımdadır

(Durağan) ANAKÜTLE İÇİN ~~OTOKOVARYANS~~ OTOCORR FONKSİYONU

$$P_s = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{Var(y_t)\, Var(Y_{t-s})}}$$

örneklemin için

$$\rho_s = \frac{\sum (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-s} - \bar{y}) / T = n}{\sum (y_t - \bar{y})^2 / n = T}$$

gözlem sayısı.

CamScanner ile tarandı

KISMİ OTOKORELASYON FONKSİYONU (PACF)
PARTIAL AUTOCORRELATION

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu aslında bir koşullu otokorelasyondur. Yani 2 değişken arasındaki korelasyon başka değişken kümesinin dikkate alınmasıyla değişkenlerin etkisinin arındırılmasıyla (Y'den çıkarılmasıyla)
Örneğin bir regresyon denklemi dikkate alındığında Y bağımlı değişkenin X_1, X_2, X_3 bağımsız değişken olmak üzere Y ile X_3 arasındaki ilişki

X_1 ile X_2 arasındaki değişkenlerinin dikkate alınmasıyla hesaplanan korelasyondur.

$$\Rightarrow \frac{Cov(y_1, x_3 \setminus x_1, x_2)}{\sqrt{Var(y_1, x_3 \setminus x_1, x_2)}\sqrt{Var(x_3 \setminus x_1, x_2)}}$$ hesaplanır ve yorumlanır.

Örneğin 1) $y = \beta_0 + \beta_1 x^2$ 2) $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ şeklinde olsun.

- İlk modelde β_1 parametresi y ile x^2 arasındaki lineer ilişki olarak tanımlanırken
- 2. modelde β_2 parametresi X ile Y arasındaki ilişki dikkate alınarak, Y ile x^2 arasındaki ilişkiyi verir.

Zaman serisi içerisinde Y_t ile Y_{t-s} arasındaki kısmi otokorelasyon $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-s+1})$ değişkenlerini etkisi dikkate alınarak hesaplanan koşullu otokorelasyondur.
Yani Y_t ile Y_{t-h} arada kalan değişkenlerin etkisi arındırıldıktan sonra hesaplanan korelasyondur.

2. dereceden otokorelasyon $$\frac{Cov(y_t, y_{t-2} \setminus y_{t-1})}{\sqrt{Var(y_t \setminus y_{t-1})\, Var(y_{t-2} \setminus y_{t-1})}}$$

3. dereceden otokorelasyon $$\frac{Cov(y_t, y_{t-3} \setminus y_{t-1}, y_{t-2})}{\sqrt{Var(y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2})}\sqrt{Var(y_{t-3} \setminus y_{t-1}, y_{t-2})}}$$

1. dereceden kısmi otokorelasyon fonksiyonu = 1. der. otokorelasyon fonksiyonuna eşittir.

CamScanner ile tarandı

KISMİ OTOKORELASYON SAYILARININ HESAPLANMASI

Bilindiği gibi Y_t ile Y_{t-s} arasındaki kısmi otokorelasyon katsayısı Φ_s ile gösterilir. Ve daha önceden ifade edildiği gibi bu katsayı Y_t ile Y_{t-s} arasındaki değişkenlerin katsayısı arındırılmasıyla hesaplanır.

Örn/ Y_t ile Y_{t-8} arasındaki kısmi otokorelasyonu $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-7}$ gecikmeleri (değişkenleri) dikkate alınarak (etkisi arındırılarak) [Y den çıkarılarak] hesaplanır. Kısmi otokorelasyon fonksiyon değerleri 2 şekilde hesaplanır.

1. YÖNTEM: Regresyon Denklemleri

1. adım: İlk olarak y_t ile y_{t-s} arasındaki gecikmeleri Y_t üzerinden ('den) etkisinden arındırmak üzere bir model oluşturulur.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_{s-1} Y_{t-s+1} \qquad Y_t - Y_{t-1} = e_{1t}$$

$$e_{1t} = y_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_{t-1}$$

2. adım Aradaki gecikmelerin etkisini Y_{t-s}'den arındırmak üzere Regresyon modeli kurulur.

$$Y_{t-s} = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + \dots + \beta_{s-1} Y_{t-s+1} + e_{2t}$$

$$e_{2t} = Y_{t-s} - \beta_0 - \beta_1 y_{t-1} - \beta_2 y_{t-2} - \dots - \beta_{s-1} Y_{t-s+1}$$

3. adım: [e_{1t} ile e_{2t}] / Y_t ile Y_{t-s} arasındaki mevcut tüm gecikmelerin etkisinin arındırılmasıyla elde edilen e_{1t} ile e_{2t} arasında basit korelasyon hesaplanır. Böylece Φ_s hesaplanmış olur. $\Rightarrow \tilde{\Phi}_1 = P_1$

$$\mathrm{Corr}(e_{1t}, e_{2t}) = \frac{\mathrm{Cov}(e_{1t}, e_{2t})}{\sqrt{\mathrm{Var}(e_{1t})}\sqrt{\mathrm{Var}(e_{2t})}}$$

2. YÖNTEM (YULE WALKER - DENKLEMLERİYLE)

Kısmi otokorelasyon

Yule walker eşanlı denklem sistemleri sayesinde kısmi otokorelasyon hesaplamak mümkündür.
Bu yöntem diğer yönteme göre hesaplaması daha kolaydır.
Ortalamasından arındırılmış (Aşağıdaki gibi) bir süreç ele alalım.
(Daha sonra görülecekki 1. dereceden otoregresif süreç)
AR(p) ele alırsın.

X_t süreci $\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$
(p dereceden otoregresyon süreci) autoregressive model

Burada ise $X_t = (Y_t - E(y_t))$ denklemin her iki tarafını, X_{t-s} ile çarpalım ve Beklenen değerini alalım.

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$X_t X_{t-s} = \alpha_1 X_{t-1} X_{t-s} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-s} + \dots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-s} + \varepsilon_t X_{t-s}$$

$$E(X_t X_{t-s}) = \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-s}) + \alpha_2 E[X_{t-2} X_{t-s}] + \dots + \alpha_p E(X_{t-p} X_{t-s}) + E[\varepsilon_t X_{t-s})$$

$E(X_t, X_{t-s}) =$ Cov elde edilir.

X_t ve X_{t-s} ortalamadan arındırıldığı için ortalaması 0' olan değişkenler olduğu için bu çarpımların beklenen değeri kovaryansları verecektir. Bu durumda her iki tarafı $\gamma(0)$ (varyansa) böldüğümüzde otokorelasyon elde edilir.

$$\underbrace{\frac{\overset{\gamma}{E[X_t, X_{t-s}]}}{\gamma_0}}_{\rho_s} = \alpha_1 \underbrace{\frac{\overset{\gamma_0}{E[X_{t-1} X_{t-s}]}}{\gamma_0}}_{\rho_{s-1}} + \alpha_2 \underbrace{\frac{\overset{\gamma(0)}{E[X_{t-2} X_{t-s}]}}{\gamma_0}}_{\rho_{s-2}} + \dots + \alpha_p \underbrace{\frac{\overset{\gamma}{E(X_p X_{t-s}]}}{\gamma_0}}_{\rho_{s-p}} + \underbrace{\overset{0}{E[\varepsilon_t X_{t-s}]}}_{0}$$

$$\rho_s = \hat{\Phi}_1 \rho_{s-1} + \hat{\Phi}_2 \rho_{s-2} + \dots + \hat{\Phi}_2 \rho_{s-p}$$

Burada $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \ldots, \hat{\Phi}_p$ katsayıları kısmi otokorelasyonları verir.

$\hat{\Phi}_s \to s = 1,2,\ldots,p$ ise burada $s > p \Rightarrow \hat{\Phi}_s = 0$ olur.

$\rho_1 = 1$ dereceden otokorelasyon $\rho_1 = \hat{\Phi}_1$, $\rho_0 = 1$ olur.

$$s_1 = 1 \Rightarrow \rho_1 = \hat{\Phi}_1\rho_0 + \hat{\Phi}_2\rho_1 + \hat{\Phi}_3\rho_2 + \ldots + \hat{\Phi}_p\rho_{p-1} \Longrightarrow$$
$$s = 2 \Rightarrow \rho_2 = \hat{\Phi}_1\rho_1 + \hat{\Phi}_2\rho_0 + \hat{\Phi}_3\rho_1 + \ldots + \hat{\Phi}_p\rho_{p-2}$$
$$\vdots$$
$$s = p \Rightarrow \rho_p = \hat{\Phi}_1\rho_{p-1} + \hat{\Phi}_2\rho_{p-2} + \hat{\Phi}_3\rho_{p-3} + \ldots + \hat{\Phi}_p\rho_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & \cdots & & \cdots & \rho_{p-2} \\ & & & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\Phi}_1 \\ \hat{\Phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\Phi}_p \end{pmatrix}}_{\hat{\Phi}}$$

r Normal otokorelasyon

$\hat{\Phi}$ kısmi otocor katsayılar,

$R\hat{\Phi}$ buradaki R matrisi full ranklı ve simetrik olduğu için tersi mevcut dolayısı $\hat{\Phi}$ sütunu $R^{-1}.r$ ile elde edilir

$$r = R\hat{\Phi} \Rightarrow R^{-1}.r = \hat{\Phi}$$
$$R^{-1}.r = R^{-1}\hat{\Phi}R$$

BOX-JENKINS MODELLERİ

1-Otoregresif Model (AR(P)) → gecikme sayısı

Otoregresif model bir y_t sürecinin kendi gecikmeleri ile regrese edilmesi ile oluşur.

$$y_t = \underset{\text{sabit terim}}{\alpha_0} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$: bilinmeyen otoregresif parametreler.

Şeklinde ifade edilir, Burada α_0 sabit terim olup Y_t'nin ortalamasını gösterir. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilinmeyen otoregresif parametreler olup ε_t'ler $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$ sahip korelasyonsuz rassal değişken dizisidir

AR(1) SÜRECİ VE ÖZELLİKLERİ

Öncelikle burada AR(1) sürecinin durağanlığı için gerek ve yeter koşul araştıralım.

$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ şeklinde ifade edilir. $(\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2))$

y_t'nin genel ifadesini bulmaya çalışalım.

$t=1 \Rightarrow y_1 = a_0 + a_1 y_0 + \varepsilon_1 =$

$t=2 \Rightarrow y_2 = a_0 + a_1 y_1 + \varepsilon_2 = a_0 + a_1(a_0 + a_1 y_0 + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_2$

$t=3 \Rightarrow y_3 = a_0 + a_1 y_2 + \varepsilon_3 = a_0 + a_1(a_0 + a_1(a_0 + a_1 y_0 + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_2) + \varepsilon_3)$

$y_3 = (a_0(1 + a_0 + a_1 + a_1^2) + a_1^3 y_0 + a_1^2 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

(1) $y_t = a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1 + a_1^t y_0 + \sum_{t=0}^{t-1} a_1 \varepsilon_{t-1}$

Burada y_t sürecinin genel bir eşitliğini beklenen değeri alındığında sürecin ortalama

$$E[y_t] = a_0 \sum a_1 + a_1^t y_0$$

şeklinde elde edilir.

Süreci s periyodu kadar güncellediğimizde

$E[y_{t+s}] = a_0 \sum_{t=0}^{t-1} a_1^i + a_1^{t+s} y_0$ şeklinde elde edilir.

2 ve 3 eşitliklerinde her 2sinde zamana bağlı olduğu ve 2. eşitliğin eşit olmadığı gözükmektir. Dolayısıyla durağan değil

$$E[y_t] \neq E[y_{t+s}]$$

ancak bununla birlikte t büyük bir değer ise 1 eşitliğinde y_t'nin bir değeri ele alınabilir

Dolayısıyla $t \to \infty$ $|a| < 1$ iken (1) eşitliğindeki ilk toplam bir geometrik seri oluşturarak yani $\lim_{t \to \infty} a_0[1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \dots]$ $\frac{a_0}{1-a_1}$'e yakınsar

Böylece $\lim_{t \to \infty} y_t \; \frac{a_0}{1\,a_1}$ dur.

CamScanner ile tarandı

2. toplam ise $\lim_{t \to \infty} a_1^t y_0 \Rightarrow 0$ dır. Böylece $\lim_{t \to \infty} \frac{a_1}{1-a_1} + \sum a_1^i \varepsilon_{t-i}$

ve onun beklenen değeri $E[y_t] = \frac{a_0}{1-a_1}$'e eşit dır.

Dolayısıyla bu koşullar altında ($t \to \infty$, $|a| < 1$ iken) $E[y_t]$ = sonlu ve zamandan bağımsız (sabit) elde edilmiş olur.

SÜRECİN VARYANSI

$Var[y_t] = E[(y_t - E(y_t))^2]$ tanımlandığından y_t değeri olan

$$\Rightarrow E\left[\left(\frac{a_0}{1-a_1} + \sum a_1^i \varepsilon_t - \frac{a_0}{1-a_1}\right)^2\right] =$$

$$\Rightarrow E[\varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + a_1^3 \varepsilon_{t-3} + \cdots)^2]$$

$$\Rightarrow \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma^2} + a_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2} + a_1^4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2]}_{\sigma^2} + a_1^6 \underbrace{E[\varepsilon_{t-3}^2]}_{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 + a_1^2 \sigma^2 + a_1^4 \sigma^2 + a_1^6 \sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \underbrace{(1 + a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + \cdots)}_{\frac{1}{1-a_1^2}} = Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}$$

Not: Buradaki kare formunu her bir terimin karesi ile ayrı ayrı, ikili çarpımlarla toplamları gelecektir. Her bir terimin toplam karesinin beklenen değeri WN olması sebebiyle σ^2'ler gelirken 2'li çarpımların
" " $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olduğundan dolayı $cov = 0$ olduğu nedeni ile bu ikili çarpımlar 0 olur.
Görüldüğü gibi sürecin varyansı $\frac{\sigma^2}{1-a_1^2}$ sonlu ve zamandan bağımsız elde edilmiştir.

Aynı şekilde otokovaryansların sonlu ve bağımsız olduğunu sadece s gibi zaman farkına bağlı olup olmadığına bakalım,

$Cov(y_t, Y_{t-s})$ Kovaryans Süreci

$$Cov(y_t, Y_{t-s}) = \gamma_s = E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)]$$

$$= E[(\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + a_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots + a_1^s\varepsilon_{t-s} + a_1^{s+1}\varepsilon_{t-s-1} + a_1^{s+2}\varepsilon_{t-s-2}]$$

$$(\varepsilon_{t-s} + a_1\varepsilon_{t-s-1} + a_1^2\varepsilon_{t-s} + \dots)]$$

$$\Rightarrow a_1^s E(\varepsilon_{t-s}^2) + a_1^{s+2}E(\varepsilon_{t-s-1}^2) + a_1^{s+4}E[(\varepsilon_{t-s-2}^2)]$$

$$= \sigma^2(a_1^s + a_1^{s+2} + a_1^{s+4} \dots) = \sigma^2 a_1^s \underbrace{(1 + a_1^2 + a_1^4 + \dots)}_{\frac{1}{1-a_1^2}}$$

$$\gamma_s = \frac{\sigma^2 a_1^s}{1 - a_1^2}$$

Görüldüğü gibi $Cov(y_t, Y_{t-s})$ en başta ($|a| < 1$, $t \to \infty$ iken) koşullar altında Cov sonlu sadece zaman farkı s bağlı elde edilmiş olur.

Özetlemek gerekirse $E[y_t] = \frac{a_0}{1-a_1}$, $Var[y_t] = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2} = \gamma_s$
$= Cov(y_t, Y_{t-s})$

$\Rightarrow \gamma_0, a_1^s$ olarak elde edilmiş dır, Burada sürece otokorelasyonlu

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 / a_1^2}{1 - a_1^2} \Big/ \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} = a_1^s$$ olarak elde edilir.

$\rho_0 = 1$ $\rho_1 = a_1 \Rightarrow \rho_2 = a_1^2, \dots, \rho_s = a_1^s$ şeklinde elde edilmiş dır

AR(1) sürecinin durağanlığı için gerek ve yeter koşul $|a_1| < 1$ olmasıdır.
Böylece s gecikmesi kadar çizilen ρ_s grafiği;

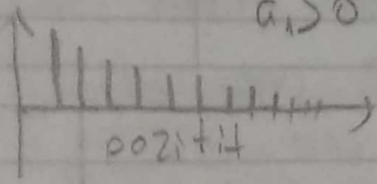
Eğer seri durağan ise ($\rho_s = 1$) olduğundan otocorr değerleri 0'a yakınsar.

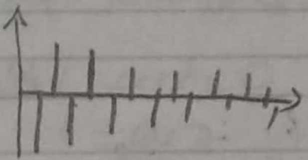
Bu 0'a yakınsama hali, a_1'in işaretine göre değişir,
a_1 eğer pozitif ise otocorr-ları azalarak 0'a yakınsar,

Eğer a_1 negatif ise otocorrlar salınımlı şekilde azalarak 0'a yakınsar.

GRAFİKLER

$a_1 > 0$





Salınımlı

Eş α pozitif azalıyor ise AR(1)'de azalıyor denir.

AR(2) süreci ve özellikleri

$y_t = a_0 + a_1 a_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim \{WN(0, \sigma^2)\}$ şeklinde ifade edilir.

AR(2) sürecinin varyansı, otokovaryansın alternatifi olarak yule-walker denklemleri kullanılır.
AR(2) sürecin her 2 tarafı
$s=0, s=1, s=2, \ldots, s=s$ üzere y_{t-s} ile çarpılır. Beklenen değer ile elde edilir.

$s=0$ olduğunda

YULE WALKER

$$E[y_t, y_{t-1}] = E\underbrace{[a_1 y_{t-1} y_t]}_{a_1\gamma_1} + E[a_2 y_{t-2} y_t] + E[\varepsilon_t y_t] \quad s=0$$
$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \sigma^2$$

$$s=1 \quad \underbrace{E[y_t, y_{t-1}]}_{\gamma_1} = \underbrace{E[a_1 y_{t-1} y_{t-1}] + E[a_2 y_{t-2} y_{t-2}]}_{a_1\gamma_0 + a_2\gamma_1} + \underbrace{E[\varepsilon_t y_{t-1}]}_{\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = 0}$$
$\gamma = 0$

$$s=s \quad \underbrace{E[y_t y_{t-s}]}_{\gamma_s} = \underbrace{E[a_1 y_{t-1} y_{t-s}]}_{\gamma_{s-1}} + \underbrace{E[a_2 y_{t-2} y_{t-s}]}_{\gamma_{s-2}} + \underbrace{E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}]}_{0}$$

1. $\gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \sigma^2$
2. $\gamma_1 = a_1\gamma_0 + a_2\gamma_1$
3. $\gamma_s = a_1\gamma_{s-1} + a_2\gamma_{s-2}$

4. $\rho_1 = a_1\rho_0 + a_2\rho_1$
5. $\rho_s = a_1\rho_{s-1} + a_2\rho_{s-2}$
$\rho_1 = a_1 + a_2\rho_1$
$\rho_1 - a_2\rho_1 = a_1$

6. $\rho_1(1-a_2) = a_1$

4. Böylece burada 2 ve 3 eşitlikleri γ_0'a böldüğümüzde otokorelasyon formüle edilir.

4. denklemde $s=2$ için $\rho_2 = a_1\rho_1 + a_2\rho_0$

$\rho_2 = \frac{a_1^2}{1-a_2} + \rho^2$ $\quad \rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}$

Örnekte $y_t = \overset{a_1}{0{,}7}\, y_{t-1} - \overset{a_2}{0{,}49}\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

AR(2) modelinin ACF değerler ρ_1 ve ρ_2'yı hesaplayınız

$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2} = \frac{0{,}7}{1+0{,}49} = -0{,}4627$ $\quad \rho_2 = \frac{a_1^2}{1-a_2} + a_2 = -0{,}16121$

=

AR(2) Durağanlığı için gerek ve yeter koşul

$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$y_t = a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = a_0 + \varepsilon_t$

$y_t - a_1 y_{t-1} + -a_2 L^2 y_t = a_0 + \varepsilon_t$

$y_t \underbrace{(1 - a_1 L - a_2 L^2)}_{A(L) \text{ gecikme polinomu}} = a_0 + \varepsilon_t$

$y_t A(L) = a_0 + \varepsilon_t$ şeklinde gösterilir, bu durumda AR(2) gerek ve yeter koşul $A(L)$ gecikmenin polinomunun kökleri;

$A(L) = (1 - a_1 L - a_2 L^2)$ birim çember dışında yer almalıdır.

- Yani $1 - a_1 z - a_2 z^2 = 0$ (tersi) yapıldığında z köklerinin $|z_i| \geq 1$ olması beklenir.

Fakat polinomlar (1.) $\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$ yani tam tersi birim çemberin içinde olmalıdır.
tersi şeklinde gösterilerek tersi bulunduğunda bu denklemin köklerinin çemberin içinde olması beklenir.

Yani $z^{-1} = \lambda$ yani z'nin 1'den büyük olması, z^{-1} 1'den küçük olmasına eşdeğerdir

NOT: Eviews'da polinomlarda 2. eşitlikten yararlanıldığı için modelin gerek ve yeter koşulu köklerin birim çemberin içinde olmasıdır

Bunu AR(1) modeli için düşündüğümüzde

$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\Rightarrow 1 - a_1 z = 0$ $\frac{1}{a_1} = z_1$

$y_t - a_1 y_{t-1} = a_0 + \varepsilon_t$ $1 = a_1 z$ $|z| > 1$

$y_t(1 - a_1 L) = a_0 + \varepsilon_t$ $\frac{1}{a_1} > 1 \Rightarrow |a_1| < 1$ koşulu sağlanır

AR(P) için gerek yeter koşul

AR(p) sürecinin gerek ve yeter koşul

$y_t A(L) = a_0 + \varepsilon_t \Rightarrow AL = (1 - a_1 L - a_2 L^2 - a_3 L^3 - \dots a_p L^n)$
köklerinin birim çember içinde yer alması gerekli bunun içinde katsayılar toplamı 1'den küçük olmalıdır.

HAREKETLİ ORTAMALAR MODELİ
(Moving Average MA(q))

MA(1) modeli Süreci

$y_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ kendi hatalarından oluşan bir süreçtir.

Görüldüğü gibi WN'un gecikmelerinden oluşur. Ve sürecin ortalaması 0'dır.

$E[y_t] = E[(\varepsilon_t + \beta_t \varepsilon_{t-1})] = 0$

Sürecin varyansı ya da otokovaryansı bulmak için ise yine Yule-Walker denklemlerinden faydalanılır. Böylece MA(1) sürecinin her 2 tarafı y_t ile çarpılanıp beklenen değeri alınarak varyans elde edilir.

$E[y_t y_t] = E[y_t(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})] \rightarrow \gamma_0 = 1$

$\Rightarrow \gamma_0 = E[(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_t)(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})] = E((\varepsilon_t^2)] + \beta E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]$
σ^2 $+ 0$

$\beta E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) + \beta^2 E(\varepsilon_{t-1}^2)] \Rightarrow \sigma^2(1 + \beta^2) = \gamma_0$
varyans elde edilmiş olur.

Olacovları elde etmek için ise Y_{t-s} ile çarpılıp beklenen değer alınır.

$y_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ $\qquad (x+y)(x+y)$

$E[Y_{t-s}Y_t] = E[Y_{t-s}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})]$ $\qquad x^2+$

$\gamma_s = E[(\varepsilon_{t-s} + \beta\varepsilon_{t-s-1})(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})]$

$s=1 \quad \gamma_1 = E[(\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})]$

$= E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + \beta\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \beta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]$

$= E \; 0 + \beta\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_{t-1} + 0 \quad 0$

$= \beta\sigma^2$

$s=2 \quad E[Y_{t-2}Y_t] = E[y_{t-2}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})]$

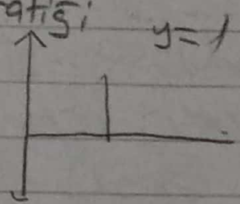
$\gamma_2 = E[(\varepsilon_{t-2} + \beta\varepsilon_{t-3})(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})]$

$\gamma_2 = E\,E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \beta\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-3}) + \beta^2\varepsilon_{t-1} - \beta\varepsilon_{t-1} = 0 \qquad \varepsilon_t \sim W(0,\sigma^2)$

$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Otokorelasyonlara baktığımızda $\rho_0 = 1 \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\beta\sigma^2}{\sigma^2(1+\beta^2)} = \frac{\beta}{1+\beta^2}$

$s>1$ için $\rho_s = 0$ böylece MA(1) süreci için ACF grafiği sadece 1. gecikmede pik yapacaktır.



Örnek $\quad y_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} \qquad \rho_0 = 1$

$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{-0.7}{1+0.49} =$

ARMA (1,1) SÜRECİ

$y_t = \underbrace{a_1 y_{t-1}}_{AR} + \underbrace{\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}}_{MA} \qquad E(y_t) = E(a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})$

$E(y_t) = a_1 E(Y_{t-1})$

$\gamma_0 = a_1 E[y_t y_{t-1}] + E[y_t\varepsilon_t] + E[y_t \beta\varepsilon_t]$

$\gamma_1 \quad + ((a_1 y_t + \beta_2 \beta\varepsilon_t)\varepsilon_t) \quad (a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)\beta\varepsilon_{t-1}$

$= a_1(a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2})\beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\sigma^2$

$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \sigma^2 + a_1\beta\sigma^2 + \beta^2\sigma^2$

$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \sigma^2 + \beta\sigma^2(a_1 + \beta)$

$\gamma_1 = a_1\gamma_0 + \beta\sigma^2$ ... lu aldırdık incelediğimizde

$\gamma_0 - a_1^2\gamma_0 - a_1\beta\sigma^2 + \sigma^2 + \beta\sigma^2(a_1+\beta)$

$\gamma_0(1-a_1^2) = \sigma^2(a_1\beta + 1 + a_1\beta + \beta^2)$

$\gamma_0 = \dfrac{\sigma^2(a_1\beta + 1 \ldots)}{1-a_1^2}$ ...ler

$$\frac{\gamma_0(1-a_1^2)}{(1-a_1^2)} = \frac{\sigma^2(a_1\beta + 1 + a_1\beta + \beta^2)}{1-a_1^2}$$

$$\gamma_1 = a_1\left(\frac{\sigma^2(\beta^2 + 2a_1\beta + 1)}{1-a_1^2}\right) + \beta\sigma^2 = \frac{(1+a_1\beta)(a_1+\beta)\sigma^2}{1-a_1^2}$$

$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_t$

$E[y_t y_{t-2}] = a_1 E(y_{t-2} \cdot y_{t-1}) + E[y_{t-2}\varepsilon_t] + \beta E[y_{t-2}\varepsilon_t]$

γ_2

$\gamma_2 = a_1\gamma_1 \Rightarrow \gamma_3 = a_1\gamma_2 \Rightarrow \gamma_s = a_1\gamma_{t-1}$

MA(q) Süreçleri

$y_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ MA(1) $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$

Sonlu MA(q) süreci için bu durum geçerli olur.

$$y_t = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t = \beta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \beta_q\varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Buradan gösterilebilir ki MA(q) süreci ilk q'uncu dereceden otokorelasyonları 0'dan farklı olup q'dan sonrakiler 0 olacaktır.

$E[y_t] = 0 \qquad \gamma_0 = Var[y_t] = E[(\sum \beta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t)^2]$

$\gamma_0 = \sigma^2 + \sum \beta_i \sigma^2 = \sigma^2(1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_q^2)$

Kovaryans $\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = E[(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-q})$

$E[(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} + \beta_1\varepsilon_{t-k-1} + \beta_2\varepsilon_{t-k-2} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-k-q})]$

$\gamma_k = [\beta_k\varepsilon_{t-k}^2 + \beta_{k+1}\beta_1\varepsilon_{t-k-1}^2 + \beta_{k+2}\beta_2\varepsilon_{t} \ldots + \beta_q\beta_{q+k}\varepsilon_{t-2k}^2$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(\beta_k + \beta_{k+1}\beta_1 + \beta_{k+2}\beta_2 + \quad \beta_q\beta_{q+k} & k=1,q \\ 0 & k>q \end{cases}$$

Otokorelasyon

$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\sigma^2(\beta_k + \beta_{k+1}\beta_1 + \beta_{k+2}\beta_2 + \dots + \beta_q\beta_{q+k})}{\sigma^2(1+\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_q^2)} & k=1,q \\ 0 & k>q \end{cases}$$

ARMA(P,q) sürecinin modeli

Bilindiği gibi zaman serisiyle yapılmak istenen şey süreci tek bir gerçekleşme kullanarak zaman serisini modellemektir. AR ve MA süreçleri için bu tanımlama önceki derslerde gösterildiği gibi ACF ve PACF grafikleri yardımıyla yapılabilirdi.

öm MA süreci otokorelasyonların kesildiği (sıfırlandığı), "Q" gecikmesi onun derecesini belirler.
AR süreci için kısmi otokorelasyonların kesildiği "P" gecikmesi AR modelinin gecikmesini belirler.
Bazen bazı zaman serileri için hem otocorr fonk, hem kısmi otokorelasyon fonksiyonları belli derecelerde kesilmediği gibi. Bu durumlarda zaman serisi hem otoregresif, hem hareketli ortalamalar içerir.

Aslında birçok zaman serisi pure otoregresif yada hareketli ortalamalar ile modellenemez.

Başka bir deyişle modelde, hem AR, hemde MA bileşenleri sırasıyla p'inci, q'inci dereceden içermek üzere ARMA(P,q) modeli ile tanımlanır.

ARMA(P,q) modeli

$$y_t = a_0 + \sum a_i y_{t-i} + \sum \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

şeklinde gösterilir.

Sürecin ortalaması $E[Y_t]$ durağanlık koşulu altında incelediğimizde

$$E[y_{t-1}]=E[y_{t-2}]=E[y_{t-3}]=\dots=E[Y_{t-p}]=\mu \text{ olur,}$$

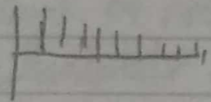
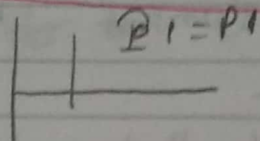
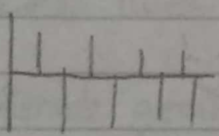
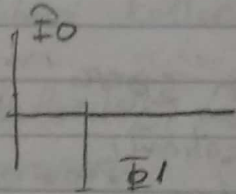
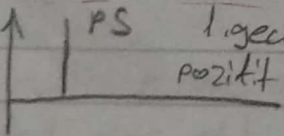
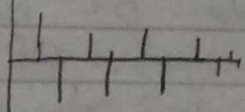
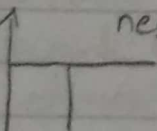
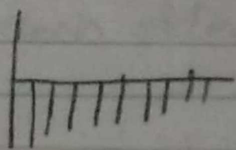
$E[y_t]=a_0+a_1\mu+a_2+\dots a_p$

$\mu-a_1\mu-a_2\mu-\dots-a_p\mu=a_0$

$\mu(1-a_1-a_2-\dots-a_p)=a_0$

$\mu=\dfrac{a_0}{(1-a_1-\dots a_p)}$ olarak elde edilir.

AR, MA ve ARMA MODELLERİNİN ACF VE PACF YAPILARI

model	ACF	PACF
white noise	All $\rho_s=0,\ s\neq 0$	All $\Phi=0$
AR(1) $a_1>0$		 $\Phi_1=\rho_1$. $s\geq 2$ için $\Phi_{ss}=0$. Burada tek bir pik yapar
$a_1<0$		 Φ_0, Φ_1. Burada negatif yönde pik yapar.
AR(P)	Eğer kökler reel sayı ise düzgün azalır. Eğer kökler karmaşık sayı ise salınımlı azalır,	P inci gecikmeye kadar pik yapar $s>p$ $\Phi_{ss}=0$
MA(1) $B>0$	 ρ_s. 1. gecikmede pozitif yönde pick yapar	 salınımlı azalır.
$B<0$	 negatif yönde bir pik yapar.	 negatif yönde düzgün azalır

MODEL | ACF | PACF

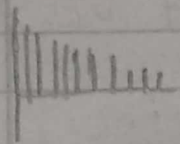
ARMA (1,1)

ACF: 1. gecikmeden sonra geometrik azalır

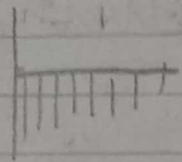
ρ_1: sign$(a_1+\beta)$

$a_1 > 0$

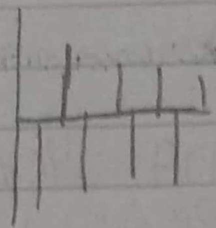
$a+\beta$



$a+\beta<0$



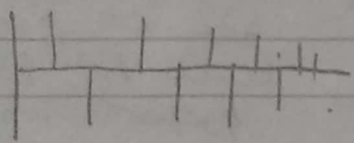
PACF:



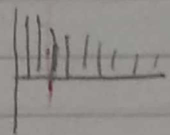
1. gecikmeden sonra salınımlı azalır

$a_1 < 0$

ACF: 1. gecikmeden sonra salınımlı azalır.



PACF:



1. gecikmeden sonra düzgün azalır

ARMA(p,q) | q gecikmesinden sonra düzgün yada salınımlı azalır | = | //

Ma | q gecikmeden sonra kesilir | Düzgün azalır

Zaman serisinde R^2 kullanma

MODEL SEÇİM KRİTERLERİ

Şimdiye kadar zaman serilerinde box-jenkins yapılarının teorik altyapısı incelemiştik. ACF ve PACF grafik yapılarını özetledik.
· ACF ve PACF grafiklerine bakarak hangi model olduğuna dair bir tahminde bulunmuştuk.
Şimdi ise modele karar vermiş olsak bile (p-inci, q-inci) derecesini belirlemede kullanacağımız model seçim kriterlerini inceleyeceğiz.

KRİTERLER

1) Akaike Bilgi kriteri (AIC) : $T\ln(SSR) + 2n$

2) Schwarte-Bayesian Bilgi kriteri (SBC) : $T\ln(SSR) + n\ln(T)$

3) Hannan-Quinn Bilgi kriteri (HQC) : $T\ln(SSR) + 2n\ln[\ln(T))$

SSR; sum of residual (artık kareler toplamı)
T: kullanılabilir gözlem sayısı
- Parsimonues ilkesi (en sade denklemi kullan)

Zaman serilerinde gecikmeli değerlerin kullanıldığı modellerde kaybolan değerlerin çıkarıldığındaki gözlem sayısıdır.

Örn/ 50 tane verimiz olduğunu düşünelim, Y_{t-3}'te 3 değer kayboluyor, Y_{47}'ye kadar kullanabiliyoruz.
* $a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$ gibi düşün. Y_{47}'yi
n: sabit terim tahmin edilen parametre sayısı

Bilindiği gibi p ve q'nun derecesinin artmasıyla, AR ve MA'ya yeni gecikmeler eklemesiyle artık kareler toplamı azalır.
Fakat bununla birlikte yeni gecikmelerin eklenmesiyle ek olarak tahmin edilmesi gerekir.

Ayrıca gecikme sayısının artmasıyla serbestlik derecesi kaybı yaşanır. ($\hat{\ }$ azalır.)

Dahası modele ilgisiz değişkenlerin dahil edilmesiyle tahmin gücü (forecasting azalır.)

Bu sebeple parsimonius (tutumlu) ilkesi ile daha sade modelin seçimine gidilir. (Daha az parametreye sahip)

T'yi sabitlemek gerek.

Burada alternatif modellerle karşılaştırma yaparken T sabitlenmesi gereklidir.

örn/ AR(1), AR(2) karşılaştırılırken T=100-2, T=98 olarak bulun.

y_t	$[y_{t-2}]=?$
1	3
2	4
3	5
4	
5	

NOT: Alternatif modeller üzerinden seçim yaparken herhangi seçim kriterinden birine göre en düşük değere göre seçim yapılır.

NOT: Küçük gözlem sayısına sahip zaman serilerinde Akaike-Bilgi kriteri daha performanslıdır. (50-100) gibi Büyük gözlem sayısına sahip zaman serilerinde schwarz-bayesian kullanılır.

NOT: Model seçimi yaparken zaman serisinde R^2 kullanılmaz (değişkenler bağımsız değil, otoregresiftir).

NOT: Aynı T (T sabit) örneklem periyodunda tahmin edilen modellerde, modele dahil edilen değişkenler, değişkenlerin artmasıyla tahmin edilecek parametre sayısı (n) artar. Bununla birlikte SSR azalır.

Eğer eklenen değişkenin açıklayıcı gücü yoksa artık karelerde çok az düşüşe neden olur.

Ve modele değişken modele eklendiği vakit, yeni model kabul edilmez.

örn/ AR Modeli için

Gecikme sayısı	1	2	3
AIC	2.72	2.51	2.63
SBC	2.82	2.43	2.7

Minimum olan AR(2) seçilir.

PERFORMANS SEÇİM KRİTERLERİ

bir zaman serisinde aşağıdaki seçim kriterleri kullanılır.

1) Root Mean Squared Error, RMSE: $\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(\hat{y}_t - y_{fit})^2}$

2) MAE (Mean absolute Error): $\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}|\hat{y}_t - y_{fit}|$

3) MAPE (Mean ablosulatue percentage error): $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\frac{y_t - \hat{y}_{fit}}{y_t}\right|$

4) ROOT MEAN SQUARED Percentage Error) RMSPE

RMSPE $\sqrt{\left(\frac{y_t - y_{fit}}{y_t}\right)^2}$

5) Theil-U

$$\text{Theil-U} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{y}_{fit})^2}}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2} \quad \sqrt{\frac{1}{T}\sum \hat{y}_{fit}^2}}$$

Diğerlerinden farklı olarak [0,1] arasında değer alır. Theil-u katsayısı 0'a yakın olması öngörü performansı yüksek 1'e yakın olması durumunda ise düşük olduğunu gösterir. Buna rağmen Theil-u katsayısı tek başına performans değerlendirme kriter olarak kullanılır. (Tek model içinde kullanılabilir.)

Diğerlerinde modelleri karşılaştırma için kullanılır. [Düşük olanı seç]

ÖNGÖRÜ VE ÖNGÖRÜ PERFORMANS KRİTERİ

Öngörü geçmişteki ve güncel bilgilere dayanarak gelecekteki veriler hakkında yapılan tahmin veya tahminler kümesidir. Bir zaman serisi modeli belirlenip tahmin edilip kontrolleri yapıldıktan sonra öngörü yapmak için kullanılır.

DİNAMİK ÖNGÖRÜ (EX-POST)

Dinamik öngörüde tahminler, tahmini değerlere dayalı elde edilir. Yani öngörü yapılırken kullanılan değerler, gerçek değerler değil. Tahmini değerlerdir.

Burada istenildiği kadar ileri tahmin yapılır.

$y_t = \alpha + \beta y_{t-1}$ (2021)

$\hat{y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} y_n$

↳ 2022 değerin tahmin değeri

$\hat{y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} y_n$

$\underset{2023}{\hat{y}_{n+2}} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \underset{2022}{\hat{y}_{n+1}}$

$\hat{y}_{n+3} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \hat{y}_{n+2}$

$\vdots$

$\hat{y}_{n+k} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \hat{y}_{n+k-1}$

STATİK ÖNGÖRÜ (EX-ANTE)

Statik öngörüde gerçek değerlerle öngörü yapılır.

$\hat{y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} y_n$ → gerçek değer

Sadece 1 adım ileri gidebiliriz.

BIRIM KÖK TESTLERI

Dickey Fuller AR(1) $\rho=1$ sürecini hipotezini test eder

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon \sim WN(0, \sigma^2)$$

$y_t - y$ Durağanlaştırma

$$y_t - y_{t-1} = \rho y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \underset{\Delta}{\delta} y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0: \delta = 0$ birim kök var durağan değil

$H_1: \delta < 0$ birim kök yok seri durağan

$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ (sabitsiz ve trendsiz)

$\Delta y_t = \upsilon + \delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ sabitli

$\Delta y_t = \upsilon + \beta t + \delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ sabitli ve trendli modeli

AUGMENTED DICKEY-FULLER AR(p) için.

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \delta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$t_{cal} < T_{tablo}$ Ho red. seri durağan

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \sum \delta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1} \delta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$t_{cal} = \frac{\hat{\delta}}{Sh\,\hat{\delta}}$$

PHILIPS PERRON AR, veya MA

DF testini düzeltilmiş olanı

Ho: tabl Ho: birim kök var durağan değil

H1: birim kök yok durağan

calculated < tablo durağan

KPSS Testi

$H_0: \sigma^2 = 0$ birim kök yok / seri durağan

$H_1: \sigma^2 \neq 0$ " " var " " değil

$H_0: \delta = 0$

$H_1: \delta < 0$