向量

Sirui Liu

2023 年 5 月 11 日

1. 若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$两两所成角相等，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=2$ ，求$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$

2. 已知 P 是边长为 3 的等边三角形 ABC 外接圆上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}|$ 的最大值为

3. 向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ 满足 $|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|=4$, 且 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 若 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$, 则 $|\overrightarrow{MC}|$ 的最小值为

4. 在平面上, $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2},\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1,\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$, 若 $|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是( )

A. $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ C. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

5. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$, 且 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, 则 $|\vec{a}+\lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{c}|(0\leq\lambda\leq1)$ 的取值范围为

6. 已知 $\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}(x,y\in R),|\vec{a}|=|\vec{b}|=2|\vec{c}|=2,\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}+1$, 则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的取值范围是

7. 在平面内, 定点 A,B,C,D 满足 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|,\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$, 动点 P,M 满足 $|\overrightarrow{AP}|=1,\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{BM}^2$ 的最大值是 ( )

A. $\dfrac{43}{4}$ B. $\dfrac{49}{4}$ C. $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$ D. $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

8. 已知 $\vec{m},\vec{n}$ 是两个非零向量, $|\vec{m}|=1,|\vec{m}+2\vec{n}|=3$, 则 $|\vec{m}+\vec{n}|+2|\vec{n}|$ 的最大值为 ( )

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 10

9. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2BC=2$, 动点 M 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的最大值是( )

A. -1

B. 5

C. $-3+\sqrt{5}$

D. $3+\sqrt{5}$

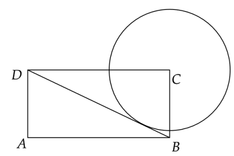

图 1: 第九题

CHEATING LIST[1]

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}\quad(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0) \tag{1}$$

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PO}\quad(\text{O为三角形重心}) \tag{2}$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}\quad\Rightarrow\quad\text{B、C、O共线} \tag{3}$$

$$\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\quad\Rightarrow\quad\text{P为三角形垂心} \tag{5}$$

关于向量的结论还有很多，其中Eq(1)和Eq(3)是极值问题中最重要的结论，窃以为这些暂时够用了，以后遇到我们再补充（）

对于这些最最基本的结论，要求大概知道怎么证明吧

[1]外心与内心的结论不常用，我没有写