Distribuições Condicionais

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte

De volta ao Exemplo 1

Qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino? Ou seja, queremos calcular a probabilidade $P(X = x \mid Y = 1)$.
Pela definição de probabilidade condicional

$$P(X = x \mid Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} = p_{X|Y}(x \mid 1)$$

De volta ao Exemplo 1

Qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino? Ou seja, queremos calcular a probabilidade $P(X = x \mid Y = 1)$.
Pela definição de probabilidade condicional

$$P(X = x \mid Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} = p_{X|Y}(x \mid 1)$$

Tabela 8.5: Distribuição conjunta de X e Y, como uma tabela de dupla entrada.

Y \ X	0	1	2	3	$p(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$p_{X|Y}(0 \mid 1) = \frac{p(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{0}{1/2} = 0; \qquad p_{X|Y}(1 \mid 1) = \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$$

$$p_{X|Y}(2 \mid 1) = \frac{p(2,1)}{p_Y(1)} = \frac{2/8}{1/2} = 1/2 \qquad p_{X|Y}(3 \mid 1) = \frac{p(3,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$$

X e Y discretas

Formalmente, dada duas v.a. discretas X e Y com função distribuição conjunta $p(x, y)$ e tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$p_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

X e Y discretas

Formalmente, dada duas v.a. discretas X e Y com função distribuição conjunta $p(x, y)$ e tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$p_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

Da mesma maneira, a *função de probabilidade condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$p_{Y|X}(x \mid y) = P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$$

Qual seria a distribuição do primeiro filho ser menino, sabendo-se que o número de meninos foi igual a 2?

Tabela 8.5: Distribuição conjunta de X e Y, como uma tabela de dupla entrada.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Ou seja, queremos calcular a probabilidade $P(Y = y \mid X = 2)$

$$p_{Y|X}(0 \mid 2) = \frac{p(2,0)}{p_X(2)} = \frac{1/8}{3/8} = 1/3; \qquad p_{Y|X}(1 \mid 2) = \frac{p(2,1)}{p_X(2)} = \frac{2/8}{3/8} = 2/3$$

X e Y contínuas

Dada duas v.a. contínuas X e Y com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$ a *função densidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0,$$

X e Y contínuas

Dada duas v.a. contínuas X e Y com função densidade de probabilidade conjunta $f(x,y)$ a *função densidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0,$$

Da mesma maneira, a *função densidade condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$f_{Y|X}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0$$

2. Determine $f_{Y|X}$ no exemplo do concurso.

3. Determine as funções de densidade condicionais das v.a.'s X e Y v.a. contínuas cuja função de densidade conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(1-x-y), & se\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

   Sabendo que $X = 0,5$ qual a probabilidade de $0 \leq Y \leq 1/2$?

4. Se X e Y são variáveis aleatórias de Poisson independentes com respectivos parâmetros λ_1 e λ_2, calcule a distribuição condicional de X dado que $X + Y = n$.

5. **[Função de distribuição conjunta mista]**. Sejam X e Y v.a.'s, sendo X discreta e Y contínua. Suponha que sua a função de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & se\ x = 1,2,3\ e\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

(a) Verifique que f é uma probabilidade e calcule $P(X \leq 2, Y \leq 1/2)$

(b) (exercício) Verifique que a fda conjunta é dada por

$$F(a,b) = \begin{cases} 0, & se\ x < 1\ ou\ y < 0; \\ \frac{y}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{y+y^2}{3}, & se\ 2 \leq x < 3\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{y+y^2+y^3}{3}, & se\ x \geq 3\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{1}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ y \geq 1; \\ \frac{2}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ y \geq 1; \\ 1, & se\ x \geq 3\ e\ y \geq 1. \end{cases}$$

(c) Determine a função de distribuição condicional de Y dado que $X = 2$.

(d) Determine a função de distribuição condicional de X dado que $Y = 1/2$.

6. Obtenha $f_{X|Y}$ onde X e Y são v.a.'s com f.d.p conjunta dada por

$$f(x, y) = x + y, \; 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

7. Sejam X e Y v.a. cuja função densidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2 - x - y) & 0 < x < 1, \; 0 < y < 1; \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Determine a densidade de X dado que Y=y, para $0 < y < 1$.

Fda condicional

Dada duas v.a.'s X e Y tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de distribuição condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$F_{X|Y}(x \mid y) = P(X \leq x \mid Y = y)$$

Fda condicional

Dada duas v.a.'s X e Y tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de distribuição condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

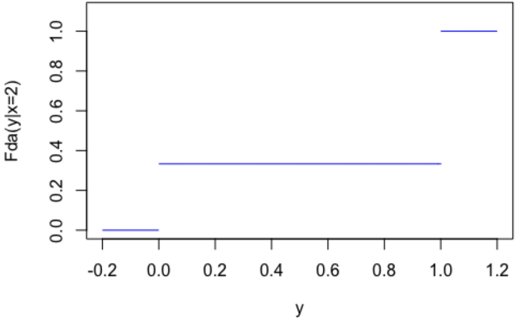
$$F_{X|Y}(x \mid y) = P(X \leq x \mid Y = y)$$

Da mesma maneira, se $P(X = x) > 0$, a *função de distribuição condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$F_{Y|X}(y \mid x) = P(Y \leq y \mid X = x)$$

Qual seria a distribuição do primeiro filho ser menino, sabendo que o número de meninos foi igual a 2? Lembre que

$$p_{Y|X}(0 \mid 2) = \frac{p(2,0)}{p_X(2)} = \frac{1/8}{3/8} = 1/3; \qquad p_{Y|X}(1 \mid 2) = \frac{p(2,1)}{p_X(2)} = \frac{2/8}{3/8} = 2/3$$



8. No exemplo do concurso, determine a f.d.a do tempo total de prova dado que o candidato terminou a parte teórica em 1h.

9. Obtenha $F_{X|Y}$ onde X e Y são v.a.'s com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = x + y,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

Fção de probabilidade condicional de v.a.'s independentes

Se X e Y são v.a.'s discretas e independentes

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_Y(y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

Se X e Y são v.a.'s contínuas e independentes

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

Fção de probabilidade condicional de v.a.'s independentes

Se X e Y são v.a.'s discretas e independentes

$$p_{X|Y}(x \mid y) = p_X(x) \qquad \Big(\textit{resp.}\ \ p_{Y|X}(y \mid x) = p_Y(y)\Big)$$

Se X e Y são v.a.'s contínuas e independentes

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x) \qquad \Big(\textit{resp.}\ \ f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)\Big)$$

Se X e Y são v.a.'s independentes

$$F_{X|Y}(x \mid y) = F_X(x) \qquad \Big(\textit{resp.}\ \ F_{Y|X}(y \mid x) = F_Y(y)\Big)$$