Variáveis aleatórias discretas

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte - 2022/01

Exemplo 0

Experimento: lançar uma moeda 3 vezes.

$$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,,k),(c,k,c),\ldots(k,k,k))\}$$

Suponha que estamos interessados em saber **pelo menos 2** dos lançamentos deu cara.

Que evento melhor descreve a informação que estamos interessado?

Exemplo 0

Experimento: lançar uma moeda 3 vezes.

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, , k), (c, k, c), \ldots (k, k, k))\}$$

Suponha que estamos interessados em saber **pelo menos 2** dos lançamentos deu cara.

Que evento melhor descreve a informação que estamos interessado?

Resposta:

$$A = \{(c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$$

Exemplo 0

Experimento: lançar uma moeda 3 vezes.

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, , k), (c, k, c), \ldots (k, k, k))\}$$

Suponha que estamos interessados em saber **pelo menos 2** dos lançamentos deu cara.

Que evento melhor descreve a informação que estamos interessado?

Resposta:

$$A = \{(c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$$

Qual a probabilidade desse evento?

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 1

Experimento: lançar uma moeda 3 vezes.

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, , k), (c, k, c), \ldots (k, k, k))\}$$

Suponha que estamos interessados em saber **o número de caras** desses 3 lançamentos.

Que evento melhor descreve a informação que estamos interessado?

Exemplo 1

Experimento: lançar uma moeda 3 vezes.

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, , k), (c, k, c), \ldots (k, k, k))\}$$

Suponha que estamos interessados em saber **o número de caras** desses 3 lançamentos.

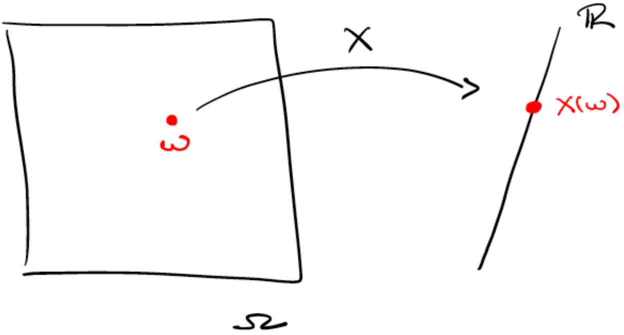
Que evento melhor descreve a informação que estamos interessado?

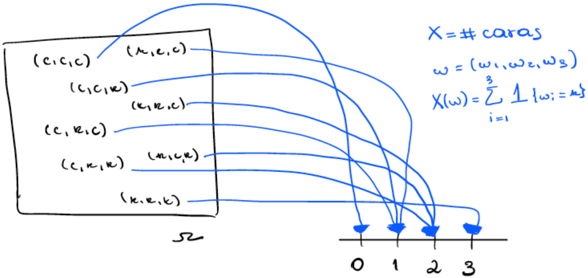
Resposta: **nenhum**. (lembre que, no nosso contexto, um evento é um subconjunto do espaço amostral)

Definição: variável aleatória

Uma função definida em um espaço amostral é dita uma *variável aleatória*.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

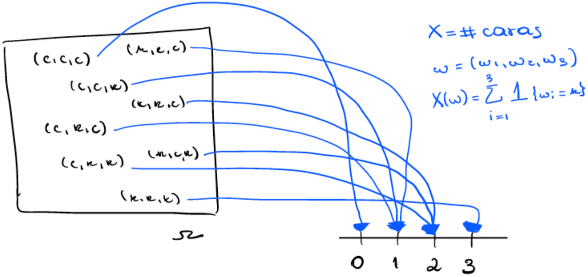




Observe que

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\{(c, c, c)\}) = 1/8 \\
P(X = 1) &= P(\{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}) = 3/8 \\
P(X = 2) &= P(\{(c, k, k), (k, k, c), (k, c, k)\}) = 3/8 \\
P(X = 3) &= P(\{(k, k, k)\}) = 1/8
\end{aligned}
$$

Probabilidades e v.a.



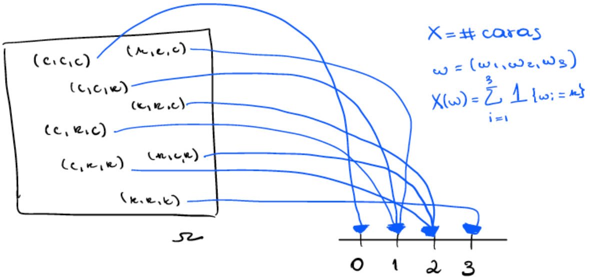
Observe que

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\{(c,c,c)\}) = 1/8 \\
P(X=1) &= P(\{(c,c,k),(c,k,c),(k,c,c)\}) = 3/8 \\
P(X=2) &= P(\{(c,k,k),(k,k,c),(k,c,k)\}) = 3/8 \\
P(X=3) &= P(\{(k,k,k)\}) = 1/8
\end{aligned}
$$

De maneira resumida

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Probabilidades e v.a.



Observe que

$$P(X=0) = P(\{(c,c,c)\}) = 1/8$$
$$P(X=1) = P(\{(c,c,k),(c,k,c),(k,c,c)\}) = 3/8$$
$$P(X=2) = P(\{(c,k,k),(k,k,c),(k,c,k)\}) = 3/8$$
$$P(X=3) = P(\{(k,k,k)\}) = 1/8$$

De maneira resumida

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Note que $\sum_{x_i=0}^{3} P(X=x_i) = 1$

De volta ao Exemplo 0

Se queremos calcular a probabilidade de haver **pelo menos 2 caras** dentre os 3 lançamentos:

$$\begin{aligned}
P\big(X = 2 \text{ } ou \text{ } X = 3\big) &= P(\{(c,k,k),(k,c,k),(k,k,c)\} \cup \{(k,k,k)\}) \\
&= P(\{(c,k,k),(k,c,k),(k,k,c)\}) + P(\{(k,k,k)\}) \\
&= P(X=2) + P(X=3) \\
&= 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2
\end{aligned}$$

2. Três bolas são selecionadas aleatoriamente e sem reposição de uma urna contendo 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se apostamos que pelo menos uma das bolas selecionadas tem um numero maior ou igual a 18, qual é a probabilidade de vencermos a aposta?

3. Tentativas independentes que consistem em jogar uma moeda com probabilidade p de dar cara são realizadas continuamente até que dê cara ou que um total de n jogadas tenha sido realizado. Se X representa o numero de vezes que a moeda é jogada, determine a probabilidade de $X = k, k = 1, \ldots, n$.

4. O tempo de validade, em meses, de um óleo lubrificante de um certo equipamento esta sendo estudado. Sabe-se que, para não comprometer a funcionalidade do equipamento, o óleo tem garantia de uso mínima de 6 meses e máxima de 8 meses. Logo $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : 6 \leq \omega \leq 8\}$. Qual a v.a. de interesse nesse caso?

Variável aleatória discreta

Uma v.a. é dita *discreta* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou infinito enumerável

ex.: número de caras, o maior número sorteado, número de lançamentos até a primeira cara

Variável aleatória contínua

Uma v.a. é dita *contínua* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não-enumerável.

ex.: tempo de validade de um óleo lubrificante

Definição: função de probabilidade

Seja X uma v.a. discreta assumindo valores em $x_1, x_2 \ldots$. A função $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida, para qualquer $i = 1, 2, \ldots$, por

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

é dita a *função de probabilidade* de X.

No Ex. 1 (num. de caras em 3 lançamentos) tínhamos

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Propriedades da função de probabilidade

Se p é a função de probabilidade de uma v.a. X tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$, então

(i) $0 \leq p(x_i) \leq 1$ para qualquer $i = 1, 2, \ldots$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

5. Considere o experimento: lançar um dado honesto duas vezes e defina a v. a. X como a soma das faces. Calcule a função de probabilidade de X.

6. No experimento anterior, defina a v.a. Y como o valor máximo obtido entre os dois lançamentos e Z como diferença entre as faces do 2^o e 1^o lançamentos. Encontre a sua função de probabilidade de Y e Z.

7. O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando se, ao acaso, três membros do departamento. Seja X o número de mulheres na comissão. Calcule a função de probabilidade de X.

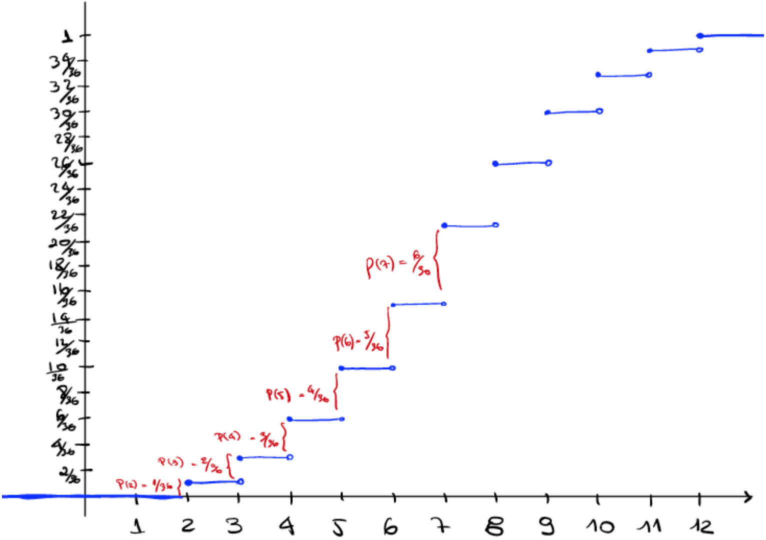
Função de distribuição acumulada

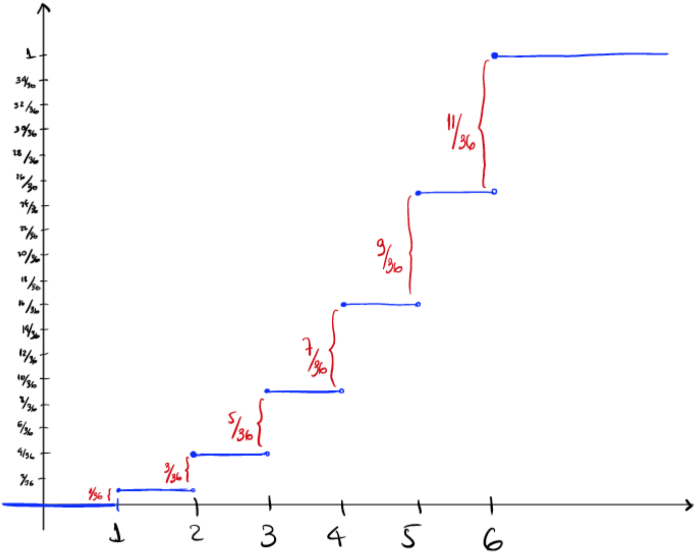
Seja X uma v.a., a função F dada por

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

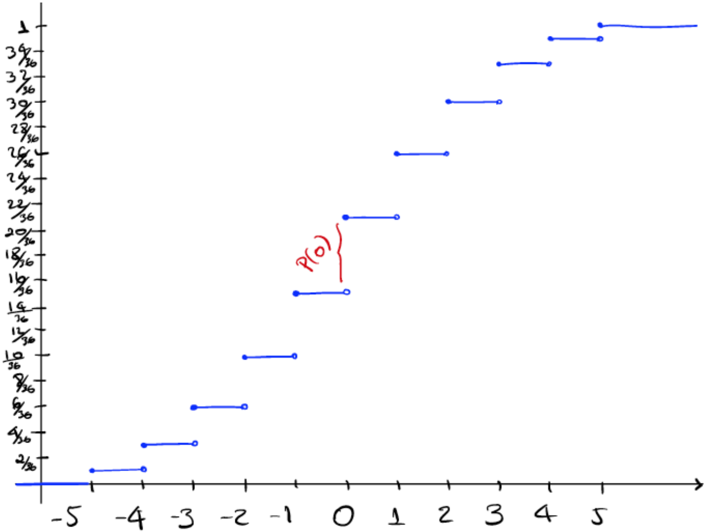
5' Determine a função de distribuição da variável X, a soma das faces.

6' Determine a função de distribuição das variáveis Y e Z do exemplo 6.


1
34/36
32/36
30/36
28/36
26/36
24/36
22/36
20/36
18/36
16/36
14/36
12/36
10/36
8/36
6/36
4/36
2/36
P(7) = 6/36
P(6) - 5/36
P(5) - 4/36
P(4) - 3/36
P(3) - 2/36
P(2) - 1/36
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12



1
2
3
4
5
6
1/36
3/36
5/36
7/36
9/36
11/36


1
34/36
32/36
30/36
28/36
26/36
24/36
22/36
20/36
18/36
16/36
14/36
12/36
10/36
8/36
6/36
4/36
2/36
P(0)
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Proposição

Uma função de distribuição de uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfaz

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(ii) F é contínua a direita

(iii) F é não decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$

Considere o seguinte jogo.

[Exemplo 5] Experimento: lançar um dado honestos duas vezes e somar o valor das faces. Suponha que o valor ganho seja o valor obtido com a soma das faces. Quanto você espera ganhar em sucessivas jogadas?

Valor médio ou esperança matemática: caso discreto

Valor médio ou esperança matemática

Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$, chamamos *valor médio* ou *esperança matemática* de X o valor

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

No exemplo dos dados:

$$EX = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + \ldots + 12\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Note que EX pode ser igual a ∞

8. Se apostamos sucessivamente R$1,00 na cara em um jogo de cara ou coroa. Qual o lucro esperado das nossas apostas?

9. Dizemos que 1_A é uma variável indicadora do evento A se

$$1_A = \begin{cases} 1 & se\ A \text{ ocorre} \\ 0 & se\ A \text{ não ocorre.} \end{cases}$$

   Determine o valor esperado de 1_A.

10. Uma empresa vende três produtos, cujos lucros e probabilidades de venda estão apresentados na tabela a seguir

Produto	A	B	C
Lucro Unitário (US$)	15	20	10
Probabilidade de Venda (%)	20	30	50

   Calcule o lucro médio por unidade vendida. Qual o lucro total esperado num mês em que foram vendidas 5.000 unidades?

Propriedades do valor médio

Sejam X e Y v.a.'s discretas de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$, respectivamente, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Então vale que:

(i) $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i)$.

(ii) $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.

11. Seja X uma v.a. que assumindo valores -1,0 e 1 com respectivas probabilidades $p(-1) = 0,2$, $p(0) = 0,5$ e $p(1) = 0,3$. Calcule $E[X^2]$.

12. No experimento do dado honesto, qual é a esperança matemática de X^2. Compare com $(EX)^2$.

Variância de uma variável aleatória

Definição: Variância de uma v.a.

Dada a v.a. X discreta com $EX = \mu$, então a variância de X é definida por
$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Alternativamente,
$$Var(X) = E[X^2] - (EX)^2$$

O valor $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$ é dito o *desvio padrão* de X.

13. Considere as seguinter v.a.'s, X, Y e Z, a seguir

$$X = 0 \text{ com probabilidade } 1;$$

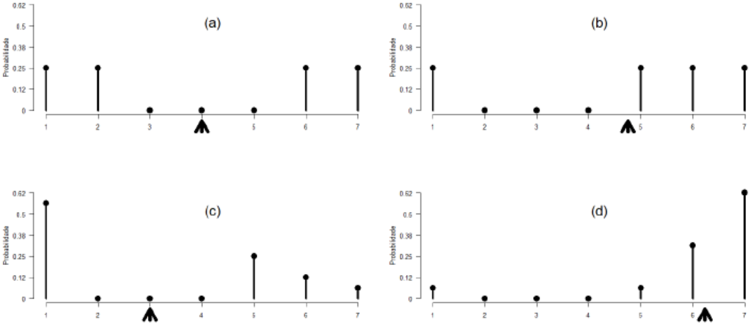
$$Y = \begin{cases} -1 & \text{com probabilidade } 0{,}5, \\ 1 & \text{com probabilidade } 0{,}5; \end{cases} \quad e$$

$$Z = \begin{cases} -100 & \text{com probabilidade } 0{,}5 \\ 100 & \text{com probabilidade } 0{,}5 \end{cases}$$

Calcule o valor esperado e a variância de X, Y e Z.

14. Sejam X, Y, W e Z v.a.'s assumindo valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 cujas funções de probabilidades estão apresentadas na tabela abaixo

P(X=x)	P(Y=y)	P(W=w)	P(Z=z)
0,25	0,25	0,56	0,06
0,25	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,25	0,25	0,06
0,25	0,25	0,13	0,29
0,25	0,25	0,06	0,59
E(X)=4	E(Y)=4,75	E(W)=3	E(Y)=6,24
Var(X)=3,25	Var(Y)=3,52	Var(W)=2,25	Var(Z)=1,61



Propriedades da Variância

Seja X uma v.a. com $EX < \infty$ e a e b números reais quaisquer

(i) Se $X = a$ com probabilidade 1. Isto é, se X é constante e igual a a, $Var(X) = 0$.

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

15. Suponha que no exemplo dos dados, nosso lucro seja a metade do valor da soma das faces. Calcule a médias e a variância do lucro sob essa nova condição. E se o lucro for o dobro? x

16. X é uma variável aleatória com $EX = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Pede-se verificar que a variável $Y = (X - \mu)/\sigma$ satisfaz E(Y) = O e Var(Y) = 1 .

Resumo

Dada X uma v.a. discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$

- Esperança matemática/valor médio: $EX = \sum_k x_k p(x_k)$
- Variância: medida de dispersão em relação a média $Var(X) = E[(X - EX)^2] = E[X^2] - (EX)^2$
- $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i)$.
- $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.
- Se $X = a$ com probabilidade 1. Isto é, se X é constante e igual a a, $Var(X) = 0$.
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Variáveis aleatórias Bernoulli e Binomial

Bernoulli

Suponha que um experimento cujo resultado possa ser classificado como um sucesso ou um fracasso. Defina

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o resultado for um sucesso} \\ 0, & \text{se o resultado for um fracasso.} \end{cases}$$

Bernoulli

Suponha que um experimento cujo resultado possa ser classificado como um sucesso ou um fracasso. Defina

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o resultado for um sucesso} \\ 0, & \text{se o resultado for um fracasso.} \end{cases}$$

Como X só assume valores 0 e 1, sua função de probabilidade é dada por

$$p(1) = P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

Bernoulli

Suponha que um experimento cujo resultado possa ser classificado como um sucesso ou um fracasso. Defina

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o resultado for um sucesso} \\ 0, & \text{se o resultado for um fracasso.} \end{cases}$$

Como X só assume valores 0 e 1, sua função de probabilidade é dada por

$$p(1) = P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

Qualquer variável aleatória cuja função de probabilidade é definida como acima, é dita uma *variável aleatória Bernoulli*

Notação: $X \sim Be(p)$

Exemplos de experimentos

- Lançamento de uma moeda: cara ou coroa
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face 5
- A pessoa é fumante ou não
- A peça é classificada como boa ou defeituosa
- O tratamento é eficaz ou não
- O resultado de um exame médico: positivo ou negativo
- A opinião de um indivíduo, favorável ou contra quarentena
- Acesso a internet banda larga, sim ou não
- Acesso a água encada em por menos 12h do dia, sim ou não
- A opinião de um eleito,r satisfeito ou insatisfeito com presidente

Média e Variância de uma Bernoulli

Seja $X \sim Ber(p)$. A média e a Variância de X são dadas por

$$EX = p \qquad Var(X) = p(1-p)$$

Binomial

Suponha agora que n réplicas **independentes** de um mesmo experimento do tipo sucesso/fracasso sejam realizadas, cada uma das quais com probabilidade p de sucesso e $1 - p$ de fracasso.

Defina X : o número de sucessos que ocorrem nas n tentativas. Então X é dita uma *variável aleatória binomial com parâmetros* (n, p).

Sua função de probabilidade é dada, para $k = 0, \ldots, n$, por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Notação: $X \sim Bin(n, p)$

Binomial

Suponha agora que n réplicas **independentes** de um mesmo experimento do tipo sucesso/fracasso sejam realizadas, cada uma das quais com probabilidade p de sucesso e $1 - p$ de fracasso.

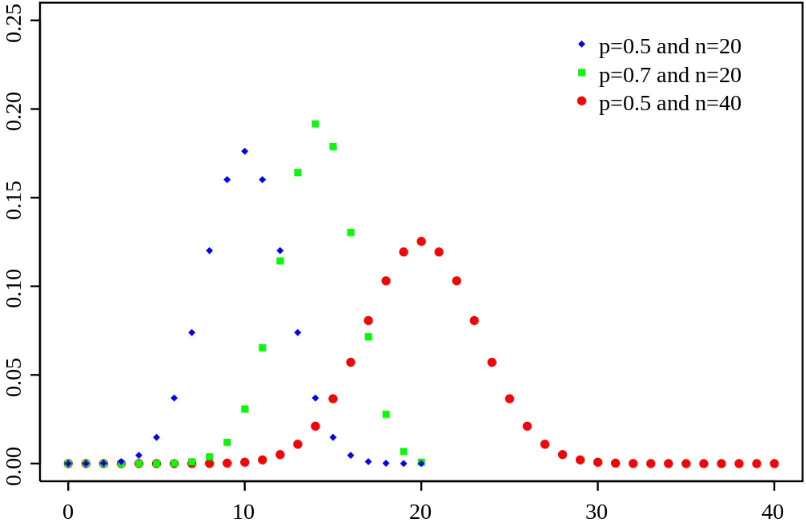
Defina X : o número de sucessos que ocorrem nas n tentativas. Então X é dita uma *variável aleatória binomial com parâmetros* (n, p).

Sua função de probabilidade é dada, para $k = 0, \ldots, n$, por

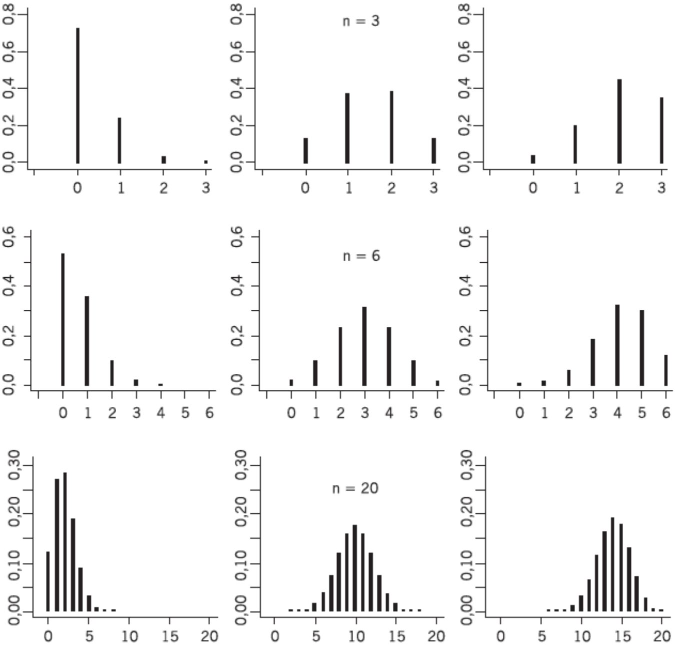
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Notação: $X \sim Bin(n, p)$

Note, uma Bernoulli nada mais é que uma $Bin(1, p)$.



p=0.5 and n=20
p=0.7 and n=20
p=0.5 and n=40
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
10
20
30
40



p = 0,1 p = 0,5 p = 0,7

17. Cinco moedas honestas são jogadas de maneira independente. Determine a função de probabilidade do número de caras obtido.

18. Sabe-se que os parafusos produzidos por certa empresa têm probabilidade de 0,01 de apresentar defeitos, independentemente uns dos outros. A empresa vende os parafusos em pacotes com 10 e oferece uma garantia de devolução de dinheiro se mais de 1 parafuso em 10 apresentar defeito. Que proporção de pacotes vendidos a empresa deve trocar?

19. Considere um jogo de azar descrito como segue. O jogador aposta em um número de 1 a 6. Três dados são então lançados, e se o número apostado sair i vezes, $i = 1, 2, 3$, então o jogador ganha i unidades; se o número apostado não sair em nenhum dos dados, então o jogador perde 1 unidade. Este jogo é justo para o jogador?

20. [Exemplo no R] Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte no máximo 6 questões?

Proposição: propriedades da Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$.

(i) Dada $Y \sim Bin(n-1, p)$, para qualquer $k = 1, 2, 3, \ldots$, vale que

$$E[X^k] = npE[(Y+1)^{k-1}].$$

Em particular $EX = np$

(ii) $Var(X) = np(1-p)$

21. Discuta a validade do modelo binomial nos seguintes casos.

(a) Dos alunos da USP, sorteamos 5 e contamos quantos se declaram usuários regulares do CEPEUSP;

(b) Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de lâmpadas defeituosas;

(c) Quinze automóveis 0 km de um mesmo fabricante e mesmo modelo são submetidos a um teste anti-poluição e contamos quantos passaram no teste;

(d) Um motorista é submetido a um teste em que deve estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de fazer baliza). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

Variável aleatória Geométrica

Suponha que tentativas independentes de um mesmo experimento do tipo sucesso/fracasso, cada uma delas com probabilidade de sucesso, $0 < p < 1$, sejam realizadas até que ocorra o primeiro sucesso.

Seja X o número de tentativas necessárias até o primeiro sucesso. Então X é dita uma *variável aleatória Geométrica de parâmetro p*.

Sua função probabilidade é dada, para qualquer $k = 1, 2, \ldots$ por

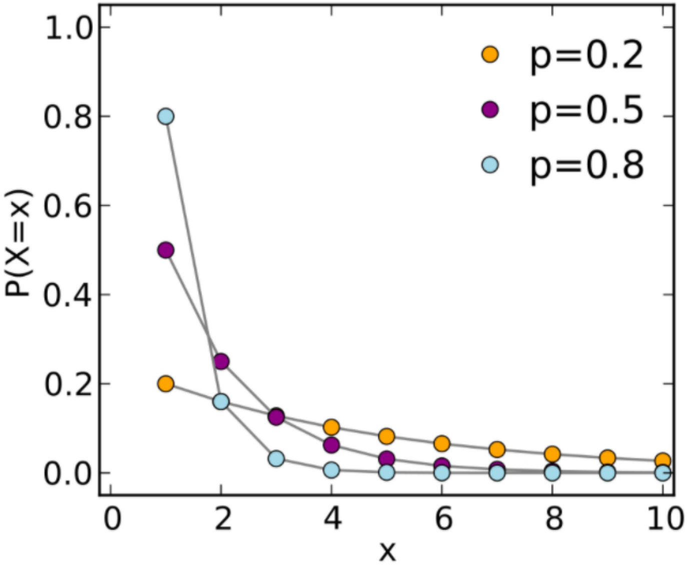
$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Notação:$X \sim Geo(p)$

Média e Variância de uma v.a. Geométrica

Se $X \sim Geo(p)$, então

$$EX = \frac{1}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{1 - p}{p}$$


p=0.2
p=0.5
p=0.8
P(X=x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
2
4
6
8
10
x

22. Num determinado cassino a probabilidade de um jogador ganhar o super prêmio numa maquininha é de 0,05 em cada tentativa. Joey quer jogar até ganhar o super prêmio. Supondo tentativas sejam independentes, determine

(a) a probabilidade de Joey ganhar algum prêmio antes de 3 tentativas?
(b) a probabilidade de não ter ganho até a décima tentativa?
(c) o número médio de jogadas até que Joey ganhe o super prêmio.

Resumo

- **Bernoulli**: Experimento do tipo sucesso/fracasso com probabilidade p de sucesso: $X \sim Be(p)$
  - X: houve sucesso ou não (X= 0 ou 1)
  - $EX = p$
  - $Var(X) = p(1-p)$
- **Binomial**: n réplicas independentes de um experimento do tipo sucesso/fracasso com probabilidade p de sucesso: $X \sim Bin(n, p)$
  - X: número de sucessos (X=1, 2, ... , n)
  - $EX = np$
  - $Var(X) = np(1-p)$
- **Geométrica**: réplicas independentes de um experimento do tipo sucesso/fracasso até obter o primeiro sucesso: $X \sim Geo(p)$
  - X: número de tentativas até o primeira sucesso (X=1,2,3, . . .)
  - $EX = \frac{1}{p}$
  - $Var(X) = \frac{1-p}{p}$

Variável aleatória Binomial Negativa

Suponha que tentativas **independentes** de um experimento do tipo sucesso/fracasso, com **mesma probabilidade de sucesso** p, $0 < p < 1$, sejam realizadas até que se acumule um total de r sucessos. Se X for o número de tentativas necessárias, então

$$p(n) = P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r}\binom{1}{1} p$$

$$p(n) = P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{n-r}, \ \ n = r, r+1, \ldots$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$

Média e Variância de uma Binomial Negativa

Se $X \sim BN(r, p)$ então

$$EX = \frac{r}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

23. Determine o valor esperado e a variância do número de vezes que alguém deve lançar um dado até que a face 1 apareça quatro vezes.

24. Um matemático que fuma cachimbos sempre carrega consigo duas caixas de fósforos, uma em casa bolso. Cada vez que precisa de um fósforo, ele o retira de um bolso ou de outro com mesma probabilidade. Considere o momento em que o matemático descobre que uma de suas caixas de fósforo está vazia. Supondo que ambas as caixas de fósforos continham inicialmente N fósforos, qual é a probabilidade de que existam exatamente k fósforos, $k = 0, 1, ..., N$, na outra caixa?

Variável aleatória Hipergeométrica

Considere uma urna contendo N bolas, das quais m são brancas e $N - m$ são pretas. Suponha que uma amostra de tamanho $n < N$ seja escolhida aleatoriamente e sem reposição. Se X representa o número de bolas brancas selecionadas, então

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Uma v.a. com função de probabilidade como acima é dita uma variável aleatória *Hipergeométrica*.

Notação: $X \sim Hip(n, N, m)$

Variável aleatória Hipergeométrica

Considere uma urna contendo N bolas, das quais m são brancas e $N - m$ são pretas. Suponha que uma amostra de tamanho $n < N$ seja escolhida aleatoriamente e sem reposição. Se X representa o número de bolas brancas selecionadas, então

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Uma v.a. com função de probabilidade como acima é dita uma variável aleatória *Hipergeométrica*.

Notação: $X \sim Hip(n, N, m)$

Média e Variância de uma Hipergeométrica

Se $X \sim Hip(n, N, m)$ então

$$EX = \frac{nm}{N} \qquad e \qquad Var(X) = \frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right]$$

25. Um comprador de componentes elétricos os compra em lotes de 100. Sua política de inspeção é a seguinte, retira-se aleatoriamente 5 componentes de um lote e aceita-se o lote se todos os 5 itens inspecionados não apresentarem defeito. Se um lote contém 10 peças defeituosas, determine a probabilidade do comprador rejeitar um lote.

Variável aleatória Poisson

Uma variável aleatória X que assume valores $0, 1, 2, \ldots$ é dita uma *variável aleatória de Poisson* com parâmetro $\lambda > 0$ se

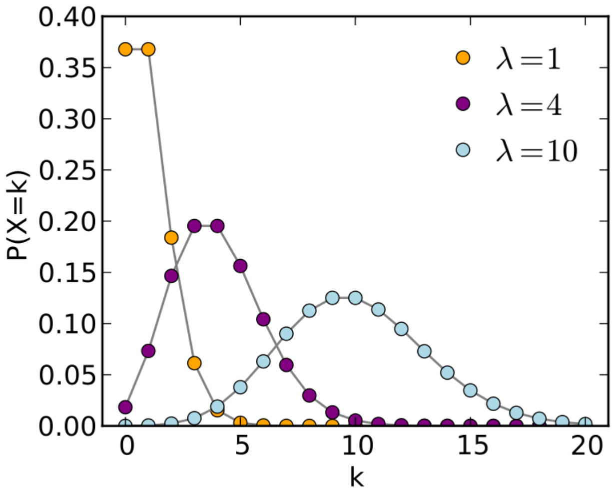
$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Notação: $X \sim Poi(\lambda)$

Média e Variância de uma v.a. Poisson

Se $X \sim Poi(\lambda)$, então

$$EX = \lambda \qquad e \qquad Var(X) = \lambda$$


0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
P(X=k)
0
5
10
15
20
k
$\lambda = 1$
$\lambda = 4$
$\lambda = 10$

Exemplo de experimentos modelados por Poisson

- O número de erros de impressão em uma página (ou em um conjunto de páginas de um livro)
- O número de pessoas em uma comunidade que vivem mais de 100 anos
- Número de chamadas telefônicas que chegam a uma Central em um dado intervalo de tempo
- A quantidade de pacotes de biscoitos vendidos em uma determinada loja em um dia
- O número de clientes que entram em uma agência dos correios em um dia
- O número de partículas a descarregadas por um material radioativo em um período de tempo fixo
- O número de bactérias em uma lâmina de microscópio
- O número de acidentes numa rodovia num determinado período

Cada um dos experimentos acima são exemplos de uma Poisson por causa da aproximação de Poisson para a distribuição Binomial.

26. Sabe-se que o número médio de erros de digitação por página de um determinado livro é $0,5$. Supondo que a quantidade de erros segue uma distribuição de Poisson, calcule a probabilidade de que exista pelo menos um erro em uma página.

27. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por certa máquina apresente defeito seja $0,1$. Determine a probabilidade de que uma amostra de 10 itens contenha no máximo 1 item defeituoso.

28. Suponha que a probabilidade de um *bit* ser transmitido com erro, durante uma transmissão digital, é de 0,001. Determine a probabilidade de que, de que em 3 mil *bits* transmitidos, haja exatamente quatro *bits* errados.

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$P(X = k)$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$P(X = k) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$P(X = k) \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
(tome\ p = \lambda/n) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Quando n é grande e λ moderado

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \approx 1, \quad e \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

Aproximação da Binomial por Poisson

Seja p a **probabilidade de que cada letra** escrita em uma página contenha um erro de impressão. Supondo que há **independência** entre os possíveis erros de impressão, podemos considerar X : **quantidade** de erros em uma página como $Bin(n, p)$, onde n é o número total de letras.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Quando n é grande e λ moderado

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \approx 1, \quad e \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

Logo

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Proposição

Se $X \sim Bin(n, p)$ com n grande e p pequeno (de forma que λ seja moderado) então, para qualquer $k = 1, 2, \ldots$, vale que

$$p(k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad com \quad \lambda = np$$

Usaremos a convenção que $n > 30$ é grande e $\lambda = np < 10$ é moderado

Note que

$$X \sim Bin(n, p) \implies EX = np = \lambda \text{ e}$$
$$Var(X) = np(1 - p) = \lambda(1 - p) \approx \lambda \text{ quando } p \text{ é pequeno.}$$

Resumo

- Binomial Negativa: experimentos independentes do tipo sucesso/fracasso, até obter r sucessos
  - X: número de tentativas necessárias
  - $EX = \frac{r}{p}$
  - $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$
- Hipergeométrica: urna com N bolas, m brancas e N-m pretas
  - X: número de bolas brancas
  - $EX = \frac{nm}{N}$
  - $Var(X) = \frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right]$
- Poisson: Binomial com n grande e p pequeno ($n > 30$ e $\lambda = np < 10$)
  - X: quantidade de sucessos
  - $EX = \lambda$
  - $Var(X) = \lambda$