Função geradora de momentos

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte

Função Geratrizes de Momentos

Dada uma variável X

- $\mu'_k = E[X^k]$ é dita o *k-ésimo momento de X*.
- o *k-ésimo momento central* é definido como $\mu_k = E[(X-\mu)^k]$

Note que $EX = \mu'_1$ e $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$.

A *função geratriz de momentos* $M(t)$ de uma variável aleatória X é definida, para todos os valores reais de t, como

$$M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Determine a função geratriz de momentos de

9. $X \sim Bin(n, p)$
10. $X \sim Poi(\lambda)$
11. $X \sim Exp(\lambda)$
12. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Função geradora de momentos conjunta

Para **quaisquer** n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, a função geradora de momentos conjunta $M(t_1, ..., t_n)$ é definida, para todos os valores reais de $t_1, ..., t_n$ como

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{\mathbf{t_1 X_1} + ..., t_n X_n}]$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas de $M(t_1, ..., t_n)$ fazendo com que todos os t,'s exceto um sejam iguais a zero. Isto é

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

Para **quaisquer** n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, a função geradora de momentos conjunta $M(t_1, ..., t_n)$ é definida, para todos os valores reais de $t_1, ..., t_n$ como

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1 + ..., t_n X_n}]$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas de $M(t_1, ..., t_n)$ fazendo com que todos os t,'s exceto um sejam iguais a zero. Isto é

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

$X_1, ..., X_n$ são v.a's independentes se e somente se

$$M(t_n, ..., t_n) =$$

Para **quaisquer** n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, a função geradora de momentos conjunta $M(t_1, ..., t_n)$ é definida, para todos os valores reais de $t_1, ..., t_n$ como

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{\mathbf{t_1 X_1} + ..., t_n X_n}]$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas de $M(t_1, ..., t_n)$ fazendo com que todos os t,'s exceto um sejam iguais a zero. Isto é

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

$X_1, ..., X_n$ são v.a's **independentes** se e somente se

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{\mathbf{t_1 X_1} + ..., t_n X_n}] = E[e^{\mathbf{t_1 X_1}} e^{\mathbf{t_2 X_2}} \ldots e^{t_n X_n}]$$

Para **quaisquer** n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, a função geradora de momentos conjunta $M(t_1, ..., t_n)$ é definida, para todos os valores reais de $t_1, ..., t_n$ como

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1 + \ldots, t_n X_n}]$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas de $M(t_1, ..., t_n)$ fazendo com que todos os t,'s exceto um sejam iguais a zero. Isto é

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

$X_1, ..., X_n$ são v.a's independentes se e somente se

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1}]E[e^{t_2 X_2}] \ldots E[e^{t_n X_n}]$$

Para **quaisquer** n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, a função geradora de momentos conjunta $M(t_1, ..., t_n)$ é definida, para todos os valores reais de $t_1, ..., t_n$ como

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1 + ..., t_n X_n}]$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas de $M(t_1, ..., t_n)$ fazendo com que todos os t,'s exceto um sejam iguais a zero. Isto é

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

$X_1, ..., X_n$ são v.a's independentes se e somente se

$$M(t_n, ..., t_n) = M_{X_1}(t_1) \ldots M_{X_n}(t_n) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t_k)$$

13. Sejam X e Y v.a.'s independentes. Determine a função geradora de momentos de $Z = X+Y$, $U = X-Y$ e conjunta de Z e U.

Teorema

Se duas v.a.'s têm mesma função geradora de momentos então elas têm mesma distribuição.

14. Sejam X e Y v.a.'s independentes com distribuição N(0,1). Use a função geradora de momentos conjunta de $Z=X+Y$ e $U=X-Y$ para determinar se as v.a. são independentes bem como suas respectivas distribuições.

15. Suponha que se saiba que o número de itens produzidos por uma fábrica durante uma semana seja uma variável aleatória com média 50.
   (a) O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana seja superior a 75 itens?
   (b) Se é sabido que a variância da produção de uma semana é igual a 25, então o que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana esteja entre 40 e 60?

16. Seja $X \sim Unif(0, 10)$. Calcule $P(|X - EX| > 4)$ usando Chebyshev e o valor exato.