Análise Combinatória

O princípio básico da contagem

Considere dois experimentos. Se o experimento 1 pode gerar m resultados possíveis e se, para cada resultado do experimento 1, houver n resultados possíveis para o experimento 2, então os dois experimentos possuem conjuntamente mn diferentes resultados possíveis.

De quantas maneiras é possível ordenar n elementos?

Número de *permutações* de n elementos distintos é

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$$

Permutação com ambiguidades

Considere uma população com n elementos de r tipos diferentes, com $n_1, n_2, \dots n_r$ elementos cada. Suponha que elementos de mesmo tipo sejam indistinguíveis. Nesse caso, o número de possíveis de permutações diferente será

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Número total de **subconjuntos** de k elementos de uma conjunto com n elementos é dado por

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

1. Determine de quantas maneiras 3 meninos e 3 meninas podem sentar-se

(a) livremente em uma fileira?

(b) de formas que meninos e meninas sentem juntos?

(c) de forma que meninos sentem juntos?

(d) alternando meninos e meninas?

2. Oito atletas disputam uma corrida. De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze se só nos interessa saber se o atleta sobe ao pódio ou não, não importando a medalha que ele recebe.

Probabilidade

O conjunto (se conhecido) de todo resultados possíveis é dito *espaço amostral*. Qualquer subconjunto de Ω é dito um *evento*.

$A \cup B$: quando ocorre **pelo menos** um dos eventos, ou seja, todos os elementos que pertencem a A **ou** pertencem a B

$A \cap B$: quando **ambos** eventos ocorrem, isto é, todos os elementos que pertencem a A **e** a B **simultaneamente**

A^c: quando A não acontece, isto é, todos os elementos de Ω que **não pertencem** a A

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω.

Dizemos que A *implica* B (ou B *contém* A), e denotamos $A \subset B$, se todo elemento de A pertence a B. Isto é, a ocorrência de A implica a ocorrência de B.

Dizemos que A e B são *iguais*, se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Dizemos que A e B são *mutuamente excludentes* se não podem ocorrer simultâneamente. Isto é, quando $A \cap B = \emptyset$

Lema 1

Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

i. $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
ii. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
iii. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
iv. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
v. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
vi. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω. Expresse em notação os seguintes eventos:

(a) A e B ocorrem, mas C não.

(b) Nenhum evento ocorre.

(c) No máximo dois eventos ocorrem.

(d) A ocorre, mas no máximo mais um evento ocorre.

(e) A ocorrência de A implica a de B e C.

(f) A ocorrência de A implica a de B ou C.

(g) Os três eventos ocorrem e o complementar de A também.

Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço amostral. Uma *probabilidade* é uma função definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

iii. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para qualquer evento $A \in \mathbf{F}$.

iv. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$, se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

v. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

vi. Dados $A_1, \ldots, A_n$ eventos **quaisquer** de $\mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

4. Mostre que

(a) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$,

(b) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

5. Uma escola de ensino médio quer avaliar o conhecimento em assuntos gerais dos seus alunos. Para isso, elaborou um quiz e premiará os 3 estudantes com as maiores notas no quiz. Suponha que 23 alunos primeiro ano, 24 do segundo ano e 12 do terceiro ano tenham participado com concurso e determine

(a) a probabilidade de um aluno de cada ano ser premiado;

(b) a probabilidade dos 3 premiados serem do primeiro ano;

(c) a probabilidade de nenhum estudante do primeiro ano ser premiado.

O *limite superior* de uma sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ é definido por

$$\limsup A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

O *limite inferior* de uma sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ é definido por

$$\limsup A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

A sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ tem *limite* se

$$\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \lim A_n$$

Probabilidade Condicional e Independência

Probabilidade Condicional

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos tal que $P(B) > 0$. Então a *probabilidade de A dado B*, denotada por $P(A \mid B)$, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Regra da multiplicação

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B \in F$ eventos.

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Fórmula das Probabilidades Totais Geral

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $B_1, \ldots B_n \in \mathcal{F}$ uma **partição** de Ω (eventos mutuamente exclusivos cuja união é Ω). Para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)$$

Fórmula de Bayes

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

Fórmula de Bayes Geral

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ uma partição de Ω e $B \in \mathcal{F}$ um evento qualquer

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

Proposição

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e E e F eventos de Ω tal que $P(F) > 0$

(a) Se E e F são independentes, então E e F^c também o são.

(b) $P(\cdot \mid F)$ é uma probabilidade.

Eventos independentes (Geral)

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ eventos quaisquer, dizemos que $A_1, \cdots, A_n$ *são independentes* se

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

6. Maria usa o metrô ou a bicicleta para ir ao trabalho. Nos dias que chove Maria usa o metrô, caso contrário vai de bicicleta. Quando vai de metrô, Maria chega atrasada em 40% das vezes, e quando vai de bicicleta atrasa-se 25% das vezes. Sabendo a probabilidade de chover em SP amanhã é de 40%, determine

(a) a probabilidade de Maria chegar atrasada amanhã.

(b) a probabilidade de ter chovido em SP, sabendo que Maria chegou atrasada.

7. Um equipamento de detecção de incêndios é composto por três sistemas A, B e C. O sistema inteiro falha na detecção de incêndios quando os três sistemas falham simultaneamente. Suponha que a probabilidade do sistema A falhar é de 0.8, do sistema B falhar se o sistema A falhou é de 0.6 e sistema inteiro falhar é de 0.192. Determine

(a) a probabildade do sistema C falhar, se os sistemas A e B falharam;

(b) a probabildade do sistema C falhar se os três sistemas forem independentes.

Variáveis aleatórias discretas

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte

Variável aleatória

Uma função definida em um espaço amostral é dita uma *variável aleatória*.

Variável aleatória discreta

Uma v.a. é dita *discreta* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou infinito enumerável

Variável aleatória contínua

Uma v.a. é dita *contínua* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não-enumerável.

Variável aleatória

Uma função definida em um espaço amostral é dita uma *variável aleatória*.

Variável aleatória discreta

Uma v.a. é dita *discreta* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou infinito enumerável

ex.: número de caras, o maior número sorteado, número de lançamentos até a primeira cara

Variável aleatória contínua

Uma v.a. é dita *contínua* quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não-enumerável.

ex.: tempo de validade de um óleo lubrificante

Caracterização de v.a. discreta

Função de probabilidade

Seja X uma v.a. discreta assumindo valores em $x_1, x_2 \ldots$. A função $p : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida, para qualquer $i = 1, 2, \ldots$, por

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

é dita a *função de probabilidade* de X.

No Ex. 1 (num. de caras em 3 lançamentos) tínhamos

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Propriedades da função de probabilidade

Se p é a função de probabilidade de uma v.a. X tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$, então

(i) $0 \leq p(x_i) \leq 1$ para qualquer $i = 1, 2, \ldots$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Função de distribuição

Seja X uma v.a., a função F dada por

$$F(x) = P(x \leq X), \quad -\infty < x < \infty$$

Proposição

Uma função de distribuição de uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfaz

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(ii) F é contínua a direita

(iii) F é não decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$

Valor médio ou esperança matemática: caso discreto

Valor médio ou esperança matemática

Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$, chamamos *valor médio* ou *esperança matemática* de X o valor

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Note que EX pode ser igual a ∞

Propriedades do valor médio

Sejam X e Y v.a.'s discretas de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$, respectivamente, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Então vale que:

(i) $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p(x_i)$.

(ii) $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.

Variância de uma variável aleatória

Variância

Dada a v.a. X discreta com $EX = \mu$, então a variância de X é definida por

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (EX)^2$$

Desvio padrão

O valor $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$ é dito o *desvio padrão* de X.

Propriedades da Variância

Seja X uma v.a. com $EX < \infty$ e a e b números reais quaisquer

(i) Se $X = a$ com probabilidade 1. Isto é, se X é constante e igual a a, $Var(X) = 0$.

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

8. Humberto deseja aumentar a capacidade de memória RAM do seu computador. Para isso ele vai a uma loja para comprar três pentes de memória adicionais. Na loja há 12 pentes, e dentre eles há quatro defeituosos. Suponha que os três pentes novos são escolhidos ao acaso e que X denote o número de pentes que funcionam perfeitamente. Determine

(a) a função de probabilidade de X;

(b) a função de distribuição acumulada de X;

9. Se X é tal que

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1),$$

determine $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$.

10. Determine $Var(X)$ se

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b).$$

Bernoulli

Suponha que um experimento cujo resultado possa ser classificado como um **sucesso** ou um **fracasso**. Defina

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o resultado for um sucesso} \\ 0, & \text{se o resultado for um fracasso.} \end{cases}$$

Como X só assume valores 0 e 1, sua função de probabilidade é dada por

$$p(1) = P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

Notação: $X \sim Be(p)$

Seja $X \sim Ber(p)$. A média e a Variância de X são dadas por

$$EX = p \qquad Var(X) = p(1 - p)$$

Binomial

Suponha agora que n réplicas **independentes** de um mesmo experimento do tipo sucesso/fracasso sejam realizadas, cada uma das quais com **mesma probabilidade** p de sucesso.

Defina X : o número de sucessos que ocorrem nas n tentativas.
Sua função de probabilidade é dada, para $k = 0, 1, \ldots, n$, por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Notação: $X \sim Bin(n, p)$

Se $X \sim Bin(n, p)$, então

$$EX = np \quad Var(X) = np(1 - p)$$

Geométrica

Suponha que tentativas **independentes** de um mesmo experimento do tipo **sucesso/fracasso**, cada uma delas com probabilidade de sucesso, $0 < p < 1$, sejam realizadas até que ocorra o primeiro sucesso.

Seja X o número de tentativas necessárias até o primeiro sucesso.

A função probabilidade é dada, para qualquer $k = 1, 2, \ldots$ por

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Notação:$X \sim Geo(p)$

Se $X \sim Geo(p)$, então

$$EX = \frac{1}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{1-p}{p}$$

Binomial Negativa

Suponha que tentativas **independentes** de um experimento do tipo sucesso/fracasso, com **mesma probabilidade de sucesso** p, $0 < p < 1$, sejam realizadas até que se acumule um total de r sucessos.
Se X for o número de tentativas necessárias, então

$$p(n) = P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r}\binom{1}{1} p$$

$$p(n) = P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{n-r}, \;\; n = r, r+1, \ldots$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$

Se $X \sim BN(r, p)$ então

$$EX = \frac{r}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Hipergeométrica

Considere uma urna contendo N bolas, das quais m são brancas e $N - m$ são pretas. Suponha que uma amostra de tamanho $n < N$ seja escolhida aleatoriamente e sem reposição.

Se X representa o número de bolas brancas selecionadas, então

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Uma v.a. com função de probabilidade como acima é dita uma variável aleatória *Hipergeométrica*.

Notação: $X \sim Hip(n, N, m)$

Se $X \sim Hip(N, n, m)$ então

$$EX = \frac{nm}{N} \qquad e \qquad Var(X) = \frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right]$$

Poisson

Uma variável aleatória X que assume valores $0, 1, 2, \ldots$ é dita uma *variável aleatória de Poisson* com parâmetro $\lambda > 0$ se

$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Notação: $X \sim Poi(\lambda)$

Se $X \sim Poi(\lambda)$, então

$$EX = \lambda \qquad e \qquad Var(X) = \lambda$$

Aproximação da Binomial por Poisson

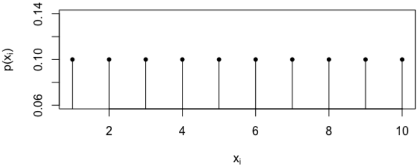
Proposição

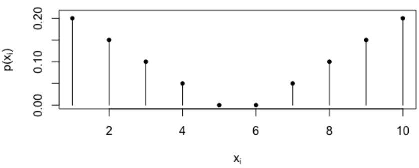
Se $X \sim Bin(n, p)$ com n grande e p pequeno (de forma que λ seja moderado) então, para qualquer $k = 1, 2, \ldots$, vale que

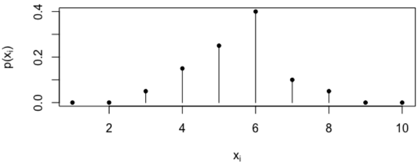
$$p(k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad com \quad \lambda = np$$

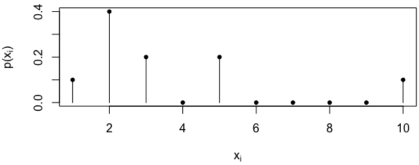
Convenção: $n > 30$ é grande e $\lambda = np < 10$ é moderado

11. Seja X uma v.a. com média 5,5. Escolha o gráfico da função de probabilidade que NÃO pode ser associado a X.









12. Qual dos experimentos abaixo pode ser representado por uma variável aleatória com distribuição Binomial?

(a) Um restaurante precisa definir um novo fornecedor de frango. Para isso, ele pede uma remessa de 15 frangos para 2 possíveis fornecedores e verifica se cada um dos frangos pesa mais que 1,5kg. O critério de escolha será o fornecedor que enviar o maior número de frangos com peso acima de 1,5kg.

(b) 20 alunos de uma turma de Probabilidade são entrevistados sobre o hábito de ler. Registra-se como leitor ativo aqueles que costumam ler pelo menos 3 livros por ano.

(c) O tempo de vida de um smartphone.

(d) Um corredor amador treina para fazer sua primeira corrida de 10km. Para ter uma ideia de seu preparo físico, ele registra durante um mês se seu tempo de corrida está abaixo ou acima de 1h.

13. Sabe-se que quando uma pessoa é exposta a uma determinada bactéria presente na água ela fica doente com probabilidade 0.32. Se um restaurante estiver usando água contaminada pela bactéria quantas pessoas em média ficarão doentes se o restaurante atender 38 clientes em uma noite?

14. A probabilidade de ocorrência de turbulência em um determinado percurso a ser feito por uma aeronave é de 0,4 em um circuito diário. Seja X o número de vôos com turbulência em uma semana. Qual a probabilidade de que:

(a) Não haja turbulência em nenhum dos sete voos?

(b) Haja turbulência em pelo menos três deles?

(c) X esteja entre $EX - DP(X)$ e $EX + DP(X)$?

(d) Num total de cinco semanas, haja turbulência em duas por pelo menos 3 dias?

15. O engenheiro responsável pelo controle da qualidade de uma linha de produção examina as peças fabricadas. Se achar uma defeituosa, ele para a produção para detectar e corrigir as causas do defeito. Se após examinar 10 peças verificar que nenhuma é defeituosa, ele mantém a linha funcionando. Se a probabilidade de se achar uma peça defeituosa em cada inspeção é 0,05, qual é a probabilidade de:

(a) a produção ser parada antes que a quinta peça seja examinada?

(b) a produção não precisar ser parada?

16. Se você compra um bilhete de loteria que concorre em 50 sorteios, em cada um dos quais sua chance de ganhar é de $\lambda = 1/100$. Qual é a probabilidade de que você ganhe um prêmio

(a) pelo menos uma vez?

(b) exatamente uma vez?

(c) pelo menos duas vezes?