# Lista 5

1) $X \sim \text{Unif}(-1,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1/2 \, dx = \frac{x}{2}\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

Então teremos:

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Note que: $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

2) X: nº de peças defeituosas no lote
Y: preço do lote

$$\Rightarrow X \sim Bin(20; 0,05)$$

$$Y = \begin{cases} 50, & \text{se } X \geq 2 \\ 60, & \text{se } X = 1 \\ 70, & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

$$P_Y(50) = P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - (0,95)^{20} - 20.(0,05).(0,95)^{19}$$
$$= 1 - 0,358 - 0,378 = 0,264$$

$$P_Y(60) = P(X=1) = 20(0,05)(0,95)^{19} = 0,378$$

$$P_Y(70) = P(X=0) = 0,95^{20} = 0,358$$

Então teremos:

$$E(Y) = 70.0,358 + 60.0,378 + 50.0,264$$
$$= 60,94$$

Como a proposta original era R$ 60,00 e o esperado é maior, portanto, é um bom negócio para o vendedor

3) X: tempo de estadia
Y: custo de uma estadia
Z: custo da estadia - multa

$X \sim Exp(1/5)$ $\quad Y = 30X$

$$Z = \begin{cases} 30X & \text{si } X \leq 8 \\ 30X - 100 & \text{si } X > 8 \end{cases}$$

a) $P(Y < 200) = P(30X < 200) = P(X < 20/3)$
$= 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{3}}$
$= 1 - e^{-4/3} = 0{,}736$

b) $E(Z) = \int_0^8 30x f_x(x)\,dx + \int_8^{+\infty} 30x - 100 \; f_x(x)\,dx$

$= 30 \int_0^8 x f(x)\,dx + 30 \int_8^{\infty} x f(x)\,dx - 100 \int_8^{+\infty} f(x)\,dx$

$= 30\,E(X) - 100 \cdot P(X > 8) = 30 \cdot 5 - 100\, e^{-8/5} = 150 - 20{,}19$
$= 129{,}81$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & C.C \end{cases}$

Para y tenemos:

$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{1} \Rightarrow e^{-1} < y < e^{1}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-x} \leq y) = P(-X \leq \ln y)$
$= P(X \geq -\ln y)$
$= 1 - F_X(-\ln y)$

Então teremos:

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial(1-F_X(-\ln y))}{\partial y}$$

$$= -F_X(-\ln y)$$

$$= -f_X(-\ln y) \cdot \frac{\partial(-\ln y)}{\partial y}$$

$$= -\frac{3(\ln(y))^2}{2} \cdot -\frac{1}{y} = \frac{3(\ln(y))^2}{2y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3(\ln y)^2}{2y} & e^{-1} \leq y \leq e^{1} \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

5) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y)$

$$= F_X(\ln y)$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(\ln y)}{\partial y} = f_X(\ln y) \cdot \frac{\partial \ln y}{\partial y}$$

$$= 1/2 \cdot 1/y = 1/2y$$

Note que $1 < x < 3 \Rightarrow e^1 < e^x < e^3 \Rightarrow e^1 < y < e^3$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & e^1 < y < e^3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

6) • Se $0 < y \leq 2$

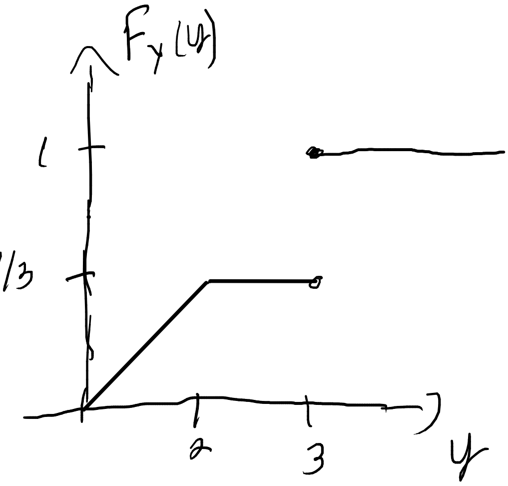
$F_Y(y) = P(X \leq y) = F_X(y) = \int_0^y 1/3 \, dx = y/3$

• Se $2 < y \leq 3$

$F_Y(y) = P(X \leq 2) = 1/3$

• Se $y > 3$

$F_Y(y) = 1$




**Ex 8.** Um automóvel viaja sempre equipado com dois pneus novos nas rodas dianteiras e dois pneus recauchutados nas rodas traseiras. Sabe-se que os pneus novos dessa marca costumam furar em média uma vez a cada 6.000 km rodados, enquanto que os pneus recauchutados furam, em média, uma vez a cada 3 .000 km. Admita que em ambos casos os pneus furem seguindo um distribuição Poisson. Determine a prob de que em uma viagem de 2000 km:

(a) o pneu traseiro direito fure uma única vez;

(b) o pneu dianteiro esquerdo fure uma única vez;

(c) pelo menos um pneu fure no percurso

X: nº de pneus dianteiros furados em 2000 km
Y: " " " Traseiros " " "

$P_{Dian} = 1/6000 \qquad np = 1/3$

$P_{Tras} = 1/3000 \qquad np = 2/3$

Então teremos: $X \sim Pois(1/3)$
$Y \sim Pois(2/3)$

a) $P(X=1) = \dfrac{e^{-1/3}\,\frac{1}{3}^{1}}{1!} = 0,2386$

b) $P(Y=1) = \dfrac{e^{-2/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}}{1!} = 0,3419$

c) $Z$: nº de pneus furados em 2000 km

$Z = 2X + 2Y \overset{(*)}{\sim} Poi\left(2\cdot 1/3 + 2\cdot 2/3\right)$

$2X$: dois dom    $2Y$: dois tra

(*) soma de poisson indep.

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) = 1 - e^{-(2\cdot 1/3 + 2\cdot 2/3)}$

$1 - e^{-2} = 0,865$

a) $X \in \{0,1,2\}$

$Y \in \{0,1\}$

Vamos fazer uma tabela analisando os possíveis resultados

| lançamentos | Prob | X | Y |
|---|---|---|---|
| (cara, cara) | 1/4 | 0 | 1 |
| (cara, coroa) | 1/4 | 1 | 0 |
| (coroa, cara) | 1/4 | 1 | 0 |
| (coroa, coroa) | 1/4 | 2 | 1 |

Portanto, fazendo a conjunta, teremos:

| X\Y | 0 | 1 | $P_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| 2 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| $P_Y(y)$ | 1/2 | 1/2 | 1 |

A acumulada será

$$F_X(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ou } y<0 \\ 0, & 0\le x<1 \text{ e } 0\le y\le 1 \\ 1/4, & 0\le x<1 \text{ e } y\ge 1 \\ 1/2, & (1\le x<2 \text{ e } 0\le y<1) \text{ ou } (x\ge 2 \text{ e } 0\le y<1) \\ 3/4, & 1\le x\le 2 \text{ e } y\ge 1 \\ 1, & x\ge 2 \text{ e } y\ge 2 \end{cases}$$

(6) a) $f_1(x,y) = \dfrac{\partial^2 \left(\frac{x}{5}\left(1-e^{-y}\right)\right)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial \left(x/5 \cdot e^{-y}\right)}{\partial x}$

$$= \frac{e^{-y}}{5}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\partial^2 (1-e^{-y})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial e^{-y}}{\partial x} = 0$$

Portanto a f.d.p conjunta será

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}/5 & \text{se } 0\le x<5 \text{ e } y\ge 0 \\ 0 & \text{se } x\ge 5 \text{ e } y\ge 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

b) $$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-y/5} dy = \frac{-e^{-y/5}}{5} \Big|_{y=0}^{y=\infty} = 1/5$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/5 & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^5 \frac{e^{-y/5}}{5} dx = \frac{e^{-y/5}}{5} \cdot x \Big|_0^5 = e^{-y/5}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y/5} & y \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

11) $$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1\int_0^1 k\, x y^2 z \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 k y^2 z \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \, dy\, dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{k y^2 z}{2} dy\, dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{k y^3 z}{6}\Big|_0^1 dz = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{kz}{6} dz = \frac{kz^2}{12}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{k}{6}$$

Então teremos $\boxed{k = 6}$

Assim, calculando $F_X(x)$

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 6xy^2z \, dy \, dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2y^3 z \Big|_0^1 dz = \int_0^{\sqrt{2}} 2xz \, dz = xz^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2x$$

$$\therefore \; f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

(2) $$f(x,y) = \begin{cases} xy^{x-1}/3, & \text{se} \quad x = 1,2,3 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Para $x < 1$ e $y \geq 0$ teremos: $F(a,b) = 0$ //

Para $1 \leq x < 2$ e $0 \leq y < 1$ teremos:

$$F(a,b) = \int_0^b 1 \cdot y^{1-1}/3 \, dy = \int_0^b \frac{1}{3} dy = \frac{b}{3} \;//$$

Para $2 \leq x < 3$ e $0 \leq y < 1$ teremos:

$$F(a,b) = \frac{b}{3} + \int_0^b \frac{2y}{3} dy = \frac{b}{3} + \frac{b^2}{3} \;//$$

Para $x \geq 3$ e $0 \leq y < 1$ teremos:

$$F(a,b) = \frac{b}{3} + \frac{b^2}{3} + \int_0^b \frac{3y^2}{3} dy = \frac{b}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^3}{3} \;//$$

Para $1 \leq x < 2$ e $y \geq 1$

$$F(a,b) = \int_0^1 1 \cdot y^{x-1}/3 \, dy = \int_0^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}$$

Para $2 \leq x < 3$ e $y \geq 1$ teremos:

$$F(a,b) = \frac{1}{3} + \int_0 \frac{2y}{3} dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2/3$$

Para $x \geq 3$ e $y \geq 1$ teremos:

$$F(a,b) = 2/3 + \int_0^1 \frac{3y^2}{3} dy = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

(3) Vamos fazer $x=1$ e $y=2$

$$P(1,2) = 0 \neq 1/4 \cdot 5/16 = P_X(1), P_Y(2)$$

$\therefore$ X e Y não são independentes

(4) $f_X(x) = \int_x^1 8xy \, dy = 4x^2y \Big|_x^1 = 4x^2 - 4x^3$

$f_Y(y) = \int_0^y 8xy \, dx = 4xy^2 \Big|_0^y = 4y^3$

Como $f_X(x) f_Y(y) = 4y^3(4x^2 - 4x^3) \neq 8xy = f(x,y)$, então não são independentes

15) Como teremos $Y \in [1,2]$, então:

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{se} \quad y < 1$$
$$F_Y(y) = 1 \quad \text{se} \quad y \geq 2$$

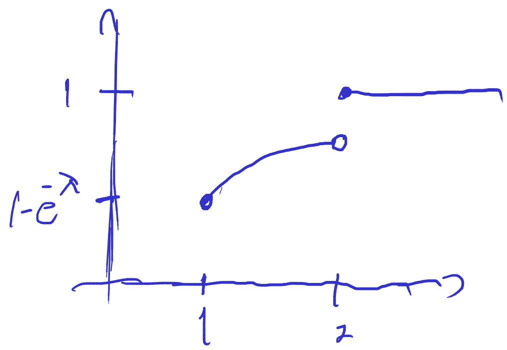
Para $F_Y(1)$ teremos

$$F_Y(1) = P(Y \leq 1) = P(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}$$

Se $1 \leq y < 2$ teremos

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Assim, teremos o seguinte gráfico



18) Fazendo então o método jacobiano teremos:

(i) $z = x \quad w = x/y \Rightarrow g_1(x,y) = x \quad g_2(x,y) = x/y$

$z = x \quad w = x/y \Rightarrow x = z \quad y = z/w \Rightarrow h_1(z,w) = z \quad h_2(z,w) = z/w$

(ii) $g_1(x,y) = x \quad , \quad g_2(x,y) = x/y$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2} \neq 0$$

Então teremos:

$$J(h_1(z,w), h_2(z,w)) = \frac{-z}{(z/w)^2} = -\frac{w^2}{z}$$

Por fim, teremos

$$f_{z,w}(z,w) = f_{x,y}(h_1(z,w), h_2(z,w)) \left| J(h_1(z,w), h_2(z,w)) \right|^{-1}$$

$$\overset{\text{indep}}{=} f_x(h_1(z,w)) \, f_y(h_2(z,w)) \cdot \frac{z}{w^2}$$

$$= \lambda e^{-\lambda z} \cdot \lambda e^{-\lambda \frac{z}{w}} \cdot z/w^2$$

$$= \lambda^2 \cdot \frac{z}{w^2} \; e^{-\lambda z \left(1 + \frac{1}{w}\right)}$$

19) a) Pelo método Jacobiano teremos:

(i) $U = x+y \Rightarrow y = u(1-v) = h_2(u,v)$

$V = \frac{x}{u} \Rightarrow x = u.v = h_1(u,v)$

(ii) $g_1(x,y) = x+y$ e $g_2(x,y) = \frac{x}{x+y}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y}$$

$$J(h_1(u,v), h_2(u,v)) = -\frac{1}{uv + u(1-v)} = \frac{1}{u} \,//$$

Então teremos

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \left| J(h_1(u,v), h_2(u,v)) \right|^{-1}$$

$$\overset{\text{indep}}{=} f_X(h_1(u,v))\, f_Y(h_2(u,v)) \cdot u$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot (uv)^{a-1} e^{-\lambda uv} \cdot \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot (u(1-v))^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda(u(1-v))} \cdot u$$

b) Manipulando a função encontrada no item anterior, teremos:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} \cdot (uv)^{a-1} e^{-\lambda uv} \cdot \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} \cdot (u(1-v))^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda(u(1-v))} \cdot u$$

$$= \frac{\lambda^{a+\beta} \cdot u^{a+\beta-1} \cdot e^{-\lambda u} \cdot v^{a-1} (1-v)^{\beta-1}}{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a+\beta)}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^{a+\beta}}{\Gamma(a+\beta)} u^{a+\beta-1} e^{-\lambda u}}_{Gamma(a+\beta,\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \cdot v^{a-1} \cdot (1-v)^{\beta-1}}_{Beta(a,\beta)}$$

$$= f_U(u) \cdot f_V(v)$$

20) Pelo método Jacobiano geral, teremos

(i)

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow Y_1 = X_1 + X_1 - Y_2 + X_1 - Y_3 \Rightarrow X_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} = h_1(y_1, y_2, y_3)$$

$$Y_2 = X_1 - X_2 \Rightarrow X_2 = X_1 - Y_2 = (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)/3 = h_2(Y_1, Y_2, Y_3)$$

$$Y_3 = X_1 - X_3 \Rightarrow X_3 = X_1 - Y_3 = (Y_1 + Y_2 - 2Y_3)/3 = h_3(Y_1, Y_2, Y_3)$$

(ii)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Assim teremos

$$f_{Y_1Y_2Y_3}(y_1,y_2,y_3) = f_{X_1X_2X_3}(h_1(y_1,y_2,y_3), h_2(y_1,y_2,y_3), h_3(y_1,y_2,y_3))\,|J|^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} f_{X_1X_2X_3}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{y_1-2y_2+y_3}{3}, \frac{y_1+y_2-2y_3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\left[\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1-2y_2+y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2-2y_3}{3}\right)^2\right]/2\right.$$