MAE 221 - Probabilidade I - 2022/01

Aline Duarte - **Prova 3**

Nome: ____

Número USP: ____________________ Data ____________

Exercício 1. [2 pontos] Sejam X e Y variáveis aleatórias com fdp conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 20x^3, & 0 \leq x < y \leq 1. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Determine

(a) a função densidade marginal de Y;

(b) a função densidade condicional de X dado $Y = y$.

(c) $E[X \mid Y = 1/2]$

Exercício 2. [2 pontos] Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme em $(0,1)$. Defina $Z = \ln(XY)$ e

(a) determine a função geradora de momentos de Z;

(b) use a fgm encontrada em (a) para calcular o valor esperado de Z.

Exercício 3. [2 ponto] Sejam X e Y variáveis aleatórias independes e com f.d.a. dadas por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 3 \\ 3/4 & 3 < x < 4 \\ 3/4 + \frac{x-4}{4}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2x^2}{25}, & 0 \leq y < 2,5 \\ 1 - \frac{2(x-5)^2}{25}, & 2,5 \leq y < 5 \\ 1, & y \geq 5. \end{cases}$$

Defina $W = \max(X,Y)$ e $Z = \min(X,Y)$ e determine a fda de W e Z.

Exercício 4. [2 pontos] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com $X_n \sim \text{Exp}(n)$. Defina $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que $Y_n \mid X_n = x \sim \text{Unif}(0,x)$, isto é,

$$f_{Y_n|X_n}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(a) Determine $E(Y_n), n \geq 1$.

(b) Mostre que $Y_n \to 0$ em probabilidade.

(c) Enuncie a lei fraca dos grandes números para a sequência $X_n, n \geq 1$.

Exercício 5. [2 ponto] Suponha que um guincho levante até 3 toneladas sem tombar. Um conjunto de 10 vigas devem ser içadas cada uma com peso médio de 270kg e desvio padrão de 50kg. Determine

(a) a probabilidade aproximada do guincho tombar.

(b) uma cota para a probabilidade da carga total das vigas estar entre 2.900 e 2.500kg.