# MAE 221 - Probabilidade - 2022/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 7

**Ex 1.** Considere as v.a.'s $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(1,1)$. Suponha que $E(XY) = 1/2$.

(a) X e Y são correlacionadas?

(b) Determine a f.d.p. conjunta de $(X,Y)$.

(c) Determine a f.d.p. de $f_{X|Y}$ e $f_{Y|X}$. Você conhece essas distribuições?

**Ex 2.** Sejam $X$ e $Y$ v.a. com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y \leq x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Verifique que $f$ é f.d.p e determine

(a) As f.d.p marginais de $X$ e $Y$.

(b) A função densidade de Y dado que $X = x$.

(c) A função densidade de X dado que $Y = y$.

(d) Determine $E(Y \mid X = 2)$

**Ex 3.** * Sejam $X$ e $Y$ v.a. com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Verifique que $f$ é f.d.p e determine

(a) As f.d.p marginais de $X$ e $Y$.

(b) A função densidade de Y dado que $X = x$.

(c) A função densidade de X dado que $Y = y$.

(d) Determine $E(X \mid Y = 1/3)$

**Ex 4.** Sejam $X$ e $Y$ v.a. com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0 \leq x < y < \infty \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Verifique que $f$ é f.d.p e determine

(a) As f.d.p marginais de $X$ e $Y$.

(b) A função densidade de Y dado que $X = x$.

(c) A função densidade de X dado que $Y = y$.

(d) Determine $E(Y \mid X = 1)$.

(e) Determine $E(X \mid Y = 5)$

**Ex 5.** Sejam $X_1, X_2, X_3$ v.a. independentes e com distribuição $Exp(1)$. Determine a variância de $Y = (X_1 + X_2)X_3$

**Ex 6.** Uma apostadora joga simultaneamente uma moeda e um dado honestos. Se a moeda der cara, ela então ganha o dobro do valor que aparecer no dado; se der coroa, ela ganha a metade. Determine seus ganhos esperados.

**Ex 7.** Se $X$ e $Y$ são v.a. independentes e identicamente distribuídas com média $\mu$ e variância $\sigma^2$, determine $E[(X-Y)^2]$.

**Ex 8.** Se $EX = 1$ e $Var(X) = 5$, determine $E[(2+X)^2]$ e $Var(4+3X)$.

**Ex 9.** Um dado é rolado duas vezes. Suponha que $X$ seja igual à soma das faces e que $Y$ seja a diferença entre a primeira face e segunda. Determine $Cov(X,Y)$.

**Ex 10.** Um professor sabe que a nota de um estudante na prova final é uma variável aleatória com média 75.

(a) Forneça um limite superior para a probabilidade de que a nota de um estudante exceda 85.

(b) Suponha, além disso, que o professor saiba que a variância da nota de um estudante é igual a 25. O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a nota de um estudante esteja entre 65 e 85?

**Ex 11.** Seja $X$ uma v.a. qualquer e $g$ uma função não negativa tal que $E[g(X)] < \infty$. Se $g(x) \geq b > 0$ sempre que $X \geq a$, mostre que $P(X \geq a) \leq E[g(X)]/b$.

**Ex 12.** * Sejam $a$ e $b$ números reais. Mostre que se $P(a \leq X \leq b) = 1$ então $a \leq EX \leq b$

**Ex 13.** Determine a covariância das v.a $X$ e $Y$ cuja f.d.p conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & se\ 0 < y \leq x < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

**Ex 14.** * Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes, com mesma distribuição e com média e variância finitas. Defina $\bar{X} = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ e mostre que $Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0$, para qualquer $i = 1, \ldots, n$.

**Ex 15.** Um dado honesto é jogado sucessivamente. Suponha que $X$ e $Y$ representem, respectivamente, o número de jogadas necessárias para se obter um 6 e um 5. Determine

(a) $EX$

(b) $E(X \mid Y = 1)$

(c) $E(X \mid Y = 5)$

**Ex 16.** Um prisioneiro está em uma cela com 3 portas. A primeira porta leva a um túnel que faz com que ele volte à sua cela após dois dias de viagem. A segunda leva a um túnel que faz com que ele volte à sua cela após 4 dias de viagem. A terceira porta o leva à liberdade após um dia de viagem. Se se supõe que o prisioneiro sempre selecione as portas 1,2 e 3 com probabilidades $0,5, 0,3$ e $0,2$, qual é o número esperado de dias até que ele alcance a liberdade?

**Ex 17.** Lâmpadas do tipo $i$ funcionam uma quantidade de tempo aleatória com média $\mu_i$; e desvio padrão $\sigma_1, i = 1,2$. Suponha que uma lâmpada do tipo 1 é aleatoriamente escolhida de uma cesta $p$ (e do tipo 2 com probabilidade 1 -p). Seja $X$ a v.a. que represente o tempo de vida desta lâmpada. Determine (Dica: use o condicionamento no tipo da lâmpada)

(a) $EX$ ;

(b) $Var(X)$.

**Ex 18.** * O número de tempestades de inverno em um ano bom é uma variável aleatória de Poisson com média 3, enquanto o número em um ano ruim é uma variável de Poisson com média 5. Se o próximo ano tem probabilidades 0,4 de ser um ano bom e 0,6 de ser um ano ruim, determine o valor esperado e a variância do número de tempestades no próximo ano.

**Ex 19.** O número de acidentes que uma pessoa sofre em um ano é uma variável aleatória de Poisson com média $\lambda$. Entretanto, suponha que o valor de $\lambda$ mude de pessoa para pessoa, sendo igual a 2 em 60% da população e 3 nos 40% restantes. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela sofra

(a) 0 acidentes;

(b) exatamente 3 acidentes em um ano?

(c) Qual é a probabilidade condicional de que ela sofra 3 acidentes em certo ano, dado que não tenha sofrido acidentes no ano anterior?

**Ex 20.** * Admita que o processo (aleatório) de chegada dos clientes que entram em uma loja segue um modelo de Poisson com média de 20 clientes por hora. A probabilidade de que uma dessas pessoas faça uma compra é 0,75, e é a mesma para qualquer cliente que entra. Determine valor esperado e o desvio padrão do número de clientes que realizam compras no período de uma hora. Dica: use o condicionamento no número de pessoas que chegam.

**Ex 21.** Suponha que, a cada ano na época de reprodução, cada tartaruga marinha coloque uma quantidades de ovos que segue uma distribuição Poisson de média 120. Sabe-se que cada ovo tem 3/4 de chance de vir a eclodir e gerar uma nova tartaruga. Determine a número esperado de descendentes por ano de uma tartaruga marinha.