MAE 221 - Probabilidade - 2021/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 9

Ex 1. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes tais que $X_n \sim Exp(n), n \geq 1$. Mostre que Y_n converge em probabilidade para 0.

Ex 2. Seja X uma v.a. qualquer e defina, para todo $n \geq 1$, $X_n = X - Y_n$, onde $EY_n = 1/n$ e $Var(Y_n) = \sigma^2/n < \infty$. Mostre que $X_n \to X$ em probabilidade. Dica: use a desigualdade triangular em $|(Y_n - EY_n) + EY_n|$

Ex 3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes e tais que $P(X_n = 1/n) = 1/2 = 1 - P(X_n = -1/n), n = 1, 2, \ldots$. Verifique que $X_n \to 0$ quase certamente. Dica: use o lema de Borel-Cantelli.

Ex 4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes com distribuição uniforme em $(0, 1)$. Defina $Y_n = \min\{X_1 \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$, e mostre que

(a) $X_n \to 0$ em distribuição;

(b) $X_n \to 0$ em probabilidade;

(c) $X_n \to 0$ quase certamente..

Ex 5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes com distribuição Poisson parâmetro 1 e defina $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(a) Use a desigualdade de Markov para obter um limite superior para $P(S_{20} > 15)$.

(b) Use o teorema do limite central para obter uma aproximação para $P(S_{20} > 15)$.

Ex 6. Cinquenta números são arredondados para o inteiro mais próximo e somados. Se os erros de arredondamento individuais são uniformemente distribuídos ao longo de (-0,5,5), obtenha uma aproximação para a probabilidade de que a soma resultante difira da soma exata em mais de 3.

Ex 7. Um dado é jogado continuamente até que a soma total das jogadas exceda 300. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que pelo menos 80 jogadas sejam necessárias.

Ex 8. Uma pessoa possui 100 lâmpadas cujos tempos de vida são exponenciais independentes com média de 5 horas. Se as lâmpadas são usadas uma de cada vez, sendo a lâmpada queimada imediatamente substituída por uma nova, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que ainda exista uma lâmpada funcionando após 525 horas

Ex 9. Se X é uma variável aleatória gama com parâmetros $(n, 1)$, determine o valor mínimo de n para que

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 1\right| > 0,01\right) < 0,01?$$