MAE 0221 - Probabilidade I - 2022/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 4 - Vetores aleatórios

Ex 1. Suponha que o erro X de uma medição pode variar uniformemente entre -1 e 1. Determine a função de densidade do erro quadrático $Y = X^2$.

Ex 2. Um certo tipo de componente é vendido em lotes de 1.000 itens. O preço de venda do lote é usualmente de R$ 60,00. Um determinado comprador propõe ao vendedor extrair de cada lote uma amostra com 20 itens; se não houver entre eles nenhum defeituoso, ele paga R$70,00 pelo lote; se houver exatamente 1 item defeituoso, ele paga R$ 60,00 pelo lote; se houver 2 ou mais itens defeituosos, ele paga R$ 50,00. Se o vendedor sabe que em geral cerca de 5% desses itens são defeituosos, ele deverá aceitar ou não essa proposta?

Ex 3. Estima-se que o custo de estadia de um certo navio de carga, enquanto está parado em um porto, é da ordem de 30 mil dólares por dia. Admita que o tempo total de permanência desse navio em um determinado porto tem distribuição exponencial com média de 5 dias.

(a) Em quantos por cento das vezes o custo total de estadia é inferior a 200 mil dólares?

(b) Admita agora que quando o tempo total de permanência do navio excede 8 dias a administração do porto é obrigada a pagar ao transportador uma multa no valor de 100 mil dólares. Nessas condições, qual é em média o custo de uma visita do navio a esse porto?

Ex 4. Seja X um v.a. com f.d.p $f(x) = 3x^2/2. -1 \leq x \leq 1$. Determine a f.d.p de $Y = e^{-X}$.

Ex 5. Seja X uma v.a. com f.d.p $f(x) = 1/2, 1 < x < 3$. Determine a f.d.p de $Y = e^X$

Ex 6. Seja X uma v.a. com f.d.p $f(x) = 1/3, 0 < x < 3$. Determine e desenhe o gráfico da f.d.a de

$$Y = \begin{cases} 3, & se\ 2 < X \leq 3; \\ X, & c.\ c. \end{cases}$$

Ex 7. * Sejam X e Y v.a.'s cuja f.d.p é definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & se\ x \geq\ \ e\ y \geq 0 \\ 0 & c.\ c. \end{cases}$$

Determine a f.d.a de Z=2X+Y.

Ex 8. Um automóvel viaja sempre equipado com dois pneus novos nas rodas dianteiras e dois pneus recauchutados nas rodas traseiras. Sabe-se que os pneus novos dessa marca costumam furar em média uma vez a cada 6.000 km rodados, enquanto que os pneus recauchutados furam, em média, uma vez a cada 3 .000 km. Admita que em ambos casos os pneus furem seguindo um distribuição Poisson.

(a) o pneu traseiro direito fure uma única vez;

(b) o pneu dianteiro esquerdo fure uma única vez;

(c) pelo menos um pneu fure no percurso

Ex 9. Duas moedas honestas são lançadas de maneira independente. Considere as seguintes v.a.'s:

X: número de caras no dois lançamentos;

Y: as faces dos dois lançamentos coincidem.

Determine a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada conjunta de X e Y.

Ex 10. Sejam X e Y v.a.'s cuja função de distribuição conjunta é dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0\ ou\ y < 0; \\ \frac{x}{5}(1 - e^{-y}), & se\ 0 \leq x < 5, y \geq 0; \\ 1 - e^{-y} & se\ x \geq 5, y \geq 0. \end{cases}$$

Determine

(a) a f.d.p conjunta;

(b) a f.d.p de X e de Y;

Ex 11. Sejam X, Y e Z v.a.' cuja f.d.p conjunta é dada por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} kxy^2z & se\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2}, \\ 0 & caso\ contra'rio. \end{cases}$$

Determine o valor de k para que f seja uma f.d.p. e em seguida determine f_X.

Ex 12. Sejam X e Y v.a.'s, sendo X discreta e Y contínua. Suponha que sua a função de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & se\ x = 1,2,3\ e\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Verifique que a fda conjunta é dada por

$$F(a,b) = \begin{cases} 0, & se\ x < 1\ ou\ y < 0; \\ \frac{y}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{y+y^2}{3}, & se\ 2 \leq x < 3\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{y+y^2+y^3}{3}, & se\ x \geq 3\ e\ 0 \leq y < 1; \\ \frac{1}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ y \geq 1; \\ \frac{2}{3}, & se\ 1 \leq x < 2\ e\ y \geq 1; \\ 1, & se\ x \geq 3\ e\ y \geq 1. \end{cases}$$

Ex 13. A tabela abaixo apresenta a função de probabilidade conjunta e as marginais dos números diários de crianças com alguma alergia (X) e com pneumonia (Y), de um posto de saúde.

X | Y	0	1	2	p(x)
0	1/16	1/16	1/8	1/4
1	1/8	1/8	0	1/4
2	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	1/8	1/16	3/16
p(y)	1/4	7/16	5/16	1

Verifique se X e Y são independentes.

Ex 14. Sejam X e Y v.a.'s cuja f.d.p conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & se\ 0 < x < y < 1 \\ 0 & c.\ c. \end{cases}$$

Determine a f.d.p de X e de Y. As v.a.'s são independentes?

Ex 15. Seja $X \sim Exp(\lambda)$ e defina Y como

$$Y = \begin{cases} 1 & se\ X < 1 \\ X & se\ 1 \leq X < 2 \\ 2 & se\ X \geq 2. \end{cases}$$

Determine e desenhe o gráfico da f.d.a de Y.

Ex 16. * Dadas duas v.a.'s X e Y com função de distribuição conjunta F. Mostre que, para quaisquer $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, temos

$$P(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2)$$

Ex 17. * Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro λ. Defina $Z = X+Y$ e $W = e^X$ e mostre que Z e W são independentes.

Ex 18. Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro λ. Defina $Z = X$ e $W = X/Y$ e determine a f.d.p conjunta de Z e W.

Ex 19. Sejam X e Y são variáveis aleatórias Gama independentes com parâmetros, respectivamente, (α, λ) e (β, λ).

(a) Calcule a densidade conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

(b) Mostre que U e V são independentes, com U tendo distribuição gama com parâmetros $(\alpha+\beta, \lambda)$ e V tendo distribuição beta com parâmetros (α, β).

Ex 20. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias normais padrão independentes. Defina as v.a's $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, Y_2 = X_1 - X_2$, e $Y_3 = X_1 - X_3$, calcule a função densidade conjunta de Y_1, Y_2, Y_3