Gabarito Lista 1

1) a) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

b) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\underbrace{(n-1-(k-1))!}_{=(n-k)!}} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{1}{k!\,(n-1-k)!}\right)$$

$$= (n-1)!\left(\frac{k}{\underbrace{k\,(k-1)!}_{k!}\,(n-k)!} + \frac{n-k}{k!\,\underbrace{(n-k)\cdot(n-k-1)!}_{(n-k)!}}\right)$$

$$= (n-1)!\left(\frac{k+(n-k)}{k!\,(n-k)!}\right) = \frac{\overbrace{(n-1)!\cdot n}^{n!}}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

1c) Vamos considerar:

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$$

Pelo teorema binomial, teremos:

$$\sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} x^i = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Desenvolvendo o lado direito, teremos:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k =$$

$$= \left(\binom{m}{0} x^0 + \binom{m}{1} x^1 + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots \right) \cdot$$

$$\left(\binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots \right)$$

$$= \binom{m}{0}\binom{n}{0}x^0 + \left(\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\binom{m}{1}\right)x^1 +$$

$$\left(\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}\right)x^2 +$$

$$\left(\binom{m}{0}\binom{n}{3} + \binom{m}{1}\binom{n}{2} + \binom{m}{2}\binom{n}{1} + \binom{m}{3}\binom{n}{0}\right)x^3 + \dots$$

Por inspeção, pela formação de um padrão, concluímos que na i-ésima potencia de x teremos:

$$\sum_{l=0}^{i} \binom{m}{l}\binom{n}{i-l} x^l$$

que é exatamente um i-ésimo termo de

$$\sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} x^i \xRightarrow[\text{termo}]{\text{i-esimo}} \binom{m+n}{i} x^i$$

Logo:

$$\binom{m+n}{i} = \sum_{l=0}^{i} \binom{m}{l}\binom{n}{i-l}$$

2) Temos 4 listras e 3 cores. Para a primeira listra podemos escolher qualquer cor. Na segunda listra podemos escolher quaquer cor exceto a anterior. Na terceira listra podemos escolher qualquer cor exceto a anterior. Na ultima listra podemos escolher qualquer cor exceto a anterior. Então teremos:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ bandeiras diferentes}$$

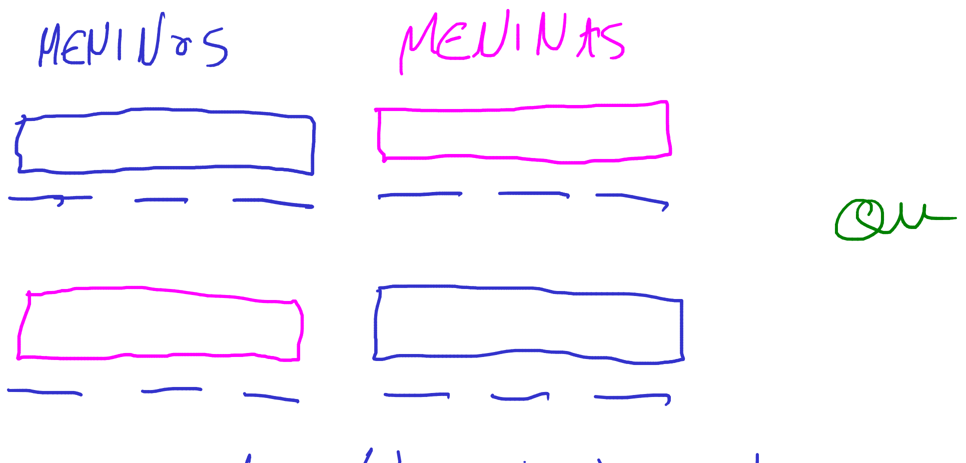
3) Temos 10 questões, e cada uma com 5 respostas possiveis. Logo, teremos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^{10}$$

4) a) Como eles podem sentar-se livremente, a 1ª pessoa terá 6 opções, a 2ª terá 5 opções e assim por diante, logo teremos:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! \text{ possibilidades}$$

b) Nesse caso teremos:



Em cada um dos bloquinhos teremos 3!

formas dos meninos ou meninas se organizarem, pois o 1º a sentar possui 3 opções, o 2º tem 2 opções e o 3º apenas 1, logo teremos:

$$3! \; 3! \cdot 2$$

c) Vamos considerar que os meninos formam um bloco, igual o item anterior, então teremos:

$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

_ _ _ _ _ _

Nesse caso vamos considerar o bloco com B, e tratando as meninas como blocos individuais (M_i) teremos:

$$\underline{B} \quad \underline{M_1} \; \underline{M_2} \; \underline{M_3}$$

Entre os blocos teremos 4! formas de organizar-se, além disso B internamente tem 3! possibilidades, logo teremos

$$4! \cdot 3! = 144$$

d) Considere que uma menina senta na ponta, teremos

$$\underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1}$$

Caso começe com um menino, teremos

$$\underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1}$$

Logo teremos $3! \, 3! \cdot 2 = 72$ possibilidades

5)

Resolução:

Para calcular quantos números de 4 dígitos existem de tal forma que pelo menos dois dígitos sejam iguais, vamos calcular a quantidade total de números com 4 dígitos, a quantidade de números com 4 dígitos que não tem nenhum dígito repetido e então subtrair a quantidade sem repetição da quantidade total, ficando assim com a quantidade de números com pelo menos uma repetição.

A quantidade total de números de 4 dígitos é dada por

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

e a quantidade total de números de 4 dígitos em que não há repetição é dada por

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

Assim, temos $9000 - 4536 = 4464$ números de 4 dígitos com pelo menos um dígito repetido.

6)

Vamos considerar 3 casos distintos:

- Caso 1: a primeira carta foi o rei de copas.

  Nesse caso, temos apenas uma opção para a primeira extração que satisfaz o enunciado, teremos 3 possíveis cartas para segunda extração e $(52 - 2 - 4) = 46$ possíveis cartas para a terceira extração. Logo, teremos $1 \times 3 \times 46$ possibilidades.

- Caso 2: a primeira carta foi a dama de copas.

  Nesse caso, temos, novamente, apenas uma possibilidade para a primeira extração, teremos 4 possibilidades para a segunda extração e $(52-2-3) = 47$ possibilidades para a terceira extração. Logo, teremos $1 \times 4 \times 47$ possibilidades.

- Caso 3: a primeira carta foi uma carta de copas, mas nem o rei nem a dama.

  Nesse caso, a primeira extração pode ser $13 - 2 = 11$ cartas, a segunda extração terá 4 opções e a terceira extração terá $52 - 2 - 4 = 46$ possibilidades. Logo, teremos $11 \times 4 \times 46$ possibilidades.

Como os três casos são aceitos pelo enunciado e são disjuntos entre si, teremos $3 \times 46 + 4 \times 47 + 11 \times 4 \times 46$ possíveis resultados diferentes.

7) Como para cada letra temos 2 simbolos, logo teremos:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

8)

Resolução:

Para o primeiro banco, teremos 5 possibilidades para os rapazes e 5 possibilidades para as moças, para o segundo banco, 4 possibilidades para cada, para o terceiro banco, 3, 2 para o quarto banco e sobrará uma moça e um rapaz no último banco. Além disso, para cada banco, temos 2 possibilidades: o rapaz senta do lado direito e a moça do lado esquerdo ou o contrário. Assim, teremos $5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2^5 = 5! \times 5! \times 2^5$ maneiras diferentes.

9)

Resolução:

Considere os seguintes dois experimentos:

- Diferentes formas que as m moças, em um bloquinho, podem se colocar em uma fila

  Teremos m moças na primeira posição do bloquinho, $m-1$ na segunda e assim por diante. Logo, serão $m!$ formas distintas.

- Diferentes formas que podemos ordenar $r+1$ bloquinhos distintos

  Na primeira posição, teremos $r+1$ candidatos, na segunda serão r e assim por diante. Logo, teremos $(r+1)!$ formas distintas.

Logo, serão $m! \times (r+1)!$ maneiras diferentes.

10) Como devemos ter ao menos 2 mulheres, logo teremos:

$$\underbrace{\binom{4}{2}\binom{7}{4}}_{\text{2 mulheres}} + \underbrace{\binom{4}{3}\binom{7}{3}}_{\text{3 mulheres}} + \underbrace{\binom{4}{4}\binom{7}{2}}_{\text{4 mulheres}}$$ modos diferentes

11)

Resolução:

Seja p o número de paletós e c o número de calças, então precisamos encontrar (p, c) tal que $p \times c \geq 24$ e $p + c$ seja o menor possível.

Temos então que os pares $(4, 6), (5, 5)$ e $(6, 4)$ todos equivalem em número de peças e também permitem ao mágico se apresentar 24 vezes em conjuntos diferentes.

12)

Resolução:

Para a primeira retirada, podemos pegar qualquer uma das 90 bolas, exceto a número 50 $\implies$ 89 possibilidades. Para segunda retirada, temos a mesma restrição, porém não podemos retirar a bola que retiramos na extração anterior $\implies$ 88 possibilidades. Para a terceira retirada, só temos uma opção, que é a bola número 50. E por fim, podemos retirar qualquer uma das bolas que tenham sobrado $\implies$ 87 possibilidades.

Assim, teremos $89 \times 88 \times 1 \times 87 = \frac{89!}{86!}$ possíveis extrações.

13)

Resolução:

Para primeira letra, precisamos de uma vogal, logo, teremos 2 opções, O ou A. Para a segunda letra, teremos todas as letras disponíveis exceto a primeira, e assim por diante. Logo, temos $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2 \times 4! = 48$ anagramas diferentes da palavra COPAS que começam por vogal.

(14)

Resolução:

Se a palavra ANAGRAMA não tivesse nenhuma letra repetida, teríamos 8! anagramas. Como a letra A aparece 4 vezes e ela é a única que se repete, teremos $\frac{8!}{4!}$ anagramas.

15)

Resolução:

Cada pessoa dará $(n-1) = 20 - 1 = 19$ apertos de mão, ou seja, o número de apertos de mão que todas as pessoas irão dar é 20×19; porém, como apertos de mão são "bidirecionais", por assim dizer, ou seja, se João dá um aperto de mão em Maria então Maria também dará um aperto de mão em João e portanto ao invés de 2 apertos de mãos teremos a metade disso (=1), então teremos $\frac{20\times19}{2} = 190$ apertos de mão.

16) Temos 52 cartas e queremos selecionar 5 sem importar a ordem. ~~Logo~~, teremos:

$$\binom{52}{5}$$ mãos possíveis

17) Em 10 questões o aluno pode escolher 6, sem importar a ordem. Logo, teremos:

$$\binom{10}{6}$$ maneiras diferentes

18) O primeiro item temos que escolher 3 de atletas, onde a ordem importa, então teremos:

$$\frac{8!}{5!}$$ maneiras

O primeiro item temos que escolher 3 de atletas, onde a ordem não importa, então teremos:

$$\binom{8}{3}$$ maneiras

(9) Pelo teorema binomial temos:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Com $y = 1$ teremos

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Foi dado pelo execicio a equação em rosa com $x = -1$, logo teremos:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (1)^{n-i} = (-1+1)^n = 0, \forall n > 0$$