V.A. CONTÍNUAS

- **Função densidade de probabilidade**: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- **Valor esperado**: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
  Propriedades do valor esperado
  (i) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.
  (ii) $E[aX + b] = aEX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$
- **Variância**: $Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (EX)^2$
- **Desvio padrão**: $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- **Função de distribuição acumulada**: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$
- $\frac{d}{da}F(a) = f(a)$
- **Variável Aleatória Uniforme em** (a, b):
  - $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & se\ a < x < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$
  - $F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se\ a < x < b \\ 1 & se\ x \geq b \end{cases}$
  - $EX = \dfrac{b+a}{2} \qquad e \qquad Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}.$
- **Variável Aleatória Exponencial**
  - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}.$
  - $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}.$
  - $EX = \frac{1}{\lambda} \qquad e \qquad Var(X) = 1/\lambda^2$
- **Variável Aleatória Normal**
  - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - $EX = \mu \qquad e \qquad Var(X) = \sigma^2.$
- **Transformações de v.a's contínuas.** Seja X uma v.a contínua com f.d.p f_X. Suponha que $g(x)$ seja uma função estritamente monotônica e derivável. Então a v.a. Y definida por $Y = g(X)$ tem f.d.p dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, & se\ y = g(x)\ para\ algum\ x \\ 0 & se\ y \neq g(x)\ para\ todo\ x \end{cases}$$

VETORES ALEATÓRIOS

- **X e Y v.a. discretas.** A fcao de prob conjunta de X e Y é dada por $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$
- **Distribuição Marginal:**
  - v.a. discretas: $p_X(x) = \sum_y p(x,y) \quad \Big(respec.\;\; p_Y(y) = \sum_x P(x,y)\Big)$
  - v.a. contínuas: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \Big(respec.\;\; f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)$
- **F.d.a conjunta:** $F(a,b) = P(X \le a, Y \le b) \quad -\infty \le a, b \le \infty$
  - v.a. discretas $F(a,b) = \sum_{k:x_k \le a} \; \sum_{\ell: y_\ell \le b} p(x_k, y_\ell)$
  - v.a. contínuas: $F(a,b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy$
- **Independência entre v.a.'s**: $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$
  - $F(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$
  - v.a. discretas: $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \;\; para\ todo\ x\ e\ y$
  - v.a. contínuas: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \;\; para\ todo\ x\ e\ y$
- **Soma de v.a. independentes** Dadas X e Y v.a. independentes com f.d.p f_X e f_Y e $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x)f_X(x)dx.$$

  e

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx.$$

- **Método Jacobiano** Sejam X_1 e X_2 v.a.'s contínuas com f.d.p conjunta $f(x_1,x_2)$ e g_1 e g_2 duas funções em $\mathbb{R}$. Considere as variáveis $Y_1 = g_1(X_1,X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1,X_2)$.

  Suponha

  (i) As equações $y_1 = g_1(x_1,y_1)$ e $y_2 = g_2(x_1,x_2)$ podem ser unicamente solucionadas para x_1 e x_2 em termos de y_1 e y_2, com soluções dadas por, digamos, $x_1 = h_1(y_1,y_2)$ e $x_2 = h_2(y_1,y_2)$.

  (ii) As funções g_1 e g_2 têm derivadas parciais contínuas em todos os pontos (x_1,x_2) e

$$J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0, \forall (x_1,x_2)$$

  Nessas condições

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{(X_1,X_2)}\big(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\big)|J(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))|^{-1}$$

- **Valor esperado de um vetor aleatório**
  - v.a. discretas:$E[g(X_1,\ldots,X_n)] = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} g(x_1,\ldots,x_n)p(x_1,\ldots,x_n)$
  - v.a. contínuas: $E[g(X_1,\ldots,X_n)] = \int \ldots \int g(x_1,\ldots,x_n)f(x_1,\ldots,x_n)dx_1,\ldots,dx_n$
- **Propriedades do valor médio**
  - $E[aX + bY] = aEX + bEY, \quad a, b \in \mathbb{R}$
  - $E\Big[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\Big] = \sum_{k=1}^{n} a_k E X_k, \;\; a_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n.$