Exercício 1. [2 pontos] Sabe-se que a densidade óssea do fêmur de mulheres saldáveis segue distribuição normal com média 1 (g/cm^3) e desvio padrão $0,4$(g/cm^3). Uma mulher com densidade óssea do fêmur entre 1 e 2,5 desvios abaixo da média é dita com baixa massa óssea e com osteoporose se tiver mais de 2,5 desvios abaixo da média.

(a) [1 ponto] Determine as probabilidades de uma mulher ser diagnosticada com baixa massa óssea e com osteoporose.

(b) [1 ponto] Considere $Y = 3(\frac{X-\mu}{\sigma})^2$ e determine a função densidade de probabilidade de Y.

X: densidade óssea

$X \sim N(1; 0,4^2)$

a) • Baixa massa óssea

$$P(1-2,5\times 0,4 \leq X \leq 1-0,4) = P(0 \leq X \leq 0,6)$$

$$= P\left(\frac{0-1}{0,4} \leq Z \leq \frac{0,6-1}{0,4}\right) = P(-2,5 \leq Z \leq -1)$$

$$= \Phi(-1) - \Phi(-2,5) = \boxed{\Phi(2,5) - \Phi(1)}$$

• Osteoporose

$$P(X \leq 1-2,5\times 0,4) = P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = \boxed{1-\Phi(1)}$$

b) Como $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(Y \leq y) = P(3Z^2 \leq y) = P(-\sqrt{y/3} \leq Z \leq \sqrt{y/3})$$

$$= \Phi(\sqrt{y/3}) - \Phi(-\sqrt{y/3}) = 2\Phi(\sqrt{y/3}) - 1$$

Logo

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(2\Phi(\sqrt{y/3}) - 1\right) = 2 f_Z(\sqrt{y/3}) \frac{d}{dy}(\sqrt{y/3})$$

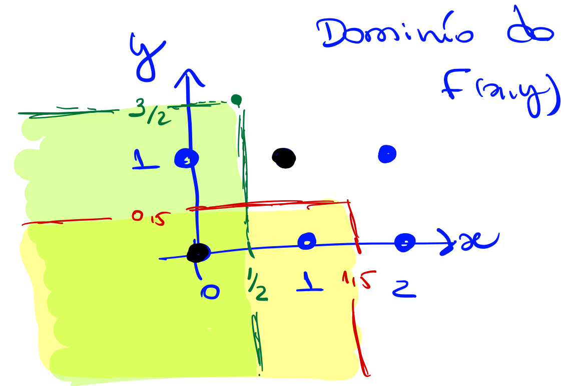
$$= 2 \frac{1/2\, y^{1/2-1}}{\sqrt{3}} f_Z(\sqrt{y/3}) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{3y}}_{-0,2}} f_Z(\sqrt{y/3})$$

Exercício 2. [1,5 ponto] Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta parcialmente dada na tabela abaixo e com função de distribuição acumulada F

$Y \setminus X$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	$1/2$	0	1/6	$2/3$
1	1/6	$1/6$	0	1/3
$p_X(x)$	2/3	1/6	1/6	1

(a) [1 ponto] Suponha que $F(0,5; 1,5) = 2/3$ e $F(1,5; 0,5) = 1/2$ e determine os valores da função de probabilidade conjunta.

(b) [0,5 ponto] As variáveis X e Y são independentes? Justifique.



a) Como $F(0{,}5; 1{,}5) = 2/3$

$= p(0,0) + p(0,1)$

temos

$$2/3 = 1/2 + p(0,1) \Rightarrow \boxed{p(0,1) = 1/6}$$

Como $F(1{,}5; 0{,}5) = 1/2$

$= p(0,0) + p(1,0)$

temos que

$$1/2 = 1/2 + p(1,0) \Rightarrow \boxed{p(1,0) = 0}$$

b) Não são indep. uma vez que

$$p(1,0) = 0 \neq 1/6 \cdot 2/3 = P_X(1) P_Y(0)$$

Exercício 3. [4,5 pontos] Sejam X e Y v.a's contínuas com função densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-y}, & se\ 0 \leq x < 1,\ y > 0 \\ (a-x)e^{-y}, & se\ 1 \leq x \leq 2,\ y > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

(a) [1 ponto] Determine o valor de a para a função densidade conjunta esteja bem definida.

(b) [1 ponto] Calcule as distribuições marginais de X e de Y e verifique se as variáveis X e Y são independentes.

(c) [1 ponto] Determine a função de distribuição acumulada conjunta de X e Y.

(d) [1,5 ponto] Defina $T = X + Y$ e $U = X/2$ e determine a função densidade conjunta de T e U.

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^1 x e^{-y}\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_1^2 (a-x)e^{-y}\,dx\,dy$

$= \int_0^{\infty} e^{-y}\int_0^1 x\,dx\,dy + \int_0^{\infty} e^{-y}\int_1^2 (a-x)\,dx\,dy$

$= \int_0^{\infty} e^{-y}\left(x^2/2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy + \int_0^{\infty} e^{-y}\left(ax - x^2/2\right)\Big|_{x=1}^{x=2} dy$

$= \int_0^{\infty} e^{-y}(1/2)\,dy + \int_0^{\infty} e^{-y}(2a - 2 - a + 1/2)\,dy$

$= 1/2 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy}_{=1} + (a - 3/2)\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy}_{=1}$ (dens. Exp(1))

$\therefore\ 1 = 1/2 + a - 3/2 \implies \boxed{a = 2}$

b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} x e^{-y}\,dy$ $\boxed{\text{se } 0 \leq x \leq 1}$

$= x \int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = x$

$f_X(x) = \int_0^{\infty} (2-x) e^{-y}\,dy = (2-x)$ se $\boxed{1 \leq x \leq 2}$

$$\therefore \quad f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ (2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$ 0,4

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 x e^{-y}\,dx + \int_1^2 (2-x) e^{-y}\,dx$

$= e^{-y} \cdot 1/2 + e^{-y}\left(\cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{2} - 1/2\right)$

$= \frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2} = e^{-y}$ $\quad y \geq 0$

$$\therefore \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases} \Rightarrow Y \sim \mathcal{E}xp(1)$$ 0,4

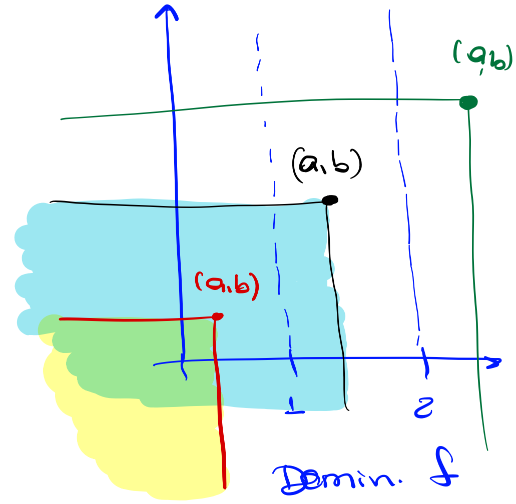
Como

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} x e^{-y} & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x) e^{-y} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & c.c \end{cases} = f(x,y)$$ 0,2

Temos que X e Y são indep!

c) Note que

$$F(x,y)=0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} x\le 0 & y\le 0 \\ x\le 0 & y>0 \\ x>0 & y\le 0 \end{cases} \quad -0,1$$



* $\boxed{0\le a\le 1,\ b>0}$

$$F(a,b)=\int_0^b\int_0^a x\,e^{-y}\,dx\,dy$$

ou $$F(a,b)=F_X(a)F_Y(b)=\int_0^a x\,dx\,(1-e^{-b})=\frac{a^2}{2}(1-e^{-b})$$

* $\boxed{1<a\le 2,\ b>0}$

$$F(a,b)=\int_0^b\int_0^1 x\,e^{-y}\,dx\,dy+\int_0^b\int_1^a(2-x)\,e^{-y}\,dx\,dy$$

ou $$F(a,b)=F_X(a)F_Y(b)=\left(\int_0^1 x\,dx+\int_1^a(2-x)\,dx\right)(1-e^{-b})$$

$$=\left(1/2+2a-a^2/2-2+1/2\right)(1-e^{-b})$$

$$=\left(2a-a^2/2-1\right)(1-e^{-b})$$

* $\boxed{a>2,\ b>0}$

$$F(a,b)=\int_0^b\int_0^1 x\,e^{-y}\,dx\,dy+\int_0^b\int_1^2(2-x)\,e^{-y}\,dx\,dy$$

$$=(4-2-1)(1-e^{-b})=(1-e^{-b})$$

d) $T = X+Y$ $\Longrightarrow$ $t = x+y$ $\Rightarrow t = 2u + y$

$U = X/2$ $\qquad u = x/2 \Rightarrow \boxed{x = 2u}$ $\Rightarrow y = t - 2u$

$g_1(x,y) = x+y$

$g_2(x,y) = x/2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} h_1(u,t) = 2u \\ h_2(u,t) = t - 2u \end{array}}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le u \le 1/2 \\ 1 < x \le 2 \Rightarrow 1/2 \le u \le 1 \\ y \ge 0 \Rightarrow t - 2u \ge 0 \\ \qquad \Rightarrow t \ge 2u \end{array}}$$

0,5

Portanto,

$$f_{(T,U)}(t,u) = f(2u, t-2u)\,|-1/2|^{-1}$$

$$= \begin{cases} 4u\, e^{-(t-2u)} & 0 \le u \le 1/2,\ t \ge 2u \\ 2(2-2u)\, e^{-(t-2u)} & 1/2 \le u \le 1,\ t \ge 2u \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note:

$$\int_0^{1/2}\int_{2u}^{\infty} 4u\, e^{-(t-2u)}\, dt\, du = \int_0^{1/2} 4u\, e^{2u} \int_{2u}^{\infty} e^{-t}\, dt\, du$$

$$= \int_0^{1/2} 4u\, e^{2u}\left(-e^{-t}\right)_{t=2u}^{t\to\infty} du = \int_0^{1/2} 4u\, e^{2u}\, e^{-2u}\, du$$

$$= \int_0^{1/2} 4u\, du = 2u^2 \Big|_0^{1/2} = 2 \cdot 1/4 = 1/2$$

$f = u$

$f' = 1$

$g' = 4e^{4u}$

$g = e^{4u}$

$$\int_{1/2}^{1}\int_{2u}^{\infty} 4(1-u)e^{-t}e^{2u}\,dt\,du = \int_{1/2}^{1} 4(1-u)e^{2u}\int_{2u}^{\infty} e^{-t}\,dt$$

$f = 1-u$

$f' = -1$

$g' = 4e^{4u}$

$g = e^{4u}$

$$= \int_{1/2}^{1} 4(1-u)e^{2u}\left(-e^{-t}\right)_{t=2u}^{t=\infty} du = \int_{1/2}^{1} 4(1-u)e^{2u}\cdot e^{-2u}\,du$$

$$= \int_{1/2}^{1} 4(1-u)\,du = \left(4u - 2u^2\right)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{2} + 2\cdot 1/4 = 1/2$$

logo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,u)\,dt\,du = 1/2 + 1/2 = 1 \;//$$

Exercício 4. [2 pontos] Suponha que a altura de uma planta (X) segue uma distribuição exponencial de taxa 3; quanto maior a planta, mais cara ela é comercializada. Além disso, outro indicador da saúde da planta é o tamanho da circunferência do caule (Y); quanto maior, mais forte esta a planta. O preço final da planta varia de acordo com um índice Z que é soma da altura e da circunferência do caule, isto é $Z = X + Y$.

(a) [1 ponto] Supondo que o tamanho da circunferência siga uma distribuição uniforme em $(0, 1)$ e que X e Y seja independentes, determine a função densidade de Z.

(b) [1 ponto] O preço final de comercialização da planta seja definido pela equação

$$W = 15 + 12Z$$

Determine o preço médio por planta.

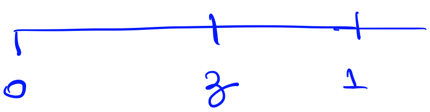
$$\left.\begin{array}{l} X: \text{altura da planta} \Rightarrow X \sim Exp(3) \\ Y: \text{tamanho do caule} \Rightarrow Y \sim Unif(0,1) \end{array}\right\} X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy = \int_0^1 f_X(z-y)\,dy$$

• se $z \in [0,1] \iff 0 \leq z - y \leq 1$

$\iff y \leq z$



$$\int_0^z 3e^{-3(z-y)}\,dy = e^{-3z}\int_0^z 3e^{3y}\,dy = e^{-3z}\cdot(e^{+3z}-1) = 1 - e^{-3z}$$

• se $z > 1 \Rightarrow 0 \leq z - y \leq 1 \quad \forall y > 0$

$$\int_0^1 3e^{-3(z-y)}\,dy = e^{-3z}\left(e^{3y}\right)_{y=0}^{y=1} = e^{-3z}(e^3 - 1)$$

Portanto

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-3z}, & 0 \leq z \leq 1 \\ e^{-3z}(e^3 - 1), & z > 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Note

$$\int_0^1 (1 - e^{-3z})\,dz = \left(z + \frac{e^{-3z}}{3} \right)_{z=0}^{z=1} = 1 + \frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\int_1^{\infty} e^{-3z}(e^{3}-1)\,dz = (e^{3}-1)\left(-\frac{e^{-3z}}{3}\right)_{z=1}^{z=\infty} = (e^{3}-1)\frac{e^{-3}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{e^{-3}}{3}$$

logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1 + \frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{e^{-3}}{3} = 1 \;//$$

---

b) $W = 15 + 12Z = 15 + 12(X+Y)$

$$EW = E\left[15 + 12(X+Y)\right] = 15 + 12(EX + EY)$$

$$= 15 + 12(1/3 + 1/2) = 15 + 4 + 6 = 25$$