MAE 0221 - Probabilidade I- 2022/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 3 - Variáveis Aleatórias

Exercício 1. Humberto deseja aumentar a capacidade de memória RAM do seu computador. Para isso ele vai a uma loja para comprar três pentes de memória adicionais. Na loja há 12 pentes, e dentre eles há quatro defeituosos. Suponha que os três pentes novos são escolhidos ao acaso e que X denote o número de pentes que funcionam perfeitamente. Determine

(a) a função de probabilidade de X;

(b) a função de distribuição acumulada de X;

(c) a esperança e o desvio padrão de X;

Exercício 2. * Determine a função de probabilidade, o valor esperado, a variância e o desvio padrão de uma v.a. X cuja função distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & 3 \leq x < 3,5 \\ 1 & x \geq 3,5. \end{cases}$$

Exercício 3. Se X é tal que

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1),$$

determine $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$.

Exercício 4. * Seja X uma variável aleatória que assume valores em 1, 0 e - 1, com $P(X = 0) = 1/2$. Mostre que $-1/2 \leq EX \leq 1/2$.

Exercício 5. Determine $Var(X)$ se

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b).$$

Exercício 6. Considere X a quantidade em dinheiro que podemos receber de prêmio em um certo jogo de azar e suponha que $E[X] = R\$3,00$. Se para participar do jogo temos de pagar a quantia de R$ 4,00, qual será o ganho esperado?

Exercício 7. * Uma pessoa joga uma moeda honesta até que dê coroa pela primeira vez. Se a coroa aparece na n-ésima jogada, a pessoa ganha 2^n reais. Seja X o número de vitórias do jogador. Mostre que $E[X] = +\infty$. Este problema é conhecido como o paradoxo de São Petesburgo.

Exercício 8. Se $E[X] = 1$ e $Var(X) = 5$, determine

(a) $E[2 + X^2]$

(b) $Var(4 + 3X)$

Exercício 9. Cerca de 80% das chamadas que um certo técnico em computação recebe ele constata que o problema decorreu da presença de um vírus. Suponha que, em um determinado dia, esse técnico visita seis clientes, e admita também que os seis clientes não se comunicam por meio de computador (o que garante a independência da existência de vírus em cada computador). Calcule a probabilidade de que:

(a) Pelo menos quatro entre os seis computadores estejam com vírus.

(b) No máximo dois dentre eles estejam com vírus.

(c) Todos os seis estejam com vírus

Exercício 10. Um homem diz ter percepção extrassensorial. Para testá-lo, uma moeda honesta é jogada 10 vezes e pede-se ao homem que preveja o resultado. Ele acerta 7 vezes em 10. Qual é a probabilidade de que ele consiga o mesmo índice de acertos se estiver apenas chutando?

Exercício 11. Suponha que sejam necessários pelo menos 9 votos de um júri formado por 12 jurados para que um réu seja condenado. Suponha também que a probabilidade de que um jurado vote na inocência de uma pessoa culpada seja de 0,2, enquanto a probabilidade de que o jurado vote na culpa de uma pessoa inocente seja de 0,l. Se cada jurado age independentemente e se 65% dos réus são culpados, determine a probabilidade de que o júri chegue a conclusão correta. Que percentual de réus é condenado?

Exercício 12. O engenheiro responsável pelo controle da qualidade de uma linha de produção examina as peças fabricadas. Se achar uma defeituosa, ele para a produção para detectar e corrigir as causas do defeito. Se após examinar 10 peças verificar que nenhuma é defeituosa, ele mantém a linha funcionando. Se a probabilidade de se achar uma peça defeituosa em cada inspeção é 0,05, qual é a probabilidade de:

(a) a produção ser parada antes que a quinta peça seja examinada?

(b) a produção não precisar ser parada?

Exercício 13. Certa agência de digitação emprega dois digitadores. O número médio de erros pro texto é de 3 quando este é digitado pelo primeiro digitador e 4,2 quando digitado pelo segundo. Se o texto tem a mesma probabilidade de ser digitado por qualquer um dos digitadores, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que ele não tenha erros.

Exercício 14. Suponha que o número de acidentes que ocorrem em uma autoestrada em cada dia seja uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$. Determine a probabilidade de que 3 ou mais acidentes ocorram hoje.

Exercício 15. * Se você compra um bilhete de loteria que concorre em 50 sorteios, em cada um dos quais sua chance de ganhar é de $\lambda = 1/100$. Qual é a probabilidade de que você ganhe um prêmio
(a) pelo menos uma vez?
(b) exatamente uma vez?
(c) pelo menos duas vezes?

Exercício 16. A probabilidade de sair com um *full house* em uma mão de pôquer é de aproximadamente 0,0014. Determine uma aproximação para a probabilidade de que, em 1000 mãos de pôquer, você receba pelo menos 2 *full houses.*

Exercício 17. A taxa de homicídios em certo estado é de 1 homicídio por 100.000 habitantes a cada mês.

(a) Determine a probabilidade de que, em uma cidade de 400.000 habitantes deste estado, ocorram 8 homicídios ou mais em um dado mês.

(b) Qual é a probabilidade de que em pelo menos 2 meses durante o ano ocorram 8 homicídios ou mais?

Que hipóteses você está assumindo?

Exercício 18. Uma moeda honesta é jogada continuamente até que dê cara pela décima vez. Seja X o número de coroas que aparecem. Calcule a função de probabilidade de X.

Exercício 19. Suponha que um conjunto de 100 itens contenha 6 itens defeituosos e 94 que funcionem normalmente. Se X é o número de itens defeituosos em uma amostra de 10 itens escolhidos aleatoriamente do conjunto, determine $P(X = 0)$ e $P(X > 2)$.

Exercício 20. Se X é uma variável aleatória binomial com valor esperado 6 e variância 2,4, determine $P(X = 5)$.

Exercício 21. * A probabilidade de ocorrência de turbulência em um determinado percurso a ser feito por uma aeronave é de 0,4 em um circuito diário. Seja X o número de vôos com turbulência em uma semana. Qual a probabilidade de que:
(a) Não haja turbulência em nenhum dos sete voos?
(b) Haja turbulência em pelo menos três deles?
(c) X esteja entre $EX - DP(X)$ e $EX + DP(X)$?
(d) Num total de cinco semanas, haja turbulência em duas por pelo menos 3 dias?

Exercício 22. Suponha que o processo de chegada de mensagens à caixa de e-mail de uma pessoa segue uma lei de probabilidade de Poisson com taxa média de 30 mensagens por semana. Para não gastar um tempo excessivo na leitura de e-mails, essa pessoa estabeleceu para si a regra de consultar a sua caixa apenas uma vez por dia e só ler o seu conteúdo se houver no máximo três mensagens à sua espera. Se essa regra for seguida durante cinco dias, calcule as probabilidades de que:
(a) em cada um dos cinco dias a pessoa não ler os seus e-mails;
(b) em pelo menos um dos cinco dias a pessoa não ler os seus e-mails.