Aula 2: Probabilidade

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte - 2022/01

Espaço amostral e evento

Considere um experimento cujo resultado não é possível prever com certeza. O conjunto (se conhecido) de todo resultados possíveis é dito *espaço amostral*

Notação: Ω

Espaço amostral e evento

Considere um experimento cujo resultado não é possível prever com certeza. O conjunto (se conhecido) de todo resultados possíveis é dito *espaço amostral*

Notação: Ω

Fixado um experimento e o seu espaço amostral Ω qualquer subconjunto de Ω é dito um *evento*.

Notação: A,B,C,D, ..

Exemplos: espaço amostral e eventos.

1. Experimento: lança-se um dado e observa-se a face para cima.
   Evento: a face é maior que 3
2. Experimento: lançar uma moeda duas vezes
   Evento: número de cara's é igual ao número de coroa's
3. Experimento: 3 peças são retiradas de uma linha de produção e verifica-se a sua qualidade como sendo boa (B) ou defeituosa (D)
   Evento: pelo menos duas peças boas
4. Experimento: lança-se uma moeda até que se obtenha uma cara
   Evento: número de coroa's é par
5. Experimento: número de chamadas telefônicas que chegam em uma central de atendimento em determinado período de tempo.
   Evento: número de chamadas foi pelo menos 8
6. Experimento: registra-se o tempo de vida de uma lâmpada em minutos.
   Evento: a lâmpada funciona por menos de uma hora

Operação com eventos

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω, definimos :

- $A \cup B$ (*união* de A e B) como o **evento** que ocorre quando **pelo menos** um deles ocorre, ou seja, todos os resultados que pertencem a A **ou** pertencem a B

- $A \cap B$ (*intersecção* de A e B) como o **evento** que ocorre quando **ambos** eventos ocorrem, isto é, todos os resultados que pertencem a A **e** pertencem a B simultaneamente

Experimento: jogar um dado
A: a face é maior que 3
B: a face é par
Determine $A \cup B$ e $A \cap B$

Operação com eventos

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω, definimos

- A^c (*complementar* de A) como o **evento** em que A não acontece, isto é, todos os resultados de Ω que **não pertencem** a A

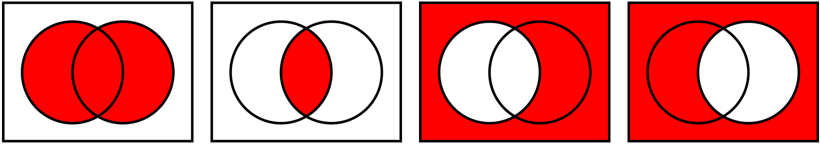
- Eventos *impossíveis*:

C: a face é menor ou igual a 6
Nesse caso C^c não possui elementos.

D: a face é ímpar
Nesse caso $B \cap D$ também não possui elementos.

Quando o evento não possui elementos dizemos que é um evento *vazio* e denotamos por $\emptyset$

Operação entre eventos
Diagrama de Venn



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ A^c $\quad$ B^c

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω.

Dizemos que A *implica* B (ou B *contém* A), e denotamos $A \subset B$, se todo elemento de A pertence a B. Isto é, a ocorrência de A implica a ocorrência de B.

Dizemos que A e B são *iguais*, se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Dizemos que A e B são *mutuamente excludentes* se não podem ocorrer simultâneamente. Isto é, quando $A \cap B = \emptyset$

Exemplo

7. Experimento: uma urna contém bolas numeradas de 1 à 15, uma bola é retirada e observa-se seu número. Eventos.
   A: o número é par
   B: o número é múltiplo de 3
   C: o número é múltiplo de 6

   Determine:
   $A \cup B$
   $A \cap B$
   B^c
   $A \cap B$
   $C \subset B$ ou $C \subset A$?

Lema 1

Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

i. $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

ii. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

iii. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

iv. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

v. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

vi. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Além disso, iii e iv permanecem verdade para qualquer sequência **finita** de eventos:

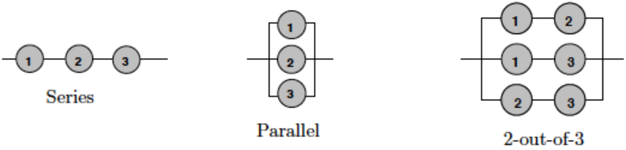
Lema 1': leis de DeMorgan

Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

v'. $(\cup_{k=1}^{n} A_k)^c = \cap_{k=1}^{n} A_k^c$

vi'. $(\cap_{k=1}^{n} A_k)^c = \cup_{k=1}^{n} A_k^c$

8. Abaixo seguem ilustrados três sistemas, com 3 componentes instáveis cada. O sistema em série funciona se todas as 3 componentes estão funcionando; o sistema em paralelo funciona se pelo menos uma das componentes funciona; e o sistema 2-de-3 funciona de pelo menos dois componentes dos 3 funciona.



Considere os eventos

A_i : a $i-$ésima componente funciona, i=1,2,3.

B_s : o sistema em série funciona

B_p : o sistema em paralelo funciona

B_2 : o sistema 2-de-3 funciona

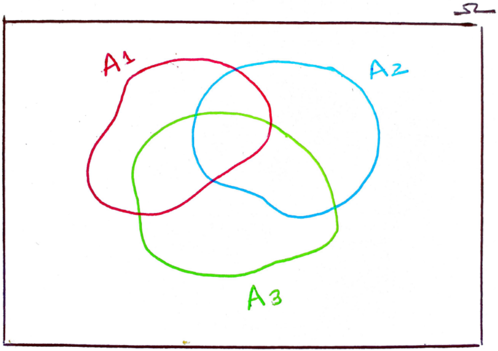
Descreva B_s, B_p e B_2 em função dos eventos A_i, i=1,2,3.

Uma *partição* $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ de um conjunto Ω é uma coleção de conjuntos que satisfaz

(i) $C_i \cap C_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$

(ii) $\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega$

9. Defina uma partição de Ω usando operações entre os eventos A_1, A_2 e A_3



Definição de probabilidade

Ideia 0

Considere um experimento cujo espaço amostral Ω (**finito**) tem n elementos. Suponha que a ocorrência de cada elemento do espaço amostral tenha a mesma probabilidade. Seja A um evento de Ω com m elementos. A probabilidade de A, denotada por $P(A)$, é dada por

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

onde $|\cdot|$ denota a cardinalidade do conjunto.

Notação: também usaremos $\#$ para denotar cardinalidade

Exemplo: espaço amostral finito

10. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.
    Determine
    a) A probabilidade da face ser par
    b) A probabilidade da face ser maior que 4

Problema: como definimos as probabilidades dos elementos de Ω quando o espaço amostral for **infinito**?

Definição frequentista

Definição 0’

Suponha que um experimento, cujo espaço amostral é Ω, seja realizado repetidamente em condições exatamente iguais. Para cada evento A do espaço amostral Ω, definimos $N_n(A)$ como o número de vezes que o evento A ocorre nas n primeiras repetições do experimento. Então a probabilidade do evento A, é definida como

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P_{10}(A) = 4/10 = 0,4$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P_{10}(A) = 4/10 = 0,4$

n=20

$$4, 1, 3, 6, 3, 3, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 4$$

Logo $P_{20}(A) = 9/20 = 0,45$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P_{10}(A) = 4/10 = 0,4$

n=20

$$4, 1, 3, 6, 3, 3, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 4$$

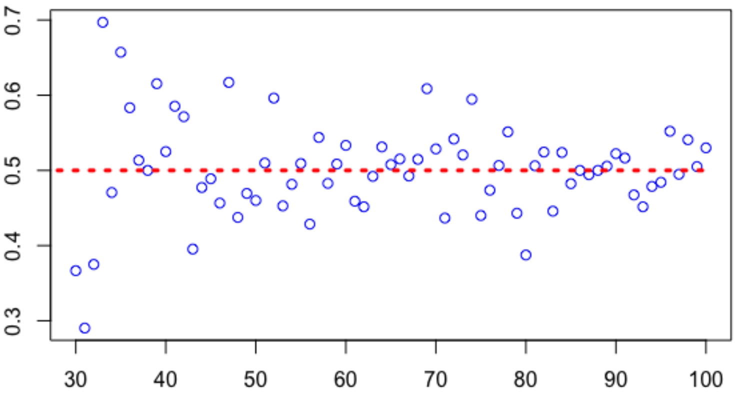
Logo $P_{20}(A) = 9/20 = 0,45$

n=30

$$2, 1, 3, 6, 4, 5, 2, 1, 1, 3, 6, 1, 4, 5, 6, 5, 3, 6, 2, 5, 2, 4, 4, 2, 6, 5, 1, 3, 2, 2$$

Logo $P_{30}(A) = 16/30 = 0,533$

$N_n(A)/n$ para n=30, 31, ..., 100



Problema: Como saber que $N_n(A)/n$ convergirá para algum valor limite constante? Se existir o limite, como garantir que é único?

- A probabilidade é uma **função** que associa a cada evento possível do espaço amostral um valor em [0,1].
- Gostaríamos de fazer infinitas (enumerável) operações entre eventos (união, intersecção e complementar).
- Nem sempre classe do conjunto das partes será suficiente.

Antes de definir probabilidade de forma axiomática, precisamos definir o conjunto em que ela está definida. Esse conjunto é dito uma *σ-álgebra.*

σ-álgebra

Dado um espaço amostral Ω uma *σ-álgebra* é qualquer coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω que satisfaz

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Se $A_1, A_2 \dots$ é uma sequência de subconjuntos em $\mathcal{F}$, então $\cup_n^\infty A_n \in \mathcal{F}$

- (i) + (ii) $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) + (iii) + Leis de DeMorgan $\Rightarrow$ se $A_1, A_2 \dots$ é uma sequência de subconjuntos em $\mathcal{F}$, então $\cap_n^\infty A_n \in \mathcal{F}$

O par ordenado $(\Omega, \mathcal{F})$ é dito um *espaço mensurável.* Qualquer subconjunto $F \in \mathcal{F}$ é dito *$\mathcal{F}$-mensurável*

Exemplo de espaços mensuráveis

11. Ω qualquer e $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$
12. $\Omega = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \{1, 3, 5, \ldots\}\}$$

13. $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito qualquer e $\mathcal{F}$ a classe dos 2^n subconjuntos possíveis de Ω.

Seja $\mathcal{A}$ uma classe de conjuntos de Ω. A menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$ é dita uma *σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$*.

14. Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A}$ a classe dos intervalos abertos, isto é $\mathcal{A} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. A σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ recebe o nome de *σ-álgebra de Borel*.

Definição Axiomática

Definição

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço amostral. Uma probabilidade é uma função definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Definição Axiomática

Definição

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço amostral. Uma probabilidade é uma função definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

A tripla ordenada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é dita um *espaço de probabilidade*.

15. [Dado honesto] Seja $\mathcal{F}$ a classe de todos os 2^6 eventos de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mostre que a função que associa a qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ ao valor

$$P(A) = \frac{|A|}{6}$$

é uma probabilidade.

E se o dado for desonesto?

16. Suponha que para um dado viciado a face 6 tenha três vezes mais chances de aparecer que as demias. Como podemos definir a função de probabilidade?

    Qual a probabilidade da face ser par? E de ser menor que 4?

Espaço amostral **enumerável**

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\}\Big)$$

Espaço amostral enumerável

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\}\Big) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$$

- Em particular, se o espaço amostral é **finito** e todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de ocorrência (equiprováveis), para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Exemplos: eventos **equiprováveis**

17. Se dois dados honestos são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces seja igual a 7.

18. Se três bolas são retiradas de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?

19. Considere o baralho com as 52 cartas (13 valores e 4 naipes) e que uma mão de pôquer são 5 cartas.
    (a) Qual a probabilidade de que numa mão de pôquer tenha cinco cartas com valores diferentes?
    (b) Qual a probabilidade de que numa mão de pôquer ocorra um *straight?*

Propriedades da Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

iii. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para qualquer evento $A \in \mathbf{F}$.

iv. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$, se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

v. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$

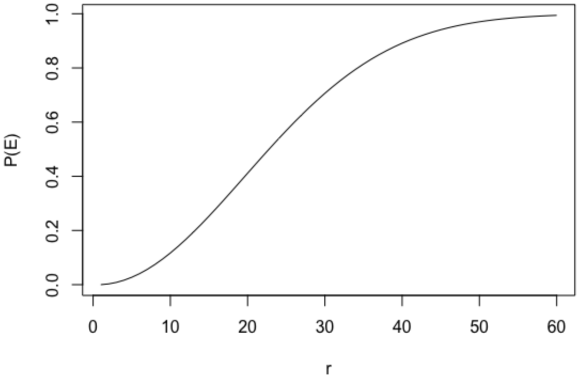
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

vi. Dados $A_1, \ldots, A_n$ eventos **quaisquer** de $\mathcal{F}$

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

20. Num grupo de r pessoas qual a probabilidade de pelo menos duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?

20. Num grupo de r pessoas qual a probabilidade de pelo menos duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?



21. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

22. Uma urna contém n bolas, uma das quais é especial. Se k dessas bolas são retiradas uma de cada vez, e todas as bolas na urna têm a mesma a probabilidade de serem retiradas. Qual é a probabilidade de a bola especial ser escolhida?

23. Numa mão de pôquer de cinco cartas, o *full house* ocorre quando alguém sai com três cartas de mesmo valor e duas outras cartas de mesmo valor (que é naturalmente diferente do primeiro). Assim, um *full house* é formado por uma trinca mais um par. Qual é a probabilidade de alguém sair com um *full house?*

24. Nos Estados Unidos, cada um dos cinquenta estados é representado por dois senadores. Suponhamos que uma comissão de cinquenta senadores é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de um determinado estado estar representado na comissão?

25. J. leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ela gostar do primeiro livro é de 0,5, de gostar do segundo livro é de 0,4 e de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?

Um sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots$ é dita *monótona não-decrescente* (resp. *não-crescente*) se $A_n \subset A_{n+1}$, (resp. $A_{n+1} \subset A_n$) $n = 1, 2, \ldots$, e denotamos por $A_n \uparrow$ (resp. $A_n \downarrow$)

O *limite superior* de uma sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ é definido por

$$\limsup A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

O *limite inferior* de uma sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ é definido por

$$\limsup A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

A sequência de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ tem *limite* se

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \lim A_n$$

Interpretação do $\limsup$ e $\liminf$

- $\bigcup_{k \in K} A_k$ ocorre = existe (pelo menos) um $k \in K$ tq A_k que ocorre
- $\bigcap_{k \in K} A_k$ ocorre = para todo $k \in K$ A_k ocorre
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n \textit{ infinitas vezes}\}$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\textit{ocorre } A_n \textit{ para } n \textit{ sufic. grande}\}$

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade

vii Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ tal que $A_n \uparrow A \quad$ (resp. $A_n \downarrow A$)

$$P(A_n) \uparrow P(A) \quad (resp.\ P(A_n) \downarrow P(A))$$

26. Mostre que para qualquer sequência de eventos $A_1, \ldots, A_n \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$$