Propriedades da esperança matemática

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte

Valor médio ou esperança matemática

Caso discreto

Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$, chamamos *valor médio* ou *esperança matemática* de X o valor

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Caso contínuo

Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Note que EX pode ser igual a ∞

Propriedades do valor médio

Proposição

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

(i) Se X é uma v.a. discreta tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$, então

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

(i') Se X é uma v.a. com f.d.p $f(x)$, então,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

(ii) $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.

Variância e desvio padrão

Variância

Seja X é uma v.a. com $EX = \mu < \infty$, a *variância* de X é definida por

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (EX)^2$$

Desvio padrão

O valor $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$ é dito o *desvio padrão* de X.

Propriedades da Variância

Seja X uma v.a. com $EX < \infty$ e a e b números reais quaisquer

(i) Se $X = a$ com probabilidade 1. Isto é, se X é constante e igual a a, $Var(X) = 0$.

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Valor esperado de um vetor aleatório

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com função de probabilidade conjunta $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O *valor esperado* de $g(X_1, \ldots, X_n)$ é dado por

$$E[g(X_1, \ldots, X_n)] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \ldots, x_n)p(x_1, \ldots, x_n)$$

Analogamente,

Valor esperado de um vetor aleatório

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O *valor esperado* de $g(X_1, \ldots, X_n)$ é dado por

$$E[g(X_1, \ldots, X_n)] = \int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_n)f(x_1, \ldots, x_n)dx_1, \ldots, dx_n$$

Valor esperado da soma de v.a'

Proposição

I) Se X e Y são v.a. com EX e EY bem definidos, temos

$$E[aX + bY] = aEX + bEY, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

I') Se $X_1 \dots X_n$ são v.a. com esperança finita então

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} EX_k$$

II) Se $X \leq Y$ então $EX \leq EY$.

Note que não é necessária independência entre as v.a's

1. **[Média amostral]** Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a's i.i.d valor esperado μ. Determine o valor esperado de $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

2. **[Desigualdade de Boole]** Suponha que $A_1, \ldots, A_n$ representem eventos de um espaço amostral. Mostre que

$$P\big(\cup_{k=1}^{n} A_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. Suponha que N pessoas joguem os seus chapéus no centro de uma sala. Os chapéus são misturados e cada pessoa seleciona um deles aleatoriamente. Determine o número esperado de pessoas que selecionam o próprio chapéu.

Soma infinita de v.a's

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a's satisfazendo uma das condições abaixo

(i) As variáveis $X_k, k = 1, 2, \ldots$ são não negativas. (Isto é, $P(X_k \geq 0) = 1$ para todo k)

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} E[|X_k|] < \infty$.

Nesse caso, vale que

$$E\Big[\sum_{k=1}^{\infty} X_k\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k$$

4. Se X é uma v.a. discreta assumindo valores $1, 2, 3, \ldots$ então

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Covariância

Proposição

Se X e Y são v.a's independente e h e g funções reais, então vale que

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

Covariância

Proposição

Se X e Y são v.a's independente e h e g funções reais, então vale que

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

Covariância

Sejam X e Y são duas v.a. em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a *covariância* entre X e Y é definida por

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Quando $Cov(X, Y) = 0$, dizemos que as variáveis aleatórias X e Y *são não correlacionadas*.

4. Calcule a Cov(X,Y) quando X e Y tem distribuição de probabilidade conjunta dada por

X / Y	-1	0	1	p(x)
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
p(y)	1/4	1/2	1/4	1

5. Determine a covariância das v.a's X e Y cuja a função de distribuição conjunta é dada por

Y \ X	0	1	2	$p(y)$
1	3/20	3/20	2/20	8/20
2	1/20	1/20	2/20	4/20
3	4/20	1/20	3/20	8/20
$p(x)$	8/20	5/20	7/20	1,00

Propriedades da covariância

(i) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(ii) $Cov(X, X) = Var(X)$

(iii) $Cov(aX, Y) = Cov(X, aY) = aCov(X, Y)$

(iv) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

Variância da soma

Sejam X e Y duas v.a. a variância de X+Y é dada por

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y);$$

De modo geral,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

Em particular, se $X_1 \ldots, X_n$ são independentes

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

6. **Erro comum**
Sejam X e Y duas v.a.'s independentes e tais que $X \sim N(80; 9)$ e $Y \sim N(50; 16)$. Qual a distribuição de probabilidade da v.a. Z = X – Y?
Resposta:

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 80 - 50 = 30$$

$$Var(Z) = Var(X - Y) = Var(X) - Var(Y) = 9 - 16 = -7$$

Conclusão: $Z \sim N(30; -7)$.
a) Qual foi o erro cometido aqui?
b) Qual a solução correta?

7. Considere X e Y v.a.'s cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = 6e^{-2x-3y}, \; x > 0, y > 0.$$

Determine

(i) f_X e f_Y

(ii) EX, EY e E[XY]

(iii) Var(X), Var(Y) e Var(X+Y)

(iv) Cov(X,Y)

8. Considere X e Y v.a.'s cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = x + y, \; 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

Determine

(i) f_X e f_Y

(ii) EX, EY e E[XY]

(iii) Var(X), Var(Y) e Var(X+Y)

(iv) Cov(X,Y)

9. [Binomial como soma de Bernoulli] Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes com distribuição $Ber(p)$. Defina $Y = X_1 + \ldots + X_n$ e mostre que $Var(X) = p(1-p)$
10. Sejam X_1, X_2, X_3 v.a. independentes e com distribuição $Exp(1)$. Determine a variância de $Y = (X_1 + X_2)X_3$.

Desigualdades

Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória que apresenta apenas valores não negativos então, para qualquer a > 0,

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Desigualdade de Markov geral

Seja X é uma variável aleatória. Para qualquer k tal que $E[|X|^k] < \infty$, vale que

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|X|^k]}{\epsilon^k}, \quad \epsilon > 0$$

Desigualdade de Jensen

Se X é uma variável aleatória com média finita e g uma função convexa, então

$$E[g(X)] \geq g\left(EX\right)$$

Desigualdade de Chebyshev

Se X é uma variável aleatória com média e variância finitas, então, para qualquer valor k > 0,

$$P(|X - EX| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

11. Suponha que se saiba que o número de itens produzidos por uma fábrica durante uma semana seja uma variável aleatória com média 50.
    (a) O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana seja superior a 75 itens?
    (b) Se é sabido que a variância da produção de uma semana é igual a 25, então o que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana esteja entre 40 e 60?

12. Sejam $X \sim \mathit{Unif}(0, 10)$ e $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Determine uma cota superior para $P(|X - EX| > 4)$ e $P(|Y - \mu| > 2\sigma)$ e compare com a probabilidade exata.

Esperança condicional

Sejam X e Y v.a. no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A *esperança condicional* de X dado que $Y = y$, é dada por

$$E(X \mid Y = y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x \mid y), \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. discretas}$$

ou

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x \mid y) dx, \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. contínuas}$$

13. Sejam X e Y v.a. independentes ambas com distribuição Binomial com parâmetros n e p. Determine a esperança condicional de X dado que $X + Y = m$.

14. Seja X eY v.a. contínuas com f.d.p conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Determine

(a) a f.d.p de X dado que $Y = y$.
(b) a $E(X \mid Y = y)$.

15. Considere X e Y v.a. com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x > 0, y > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Determine $E[X \mid Y = y]$

Propriedades

Note que $E(X \mid Y = y)$ é a esperança matemática de uma v.a., portanto todas as propriedades seguem valendo

Proposição

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

(i) Se X e Y são v.a.'s discreta com fção de probabilidade conjunta p

$$E\big(g(X) \mid Y = y\big) = \sum_x g(x) p_{X|Y}(x \mid y).$$

(i') Se X e Y são v.a.'s contínuas com f.d.p conjunta $f(x)$

$$E\big(g(X) \mid Y = y\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x \mid y) dx.$$

(ii) $E(aX + b \mid Y = y) = aE(X \mid Y = y) + b$, para quaisquer números reais a e b.

Cálculo de esperanças usando condicionais

Note que

$$h(y) = E(X \mid Y = y) \quad \text{(é uma função y)}$$

Sendo assim podemos interpretar $h(Y)$ (sem um y fixado) como uma variável que é uma transformação da variável Y.

Proposição

$$E\big[E(X \mid Y)\big] = EX.$$

Se Y é uma v.a. discreta, isso significa que

$$EX = \sum_{y} E(X \mid Y = y) p_y(y).$$

Se Y é uma v.a. contínua, isso significa que

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) f_y(y) dy.$$

Corolário

$$E(XY) = E\big[YE(X \mid Y)\big]$$

16. Um minerador está preso em uma mina contendo 3 portas. A primeira porta leva a um túnel que o levar à saída após 3 horas de viagem. A segunda porta leva a um túnel que fará com que ele retorne mina após 5 horas de viagem. A terceira porta leva a um túnel que fará com que ele retorne mina após 7 horas. Se considerarmos que o minerador pode escolher qualquer uma das portas com igual probabilidade, qual o tempo esperado para que ele chegue saída?

Soma de um número aleatório de v.a.

17. Suponha que em em uma loja de departamentos entrem em média 50 pessoas por dia. Suponha também
    i) que cada cliente gasta em média R$80,00 de maneira independente dos demais.
    ii) o gasto por um cliente seja independente do número total de clientes que entram na loja.
    Qual a quantidade esperada de dinheiro gasto na loja por dia?
18. Considere um jogo com dois dados e as seguintes regras:
    - rola-se o par de dados uma vez;
    - se a soma dos dados der 2,3 ou 12 o jogador perde;
    - se der 7 ou 11 o jogador vence;
    - se der qualquer outro número i, o jogador continua jogando até que a soma seja 7 ou i.
        - se for 7 o jogador perde.
        - se for i o jogador vence.

    Seja R a v.a. de descreve o número de jogadas feitas. Determine
    (a) ER
    (b) $E(R \mid \text{ jogador vence })$
    (c) $E(R \mid \text{ jogador perde })$

19. **[Variância da Geométrica]** Tentativas independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p, são realizadas sucessivamente. Suponha que N seja o instante de ocorrência do primeiro sucesso. Determine $Var(N)$.

Variância condicional

Sejam X e Y v.a. quaisquer a *variância condicional* de X dado Y é dada por

$$Var(X \mid Y) = E\left[(X - E(X \mid Y))^2 \mid Y\right] = E(X^2 \mid Y) - (E(X \mid Y))^2$$

Proposição

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var[E(X \mid Y)]$$

20. Suponha que o número de pessoas que chegam em uma estação de trem em qualquer instante t seja uma variável aleatória de Poisson com média λt. Se o primeiro trem chega na estação em um instante de tempo que é uniformemente distribuído ao longo de $(0, T)$ e independente do instante de chegada dos passageiros, quais são a média e a variância do número de passageiros que entram no trem?

Soma de um número aleatório de v.a.'s

21. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes e com mesma distribuição. Seja N um v.a. tomando valores inteiros não-negativos e independente de $X_i, i \geq 1$. Determine a $Var(\sum_i^N X_i)$.

Coeficiente de correlação

Sejam X e Y v.a. quaisquer. Suponha que $EX = \mu_X, EY = \mu_Y, Var(X) = \sigma_X^2$ e $Var(Y) = \sigma_Y^2$ existam e que $Var(X)$ e $Var(Y)$ sejam não nulos. Nesse caso o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(XY)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriedades

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- Se X e Y são independentes, $\rho = 0$
- Se X e Y são tais que $Y = aX + b$, para valor $a, b, \in \mathbb{R}$, então
  - $\rho = 1$ se e somente se $a > 0$
  - $\rho = -1$ se e somente se $a < 0$

22. No exemplo do concurso, determine a coeficiente de correlação entre o tempo total e o tempo da primeira parte da prova.
Lembre que a f.d.p conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}, & 0 \leq y \leq x \leq 2 \\ 0, & c.c.; \end{cases}$$

Além disso, sabemos que $EX = 1,6, \; EY = 1,067, \; DP(X) = 0,327$ e $DP(Y) = 0,442$.