Probabilidade Condicional e independência

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte - 2022/01

Exemplo 1

Considere o experimento lançar dois dados honestos. Logo, cada um dos 36 resultados possíveis é igualmente provável e tem probabilidade 1/36. Sabendo que o lançamento do primeiro dado tenha sido igual a 3, qual é a probabilidade de que a soma das faces dos dados seja igual a 8?

Definição:

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos tal que $P(B) > 0$. Então a probabilidade de A dado B, denotada por $P(A \mid B)$, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No exemplo dos dois dados honestos. Defina

$$\begin{aligned} A &: \text{a soma das faces dos dados é igual a 8.} \\ B &: \text{a primeira face é igual a 3.} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \\ B &= \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \\ A \cap B &= \{(3,5)\} \end{aligned}$$

e portanto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

2. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatros pontos no espaço amostral $\Omega = \{(k,k),(k,c),(c,k),(c,c)\}$ sejam igualmente prováveis, onde k representa cara e c representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que
   (a) dê cara na primeira jogada?
   (b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

3. Celina está indecisa quanto a fazer uma disciplina de francês ou de química. Ela estima que sua probabilidade de conseguir um conceito A seria de $1/2$ em uma disciplina de francês e de $2/3$ em uma disciplina de química. Se Celina decide basear a sua escolha no lançamento de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de que ela obtenha um A em química?

4. Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 botas vermelhas. Duas bolas são retiradas das urnas, umas após a outra **sem reposição**. Determine o espaço amostral Ω e as probabilidades de cada elemento de Ω.

De forma mais geral temos o seguinte resultado:

Proposição: Regra da multiplicação

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\dots P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

No exemplo anterior calcule a probabilidade do evento $B_1 \cap B_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap B_5$ em cinco retiradas de bolas da urna, sem reposição.

5. Um baralho comum de 52 cartas é dividido aleatoriamente em 4 pilhas de 13 cartas cada. Calcule a probabilidade de que cada pilha tenha exatamente um às.

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B \in F$ eventos.

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

6. Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 40% de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para 20% no caso de uma pessoa não propensa a acidentes. Se supormos que 30% da população é propensa a acidentes,
   - (a) qual é a probabilidade de que um segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice?
   - (b) Suponha que um novo segurado sofra um acidente em menos de um ano após a compra da apólice. Qual é a probabilidade de que ele seja propenso a acidentes?

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $B_1, \ldots B_n \in \mathcal{F}$ uma **partição** de Ω (eventos mutuamente exclusivos cuja união é Ω). Para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)$$

7. A probabilidade de que um componente eletrônico de um computador falhe antes de mil horas de funcionamento é: 0,05, se o componente for da marca A; 0,10, se o componente for da marca B e 0,15, se o componente for da marca C. Numa loja de manutenção 50% dos componentes em estoque são da marca A, 20% da marca B e 30% da marca C. Se um componente da loja é escolhido ao acaso para o conserto de um computador. Determine
   (a) a probabilidade de que ele funcione perfeitamente por mais de mil horas. 3
   (b) a probabilidade de que o componente selecionado seja da marca A, dado que ele falhou antes das mil horas.

Fórmula de Bayes

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

8. Suponha que ao responder uma questão de um teste de múltipla escolha, um estudante ou sabe a resposta ou "chuta". Seja p a probabilidade de que o estudante saiba a resposta e suponha que um estudante que chuta a resposta escolhe aleatoriamente uma das 5 alternativas. Qual é a probabilidade de que o estudante saiba a resposta de uma questão dado que ele a tenha respondido corretamente?

9. Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 95% na detecção de certa doença quando ela está de fato presente. Entretanto, o teste também leva a um resultado "falso positivo"em 1 % das pessoas saudáveis testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que ele ou ela tem a doença). Se 0,5% da população realmente têm a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o resultado do teste é positivo?

10. Em uma investigação criminal, o inspetor encarregado está 60% convencido da culpa de certo suspeito. Suponha, que uma nova prova mostre que o criminoso tinha certa característica (como o fato de ser canhoto, careca, ou ter cabelo castanho) apareça. Se 20% da população possuem essa característica, quão certo da culpa do suspeito o inspetor estará agora se o suspeito apresentar a caraterística em questão?

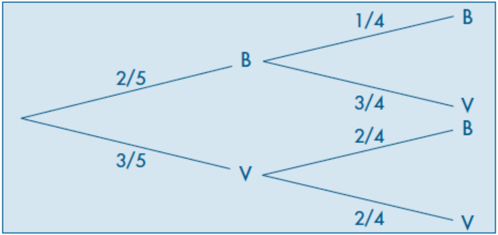
Fórmula de Bayes Geral

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ uma partição de Ω e $B \in \mathcal{F}$ um evento qualquer

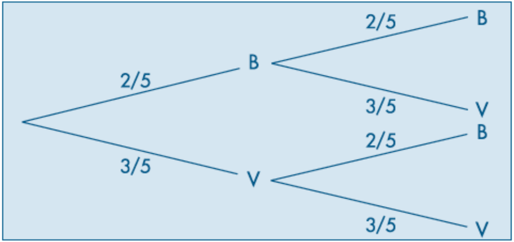
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

11. Três máquinas, A, B e C produzem respectivamente 40%, 50% e 10% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de peças defeituosas nas respectivas máquinas são 3%, 5% e 2%. Uma peça foi sorteada ao acaso e verificou-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B?

12. Considere o seguinte experimento: Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso, **sem reposição**. O diagrama em árvore abaixo ilustra as possibilidades de ocorrência das duas retidas.



13. Considere o seguinte experimento: Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso, **com reposição**. O diagrama em árvore abaixo ilustra as possibilidades de ocorrência das duas retidas.



Eventos independentes

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos quaisquer, dizemos que *A e B são independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

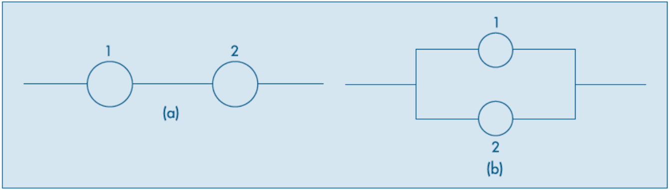
Note que nesse caso,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

No exemplo 13. Considere A e B eventos definidos como
A : sortear uma bola branca na primeira retirada
B : sortear uma bola branca na segunda retirada.

14. Experimento: extração de uma carta do baralho
A : “a carta é um valete”
B : “a carta é de copas”.

15. A Figura (a) abaixo ilustra um sistema composto de duas componentes ligados em série. O sistema em série funcionará se as componentes 1 e 2 funcionarem simultaneamente. Se uma das componentes falhar, o sistema também falhará. Se as componentes 1 e 2 estiverem em paralelo, como na Figura (b), então o sistema funcionará se pelo menos uma das componentes funcionar. Suponha que as componentes funcionem independentemente, e que p_i é a probabilidade da componente i = 1,2 funcionar. Em qual esquema é mais provável que o sistema funcione se $p_1 = 0,85$ e $p_2 = 0,7$?



Proposição

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e E e F eventos de Ω tal que $P(F) > 0$

(a) Se E e F são independentes, então E e F^c também o são.

(b) $P(\cdot \mid F)$ é uma probabilidade.

Note que o item (b) nos garante que todas as propriedades provadas para uma probabilidade qualquer, valem também para probabilidades condicionais.

Eventos independentes (Geral)

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ eventos quaisquer, dizemos que $A_1, \cdots, A_n$ *são independentes* se

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

Resumo

Probabilidade Condicional: A e B eventos de Ω. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Regra da multiplicação: $A_1, \dots, A_n$ eventos de Ω

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Fórmula das probabilidades totais: $A_1, \dots, A_n$ partição de Ω

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c); \quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k)$$

Fórmula de Bayes: $A_1, \dots, A_n$ partição de Ω

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}; \quad P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

Eventos independente: $A_1, \dots, A_n$ eventos de Ω

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

16. Considere A e B dois eventos quaisquer associados a um experimento aleatório. Se $P(A) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,8$ e $P(B) = p$, para quais valores de p, A e B serão:

   (a) mutuamente exclusivos?
   (b) independentes?

17. Uma empresa tem 15.800 empregados classificados quanto ao setor onde trabalham, idade e gênero, de acordo com a tabela a seguir

Setor	Gênero	Idade		
		< 25 anos	25 a 40 anos	> 40 anos
Administrativo	Masculino (*M*)	1100	2300	2000
	Feminino (*F*)	900	2200	1800
Técnico	Masculino (*M*)	600	1400	1400
	Feminino (*F*)	200	1100	800

   Determine a probabilidade de escolhermos um empregado que:

   (a) tenha 40 anos de idade ou menos;
   (b) seja do gênero feminino com pelo menos 25 anos;
   (c) tenha 40 anos de idade ou menos, já sabendo-se que é do setor técnico;
   (d) seja do setor administrativo, já sabendo-se que é do gênero masculino.

18. Numa cidade, 20% dos carros são da marca K, 30% dos carros são táxis e 40% dos táxis são da marca K. Se um carro é escolhido, ao acaso, determine a probabilidade de:
    (a) ser táxi e ser da marca K;
    (b) ser táxi e não ser da marca K;
    (c) não ser táxi e não ser da marca K;
    (d) não ser táxi, sabendo-se que é da marca K.
19. O Sr. Chandler Bing desloca-se para o trabalho usando ônibus ou metrô com probabilidades de 0,2 e 0,8, respectivamente. Quando vai de ônibus, chega atrasado 30% das vezes. Quando vai de metrô, atrasa-se 20% dos dias. Se o Sr. Chandler chegar atrasado ao trabalho em determinado dia, qual a probabilidade dele ter ido trabalhar de ônibus?

20. (O problema é conhecido como o problema da moeda de Bertrand.) Existem três caixas idênticas. A caixa 1 contém duas moedas de ouro, a caixa II uma moeda de ouro e outra de prata e a caixa III duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?