Exercício 1. [2 pontos] Sejam X e Y variáveis aleatórias com fdp conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 20x^3, & 0 \le x < y \le 1. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Determine

(a) a função densidade marginal de Y;

(b) a função densidade condicional de X dado $Y = y$.

(c) $E[X \mid Y = 1/2]$

a) $\forall y \in (0,1)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y 20x^3\,dx = 5x^4 \Big|_{x=0}^{x=y} = 5y^4$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 5y^2 & 0 < y \le 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

b) $\forall x \in (0,y)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{20x^3}{5y^4} = \frac{4x^3}{y^4}$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{y^4} & 0 \le x < y \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

c) $$E(X|Y=1/2) = \int_0^{1/2} x \frac{4x^3}{(1/2)^4}\,dx = \int_0^{1/2} 2^6 x^4\,dx = 2^6 \frac{x^5}{5}\Big|_{x=0}^{x=1/2}$$

$$= 2^6 \cdot \frac{2^{-5}}{5} = \frac{2}{5}$$

Exercício 2. [2 pontos] Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme em $(0,1)$. Defina $Z = \ln(XY)$ e

(a) determine a função geradora de momentos de Z;

(b) use a fgm encontrada em (a) para calcular o valor esperado de Z.

a) $X, Y \sim \text{Unif}(0,1)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Z = \ln(XY)$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{t\ln(XY)}] = E[e^{\ln(XY)^t}]$$

$$= E[(XY)^t] = E[X^t Y^t] = E(X^t)E(Y^t)$$

Note: $E(X^t) = \int_0^1 x^t \, dx = \left.\frac{x^{t+1}}{t+1}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t+1}$

$\forall t \neq -1$

Portanto, $M_Z(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$

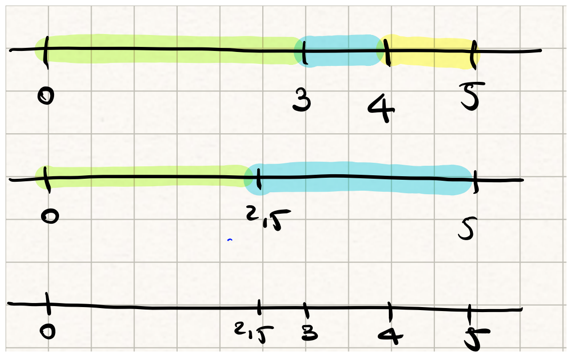
b) $$EZ = \left.\frac{d}{dt} M_Z(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(t+1)^{-2}\right|_{t=0}$$

$$= \left. -2(t+1)^{-3}\right|_{t=0} = \frac{-2}{(0+1)^3} = -2$$

Exercício 3. [2 ponto] Sejam X e Y variáveis aleatórias independes e com f.d.a. dadas por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 3 \\ 3/4 & 3 < x < 4 \\ 3/4 + \frac{x-4}{4}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2x^2}{25}, & 0 \leq y < 2,5 \\ 1 - \frac{2(x-5)^2}{25}, & 2,5 \leq y < 5 \\ 1, & y \geq 5. \end{cases}$$

Defina $W = \max(X, Y)$ e $Z = \min(X, Y)$ e determine a fda de W e Z.



$$F_W(w) = F_X(w)\, F_Y(w)$$

$$= \begin{cases} 0, & w < 0 \\ \frac{w}{4} \cdot \frac{2w^2}{25} & 0 \leq w < 2,5 \\ \frac{w}{4}\left(1 - \frac{2(w-5)^2}{25}\right) & 2,5 \leq w < 3 \\ \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2(w-5)^2}{25}\right) & 3 \leq w < 4 \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{x-4}{4}\right)\left(1 - \frac{2(w-5)^2}{25}\right) & 4 \leq w < 5 \\ 1 & w \geq 5 \end{cases}$$

$$(1 - F_X(x)) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x/4 & 0 \leq x < 3 \\ 1/4 & 3 \leq x < 4 \\ 1/4 - \frac{x-4}{4} & 4 \leq x < 5 \\ 0 & x \geq 5 \end{cases} \qquad (1 - F_Y(y)) = \begin{cases} 1 & y < 0 \\ 1 - \frac{2x^2}{25} & 0 \leq y < 2,5 \\ \frac{2(x-5)^2}{25} & 2,5 \leq y < 5 \\ 0 & y \geq 5 \end{cases}$$

$$(1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 1 & y < 0 \\ (1 - x/4)\left(1 - \frac{2x^2}{25}\right) & 0 \le y < 2{,}5 \\ (1 - x/4)\,\frac{2(x-5)^2}{25} & 2{,}5 \le y < 3 \\ \frac{1}{4}\,\frac{2(x-5)^2}{25} & 3 \le y < 4 \\ \left(1/4 - \frac{x-4}{4}\right)\frac{2(x-5)^2}{25} & 4 \le y < 5 \\ 0 & y \ge 5 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - (1 - x/4)\left(1 - \frac{2x^2}{25}\right) & 0 \le y < 2{,}5 \\ 1 - (1 - x/4)\,\frac{2(x-5)^2}{25} & 2{,}5 \le y < 3 \\ 1 - \frac{(x-5)}{50} & 3 \le y < 4 \\ 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{x-4}{4}\right)\frac{2(x-5)^2}{25} & 4 \le y < 5 \\ 1 & y \ge 5 \end{cases}$$

Exercício 4. [2 pontos] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com $X_n \sim \text{Exp}(n)$. considere $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias não-negativas e tais que $Y_n \mid X_n = x \sim \text{Unif}(0, x)$, isto é,

$$f_{Y_n|X_n}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(a) Determine $E(Y_n), n \geq 1$.

(b) Mostre que $Y_n \to 0$ em probabilidade.

(c) Enuncie a lei fraca dos grandes números para a sequência $X_n, n \geq 1$.

a) $E(Y_n | X_n = x) = \frac{x - 0}{2} = x/2$ $\quad (Y|X=x \sim \text{Unif}(0,x))$

logo

$$E(Y_n) = E[E(Y_n | X_n = x)]$$

$X \sim \text{Exp}(n)$

$$= E(X/2) = 1/2\, EX = 1/2 \times 1/n = 1/2n$$

b) $$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \leq \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\therefore\ Y_n \xrightarrow{P} 0$$

b) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n \Rightarrow E(S_n/n) = 1/n \sum_{k=1}^{n} EX_n = 1/n \sum_{k=1}^{n} 1/k$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + 1/n) \cdot \cancel{n}}{2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \to \infty} 1/2$$

logo, se vale a LfGN

$$\frac{S_n}{n} - \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{ou} \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{n+1}{2n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 1/2$$

Exercício 5. [2 ponto] Suponha que um guincho levante até 3 toneladas sem tombar. Um conjunto de 10 vigas devem ser içadas cada uma com peso médio de 270kg e desvio padrão de 50kg. Determine

(a) a probabilidade aproximada do guincho tombar.

(b) uma cota para a probabilidade da carga total das vigas estar entre 2.900 e 2.500kg.

X_i : peso da i-ésima viga ; $i = 1, \ldots, 10$

$EX_i = 270 \qquad DP(X_i) = 50$

a) $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i \Rightarrow \frac{S_{10}}{10} \approx N\left(270, \frac{50^2}{10}\right)$

logo

$$P(S_{10} > 3000) = P\left(\frac{S_{10}}{10} > 300\right)$$
$$\approx P\left(Z > \frac{300-270}{50/\sqrt{10}}\right)$$
$$= 1 - \phi(1{,}897) = 1 - 0{,}9713 = 0{,}0287$$

b) $ES_{10} = \sum_{i=1}^{10} EX_i = 10 \times 270 = 2.700$

$Var(S_{10}) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{10} Var(X_i) = 10 \times 50^2$

X_i's são indep

$$P(2500 < S_{10} < 2900) = P(-200 < S_{10} - 2700 < 200)$$
$$= P(|S_{10} - 2700| < 200) \leq \frac{Var(S_{10})}{200^2} = \frac{10 \times 50^2}{200^2} = 0{,}625$$