

MAE 221 - Probabilidade - 2021/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 9

- Ex 1.** Sejam X e Y v.a. independentes ambas com distribuição normal com média 0 e variância 1. Determine a f.g.m conjunta de $X + Y$ e $X - Y$. Verifique se são independentes.
- Ex 2.** * A variável aleatória positiva X é chamada de log-normal com parâmetros μ e σ^2 se $\log(X)$ é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 . Use a função geradora de momentos normal para determinar a média e a variância de uma variável aleatória log-normal.
- Ex 3.** Mostre como calcular $Cov(X, Y)$ a partir da função geratriz de momentos conjunta de X e Y .
- Ex 4.** Sejam X_1, \dots, X_n v.a. iid com distribuição exponencial de parâmetro λ . Determine
- (a) $F_{X_{(1)}}(x)$ e $f_{X_{(1)}}(x)$;
 - (b) $F_{X_{(n)}}(x)$ e $f_{X_{(n)}}(x)$.
- Ex 5.** Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ vale que $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$. Em particular se $a \in \{1, 2, \dots\}$, $\Gamma(a) = (a-1)!$.
- Ex 6.** Seja $X \sim Gama(k, \theta)$, mostre que $Var(X) = k\theta^2$.
- Ex 7.** Seja $X \sim Beta(a, b)$, mostre que $Var(X) = \frac{a^2b}{(a+b)(a+b+1)}$
- Ex 8.** * Sejam X_1, \dots, X_n são v.a.'s iid com distribuição Uniforme em $(0, 1)$. Mostre que a k -ésima estatística de ordem $X_{(k)}$ tem distribuição $Beta(k, n+1-k)$.
- Ex 9.** Sejam X_1, \dots, X_n são v.a.'s iid com distribuição Uniforme em $(0, 1)$. A variável aleatória R definida como $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ é dita o *alcance das variáveis* aleatórias observadas. Mostre que $R \sim Beta(n-1, 2)$.
- Ex 10.** Se $X \sim Unif(0, 1)$ e $a > 0$, então $X^{1/a} \sim Beta(a, 1)$.