- **Variável Aleatória Uniforme em** (a, b):
  - $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & se\ a < x < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$. $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se\ a < x < b \\ 1 & se\ x \geq b \end{cases}$
  - $EX = \dfrac{b+a}{2} \quad e \quad Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.
- **Variável Aleatória Exponencial**
  - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}$. $\quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}$.
  - $EX = \frac{1}{\lambda} \quad e \quad Var(X) = 1/\lambda^2$
- **Distribuição condicional**. X e Y discretas

$$p_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

  X e Y contínuas

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0,$$

- **Fda condicional.** $F_{X|Y}(x \mid y) = P(X \leq x \mid Y = y)$
- **Esperança condicional discreta**

$$E(X \mid Y = y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x \mid y), \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. discretas}$$

- **Esperança condicional contínua**

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x \mid y) dx, \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. contínuas}$$

- **Cálculo de esperanças usando condicionais.** $E\big[E(X \mid Y)\big] = EX$. Se Y é uma v.a. discreta

$$EX = \sum_y E(X \mid Y = y) p_y(y).$$

  Se Y é uma v.a. contínua

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) f_y(y) dy.$$

- **Desig. de Markov** Se X não negativa então, $\forall a > 0$, $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$
- **Desig. de Chebyshev** Se X média e variância finitas, então, $\forall k > 0$, $P(|X - EX| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$
- **Função geradora de momentos.**

$$M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

- **Função geradora de momentos conjunta**

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1 + ..., t_n X_n}], \ t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^n$$

- **Estatísticas de ordem.** Dadas $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s independentes com funções de distribuição $F_1, \dots, F_n$ respectivamente, a distribuições de $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são dadas respectivamente por:

$$F_{(1)}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(z)] \quad e \quad F_{(n)}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z)$$

- **Convergência em probabilidade:** $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Convergência quase certa: $X_n \xrightarrow{\mathbf{qc}} X$

$$P\Big(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1.$$

Convergência em distribuição: $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ todo ponto x em que F é contínua, vale que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Lema de Borel Cantelli. Seja $A_1, A_2, \dots$ uma sequência de eventos.

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \text{ infinitas } \text{ vezes}) = 0$

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e os A_n's são independentes, então $P(A_n \text{ infinitas } \text{ vezes}) = 1$

Lei fraca dos Grandes Números. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a. 's **independentes**, com mesma média $EX_k = \mu < \infty$ e mesma **variância** $\sigma^2 < \infty$. Então, isto é

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu, \; n \to \infty$$

Lei (fraca) dos Grandes Números de Khintchin. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a. 's **independentes e identicamente distribuídas**, com média $EX_k = \mu < \infty$. Então,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu,$$

Primeira lei de Kolmogorov. Sejam X_1, X_2 v.a.'s independentes e com média finita (suponha $EX_k = \mu_k$)e suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Então

$$\frac{S_n - \sum \mu_k}{n} \xrightarrow{\text{qc}} 0 \; n \to \infty.$$

Lei forte de Kolmogorov Sejam X_1, X_2 v.a.'s i.i.d com média finita μ, então

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} 0, \; n \to \infty.$$

Teorema Central do Limite Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a. 's i.i.d. com $EX_k = \mu$ e $Var(X_k) = \sigma^2 < \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) = P(Z \le a) = \Phi(a).$$

Isto é, $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} Z$, quando $n \to \infty$.