MAE 221 - Probabilidade - 2022/01

Aline Duarte

Lista de Exercícios 2 -Probabilidade

Exercício 1. Determine o espaço amostral dos seguintes experimentos.

(a) Conta-se o número de peças defeituosas em um dia de produção.

(b) Estuda-se o sexo de bebês trigêmios.

(c) Numa entrevista, pergunta-se sobre o hábito de fumar.

(d) Lança-se um dado até obter a face 6.

Exercício 2. Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω. Expresse em notação os seguintes eventos:

(a) A e B ocorrem, mas C não.

(b) Nenhum evento ocorre.

(c) No máximo dois eventos ocorrem.

(d) A ocorre, mas no máximo mais um evento ocorre.

(e) A ocorrência de A implica a de B e C.

(f) A ocorrência de A implica a de B ou C.

(g) Os três eventos ocorrem e o complementar de A também.

Exercício 3. Uma moeda é lançada 3 vezes. Descreva o espaço amostral. Considere os eventos A_i : cara no $i-$ésimo lançamento, $i = 1, 2, 3$. Descreva em termos do experimento os seguintes eventos:

(a) $A_1^c \cap A_2$;

(b) $A_1^c \cup A_2$;

(c) $(A_1^c \cap A_2)^c$;

(d) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

Exercício 4. Suponha em experimento cujo espaço amostral é $\Omega = [0, 1]$. Considere os eventos $A = \{x : \ 1/4 \leq x \leq 5/8\}$ e $B = \{x : \ 1/2 \leq x \leq 7/8\}$. Determine os eventos

(a) A^c;

(b) $A \cap B^c$;

(c) $(A \cup B)^c$;

(d) $A^c \cup B$

Exercício 5. Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω. Verifique que:

(a) $A \cup A^c = \Omega$;

(b) $A \cap A^c = \emptyset$;

(c) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(d) $(A^c)^c = A$

(e) $A = B$ então $A^c = B^c$

(f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

(g) $\big[(A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)\big] \cap (A \cap B \cap C^c) = \emptyset$;

Exercício 6. Mostre que as seguintes coleções de conjuntos são σ-álgebra.

(a) Seja $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$.

(b) Dado Ω qualquer, seja A um subconjunto de Ω, e $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$

(c) Dado Ω qualquer, sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ σ-álgebras de Ω, defina $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Exercício 7. * Mostre que

1. $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$,
2. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

Exercício 8. No processo produtivo de uma indústria são utilizadas diariamente duas unidades de um certo insumo. Ocorre que as diferentes formulações desse insumo podem afetar ou não o nível de poluição ambiental. Num determinado dia verifica-se que a empresa possui 40 unidades desse insumo em estoque, entre as quais 10 são poluentes e 30 não poluentes. Se as duas unidades utilizadas em um determinado dia forem selecionadas aleatoriamente uma após a outra, qual a probabilidade de que

(a) segunda unidade também seja poluente, se a primeira for poluente?

(b) as duas unidades selecionadas aleatoriamente sejam não poluentes?

(c) nas duas unidades selecionadas aleatoriamente, uma seja poluente e a outra não?

Exercício 9. Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. Sabe-se que é 3 vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Qual a probabilidade de ganhar para cada um dos times?

Exercício 10. Três companhias A, B e C disputam a obtenção do contrato de fabricação de um foguete meteorológico. A chefia do departamento de vendas de A estima que sua companhia tem probabilidade igual à da companhia B de obter o contrato, mas que por sua vez é igual a duas vezes a probabilidade de C obter o mesmo contrato. Determine a probabilidade de A ou C obter o contrato.

Exercício 11. Uma cidade tem 30000 habitantes e três jornais A,B e C. Uma pesquisa de opinião revela que: 12000 lêem A; 8 000 lêem E; 7000 lêem A e B; 6 000 lêem C; 4500 lêem A e C; 1000 lêem B e C; 500 lêem A, B e C. Qual a probabilidade de que um habitante leia

(a) pelo menos um jornal;

(b) só um jornal.

Exercício 12. Uma recepcionista recebeu n chapéus, mas estes ficaram totalmente misturados. Decidiu, então devolvê-los a esmo. Calcule a probabilidade de que nenhum homem receba o próprio chapéu.

Exercício 13. Seis bolas diferentes são colocadas aleatoriamente em três urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas sejam ocupadas?

Exercício 14. Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcule a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

Exercício 15. Três companhias A, B e C disputam a obtenção do contrato de fabricação de um foguete meteorológico. A chefia do departamento de vendas de A estima que sua companhia tem probabilidade igual à da companhia B de obter o contrato, mas que por sua vez é igual a duas vezes a probabilidade de C obter o mesmo contrato. Determine a probabilidade de A ou C obter o contrato.

Exercício 16. Suponha que em um determinado supermercado a probabilidade de um cliente esperar 10 minutos ou mais na fila do caixa é de 25%. Certo dia, o Capitão Rapadura e sua esposa decidem fazer compras nesse supermercado separadamente, cada um dirigindo-se a um caixa diferente. Se eles entrarem na fila do caixa ao mesmo tempo, determine a probabilidade de:

(a) o Capitão Rapadura esperar menos de 10 minutos na fila;

(b) ambos esperarem menos de 10 minutos, supondo que os tempos de atendimento dos dois eventos sejam independentes;

(c) um ou outro, esperarem 10 minutos ou mais.

Exercício 17. * Sabe-se que os comerciais de televisão são destinados a conquistar a maior parcela possível de audiência do programa que patrocina. Entretanto, uma agência de publicidade desconfia que as crianças, na maioria dos casos, pouco entendem esses comerciais, mesmo aqueles que são destinados a conquistá-las. Os estudos da agência mostram que as porcentagens de crianças que entendem a mensagem de um comercial de televisão, por grupos de idade, são as indicadas na tabela a seguir.

Entendem o Comercial	Idade		
	5 ⊢ 7	8 ⊢ 10	11 ⊢ 12
Sim	46	62	90
Não	54	38	10

A agência de publicidade mostra um novo comercial de TV a uma criança de 6 anos e outro a uma de 9 anos, visando descobrir o grau de entretenimento de cada uma com relação a esses comerciais.

(a) Qual a probabilidade de que a mensagem do comercial mostrado à criança de 6 anos seja entendida por ela?

(b) Qual a probabilidade de que ambas as crianças entendam os comerciais?

(c) Qual a probabilidade de que pelo menos uma das crianças entenda os comerciais?

Exercício 18. Sejam A e B subconjuntos do espaço amostral Ω. Considere uma sequência $\{A_n, n \leq 1\}$ tal que $A_{2n-1} = A$ e $A_{2n} = B$. Mostre que

$$\liminf\ A_n = A \cap B \quad e \quad \limsup\ An = A \cup B$$

Exercício 19. * Considere dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral. Suponha que $P(A \cup B) = 0,85$ e $P(A \cap B) = 0,45$ e classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.

(i) $P(A) + P(B) = 1,3$

(ii) $P(A) \geq 0,45$

(iii) $P(A^c) \geq 0,15$

(iv) $P(A \cap B^c) \leq 0,4$

Exercício 20. * Uma escola de ensino médio quer avaliar o conhecimento em assuntos gerais dos seus alunos. Para isso, elaborou um quiz e premiará os 3 estudantes com as maiores notas no quiz. Suponha que 23 alunos primeiro ano, 24 do segundo ano e 12 do terceiro ano tenham participado do concurso e determine

(i) a probabilidade de um aluno de cada ano ser premiado;

(ii) a probabilidade dos 3 premiados serem do primeiro ano;

(iii) a probabilidade de nenhum estudante do primeiro ano ser premiado.