Lista 2

1) a) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

n: numero de peças produzidas em 1 dia

b) M: Sexo masculino
F: Sexo Feminino

$\Omega = \{(M,M,M), (M,M,F), (M,F,M), (F,M,M), (F,F,M), (F,M,F), (M,F,F), (F,F,F)\}$

c) $\Omega = \{S, N\}$

d) $\Omega = \mathbb{N}$

2) a) $A \cap B \cap C^c$

b) Ω^c

c) $(A \cap B \cap C)^c$

d) $A \cap (B \cap C)^c$

e) $A \subseteq (B \cap C)$

f) $A \subseteq (B \cup C)$

g) $(A \cap B \cap C) \cap A^c = \emptyset$

3) Seja

C: Coroa $\qquad$ K: cara

a) $A_1^c = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K)\}$

$A_2 = \{(K,K,K), (K,K,C), (C,K,K), (C,K,C)\}$

$A_1^c \cap A_2 = \{(C,K,K), (C,K,C)\}$

b) $A_1^c \cup A_2 = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,K,C), (K,K,C)\}$

c) $(A_1^c \cap A_2)^c = (A_1 \cup A_2^c) = \{(K,K,K), (K,K,C), (K,C,K), (K,C,C), (C,C,K), (C,C,C)\}$

d) $(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = \{(K,C,K), (K,K,C), (K,K,K)\}$

4 a) $A^c = \{x \in \Omega : x < \frac{1}{4} \cup x > \frac{5}{8}\}$

b) $A \cap B^c = \{x \in \Omega : \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}\}$

c) $(A \cup B)^c = \{x \in \Omega : x < \frac{1}{4} \cup x > \frac{7}{8}\}$

d) $A^c \cup B = \{x \in \Omega : x < \frac{1}{4} \cup x \geq \frac{1}{2}\}$

5) a) $A \cup A^c = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ou } x \in A^c\}$

$= \{x \in \Omega : \underbrace{x \in A \text{ ou } x \notin A}_{x \in \Omega}\} \Rightarrow A \cup A^c = \Omega$

b) $A \cap A^c = \{x \in \Omega : x \in A \text{ e } x \in A^c\}$

$= \{x \in \Omega : \underbrace{x \in A \text{ e } x \notin A}_{x \in \emptyset}\} \Rightarrow A \cap A^c = \emptyset$

c) $(A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup C$ e $x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow (A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

$(A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \text{ ou } C)$ e $x \in (B \text{ ou } C)$, simultaneamente

$\Rightarrow x \in A$ e B ou $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Como temos $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ e $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$, logo

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

d)

$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow A \subseteq (A^c)^c$

$x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A^c)^c \subseteq A$

Como, $A \subseteq (A^c)^c$ e $(A^c)^c \subseteq A$, então $A = (A^c)^c$

e) $A = B \Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B$

$\Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \notin B$

$\Rightarrow A^c = B^c$

e) $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

$\Rightarrow A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

$A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

$\Rightarrow (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$

Como $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ e $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$, logo $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

f) Vamos definir:

$D = (A \cap B^c \cap C)$
$E = (A^c \cap B \cap C)$
$F = (A \cap B \cap C^c)$

Então reescrevendo o problema teremos

$[(A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)] \cap (A \cap B \cap C^c) = (D \cup E) \cap F$

$= (D \cap F) \cup (E \cap F)$

$(D \cap F) = (A \cap B^c \cap C) \cap (A \cap B \cap C^c) = \emptyset$
$(E \cap F) = (A^c \cap B \cap C) \cap (A \cap B \cap C^c) = \emptyset$ $\Rightarrow \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

6 a) $\Omega = \{1,2,3\}$ $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}\}$

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$ por definição

(ii) Vale
$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F} \\ \emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F} \\ \{1\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{1\}^c = \{2,3\} \in \mathcal{F} \\ \{2,3\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{2,3\}^c = \{1\} \in \mathcal{F} \end{cases}$$

(iii) Seja $A_1, A_2, \dots$ eventos de $\mathcal{F}$. Temos 4 possibilidades

$\exists i$ tal que $A_i = \Omega$, então:
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega \in \mathcal{F}$$

$\exists i, j$ tais que $A_i = \{1\}$, $A_j = \{2,3\}$ então
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$$

Se para qualquer $i = 1, 2, \dots$ $A_i = \{1\}$ ou $A_i = \emptyset$, então
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{1\} \in \mathcal{F}$$ ou, se todo $A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset \in \mathcal{F}$

Se para qualquer $i = 1, 2, \dots$ $A_i = \{2,3\}$ ou $A_i = \emptyset$, então
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{2,3\} \in \mathcal{F}$$ ou, se todo $A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset \in \mathcal{F}$

Logo $\mathcal{F}$ é σ-álgebra

b) (i) $\Omega \in \mathcal{F}$ por definição

(ii) $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

$\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$

$A^c \in \mathcal{F}$

$(A^c)^c \in \mathcal{F}$

(iii) Seja $A_1, A_2, \dots$ eventos de $\mathcal{F}$. Temos 4 possibilidades

$\exists i$ tal que $A_i = \Omega$, então:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega \in \mathcal{F}$$

$\exists i, j$ tais que $A_i = A$, $A_j = A^c$ então

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$$

Se para qualquer $i = 1, 2, \dots$ $A_i = A$ ou $A_i = \emptyset$, então

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \in \mathcal{F}$ ou, se todo $A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset \in \mathcal{F}$

Se para quaquer $i = 1, 2, \dots$ $A_i = A^c$ ou $A_i = \emptyset$, então

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A^c \in \mathcal{F}$ ou, se todo $A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset \in \mathcal{F}$

Logo $\mathcal{F}$ é σ-álgebra

7) a) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

b) $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - \cancel{P((A \cap B) \cap (A \cap B^c))}$ 0

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

8) Seja:

A: a primeira unidade de insumo
B: a segunda unidade de insumo

P: poluente
NP: não poluente

a) Queremos calcular $P(B = P / A = P)$, como a primeira unidade já foi selecionada então temos 9 poluentes de 39 insumos restantes, logo:

$$P(B = P / A = P) = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}$$

b) $P(A = np \cap B = np) = P(B = np / A = np) P(A = np) = \frac{29}{39} \cdot \frac{30}{40} = \frac{29}{52}$

c) $P((A=np \cap B=p) \cup (A=p \cap B=np)) =$

$= P(A=np \cap B=p) + P(A=p \cap B=np) - \cancel{P((A=p \cap B=np) \cap (A=np \cap B=p))}$ 0

$= \frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39} + \frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39} = \frac{30}{78} = \frac{5}{13}$

9)

$$\begin{cases} P_A = 3P_B \\ P_B = 2P_C \\ P_C = 3P_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A = 3.2.3P_D \\ P_B = 2.3P_D \\ P_C = 3P_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A = 18P_D \\ P_B = 6P_D \\ P_C = 3P_D \end{cases}$$

Como $P_A + P_B + P_C + P_D = 1$, então:

$$18P_D + 6P_D + 3P_D + P_D = 1 \Rightarrow P_D = 1/28$$

Logo:

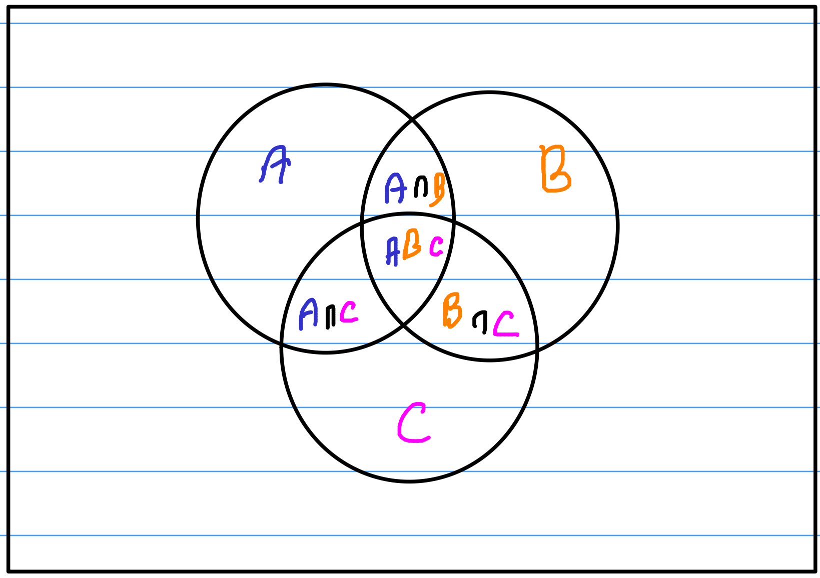
$$\begin{cases} P_A = 18/28 \\ P_B = 6/28 \\ P_C = 3/28 \\ P_D = 1/28 \end{cases}$$

10) Considerando que há apenas um contrato, e apenas uma companhia pode consegui-lo, teremos:

$$\begin{cases} P(A) = P(B) \\ P(A) = 2P(C) \\ P(A) + P(B) + P(C) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = P(B) \\ P(A) = 2P(C) \\ 2P(C) + 2P(C) + P(C) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 2/5 \\ P(B) = 2/5 \\ P(C) = 1/5 \end{cases}$$

Como A, B, C são disjuntos, pois apenas uma empresa pode obter o contrato, teremos $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 2/5 + 1/5 = 3/5$

11)



$A \cap B \cap C = 500$
$A \cap B = 7000 - 500 = 6500$
$A \cap C = 4500 - 500 = 4000$
$A = 12000 - 6500 - 4000 - 500 = 1000$
$B \cap C = 1000 - 500 = 500$
$B = 8000 - 500 - 500 - 6500 = 500$
$C = 6000 - 500 - 500 - 4000 = 1000$

a) Nesse caso basta somar todos os casos, isto é lêem um, dois ou os 3 jornais, então teremos:

$$\frac{1000 + 500 + 1000 + 6500 + 4000 + 500 + 500}{30000} = \frac{14000}{30000} = \frac{7}{15}$$

b) Basta somar apenas os casos que lêem apenas A, apenas B e apenas C

$$\frac{1000 + 500 + 1000}{30000} = \frac{2500}{30000} = \frac{1}{12}$$

12) Seja

E: nenhum homem recebe seu proprio chapéu.
A_i: O i-ésimo homem recebe seu chapéu de volta

E^c: pelo menos um homem recebe seu proprio chapeu

Logo,

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Como A_i não são disjuntos, temos que considerar as interseccões 2 a 2, 3 a 3, ..., n a n, note que a ordem das intersecções não importa. Então teremos:

$$P(E) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\right)$$

$$= 1 - \left(n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{n!}\right)$$

$$= 1 - 1 + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}\cdot\frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{3!\,(n-3)!}\frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow P(E) = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

13) $\dfrac{\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \cdot 3^3}{3^6}$ → bolas que podem ir para qualquer lugar

bolas que obrigatoriamente vão cada uma para uma urna

total de possibilidades

$$= \frac{\frac{6!}{3!3!} \cdot 3^3}{3^6} = \frac{5 \cdot 4}{3^3} = \frac{20}{27}$$

14) Seja:

A: números divisíveis por 3

B: números divisíveis por 5

$A = \dfrac{300}{3} = 100$ $\quad B = \dfrac{300}{5} = 60$ $\quad A \cap B = \dfrac{300}{15} = 20$

Então teremos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{100}{300} + \frac{60}{300} - \frac{20}{300} = \frac{140}{300} = \frac{7}{15}$$

15) = Exercício 16

16) a) Seja R: Rapadura esperar menos de 10m.

$P(R^c) = 0,25 \Rightarrow P(R) = 1 - 0,25 = 0,75$

b) Seja E: esposa esperar menos de 10m.

$P(R \cap E) \overset{\text{indep}}{=} P(\ ) \cdot P(E) = 0,75 \cdot 0,75 = 0,5625$

c) $P(R \cap E) = 0{,}5625 \Rightarrow P((R \cap E)^c) = 1 - P(R \cap E)$

$$P(R^c \cup E^c) = 1 - 0{,}5625$$

$$= 0{,}4375$$

17) a) Pela tabela, temos a probabilidade de 46%

b) Devido a independencia entre o entendimento das duas crianças teremos:

$$0{,}46 \cdot 0{,}62 = 0{,}2852$$

c) A probabilidade da união é a das probabilidades, menos a intersecção das probabilidades, então teremos

$$0{,}46 + 0{,}62 - 0{,}2852 = 0{,}7948$$

18) a) $\lim\inf = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = (A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cap A_4) \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \cap A_{2k})$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} (A \cap B) = A \cap B$$

Portanto

$$\lim\inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B) = A \cap B$$

b) $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup A_4) \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \cup A_{2k})$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cup B) = A \cup B$$

Portanto

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cup B) = A \cup B$$

19) (I) Dados eventos $A, B \in \mathcal{F}$ faremos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0{,}85 = P(A) + P(B) - 0{,}45$$

$$P(A) + P(B) = 1{,}3$$

$\therefore$ (I) é verdadeiro

(II) Temos que $(A \cap B) \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$

$$0{,}45 \leq P(A)$$

Então (II) é verdadeiro

(III) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Nesse caso queremos maximizar $P(A)$ para minimizar $P(A^c)$. Então, como

$$(A \cup B) \supset A \Rightarrow P(A \cup B) \geq P(A)$$
$$0{,}85 \geq P(A)$$

Logo, teremos

$$P(A^c) \geq 1 - 0{,}85$$
$$P(A^c) \geq 0{,}15$$

Portanto, a afirmação (III) é verdadeira

(IV) Pelo exercício 7B temos

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B^c) = P(A) - 0{,}45$$

Como temos $P(A) \leq 0{,}85$, logo

$$P(A \cap B^c) \leq 0{,}85 - 0{,}45$$

$$P(A \cap B^c) \leq 0{,}4$$

Logo (IV) é verdadeira

20) a)

1º ano, 2º ano, 3º ano

$$\frac{\binom{23}{1}\binom{24}{1}\binom{12}{1}}{\binom{59}{3}} = \frac{\frac{23!}{22!\,1!}\cdot\frac{24!}{1!\,23!}\cdot\frac{12!}{11!\,1!}}{\frac{59!}{56!\,3!}} = \frac{23\cdot 24\cdot 12}{59\cdot 58\cdot 57}\cdot 3! \approx 0{,}204$$

$\binom{59}{3}$ → Todas combinações

b)

$$\frac{\binom{23}{3}\binom{24}{0}\binom{12}{0}}{\binom{59}{3}} = \frac{\frac{23!}{20!\,3!}}{\frac{59!}{56!\,3!}} = \frac{23\cdot 22\cdot 21}{59\cdot 58\cdot 57} \approx 0{,}05$$

Apenas do 1º ano

c)

$$\frac{\binom{59-23}{3}}{\binom{59}{3}} = \frac{\binom{36}{3}}{\binom{59}{3}} = \frac{\frac{36!}{33!\,3!}}{\frac{59!}{56!\,3!}} = \frac{36\cdot 35\cdot 34}{56\cdot 55\cdot 54} \approx 0{,}26$$

→ Qualquer combinação sem Alunos do 1 ano