Tópico 1: Análise combinatória

MAE0221 - Probabilidade I

Aline Duarte - 2022/01

Motivação

1. [Dantas] Suponha que desejamos ir da cidade A à cidade C. Os percursos possíveis passam pela cidade B. Se há dois caminhos ligando a cidade A a cidade B e três caminhos que ligam a cidade B a C, de quantas formas podemos ir da cidade A a C?

O princípio básico da contagem

Considere dois experimentos. Se o experimento 1 pode gerar m resultados possíveis e se, para cada resultado do experimento 1, houver n resultados possíveis para o experimento 2, então os dois experimentos possuem conjuntamente mn diferentes resultados possíveis.

O princípio básico da contagem

Considere dois experimentos. Se o experimento 1 pode gerar *m* resultados possíveis e se, para cada resultado do experimento 1, houver *n* resultados possíveis para o experimento 2, então os dois experimentos possuem conjuntamente *mn* diferentes resultados possíveis.

Prova [por exaustão]: Basta notar que os resultados possíveis são

$$\begin{array}{lll} (1,1), & (1,2), & \ldots,(1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \ldots,(2,n) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ (m,1), & (m,2), & \ldots,(m,n) \end{array}$$

onde (i,j) representa o resultado conjunto dos experimentos quando o experimento 1 apresentou o i-ésimo resultado possível seguindo do j-ésimo resultado possível para o experimento 2. Portanto, o total de resultados possíveis consistem em m linhas, cada uma contendo n elementos.

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

1. [Dantas] Desejamos ir da Cidade A à cidade C, passando no caminho pela cidade B. Entre as cidades A e B passam 2 rodovias, enquanto entre as cidades B e C passam 3. De quantas maneiras diferentes é possível fazer o trajeto desejado?
2. [Ross] Em uma comunidade composta por 10 mulheres, cada uma com 3 filhos, um sorteio decidirá quem serão a mãe e o filho do ano. Quantas escolhas diferentes são possíveis?
3. [Feller] Um baralho comum é formado por cartas agrupadas em 4 naipes, cada um dos quais contém 13 cartas (ás, 2, 3,..., valete, dama, rei). Cada carta fica determinada pelo seu naipe e pelo seu valor. Quantas cartas tem em um baralho?

Princípio básico da contagem geral

Considere r experimentos obedecendo a seguinte lógica.

- O experimento 1 pode gerar n_1 resultados possíveis.
- Para cada um dos n_1 resultado possíveis do experimento 1, há n_2 resultados possíveis para o experimento 2.
- Para cada um dos resultado possíveis dos experimento 1 e 2, há n_3 resultados possíveis para o experimento 3.
- ...
- Para cada um dos resultado possíveis dos experimento 1, 2 ..., r-1, há n_r resultados possíveis para o experimento r.

Então os r experimentos possuem conjuntamente $n_1 n_2 \ldots n_r$ diferentes resultados possíveis.

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

4. [Ross] Uma comissão de faculdade é composta por 3 estudantes calouros, 4 estudantes do segundo ano, 5 do terceiro ano e 2 formandos. Um subgrupo dessa comissão com um representante de cada ano deverá ser escolhido. Quantos subgrupos diferentes são possíveis?

5. [Ross] Quantas placas de automóveis com 7 símbolos, dos quais os três primeiros são letras e os quatro últimos são números são possíveis?
   Se não pudermos repetir letras e números?

Permutação

6. De quantas maneiras diferentes podemos **arranjar** três símbolos distintos? Considere os símbolos $\triangle, \bigcirc, \square$, nesse caso os resultados possíveis são

$$\begin{array}{cc} \triangle \bigcirc \square & \triangle \square \bigcirc \\ \bigcirc \triangle \square & \bigcirc \square \triangle \\ \square \bigcirc \triangle & \square \triangle \bigcirc \end{array}$$

De forma equivalente, pelo PBC temos: 3x2x1=6.

- Arranjo = lista **ordenada** e **sem repetição** de todos os símbolos
- Número de permutações = Número de arranjos

Número de *permutações* de n elementos distintas é

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$$

6' Considere o conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Quantas permutações dos elementos de C existem?

7. De quantas maneiras possíveis 6 pessoas podem sentar-se numa mesa de jantar?

8. [Ross] Um grupo formado por 6 homens e 4 mulheres prestam uma prova de matemática. Suponha que nenhum dos estudantes tenham tirado a mesma nota.
   (a) Quantas classificações são possíveis.
   (b) Se os homens e as mulheres forem classificados apenas entre si, quantas classificações diferentes são possíveis?

9. De quantas maneiras 4 livros de matemática, 3 de química, 2 de biologia e 5 de língua portuguesa podem ser arranjados em uma estante de maneira que livros com o mesmo assunto fiquem juntos?

Caso especial de permutação

10. [Ross] Quantas “palavras” diferentes podem ser formadas a partir das letras PEPPER?

Caso especial de permutação

10. [Ross] Quantas "palavras" diferentes podem ser formadas a partir das letras PEPPER?

$$
\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}
$$

De forma geral

Lema

Considere uma população com n elementos de r tipos diferentes, com $n_1, n_2, \ldots n_r$ elementos cada. Suponha que elementos de mesmo tipo sejam indistinguíveis. Nesse caso, o número de possíveis de permutações diferente será

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

11. [Ross] Um torneio de xadrez tem dez competidores, dos quais quatro são russos, três são dos Estados Unidos, três são da Grã-Bretanha e um é do Brasil. Se o resultado do torneio listar apenas a nacionalidade dos jogadores em sua ordem de colocação, quantos resultados serão possíveis?

Combinação

Quando estamos interessados apenas no **número de grupos** possíveis, sem nos prendermos na disposição dos elementos no arranjo, o número de resultados possíveis muda.

12. Quantos **subgrupos** de 3 letras é possível com as cinco primeiras letras do alfabeto?

Combinação

Quando estamos interessados apenas no **número de grupos** possíveis, sem nos prendermos na disposição dos elementos no arranjo, o número de resultados possíveis muda.

12. Quantos **subgrupos** de 3 letras é possível com as cinco primeiras letras do alfabeto?

Nesse caso,

- população $= \{A, B, C, D, E\}$,
- todos os arranjos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA resultam num mesmo subconjunto $\{A, B, C\}$,

Quando estamos interessados apenas no **número de grupos** possíveis, sem nos prendermos na disposição dos elementos no arranjo, o número de resultados possíveis muda.

12. Quantos **subgrupos** de 3 letras é possível com as cinco primeiras letras do alfabeto?

Nesse caso,

- população $= \{A, B, C, D, E\}$,
- todos os arranjos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA resultam num mesmo subconjunto $\{A, B, C\}$,
- ou seja, o número de ambiguidades na construção de casa subconjunto possível é dado pelo número de permutação possíveis de 3 letras.

Combinação

$$\begin{array}{cccc} ABC & ABD & \dots & CDE \\ ACB & ADB & \dots & CED \\ BAC & BAD & \dots & DCE \\ BCA & BDA & \dots & DEC \\ CAB & DAB & \dots & ECD \\ CBA & DBA & \dots & EDC \end{array}$$

- Assim, o número total de subconjuntos pode ser obtido por

$$\frac{total\ de\ arranjos}{ambiguidade} = \frac{5.4.3}{3!} = \frac{5!}{3!2!}$$

Combinação

De forma geral, o número de arranjos de k elementos possíveis de um conjunto com n elementos é dado por $n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)$, enquanto o número de arranjos equivalentes será dado por $k!$. Portanto, o número total de subconjuntos de k elementos de uma conjunto com n elementos é dado por

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Nesse caso dizemos que $\binom{n}{k}$ é o número de **combinações** possíveis de n elementos em grupos de k elementos cada. Também é comum dizer apenas que $\binom{n}{k}$ é "n tomado k a k"

Convenção: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

13. [Dantas] Seis times participam de um torneio de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais. Quantos jogos serão realizados?
14. [Ross] Uma comissão deve ser formada por três de vinte estudantes. Quantas comissões são possíveis?
15. [Ross] De um grupo de cinco mulheres e sete homens, quantos comitês diferentes formados por duas mulheres e três homens podem ser formados? E se dois dos homens estiverem brigados e se recusarem a trabalhar juntos?

O teorema binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \geq 1$$

Prova por indução

(i) Mostra que vale para a base de indução (é verdade para o primeiro valor possível)

(ii) Supõe que vale para o caso n (resp. para o caso $n-1$)

(iii) Mostra que vale pata o caso $n+1$ (resp. para o caso n)

Corolário

Existem 2^n subconjuntos possíveis de um conjunto com n elementos