

MAE 221 - Probabilidade I - 2022/01

Aline Duarte - Prova 2

Nome: _____

Número USP: _____ Data _____

Exercício 1. [2 pontos] Sabe-se que a densidade óssea do fêmur de mulheres saudáveis segue distribuição normal com média 1 (g/cm³) e desvio padrão 0,4(g/cm³). Uma mulher com densidade óssea do fêmur entre 1 e 2,5 desvios abaixo da média é dita com baixa massa óssea e com osteoporose se tiver mais de 2,5 desvios abaixo da média.

- (a) [1 ponto] Determine as probabilidades de uma mulher ser diagnosticada com baixa massa óssea e com osteoporose.
- (b) [1 ponto] Considere $Y = 3\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ e determine a função densidade de probabilidade de Y .

Exercício 2. [1,5 ponto] Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta parcialmente dada na tabela abaixo e com função de distribuição acumulada F

$Y \setminus X$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	1/2			2/3
1		1/6		
$p_X(x)$				

- (a) [1 ponto] Suponha que $F(0, 5; 1, 5) = 2/3$ e $F(1, 5; 0, 5) = 1/2$ e determine os valores da função de probabilidade conjunta.
- (b) [0,5 ponto] As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

Exercício 3. [4,5 pontos] Sejam X e Y v.a's contínuas com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & \text{se } 0 \leq x < 1, y > 0 \\ (a - x)e^{-y}, & \text{se } 1 \leq x \leq 2, y > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) [1 ponto] Determine o valor de a para a função densidade conjunta esteja bem definida.
- (b) [1 ponto] Calcule as distribuições marginais de X e de Y e verifique se as variáveis X e Y são independentes.
- (c) [1 ponto] Determine a função de distribuição acumulada conjunta de X e Y .
- (d) [1,5 ponto] Defina $T = X + Y$ e $U = X/2$ e determine a função densidade conjunta de T e U .

Exercício 4. [2 pontos] Suponha que a altura de uma planta (X) segue uma distribuição exponencial de taxa 3; quanto maior a planta, mais cara ela é comercializada. Além disso, outro indicador da saúde da planta é o tamanho da circunferência do caule (Y); quanto maior, mais forte esta a planta. O preço final da planta varia de acordo com um índice Z que é soma da altura e da circunferência do caule, isto é $Z = X + Y$.

- (a) [1 ponto] Supondo que o tamanho da circunferência siga uma distribuição uniforme em $(0, 1)$ e que X e Y seja independentes, determine a função densidade de Z .
- (b) [1 ponto] O preço final de comercialização da planta seja definido pela equação

$$W = 15 + 12Z$$

Determine o preço médio por planta.