Distribuição normal bivariada e suas propriedades

MAE0221 - Probabilidade I

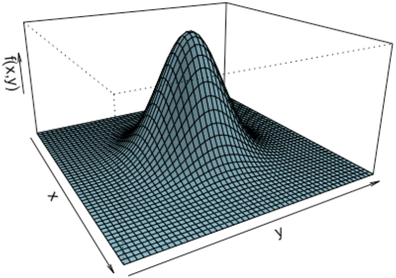
Aline Duarte

Dizemos que as v.a.'s X e Y tem distribuição normal bidimensional se sua função de densidade conjunta for dada, para $-\infty < x, y < \infty$, por

$$f(x,y) = \frac{exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

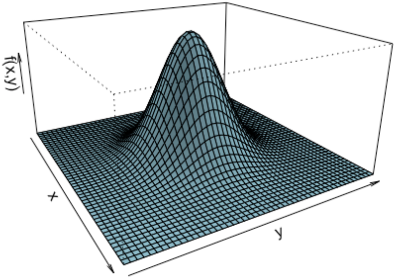
- as *médias* μ_X e μ_y podem assumir qualquer valor real;
- as *variâncias* σ_X^2 e σ_y^2 devem ser positivas e
- o *coeficiente de correlação* $-1 < \rho < 1$

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

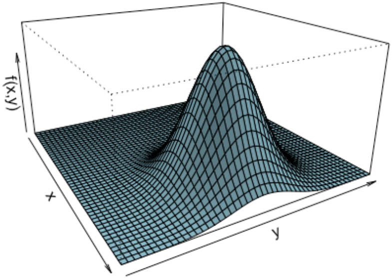


N(0,0,1,1,0)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

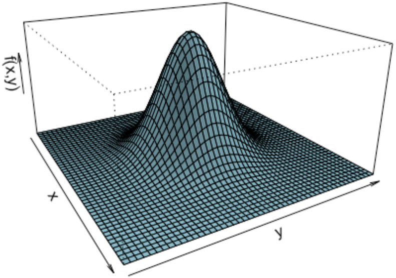


N(0,0,1,1,0)

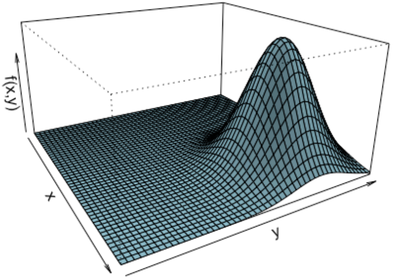


N(2,0,1,1,0)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

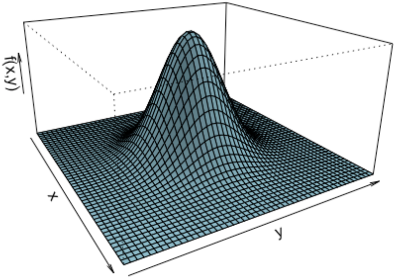


N(0,0,1,1,0)

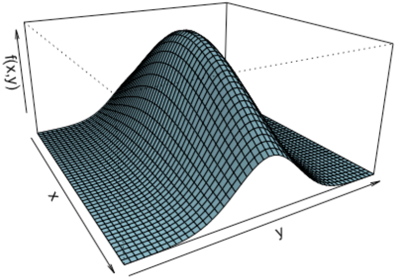


N(2,2,1,1,0)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

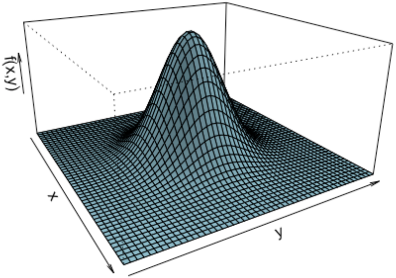


N(0,0,1,1,0)

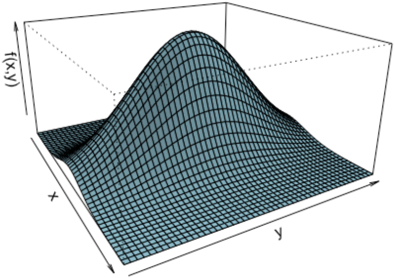


N(0,0,3,1,0)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

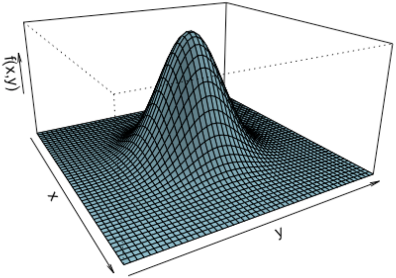


N(0,0,1,1,0)

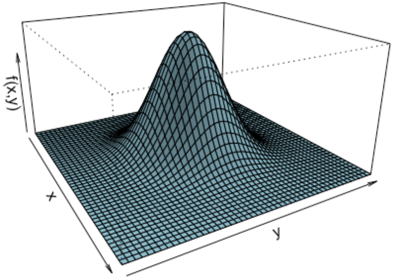


N(0,0,1,2,0)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

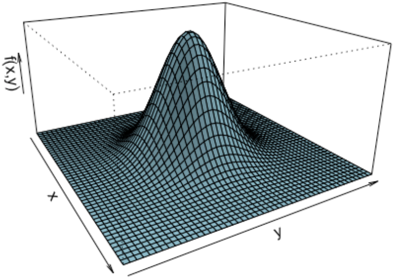


N(0,0,1,1,0)

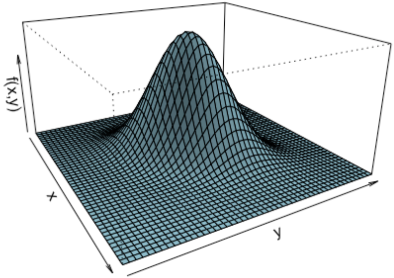


N(0,0,1,1,0.2)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

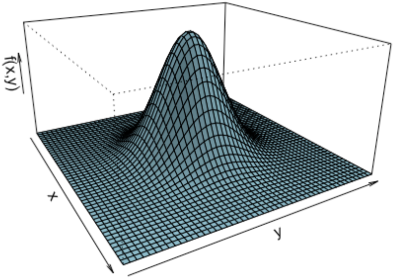


N(0,0,1,1,0)

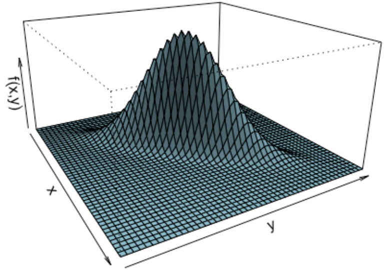


N(0,0,1,1,0.5)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

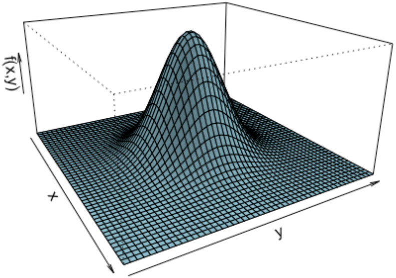


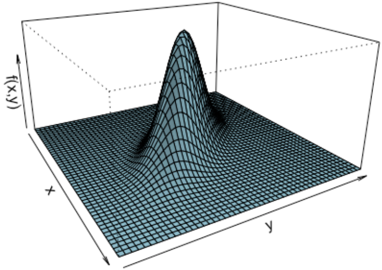
x N(0,0,1,1,0)



N(0,0,1,1,0.9)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

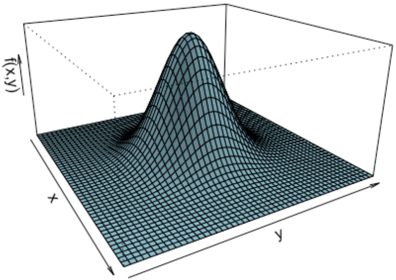


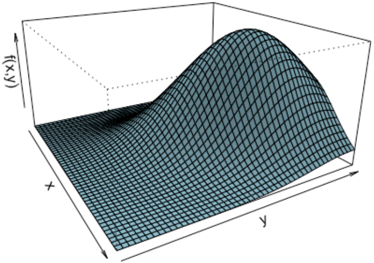


N(0,0,1,1,0)

N(0,0,1,1,-0.7)

f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$





N(0,0,1,1,0)

N(1,2,1.5,2,0.5)

Propriedades

- As distribuições marginais de X e Y são normais unidimensionais,

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad e \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Propriedades

- As distribuições marginais de X e Y são normais unidimensionais,

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad e \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Como você verificaria essa propriedade?

Propriedades

- As distribuições marginais de X e Y são normais unidimensionais,

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad e \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- ρ é dado por

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriedades

- As distribuições marginais de X e Y são normais unidimensionais,

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad e \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- ρ é dado por

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- As distribuições condicionais são normais

$$f_{X|Y}(x \mid y) \sim N(\mu_X + \rho(y - \mu_Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \; , \; \sigma_X^2(1 - \rho^2))$$
$$e \quad f_{Y|X}(y \mid x) \sim N(\mu_Y + \rho(x - \mu_X)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \; , \; \sigma_Y^2(1 - \rho^2))$$

  - Note que se $\rho = 0$

$$f_{X|Y}(x \mid y) \sim N(\mu_X, \; \sigma_X^2) \quad e \quad f_{Y|X}(y \mid x) \sim N(\mu_Y, \; \sigma_Y^2)$$

1. Sejam X e Y v.a.'s cuja f.d.p é dada pro uma Normal bivariada de parâmetros $\mu_X = \mu_Y = 10, \sigma_X = \sigma_Y = 1$ e $\rho = 1/2$. Mostre que $f_Y, f_X \sim N(0, 1)$ e determine $Cov(X, Y)$ e a $E[XY]$.

2. Determine $P(X < Y)$ para as variáveis aleatórias normais bivariadas X e Y com f.d.p conjunta $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$.

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \ \ (\nRightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} exp\left\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \textit{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} exp\left\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}$$

Coeficiente de correlação

- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \;\; (\not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} exp\left\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

Coeficiente de correlação

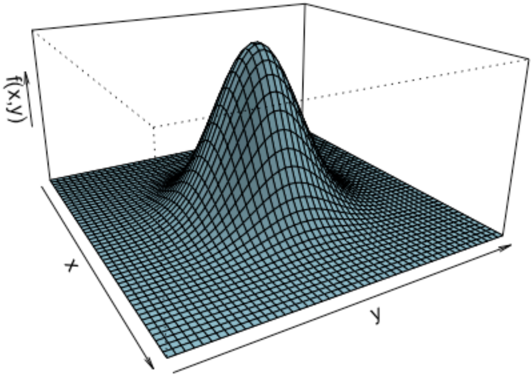
- **Para quaisquer v.a.'s X e Y**, com $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$, o *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \ \ (\nRightarrow X \text{ e } Y \text{ independentes})$$

- Sejam X e Y são v.a.'s com distribuição conjunta **normal multivariada**, se $\rho = 0$ então

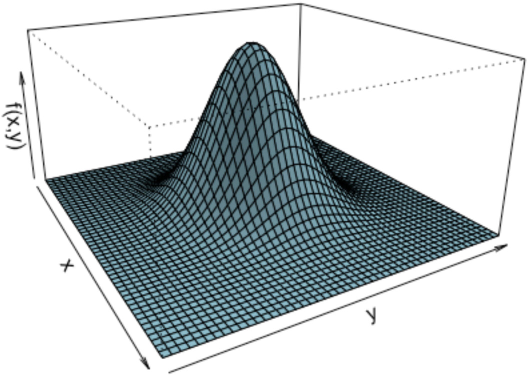
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} exp\left\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

$$\rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{X e Y são independentes}$$

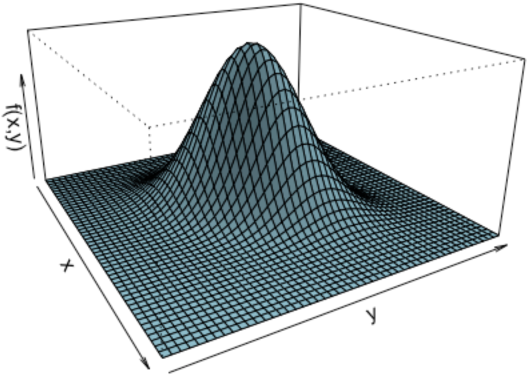


N(0,0,1,1,0)

Coeficiente da correlação e as curvas de nível

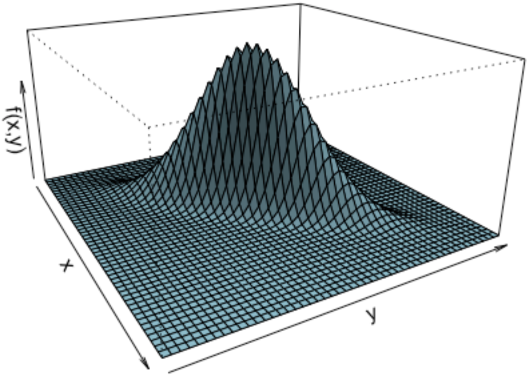


N(0,0,1,1,0.2)



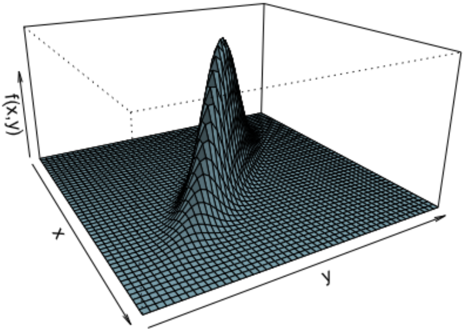
N(0,0,1,1,0.5)

Coeficiente da correlação e as curvas de nível

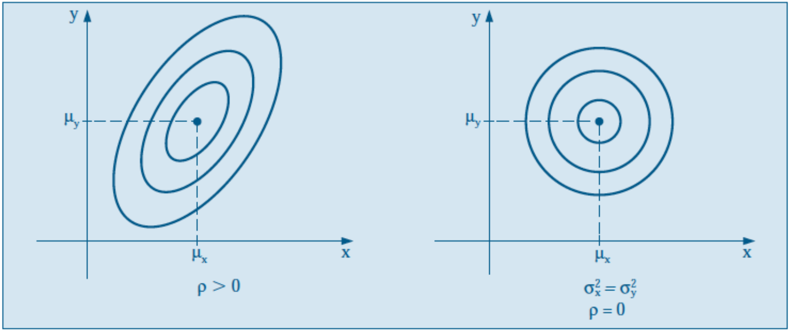


N(0,0,1,1,0.9)

Coeficiente da correlação e as curvas de nível



N(0,0,1,1,-0.9)


y
μ_y
μ_x
x
$\rho > 0$
y
μ_y
μ_x
x
$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$
$\rho = 0$