Lista 4

1) a) X: nº de pentes funcionando

p: Probabilidade do pente ser defeituoso

$p = 4/12 = 1/3$

$X \sim B(3; 2/3)$

$P(X=0) = \binom{3}{0}(2/3)^0(1/3)^3 = 1/27$

$P(X=1) = \binom{3}{1}(2/3)^1(1/3)^2 = 2/9$

$P(X=2) = \binom{3}{2}(2/3)^2(1/3)^1 = 4/9$

$P(X=3) = \binom{3}{3}(2/3)^3(1/3)^0 = 8/27$

b) Para todo $x < 0$ temos que $f(x) = 0$

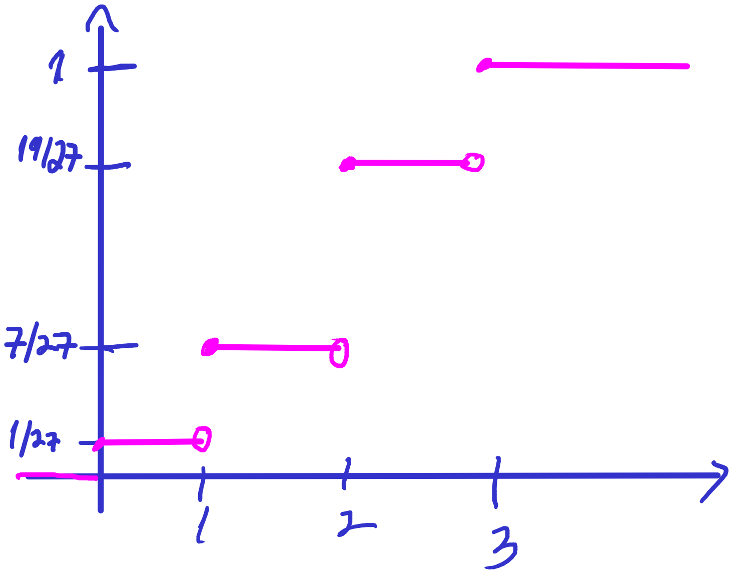
Se $0 \leq x < 1$ teremos $f(x) = P(X=0) = 1/27$

Para $1 \leq x < 2$ teremos $f(x) = P(X=0) + P(X=1) = 7/27$

Para $2 \leq x < 3$ teremos $f(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 19/27$

Para $x \geq 3$ teremos $f(x) = 1$

Então teremos o seguinte gráfico



c) Como $X \sim B(3, 2/3)$ então teremos

$E(X) = np$ $\qquad$ $Var(X) = np(1-p)$

Logo teremos

$E(X) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ $\qquad$ $Var(X) = 3 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{3} = 2/3$

$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2/3}$

2*) Como a F.d.a é descontínua em 0, 1, 2, 3 e 3,5 e a acumulada é constante entre esses pontos, concluímos que x é discreta. Assim, calculando função de probabilidade, teremos:

$P(X=0) = 1/2 = 5/10$

$P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X=0) = 3/5 - 1/2 \Rightarrow P(X=1) = 1/10$

$P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 4/5 - 3/5 \Rightarrow P(X=2) = 2/10$

$P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 9/10 - 8/10 \Rightarrow P(X=3) = 1/10$

$P(X=3,5) = P(X \leq 3,5) - P(X \leq 3) = 1 - 9/10 \Rightarrow P(X=3,5) = 1/10$

Então calculando a esperança

$$E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i)$$

$$= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 3,5 \cdot P(X=3,5)$$

$$= 0 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3,5 \cdot \frac{1}{10}$$

$$= 1,15$$

Calculando a variancia

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Calculando $E(X^2)$

$E(X^2) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i)$

$= 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3) + 3{,}5^2 \cdot P(X=3{,}5)$

$= 0 \frac{5}{10} + 1 \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 9 \frac{1}{10} + 12{,}25 \cdot \frac{1}{10}$

$= 3{,}025$

Então, voltando ao calculo da variancia

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 3{,}025 - 1{,}15^2 = 1{,}7025$

Calculando $DP(X)$

$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1{,}7025} = \frac{\sqrt{681}}{20}$ ou aprox. $1{,}305$

3) Temos que:

$P(X=1) = p$
$P(X=-1) = 1-p$

Então teremos

$$E(c^X) = cp + c^{-1}(1-p) = 1$$

$$c^2 p + (1-p) = c$$

$$c^2 p - c + (1-p) = 0$$

Resolvendo em função de c, por soma e produto teremos

$$x_1 = \frac{1-p}{p} \qquad x_2 = 1$$

4*) $E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

$= -1 \cdot P(X=-1) + 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1)$

$= P(X=1) - P(X=-1)$

Como temos que $P(X=0) = 1/2$, logo:

$$P(X=1) + P(X=-1) = 1/2$$

Então, analisando $E(X)$, teremos que o maximo será quando $P(X=1) = 1/2$ e o mínimo será quando $P(X=-1) = 1/2$. Logo

$P(X=1) = 1/2 \Rightarrow E(X) = 1/2$

$P(X=-1) = 1/2 \Rightarrow E(X) = -1/2$

$\therefore \quad -1/2 \leq E(X) \leq 1/2$

5) Temos que

$P(X=a)=p$ $\qquad$ $P(X=b)=1-p$

$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$

Então calculando as esperanças teremos:

$E(X)=ap+b(1-p)=b+p(a-b)$

$E(X^2)=a^2p+b^2(1-p)=b^2+p(a^2-b^2)$

Então teremos

$$Var(X)=b^2+p(a^2-b^2)-(b+p(a-b))^2$$
$$=b^2+p(a^2-b^2)-(b^2+2bp(a-b)+p^2(a-b)^2]$$
$$=p(a-b)(a+b)-2bp(a-b)-p^2(a-b)(a-b)$$
$$=p(a-b)[a+b-2b-p(a-b)]$$
$$=p(a-b)[(a-b)-p(a-b)]$$
$$=p(a-b)^2.[1-p]$$

6) Para entrar no jogo devemos pagar R$4,00, então teremos:

$$Y = X - 4$$

$$E(Y) = E(X-4) = E(X) - 4 = -1$$

7) Seja X o ganho do jogador, considerando uma moeda honesta, teremos que:

Y: lançamentos até sair coroa

$$Y \sim geo\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow P(Y=n) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Note que $P(X=2^n) = P(Y=n)$, então teremos:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

8) Temos que:

$$E(X) = 1 \qquad Var(X) = 5$$

a) $E(2+X^2) = 2 + E(X^2) \overset{*}{=} 2+6 = 8$

$* \; Var(X) = 5 = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow 5 = E(X^2) - 1^2 \Rightarrow E(X^2) = 6$

b) $Var(4+3x) = Var(3x) = 9Var(x) = 9.5 = 45$

9) X: nº de computadores com virus

$X \sim B(6; 0,8)$

a) $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$\approx 0,90$

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx 0,017$

c) $P(X=6) = 0,8^6$

10) X: numero de acertos chutando

$X \sim B(10; 0,5)$

$P(X=7) = \binom{10}{7}(0,5)^7(0,5)^3 = 0,117$

11) "a)" I: votar na inocencia ; C: ser culpado

$P(I \mid C) = 0,2$ $\Downarrow$ $P(I^c \mid C) = 0,8$

$P(I^c \mid C^c) = 0,1$ $\Downarrow$ $P(I \mid C^c) = 0,9$

$P(C) = 0,65$

$P(C^c) = 0,35$

Vamos definir:

A: juri chegar na conclusão correta

$$P(A) = P(A|C)\cdot P(C) + P(A|C^c)\cdot P(C^c)$$

* Seja V_1 o número de votos em condenar o réu dado que ele é culpado. Então, como os votos são independentes teremos que:

$$V \sim B(12, P(I^c|C)) \Rightarrow V \sim B(12, 0{,}8)$$

Então para o juri acertar teremos:

$$P(A|C) = P(V \geq 9) = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} (0{,}8)^i (0{,}2)^{12-i} = 0{,}79457$$

* Seja V_2 numero de votos em inocentar o réu dado que ele é inocente. Então, como os votos são independentes, teremos que:

$$V_2 \sim B(12, P(I|C^c)) \Rightarrow V_2 \sim B(12, 0{,}9)$$

Então para o juri acertar teremos:

$$P(A|C^c) = P(V_2 \geq 9) = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} (0{,}9)^i (0{,}1)^{12-i} = 0{,}975$$

Por fim, calculando $P(A)$ teremos:

$P(A) = P(A|C) \cdot P(C) + P(A|C^c) \cdot P(C^c)$

$0{,}79457 \cdot 0{,}65 + 0{,}975 \cdot 0{,}35 \approx 0{,}86$

"b)" Seja B o evento onde o réu é condenado, então:

$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap C^c) = P(B|C) \cdot P(C) + P(B|C^c) \cdot P(C^c)$

Note que

$P(B|C) = P(A|C)$ e $P(B|C^c) = 1 - P(A|C^c)$

Então teremos

$P(B) = 0{,}79457 \cdot 0{,}65 + 0{,}025 \cdot 0{,}35 \approx 0{,}52$

12) a) X = nº de peças até achar uma defeituosa

$X \sim geo(0{,}05)$

$P(X < 5) = 1 - (0{,}95)^4$

b) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - (1 - (0{,}95)^{10}) = 0{,}95^{10}$

(3) X: numero de erros do 1º digitador
Y: " " " " 2º "
B: Escolha do digitador

$X \sim Poison(3)$ $\quad$ $Y \sim Poisson(4,2)$ $\quad$ $B \sim Bernoulli(0,5)$

$$P(\text{sem erro}) = P(X=0|B=0)\, P(B=0) + P(Y=0|B=1).P(B=1)$$

$$= \frac{e^{-3} 3^0}{0!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e^{4,2} (4,2)^0}{0!} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-3} + e^{-4,2}\right)$$

(4) X: nº de acidentes $\quad$ $X \sim Poisson(3)$

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 1 - \left(\frac{e^{-3} 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!}\right)$$

$$1 - e^{-3}(1 + 3 + 9/2)$$

(5) Temos 50 experimentos com $p = 1/100$, então temos que

X: Sorteios ganhos

$$X \sim Bin\left(50, \frac{1}{100}\right) \underset{np<10}{\overset{n>30}{\Rightarrow}} X \sim Poi(1/2)$$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \dfrac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} = 1 - e^{-1/2}$

b) $P(X=1) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$

c) $P(X \geq 2) = 1 - \underbrace{P(X=0) - P(X=1)}_{P(X<2)}$

$$1 - \left[\frac{e^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}^{0}}{0!} + \frac{e^{-1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1}}{1!} \right]$$

$$1 - \left[e^{-1/2} + \frac{e^{-1/2}}{2} \right]$$

$$1 - \frac{3e^{-1/2}}{2}$$

16) X: nº de full house

$np = 1{,}4 \qquad n > 30$

$X \sim \text{Poisson}(1{,}4)$

Então teremos:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-1{,}4} - e^{-1{,}4} \cdot (1{,}4)$$
$$= 1 - 2{,}4\, e^{-1{,}4}$$

17) X: nº de homicidios

$p = \frac{1}{100000} \qquad n = 400000 \qquad np = 4$

$X \sim \text{Pois}(4)$

a) $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8)$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{7} P(X=i)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{7} \frac{e^{-4} 4^{i}}{i!}$$

$$= 1 - e^{-4} \sum_{i=0}^{7} \frac{4^{i}}{i!} \approx 0,05$$

b) Y: nº de meses com 8 ou mais homicídios

$Y \sim Bin(12, 0,05)$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$
$$= 1 - (0,95)^{12} - 12 (0,95)^{11} \cdot 0,05 = 0,118$$

"c)" Independência entre os homicídios em um mês

18) X: nº de jogadas até 10 caras

$X \sim BN(10, 1/2)$

Y: nº de coroas
$Y: X - 10$

$$P(Y=k) = P(X-10=k) = P(X=k+10)$$

$$= \binom{k+10-1}{10-1} (1/2)^{10-1} (1/2)^{k+10-10}$$

$$= \binom{k+9}{9} (1/2)^{k+9}$$

19) X: número de itens defeituosos na amostra

$m=6 \qquad n=10 \qquad N=100$

$X \sim Hip(10;100;6)$

a) $P(X=0) = \dfrac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}$

b) $P(X>2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$= 1 - \dfrac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}} - \dfrac{\binom{6}{1}\binom{94}{9}}{\binom{100}{10}} - \dfrac{\binom{6}{2}\binom{94}{8}}{\binom{100}{10}}$

20) $X \sim Bin(n,p)$

$E(X) = np = 6^{*} \qquad Var(x) = np(1-p) = 2{,}4$

$np(1-p) = 2{,}4 \overset{*}{\Rightarrow} (1-p) = 0{,}4 \Rightarrow p = 0{,}6$

$np = 6 \Rightarrow n = 10$

Então $X \sim Bin(10;0{,}6)$

$P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^5$

21) X: número de voo com turbulencia na semana

$X \sim Bin(7; 0,4)$

a) $P(X=0) = 0,6^7$

b) $P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$= 1 - [0,6^7 + 7 \cdot 0,4 \cdot 0,6^6 + 21 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5]$

$= 1 - (0,6^5 \cdot (0,6^2 + 7 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 21 \cdot 0,4^2))$

$\approx 1 - 0,42$

$= 0,58$

c) $E(X) = np = 7 \cdot \frac{4}{10} = 2,8$

$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 1,3$

Queremos então:

$P(E(X) - DP(X) < X < E(X) + DP(X))$

$P(1,5 < X < 4,1) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= \binom{7}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^5 + \binom{7}{3} 0,4^3 \cdot 0,6^4 + \binom{7}{4} 0,4^4 \cdot 0,6^3$

$\approx 0,261 + 0,290 + 0,194$

$\approx 0,745$

d) Y: Numero de semanas em que ocorre turbulencia em pelo menos 3 dias

$Y \sim Bin(5, P(X \geq 3)) \Rightarrow Y \sim Bin(5, 0{,}58)$

Então teremos

$P(Y=2) = \binom{5}{2} 0{,}58^2 \cdot 0{,}48^3 \approx 0{,}249$

22) X: nº de emails em um dia

$X \sim Poi(30/7)$ → taxa diaria

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= e^{-30/7} + e^{-30/7} \cdot \frac{30}{7} + \frac{e^{-30/7} \cdot \left(\frac{30}{7}\right)^2}{2} + \frac{e^{-30/7} \cdot \left(\frac{30}{7}\right)^3}{6}$

$= 0{,}38$

a) Y: Numero de dias que lê email na semana

$Y \sim Bin(5, 0{,}38)$

$P(Y=0) = (0{,}62)^5$

b) $P(Y < 4) = 1 - P(Y=5) = 1 - 0{,}38^5$