Revisão P3

MAE0221 - Probabilidade I
Aline Duarte

Distribuições Condicionais

X e Y discretas

Formalmente, dada duas v.a. discretas X e Y com função distribuição conjunta $p(x, y)$ e tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$p_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

Da mesma maneira, a *função de probabilidade condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$p_{Y|X}(x \mid y) = P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$$

X e Y contínuas

Dada duas v.a. contínuas X e Y com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$ a *função densidade condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0,$$

Da mesma maneira, a *função densidade condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$f_{Y|X}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0$$

Fda condicional

Dada duas v.a.'s X e Y tal que $P(Y = y) > 0$ a *função de distribuição condicional* de X dado que $Y = y$ é dada por

$$F_{X|Y}(x \mid y) = P(X \leq x \mid Y = y)$$

Da mesma maneira, se $P(X = x) > 0$, a *função de distribuição condicional* de Y dado que $X = x$ é dada por

$$F_{Y|X}(y \mid x) = P(Y \leq y \mid X = x)$$

Esperança condicional

Sejam X e Y v.a. no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A *esperança condicional* de X dado que $Y = y$, é dada por

$$E(X \mid Y = y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x \mid y), \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. discretas}$$

ou

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x \mid y) dx, \quad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a. contínuas}$$

Propriedades

Note que $E(X \mid Y = y)$ é a esperança matemática de uma v.a., portanto todas as propriedades seguem valendo

Proposição

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

(i) Se X e Y são v.a.'s discreta com fção de probabilidade conjunta p

$$E\big(g(X) \mid Y = y\big) = \sum_x g(x) p_{X|Y}(x \mid y).$$

(i') Se X e Y são v.a.'s contínuas com f.d.p conjunta $f(x)$

$$E\big(g(X) \mid Y = y\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x \mid y) dx.$$

(ii) $E(aX + b \mid Y = y) = aE(X \mid Y = y) + b$, para quaisquer números reais a e b.

Cálculo de esperanças usando condicionais

Note que

$$h(y) = E(X \mid Y = y) \quad \text{(é uma função y)}$$

Sendo assim podemos interpretar $h(Y)$ (sem um y fixado) como uma variável que é uma transformação da variável Y.

Proposição

$$E\big[E(X \mid Y)\big] = EX.$$

Se Y é uma v.a. discreta, isso significa que

$$EX = \sum_y E(X \mid Y = y) p_y(y).$$

Se Y é uma v.a. contínua, isso significa que

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) f_y(y) dy.$$

Corolário

$$E(XY) = E\big[YE(X \mid Y)\big]$$

Soma de um número aleatório de v.a.'s

E2-L7 Sejam X e Y v.a. com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y \leq x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Verifique que f é f.d.p e determine

(a) As f.d.p marginais de X e Y.
(b) A função densidade de Y dado que $X = x$.
(c) A função densidade de X dado que $Y = y$.
(d) Determine $E(Y \mid X = 2)$

E15-L7 Um dado honesto é jogado sucessivamente. Suponha que X e Y representem, respectivamente, o número de jogadas necessárias para se obter um 6 e um 5. Determine

(a) EX
(b) $E(X \mid Y = 1)$
(c) $E(X \mid Y = 5)$

E17-L7 Lâmpadas do tipo i funcionam uma quantidade de tempo aleatória com média μ_i e desvio padrão $\sigma_i, i = 1, 2$. Suponha que uma lâmpada do tipo 1 é aleatoriamente escolhida de uma cesta com probabilidade p (e do tipo 2 com probabilidade 1 -p). Seja X a v.a. que represente o tempo de vida desta lâmpada. Determine tempo médio de vida de uma lâmpada qualquer.

Propriedades da esperança matemática

Valor médio ou esperança matemática

Caso discreto

Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$, chamamos *valor médio* ou *esperança matemática* de X o valor

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Caso contínuo

Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Note que EX pode ser igual a ∞

Propriedades do valor médio

Proposição

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

(i) Se X é uma v.a. discreta tomando valores em $x_1, x_2 \ldots$, então

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

(i') Se X é uma v.a. com f.d.p $f(x)$, então,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

(ii) $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.

Variância e desvio padrão

Variância

Seja X é uma v.a. com $EX = \mu < \infty$, a *variância* de X é definida por

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (EX)^2$$

Desvio padrão

O valor $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$ é dito o *desvio padrão* de X.

Propriedades da Variância

Seja X uma v.a. com $EX < \infty$ e a e b números reais quaisquer

(i) Se $X = a$ com probabilidade 1. Isto é, se X é constante e igual a a, $Var(X) = 0$.

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Valor esperado de um vetor aleatório

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com função de probabilidade conjunta $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O *valor esperado* de $g(X_1, \ldots, X_n)$ é dado por

$$E[g(X_1, \ldots, X_n)] = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} g(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n)$$

Analogamente,

Valor esperado de um vetor aleatório

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O *valor esperado* de $g(X_1, \ldots, X_n)$ é dado por

$$E[g(X_1, \ldots, X_n)] = \int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1, \ldots, dx_n$$

Valor esperado da soma de v.a'

Proposição

I) Se X e Y são v.a. com EX e EY bem definidos, temos

$$E[aX + bY] = aEX + bEY\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

I') Se $X_1 \dots X_n$ são v.a. com esperança finita então

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} EX_k$$

II) Se $X \leq Y$ então $EX \leq EY$.

Note que não é necessária independência entre as v.a's

Covariância

Proposição

Se X e Y são v.a's independente e h e g funções reais, então vale que

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

Covariância

Sejam X e Y são duas v.a. em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a *covariância* entre X e Y é definida por

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Quando $Cov(X, Y) = 0$, dizemos que as variáveis aleatórias X e Y *são não correlacionadas*.

Propriedades da covariância

(i) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(ii) $Cov(X, X) = Var(X)$

(iii) $Cov(aX, Y) = Cov(X, aY) = aCov(X, Y)$

(iv) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

Variância da soma

Sejam X e Y duas v.a. a variância de X+Y é dada por

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y);$$

De modo geral,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

Em particular, se $X_1 \ldots, X_n$ são independentes

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

E7-L7 Se X e Y são v.a. independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2, determine $E[(X - Y)^2]$.

E9-L7 Um dado é rolado duas vezes. Suponha que X seja igual à soma das faces e que Y seja a diferença entre a primeira face e segunda. Determine $Cov(X, Y)$.

Desigualdades

Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória que apresenta apenas valores não negativos então, para qualquer a > 0,

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Desigualdade de Markov geral

Seja X é uma variável aleatória. Para qualquer k tal que $E[|X|^k] < \infty$, vale que

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|X|^k]}{\epsilon^k}, \quad \epsilon > 0$$

Desigualdade de Jensen

Se X é uma variável aleatória com média finita e g uma função convexa, então

$$E[g(X)] \geq g(EX)$$

Desigualdade de Chebyshev

Se X é uma variável aleatória com média e variância finitas, então, para qualquer valor $k > 0$,

$$P(|X - EX| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

E10-L7 Um professor sabe que a nota de um estudante na prova final é uma variável aleatória com média 75.

(a) Forneça um limite superior para a probabilidade de que a nota de um estudante exceda 85.
(b) Suponha, além disso, que o professor saiba que a variância da nota de um estudante é igual a 25. O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a nota de um estudante esteja entre 65 e 85?

E11-L7 Seja X uma v.a. qualquer e g uma função não negativa tal que $E[g(X)] < \infty$. Se $g(x) \geq b > 0$ sempre que $X \geq a$, mostre que $P(X \geq a) \leq E[g(X)]/b$.

Função geradora de momentos

Função geradora de momentos

Dada uma variável X

- $\mu'_k = E[X^k]$ é dita o *k-ésimo momento de X*.
- o *k-ésimo momento central* é definido como $\mu_k = E[(X-\mu)^k]$

Note que $EX = \mu'_1$ e $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$.

A *função geratriz de momentos* $M(t)$ de uma variável aleatória X é definida, para todos os valores reais de t, como

$$M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Função geradora de momentos conjunta

Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.'s, a fgm conjunta é definida por

$$M(t_n, ..., t_n) = E[e^{t_1 X_1 + ..., t_n X_n}], \;\; t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^n$$

As funções geradora de momentos individuais podem ser obtidas fazendo

$$M_{X_k}(t) = E[e^{tX_k}] = M(0, , \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$$

$X_1, ..., X_n$ são v.a's **independentes** se e somente se

$$M(t_n, ..., t_n) = M_{X_1}(t_1) \ldots M_{X_n}(t_n) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t_k)$$

Teorema

Se duas v.a.'s têm mesma função geradora de momentos então elas têm mesma distribuição.

E1-L7 Determine a função geradora de momentos de uma v.a. X com distribuição Geométrica de parâmetro p e calcule a EX e a Var(X) usando a geratriz.

E2-L7 Determine a função geradora de momentos de uma v.a. X com distribuição Uniforme em (a, b).

P3-21 Seja X uma v.a. com f.g.m. M_X. Defina as variáveis $Y = 4X - 1$ e $Z = 3X + 1$. Determine a f.g.m. conjunta de Y e Z.

Lei dos Grades Números e o Teorema do Limite Central

Tipo de Convergência

Convergência em probabilidade: $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$

Dizemos que uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.'s *converge em probabilidade* para uma v.a. X, se para qualquer $\epsilon > 0$, vale que

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Convergência quase certa: $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$

Dizemos que uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.'s *converge quase certamente* para uma v.a. X se

$$P\Big(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1.$$

Convergência em distribuição: $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s no mesmo espaço amostral $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com funções de distribuições F e $F_n, n = 1, 2, \ldots$ respectivamente. Dizemos X_n converge em distribuição ou em lei para X, se todo ponto x em que F é contínua, vale que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Proposição

$$X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{d}} X.$$

Lema de Borel Cantelli

Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos.

(i) Se $\sum_{n=1\infty} P(A_n) < \infty$, então $P(\limsup A_n) = 0$

(ii) Se $\sum_{n=1\infty} P(A_n) = \infty$ e os A_n's são independentes, então $P(\limsup A_n) = 1$

P3-21 Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. independentes, tais que $X_n \sim Ber(\frac{1}{n})$ e $Y_n \sim Poin(1)$. Defina $Z_n = X_n Y_n, n = 1, 2, \ldots$

(a) Determine uma cota superior para $P(Z_n \geq 2)$

(b) Mostre que $Z_n \to 0$ em probabilidade.

Lei (fraca) dos Grandes Números de Chebyshev

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. 's **independentes**, com mesma média $EX_k = \mu < \infty$ e mesma **variância** $\sigma^2 < \infty$. Então, isto é

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu, \;\; n \to \infty$$

- Em particular vale para v.a.'s i.i.d

Lei (fraca) dos Grandes Números de Chebyshev

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. 's **independentes**, com mesma média $EX_k = \mu < \infty$ e mesma **variância** $\sigma^2 < \infty$. Então, isto é

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu, \;\; n \to \infty$$

- Em particular vale para v.a.'s i.i.d

Lei (fraca) dos Grandes Números de Khintchin

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. 's **independentes e identicamente distribuídas**, com média $EX_k = \mu < \infty$. Então,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{P}} \mu,$$

- Note que não há suposição sobre a variância das v.a.'s.

Primeira lei de Kolmogorov

Sejam X_1, X_2 v.a.'s independentes e com média finita (suponha $EX_k = \mu_k$)e suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Então

$$\frac{S_n - \sum \mu_k}{n} \xrightarrow{qc} 0 \;\; n \to \infty.$$

Lei forte de Kolmogorov

Sejam X_1, X_2 v.a.'s i.i.d com média finita μ, então

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{qc} 0, \;\; n \to \infty.$$

Teorema Central do Limite

TCL: caso i.i.d

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. 's i.i.d. com $EX_k = \mu$ e $Var(X_k) = \sigma^2 < \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx = P(Z \le a) = \Phi(a).$$

Isto é, $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} Z$, as $n \to \infty$.

Em outras palavras, "para n grande",

$$\frac{S_n}{n} \approx N\big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\big) \Longrightarrow \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

- Independente da distribuição de $X_1, X_2, \ldots$

P3-21 Considere a sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ dada por

$$\begin{cases} X_{2n} \sim Ber(p), & n \geq 1 \\ X_{2n-1} \sim Exp(1/\lambda), & n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Enuncie a Lei fraca dos Grandes Números para a sequência de variáveis Xn.

(b) Use a desigualdade de Chebyshev e mostre a LGN enunciada em (a).

P3-21 Uma balsa de transporte tem capacidade máxima de 3670kg. Se em uma determinada viagem ela recebe 12 containers cada um com peso médio de 280kg e desvio padrão de 9kg. Qual a probabilidade aproximada de que a balsa ultrapasse o limite da sua capacidade?