MAE 221 - Probabilidade I - 2022/01

Aline Duarte - **Prova 1**

Análise Combinatória

- Permutação de n elementos: $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$
- Permutação com ambiguidades: $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$
- Combinação de n elementos agrupados k a k: $C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

Teoria de conjuntos. Dados A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω

i. $A\cup B = B\cup A$ e $A\cap B = B\cap A$

ii. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ e $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

iii. $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

iv. $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

v. $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

vi. $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

Probabilidade. Dado $(\Omega,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidade, $A, B, A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{F}$

- **Propriedades da probabilidade:**

i. Se $A_1,\dots,A_n$ são mutuamente exclusivos, então $P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

ii. $P(A^c) = 1 - P(A)$

iii. Se $A\subset B$ então $P(A)\leq P(B)$.

iv. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

v. $P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$

- **Limite superior:** $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k$.
- **Limite inferior:** $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k$.
- A sequência de eventos $\{A_n, n\geq 1\}$ tem **limite** se $\liminf A_n = \limsup A_n = \lim A_n$

- **Probabilidade de A dado B.** $P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- **Regra da multiplicação.**

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^n A_k\Big) = P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\dots P(A_n\mid A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$$

- **Fórmula das Probabilidades Totais.** Se $B_1,\dots B_n\in\mathcal{F}$ é uma partição de Ω então

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A\mid B_k)P(B_k)$$

- **Fórmula de Bayes.** $P(A\mid B) = \dfrac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A) + P(B\mid A^c)P(A^c)}$
- **Eventos independentes.** $A_1,\cdots,A_n$ são independentes se $P(\bigcap_{k=1}^n A_k) = P(A_1)\dots P(A_n)$

Variáveis aleatórias discretas. Dado X uma v.a. discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \dots$

- **Função de probabilidade.** $p(x_i) = P(X = x_i)$ para qualquer $i = 1, 2, \dots$.
- **Função de distribuição.** $F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$
- **Valor médio:** $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$
- **Propriedades do valor médio**

i. Dada uma função$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p(x_i)$.

ii. $E[aX + b] = aEX + b$, para quaisquer números reais a e b.

- **Variância:** $Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (EX)^2$
- **Desvio padrão:** $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$
- **Propriedades da Variância.** Seja X uma v.a. com $EX < \infty$ e quaisquer

(i) Se $X = a$ com probabilidade 1 então $Var(X) = 0$.

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ para a e b números reais.

- **Bernoulli**

◇ Função de probabilidade: $p(1) = p = 1 - p(0)$

◇ $EX = p \quad e \quad Var(X) = p(1 - p)$

- **Binomial**

◇ Função de probabilidade: $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$

◇ $EX = np \quad e \quad Var(X) = np(1 - p)$

- **Geométrica**

◇ Função de probabilidade: $p(k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k = 1, 2 \dots$

◇ $EX = \frac{1}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{1-p}{p}$

- **Binomial Negativa**

◇ Função de probabilidade: $p(n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1 - p)^{n-r} \binom{1}{1} p$, $k = r, \dots, n$

◇ $EX = \frac{r}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

- **Hipergeométrica**

◇ Função de probabilidade: $p(k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, m$; $k = r, \dots, n$

◇ $EX = \frac{nm}{N} \quad e \quad Var(X) = \frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right]$

- **Poisson**

◇ Função de probabilidade: $p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

◇ $EX = \lambda \quad e \quad Var(X) = \lambda$

- **Aproximação da Binomial por Poisson** Se $n > 30$ é grande e $\lambda = np < 10$ é moderado então

$$p(k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad com \quad \lambda = np \quad e \quad k = 0, 1, 2, \dots$$