Lista 3

1) Foram dadas as seguintes probabilidades:

$P(A) = 0{,}3$
$P(B|A) = 0{,}4$
$P(B|A^c) = 0{,}6$

Então, pela fórmula de probabilidade total teremos

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$$

2) a) Vamos definir as seguintes v.a:

X: Moeda honesta
A: Cara

Nesse caso queremos saber $P(X|A)$, então teremos:

$$P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)}$$

Calculando $P(A)$ teremos:

$$P(A) = P(A|X) \cdot P(X) + P(A|X^c) \cdot P(X^c)$$
$$= 1/2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 3/4$$

Então teremos:

$$P(X|A) = \frac{P(X\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|X)\cdot P(X)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

b) Vamos redefinir A:

A: 2 caras

Nesse caso queremos saber $P(X|A)$, então teremos:

$$P(X|A) = \frac{P(X\cap A)}{P(A)}$$

Calculando $P(A)$:

$$P(A) = P(A|X).P(X) + P(A|X^c)P(X^c) = (1/2 \cdot 1/2)\cdot 1/2 + (1\cdot 1)\cdot 1/2$$

$$= 1/8 + 1/2 = 5/8$$

Então calculando $P(X|A)$ teremos

$$P(X|A) = \frac{P(X\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|X).P(X)}{P(A)} = \frac{(1/2\cdot 1/2)\cdot 1/2}{5/8} = \frac{1}{5}$$

c) Vamos redefinir A como

A: 2 caras e 1 coroa

Nesse caso queremos saber $P(X|A)$, então teremos:

$$P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)}$$

Calculando $P(A)$:

$$P(A) = P(A|X).P(X) + P(A|X^c)P(X^c) = P(A|X).P(X) + 0.1/2$$
$$= P(A|X).P(X)$$

Então, calculando $P(X|A)$

$$P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|X)P(X)}{P(A|X)P(X)} = 1$$

3) Como pre-requisito, S deve estar fechado. Então, teremos 2 caminhos independentes

$$P(\alpha) = P_1 . P_2$$
$$P(\beta) = P_3 . P_4$$

Por fim como ele usar ambos os caminhos, teremos que a probabilidade será:

$$P(A \to B) \overset{indep}{=} P_5 \cdot (P(\alpha \cup \beta))$$

$$= P_5 \cdot (P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \cap \beta))$$

$$\overset{indep}{=} P_5 \, (P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha) \cdot P(\beta))$$

$$= P_5 \, (P_1P_2 + P_3P_4 - P_1P_2P_3P_4)$$

4) a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Como $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$, então

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

b) $P(A|B^c) = \dfrac{P(A \cap B^c)}{P(B)}$

Como $A \subset B \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$, então:

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B^c)} = 0$$

c) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \overset{A \subset B}{=} \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

d) $P(B|A^c) = \dfrac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)}$

Temos que $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$, então:

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)}$$

5) Seja os seguintes v.a:

M: Sexo Masculino
F: falar francês

E seja T o total de pessoas, logo teremos

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M \cap F)}{P(F \cap M) + P(F \cap M^c)}$$

$$= \frac{47/T}{47/T + 52/T} = \frac{47/T}{99/T} = \frac{47}{99}$$

6) a) Para acertar cada uma, temos probabilidade 1/2, e como são independentes, logo:

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1/2^7$$

6) Vamos definir

A: Acertar todas as respostas

B: há mais respostas verdadeiras que falsas

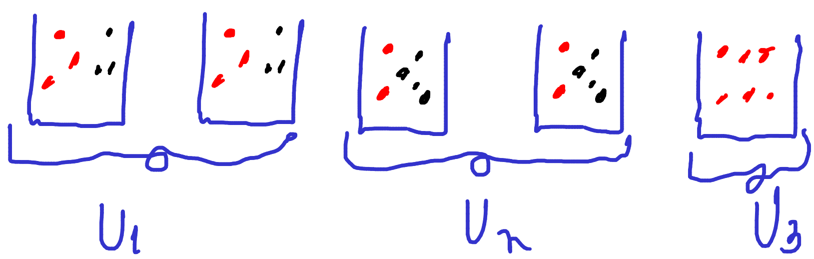
$$|B| = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 64$$

$$|\Omega| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{combinações de verdadeiras e falso}} = 2^7$$

Logo, calculando a probabilidade teremos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/2^7}{64/2^7} = 1/64$$

7)



A: Bola branca sorteada

$P(U_1) = 2/5$ $\qquad$ $P(A|U_1) = 1/2$

$P(U_2) = 2/5$ $\qquad$ $P(A|U_2) = 1/3$

$P(U_3) = 1/5$ $\qquad$ $P(A|U_3) = 1$

Então:

$$P(U_3|A) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(A|U_3) \cdot P(U_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|U_i) \cdot P(U_i)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/5}{(1/2 \cdot 2/5) + (1/3 \cdot 2/5) + (1 \cdot 1/5)} = \frac{1}{1 + 2/3 + 1} = \frac{3}{8}$$

8) Vamos definir:

Q: queda na bolsa   A: alta no dolar

Temos do enunciado que

$P(Q) = 0,1$ $P(A|Q^c) = 0,2$ $P(A|Q) = 0,05$

Logo

$$P(Q|A) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(A|Q) . P(Q)}{P(A|Q) . P(Q) + P(A|Q) . P(Q^c)} = \frac{0,1}{0,1 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,05} = 0,31$$

Logo, a probabilidade de queda aumenta de 10% para 31%

9) Para isso devemos mostrar que

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{\frac{51!}{39!\,12!}}{\frac{52!}{39!\,13!}} = \frac{51!}{52!} \cdot \frac{13!}{12!} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

$(A \cap B) = \{$ as 13 cartas não de copas $\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\binom{52}{13}} = \frac{1}{\binom{52}{13}} = P(A \cap B)$$

$\therefore$ Os eventos são independentes

10) A: ganhar de A   B: ganhar de B

$$P(ABA) \overset{indep}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(A) = 1/3 \cdot 2/3 \cdot 1/3 = 2/27$$

$$P(BAB) \overset{indep}{=} P(B)\,P(A)\,P(B) = 2/3 \cdot 1/3 \cdot 2/3 = 4/27$$

$\therefore$ BAB é mais vantajoso

11) A_i: passar da i-esima etapa sem ser detectado

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{\text{indep}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$= (0{,}8)^3 = 0{,}512$$

12) a) $P(A) = 0{,}7$ $\quad P(A \cup B) = 0{,}8$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$0{,}8 = 0{,}7 + p - 0{,}7p$$

$$p = 1/3$$

b) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\overset{\text{dis}}{=} P(A) + P(B) - 0$$

$$0{,}8 = 0{,}7 + p \Rightarrow p = 0{,}1$$

c) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\overset{\text{Bayes}}{=} P(A) + P(B) - P(A|B) \cdot P(B)$$

$$0{,}8 = 0{,}7 + p - 0{,}6p \Rightarrow p = 1/4$$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\overset{A \subset B}{=} P(A) + P(B) - P(A)$

$0{,}8 = 0{,}7 + p - 0{,}7 \Rightarrow p = 0{,}8$

13) a) A: atraso

C: chuva

$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c)$

$= P(A|C) \cdot P(C) + P(A|C^c) \cdot P(C^c)$

$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}6$

$= 0{,}31$

b) $P(C|A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}16}{0{,}31} \approx 0{,}52$

14) a)

$$P(C|A,B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)}$$

$$= \frac{0{,}192}{P(B|A) \cdot P(A)} = \frac{0{,}192}{0{,}6 \cdot 0{,}8} = 0{,}4$$

b) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \overset{\text{indep}}{=} \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B) = 0{,}6$$

$$P(A \cap B \cap C) \overset{\text{indep}}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}192$$

Logo

$$P(C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)P(B)} = \frac{0{,}192}{0{,}6 \cdot 0{,}8} = 0{,}4$$