第二章　λ-矩阵与矩阵的Jordan标准形

λ-矩阵的基本概念

定义：设 $a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为数域 F 上的多项式，则称

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或 λ-矩阵.

$a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 中最高的次数为 $A(\lambda)$ 的次数.

例：数字矩阵，特征矩阵 $\lambda E-A$.

定义：如果 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 r 阶 $(r\geq 1)$ 子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式（如果有的话）全为零，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r，记为 $\mathrm{rank}\,A(\lambda)=r$. 零矩阵的秩为 0.

定义:下列各种类型的变换，叫做 λ-矩阵的初等变换.

(1) 矩阵的任二行(列)互换位置;

(2) 非零常数 c 乘矩阵的某一行(列);

(3) 矩阵的某一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行(列)上去，其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的一个多项式.

对单位矩阵施行上述三种类型的初等变换, 得到相应的三种 λ-矩阵的**初等矩阵**: $P(i,j)$, $P(i(c))$, $P(i,j(\varphi))$

$$P(i,j)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix},\quad P(i(c))=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

$$P(i,j(\varphi))=\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&\varphi(\lambda)&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \end{array}$$

定理：对一个 $m\times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 作初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘 $A(\lambda)$. 对 $A(\lambda)$ 作初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$.

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),\qquad P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1})),$$

$$P(i,j(\varphi))^{-1}=P(i,j(-\varphi)).$$

定义：如果 $A(\lambda)$ 经过有限次的初等变换之后变成 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记之为 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

λ-矩阵的等价关系满足：

（1）自反性： $A(\lambda)\simeq A(\lambda)$;

（2）对称性： $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$ 则 $B(\lambda)\simeq A(\lambda)$;

（3）传递性：若 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$, $B(\lambda)\simeq C(\lambda)$, 则 $A(\lambda)\simeq C(\lambda)$.