

2008 年

一. (10) 求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda(\lambda+2) & \\ & & (\lambda+2)^2 \end{bmatrix}$ 的初等因子和各阶行列式因子, 并写出其 Smith 标准形。

二. (20) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 求矩阵 A 的 Jordan 标准形。

(2) 计算矩阵函数 e^A , $\sin \frac{\pi}{2} A$ 。

三. (15) 设 A、B 都是 Hermite 矩阵, 且 A 正定, 证明:

(1) AB 与 BA 的特征值都是实数;

(2) $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根都是实数; 其中 $\det(X)$ 表示 X 的行列式。

四. (20) 已知 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(1) 求矩阵 A 的满秩分解;

(2) 求矩阵 A 的奇异值分解。

2008 年

五. (10) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 求矩阵 A 的谱分解。

六. (15) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$,

(1) 证明: 矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^m kA^{k-1}$ 收敛;

(2) 求矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^m kA^{k-1}$ 的收敛和。

七. (10) 已知函数矩阵 $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$, 求

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2}, \quad \int_0^t A(x) dx, \quad \frac{d}{dt} \left(\int_0^{t^3} A(x) dx \right)$$