课程编号：1700002　　　　北京理工大学 2022-2023 学年第一学期

2022 级硕士研究生矩阵分析期末试题

（试卷共 2 页, 八道大题，请将答案写在答题纸上，解答题必须有解题过程）

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、 我们用$\mathbb{R}[x]_n$表示所有次数小于n的多项式构成的线性空间，那么线性空间$\mathbb{R}[x]_n$的维数为__________. 线性映射$\mathcal{J}:\mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3$表示由$\mathcal{J}\big(f(x)\big)=\int_0^x f(t)dt$定义的积分映射， 则$\mathcal{J}$在$\mathbb{R}[x]_2$的一个基$1,x$和$\mathbb{R}[x]_3$的一个基$1,x,x^2$下的矩阵表示为________________，$\mathcal{J}$的值域为__________________.

2、 设 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2-9\end{pmatrix}$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为______________________，$A(\lambda)$的初等因子为________________________.

3、 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1-i\\ 0 & 1+i & 4\end{pmatrix}$，则矩阵$A$的谱范数$\|A\|_2=$______，矩阵$A$的列和范数$\|A\|_1=$______，矩阵函数$e^{3A}$的行列式值$|e^{3A}|=$______，这里$i$为虚数单位，$i^2=-1$.

4、 已知函数矩阵$A(t)=\begin{pmatrix}t^2 & e^{-t}\\ sint & t\end{pmatrix}$， 则$\frac{d^2A(t)}{dt^2}=$____________________，$\frac{d}{dx}(\int_0^x A(t)dt)=$________________________.

二、（14 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

（1）求矩阵A的 Jordan 标准形和最小多项式.

（2）求矩阵函数$cos\frac{\pi}{2}A$和e^{tA}.

三、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}3i & 0\\ 0 & 3i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的奇异值分解表达式，这里$i$为虚数单位，$i^2=-1$.

四、（10 分）已知正规矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

求矩阵A的谱分解表达式.

五、（10 分）已知 Hermitian 矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1-i\\0&1+i&4\end{pmatrix}$, 与之相对应的 Hermitian 二次型为$f(X)=X^HAX$，这里 $X=[x_1,x_2,x_3]^T$.

(1) 用酉变换将 Hermitian 二次型$f(X)=X^HAX$化成标准形,并写出所做的酉变换.
(2) 判断$f(X)=X^HAX$的定性（正定、负定，半正定，半负定）.

六、（10 分）
（1）证明：任意一个正规矩阵A的谱半径$\rho(A)$等于其谱范数$\|A\|_2$.
（2）证明：$\rho(AA^H)\le\|A\|_F^2$，这里A是任意的$m\times n$复矩阵， $\|A\|_F$表示矩阵A的 Frobenius 范数.

七、（10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$. 证明：矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k$ 收敛，并求其收敛和.

八、（6 分）设A是一个$n\times n$ 复矩阵，如果存在正整数k，使得$A^k=0$，那么称A是幂零矩阵. 证明：任意一个$n\times n$ 复矩阵A均可表示成 $A=B+C$，其中B是一个可对角化矩阵，C是一个幂零矩阵，并且$BC=CB$.