

例：求下列矩阵的奇异值分解表达式

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解：（1）容易计算 AA^H 的特征值为 **5,0,0**，所以 A 的奇异值为 $\alpha = \sqrt{5}$.下面计算 AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与 **5,0,0**对应的三个标准正交特征向量

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由这三个标准正交特征向量组成矩阵 U ，所以有

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } V_1 = A^H U_1 \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -i/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } V_2 = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ 与 } V_1 \text{ 正交. 由这两个标准正交特征向量 } V_1, V_2$$

组成矩阵 V :

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}} \\ -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

于是可得奇异值分解式为

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}} \\ -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^H \end{aligned}$$

(2) 先求 $B = A^H$ 的奇异值分解.

$$A^H = B = U \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

可得A 的奇异值分解表达式为

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

推论：设 $A \in C_r^{m \times n}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，那么存在次酉矩阵 $U_r \in U_r^{m \times r}, V_r \in V_r^{n \times r}$ 使得 $A = U_r \Delta V_r^H$.

提示：

$$A = U \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} V^H = \begin{bmatrix} U_r & U_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^H \\ V_{n-r}^H \end{bmatrix} = U_r \Delta V_r^H$$

注：设 $A \in C_r^{m \times n}$ ， $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，那么

$$A = U_r \Delta V_r^H = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^H \\ v_2^H \\ \vdots \\ v_r^H \end{bmatrix}$$
$$= \alpha_1 u_1 v_1^H + \alpha_2 u_2 v_2^H + \dots + \alpha_r u_r v_r^H$$

(Schmidt, Mirsky), 仅供参考

定理: 设 $A \in C_r^{m \times n}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值, 存在酉矩阵 $U_r \in U_r^{m \times r}, V_r \in V_r^{n \times r}$ 使得 $A = U_r \Delta V_r^H$. 其中

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

令 $B = U_r \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) V_r^H$, $0 < k < r$.

$$= \alpha_1 u_1 v_1^H + \alpha_2 u_2 v_2^H + \dots + \alpha_k u_k v_k^H$$

则 $\|A - B\|_F = \min_{\text{rank}(X) \leq k} \|A - X\|_F$, $\|C\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |c_{ij}|^2 \right)^{1/2}$