矩阵多项式的定义和计算

定义：已知$A \in C^{n\times n}$和关于变量x的多项式

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

那么我们称

$$f(A)=a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1 A+a_0 I$$

为A的矩阵多项式.

设$\boldsymbol{A}$为一个$\boldsymbol{n}$阶矩阵，$\boldsymbol{J}$为其Jordan标准形，则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PJP}^{-1} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2 \cdots \boldsymbol{J}_r)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1), \boldsymbol{J}_2(\lambda_2), \cdots, \boldsymbol{J}_r(\lambda_r))\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是有

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}$$

$$= a_m(\boldsymbol{PJP}^{-1})^m + a_{m-1}(\boldsymbol{PJP}^{-1})^{m-1} + \cdots + a_1(\boldsymbol{PJP}^{-1}) + a_0 \boldsymbol{I}$$

$$= P(a_m J^m + a_{m-1} J^{m-1} + \cdots + a_1 J + a_0 I) P^{-1} = Pf(J) P^{-1}$$

$$= P\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_r)) P^{-1}$$

上面的表达式称为矩阵多项式 $f(A)$的Jordan表示，其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}, \quad J_i^k(\lambda_i) = \left(\lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \right)^k$$

可得 $$J_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

其中 $$C_k^l=\frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!},\quad (l\le k)$$

$$C_k^l=0,\quad (l>k)$$

进一步可得

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i} \quad (i=1,2,\cdots,r)$$

定理：设 $A \in C^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征根，则矩阵多项式 $f(A)$ 的特征根为

$$f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),\cdots,\ f(\lambda_n).$$

提示：根据 $f(A) = P\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2),\cdots, f(J_r))P^{-1}.$

例. 已知多项式 $f(x)=x^4-2x^3+x-1$ 与矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

求 $f(A)$.

解： 首先求出矩阵的A 的Jordan标准形J及其相似变换矩阵P

$$J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

并计算出

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

那么

$$f(A) = Pf(J)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -8 & 9 \\ 9 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$