# 第三章

# 内积空间、正规矩阵与H-矩阵

定义： 设 $V$ 是实数域 $R$ 上的 $n$ 维线性空间，对于 $V$ 中的任意两个向量 $\alpha,\beta$ 按照某一确定法则对应着一个实数, 这个实数称为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的内积，记为 $(\alpha,\beta)$，并且要求内积满足下列运算条件：

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta),\quad k\in R$

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$.

我们称带有这样内积的 $n$ 维线性空间 $V$ 为欧氏空间.

例：在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，对于 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

定义 $$(\alpha,\beta)_1=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

容易验证 $(\ ,\ )_1$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个内积，从而 $\boldsymbol{R}^n$ 成为一个欧氏空间.

$$(\alpha,\beta)_2=x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n$$

容易验证 $(\ ,\ )_2$ 也是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个内积，从而 $\boldsymbol{R}^n$ 成为另外一个欧氏空间.

**例：** 在 $mn$ 维线性空间 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 中，规定

$$(A,B):=\mathrm{Tr}(AB^{T})$$

容易验证这是 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 上的一个内积，这样 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 对于这个内积成为一个欧氏空间.

欧氏空间的性质：

(1) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta), \quad k \in R$

(2) $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

(3) $(\sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i, \beta) = \sum_{i=1}^{t} k_i (\alpha_i, \beta), \quad k_i \in R$

(4) $(\alpha, \sum_{i=1}^{t} k_i \beta_i) = \sum_{i=1}^{t} k_i (\alpha, \beta_i), \quad k_i \in R$

定义： 设 $V$ 是复数域 $C$ 上的 $n$ 维线性空间，对于 $V$ 中的任意两个向量 $\alpha,\beta$ 按照某一确定法则对应着一个复数, 这个复数称为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的内积，记为 $(\alpha,\beta)$，并且要求内积满足下列运算条件：

(1) $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta),\quad k\in C$

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$.

我们称带有这样内积的 $n$ 维线性空间 $V$ 为酉空间.

例：在 $C^n$ 中，对于

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\ \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

定义

$$(\alpha,\beta)=\bar{\beta}^T\alpha=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n$$

容易验证（ ， ） 是 $C^n$ 上的一个内积，从而 $C^n$ 成为一个酉空间.

例： 设 $\tilde{C}[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续复值函数组成的线性空间，定义

$$(f,g):=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

可以验证 $(\ ,\ )$ 是 $\tilde{C}[a,b]$ 上的一个内积，于是 $\tilde{C}[a,b]$ 成为一个酉空间.

## 酉空间的性质：

(1) $(\alpha, k\beta) = \overline{k}(\alpha, \beta), \quad k \in R$

(2) $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

(3) $(\sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i, \beta) = \sum_{i=1}^{t} k_i (\alpha_i, \beta), \quad k_i \in R$

(4) $(\alpha, \sum_{i=1}^{t} k_i \beta_i) = \sum_{i=1}^{t} \overline{k_i} (\alpha, \beta_i), \quad k_i \in R$

例： 在 $mn$ 维线性空间 $C^{n\times m}$ 中，规定

$$(A,B) := \mathrm{Tr}(AB^H)$$

其中 $B^H$ 表示 $B$ 中所有元素取共轭复数后再转置，容易验证 $(\ ,\ )$ 是 $C^{n\times m}$ 上的一个内积，从而 $C^{n\times m}$ 连同这个内积一起成为酉空间.

定义：设 $A\in C^{m\times n}$，用 $\bar{A}$ 表示以 $A$ 的元素的共轭复数为元素组成的矩阵，记

$$A^H=(\bar{A})^T$$

则称 $A^H$ 为 $A$ 的复共轭转置矩阵. 不难验证复共轭转置矩阵满足下列性质：

(1) $A^H=(\overline{A^T})$, (2) $(A+B)^H=A^H+B^H$

(3) $(kA)^H=\bar{k}A^H$, (4) $(AB)^H=B^HA^H, A\in C^{m\times n}, B\in C^{n\times l}$

(5) $(A^H)^H = A$,　　(6) $(A^k)^H = (A^H)^k$

(7) $|\overline{A}| = \overline{|A|}$,　　(8) $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

行列式的值　　如果 $A$ 可逆

定义：设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $A^H = A$，那么称 $A$ 为**Hermite**矩阵，如果 $A^H = -A$，那么称 $A$ 为反**Hermite**矩阵.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 4i & 2+i & 4+2i \\ -2+i & i & 1 \\ -4+2i & -1 & -2i \end{bmatrix}, \quad (2)\quad \begin{bmatrix} 6 & 1+2i & 3i \\ 1-2i & 9 & 1-i \\ -3i & 1+i & -7 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 8i \\ -1-i & 0 & 4-i \\ 8i & -4-i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)\quad \begin{bmatrix} 3 & 1+3i & 2i \\ 1-3i & 4 & 1+5i \\ -2i & 1-5i & 5 \end{bmatrix}$$