矩阵幂级数

定义：设 $A^{(k)}=[a_{ij}^{(k)}]\in C^{m\times n}$，如果 mn 个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

都收敛，则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

收敛. 如果mn个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

都绝对收敛， 则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{A}^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛.

例： 如果设 $A^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)}\right]\in C^{2\times 2}$，其中

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)},\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^k},\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^k}$$

那么矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

是收敛的.

定理： 设 $A^{(k)}=[a_{ij}^{(k)}]\in C^{m\times n}$，则矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

绝对收敛的充分必要条件是正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|=\left\|A^{(1)}\right\|+\left\|A^{(2)}\right\|+\cdots+\left\|A^{(k)}\right\|+\cdots$$

收敛，其中 $\|A\|$ 为任意一种矩阵范数.

证明： 取矩阵范数

$$\left\|A^{(k)}\right\|=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}{}^{(k)}\right|$$

那么对每一对 i, j 都有 $\left\|A^{(k)}\right\| \geq \left|a_{ij}{}^{(k)}\right|$

因此, 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|=\left\|A^{(1)}\right\|+\left\|A^{(2)}\right\|+\cdots+\left\|A^{(k)}\right\|+\cdots$$

收敛，则对每一对 i, j常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}{}^{(k)}\right|=\left|a_{ij}{}^{(1)}\right|+\left|a_{ij}{}^{(2)}\right|+\cdots+\left|a_{ij}{}^{(k)}\right|+\cdots$$

都是收敛的，于是矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛.

反之，若矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛，则对每一对 i, j 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \left|a_{ij}^{(1)}\right| + \left|a_{ij}^{(2)}\right| + \cdots + \left|a_{ij}^{(k)}\right| + \cdots < \infty$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right| < \infty$$

定理： 对于两个绝对收敛的矩阵级数，它们的Cauchy积所组成的矩阵级数仍然绝对收敛

$$S_1: A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots;$$

(仅供了解)

$$S_2: B_1 + B_2 + \cdots + B_k + \cdots.$$

$$S_1 \to A,\ S_2 \to B$$

$$S_3: A_1B_1 + (A_1B_2 + A_2B_1) + (A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1)$$

$$+ \cdots + (A_1B_k + A_2B_{k-1} + \cdots + A_kB_1) + \cdots$$

$$S_3 \to AB$$

定义： 设 $A \in C^{n\times n}$，称形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots$$

的矩阵级数为**矩阵幂级数**.

Cauchy-Hadamard 定理：

幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，当 $|x| < R$ 时，绝对收敛；当 $|x| > R$ 时, 发散；当 $|x| = R$ 时，幂级数收敛与否必须另行判断，这里 R 为此幂级数的收敛半径.

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

定理： 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 R, A 为 n 阶方阵. 若 $\rho(A) < R$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛；若 $\rho(A) > R$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J=\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2),\cdots,J_r(\lambda_r))$$

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}\quad (i=1,2,\cdots,r)$$

于是 $$A^k=P\mathrm{diag}(J_1^k(\lambda_1),J_2^k(\lambda_2),\cdots,J_r^k(\lambda_r))P^{-1}$$

$$J_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1}\\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1}\\ & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (PJ^k P^{-1})$$

$$= P(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k) P^{-1}$$

$$= P\,\mathrm{diag}(\sum_{K=0}^{\infty} a_k J_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} a_k J_2^k(\lambda_2), \cdots, \sum_{K=0}^{\infty} a_k J_r^k(\lambda_r)) P^{-1}$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

其中 $$c_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (\text{当} \, l \le k)$$

$$c_k^l = 0 \quad (\text{当} \, l > k)$$

当 $\rho(A) < R$ 时，幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^{\,k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^{\,1} \lambda_i^{\,k-1}, \quad \cdots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^{\,d_i-1} \lambda_i^{\,k-d_i+1}$$

都是绝对收敛的，故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛;

当 $\rho(A) > R$ 时，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^{\,k}$ 发散，所以 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散.

初等函数的Taylor展开式：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} +$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

所以对于任意的n阶矩阵A，下面矩阵幂级数绝对收敛.

$$e^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n}}{n!}=I+A+\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots+\frac{A^{n}}{n!}+\cdots$$

$$\sin A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}A^{2n+1}=A-\frac{A^{3}}{3!}+\frac{A^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}A^{2n}=I-\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{A^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

当矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$ 时，下面的三个矩阵级数也是绝对收敛的:

$$\ln(I+A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}A^n = A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-\frac{A^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{A^n}{n}+\cdots,$$

$$(I+A)^{-1}=I-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^n A^n+\cdots$$

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3+\cdots+A^n+\cdots$$

例：已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

讨论 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$ 的敛散性。

解：容易求得级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ 的收敛半径为 $R=1$,

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$，所以 A 有三个特征根

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \therefore \rho(A)=1.$

不能用定理判断 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\boldsymbol{A}^k$ 的敛散性。

考虑 $\boldsymbol{A}$ 的**Jordan** 标准形，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PJP}^{-1}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}}_{\ln 2} \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1,1]$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$ 收敛，但不绝对收敛。