北京理工大学研究生课程考试试题纸

2019 - 2020 学年，第二 学期

课程代码：1700002　　　　课程名称：矩阵分析

一、（10 分）设 f 为线性空间 R^3 上的一个线性变换，已知 f 在基

$$\alpha_1=[1,0,0]^T,\quad \alpha_2=[1,1,0]^T,\quad \alpha_3=[1,1,1]^T$$

下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$$

（1）求 f 在基 $\beta_1=[3,0,0]^T$，$\beta_2=[0,2,0]^T$，$\beta_3=[0,0,1]^T$ 下的矩阵表示；

（2）求 f 的核与值域。

二、（10 分）已知 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_1+3i\overline{x_1}x_3-3i\overline{x_3}x_1+4\overline{x_2}x_2+\overline{x_3}x_3,$$

求酉变换 $X=UY$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形的 Hermite 二次型。

三、（15 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&\boldsymbol{i}&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式.

四、（10 分）设 A 为一个 $m\times n$ 型的复矩阵，证明：矩阵的谱范数

$$\|A\|_2=\max_j(\lambda_j(A^HA))^{\frac{1}{2}}$$

为酉不变范数，即对任意的 m 阶酉矩阵 U 和任意的 n 阶酉矩阵 V 都有

$$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2.$$

五、（15 分）已知矩阵

$$A=(10-\sqrt{10})I_{3\times3},$$

这里 $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 表示 3 阶单位矩阵，

（1）求证：矩阵幂级数 $\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{k}+1}{10^{\boldsymbol{k}+1}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ 绝对收敛；

（2）求矩阵幂级数 $\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{k}+1}{10^{\boldsymbol{k}+1}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ 的收敛和。

六、（20 分）分别求下列矩阵的矩阵函数 $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\pi A}$ 和 $\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\boldsymbol{A}$.

$$\textbf{(1)}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\qquad \textbf{(2)}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

七、（10 分）设 k 为一个复数， A 为一个 n 阶复矩阵，证明：

$$\left|e^{k\cdot A}\right|=e^{k\cdot tr(A)}$$

八、（5 分）已知函数矩阵

$$A(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t}&te^{t}&t^{3}\\e^{t}&-e^{2t}&0\\2t&0&0\end{bmatrix},$$

计算 $\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2}A(t)dt)$ 。

九、（5 分）　我们用 $J_n(0)$ 表示主对角元素均为零的 n 阶 Jordan 块，求 $J_n(0)^2$ 的 Jordan 标准形，其中 $n>1$.