矩阵函数的计算

矩阵函数的Jordan表示

定理：设 $A \in C^{n\times n}$, J 为矩阵的 Jordan 标准形, P 为其相似变换矩阵且使得 $A = PJP^{-1}$.

如果函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的影谱上有定义，那么

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_s))P^{-1}$$

其中

$$
f(J_i)=\begin{bmatrix}
f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\
 & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) \\
 & & & & & f'(\lambda_i) \\
 & & & & & f(\lambda_i)
\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}
$$

此表达式称为矩阵函数 $f(A)$的Jordan表示.

定理： 设 $A \in C^{n\times n}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征根，则矩阵函数 $f(A)$ 的特征根为

$$f(\lambda_1),\ f(\lambda_2), \cdots,\ f(\lambda_n).$$

提示： 根据矩阵函数的Jordan表示

$$f(A) = P\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_r))P^{-1}.$$

例： 设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

求 $f(A)$ 的Jordan表示并计算 $e^{tA}, \sin A$.

解： 首先求出 A 的Jordan标准形矩阵 J 与相似变换矩阵 P ,

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

从而 $f(A)$ 的Jordan表示为

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(1)&f'(1)\\0&0&f(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} f(1)-2f'(1) & -2f'(1) & 6f'(1) \\ -f'(1) & f(1)-f'(1) & 3f'(1) \\ -f'(1) & -f'(1) & f(1)+3f'(1) \end{bmatrix}.
$$

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，可得 $f(1)=e^t$, $f'(1)=te^t$, 从而有

$$
e^{tA}=\begin{bmatrix} (1-2t)e^t & -2te^t & 6te^t \\ -te^t & (1-t)e^t & 3te^t \\ -te^t & -te^t & (1+3t)e^t \end{bmatrix}.
$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，可得 $f(1)=\sin 1$，$f'(1)=\cos 1$,

同样可得

$$\sin A=\begin{bmatrix} \sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1 \\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵函数的多项式表示

设矩阵 $A \in C^{n\times n}$，其最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{d_s}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为矩阵 A 的 s 个互异特征值且

$$d_i \geq 1\ (i = 1, 2\cdots, s),\quad \sum_{i=1}^{s} d_i = m.$$

根据计算方法中的 **Lagrange- Sylvester** 内插多项式定理可知，有一个次数为 $m-1$ 次的多项式

$$p(x)=a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

满足条件

$$p^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i),\quad i=1,2,\cdots,s;\quad k=1,2,\cdots,d_i-1.$$

$p(x)$ 的系数 $a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0$ 可以通过上面关系式确定出来. 我们称

$$f(A) = a_{m-1}A^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

为矩阵函数 $f(A)$ 的多项式表示.

例： 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix},$$

求 $f(A)$ 的多项式表示并且计算 e^{tA}.

解： A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

矩阵 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$, 从而存在一个次数为1的多项式 $p(x)=a_1x+a_0$ 满足

$$p(2)=f(2),\ \ p'(2)=f'(2),$$

即

$$f(2)=2a_1+a_0,\quad f'(2)=a_1$$

解得 $a_0=f(2)-2f'(2),\quad a_1=f'(2).$

于是矩阵函数 $f(A)$ 的多项式表示为

$$f(A)=p(A)=[f(2)-2f'(2)]I+f'(2)A$$

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，可得 $f(2)=e^{2t}$，$f'(2)=te^{2t}$，代入得

$$e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ t & 1-t & t\\ t & -t & 1+t\end{bmatrix}.$$