引理 1： 对于任何一个矩阵 A 都有

$$\mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(A)$$

提示： 证明 $Ax = 0$ 与 $A^H Ax = 0$ 同解.

引理 2： 对于任何一个矩阵 A 都有 AA^H 与 $A^H A$ 都是半正定的 Hermite-矩阵.

$$x^H AA^H x = \left(A^H x\right)^H A^H x \geq 0, \quad x \in C^m \Longrightarrow \text{半正定}$$

$$y^H A^H Ay = \left(Ay\right)^H Ay \geq 0, \quad y \in C^n \Longrightarrow \text{半正定}$$

设 $A\in C_r^{m\times n}$，λ_i 是 AA^H 的特征值，μ_i 是 A^HA的特征值，它们都是实数，记：

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_m=0$$

$$\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_r>\mu_{r+1}=\mu_{r+2}=\cdots=\mu_n=0$$

定理 设 $A\in C_r^{m\times n}$，那么 $\lambda_i=\mu_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$.

此时，我们称 $\alpha_i=\sqrt{\lambda_i}=\sqrt{\mu_i}>0\ (i=1,2,\cdots,r)$ 为矩阵A 的正奇异值，简称奇异值.

设$A\in C^{m\times n}$，证明：AA^H, $A^H A$ 的非零特征值相同.

$$AA^H x=\lambda_i x \to A^H AA^H x=\lambda_i A^H x$$

($A^H x\neq 0$, 否则 $AA^H x=\lambda_i x=0 \to \lambda_i=0$ 或 $x=0$,矛盾）

$$\Downarrow$$

λ_i 是 AA^H 的非零特征值, x 是对应于 λ_i 的特征向量,

则 λ_i 也是 $A^H A$ 的特征值, $A^H x$ 是对应于 λ_i 的特征向量.

设 λ_i 作为AA^H的非零特征值的代数重数为 p_i ,则其几何重数也为 p_i. 若 $x_{i1},\cdots x_{ip_i}$是 AA^H对应于 $\lambda_i\neq 0$ 的特征

向量，那么$A^H x_{i1},\cdots,A^H x_{ip_i}$ 线性无关, 它们是$A^H A$对应于特征值λ_i的特征向量.

$$(k_1 A^H x_{i1} + k_2 A^H x_{i2} + \cdots + k_{p_i} A^H x_{ip_i} = 0$$

$$0 = k_1 AA^H x_{i1} + \cdots + k_{p_i} AA^H x_{ip_i} = \lambda_i \left(k_1 x_{i1} + \cdots + k_{p_i} x_{ip_i}\right)$$

$$\longrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_{p_i} = 0)$$

因此$A^H A$的特征值 λ_i 的几何(代数)重数不小于 p_i.

因为AA^H 所有非零特征值 λ_i 的代数重数之和为$r(AA^H)$

那么$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$所有非零特征值$\lambda_i$ 的代数重数之和大于或等于$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)$同时$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$所有非零特征值的代数重数之和为$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$，又因为

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

所以$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$没有除$\lambda_i$ 之外的非零特征值，并且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 与$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$非零特征值的个数相同.

例1： 求下列矩阵的奇异值

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

解：（1）由于

$$AA^H=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

显然 AA^H 的特征值为 5, 0, 0，所以 A 的奇异值为 $\sqrt{5}$.

（2）由于

$$AA^H=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

显然 AA^H 的特征值为 2, 4，所以 A 的奇异值为 $\sqrt{2}$, 2.

例2 证明：正规矩阵的奇异值为其非零特征值的模长.

提示：

$$U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$$

$$U^HA^HU=\mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots\bar{\lambda}_n)$$

$$U^HAA^HU=\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)$$