北京理工大学研究生课程考试试题纸

2020 - 2021 学年，第一 学期

课程代码：1700002　　课程名称：矩阵分析

装　订　线

班级________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、如果 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 3，其初等因子为 $\lambda, \lambda^2, \lambda+2, (\lambda+2)^2,$

$(\lambda-1)^2$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为______________________________，

$A(\lambda)$ 的行列式因子为______________________________

2、已知 n 阶单位矩阵 I，则 $e^{2\pi i I}=$________，　$\cos\pi I=$________.

3、已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $\dfrac{d}{dt}(\sin At)=$______________________________

4、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&2&2\\0&-3&0\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$____，$\|A\|_F=$_____，$|e^A|=$_____

其中 $\|\cdot\|_1$ 是由向量的 1-范数诱导出来的矩阵范数（也称算子范数），$\|\cdot\|_F$ 是矩阵的 Frobenius 范数，i 是虚数单位，$i^2=-1$．$|X|$ 表示 X 的行列式.

5、已知函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t}&te^t\\t^2&-e^{2t}\end{bmatrix}$，则 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}=$____________________

$\dfrac{d}{dx}(\int_0^{x^2}A(t)dt)=$____________________.

二、（15 分）已知 (1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$, (2) $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵 A, B 的 Jordan 标准形和最小多项式；

（2）求矩阵函数 $\sin tA$, e^{tB}.

装

订

线

三、(10 分)求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解, 这里 i 是虚数单位, $i^2=-1$.

四、（10 分）已知正规矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$， 求矩阵 A 的谱分解.

五、（10 分）设 A 为一个 $m\times n$ 型的复矩阵，矩阵的谱范数为

$$\|A\|_2 = \max_j(\lambda_j(A^H A))^{\frac{1}{2}}.$$

证明：对任意的次酉矩阵 $U\in U^{p\times m}$，$V^H\in U^{q\times n}$，即 $U^H U = I_m$，$VV^H = I_n$. 都有

$$\|A\|_2 = \|UAV\|_2.$$

六、（10 分）矩阵 $A,B\in C^{n\times n}$．A 是正定 Hermite 矩阵，B 是反 Hermite 矩阵，证明矩阵$(A-B)$是可逆矩阵.

七、（15 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

（1）证明 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k+1}$ 收敛.

（2）计算矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k+1}$ 的收敛和.

装

订

线