初等因子和矩阵的相似

定义：设 λ-矩阵的 $A(\lambda)$不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$,
在复数域内将它们分解成一次因式的幂的乘积：

$$d_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}}$$
$$d_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}}$$
$$\cdots\cdots$$
$$d_r(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{rs}}$$

其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 是互异的复数，e_{ij} 是非负整数. 所有指数大于零的因子 $(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}, e_{ij}>0, i=1,\cdots,r, j=1,\cdots,s$ 称为 $A(\lambda)$ 的初等因子.

因为 $d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda),\ i=1,\cdots,r-1,$ 所以有指数如下关系

$$0\le e_{11}\le e_{21}\le\cdots\le e_{r1}$$

$$0\le e_{12}\le e_{22}\le\cdots\le e_{r2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$0\le e_{1s}\le e_{2s}\le\cdots\le e_{rs}$$

定理： $m\times n$型的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们有相同的秩和相同的初等因子.

例　如果 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1$$
$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$
$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$
$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

则 $A(\lambda)$ 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,$ $(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,$ $(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,(\lambda-2).$

例　如果 5×6 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$的秩为 4，其初等因子为

$$\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+i)^3,$$

求 $A(\lambda)$ 的Smith标准形.

解：首先求出 $A(\lambda)$ 的不变因子:

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+i)^3,$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2,\quad d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),\quad d_1(\lambda)=1.$$

从而 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+i)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理： 若 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t(\lambda) \end{bmatrix}$$

则 $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \cdots, A_t(\lambda)$ 各个初等因子的全体就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

定理：若 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & & \\ & f_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_t(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

则 $f_1(\lambda), f_2(\lambda),\cdots, f_t(\lambda)$ 所有一次因式幂的全体就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子.

数字矩阵的相似与 λ-矩阵的等价

定理： 设 A, B 是两个 n 阶数字矩阵，那么 A 与 B 相似的充分必要条件为它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 等价.

定义： 对于数字矩阵 A，我们称 $\lambda I - A$ 的不变因子为 A 的不变因子，称 $\lambda I - A$ 的初等因子为 A 的初等因子.

对于任何一个数字矩阵 A，$|\lambda I - A| \neq 0$，所以，

$$\operatorname{rank}(\lambda I - A) = n.$$

定理：两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

定理：两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是它们有相同的行列式因子(或不变因子).

例： 设 $\varepsilon \neq 0$，证明 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \quad 与 \quad B=\begin{bmatrix} a & \varepsilon & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & a \end{bmatrix}$$

相似.

提示：A, B 有相同的各阶行列式因子.