Jordan标准形的应用举例

Jordan 标准形在常系数微分方程组中的应用

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

其中 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为常数.

此方程可以写成矩阵形式 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX,$

这里 $A=(a_{ij}),\quad X=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^T,$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right).$$

设 J 是 A 的Jordan标准形，且 $P^{-1}AP=J$. 令

$$X=PY,\quad Y=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)]^T,$$

则 $P\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=APY,$ 从而 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=P^{-1}APY=JY.$

例： 求下面微分方程组的解.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 3x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

解：令 $X = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$，则方程组可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，则由 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{Y}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,t}=y_1,\quad \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,t}=y_2+y_3,\quad \frac{\mathrm{d}\,y_3}{\mathrm{d}\,t}=y_3$$

容易求得

$$y_1=k_1e^t,\quad y_3=k_3e^t,\quad y_2=(k_3t+k_2)e^t.$$

代入 $X=PY$，得

$$x_1=-k_1e^t+2k_3e^t+2(k_3t+k_2)e^t,$$

$$x_2=k_1e^t+(k_3t+k_2)e^t,$$

$$x_3=k_3e^t+(k_3t+k_2)e^t.$$

例: 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵，且存在正整数 m 使得 $A^m = I$. 证明: A 与对角矩阵相似，且主对角线上的元素均为 m 次单位根.

证明：设 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=J$. 由于 $A^m=I$,

所以有 $J^m=(Q^{-1}AQ)^m=Q^{-1}A^mQ=Q^{-1}IQ=I$,

从而有

$$J_i^m=\begin{bmatrix} \lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & \cdots & * \\ & \lambda_i^m & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & m\lambda_i^{m-1} \\ & & & \lambda_i^m \end{bmatrix}=I_k$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式成立, 所以 $t=n$, J 为对角矩阵, A 与对角矩阵相似, λ_i 均为 m 次单位根.

例： 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵且满足 $A^2 = A$, 证明：

A 与对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

相似.

证明：设 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=J$. 由于 $A^2=A$,

所以有 $J^2=(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ=J$,

从而有 $J_i^2=J_i$, $i=1,2,\cdots,t$. 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式成立, 并且 $\lambda_i^2=\lambda_i$，所以有 $\lambda_i=1$ 或者 $\lambda_i=0$.

这说明 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为 1 或 0，适当地调换主对角线上的元素次序可以得到对角矩阵

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

此矩阵仍然与 A 相似.

例：任意 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 相似.

证明：设 $P^{-1}AP=J$，J 为 A 的Jordan标准形. 则

$$A=PJP^{-1}, \longrightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=J^T \longrightarrow J^T\sim A^T$$

设 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots J_s)$，令

$$P_i=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则 $P_i^{-1}=P_i$,

$P_iJ_iP_i=J_i^T$

$$\longrightarrow J_i\sim J_i^T \longrightarrow J\sim J^T \longrightarrow A\sim A^T$$