Matrix Analysis

矩阵分析

线性空间的子空间

定义：设 V 为数域 F 上的一个 n 维线性空间，W 为 V 的一个非空子集合，如果对于任意的 $\alpha,\beta\in W$，以及任意的 $k,l\in F$ 都有

$$k\alpha+l\beta\in W,$$

那么我们称 W 为 V 的一个子空间.

例 1　线性空间 V 和单个零向量构成的子空间 $\{0\}$ 是 V 的两个平凡的子空间.

例 2　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维线性空间 V 中的一组向量，那么非空子集合

$$\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid \forall k_i\in F\}$$

构成线性空间 V 的一个子空间, 称此子空间为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间. 其维数为向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩.

例 3　实数域上的线性空间 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 中全体上三角矩阵集合，全体下三角矩阵集合，全体对称矩阵集合，全体反对称矩阵集合分别都构成 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 的子空间.

问题：这几个子空间的基底与维数分别是什么？

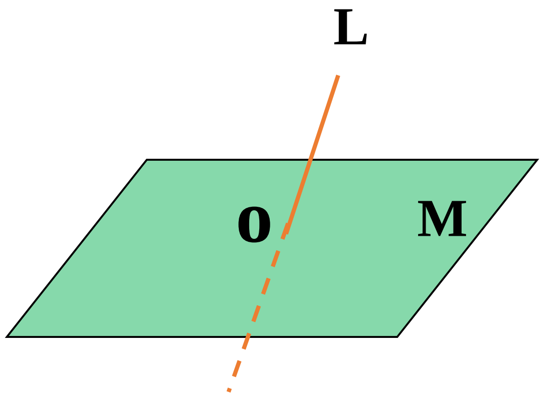
子空间的交与和

定义: 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 令

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \text{且 } \alpha_2 \in V_2\}$$

可以验证： $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 都构成 V 的子空间.
分别称为 V_1, V_2 的交空间与和空间.



$$L \cap M = \{0\},$$

$$L + M = R^3.$$

定理：设 $V_1=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, $V_2=\text{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$,

则 $V_1+V_2=\text{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$.

定理 (维数公式) 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

子空间的直和、补子空间

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 若 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$,

则称 V_1, V_2 的和空间 $V_1 + V_2$ 是直和, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

设 W, W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 且 $W = W_1 \oplus W_2$, 则称 W 有一个直和分解. 若 $\underline{V = W = W_1 \oplus W_2}$, 则称 W_1, W_2 是 V 的一对互补的子空间, 称 W_1 是 W_2 的代数补.

定理: 设 U 是 n 维线性空间 V 的子空间, 则一定存在 U 的代数补子空间 W, 使得 $V=U\oplus W$.

提示: 设 $U=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, U 的一个基

$$V=\text{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots,\alpha_n\},$$

令 $W=\text{span}\{\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots,\alpha_n\}$

注: 线性空间 V 的子空间 U 的代数补不是唯一的.