矩阵的正交三角分解（UR 分解）

定理 设 $A \in C_n^{n\times n}$，那么 A 可唯一地分解为

$$A = UR \quad 或 \quad A = R_1 U_1$$

其中 $U, U_1 \in U^{n\times n}$，R 是正线上三角矩阵，R_1 是正线下三角矩阵.

证明：先证明分解的存在性. 将矩阵 A 按列分块得到

$$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$$

$A\in C_n^{n\times n}$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是线性无关的. 利用 Schmidt 正交化与单位化方法，先得到一组正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_i,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots--\frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$$

再单位化 $\eta_i = \beta_i / \|\beta_i\|$ 得到一组标准正交向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

并且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 之间有如下关系

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= c_{11}\eta_1 \\
\alpha_2 &= c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 \\
\alpha_3 &= c_{31}\eta_1 + c_{32}\eta_2 + c_{33}\eta_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n &= c_{n1}\eta_1 + c_{n2}\eta_2 + \cdots\cdots + c_{nn}\eta_n
\end{aligned}
$$

其中 $c_{ii} = \|\beta_i\| > 0,$

$i = 1, 2, \cdots, n$

于是有

$$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$$

$$=\underbrace{[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n]}_{\text{酉矩阵}}\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & c_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{正线上三角矩阵}}=UR$$

下面考虑分解的唯一性. 设有两种分解式 $A = UR = U\,R$

那么有 $$U^{-1}U = RR^{-1}$$

注意到 $U^{-1}U$ 是酉矩阵，而 RR^{-1} 是一个正线上三角矩阵，由于“正规矩阵同时还是三角矩阵, 则必为对角形矩阵”可知

$$U^{-1}U = I, \quad RR^{-1} = I$$

因此 $$U = U, \quad R = R$$

因为有 $A \in C_n^{n\times n}$，所以 $A^T \in C_n^{n\times n}$，按照分解的存在性可知

$$A^T = UR$$

其中 $U \in U^{n\times n}$， R 是正线上三角矩阵.

于是 $$A = R^T U^T = R_1 U_1$$

其中 R_1 是正线下三角矩阵，而 $U_1 \in U^{n\times n}$.

例： 求下列矩阵的正交三角分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解： 容易判断出 $A\in C_3^{4\times 3}$，即 A 是一个列满秩矩阵. 按照定理的证明过程，将 $A=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]$ 的三个列向量正交化与单位化.

先得到一个正交向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \alpha_3 + \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$$

再将其单位化，得到一组标准正交向量组

$$\eta_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^T$$

则原来的向量组与标准正交向量之间的关系可表示成

$$\alpha_1 = \sqrt{2}\eta_1$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1$$

$$\alpha_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\eta_3 - \frac{\sqrt{6}}{6}\eta_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1$$

将这组关系式矩阵化，可得：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = UR$$