Hermite矩阵的结构定理

Hermite 矩阵的基本性质

引理： 设 $A \in C^{n\times n}$，则

(1) $A+A^H, AA^H, A^H A$ 都是 H-阵.

(2) $A-A^H$ 是反 H-阵.

(3) 如果 A 是 H-阵，那么 A^k 也是 H-阵，k 为任意正整数.

(4) 如果 A 是可逆的 H-阵，那么 A^{-1} 也是可逆的 H-阵.

(5) 如果 A 是 H-阵(反H-阵), 那么 iA 是反H-矩阵 (H-阵), 这里 i 为虚数单位.

(6) 如果 A, B 都是 H-阵, 那么 $kA+lB$ 也是H-阵, k, l 均为实数.

(7) 如果 A, B 都是 H-阵, 那么 AB, BA 也是 H-阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

定理:

(1) 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 是 H-阵的充分必要条件是对于任意的 $X \in C^n$，$X^H AX$ 是实数.

(2) 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 是 H-阵的充分必要条件是对于任意的 n 阶方阵 B，$B^H AB$ 为H-阵.

H-阵的结构定理

定理：设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 是 H-阵的充分必要条件是存在一个酉矩阵 $U \in U^{n\times n}$，使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in R$$

H-阵酉相似于实对角矩阵

推论: 实对称阵正交相似于实对角矩阵.

例 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个幂等 H-阵，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{U}^{n \times n}$, 使得

$$\boldsymbol{U}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}.$$

证明: $\boldsymbol{A}$ 为一个 H-阵，所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{U}^{n \times n}$，使得

$$W^H A W = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

A 为一个幂等 H-阵，所以 $\lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$.

将矩阵 W 的列向量重新排序, 使得前 r 列对应特征值 1, 后 $n-r$ 列对应特征值 0，可以得到酉矩阵 $U \in U^{n\times n}$ 使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\, A = r.$$

定义　设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为一个 n 元标准正交列向量组，那么称 $n\times r$ 型矩阵

$$U_1=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$$

为一个次酉矩阵. 一般地将其记为 $U_1\in U_r^{n\times r}$.

定理：$U_1\in U_r^{n\times r}$ 的充分必要条件是 $U_1^H U_1=I_{r\times r}$

提示：设 $U_1=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$，那么 $U_1^H=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\ \alpha_2^H\\ \vdots\\ \alpha_r^H\end{bmatrix}$

$$U_1^H U_1=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_r\\ \alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_r\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_r^H\alpha_1 & \alpha_r^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_r^H\alpha_r\end{bmatrix}$$

定理： 设 A 为一个 n 阶矩阵，则

$$A = A^H = A^2$$

的充分必要条件是存在一个 $n \times r$ 型次酉矩阵 $U_1 \in U_r^{n \times r}$ 使得

$$A = U_1 U_1^H$$

其中 $\operatorname{rank} A = r$.

提示： $U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = U \underline{\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}} \underline{\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} U^H} = U_1 U_1^H$

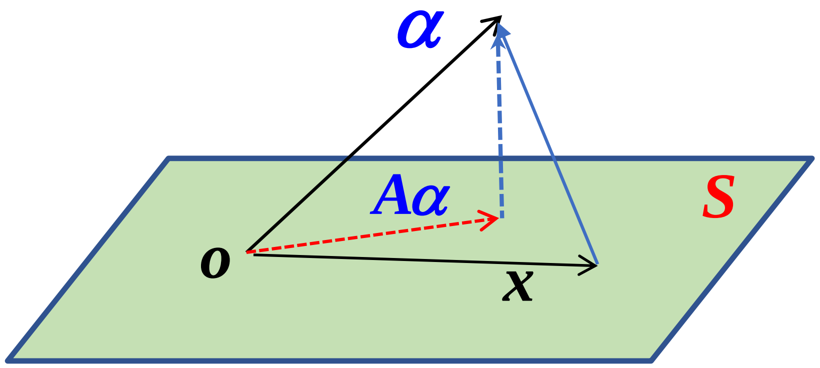
定理：设 S 是 C^n 的子空间，矩阵 U_1 的列由 S 的标准正交基构成， 令矩阵

$$A = U_1 U_1^H,$$

则线性变换 $\sigma: C^n \to C^n,$

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \quad \forall\, \alpha \in C^n$$

是 C^n 到 S 的正交投影变换.



提示：$U_1 \in U_r^{n\times r}$， $A = A^H = A^2$， $R(A) = R(U_1) = S.$