$\cdots$ Tho $\cdots$

2007

一.解

(1) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P \Rightarrow P=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$

$B=P^{-1}AP$

(2) $f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)A=(f(\alpha_1),f(\alpha_2),f(\alpha_3))=(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1+3\alpha_3)$

令 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，求解 $AX=0$

$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 解得 $x=(1,-1,1)^T$

∴核子空间 $N(f)$ 的基是 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=(-2,2,3)^T$

f 的值域 $R(f)=span\{f(\alpha_1),f(\alpha_2),f(\alpha_3)\}$

$=span\{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1+3\alpha_3\}$

$=span\{[0,0,-1]^T,[1,2,1]^T\}$ 找线性无关

二. $AA^H=\begin{bmatrix}2&i\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\-i&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴奇异值为 $\sqrt{5}$

共轭 $AA^H-3E=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $(AA^H-3E)x=0$ 的解向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ∴ $U_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$AA^Hx=0$ 的解向量为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ∴ $U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$V_1=A^HU_1\Delta^{-H}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-i&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{i}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ ∴ $V=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{i}{\sqrt{5}}\\-\frac{i}{\sqrt{5}}&+\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

∴奇异值分解式为 $A=U\begin{bmatrix}\Delta&0\\0&0\end{bmatrix}V^H$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{i}{\sqrt{5}}\\-\frac{i}{\sqrt{5}}&+\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

三.解:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&-2-\lambda&2\\-1&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+2)$

$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $r(A-0E)=1$，∴ $\lambda=0$ 所对应的两个线性无关的向量.

∴ A是可对角化矩阵， $A=P\,diag(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)P^{-1}=P\,diag(0\;0\;-2)P^{-1}$

求解 $(A-0E)x=0$ 得: $\alpha_1=(-1,0,1)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$

$(A+2E)x=0$ 得: $\alpha_3=(-1,-2,1)^T$

∴ $P=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ∴ $\beta_1=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$ $\beta_2=(1,0,1)^T$ $\beta_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

∴ $G_1=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T=$ $G_2=\alpha_3\beta_3^T$

则 $A=-2G_2$

四. 证明：(1) $\|A\|_2=\max_j(\lambda_i(A^HA))^{\frac{1}{2}}$

$A=I-UU^T$，$A^H=I-UU^T=A$

$A^HA=A^2=(I-UU^T)(I-UU^T)=I-2UU^T+UU^TUU^T=I-UU^T=A$

$\therefore A^HA$的特征值即为A的特征值

又 $A^2=A$ $\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\therefore$ A的特征值非0即1 $\therefore\|A\|_2=1$

(2) 设 $Y=\cancel{AX}-\cancel{AX}$，则 $(Y,AX)=0$

即：$Y^T(AX)=Y(AX)^T=0$

$\therefore\|X\|_2=\|AX+Y\|_2=(AX+Y)^T(AX+Y)=\|AX\|_2+\|Y\|_2$

$\therefore\|AX\|_2\le\|X\|_2$

五. 同2005年

六. 解

(1) A的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-3)^2$

设 $p(x)=a_0+a_1x$

则 $p(3)=f(3)=a_0+3a_1$，$p'(3)=f'(3)=a_1$

$\therefore a_0=f(3)-3f'(3)$，$a_1=f'(3)$

则 $p(x)=[f(3)-3f'(3)]+f'(3)x$

$f(A)=[f(3)-3f'(3)]I+f'(3)A$

① $f(x)=e^{tx}$，$f(3)=e^{3t}$，$f'(3)=te^{3t}$

$e^{tA}=(e^{3t}-3te^{3t})I+te^{3t}A$

$=\cdots$

(2) $A^T=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ $\varphi_{A^T}(\lambda)=(\lambda-3)^4$

$\because A\sim A^T$，$\therefore\varphi_A(\lambda)=(\lambda-3)^4$

设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$\cdots$

(3) $|A-\lambda E|=(2-\lambda)(\lambda^2-1)$

其Jordan标准形为 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

七. 解：~~求导~~：两边对t求导

$$A\cos tA=\begin{bmatrix}5\cos5t+3\cos t&10\cos5t-2\cos t&5\cos5t-\cos t\\5\cos5t-\cos t&10\cos5t+2\cos t&5\cos5t-\cos t\\5\cos5t-\cos t&10\cos5t-2\cos t&5\cos5t+3\cos t\end{bmatrix}$$

令 $t=0$ 则 $A=\begin{bmatrix}8&8&4\\4&12&4\\4&8&8\end{bmatrix}$

八. 解：由已知 $Ax=b$

其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，$b=[1010]^T$

则最佳最小二乘解为 $x=A^+b$

$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

$\therefore A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=$

九. 解：

$A=\begin{bmatrix}0&-i&1\\i&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&i&-1\\-i&\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-2)$

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt2$，$\lambda_3=-\sqrt2$

$\lambda_1=0$的单位特征向量 $\alpha_1=(0,-\frac{i}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})^T$

$\lambda_2=\sqrt2$的 - - - - - - $\alpha_2=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{i}{2},\frac12)^T$

$\lambda_3=-\sqrt2$的 - - - - - - $\alpha_3=(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{i}{2},\frac12)^T$

则 $U=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{i}{\sqrt2}&\frac{i}{2}&\frac{i}{2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac12&\frac12\end{bmatrix}$

且 $U^HAU=\begin{bmatrix}0&&\\&\sqrt2&\\&&-\sqrt2\end{bmatrix}$

令 $X=UY$ 代入 $f(x)$ 得：其中 $Y=(y_1,y_2,y_3)$.

$f(x)=X^HAX$

$=Y^HU^HAUY=\sqrt2\bar{y}_2y_2-\sqrt2\bar{y}_3y_3$