北京理工大学研究生课程考试试题纸

2021 - 2022 学年，第一学期

课程代码：1700002　　　课程名称：矩阵分析

班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

装

订

线

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、如果 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 3，其初等因子为 $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2$，

则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $\lambda,\ \lambda^2(\lambda+2),\ \lambda^3(\lambda+2)^2$

$A(\lambda)$ 的行列式因子为 $\lambda,\ \lambda^3(\lambda+2),\ \lambda^6(\lambda+2)^3$

2、$R[x]_4$ 表示实数域 R 上所有次数小于 4 的多项式构成的线性空间，求多项式

$p(x)=3+2x^3$ 在基 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 下的坐标 $[5, 6, 6, 2]^T$

3、设 $J_m(1)$ 表示主对角元均为 1 的 m 阶 Jordan 块。则 $J_m^k(1)$ 的 Jordan 标准形

为 $J_m(1)$，$J_m^k(1)$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^m$，这里 m, k 是整

数且 $m>1, k\geq 1$.

4、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty =$ 7，$\|A\|_F =$ $\sqrt{30}$，$|e^A| =$ e^6.

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 是由向量的 ∞-范数诱导出来的矩阵范数（也称算子范数），$\|\cdot\|_F$ 是矩

阵的 Frobenius 范数，$|X|$ 表示 X 的行列式.

5、已知函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & t^2 \\ te^t & -e^{2t} \end{bmatrix}$，则 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}=$ $\begin{bmatrix} 4e^{2t} & 2 \\ (1+t)e^t & -4e^{2t} \end{bmatrix}$

$\dfrac{d}{dx}(\int_0^{x^2} A(t)dt) =$ $\begin{bmatrix} 2xe^{2x^2} & 2x^5 \\ 2x^3e^{x^2} & -2xe^{2x^2} \end{bmatrix}$

二、（20 分）已知 (1) $A=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

（1）求矩阵 A, B 的 Jordan 标准形和最小多项式;

（2）求矩阵函数 e^{tA}, $\sin B$.

$$J_A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$J_B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA}=e^{4t}\begin{bmatrix} 1+2t & 2t & 0 \\ -2t & 1-2t & 0 \\ t & t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin B=\begin{bmatrix} \sin 2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2 & \cos 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2 \end{bmatrix}$$

三、（10 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\end{bmatrix}$

的奇异值分解表达式, 这里 i 是虚数单位, $i^2=-1$.

$$AA^H=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \delta_1=3. \quad \delta_2=1$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$U_1=U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$V_1=A^H U_1 \Delta^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad V=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=UDV^H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

四、（10 分）已知正规矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & i\\ -1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的谱分解表达式，这里 i 是虚数单位，$i^2=-1$.

$$A=\sqrt{2}i\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{2}i/4 & \sqrt{2}/4\\ \sqrt{2}i/4 & 1/4 & i/4\\ \sqrt{2}/4 & -i/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

$$+(-\sqrt{2}i)\begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{2}i/4 & -\sqrt{2}/4\\ \sqrt{2}i/4 & 1/4 & i/4\\ -\sqrt{2}/4 & -i/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

$$+0\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -i/2\\ 0 & i/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

五、（10 分）矩阵 $A,B\in C^{n\times n}$．A是正定 Hermite 矩阵，B是反 Hermite 矩阵，

证明矩阵$(A+B)$是可逆矩阵.

装

订

线

六、（15 分） 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，

证明：矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k$ 收敛，并求其收敛和。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=x\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\right)$$

$$=x\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)'$$

$$=x[(1-x)^{-1}]'=x(1-x)^{-2}$$

$$B=\frac{1}{10}A$$

$$f(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k$$

$$=B(I-B)^{-2}$$

$$=\begin{bmatrix}1/10 & 4/5\\ 1/5 & 1/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9/10 & -4/5\\ -1/5 & 9/10\end{bmatrix}^{-2}$$

$$=\begin{bmatrix}154/169 & 368/169\\ 92/169 & 154/169\end{bmatrix}$$

七、（5 分）证明：$\|\cdot\|_F$ 是矩阵的 Frobenius 范数，那么

（1）若 $m\times n$ 型的复矩阵 $A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$，则 $\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|_2^2$，

这里，$\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2-范数；

（2）设 A，B 分别是 $m\times n$ 型和 $n\times p$ 型的复矩阵，则 $\|AB\|_F\le\|A\|_2\|B\|_F$

这里，$\|\cdot\|_2$ 表示由向量的 2-范数诱导出来的矩阵 2-范数。

$$\|A\|_F^2=\sum\sum|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|_2^2$$

$$B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p]$$

$$AB=[A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_p]$$

$$\|B\|_F^2=\sum_{i=1}^{p}\|\beta_i\|_2^2$$

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^{p}\|A\beta_i\|_2^2\le\sum\|A\|_2^2\|\beta_i\|_2^2$$

$$\|A\|_2=\frac{\max\|AX\|_2}{\|X\|_2}$$

$$=\|A\|_2^2\cdot\sum\|\beta_i\|_2^2$$

$$=\|A\|_2^2\cdot\|B\|_F^2$$

$$\|AB\|_F\le\|A\|_2\cdot\|B\|_F.$$

装

订

线