矩阵分析

应用领域：

微分方程、概率统计、优化、信号处理、控制工程、经济理论等

教材： 矩阵分析, 北京理工大学出版社, 第三版.

参考书：

《矩阵分析与应用》，张贤达著，清华大学出版社；

《Matrix Analysis for Scientists & Engineers》: Alan J. Laub, SIAM.

《Matrix Analysis 》(Second Edition): R. A. Horn， C. R. Johnson, Posts & Telecom Press.

线性空间

定义：设V是一个非空的集合，F 是一个数域，在集合V 中定义两种代数运算, 一种是加法运算, 用 $+$ 来表示；另一种是数乘运算, 用 $\cdot$ 来表示，并且这两种运算满足下列八条运算律：

(1) 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) 加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) 零元素：在V 中存在一个元素 0 , 使得$\forall\alpha\in V$ 都有 $\alpha+0=\alpha$.

(4) 负元素：对于 V 中的任意元素 α 都存在一个元素 β

使得 $\alpha+\beta=0.$

(5) $1 \bullet \alpha=\alpha$

(6) $k \cdot(l \cdot \alpha)=(k l) \cdot \alpha$

(7) $(k+l) \alpha=k \alpha+l \alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k \alpha+k \beta$

称这样的 V 为数域 F 上的线性空间

例 1　全体实函数集合构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间.

例 2　复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的全体 $\boldsymbol{m\times n}$ 型矩阵构成的集合 $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间。

例 3　实数域 $\boldsymbol{R}$ 上全体次数不大于 $\boldsymbol{n}$ 的多项式集合 $\boldsymbol{R[x]_{n+1}}$ 构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间;

$\boldsymbol{R}$ 上次数等于 $\boldsymbol{n}$ 的多项式集合不构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间;

例 4：设 A 是复数域 C 上的 $m\times n$ 矩阵，x 为 n 维列向量，则 m 维列向量集合：

$$V=\left\{y\in C^m \,\middle|\, y=Ax,\ x\in C^n\right\}$$

构成复数域 C 上的线性空间，称为 A 的列空间或 A 的值域.

其中，V 中的加法和数乘与 C^m 中相同.

线性空间的基本概念及其性质

定义：线性组合；线性表出；线性相关；线性无关；向量组的极大线性无关组；向量组的秩

例 1 实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的函数空间中，函数组

$$1,\cos^2 x,\cos 2x$$

是线性相关的函数组.

例 2 实数域 R 上的函数空间中，函数组

$$e^{x},\ e^{2x},\ e^{3x},\ e^{4x}$$

是一组线性无关的函数.

例 3 实数域 R 上的函数空间中，函数组

$$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx$$

是线性无关的.

提示： 连续求导 $2n$ 次，分别令 $x=0$ 代入得方程组.

线性空间的基底和维数

定义： 设 V 为数域 F 上的一个线性空间. 如果在 V 中存在 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使得 V 中任意一个向量 α 都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一个基底. $(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$ 为向量 α 在基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标. 此时我们称 V 为一个 n 维线性空间，记为 $\dim V = n$.

例 1　实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中向量组

$$(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)$$

与向量组

$$(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)$$

都是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基. $\boldsymbol{R}^3$ 是 3 维线性空间.

例 2 实数域 R 上的线性空间 $R[x]_{n+1}$ 中的向量组

$$1, x, x^2, \cdots, x^n$$

与向量组 $1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n$

都是 $R[x]_{n+1}$ 的基底. $R[x]_{n+1}$ 的维数为 $n+1$.

注 1: 线性空间的基底并不唯一，但是维数是唯一确定的.

注 2: 线性空间可以分为有限维线性空间和无限维线性空间.

我们主要讨论有限维的线性空间.

基变换与坐标变换

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基底，它们之间的关系为

$$\beta_i = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

将上式矩阵化可以得到下面的关系式

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n]\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{P}$$

称 n 阶方阵 P 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

定理：过渡矩阵 P 是可逆的.

任取 $\alpha \in V$，设 α 在两组基下的坐标分别为 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$

与 $[y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$，那么我们有：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

称上式为坐标变换公式.