课程编号MTH17075

北京理工大学2013-2014学年第一学期2011级数学学院矩阵分析试题B卷解答

一、解:由已知:$A(\lambda)$的行列式因子分别为$D_1(\lambda)=\lambda$, $D_2(\lambda)=\lambda^3(\lambda-3)^2$, $D_3(\lambda)=\lambda^6(\lambda-3)^5(\lambda-1)$,故$A(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=\lambda$, $d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda^2(\lambda-3)^2$, $d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda^3(\lambda-3)^3(\lambda-1)$,故$A(\lambda)$的Smith标准形为$\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^2(\lambda-3)^2,\lambda^3(\lambda-3)^3(\lambda-1))$;初等因子为$\lambda,\lambda^2,\lambda^3,(\lambda-3)^2,(\lambda-3)^3,\lambda-1$。

Jordan标准形,Smith标准形,不变因子,行列式因子,初等因子五者间要会互推!

二、解:$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+2\lambda=\lambda(\lambda-\sqrt{2}i)(\lambda+\sqrt{2}i)$,特征值$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\sqrt{2}i$, $\lambda_3=\sqrt{2}i$,相应的单位正交特征向量分别为$\alpha_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $\alpha_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2},-\frac{i}{2})^T$, $\alpha_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{2},\frac{i}{2})^T$,故$A$的谱分解式为:

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^H+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^H+\lambda_3\alpha_3\alpha_3^H=-\sqrt{2}i\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2}\\ i/2\sqrt{2} & 1/4 & i/4\\ -i/2\sqrt{2} & -i/4 & 1/4\end{bmatrix}+\sqrt{2}i\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2}\\ 1/2\sqrt{2} & 1/4 & 1/4\\ 1/2\sqrt{2} & -i/4 & 1/4\end{bmatrix}。$$

正规矩阵谱分解有两种方法,都可用,但是要记住哪里有"H"!

三、解:(1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\pi/3 & 0 & 0\\ -\pi/6 & \lambda-\pi/3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\pi/3\end{vmatrix}=(\lambda-\frac{\pi}{3})^3$,特征值$\lambda=\frac{\pi}{3}$(三重),又$\mathrm{rank}(\frac{\pi}{3}I-A)=1$,故对应$\lambda=\frac{\pi}{3}$的Jordan块有$3-1=2$个,故$A$的Jordan标准形$J=\begin{bmatrix}\pi/3 & 0 & 0\\ 0 & \pi/3 & 1\\ 0 & 0 & \pi/3\end{bmatrix}$,最小多项式$m(\lambda)=(\lambda-\frac{\pi}{3})^2$;

(2) 由(1)可设$p(x)=a_0+a_1x$,则有:$p(\frac{\pi}{3})=a_0+\frac{\pi}{3}a_1=f(\frac{\pi}{3})$, $p'(\frac{\pi}{3})=a_1=f'(\frac{\pi}{3})$,解得:$a_0=f(\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}f'(\frac{\pi}{3})$,故$f(A)$的多项式表示为:$f(A)=p(A)=f(\frac{\pi}{3})I+f'(\frac{\pi}{3})(A-\frac{\pi}{3}I)$,因此:

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}I+\frac{1}{2}(A-\frac{\pi}{3}I)=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 0 & 0\\ \pi/12 & \sqrt{3}/2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix},\quad \cos A=\frac{1}{2}I-\frac{\sqrt{3}}{2}(A-\frac{\pi}{3}I)=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ -\sqrt{3}\pi/12 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}。$$

事实上A是一个Jordan标准形转置的倍数,其实可以直接写结果了。

四、证:由B是正定Hermite矩阵知存在可逆矩阵Q,使得$B=Q^HQ$,于是$|A+B|=|Q^H(Q^{-H}AQ^{-1})Q+Q^HQ|=|Q^H||Q^{-H}AQ^{-1}+I||Q|=|B|\cdot|I+Q^{-H}AQ^{-1}|$,因为$Q$可逆,$A$是半正定Hermite矩阵,故$Q^{-H}AQ^{-1}$是半正定Hermite矩阵,故它的所有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geq 0$,又$A\neq 0$,故$Q^{-H}AQ^{-1}\neq 0$,从而$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$不全为0,即$\exists\lambda_i>0$,注意到$I+Q^{-H}AQ^{-1}$的所有特征值为$1+\lambda_1,\cdots,1+\lambda_n$,故$|A+B|=|B|\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)\geq|B|(1+\lambda_i)>|B|$。

149页原题(题号自己找,不谢。

五、解:$AA^H=\begin{bmatrix}2 & -i\\ 0 & 0\\ -2 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ i & 0 & -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $|\lambda I-AA^H|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 5\\ 0 & \lambda & 0\\ 5 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-10)$, AA^H的特征值为$\lambda_1=10$, $\lambda_2=\lambda_3=0$,故奇异值$\alpha_1=\sqrt{10}=\Delta$, AA^H对应$\lambda_1=10$的单位特征向量为$u_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$,对应$\lambda_2=\lambda_3=0$的单位正交特征向量为$u_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $u_3=(0,1,0)^T$,令$U_1=u_1$, $V_1=A^HU_1\Delta^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ i\end{bmatrix}$,由$V_1$构造酉矩阵$V=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & i/\sqrt{5}\\ i/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$,令$U=(u_1,u_2,u_3)=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$,则$A$的奇异值分解式为$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$;

书上另一种奇异值分解老师不承认哦。

因为$\begin{bmatrix}2&-i\\0&0\\-2&i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2i&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，故A的满秩分解式为$A=BC=\begin{bmatrix}-i\\0\\i\end{bmatrix}[2i\ \ 1]$，从而A的伪逆矩阵$A^{+}=$ 三种分解就是每都考，怎么样？

$=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\begin{bmatrix}-2i\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot[i\ \ 0\ \ -i]=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&0&-2\\i&0&-i\end{bmatrix}$。

六、解：记Hermite矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&3i\\0&4&0\\-3i&0&1\end{bmatrix}$，$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$f(X)=X^HAX$，$|\lambda I-A|=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$，得特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=4$，相应的单位正交特征向量分别为$\alpha_1=(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{i}{\sqrt2})^T$，$\alpha_2=(\frac{i}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$，$\alpha_3=(0,1,0)^T$，

令$U=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1/\sqrt2&i/\sqrt2&0\\0&0&1\\i/\sqrt2&1/\sqrt2&0\end{bmatrix}$，则$U^HAU=diag\{-2,4,4\}$，令$X=UY$，则$g(Y)=f(X)=X^HAX=Y^HU^HAUY$

$=Y^Hdiag\{-2,4,4\}Y=-2y_1\bar{y}_1+4y_2\bar{y}_2+4y_3\bar{y}_3$。 一定要看顺序再写结果……

七、证：$\|\cdot\|$是C^3上范数。记$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&0&1\\0&3&2\end{bmatrix}$，则$|A|=5>0$，A可逆，$\|x\|=\|Ax\|_2$。

此法甚是巧妙！

正定性：$\forall x\in C^3$，$\|x\|=\|Ax\|_2\geq0$，且由前述：$\|x\|=\|Ax\|_2=0\Leftrightarrow Ax=0\Leftrightarrow x=0$；

齐次性：$\forall x\in C^3,\forall\alpha\in C$，$\|\alpha x\|=\|A(\alpha x)\|_2=\|\alpha(Ax)\|_2=|\alpha|\cdot\|Ax\|_2=|\alpha|\cdot\|x\|$；

三角不等式：$\forall x,y\in C^3$，$\|x+y\|=\|A(x+y)\|_2=\|Ax+Ay\|_2\leq\|Ax\|_2+\|Ay\|_2=\|x\|+\|y\|$，故$\|\cdot\|$是范数。

另证三角不等式：$\forall x=(x_1,x_2,x_3)^T,y=(y_1,y_2,y_3)^T\in C^3$，由Cauchy-Schwarz不等式有：(这才是"正常人"的做法)

$\|x+y\|=\sqrt{|(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)|^2+|2(x_1+y_1)+(x_3+y_3)|^2+|3(x_2+y_2)+2(x_3+y_3)|^2}$

$=\sqrt{|x_1-2x_2|^2+|2x_1+x_3|^2+|3x_2+2x_3|^2+|y_1-2y_2|^2+|2y_1+y_3|^2+|3y_2+2y_3|^2+2Re[(x_1-2x_2)\overline{(y_1-2y_2)}+(2x_1+x_3)\overline{(2y_1+y_3)}+(3x_2+2x_3)\overline{(3y_2+2y_3)}]}$

$\leq\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2|(x_1-2x_2)\overline{(y_1-2y_2)}+(2x_1+x_3)\overline{(2y_1+y_3)}+(3x_2+2x_3)\overline{(3y_2+2y_3)}|}$ $Re\,z\leq|z|$

$\leq\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\sqrt{|x_1-2x_2|^2+|2x_1+x_3|^2+|3x_2+2x_3|^2}\cdot\sqrt{|y_1-2y_2|^2+|2y_1+y_3|^2+|3y_2+2y_3|^2}}=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|}=\|x\|+\|y\|$。 Cauchy-Schwarz不等式

八、解：由已知：$\frac{d^2A(t)}{dt^2}=\begin{bmatrix}(e^{2t})''&0&0\\0&(3)''&(t^2)''\\0&(t^2)''&(3)''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{2t}&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$，$A^{-1}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&3/(9-t^4)&-t^2/(9-t^4)\\0&-t^2/(9-t^4)&3/(9-t^4)\end{bmatrix}$， 所谓简单计算题

$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-2t}&0&0\\0&12t^3/(9-t^4)^2&-2t(t^4+9)/(9-t^4)^2\\0&-2t(t^4+9)/(9-t^4)^2&12t^3/(9-t^4)^2\end{bmatrix}$，$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}A(t)dt=2xA(x^2)=\begin{bmatrix}2xe^{2x^2}&0&0\\0&6x&2x^5\\0&2x^5&6x\end{bmatrix}$。

九、证：由Kronecker积的性质，有：$e^{A\otimes I}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A\otimes I)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n\otimes I}{n!}=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!})\otimes I=e^A\otimes I$，

$e^{I\otimes B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(I\otimes B)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I\otimes B^n}{n!}=I\otimes(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!})=I\otimes e^B$；因为$(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)=A\otimes B=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n)$，故

由前述：$e^{A\oplus B}=e^{A\otimes I_n+I_m\otimes B}=e^{A\otimes I_n}\cdot e^{I_m\otimes B}=(e^A\otimes I_n)(I_m\otimes e^B)=e^A\otimes e^B$。 这题算综合，稍有不会。

第二式另证：因为$(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)=A\otimes B=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n)$，故$e^{A\oplus B}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(A\otimes I_n+I_m\otimes B)^p}{p!}$

$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}C_p^k(A\otimes I_n)^k(I_m\otimes B)^{p-k}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}C_p^kA^k\otimes B^{p-k}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k\otimes B^{p-k}}{k!(p-k)!}=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!})\otimes(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!})=e^A\otimes e^B$。

五题A^+另解：$A^HA=\begin{bmatrix}8&-4i\\4i&2\end{bmatrix}$的特征值$\lambda_1=10,\lambda_2=0$，对应$\lambda_1=10$的单位特征向量$u_1=(\frac{2}{\sqrt5},\frac{i}{\sqrt5})^T$，故

$A^+=u_1\cdot\frac{1}{10}\cdot u_1^HA^H=\frac{1}{10}u_1u_1^HA^H=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&0&-2\\i&0&-i\end{bmatrix}$。