2014-2015 学年，第一学期矩阵分析试题

一、如果 4×5 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 3，其初等因子为 $\lambda,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda+2)^3$，求 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形和各阶行列式因子。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二、已知 Hermite 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_1+3i\bar{x}_1x_2-3i\bar{x}_2x_1+\bar{x}_2x_2+4\bar{x}_3x_3$ 求酉变换 $X=UY$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 Hermite 二次型的标准形。

三、矩阵 $A,B\in C^{n\times n}$. A 是正定 Hermite 矩阵，B 是 Hermite 矩阵。证明矩阵 AB 的所有特征值是实数。

四、求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -i \\ 0 & 0 \\ -2 & i \end{bmatrix}$ 的奇异值分解和伪逆矩阵。这里 $i=\sqrt{-1}$

五、对于任意的 $A\in C^{m\times n}$，证明 $\|A\|\triangleq\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵范数。

六、已知正规矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。求矩阵 A 的谱分解。

$i^2=-1$

七、已知 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

（1）求矩阵 A 的 Jordan 标准形和最小多项式；

（2）求矩阵函数 $e^{tA},\cos\frac{\pi}{2}A$

八、设 A 为一个 n 阶矩阵，证明：$\cos(2\pi E+A)=\cos A$，其中 E 为 n 阶单位矩阵。

九、已知函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t^2 \\ 0 & t^2 & 3 \end{bmatrix}$，计算 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2},\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}A(t)\,dt\right)$