矩阵范数

定义：对于任何一个矩阵 $A\in C^{m\times n}$，用 $\|A\|$表示按照某一确定法则与矩阵A相对应的一个实数，且满足

（1）非负性：当 $A\neq 0,\ \|A\|>0$，当且仅当 $A=0$ 时，$\|A\|=0.$

（2）齐次性：$\|kA\|=|k|\|A\|$，k为任意复数

（3）三角不等式：任取 $A,B\in C^{m\times n}$ 都有$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|.$

（4）矩阵乘法的相容性：对于任意两个可以相乘的矩阵 A,B 都有 $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

那么我们称 $\|A\|$ 是矩阵A 的范数.

例1：对于任意 $A \in C^{m \times n}$，定义

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

可以证明如此定义的 $\|A\|$ 的确为矩阵 A 的范数.

证明：只需要验证此定义满足矩阵范数的四条性质即可。非负性，齐次性与三角不等式容易证明。现在我们验证乘法的相容性。设 $A\in C^{m\times p}, B\in C^{p\times n}$，则

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[(\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}|)(\sum_{k=1}^{p}|b_{kj}|)]$$

$$= (\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}|)(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|b_{kj}|) = \|A\|\|B\|$$

例2：设矩阵 $A \in C^{n\times n}$，证明：

$$\|A\| = n\max_{i,j}|a_{ij}|$$

是矩阵范数.

证明：非负性，齐次性和三角不等式容易证得。现在我们考虑乘法的相容性。设 $A \in C^{n\times n}, B \in C^{n\times n}$，那么

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}| \\
&\le n\cdot n\max_{i,k}|a_{ik}|\max_{k,j}|b_{kj}| \\
&= n\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot n\max_{k,j}|b_{kj}| \\
&= \|A\|\|B\|
\end{aligned}
$$

因此 $\|A\|$ 为矩阵 A 的范数.

例3：对于任意$A \in C^{m\times n}$，定义

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{1/2}$$

可以证明$\|A\|$也是矩阵A的范数. 我们称此范数为矩阵A的**Frobenious范数**.

证明：此定义的非负性，齐次性是显然的. 利用Minkowski不等式容易证明三角不等式. 现在我们验证乘法的相容性. 设$A \in C^{m\times l}, B \in C^{l\times n}$，则

$$\|AB\|_F^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2\right) = \|A\|_F^{\,2}\,\|B\|_F^{\,2}$$

于是有 $\|AB\|_F \le \|A\|_F\,\|B\|_F$

Frobenious 范数的酉不变性：

（1）如果$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$，那么 $\|A\|_F^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|_2^{\ 2}$

（2）$\|A\|_F^{\ 2}=Tr(A^H A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^H A)$

（3）对于任何m阶酉矩阵U与 n阶酉矩阵V都有等式

$$\|A\|_F=\|UA\|_F=\|A^H\|_F$$
$$=\|AV\|_F=\|UAV\|_F$$

关于矩阵范数的等价性定理

定理：设 $\|A\|_\alpha$，$\|A\|_\beta$ 是矩阵 A 的任意两种范数，则总存在正数 d_1, d_2 使得

$$d_1\|A\|_\beta \le \|A\|_\alpha \le d_2\|A\|_\beta, \quad \forall A \in C^{m\times n}$$