定理： 设 $A \in C_n^{n\times n}$，那么必存在酉矩阵 $U \in U^{n\times n}$ 与正定的 H-矩阵 H_1, H_2 使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

且这样的分解式是唯一的. 同时有

$$A^H A = H_2^2, \quad AA^H = H_1^2$$

称分解式 $A = H_1 U = U H_2$，为矩阵A的极分解表达式。

证明： 设 $A\in C_n^{n\times n}$，从而 $A^H A$为正定的H-矩阵，则存在唯一正定的 H-矩阵 H_2，使得

$$A^H A=H_2^2$$

上式可变为

$$\left(H_2^H\right)^{-1}A^H A H_2^{-1}=I$$

即

$$\left(AH_2^{-1}\right)^H\left(AH_2^{-1}\right)=I$$

由此可知AH_2^{-1}为酉矩阵. 记 $AH_2^{-1}=U$，则 $A=UH_2$，那么有

$$A=UH_2=UH_2U^HU=H_1U$$

其中$UH_2U^H=H_1$并且$AA^H=H_1^2$.

定理：设 $A\in C^{n\times n}$，则存在 $U\in U^{n\times n}$ 与半正定 H-矩阵 H_1,H_2 使得

$$A=H_1U=UH_2$$

且满足 $A^HA=H_2{}^2, AA^H=H_1{}^2$.

证明：根据矩阵的奇异值分解定理可知，存在酉矩阵 U_1，U_2 使得

$$A=U_1\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n\end{bmatrix}U_2$$

其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r > \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$ 为 A的 r个奇异值.

于是有

$$A = (U_1 \boxed{\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}} U_1{}^H)(U_1 U_2)$$

$$= (U_1 U_2)(U_2{}^H \boxed{\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}} U_2)$$

如果令 $H_1 = U_1 \boxed{\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} U_1^H$

$$H_2 = U_2^H \boxed{\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} U_2$$

令 $U = U_1 U_2$，从而有 $A = H_1 U = U H_2$

$$A^H A = H_2^{\,2}, \quad A A^H = H_1^{\,2}$$

其中 H_1, H_2 是半正定的 H-矩阵,U 是酉矩阵。