

矩阵的满秩分解

定理： 设 $A \in C_r^{m \times n}$ ，那么存在 $B \in C_r^{m \times r}$ ， $C \in C_r^{r \times n}$ 使得

$$A = BC$$

其中 B 为列满秩矩阵， C 为行满秩矩阵. 我们称此分解为矩阵的满秩分解.

证明：假设矩阵 A 的前 r 个列向量是线性无关的，对矩阵 A 只实施行初等变换可以将其化成

$$\begin{bmatrix} I_r & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

即存在 $P \in C_m^{m \times m}$ 使得 $PA = \begin{bmatrix} I_r & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

于是有 $A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix} = BC$

其中 $B = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in C_r^{m \times r}, C = \begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix} \in C_r^{r \times n}$

如果 A 的前 r 列线性相关, 那么只需对 A 作列变换, 使得前 r 列线性无关, 然后重复前面的过程. 这样存在 $P \in C_m^{m \times m}$, $Q \in C_n^{n \times n}$ 且满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

从而 $A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^{-1} = \textcolor{red}{P}^{-1} \textcolor{red}{\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}} \textcolor{blue}{\begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix}} Q^{-1} = \textcolor{red}{B} \textcolor{blue}{C}$

例 求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ 的满秩分解.

解：对此矩阵只实施行变换可以得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M$$

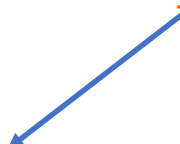
由此可知 $\text{rank}(A) = 2$ ，矩阵第一列，第三列是线性无关的。
选取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \in C_2^{4 \times 2}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in C_2^{2 \times 6}$$

也可选取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in C_2^{4 \times 2}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in C_2^{2 \times 6}$$

$M(r_2 + \rightarrow r_1)$



$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

解：对此矩阵只实施行变换可以得到 $\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

选取 $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in C_1^{2 \times 1}, C = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3] \in C_1^{1 \times 5}$

或选取 $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in C_1^{2 \times 1}, C = [0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2] \in C_1^{1 \times 5}$

由上述例子可看出矩阵的满秩分解形式并不唯一.

一般地我们选取行简化阶梯型矩阵主元所在的列对应的列向量构成列满秩矩阵, 将阶梯型矩阵全为零的行去掉后即可构成行满秩矩阵.

定理： 如果 $A = BC = B_1C_1$ 均为矩阵 A 的满秩分解，那么

(1) 存在矩阵 $\theta \in C_r^{r \times r}$ 满足 $B = B_1\theta$, $C = \theta^{-1}C_1$

(2) $C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = C_1^H(C_1C_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H$