

北京理工大学 2015—2016 学年第一学期

工程硕士（矩阵分析）考试题

一. (10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

验证 A 是正规矩阵, 求酉矩阵 U , 使 $U^H A U$ 为对角矩阵。

二. (15 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的 Jordan 标准型, 并求变换矩阵 P ;

(2) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{X}}{dt} = A\vec{X}$ 的解。

三. (10 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

确定 $\|A\|_F, \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \rho(A)$

四. (15 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的谱分解

五. (15 分) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

六. (10 分) 求下列不相容线性方程组的最佳最小二乘解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

七. (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -a \\ -a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

问 (1) 当 a 满足什么条件时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)A^k$ 绝对收敛?

(2) 取 $a=0$ 时, 求矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 2A^k$ 的和矩阵。

八. (15 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 求矩阵函数 $e^{At}, \cos \pi A$ 的多项式

表示。