Hermite 矩阵偶在复合同（复相合）下的标准形

例：设 A, B 均为 n 阶 Hermite-阵，且 B 是正定的，证明必存在 $P \in C_n^{n\times n}$，使得

$$P^H AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P^H BP = I_{n\times n}$$

同时成立，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是与 P 无关的实数.

证明：由于 B 是正定 H-阵，所以存在 $P_1 \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$P_1^H B P_1 = I_{n\times n}$$

又由于 $P_1^H A P_1$ 也是 H-阵，那么存在 $P_2 \in U_n^{n\times n}$ 使得

$$P_2^H P_1^H A P_1 P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 H-阵 $P_1^H A P_1$ 的 n 个实特征值.

如果记 $P=P_1P_2$，则有

$$P^HAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad P^HBP=I.$$

由于 $\left|\lambda I-P_1^HAP_1\right|=\left|\lambda P_1^HBP_1-P_1^HAP_1\right|=\left|P_1^H\right|\left|\lambda B-A\right|\left|P_1\right|$,

所以 $P_1^HAP_1$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 $\left|\lambda B-A\right|=0$ 的根相同,
完全由 A, B 决定, 与 P 无关.

定理：对于给定的两个Hermite二次型

$$f_1(X)=X^H AX=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j,\quad f_2(X)=X^H BX=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\overline{x_i}x_j$$

其中 $f_2(X)$是正定的，则存在非退化的线性替换 $X=PY$ 可以将 $f_1(X), f_2(X)$ 同时化成标准形

$$f_1=\lambda_1 y_1\overline{y_1}+\lambda_2 y_2\overline{y_2}+\cdots+\lambda_n y_n\overline{y_n},\quad f_2=y_1\overline{y_1}+y_2\overline{y_2}+\cdots+y_n\overline{y_n}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是方程 $|\lambda B-A|=0$ 的根，而且全为实数.

定义：设 A, B 均为 n 阶 Hermite-阵, 且 B 是正定的，则方程 $AX=\lambda BX$ 有非零解的充要条件是: λ 是次 n 代数方程方程

$$|\lambda B - A| = 0$$

的根. 我们称此方程是 A 相对于 B 的特征方程. 它的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

称为 A 相对于 B 的广义特征值.

将 λ_i 代入到方程 $AX=\lambda BX$ 中, 所得非零解向量 X 称为与 λ_i 相对应的广义特征向量.

广义特征值与广义特征向量的性质（了解）

(1) 有 n 个实的广义特征值

(2) 有 n 个线性无关的广义特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足

$$AX_i = \lambda_i BX_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(3) 这 n 个广义特征向量可以这样选取，使其满足

$$X_i^H BX_j = \delta_{ij}, \quad X_i^H AX_j = \lambda_j \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$