方阵的Jordan标准形

定义：称 n_i 阶矩阵 $J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ 为 **Jordan 块**.

$(\lambda I - J_i)$ 的行列式因子: $D_{n_i}(\lambda) = (\lambda - a_i)^{n_i}$, $D_{n_i - 1}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1$,

所以 J_i 的初等因子为 $(\lambda - a_i)^{n_i}$.

定义：设 $J_1, J_2, \cdots, J_s$ 为 Jordan 块，称准对角形矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为 **Jordan 标准形**.

$(\lambda I - J)$ 的初等因子是 $(\lambda I - J_i)$, $i = 1, \cdots, s$ 初等因子的全体,

所以 J 的初等因子为 $(\lambda - a_1)^{n_1}, (\lambda - a_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda - a_s)^{n_s}$.

定理： 设 $A \in C^{n\times n}$，A 的初等因子为

$$(\lambda - a_1)^{n_1},\ (\lambda - a_2)^{n_2}, \cdots,\ (\lambda - a_s)^{n_s}$$

则 $A \sim J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, \cdots, J_s)$， 其中

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

注： 如果不考虑Jordan 块的排列顺序, 方阵 A 的Jordan 标准形是“本质”唯一的.

推论： n 阶矩阵 A 可以对角化的充分必要条件是 A 的初等因子都是一次因式.

例： 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I-A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2, \lambda-2.$

故 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例: 用矩阵秩的方法求出矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解: 先求出 A 的特征多项式及其特征值

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

对于特征值 $\lambda_1 = 1$，它是 $f(\lambda)$ 的 1 重根，对应一个Jordan 块且为一阶.

对于特征值 $\lambda_2 = 3$，先求 $\operatorname{rank}(A-3I)$,

$$A-3I=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -14 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(A-3I)=2.$

从而 λ_2 的几何重数

$$q_{\lambda_2}=n-\operatorname{rank}(A-3I)=3-2=1.$$

所以 λ_2 对应一个Jordan 块且为二阶.

故 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\quad 或 \quad J=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

如何求相似变换矩阵？

设 n 阶方阵 A 的 Jordan 标准形为 J，则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = J$$

称 P 为相似变换矩阵. 对于相似变换矩阵的一般理论我们不作过多的讨论，只通过具体的例题说明求 P 的方法.

例 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵 P.

解： 首先用初等变换法求其 Jordan 标准形：

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

A 的初等因子为 $\lambda+1, (\lambda+1)^2$，从而 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为 P，则 $P^{-1}AP=J$，将 P 按列分块记为

$$P=\left[X_1, X_2, X_3\right]$$

于是有

$$AP = A\left[X_1, X_2, X_3\right] = \left[AX_1, AX_2, AX_3\right]$$

$$= PJ = \left[X_1, X_2, X_3\right]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left[-X_1, -X_2, X_2 - X_3\right]$$

从而可得

$$AX_1 = -X_1, \quad AX_2 = -X_2, \quad AX_3 = X_2 - X_3$$

整理以后可得三个线性方程组

$$(I+A)X_1=0,\quad (I+A)X_2=0,\quad (I+A)X_3=X_2$$

前面两个方程为同解方程组，可求出它们的一个基础解系：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0, & 1, & 0\end{bmatrix}^T,\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}-2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$$

可以取 $X_1=\alpha_1$，但是不能简单地取 $X_2=\alpha_2$，因为如果 X_2 选取不当，会使得第三个非齐次线性方程组无解. 由于 α_1,α_2 的任意线性组合都是方程组 $(I+A)X=0$ 的解，所以可取

$$X_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

若使得第三个非齐次方程 $(I+A)X = X_2$ 有解，需要满足

$$\operatorname{rank}(I+A) = \operatorname{rank}[I+A, \quad X_2].$$

$$[I+A, \quad X_2] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_2 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\operatorname{rank}(I+A) = 1,$

可取 $k_1 = 3, k_2 = -2,$

则 $\operatorname{rank}[I+A, \ X_2] = 1$

此时 $X_2 = [4 \quad 3 \quad -2]^T.$

求解方程 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2$，得到一个特解

$$\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}1, & 0, & 0\end{bmatrix}^T$$

那么所求相似变换矩阵可取为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$