最小多项式

定义：已知 $A \in C^{n\times n}$ 和关于变量 x 的多项式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

如果 $f(x)$ 满足 $f(A) = O_{n\times n}$，那么 $f(x)$称为矩阵 A 的一个化零多项式.

定理： 已知 $A \in C^{n \times n}$，$f(\lambda)$ 为其特征多项式，则有

$$f(A) = O_{n \times n}.$$

我们称此定理为 **Hamilton-Cayley 定理**.

例：考虑矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$, 显然 $f_A(A)=O.$

容易看出, 多项式 $g(\lambda)=(\lambda-2)^2$ 也可使得 $g(A)=O.$

若 $f(\lambda)$ 是 A 的化零多项式, $h(\lambda)$ 是任一多项式,则 $f(\lambda)h(\lambda)$ 也是 A 的化零多项式.

定义：已知 $A \in C^{n \times n}$，在 A 的化零多项式中，次数最低且首项系数为1的化零多项式称为 A 的最小多项式，通常记为 $m(\lambda)$.

最小多项式的性质

已知 $A \in C^{n\times n}$，$m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式, 那么

(1) 矩阵的任何一个化零多项式均能被$m(\lambda)$ 整除.

$$f(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda), \quad \deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$$

$$O = f(A) = m(A)q(A) + r(A) = r(A), \quad \therefore r(\lambda) = 0.$$

(2) 矩阵 A 的最小多项式是唯一的.

(3) 相似矩阵有相同的最小多项式.

$$B = PAP^{-1} \rightarrow f(B) = Pf(A)P^{-1}$$

最小多项式的计算

例：求下面Jordan块的最小多项式.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

解： J_i 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{d_i}$，则其最小多项式一定形如 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k$，其中 $1 \le k \le d_i$. 但当 $k < d_i$ 时,

$$m(J_i)=(J_i-\lambda_i I)^k=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \\ \text{第 } k+1 \text{ 列}\end{array}\neq O_{d_i\times d_i}$$

因此有 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$.

定理： 已知分块对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_r),$$

$m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)$ 分别为子块 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_r$ 的的最小多项式，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)$ 的最小公倍式 $[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)]$.

定理： 设矩阵 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 是 d_i 阶的Jordan块, 则 A 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$, $i=1,2,\cdots,s$ 的最小公倍式.

例：求下列矩阵的最小多项式

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{bmatrix},\qquad (2)\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}.$$

解：$\boldsymbol{A}$ 是Jordan标准形, 其最小多项式为 $(\lambda-5)(\lambda-3)^2$.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

所以其最小多项式为 $(\lambda+1)^2$.