内积空间的度量

定义：设 V 为酉（欧氏）空间，向量 $\alpha \in V$ 的长度定义为非负实数 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

例： 在 C^4 中求下列向量的长度

(1) $\alpha = (1+2i, -i, 3, 2+\sqrt{2}i)^T$， (2) $\beta = (1, -2, 3, 4)^T$

解： 根据上面的公式可知

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^H \alpha} = \sqrt{5+1+9+6} = \sqrt{21}, \quad \|\beta\| = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$$

一般地，我们有：对于 C^n 中的任意向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

其长度为
$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^H a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$$

这里 $|a_i|$ 表示复数 a_i 的模.

定理：向量长度具有如下性质

(1) $\|\alpha\| \geq 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $\|\alpha\| = 0.$

(2) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|, \quad k \in C$

(3) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

三角不等式

(4) $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$

Cauchy-Schwarz 不等式

例：　在 C^3 中向量组

$$\alpha_1=\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^T,\quad \alpha_2=\left[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^T,\quad \alpha_3=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^T$$

与向量组

$$\beta_1=[-\cos\theta,0,-i\sin\theta]^T,\ \beta_2=[0,1,0]^T,\ \beta_3=[i\sin\theta,0,\cos\theta]^T$$

都是标准正交向量组.

例： 在线性空间 $C^{n\times n}$ 中，证明

$$\left|\mathrm{Tr}(AB^H)\right| \le \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^H)}\sqrt{\mathrm{Tr}(BB^H)}$$

例: 设 $\tilde{C}[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续复值函数构成的线性空间，证明：对于任意的 $f(x), g(x) \in \tilde{C}[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}d(x)\right| \le \sqrt{\int_a^b \left|f(x)\right|^2 d(x)}\sqrt{\int_a^b \left|g(x)\right|^2 d(x)}$$

定义： 设 V 为欧氏空间，两个非零向量 α,β 的夹角定义为

$$\langle\alpha,\beta\rangle := \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

于是有
$$0 \le \langle\alpha,\beta\rangle \le \pi$$

显然
$$\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = 0$$

定义：在酉空间 V 中，如果 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha\perp\beta$.

定义：长度为 1 的向量称为单位向量，对于任何一个非零的向量 α，向量

$$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

总是单位向量，称此过程为单位化.

标准正交基底与Schmidt正交化方法

定义：设$\{\alpha_i\}$为一组不含有零向量的向量组，如果$\{\alpha_i\}$内的任意两个向量彼此正交，则称其为正交向量组.

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_k \neq 0,\ \forall k; \quad (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$$

定义：如果一个正交向量组 $\{\alpha_i\}$ 中任何一个向量都是单位向量，则称此向量组为标准正交向量组.

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_k \neq 0,\ \forall k; \quad (\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

定义：在 n 维内积空间中，由 n 个正交向量组成的基底称为**正交基底**；由 n 个标准的正交向量组成的基底称为**标准正交基底.**

定理：正交的向量组是一个**线性无关**的向量组. 反之, 由一个线性无关的向量组出发, 可以构造一个正交向量组, 甚至是一个标准正交向量组.

Schmidt 正交化与单位化过程:

设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为 n 维内积空间 V 中的 r 个线性无关的向量，利用这 r 个向量可以构造一个标准正交向量组, 而且它是 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 的一个标准正交基.

第一步：正交化

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$ 是一个正交向量组.

第二步：单位化

$$\eta_1=\beta_1\big/\|\beta_1\|,$$

$$\eta_2=\beta_2\big/\|\beta_2\|,$$

$$\cdots$$

$$\eta_r=\beta_r\big/\|\beta_r\|$$

$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r\}$ 是标准的正交向量组.

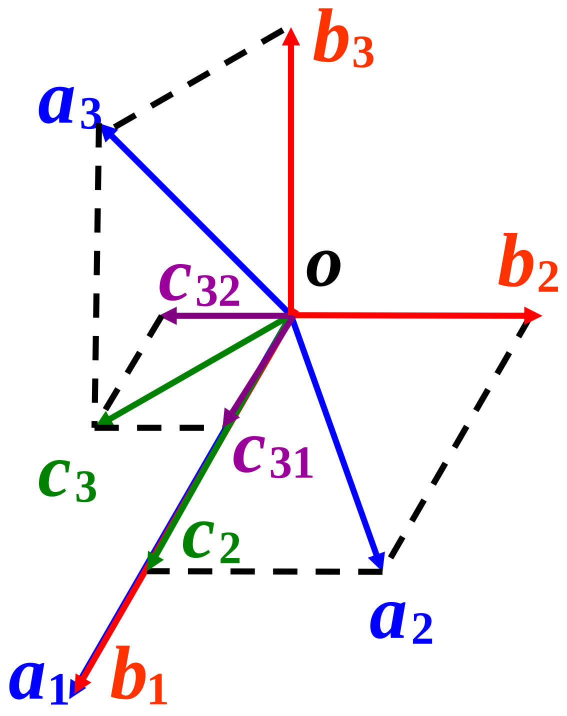
$b_1 = a_1$,

c_2 为 a_2在 b_1 上的投影向量,即

$$c_2 = \left(a_2, \frac{b_1}{|b_1|}\right)\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1,$$

$b_2 = a_2 - c_2$,

c_3 为 a_3 在 b_1, b_2 所在平面上的投影向量,



由于 $b_1 \perp b_2$,故 c_3 等于 a_3 分别在 b_1, b_2 上的投影向量 c_{31} 及 c_{32} 之和,

即 $$c_3 = c_{31} + c_{32} = \frac{(a_3, b_1)}{|b_1|^2} b_1 + \frac{(a_3, b_2)}{|b_2|^2} b_2, \qquad b_3 = a_3 - c_3.$$