Hermite二次型（Hermite二次齐次多项式）

定义：有 n 个复变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，系数为复数的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j$$

称为 Hermite二次型，这里 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

如果记 $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in C^n$， $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

那么此 Hermite 二次型可以记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^H AX$,

称 A 为 **Hermite二次型对应的矩阵**，并称 A 的秩为 **Hermite 二次型的秩**.

对于 Hermite 二次型作可逆的线性替换 $X = CY$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H AX = Y^H (C^H AC) Y = Y^H BY$,

这里 $B = C^H AC$, $B^H = B$.

Hermite 二次型中只含有纯平方项无交叉项的二次型

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \lambda_1 \overline{y_1} y_1 + \lambda_2 \overline{y_2} y_2 + \cdots + \lambda_n \overline{y_n} y_n$$

称为Hermite 二次型的标准形.

定理　对于任意一个 Hermite 二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H A X$$

必存在酉线性替换 $X = UY$，将 Hermite 二次型 $f(X)$ 化为标准形

$$\boxed{f(X) = \lambda_1 \overline{y_1} y_1 + \lambda_2 \overline{y_2} y_2 + \cdots + \lambda_n \overline{y_n} y_n}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 H-矩阵 A 的特征值.

定理: 对于**Hermite**二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H AX$, 必存在可逆的线性替换 $X = PY$, 可以将**Hermite**二次型 $f(X)$ 化为

$$f(X) = \overline{y_1}y_1 + \cdots + \overline{y_s}y_s - \overline{y_{s+1}}y_{s+1} - \cdots - \overline{y_r}y_r$$

其中 $r = \operatorname{rank} A$, 称此标准形为 **Hermite**二次型 $f(X)$ 的规范形.

例：写出下面Hermite二次型的矩阵表达式，并用酉线性替换将其化为标准形.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=i\overline{x_1}x_2+\overline{x_1}x_3-ix_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_3}$

解:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（酉线性替换化标准形过程省略）

(2) $$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_1+i\overline{x_1}x_2+(1+i)\overline{x_1}x_3-i\overline{x_2}x_1+\overline{x_2}x_3+(1-i)\overline{x_3}x_1+\overline{x_3}x_2+2\overline{x_3}x_3$$

解:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left[\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}\right]\begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ -i & 0 & 1\\ 1-i & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（酉线性替换化标准形过程省略）