矩阵指数函数与矩阵三角函数

(1) $$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

(2) $$\sin At=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}t^{2k+1}$$

(3) $$\cos At=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}t^{2k}$$

定理:　(1)　$e^{iA}=\cos A+i\sin A,\quad i^2=-1$

(2)　$e^{-iA}=\cos A-i\sin A.$

证:

$$e^{iA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(iA)^k=I+iA-\frac{1}{2!}A^2-\frac{1}{3!}iA^3+\frac{1}{4!}A^4+\frac{1}{5!}iA^5-\cdots$$

$$=\left(I-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\cdots\right)+i(A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\cdots)$$

$=\cos A+i\sin A.$　　类似可证明（2）

推论：

(1) $\cos A = \dfrac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$, (2) $\sin A = \dfrac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$

(3) $\sin(-A) = -\sin A$, (4) $\cos(-A) = \cos A$

定理： 设 $A,B\in C^{n\times n}$，那么当 $AB=BA$ 时，有

(1) $e^{A+B}=e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$

(2) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(3) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

(4) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(5) $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

(6) $\sin^2 A+\cos^2 A=I$

注1：如果矩阵 A 与 B 不能交换，比如取幂等矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

则 $e^{A+B}, e^{A}e^{B}, e^{B}e^{A}$ 互不相等.

注2：如果矩阵 A 与 B 不能交换，则 $e^{A+B}=e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$

也可能成立，比如取 $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\pi i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\pi i\end{bmatrix}.$

推论：

(1) $e^{\lambda A}e^{\mu A}=e^{(\lambda+\mu)A}$

(2) $e^{O_{n\times n}}=I_{n\times n}$

(3) $e^{A}e^{-A}=e^{-A}e^{A}=I$

$\rightarrow e^{A}$ 可逆，且 $\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}$.

几个特殊性质

$$(1)\quad \frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$(2)\quad \frac{d}{dt}(\sin At) = A(\cos At) = (\cos At)A$$

$$(3)\quad \frac{d}{dt}(\cos At) = -A(\sin At) = -(\sin At)A$$

$$(4)\quad \left|e^{A}\right| = e^{Tr(A)}$$

其中 $e^{A}=Pe^{J}P^{-1}=P\,\mathrm{diag}\left(e^{J_1},e^{J_2}\cdots e^{J_r}\right)P^{-1}$

$$e^{J_i}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i} & e^{\lambda_i} & \frac{1}{2!}e^{\lambda_i} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}e^{\lambda_i} \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \frac{1}{2!}e^{\lambda_i} \\ & & & & & e^{\lambda_i} \\ & & & & & e^{\lambda_i} \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

$$\left|e^{A}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left|e^{J_i}\right|$$

$$=\prod_{i=1}^{r}e^{d_i\lambda_i}$$

$$=e^{Tr(A)}$$

例：设 A 是一个Hermite矩阵, 那么 e^{iA} 是一个酉矩阵.

证明：由 $e^{iA}=\cos A+i\sin A$ 可得

$$e^{iA}(e^{iA})^H=(\cos A+i\sin A)[(\cos A)^H-i(\sin A)^H]$$

$$=(\cos A+i\sin A)(\cos A-i\sin A)=I$$

这表明 e^{iA} 为一个酉矩阵.

例：设 A 是一个实的反对称矩阵（或反-H阵），那么 e^A 是一个正交矩阵（或酉矩阵）.