Jordan标准形的另一种求法

Jordan标准形的几个基本性质：

(1) 每个Jordan 块 J_i 对应属于 λ_i 的一个特征向量；

$$P^{-1}AP=J$$

$$A[P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5]=[P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5]\begin{bmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&1\\&&&&3\end{bmatrix}$$

$$AP_1=2P_1,\quad AP_4=3P_4$$

$$AP_2=P_1+2P_2,\quad AP_3=P_2+2P_3,\quad AP_5=P_4+3P_5$$

(2) 对于给定的 λ_i，其对应的Jordan 块的个数等于λ_i 的几何重复度；

证明： $\operatorname{rank}(\lambda_i E - A) = \operatorname{rank} P^{-1}(\lambda_i E - A)P = \operatorname{rank}(\lambda_i E - J)$

设 A 的特征根 λ_i 对应的Jordan 块有 s 个, 则

$$\operatorname{rank}(\lambda_i E - J) = n - s.$$

λ_i 的几何重复度为 $q_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i E - A).$

$\therefore \operatorname{rank}(\lambda_i E - A) = n - q_i.$ 从而 $\operatorname{rank}(\lambda_i E - J) = n - q_i.$

$\therefore\ s = q_i.$

(3) 特征值 λ_i 所对应的全体 Jordan 块的阶数之和等于 λ_i 的代数重复度.

(4) 设 n 阶方阵 A 相似于Jordan标准形 J, 且 $P^{-1}AP = J$, 则

$$\operatorname{rank}(\lambda_i E - A)^l = \operatorname{rank} P^{-1}(\lambda_i E - A)^l P$$

$$= \left[P^{-1}(\lambda_i E - A)P\right]^l = \operatorname{rank}(\lambda_i E - J)^l, \quad l = 1, 2, \ldots$$

(5) 对于 n_i 阶的Jordan块 J_i，$(J_i-\lambda_i E)^l$ 的秩变化如下：

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\quad \begin{aligned} \operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E) &= n_i-1, \\ \operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^2 &= n_i-2, \\ &\ \ \vdots \\ \operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^{n_i-1} &= 1, \\ \operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^h &= 0,\ (h\geq n_i) \end{aligned}$$

对于Jordan块 J_j,

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}$$

如果 $\lambda_j \neq \lambda_i$, 则

$$\operatorname{rank}(J_j - \lambda_i E)^l = n_j, \qquad (l = 1, 2, \cdots)$$

即随着 l 增大，影响 rank $(J - \lambda_i E)^l$ 的只有 λ_i 对应的Jordan块.

求 Jordan 标准形的另一种方法

(1) 计算 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l$, 得出

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l,\quad l=1,2,\cdots$$

(2) 通过分析 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l$, $l=1,2,\cdots$, 得出对应于特征值 λ_i 的 Jordan 块的个数，阶数.

例：

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix},\quad J-2I=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},\quad (J-2I)^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$(J-2I)^k=0,\quad k\geq 3.$$

反之，通过分析 rank $(A-2I)^l$ = rank $(J-2I)^l$，可得对应于特征值 2 的 Jordan 块的个数, 阶数.

例：已知 10 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^7 (\lambda - 3)^3.$$

经过计算得到下面的数据：

$$\text{rank}(2I - A) = 7,$$
$$\text{rank}(2I - A)^2 = 4,$$
$$\text{rank}(2I - A)^3 = 3,$$
$$\text{rank}(2I - A)^4 = 3.$$

$$\text{rank}(3I - A) = 8,$$
$$\text{rank}(3I - A)^2 = 7,$$
$$\text{rank}(3I - A)^3 = 7.$$

确定 A 的 Jordan 标准形.

$\mathrm{rank}(2I-A)=7,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块共有 $10-7=3$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^2=4$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $7-4=3$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^3=3$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 3 的有 $4-3=1$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^4=3$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda=2$ 的Jordan块中最大阶数 $=3$

从而，对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块分别为：3阶1块，2阶2块，共3块.

$\operatorname{rank}(3I-A)=8,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块共有 $10-8=2$ 块;

$\operatorname{rank}(3I-A)^2=7$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $8-7=1$ 块;

$\operatorname{rank}(3I-A)^3=7$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda=3$ 的Jordan块中最大阶数 $=2$

从而, 对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块分别为：2阶1块，1阶1块，共2块.

一般地，对 n 阶矩阵 A，若：

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = s_1, \qquad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^2 = s_2,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^3 = s_3, \cdots, \quad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^l = s_l,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^{l+1} = s_l.$$

则对于 A 的特征根 $\lambda = \lambda_i$，共有 $n - s_1$ 个Jordan 块，其中阶数最高为 l 阶，阶数 ≥ 2 的Jordan块有 $s_1 - s_2$ 个，阶数 ≥ 3 的有 $s_2 - s_3$ 个，阶数 ≥ 4 的有 $s_3 - s_4$ 个，…，l 阶的有 $s_{l-1} - s_l$ 个.