λ-矩阵Smith标准形的存在性

定理： 任意一个非零的 $m\times n$ 型的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于一个"**对角矩阵**"，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r \geq 1$, $d_i(\lambda)$ 是首项系数为 1 的多项式且

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-1).$$

称这种形式的 λ-矩阵为 $A(\lambda)$ 的 Smith标准形.

$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

例: 已知

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

将其化成Smith标准形.

解：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

练习题：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 14 & 5 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

将其化为 Smith 标准形.