

一、(10 分) 求下面 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

的初等因子组、Smith 标准型, 和各阶行列式因子。

二、(10 分) 设 A 是 n 阶半正定 Hermite 矩阵, 且 $A \neq 0$, B 是正定 Hermite 矩阵。证明: $\det(A+B) > \det(B)$, 其中 $\det(X)$ 表示 X 的行列式:

$$|A+B| = |A+Q^H Q| = |Q^H| |Q^H A Q + Q^H Q| |Q| = |Q| |1 + \frac{Q^H A Q}{|Q|^2}| \geq |Q|^2 > 0$$

三、(15 分) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式。四、(10 分) 设 A 为一个 $m \times n$ 型的复矩阵, 证明: 矩阵的 Frobenius 范数

$$\|A\|_F = (\text{Tr}(A^H A))^{\frac{1}{2}}$$

为酉不变范数, 即对任意的 m 阶酉矩阵 U 和任意的 n 阶酉矩阵 V 都有 $\|A\|_F = \|UAV\|_F$

$$\|A\|_F = \|UAV\|_F$$

五、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$,证明: 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)A^k$ (收敛) 并求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)A^k$ 的收敛和。 L^{-1}

课程代码: 21-000003-102-17

课程名称: 矩阵分析

六、(15 分) 求下列矩阵的矩阵函数 e^{At} 和 $\sin \pi A$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

七、(5 分) 对于任意 $A \in C^{n \times n}$, 证明: $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$, 这里 $\|\cdot\|$ 是算子范数.

八、(10 分) 已知函数矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算 $\frac{d^2 A(t)}{dt^2}$, $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} A(t) dt \right)$.

九、(10 分) 已知不相容线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + & & x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 & & = 1 \\ & x_2 + x_3 & = 0 \\ & & x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

求其最佳最小二乘解.