2021级硕士研究生矩阵分析期末试题

座号__________ 学院__________ 学号__________ 姓名__________

（试卷共7页，八道大题，解答题必须有解题过程，试卷后面空白页撕下做稿纸，试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、填空题（每空3分，共30分）

$d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$

1、设 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda^2-1&0\\0&0&\lambda+2\end{bmatrix}$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1$. $d_2(\lambda)=1$，

$A(\lambda)$ 的初等因子为 $\lambda+1$，$\lambda-1$，$\lambda+2$

2、设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，则 $A^{2022}-A^2=$ $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

3、设 α 为三维列向量，α^T 是 α 的转置，若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ 3.

4、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&2-i\\0&2+i&2\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的谱范数 $\|A\|_2=$ 7，矩阵 A 的列和范数

$\|A\|_1=$ $6+\sqrt{5}$ 矩阵函数 e^{kA} 的行列式值 $|e^{kA}|=$ e^{9k}，这里 i 为虚数单位，$i^2=-1$.

5、已知三阶单位矩阵 I，则矩阵函数 $e^{i\frac{\pi}{2}I}=$ $iI_{3\times 3}$，这里 i 为虚数单位，$i^2=-1$.

$\begin{bmatrix}i&0&0\\0&i&0\\0&0&i\end{bmatrix}$

6、已知函数矩阵 $A(x)=\begin{bmatrix}\sin x&-e^{2x}\\e^{2x}&\cos x\end{bmatrix}$，则 $\dfrac{d^2A(x)}{dx^2}=$ $\begin{bmatrix}-\sin x&-4e^{2x}\\4e^{2x}&-\cos x\end{bmatrix}$，

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}A(t)dt\right)=$ $\begin{bmatrix}2x\sin x^2&-2xe^{2x^2}\\2xe^{2x^2}&2x\cos x^2\end{bmatrix}$.

二、(12 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的最小多项式.

(2) 求矩阵函数 $\cos\frac{\pi}{2}A$ 和 e^{2A}.

A 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$m_A(\lambda)$ 最小多项式为 $\lambda^2(\lambda-1)^2$ $\rightsquigarrow$ 4分

$f(x)$ 为任意函数

$$f(A)=\begin{bmatrix}f(1)&0&0&0\\f'(1)&f(1)&0&0\\0&0&f(0)&0\\0&0&f'(0)&f(0)\end{bmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ 8分

$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$

$$f(A)=\cos\frac{\pi}{2}A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-\frac{\pi}{2}&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

12分

$f(x)=e^{2x}$

$$f(A)=e^{2A}=\begin{bmatrix}e^2&0&0&0\\2e^2&e^2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}$$

三、（12 分）已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的奇异值分解表达式，这里 i 为虚数单位，$i^2=-1$.

$$AA^H=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ A 的奇异值为 $\delta_1=2$. $\delta_2=1$ ⟶ 4分

$$\Delta=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=4 \longrightarrow \alpha_1=[1,0,0]^T$

$\lambda_2=1 \longrightarrow \alpha_2=[0,1,0]^T \qquad U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\lambda_3=0 \longrightarrow \alpha_3=[0,0,1]^T$

$$U^HAA^HU=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ ⟶ 8分 $U_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$V_1=A^HU_1\Delta^{-H}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix} \qquad V=[\underbrace{V_1}_{=V_1}\ V_2]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$$ ⟶ 10分

$$A=UDV^H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}$$ ⟶ 12分

四、（10 分）已知可对角化矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

求矩阵 A 的谱分解.

$$|\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+4) \qquad \lambda_1=-1.\quad \lambda_2=-3.\quad \lambda_3=-4$$

$\lambda_1=-1. \longrightarrow \alpha_1=[1,2,1]^T \qquad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt6}[1,2,1]^T$ → 2分

$\lambda_2=-3 \longrightarrow \alpha_2=[-1,0,1]^T \quad . \ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt2}[-1,0,1]^T$

$\lambda_3=-4 \longrightarrow \alpha_3=[1,-1,1]^T \ , \ \xi_3 = \frac{1}{\sqrt3}[1,-1,1]^T$

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac16&\frac13&\frac16\\-\frac12&0&\frac12\\\frac13&-\frac13&\frac13\end{bmatrix}$$ → 4分

$$(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac16&-\frac12&\frac13\\\frac13&0&-\frac13\\\frac16&\frac12&\frac13\end{bmatrix}$$ → 6分

$\beta_1=[\frac16\ \ \frac13\ \ \frac16]^T \qquad \beta_2=[-\frac12\ \ 0\ \ \frac12]^T \qquad \beta_3=[\frac13\ \ -\frac13\ \ \frac13]^T$

→ 10分

$A=-1\cdot G_1+(-3)G_2+(-4)G_3 \qquad G_1=\alpha_1\beta_1^T=\begin{bmatrix}\frac16&\frac13&\frac16\\\frac13&\frac23&\frac13\\\frac16&\frac13&\frac16\end{bmatrix}$

$G_2 = \alpha_2\beta_2^T = \begin{bmatrix}\frac12&0&-\frac12\\0&0&0\\-\frac12&0&\frac12\end{bmatrix} \qquad G_3=\alpha_3\beta_3^T=\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13&\frac13\\-\frac13&\frac13&-\frac13\\\frac13&\frac13&\frac13\end{bmatrix}$

$G_1.\ G_2.\ G_3$ 求出来1个 8分

五、（12分）已知 Hermitian 矩阵 $A=\begin{bmatrix}[illegible]&[illegible]&0\\ [illegible]&[illegible]&2-i\\0&2+i&2\end{bmatrix}$，与之相对应的 Hermitian 二次型为

$f(X)=X^HAX$,这里 $X=[x_1,x_2,x_3]^T$.

（1）用酉变换将 Hermitian 二次型 $f(X)=X^HAX$ 化成标准形,并写出所做的酉变换.

（2）判断 $f(X)=X^HAX$ 的定性（正定、负定，半正定，半负定，不定）.

$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-7) \qquad \lambda_1=\lambda_2=1.\quad \lambda_3=7$ → 2分

$(\lambda_1 I-A)X=0 \longrightarrow \alpha_1=[1,0,0]^T \ , \ \alpha_2=[0,1,-2-i]^T$

正交化单位化后可得 $\eta_1=[1,0,0]^T. \quad \eta_2=[0,\frac{1}{\sqrt6},\frac{-2-i}{\sqrt6}]^T$

（二者正交）

→ 4分

$\lambda_3 = 7$，$(7I-A)X=\theta$，$\alpha_3 = [0, 2-i, 1]^T$.

单位化后 $\eta_3 = [0, \frac{2-i}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]^T$ ⟶ 6分

$$U=[\eta_1, \eta_2, \eta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2-i}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-2-i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2-i}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2+i}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

$$U^HAU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ ⟶ 8分

$X=UY$ 代入 $f(X)=X^HAX$，可得

$f(X) = Y^H U^H A U Y = \bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + 7\bar{y}_3 y_3$. ⟶ 10分

由于 Hermitian 矩阵 A 的全部特征值都大于零，因此断定 $f(X)=X^HAX$ 为正定二次型 ⟶ 12分

六、（9分）已知 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k$，这里 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径.

$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda-3)(\lambda-6)^2$ $\quad \rho(A)=6$ ⟶ 2分

$\lambda_1 = 3$. $\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 6$ ⟶ 4分

$\alpha_1 = [2, 0, 1]^T$ $\quad \alpha_2 = [0, 1, 0]^T$

$\alpha_3 = [-1, 0, 1]^T$

$$P=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ⟶ 6分 $\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&6\end{bmatrix}\qquad \rho(A)=6$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}\cdot A\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(P\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}\right)^k$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ 9分

七、（10分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&6\\2&3\end{bmatrix}$. 证明：矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k$ 收敛，并求其收敛和.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{A}{10}\right)^k\qquad B=\frac{A}{10}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B|=\left(\lambda-\frac{3}{5}\right)\left(\lambda+\frac{1}{10}\right).\qquad \rho(B)=\frac{3}{5}\rightsquigarrow 4分$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=1>\rho(B).\ 故\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}A^k\ 收敛.$$

$\rightsquigarrow$ 6分

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=x(1-x)^{-2}\rightsquigarrow 8分$$

$$\sum\frac{k}{10^k}A^k=\frac{A}{10}\left(I-\frac{A}{10}\right)^{-2}\rightsquigarrow 9分$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{755}{484}&\frac{795}{242}\\\frac{265}{242}&\frac{255}{121}\end{bmatrix}\rightsquigarrow 10分$$

八、（5 分）设 $M_{3\times3}(R)$ 为实数域 R 上所有三阶矩阵构成的线性空间，$W=\{A\in M_{3\times3}(R)|Tr(A)=0\}$，这里 $Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹. 求 W 的维数，并写出 W 的一组基.

$\dim W=8 \rightsquigarrow 2$分

一个基为

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad\rightsquigarrow 3\text{分}$$