# 向量范数

定义：　设 $V$ 是实数域 $R$（或复数域 $C$）上的 $n$ 维线性空间，对于 $V$ 中的任意一个向量 $\alpha$ 按照某一确定法则对应着一个实数，这个实数称为 $\alpha$ 的范数，记为 $\|\alpha\|$，并且要求范数满足下列运算条件：

（1）非负性：当 $\alpha \neq 0$, $\|\alpha\| > 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时, $\|\alpha\| = 0$.

（2）齐次性：$\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$,　$k$ 为任意数.

（3）三角不等式：任取 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

例： 在 $n$ 维线性空间 $C^n$ 中，对于任意的向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in C^n$$

定义

$$(1)\quad \|\alpha\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_i| \qquad (2)\quad \|\alpha\|_2=\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\Big)^{1/2} \qquad (3)\quad \|\alpha\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|a_i|$$

证明 $\|\alpha\|_1,\|\alpha\|_2,\|\alpha\|_\infty$ 都是 $C^n$ 上的范数，且有

$$(1)'\quad \|\alpha\|_\infty\le\|\alpha\|_1\le n\|\alpha\|_\infty$$

$$(2)'\quad \|\alpha\|_2\le\|\alpha\|_1\le\sqrt{n}\,\|\alpha\|_2$$

$$(3)'\quad \|\alpha\|_\infty\le\|\alpha\|_2\le n\|\alpha\|_\infty$$

引理(Holder不等式)：设

$$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T\in C^n$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{1/q}$$

其中 $p>1$， $q>1$ 且 $1/p+1/q=1.$

引理（Minkowski不等式）：设

$$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T\in C^n$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}$$

其中实数 $p\ge1$.

# 几种常用的范数

定义：设向量 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，对任意的数 $p\geq 1$，称

$$\|\alpha\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p}$$

为向量$\alpha$的 $p-$范数.

（1） 1－范数 $\|\alpha\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

（2）2—范数

$$\|\alpha\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2} = (\alpha^H \alpha)^{1/2}$$

也称为欧氏范数.

（3）∞—范数 $$\|\alpha\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\alpha\|_p$$

定理: $$\|\alpha\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |a_i|$$

**证明：** 令 $x=\max\limits_{1\le i\le n}|a_i|$ ，则 $y_i={|a_i|}/{x}$， $i=1,2,\cdots,n$

于是有 $$\|\alpha\|_p=x(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^p)^{1/p}$$

另一方面

$$1\le\sum_{i=1}^{n}y_i{}^p\le n$$

$$1\le(\sum_{i=1}^{n}y_i{}^p)^{1/p}\le n^{1/p}$$

故 $$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,p}\right)^{1/p} = 1$$

由此可知 $$\|\alpha\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|\alpha\|_p = x = \max_{1\le i\le n}|a_i|.$$

定义：设 $\|\alpha\|_a$，$\|\alpha\|_b$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 上定义的两种向量范数，那么存在两个与 $\alpha$ 无关的正数 $d_1$，$d_2$ 使得

$$d_1\|\alpha\|_b \le \|\alpha\|_a \le d_2\|\alpha\|_b, \quad \forall \alpha \in V$$

定理：有限维线性空间 $V$ 上的任意两个向量范数都是等价的.

利用向量范数可以去构造新的范数:

例：设 $\|\cdot\|_b$ 是 $C^m$ 上的向量范数，且 $A \in C^{m\times n}$，$\mathrm{rank}(A)=n$，则由

$$\|\alpha\|_a = \|A\alpha\|_b, \quad \alpha \in C^n$$

所定义的 $\|\cdot\|_a$ 是 $C^n$ 上的向量范数.

例：设$V$为数域$F$上的$n$维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为其一组基底，那么对于$V$中的任意一个向量$\alpha$可唯一地表示成

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\,,\quad X=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]\in F^n$$

又设$\|\cdot\|$是$F^n$上的向量范数，则由

$$\|\alpha\|_V=\|X\|$$

所定义的$\|\alpha\|_V$是$V$上的向量范数.