Matrix Analysis

矩阵分析

矩阵（线性变换）的特征值与特征向量

定义：设 f 是数域 F 上的线性空间 V 的一个线性变换, 如果在 V 中存在一个非零向量 ξ 使得

$$f(\xi)=\lambda_0\xi,\quad \lambda_0\in F$$

那么称 λ_0 为 f 的一个特征值，而 ξ 称为 f 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，在 V 中取定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，设线性变换 f 在这组基下的矩阵表示是 A，$\lambda_0 \in F$ 是 f 的一个特征值，它的一个特征向量 ξ 在这组基下的坐标是 X，那么我们有

$$f(\xi)=\lambda_0\xi \Leftrightarrow AX=\lambda_0 X$$

$$f(\xi)=\lambda_0\xi \longrightarrow f(\xi)=f\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=\left(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_n)\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\lambda_0\xi=\lambda_0(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \longrightarrow AX=\lambda_0X$$

定义：设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 矩阵 $\lambda E-A$ 称为 A 的特征矩阵.

行列式

$$|\lambda E_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的特征多项式.

n 次代数方程 $|\lambda E_n - A| = 0$ 称为 A 的特征方程.

它的根称为 A 的特征根（或特征值）.

矩阵 A 的所有特征根的全体称为 A 的谱，记为 $\sigma(A)$.

$(\lambda E_n - A)X = 0$ 称为矩阵 A 的特征方程组.

显然，方阵 A 和 A^T 的特征值相同.

例：设 V 是数域 F 上的3维线性空间，f 是 V 上的一个线性变换，在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示是

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

求 f 的全部特征值与特征向量.

解：A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+6)$$

所以 A 的特征值是 3（二重）-6 . 对于特征值 3，解线性方程组

$$(3I - A)X = 0$$

得到一个基础解系：$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$，$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

从而 f 属于特征值 3 的极大无关特征向量组是

$$\xi_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \xi_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$$

于是 f 属于特征值 3 的全部特征向量是

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \quad k_1, k_2 \in F,$$

这里 k_1, k_2 为数域 F 中不全为零的数对.

对于特征值 -6，解齐次线性方程组 $(-6I-A)X=0$，得到一个基础解系 $\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}^T$，从而 f 属于特征值 -6 的极大无关特征向量组是

$$\xi_3=\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3$$

于是 f 属于特征值 -6 的全部特征向量是 $k\xi_3$， $k\in F$，

这里 k 为数域 F 中任意非零数.

特征值和特征向量的性质

设 $A\in C^{n\times n}$ ， 易见, 它的特征多项式是关于 λ 的 n 次多项式,

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

即

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

易得 $c_1=-(a_{11}+a_{22}\cdots+a_{nn})$. 令 $\lambda=0$，得 $c_n=(-1)^n|A|$.

另外，n 次多项式 $f(\lambda)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$ 在复数域上有 n 个根, 不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，又由于 $c_0=1$，于是有

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

所以 $c_1=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$，$c_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

于是可得特征值的重要性质:

$$\text{(i)}\quad |A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

可见，矩阵 A 可逆的充要条件是它的所有特征值都不为零.

定义： n 阶矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量再添上零向量，可以组成 C^n 的一个子空间，称之为矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间，记为 V_{λ_0}，不难看出 V_{λ_0} 正是特征方程组

$$(\lambda_0 I - A)X = 0$$

的解空间, 即 $$V_{\lambda_0} = N(\lambda_0 I - A)$$

定义： 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶方阵 A 的 r 个互不相同的特征值，对应的重数分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ ，则称 p_i 为 λ_i 的代数重复度.

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{p_r}$$

特征子空间 V_{λ_i} 的维数 q_i 称为 λ_i 的几何重复度. 显然

$$q_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)$$

定理：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶方阵 A 的 r 个互不相同的特征值，λ_i 的几何重复度为 q_i，$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{iq_i}$ 是对应于 λ_i 的 q_i 个线性无关的特征向量，则 A 的这些特征向量构成的向量组

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1q_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2q_2},\cdots,\alpha_{r1},\alpha_{r2},\cdots,\alpha_{rq_r}$$

线性无关.

注1：r 个特征子空间的和是直和 $V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\cdots\oplus V_{\lambda_r}$

注2：一个特征向量不能属于不同的特征值

定理： n 阶方阵 A 的任一特征值 λ_i 的几何重复度 q_i 不大于它的代数重复度 p_i，即 $q_i \le p_i$.

证: 设 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{iq_i}$ 是对应于 λ_i 的 q_i 个线性无关的特征向量.

$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{iq_i},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-q_i}$ 是 C^n 的一组基

令 $P=[\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{iq_i},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-q_i}]$, 则

$$AP=[A\alpha_{i1},A\alpha_{i2},\cdots,A\alpha_{iq_i},A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_{n-q_i}]$$

$$=[\lambda_i\alpha_{i1},\lambda_i\alpha_{i2},\cdots,\lambda_i\alpha_{iq_i},A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_{n-q_i}]$$

因为 AP 的每个列向量都可以由 P 的列向量组线性表出，所以

$$AP = \overset{\color{orange}{P}}{\underline{[\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{iq_i},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-q_i}]}}\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_i & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_i & \\ \hline & 0 & & A_1 \end{array}\right]$$

即 $\quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_i E_{q_i} & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},\quad$ 从而

$$|\lambda E_n - A| = |\lambda E_n - P^{-1}AP| = (\lambda - \lambda_i)^{q_i}\,|\lambda E_{n-q_i} - A_1| \qquad \therefore\ q_i \le p_i.$$