λ-矩阵Smith标准形的唯一性

定义： $A(\lambda)$ 为一个 λ-矩阵且 $\operatorname{rank}(A(\lambda))=r$, 对于任意的正整数 k , $1\le k\le r$, $A(\lambda)$ 必有非零的 k 阶子式. $A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

显然，如果 $\operatorname{rank}(A(\lambda))=r$, 则行列式因子一共有 r 个.

例：求 $A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$ 的各阶行列式因子.

解：由于 $(1-\lambda,\lambda)=1$, $\therefore$ $D_1(\lambda)=1$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(-\lambda^2-\lambda+1),\qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=\lambda^3(-\lambda-1),$$

以上两个2 阶子式的最大公因式为 λ, 而且其余的各2 阶子式也都包含 λ 作为公因子，所以 $D_2(\lambda)=\lambda$.

另外 $\left|A(\lambda)\right| = -\lambda^3 - \lambda^2$， $\therefore\ D_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2.$

注意： 观察 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), D_3(\lambda)$ 三者之间的关系.

定理：等价的 λ-矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩.

提示： 只要证明 λ-矩阵经过一次初等行变换 (分三种情况讨论) 不改变各阶行列式因子即可.

定理： λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的Smith标准形是唯一的.

证明： 设 $A(\lambda)$ 有Smith标准形

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算上面的标准形的各阶行列式因子为

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= d_1(\lambda) \\ D_2(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda) \\ &\vdots \\ D_r(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda) \end{aligned}$$

从而 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ \ d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\ \cdots,\ d_r(\lambda)=\dfrac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$

由于 $A(\lambda)$ 与上面的Smith标准形具有相同的各阶行列式因子，所以 $A(\lambda)$ 的各阶行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$ (注意，给定 $A(\lambda)$，各阶行列式因子已经确定). 从而不变因子

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda), \cdots,\ d_r(\lambda)$$

由这些行列式因子唯一确定，$A(\lambda)$ 的Smith标准形是唯一的.

定理： $m\times n$型的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们有相同的不变因子.

定理： $m\times n$型的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们的各阶行列式因子相同.

例：求下面 λ-矩阵的smith标准型.

$$\begin{bmatrix} \lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda-a & c_{n-1} \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}, \qquad c_1c_2\cdots c_{n-1}\neq 0.$$

解：显然 $D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$. 存在一个 $n-1$ 阶非 0 子式等于 $c_1c_2\cdots c_{n-1}$，所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$.

从而

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1,$$

$$d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\cdots,\ d_{n-1}(\lambda)=1,\ d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n.$$

原 λ-矩阵的Smith标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda-a)^n \end{bmatrix}$.