北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

# 2007 级硕士研究生〈矩阵分析〉终考试题

一、（10 分）设线性变换 $f$ 在基 $\alpha_1=[-1,1,1],\quad \alpha_2=[1,0,-1],\quad \alpha_3=[0,1,1]$

下的矩阵表示为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$

（1）求 $f$ 在基 $\varepsilon_1=[1,0,0],\quad \varepsilon_2=[0,1,0],\quad \varepsilon_3=[0,0,1]$ 下的矩阵表示。

（2）求 $f$ 的核与值域。

二、（10 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&\boldsymbol{i}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

三、（10 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$ 的谱分解。

四、（15 分）已知 $u\in R^n\,(n>1)$ 为一个单位列向量，令 $A=I-uu^T$，证明

（1）$\|A\|_2=1$；

（2）对任意的 $X\in R$，如果有 $AX\neq X$，那么 $\|AX\|_2<\|X\|_2$。

五、（15 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\boldsymbol{a}\\-\boldsymbol{a}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

（1）问当 $\boldsymbol{a}$ 满足什么条件时，矩阵幂级数 $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\infty}(2\boldsymbol{k}+1)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ 绝对收敛？

（2）取 $\boldsymbol{a}=0$，求上述矩阵幂级数的和。

七、（20 分）求下列矩阵的矩阵函数 $\boldsymbol{e^{tA}, \sin \pi A, \cos \frac{\pi}{2} A}$

**(1)** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(2)** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **(3)** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

八、（5 分）已知

$$\sin tA=\begin{bmatrix} \sin 5t+3\sin t & 2\sin 5t-2\sin t & \sin 5t-\sin t \\ \sin 5t-\sin t & 2\sin 5t+2\sin t & \sin 5t-\sin t \\ \sin 5t-\sin t & 2\sin 5t-2\sin t & \sin 5t+3\sin t \end{bmatrix}$$

求矩阵 $A$。

十、（10 分）已知 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ix_1\overline{x}_2+x_1\overline{x}_3-ix_2\overline{x}_1+x_3\overline{x}_1$$

求酉变换 $X=UY$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型。