李军霞

2011.11.24号.

2005级

一、解:

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=-1$

对 $\lambda=0$, $A-0\cdot E=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-5&21&17\\6&-26&-21\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&16&12\\0&-20&-15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&4&3\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}(A)=2$, $q_1=n-\mathrm{rank}(A)=1$

对 $\lambda=-1$, $A+E=\begin{bmatrix}0&1&1\\-5&22&17\\6&-26&-20\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ → 一次幂不用求秩,对应一个Jordan块

$\mathrm{rank}(A+E)=2$, $q_2=n-\mathrm{rank}(A+E)=1$

$\therefore J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

由 $P^{-1}AP=J$ 得 $AP=PJ$, 设 $P=[X_1\ X_2\ X_3]$

则 $AP=[AX_1\ AX_2\ AX_3]=PJ=[-X_1\ 0\ X_2]$

$\therefore \begin{cases}AX_1=-X_1\\AX_2=0\\AX_3=X_2\end{cases}$ 即: $\begin{cases}(A+E)X_1=0\\AX_2=0\\AX_3=X_2\end{cases}$

求解 $(A+E)X_1=0$ 得: $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

求解 $AX_2=0$ 得: $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-3\\4\end{bmatrix}$ 　故 $P=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}-1&1&-5\\-1&-3&-5\\1&4&4\end{bmatrix}$

求解 $AX_3=X_2$ 得: $\alpha_3=\begin{bmatrix}-5\\-5\\4\end{bmatrix}$

二、解:

$AA^H=\begin{bmatrix}8&4&0\\4&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$|AA^H-\lambda E|=\lambda^2(\lambda-10)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=10$

对 $\lambda=0$, $AA^H-0\cdot E=\begin{bmatrix}8&4&0\\4&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}$

单位正交化 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\\0\end{bmatrix}$

对 $\lambda=10$, $AA^H-10E=\begin{bmatrix}-2&4&0\\4&-8&0\\0&0&-10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ 单位化 $\beta_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{bmatrix}$

$U_1=\beta_3$. $U=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&0&\frac{2}{\sqrt5}\\0&1&0\end{bmatrix}$, $V_1=A^HU_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

则 $A=U\begin{bmatrix}10&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}V^H$

三. 解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\-2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

∴ $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=3$

$$A-3E=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\-2&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad q=n-rank(A-3E)=2$$

∴ A是可对角化矩阵 且 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$$A-E=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\-2&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad ∴\ \alpha_3=\cancel{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}}\ \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$∴\ P=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_3^T\end{bmatrix}$$

$$令\ G_1=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\qquad G_2=\alpha_3\beta_3^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

其谱分解表达式为 $A=3G_1+G_2$

四. 解：考虑幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^k=\sum(2kx^k+x^k)=2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}x^k$$
$$=2\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1}\right)'-\sum_{k=1}^{\infty}x^k=2\cdot\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}\qquad |x|<1$$
$$=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2},\qquad R=1$$

(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\lambda&-a\\-a&\frac{1}{2}-\lambda\end{vmatrix}=(\frac{1}{2}-\lambda)^2-a^2=0\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{2}\pm a$

$\rho(A)=\max(|\lambda|)=\max(|\frac{1}{2}+a|,|\frac{1}{2}-a|)$

要使矩阵幂级数绝对收敛，应使 $\rho(A)<1$

若 $a\geq 0$ 则 $\rho(A)=\frac{1}{2}+a$ ∴ $a<\frac{1}{2}$

若 $a<0$ 则 $\rho(A)=\frac{1}{2}-a$ ∴ $a>-\frac{1}{2}$

综上，a的范围是 $-\frac{1}{2}<a<0$ 或 $0\leq a<\frac{1}{2}$

(2) 当 $a=0$ 时，$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)A^k=\frac{3A-A^2}{(E-A)^2}=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}$$

五. 解：$|A-\lambda E|=-(\lambda-2)^2(\lambda-4)$

$$A-2E=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad r=1,\ n-r=2$$

故Jordan标准形为 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$

设 $p(x)=a_0+a_1x$

$$\begin{aligned}p(2)&=f(2)=a_0+2a_1\\p(4)&=f(4)=a_0+4a_1\end{aligned}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a_0=2f(2)-f(4)\\a_1=\frac{1}{2}[f(4)-f(2)]\end{cases}$$

故 $f(A)=[2f(2)-f(4)]E+\frac{1}{2}[f(4)-f(2)]A$

e^{At}：$f(x)=e^{tx}$，$f(2)=e^{2t}$，$f(4)=e^{4t}$

$$f(A)=(2e^{2t}-e^{4t})E+\frac{1}{2}(e^{4t}-e^{2t})A$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}e^{2t}&0&1\\1&e^{2t}&1\\1&0&\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{4t}\end{bmatrix}$$

$\sin\pi A$：$f(x)=\sin\pi x$，$f(2)=0$，$f(4)=0$

$f(A)=0$

八. 征明：

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$ ， $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

则 $Ax=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}$

令 $f(x)=x^H(A^HA)x$

$= x^HA^HAx=(Ax)^H(Ax)$

$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+\cdots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)^2 \geqslant 0$

当且仅当 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 时，$f(x)=0$

即：$Ax=0$ 时 $f(x)=0$

又 $R(A)=n$ ∴ $Ax=0$ 只有零解 $x=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ∴ $f(x)$为正定二次型

A^HA为正定矩阵 又 $(A^HA)^H=A^HA$ ∴ A^HA为 Hermite 矩阵. 得证.

七. 解：$Ax=b$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$A=BC=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$

$x=A^+b$

九. 解：

(1) $\varphi_{J_0}(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m$

(2) 由 $P^{-1}AP=J$ 得：$P^{-1}f(A)P=f(J)$

∴ $\varphi_A(\lambda)=\varphi_J(\lambda)$

(3) A与J有相同的极小多项式

故J的极小多项式为 $\varphi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$

因此 $P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$

A可对角化，即是单纯矩阵.