北京理工大学 2013-2014 学年第二学期
2011 级数学学院 矩阵分析 B 卷

一、(5 分)

求 λ 矩阵 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^3(\lambda-3)^2 & & \\ & \lambda^2(\lambda-3)^3 & \\ & & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}$

的初等因子和 Smith 标准型.

二、(10 分)

求正规矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的谱分解.

三、(15 分)

已知 $A=\dfrac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(1)求矩阵 A 的 Jordan 标准型和最小多项式.
(2)求矩阵函数 $\sin A$, $\cos A$.

四、(10 分)
设 A 是半正定 Hermite 矩阵, $A\neq 0$, B 是正定 Hermite 矩阵. 试证: $|A+B|>|B|$. 这里, $|X|$ 表示 X 的行列式.

五、(20 分)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 0 & 0 \\ -2 & i \end{pmatrix}$ 的奇异值分解和伪逆矩阵.

六、(10 分)

已知 Hermite 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_1+3i\overline{x_1}x_3-3i\overline{x_3}x_1+4\overline{x_2}x_2+\overline{x_3}x_3$

求酉变换 $X=UY$, 并将其化为 Hermite 二次型的标准型.

七、(10 分)

$\|x\|=(|x_1-2x_2|^2+|2x_1+x_3|^2+|3x_2+2x_3|^2)^{\frac{1}{2}}$是否是$C^3$上的向量范数？并给出证明.

八、(10 分)

已知$A(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t^2 \\ 0 & t^2 & 3 \end{pmatrix}$

求 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}$, $\dfrac{dA^{-1}(t)}{dt}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} A(t)dt\right)$.

九、(10 分)

已知 $A\in C^{m\times m}$, $B\in C^{n\times n}$， $e^{A\otimes I}=e^A\otimes I$, $e^{I\otimes B}=I\otimes e^B$, 并且 $e^{A\oplus B}=e^A\otimes e^B$.

这里, $A\oplus B=A\otimes I_n+I_m\otimes B$.