Matrix Analysis

矩阵分析

线性映射与线性变换

定义： 设 V_1, V_2 是数域 F 上的两个线性空间, 映射 $\phi: V_1 \to V_2,$
如果对于 V_1 的任何两个向量 α_1, α_2 和任何数 $\lambda \in F$， 都有

$$\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2),$$
$$\phi(\lambda \alpha_1) = \lambda \phi(\alpha_1).$$

则称映射 ϕ 是由 V_1 到 V_2 的线性映射. 称 α_1 为 $\phi(\alpha_1)$ 的原像, $\phi(\alpha_1)$ 为 α_1 的像.

例：设 $B=(b_{ij})$ 是 $m\times n$ 实矩阵，若映射 $\phi: R^n \to R^m$ 由下式确定：　$\phi(\alpha)=B\alpha\in R^m,\ \forall\alpha\in R^n.$

则 ϕ 是线性映射.

注：实际上，$R^n \to R^m$ 的任意线性映射 f，都存在 $B\in R^{m\times n}$ 使得 $f(\alpha)=B\alpha$．这里 $B=[f(e_1)\ \ f(e_2)\cdots f(e_n)]$, e_j 是单位矩阵 I_n 的第 j 列.

线性映射的简单性质

(1) $\phi(0)=0$, (2) $\phi(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s} k_i\phi(\alpha_i)$,

(3) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 则 $\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_s)$ 也线性相关.

(4) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_s)$ 不一定线性无关.

线性映射的矩阵表示

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V_1 的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 V_2 的一组基.

ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，则

$$\phi(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i,\ \ (j=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\phi(\alpha_1),\cdots,\phi(\alpha_n))=(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\beta_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2}\beta_i,\cdots,\ \sum_{i=1}^{m}a_{in}\beta_i)$$

$$=(\beta_1,\beta_{2,}\cdots,\beta_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵 A 称为线性映射 ϕ 在基 $(\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n)$ 与 $(\beta_1,\beta_{2,}\cdots,\beta_m)$ 下的矩阵表示.

线性映射的值域、核

定义： 设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，令

$$\phi(V_1)=\{\beta=\phi(\alpha)\in V_2,\quad \forall\alpha\in V_1\}$$

则：$\phi(V_1)$是 V_2 的线性子空间，称为线性映射 ϕ 的**值域**，记为 $R(\phi)$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V_1 的一组基，则

$$R(\phi)=\mathrm{span}\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_n)\}.$$

定义：设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，令

$$N(\phi)=\phi^{-1}(0)=\{\alpha\in V_1\mid\phi(\alpha)=0\}$$

则：$N(\phi)$ 是 V_1 的线性子空间，称为线性映射 ϕ 的核子空间，

$\dim N(\phi)$ 称为 ϕ 的零度.

定理： 设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，则

$$\dim N(\phi)+\dim R(\phi)=\dim V_1=n.$$

提示: 设 $N(\phi)=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$, V_1 的一个基

$$V_1=\text{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n\},$$

则 $R(\phi)=\text{span}\{\phi(\alpha_{r+1}),\phi(\alpha_{r+2}),\cdots,\phi(\alpha_n)\}.$

只要证 $\phi(\alpha_{r+1}),\phi(\alpha_{r+2}),\cdots,\phi(\alpha_n)$ 线性无关.

注：若 $\dim N(\phi)=0$，则线性无关组 $\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_s\in V_1$ 的像 $\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_{2,})\cdots,\phi(\alpha_s)\in V_2$ 也线性无关.

提示:

$$0=k_1\phi(\alpha_1)+k_2\phi(\alpha_{2,})\cdots+k_s\phi(\alpha_s)=\phi(k_1\alpha_1+k_2\alpha_{2,}\cdots+k_s\alpha_s)$$

$$\longrightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_{2,}\cdots+k_s\alpha_s=0 \longrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

线性变换

定义：设 ϕ 是线性空间 V 到 V 的一个线性映射，称 ϕ 是线性空间 V 上的线性变换.

例 在线性空间 $R[x]_{n+1}$ 中定义

$$\sigma(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x), \quad f(x) \in R[x]_{n+1}$$

则 σ 是 $R[x]_{n+1}$ 上的线性变换，也称为微分变换.

设 ϕ 是 V 的线性变换， $\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，

$$\phi(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i,\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n)A$$

n 阶方阵 A 称为 ϕ 在 $\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵表示.

例 在线性空间 $R[x]_4$ 中, 取基

$$p_1 = x^3,\ p_2 = x^2,\ p_3 = x,\ p_4 = 1,$$

求微分变换 D 的矩阵表示.

解:

$$\begin{cases} D\,p_1 = 3x^2 = 0\,p_1 + 3\,p_2 + 0\,p_3 + 0\,p_4, \\ D\,p_2 = 2x = 0\,p_1 + 0\,p_2 + 2\,p_3 + 0\,p_4, \\ D\,p_3 = 1 \quad = 0\,p_1 + 0\,p_2 + 0\,p_3 + 1\,p_4, \\ D\,p_4 = 0 \quad = 0\,p_1 + 0\,p_2 + 0\,p_3 + 0\,p_4, \end{cases}$$

所以 D 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

问题：同一个线性变换在不同的基下有不同的矩阵，那么这些矩阵之间有什么关系呢？

定理：设 ϕ 是 V 的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的两组基，由 $\{\alpha_i\}$ 到 $\{\beta_i\}$ 的过渡矩阵为 P. ϕ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A, 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为 B, 则 $B=P^{-1}AP$.

定义：设 $A,B\in F^{n\times n}$，若存在 $P\in F_n^{n\times n}$，满足

$$B=P^{-1}AP,$$

则称 A 与 B 相似，记为 $B\sim A$.

证明 $\because (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

$$\phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B.$$

于是 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B=\phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\phi[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P]$

$$=\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP$$

因为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，所以 $B=P^{-1}AP.$