幂等矩阵的定义

定义 设 $A \in C^{n\times n}$, 如果 A 满足 $A^2 = A$ 则称 A 是一个**幂等矩阵**.

例

$$A = \begin{bmatrix} I_r & M \\ O & O \end{bmatrix} \in C^{n\times n}, \quad M \in C^{r\times(n-r)}$$

是一个分块幂等矩阵.

幂等矩阵的性质

设 A 是幂等矩阵，那么有

（1）$A^T, A^H, I-A, I-A^T, I-A^H$ 都是幂等矩阵；

（2）$A(I-A)=(I-A)A=0$

（3）$N(A)=R(I-A)$

$\boxed{N(I-A)=R(A)}$

（4）$Ax=x$ 的充分必要条件是 $x\in R(A)$

（5）$C^n=R(A)\oplus N(A)$

$\boxed{x=Ax+(x-Ax)}$

（3）$N(A)=R(I-A)$

证：对 $\forall X\in N(A)$，有 $AX=0.$

$X-AX=X-0=X$，整理得 $(I-A)X=X$

因此 $X\in R(I-A)$，可得 $N(A)\subseteq R(I-A).$

对 $\forall Y\in R(I-A)$，存在 X 使得 $Y=(I-A)X,$

$$AY=A(I-A)X=(A-A^2)X=0$$

因此 $Y\in N(A)$，可得 $R(I-A)\subseteq N(A).$

定理： 设 A 是一个秩为 r 的 n阶矩阵，那么 A 为一个幂等矩阵的充分必要条件是存在 $P \in C_n^{n \times n}$ ，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

推论： 设 A 是一个 n 阶幂等矩阵，则有

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rank}(A).$$

幂等矩阵与投影变换

定义：设 S, T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间，且 $V = S \oplus T$. 则对于 V 中任一向量 α 均可唯一的表示为

$$\alpha = x + y, \quad x \in S, y \in T$$

则称 x 是 α 沿 T 到 S 的投影，y 是 α 沿 S 到 T 的投影.

由上式确定的线性变换 $\tau : V \to S \subseteq V$

$$\tau(\alpha) = x$$

称为 V 沿 T 到 S 的投影变换.

定理：设 A 是一个 n 阶幂等矩阵，则下面线性变换

$$\tau(\alpha)=A\alpha, \quad \forall \alpha \in C^n$$

是 C^n 沿着 $N(A)$ 到 $R(A)$ 的投影变换.

提示：$C^n=R(A)\oplus N(A), \quad \alpha=A\alpha+(\alpha-A\alpha)$, 其中

$$A\alpha \in R(A),\ (\alpha-A\alpha)\in N(A).$$

定理：设 τ 是 n 维酉空间 V 上的线性变换, 则下列命题等价.

（1）τ 是 V 上的投影变换.

（2）$\tau^2=\tau$.

（3）τ 的矩阵表示 A 满足 $A^2=A$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) τ 是 V 沿 T 到 S 的投影变换，$\forall\alpha\in V$,

$$\alpha=x+y,\quad x\in S, y\in T,\quad \tau(\alpha)=x,$$

$$\because \tau^2(\alpha)=\tau[\tau(\alpha)]=\tau(x)=x=\tau(\alpha),\quad \therefore \tau^2=\tau.$$

(2) $\Rightarrow$ (1), $\forall \alpha \in V$, 则 $\alpha = \tau(\alpha) + \alpha - \tau(\alpha)$, $\because \tau^2 = \tau$,

$\therefore \tau[\alpha - \tau(\alpha)] = \tau(\alpha) - \tau^2(\alpha) = 0$, 从而 $\alpha - \tau(\alpha) \in N(\tau)$, 并且

$$V = R(\tau) + N(\tau).$$

$\forall\, x \in R(\tau)$, 则存在 $\beta \in V$, 使得 $x = \tau(\beta)$, 那么

$$\tau(x) = \tau^2(\beta) = \tau(\beta) = x.$$

从而 $\forall \gamma \in R(\tau) \cap N(\tau)$, 则 $\gamma = \tau(\gamma) = 0$. $\therefore V = R(\tau) \oplus N(\tau)$.

$\alpha = \tau(\alpha) + \alpha - \tau(\alpha)$, 即 τ 是 V 沿着 $N(\tau)$ 到 $R(\tau)$ 的投影变换.

(2)$\Rightarrow$(3), 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 V 的一组基, A 是 τ 在该基下的矩阵表示, 于是 $\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$,

$$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\tau[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A]=\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$$

$$=\underline{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A^2=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A.}\qquad(\because\tau^2=\tau)$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $A^2=A.$

(3)$\Rightarrow$(2), 若 $\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$, 则

$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A^2$，如果 $A^2=A$, 则

$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，从而 $\tau^2=\tau.$

正交投影变换

定义：设 S, T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间, 若对于任意的 $x \in S, y \in T$， 都有 $(x, y) = 0$, 则称 S 与 T 是正交的.

定义：设 S, T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间, 若 S 与 T 是正交的, 则 $S+T$ 称为 S 与 T 的正交和. （显然是直和）

定义：设 n 维酉空间 V 是子空间 S 与 T 的正交和, 对任意 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = x + y$, $x \in S, y \in T$, 则线性(投影)变换 $\sigma : V \to S \subseteq V$,

$$\sigma(\alpha) = x,$$

称为由 V 到 S 的正交投影.

定理：设 A 是一个 n 阶**幂等的 H-矩阵**，则下面线性变换

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in C^n$$

是 C^n 到 $R(A)$ 的**正交投影**变换.

提示: 只要证 $R(A)$ 与 $N(A)$ 正交. $\forall\, x \in R(A),\ y \in N(A) = R(I - A)$,
则存在 z_1, z_2 使得 $x = Az_1,\ y = (I - A)z_2$, 则

$$(x, y) = (Az_1, (I - A)z_2) = z_2^H (I - A)^H Az_1 = z_2^H (I - A) Az_1 = 0.$$