酉矩阵与酉变换

定义：设 A 为一个 n 阶复矩阵，如果其满足

$$A^H A = AA^H = I$$

则称 A 是酉矩阵，一般记为 $A \in U^{n\times n}$.

设 A 为一个 n 阶实矩阵，如果其满足 $A^T A = AA^T = I$,

则称 A 是正交矩阵，一般记为 $A \in E^{n\times n}$.

例：(1) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ 是一个正交矩阵.

(2) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & i\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{bmatrix}$ 是一个酉矩阵

(3) 设 $\alpha \in C^n$, 且 $\alpha^H\alpha = 1$. 如果 $G = I - 2\alpha\alpha^H$

则 G 是一个酉矩阵. 通常称为 **Householder 矩阵**.

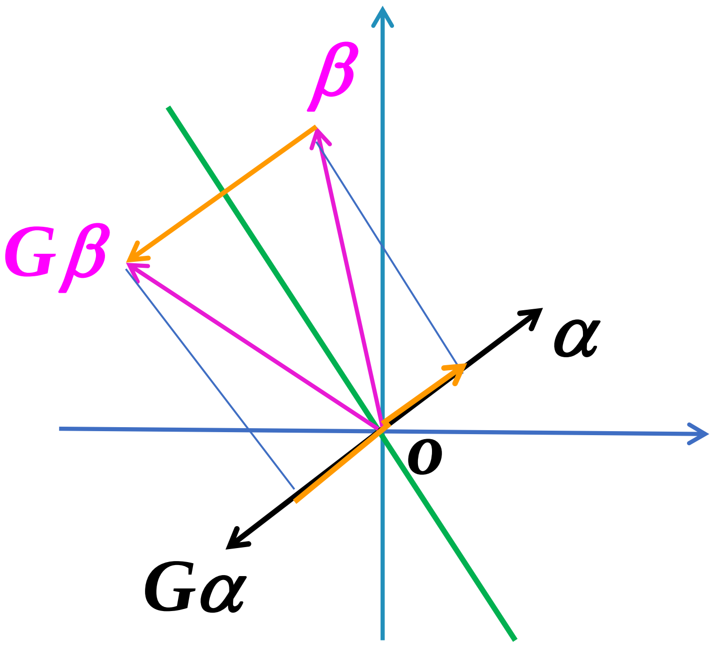
$$GG^H = (I - 2\alpha\alpha^H)(I - 2\alpha\alpha^H)$$

$$= I - 2\alpha\alpha^H - 2\alpha\alpha^H + 4\alpha\alpha^H\alpha\alpha^H = I$$

$$G\alpha = (I - 2\alpha\alpha^H)\alpha = -\alpha$$

$$G\beta = (I - 2\alpha\alpha^H)\beta = \beta - 2\alpha\alpha^H\beta$$

$$= \beta - 2\alpha^H\beta\alpha = \beta - 2\underline{(\beta,\alpha)\alpha}$$



β 在 α 上的正交投影

酉矩阵与正交矩阵的性质：

设 $A,\ B \in U^{n\times n}$，那么

(1) $A^{-1} = A^H \in U^{n\times n}$

(2) $|\det(A)| = 1$

(3) $AB,\ BA \in U^{n\times n}$

设 $A, B \in E^{n\times n}$，那么

(4) $A^{-1} = A^T \in E^{n\times n}$

(5) $\det(A) = \pm 1$

(6) $AB, BA \in E^{n\times n}$

定理： 设 $A \in C^{n\times n}$，则 A 是一个酉矩阵的充分必要条件为 A 的 n 个列 (或行) 向量组是标准正交向量组.

提示： 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，那么 $A^H=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\ \alpha_2^H\\ \vdots\\ \alpha_n^H\end{bmatrix}$

$$A^H A = \begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1^H \alpha_1 & \alpha_1^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H \alpha_n \\ \alpha_2^H \alpha_1 & \alpha_2^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^H \alpha_1 & \alpha_n^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^H \alpha_n \end{bmatrix}$$

A 是一个酉矩阵 $\Longleftrightarrow$ $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

定义： 设 V 是一个 n 维酉空间，σ 是 V 的一个线性变换，如果对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 都有

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$$

则称 σ 是 V 的一个**酉变换**.

定理：设 V 是一个 n 维酉空间，σ 是 V 的一个线性变换，那么下列陈述等价：

(1) σ 是酉变换；

(2) $\|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|$, $\forall \alpha \in V$

(3) 将 V 的标准正交基底变成标准正交基底；

(4) 酉变换在标准正交基下的矩阵表示为酉矩阵.