2008级.

一.解:

初等因子: λ, λ, $\lambda+2$, $(\lambda+2)^2$

行列式因子: $D_1(\lambda)=1$

$D_2(\lambda)=\lambda(\lambda+2)$

$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2)^3$

故 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$

$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda(\lambda+2)$

$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda+2)^2$

∴ Smith标准形为 $\begin{bmatrix}1&&\\&\lambda(\lambda+2)&\\&&\lambda(\lambda+2)^2\end{bmatrix}$

二.解

(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(2-\lambda)$

对 $\lambda=1$,

$A-E=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $q=n-rank(A-E)=1$

故 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(2) 设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

则 $p'(x)=a_1+2a_2x$

~~$p''(x)=2a_2$~~.

又 $p(2)=f(2)=a_0+2a_1+4a_2$

$p(1)=f(1)=a_0+a_1+a_2$

$p'(1)=f'(1)=a_1+2a_2$

∴ $a_0=f(2)-2f'(1)$

$a_1=2f(1)-2f(2)+3f'(1)$

$a_2=-f(1)+f(2)-f'(1)$

∴ $f(A)=[f(2)-2f'(1)]+[2f(1)-2f(2)+3f'(1)]A$

$+[-f(1)+f(2)-f'(1)]A^2$

若 $f(A)=e^A$ 则 $f(x)=e^x$, $f(1)=e$, $f(2)=e^2$, $f'(1)=e$

∴ $e^A=\cdots$

若 $f(A)=\sin\frac{\pi}{2}A$ 则 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(2)=0$

∴ $\sin\frac{\pi}{2}A=2A-A^2$

三.证明 见后

(1) $(AB)^H=B^HA^H=BA$

四.解

(1) $A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\\1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

则 $B=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $C=[1\ -2]$ $A=BC$

(2) $AA^H=\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&-5\\0&0&0\\-5&0&5\end{bmatrix}$

$|AA^H-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&-5\\0&-\lambda&0\\-5&0&5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-10)$ 奇异值 $\alpha=\sqrt{10}$

$\lambda=10$时,

$AA^H-10E=\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-10&0\\-5&0&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ 单位特征向量 $u_1=\cancel{(-1,0,1)^T}$ $(-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^T$

$\lambda=0$时,

$AA^H\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 则 $u_2=(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^T$, $u_3=(0,1,0)^T$

故 $U=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{bmatrix}$

令 $V_1=A^HU_1\Delta^{-1}=(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5})^T$

∴ $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

则 $A=U\begin{bmatrix}\sqrt{10}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}V^H$

五、解：

由 $AA^H=A^HA$ ∴存在酉矩阵U,使

$U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&0\\-2&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2+4)$

∴ $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2i,\ \lambda_3=-2i$

$\lambda=0$时，$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $\alpha_1=(0,0,1)^T$

$\lambda=2i$时，$A-2iE=\begin{bmatrix}-2i&2&0\\-2&-2i&0\\0&0&-2i\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-i&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $\alpha_2=(-\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$

$\lambda=-2i$时，$A+2iE=\begin{bmatrix}2i&2&0\\-2&2i&0\\0&0&2i\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}i&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $\alpha_3=(\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$

$G_1=\alpha_1\alpha_1^H=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$G_2=\alpha_2\alpha_2^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{i}{2}&0\\\frac{i}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$G_3=\alpha_3\alpha_3^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{i}{2}&0\\-\frac{i}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

则 $A=0\cdot G_1+2iG_2-2iG_3$

六、$\rho(A)=0.5$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)'=(\sum_{k=1}^{\infty}x^k)'$

$=(\frac{x}{1-x})'$，$|x|<1$

$=\frac{1}{(1-x)^2}$，$|x|<1$

$R=1$

(1) $\rho(A)<R$ 故 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 收敛.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}=(E-A)^{-2}=\begin{bmatrix}4&16&0\\0&4&0\\0&0&\frac{25}{16}\end{bmatrix}$

七、解：$\frac{dA(x)}{dx}=\begin{bmatrix}0&2x\\2&0\end{bmatrix}$，$\frac{d^2A(x)}{dx^2}=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}$

$\int_0^t A(x)dx=\begin{bmatrix}t&\frac{1}{3}t^3\\t^2&t\end{bmatrix}$

$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{t^3}A(x)dx\right]=3t^2\cdot A(t^3)=\begin{bmatrix}3t^2&3t^8\\6t^5&3t^2\end{bmatrix}$

三、证明：

A.B都为H阵，∴ $A^H=A$，$B^H=B$

又A正定，则 $A=Q^HQ$

(1) $|\lambda I-AB|=|\lambda I-Q^HQB(Q^H)(Q^H)^{-1}|$

$=|Q^H|\,|\lambda I-QBQ^H|\,|Q^H|^{-1}$

$=|\lambda I-QBQ^H|$

∴ AB的特征值与QBQ^H特征值相同

又 $(QBQ^H)^H=QB^HQ^H=QBQ^H$

∴ QBQ^H为H阵，其特征值为实数

同理 $|\lambda I-BA|=|\lambda I-BQ^HQ|$

$=|\lambda I-Q^{-1}QBQ^HQ|$

$=|Q^{-1}|\,|\lambda I-QBQ^H|\,|Q|$

$=|\lambda I-QBQ^H|$

∴ BA的特征值也为实数

(2) $|\lambda A-B|=|A|\,|\lambda I-A^{-1}B|$

$=|A|\,|\lambda I-Q^{-1}(Q^{-1})^HBQ^{-1}Q|$

$=|A|\,|Q^{-1}|\,|\lambda I-(Q^{-1})^HBQ^{-1}|\,|Q|$

$=|A|\,|\lambda I-(Q^{-1})^HBQ^{-1}|$

∵A正定 ∴ $|A|>0$

∴ $|\lambda A-B|=0$的根即为$(Q^{-1})^HBQ^{-1}$的特征值

又 $(Q^{-1})^HBQ^{-1}$为H阵 ⇒ 特征值为实数

∴ $|\lambda A-B|=0$的根为实数.