

2009 级硕士研究生〈矩阵分析〉终考试题

一、(10 分) 设 f 为 3 维线性空间 V 上的一个线性变换, 已知 f 在基

$\alpha_1 = [1, 1]^T$, $\alpha_2 = [1]^T$, $\alpha_3 = [1]^T$ 下的矩阵表示为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 求 f 在基 $\beta_1 = [3, 0, 0]^T$, $\beta_2 = [0, 2, 0]^T$, $\beta_3 = [0, 0, 1]^T$ 下的矩阵表示;

(2) 求 f 的核与值域。

解: (1) 令 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P$,

$$\text{则 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

设 f 在基 $\beta_1 = [3, 0, 0]^T$, $\beta_2 = [0, 2, 0]^T$, $\beta_3 = [0, 0, 1]^T$ 下矩阵表示为 B ,

$$\text{则 } B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 2 & 1/2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 令 $X = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in V$ 且 $f(X) = 0$, 则

$$f(X) = f[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

即求 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, 其基础解系为 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$;

故 $N(f)$ 的基为 $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, 即 $N(f) = \text{span}\{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3\}$ 。

值域为

$$\begin{aligned} R(f) &= \text{span}\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3)\} \\ &= \text{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 3\alpha_3\} \\ &= \text{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3\} \end{aligned}$$

二、(10 分) 已知 Hermite 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \overline{x_1} x_1 + \frac{3}{2} i \overline{x_1} x_3 + 2 \overline{x_2} x_2 - \frac{3}{2} i \overline{x_3} x_1 + \frac{1}{2} \overline{x_3} x_3,$$

求酉变换 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$ 并将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形的 Hermite 二次型。

解: 由题设, $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}^H \mathbf{A} \mathbf{X}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3i/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

其特征多项式 $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$, 故 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$;

$$\text{当 } \lambda = -1 \text{ 时, 特征矩阵 } \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -3i/2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以属于 $\lambda = -1$ 的单位特征向量 $\alpha_1 = [1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2}]^T$ 。

$$\text{当 } \lambda = 2 \text{ 时, 特征矩阵 } \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -3i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以属于 $\lambda = 2$ 的单位特征向量为 $\alpha_2 = [1/\sqrt{2}, 0, -i/\sqrt{2}]^T$, $\alpha_3 = [0, 1, 0]^T$ 。

$$\text{令 } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3]^T \text{ 得}$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -\overline{y_1} y_1 + 2\overline{y_2} y_2 + 2\overline{y_3} y_3.$$

三、(15 分) 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式。

解: $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=4, \lambda_2=1, \lambda_3=0$, 所以 \mathbf{A} 的奇异值为

$$\delta_1=2, \delta_2=1, \text{ 故 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{当 } \lambda=4 \text{ 时, 特征矩阵 } \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以属于 $\lambda=4$ 的单位特征向量为 $\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0]^T$ 。

$$\text{当 } \lambda=1 \text{ 时, 特征矩阵 } \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以属于 $\lambda=1$ 的单位特征向量为 $\mathbf{u}_2 = [0, 1, 0]^T$

$$\text{取 } \mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \mathbf{V} = \mathbf{A}^H \mathbf{U}_1 \mathbf{A}^{-H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 的零特征值对应的次酉矩阵 $\mathbf{U}_2 = [0, 0, 1]^T$, 所以

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^H.$$

四、(10 分) 设 \mathbf{A} 为一个 $m \times n$ 型的复矩阵, 证明: 矩阵的谱范数

$$\|A\|_2 = \max_j \left(\lambda_j (A^H A) \right)^{\frac{1}{2}}$$

为酉不变范数，即对任意的 m 阶酉矩阵 U 和任意的 n 阶酉矩阵 V 都有

$$\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2。$$

证明：

$$\|UA\|_2 = \max_j \left(\lambda_j \left\{ (UA)^H (UA) \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (A^H U^H U A) \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (A^H A) \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2 \quad \text{由于}$$

$V^H A^H A V$ 与 $A^H A$ 酉相似，所以它们谱相同，故

$$\|AV\|_2 = \max_j \left(\lambda_j \left\{ (AV)^H (AV) \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (V^H A^H A V) \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (A^H A) \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2$$

$$\begin{aligned} \|UAV\|_2 &= \max_j \left(\lambda_j \left\{ (UAV)^H (UAV) \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (V^H A^H U^H U A V) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \max_j \left(\lambda_j (V^H A^H A V) \right)^{\frac{1}{2}} = \max_j \left(\lambda_j (A^H A) \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2 \end{aligned}$$

所以 $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2。$

五、（15 分）已知矩阵

$$A = (10 - \sqrt{10})I_{3 \times 3},$$

这里 $I_{3 \times 3}$ 表示 3 阶单位矩阵，

（1）求证：矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} A^k$ 绝对收敛；

（2）求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} A^k$ 的收敛和。

（1）证明：由 $A = (10 - \sqrt{10})I_{3 \times 3}$ 得， $\rho(A) = 10 - \sqrt{10}。$

又 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+2}{10^{k+2}} \right) / \left(\frac{k+1}{10^{k+1}} \right) = \frac{1}{10} = \frac{1}{R}$ ，所以收敛半径 $R = 10$ ，所以 $\rho(A) < R。$

所以矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} \mathbf{A}^k$ 绝对收敛。

$$(2) \text{ 由于 } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} x^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{10} \right)^{k+1} \right]' = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{x}{10} \right)^{-2},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} \mathbf{A}^k = \frac{1}{10} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{10} \mathbf{A} \right)^{-2} = \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

六、 (20 分) 分别求下列矩阵的矩阵函数 $\sin 2\pi \mathbf{A}$ 和 $\cos \frac{\pi}{2} \mathbf{A}$ 。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: (1) } f(\mathbf{A}) = [f(\mathbf{A}^T)]^T = \begin{bmatrix} f(3) & 0 & 0 & 0 \\ f'(3) & f(3) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f''(3) & f'(3) & f(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix}$$

当 $f(x) = \sin 2\pi x$ 时, $f(3) = 0, f'(3) = 2\pi, f''(3) = 0$;

$$\text{故 } \sin 2\pi \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ 时, $f(3) = 0, f'(3) = \frac{\pi}{2}, f''(3) = 0$;

$$\text{故 } \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{A} \text{ 的 Jordan 标准形为 } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

令 $P = [X_1, X_2, X_3]$, 由 $AP = PJ$, 可得

$$AX_1 = X_1, \quad AX_2 = -X_2, \quad AX_3 = 2X_3.$$

由 $(E - A)X_1 = 0$ 得, 取 $X_1 = [1, -1, -1]^T$;

由 $(E + A)X_2 = 0$ 得, 取 $X_2 = [1, -3, 3]^T$;

由 $(2E - A)X_3 = 0$ 得, 取 $X_3 = [1, 0, 0]^T$ 。

$$\text{故 } P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \\ 1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) & & \\ & f(-1) & \\ & & f(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \\ 1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} f(2) & -\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{6}f(-1) + \frac{2}{3}f(2) & -\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{6}f(-1) + \frac{1}{3}f(2) \\ 0 & \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) & \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f(-1) \\ 0 & \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f(-1) & \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) \end{bmatrix}$$

当 $f(x) = \sin 2\pi x$ 时, $f(1) = f(-1) = f(2) = 0$;

$$\text{故 } \sin 2\pi A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ 时, $f(1) = f(-1) = 0, f(2) = -1$;

$$\text{故 } \cos \frac{\pi}{2} A = \begin{bmatrix} -1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

七、 (10 分) 设 k 为一个复数, A 为一个 n 阶复矩阵, 证明:

$$|e^{k \cdot A}| = e^{k \cdot \text{tr}(A)}$$

证明：设 $A = PJP^{-1} = P \text{diag}(J_1, J_2, L, J_r)P^{-1}$ ，则

$$e^{kA} = P \text{diag}(e^{kJ_1}, e^{kJ_2}, L, e^{kJ_r})P^{-1}$$

$$\text{而 } e^{kJ_i} = \begin{bmatrix} e^{k\lambda_i} & ke^{k\lambda_i} & \frac{1}{2!}k^2e^{k\lambda_i} & L & \frac{1}{(d_i-1)!}k^{d_i-1}e^{k\lambda_i} \\ & e^{k\lambda_i} & ke^{k\lambda_i} & & \\ & & O & O & M \\ & & & O & ke^{k\lambda_i} \\ & & & & e^{k\lambda_i} \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |e^{kA}| &= |P| |\text{diag}(e^{kJ_1}, e^{kJ_2}, L, e^{kJ_r})| |P^{-1}| = |e^{kJ_1}| |e^{kJ_2}| L |e^{kJ_r}| \\ &= e^{d_1k\lambda_1} e^{d_2k\lambda_2} L e^{d_rk\lambda_r} = e^{k(d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + L + d_r\lambda_r)} = e^{k \cdot \text{tr}(A)} \end{aligned}$$

八、（5 分）已知函数矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^t & t^2 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

计算 $\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2} A(t)dt)$ 。（2010 级不考）

九、（5 分）已知不相容线性方程组

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + & & \mathbf{x}_4 & = 1 \\ \mathbf{x}_1 + & \mathbf{x}_2 & & = 0 \\ & \mathbf{x}_2 + & \mathbf{x}_3 & = 1 \\ & & \mathbf{x}_3 + & \mathbf{x}_4 & = 0 \end{cases}$$

求其最佳最小二乘解。

$$\text{解：系数矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以其满秩分解为 $A = BC$ ，其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 \mathbf{A} 的 Moore-Penrose 伪逆为

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{C}^H (\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{-1} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 & 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

所以其最佳最小二乘解为

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 & 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$