Matrix Analysis

矩阵分析

矩阵的可对角化条件

n 维线性空间 V 上的线性变换 f，是否存在 V 的一个基使得 f 在这个基下的矩阵为对角矩阵？

$\Updownarrow$

f 在给定的一个基下的矩阵表示为 A, 那么 A 是否相似于一个对角矩阵？

矩阵 A 相似于一个对角矩阵的条件是什么？

定义：若 n 阶矩阵 A 与对角形矩阵相似，则称 A 可对角化，也称 A 是单纯矩阵.

定理：n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量.

证：设 n 阶矩阵 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \longrightarrow AP = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

令 $P = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$， 则

$$A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=[X_1,X_2,\cdots,X_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$[AX_1,AX_2,\cdots,AX_n]=[\lambda_1X_1,\lambda_2X_2,\cdots,\lambda_nX_n]$$

$AX_i=\lambda_iX_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$ $\because$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关 (P 可逆)

$\therefore$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量.

反之，可证明充分性.

推论： n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的每一个特征值的几何重复度等于代数重复度.

$$A\text{ 可对角化} \rightleftarrows \left.\begin{array}{l} q_1+q_2\cdots+q_r=n, \\ q_i \le p_i,\ \ i=1,2,\cdots r \\ p_1+p_2\cdots+p_r=n, \end{array}\right\} \rightarrow q_i=p_i,\ \ i=1,2,\cdots r.$$

推论： 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.

同时对角化

引理： 设 $A \in C^{n\times n}, B \in C^{m\times m}$, 且 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 则 C 可以对角化的充要条件是 A, B 都可以对角化.

定理： 设 A, B 都可以对角化，则 A, B 同时对角化的充要条件是 $AB = BA$.

证明：必要性：若存在 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

$$\longrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

$$= \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$$

$$\longrightarrow P^{-1}ABP = P^{-1}BAP \longrightarrow AB = BA.$$

充分性：A, B 都可以对角化，所以存在 $S \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 E_1 & & & \\ & \lambda_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_h E_h \end{bmatrix} = A$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_h$ 互不相同. 令 $S^{-1}BS = B$, 则由 $AB = BA$,

可得 $AB = BA$.

将 B 分块，B_{ij} 的行数与 E_i 相同，列数与 E_j 相同.

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 E_1 & & & \\ & \lambda_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_h E_h \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1h} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{h1} & B_{h2} & \cdots & B_{hh} \end{bmatrix},$$

$$AB=BA \longrightarrow (\lambda_i E_i)B_{ij}=B_{ij}(\lambda_j E_j) \longrightarrow (\lambda_i-\lambda_j)B_{ij}=0.$$

$$\because\ \lambda_i \neq \lambda_j,\quad (i\neq j) \longrightarrow \quad B_{ij}=0,\quad i\neq j.$$

即

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{hh} \end{bmatrix}, \qquad (=S^{-1}BS)$$

因为 B 可对角化，从而 B 可对角化，由前面引理知，

$B_{ii}, i=1,2,\cdots,h$ 可对角化，即存在可逆矩阵 T_i，使得

$$T_i^{-1}B_{ii}T, \qquad i=1,2,\cdots,h$$

是对角形.

令

$$T=\begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_h \end{bmatrix},$$

则 $T^{-1}BT$, $T^{-1}AT$ ，即 $T^{-1}S^{-1}BST$, $T^{-1}S^{-1}AST$ 均为对角形矩阵. 从而，令 $P=ST$, 则 $P^{-1}BP$, $P^{-1}AP$ 均为对角形矩阵.

定理: 设 n 阶方阵 $\{A_i,\ i=1,2,\dots\}$ 都可以对角化，则它们能**同时对角化**的充要条件是 $A_iA_j=A_jA_i,\ i\neq j.$