矩阵函数的定义

定义：设 $A \in C^{n \times n}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个互异的特征值，A 的最小多项式为 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{d_s}$，

其中 $d_i \geq 1(i = 1, 2 \cdots, s)$，$\sum_{i=1}^{s} d_i = m$.

如果函数 $f(x)$ 具有足够高阶的导数并且下列 m 个值

$$\{f(\lambda_i), f'(\lambda_i) \cdots, f^{(d_i - 1)}(\lambda_i),\ \ i = 1, 2 \cdots, s\}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的影谱上有定义.

例：已知

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)},\quad A=\begin{bmatrix}8 & -3 & 6\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

矩阵A的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，并且

$$f(2)=\tfrac{1}{2},\ f(1)=\tfrac{1}{6},\ f'(1)=\tfrac{5}{36}$$

所以 $f(x)$ 在 A的影谱上有定义.

但是如果取 $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 其最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2,\quad \text{而 } f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)},$$

显然 $f(3)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在B 的影谱上无定义.

定义： 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$, 其最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s},$$

函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的影谱上有定义, 如果存在多项式 $p(\lambda)$ 满足

$$f^{(k)}(\lambda_i)=p^{(k)}(\lambda_i),\quad (i=1,2,\cdots,s;\ \ k=0,1,\cdots,d_i-1).$$

则定义**矩阵函数** $f(A)=p(A)$.

注1：满足上述定义的多项式 $p(\lambda)$ 存在且不唯一.

注2：矩阵函数 $f(A)$是与A 相同阶数的矩阵.

定理：设$g(\lambda)$与$q(\lambda)$为两个不同的多项式,A 为 n阶矩阵，则 $g(A)=q(A)$ 的充分必要条件是$g(\lambda)$与$q(\lambda)$在A的影谱上的值对应相等，即

$$g^{(k)}(\lambda_i)=q^{(k)}(\lambda_i),\quad (i=1,2,\cdots,s;\ \ k=0,1,\cdots,d_i-1).$$

提示：矩阵多项式 $f(A)=P\mathrm{diag}(f(J_1),f(J_2)\cdots,f(J_r))P^{-1}$.

例：设 $A\in C^{n\times n}$，如果 $f(A)$有定义，那么 $f(A^T)$是否也有定义？

解：因为 A 与 A^T 相似，所以有相同的最小多项式，

$f(x)$ 在 A 的影谱上有定义，从而在 A^T 的影谱上有定义.

所以 $f(A^T)$ 有定义，并且 $f(A^T)=[f(A)]^T$.

$f(A^T)=p(A^T)=[p(A)]^T=[f(A)]^T$，($p(\lambda)$是多项式)