正定Hermite二次型与正定Hermite矩阵

定义：给定 Hermite 二次型

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j=X^HAX$$

如果对于任意不全为零复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有 $f(X)>0\ (\geq 0)$,

则称该 Hermite 二次型为正定的(半正定的) ，并称相应的H-矩阵

A 为正定的(半正定的).

例：判断下列 Hermite 二次型的类别

(1) $f(y_1, y_2, y_3) = 4\overline{y_1}y_1 + 8\overline{y_2}y_2 + 3\overline{y_3}y_3$

(2) $f(y_1, y_2, y_3) = 12\overline{y_2}y_2 + 9\overline{y_3}y_3$

(3) $f(y_1, y_2, y_3) = -7\overline{y_1}y_1 + 6\overline{y_2}y_2 + \overline{y_3}y_3$

(4) $f(y_1, y_2, y_3) = -\overline{y_1}y_1 - 4\overline{y_2}y_2 - 3\overline{y_3}y_3$

(5) $f(y_1, y_2, y_3) = -6\overline{y_1}y_1 - 13\overline{y_3}y_3$

定理： 对于 Hermite二次形 $f(X)=X^{H}AX$, 下列命题等价

(1) $f(X)$ 是正定的.

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P 都有 $P^{H}AP$ 为正定矩阵.

(3) A 的 n 个特征值都大于零.

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{H}AP=I$.

(5) 存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A=Q^{H}Q$.

(6)* 存在正线上三角矩阵 R 使得 $A=R^{H}R$, 且此分解是唯一的.

定理：n 阶 Hermite（实对称）矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是 A 的 n 个顺序主子式全大于零, 即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

例： 设 A 是一个正定的H-阵，且又是酉矩阵，则 $A=I$.

证明： 由于 A 是一个正定H-阵，所以必存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$ 使得

$$A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}U^H,\quad \lambda_i>0.$$

由于 A 又是酉矩阵，所以 $|\lambda_i|=1$. 这样必有 $\lambda_i=1, i=1,\cdots,n.$
从而 $A=I$.

例：设 A 是一个正定的 H-阵，B 是一个反 H-阵，证明 AB 与 BA 的特征值实部为零.

证明： 由于 A 是一个正定 H-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得 $A=Q^HQ$, 那么

$$AB=Q^HQB=Q^HQBQ^H(Q^H)^{-1}\sim QBQ^H$$

即 AB 相似于 QBQ^H，从而有相同的特征值.

因为 B 是一个反 H-阵，所以 QBQ^H 也是一个反 H-阵, 特征值实部为零. 同理可证 BA 的特征值实部也为零.

例：设 A 是一个正定的 H-阵, B 是一个反H-阵，证明：$A+B$ 是可逆矩阵.

证明：由于 A 是一个正定 H-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得 $A=Q^HQ$, 那么

$$|A+B|=|Q^HQ+B|=|Q^H||I+(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}||Q|,$$

B 是一个反 H-阵，所以 $(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}=(Q^{-1})^HB(Q)^{-1}$ 也是一个反 H-阵, 特征值实部为零, 从而 $|I+(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}|\neq 0$, $A+B$ 可逆.

半正定Hermite二次型与半正定Hermite矩阵

(1) $f(X)$ 是半正定的.

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P 都有 $P^H AP$ 为半正定矩阵.

(3) A 的 n 个特征值都是非负的.

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^H AP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r = \operatorname{rank} A$.

(5) 存在秩为 r 的 n 阶矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$.

定理： 设 A 是正定(半正定) Hermite 矩阵，那么存在唯一正定(半正定) Hermite 矩阵 G，使得 $A=G^2$.

提示：存在酉矩阵 U，使得

$$A=U\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H, \quad \lambda_i>0\ (\lambda_i\geq 0).$$

定义矩阵

$$G=U\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H,$$

则 G 满足 $G^2=A$.

例： 设 A 是一个半正定的 H-阵且 $A\neq 0$, 证明:

$$|A+I|>1.$$

证明: 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值, 由于 A 是半正定的, 所以 $\lambda_i\geq 0$, 又因为 $A\neq 0$, A 至少有一个特征根大于0, 于是

$$|A+I|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>1.$$