北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

2010级硕士研究生（矩阵分析）终考试题

一、(10分)

(1) 如果 4×6 的 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩 3 其初等因子为 $\lambda, \lambda^2, \lambda-2, (\lambda-2)^2, (\lambda+1)^3$. 求 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda(\lambda-2) & & \\ & & \lambda^2(\lambda-2)^2(\lambda+1)^3 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

判断 $\lambda E-A$, $\lambda E-B$ 是否等价

(2) 已知 $\varepsilon\neq 0$, 判断 n 阶矩阵

λ-矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & & \\ & \lambda-a & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda-a \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \quad 与 \quad B=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & a \end{bmatrix}$$

因为 $1,1,\cdots,(\lambda-a)^n$

λ-矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & & \\ & \lambda-a & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ -\varepsilon & & & \lambda-a \end{bmatrix}$

是否相似, 并给出证明.

$1,\cdots,(\lambda-a)^n+(-1)^{n+1}\varepsilon$

没有相同的不变因子 $\therefore A\not\sim B$

二、(10分) 已知 Hermite 二次型:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_1+3i\bar{x}_1x_3+4\bar{x}_2x_2-3i\bar{x}_3x_1+\bar{x}_3x_3,$$

求酉变换 $X=UY$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形的 Hermite 二次型.

三、(15分) 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式.

四、(10分) 设 A 为一个 n 阶半正定 Hermite 矩阵, 且 $A\neq 0$, B 是正定 Hermite 矩阵, 证明: $\det(A+B)>\det(B)$.

Hermite 矩阵

做别人没有的.

五、（本题 15 分）已知 $A=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$，

$P^{-1} J$

P^{-1}. $P^{-1} \cdot A \cdot P = \text{Jordan}$

$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$

证明：矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^k$ 收敛，并求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^k$ 的收敛和。

$\lambda = \frac{1}{3}$ 时

Jordan 标准形为

$r(\lambda I - A) = 2$

$R = 1$ $\rho(A) = \frac{1}{2}$

$(A^{k+1})'$

$\rho(A) < R$ ∴ 收敛

$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

六、（15 分）分别求下列矩阵的矩阵函数 e^{At} 和 $\sin \pi A$，其中

① 求 Jordan 标准型 J

② 求 P 和 P^{-1}

$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ① Jordan 标准形 ②

$f(A) = P f(J) P^{-1} = P \operatorname{diag}(f(J_1(\lambda_1)), f(J_2(\lambda_2)) \cdots f(J_r(\lambda_r))) P^{-1}$

$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(d_i-1)}(\lambda_i)}{(d_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$

$(\frac{\lambda}{1-\lambda})'$

$|\lambda E - A| = $ $= (\lambda^2+2)\lambda$

七、（10 分）已知正规矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 的谱分解。

八、（5 分）判断 $\|x\| \equiv (|2x_1 - x_2|^2 + |3x_2|^2)^{1/2}$ 是否是 C^2 上的向量范数，并给出证明。

向量 2 范数 是

$\|x\| = \|Ax\|_2$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

定义：非负性、齐次、三角不等式

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX$

$\|AX\|_2$

$\|A(X+Y)\|_2$

二范数

九、（10 分）已知不相容线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

求其最佳最小二乘解。

$A^{+} \cdot b$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 10 & -2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ X