Schur 引理与正规矩阵

定义： 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ (或 $R^{n\times n}$)，若存在 $\boldsymbol{U}\in \boldsymbol{U}^{n\times n}$ (或 $E^{n\times n}$)

使得

$$\boldsymbol{U}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}\quad (\text{或 } \boldsymbol{U}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B})$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 酉相似 (或正交相似) 于 $\boldsymbol{B}$.

定理 (Schur引理)：任何一个 n 阶复矩阵 A 酉相似于一个上(下)三角矩阵.

证明：用数学归纳法. A 的阶数为 1 时定理显然成立. 现设 A 的阶数为 $k-1$ 时定理成立, 考虑 A 的阶数为 k 时的情况.

取 k 阶矩阵 A 的一个特征值 λ_1, 对应的单位特征向量为 α_1, 以 α_1 为第一列构造 k 阶酉矩阵

$$U_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k]$$

$$AU_1=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k]=[\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k]$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 构成 C^k 的一个标准正交基，故

$$A\alpha_i=\sum_{j=1}^{k}c_{ij}\alpha_j,\quad (i=2,3,\cdots,k)$$

因此

$$AU_1=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k]\begin{bmatrix}\lambda_1 & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{k1}\\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是 $k-1$ 阶矩阵，根据归纳假设，存在 $k-1$ 阶酉矩阵 W 满足

$$W^H A_1 W = R_1 \quad (\text{上三角矩阵})$$

令 $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & W \end{bmatrix} \in U^{k\times k}$，$U = U_1 U_2$，那么

$$U^H A U = U_2^H U_1^H A U_1 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{21} & \cdots & b_{k1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

注意： 等号右端的三角矩阵主对角线上的元素为矩阵 A 的全部特征值.

定理 (Schur 不等式):

设 $A \in C^{n\times n}$， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值， 那么

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i,j} |a_{ij}|^2,$$

$$U^H AU = R,$$

$$U^H AA^H U = RR^H$$

其中等号成立等价于 A 酉相似于对角矩阵.

迹相等

正规矩阵

定义： 设 $A \in C^{n \times n}$，如果 A 满足 $AA^H = A^H A$，那么称矩阵 A 为一个正规矩阵.

设 $A \in R^{n \times n}$，如果 $AA^T = A^T A$，那么称矩阵 A 为一个实正规矩阵.

例：(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为实正规矩阵.

(2) $\begin{bmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$ 是一个正规矩阵。

(3) H-阵，反H-阵，正交矩阵，酉矩阵，对角矩阵都是正规矩阵.

正规矩阵的性质与结构定理

引理 1：设 A 是一个正规矩阵，则与 A 酉相似的矩阵一定是正规矩阵.

引理 2：设 A 是一个正规矩阵且又是三角矩阵, 则 A 必为对角矩阵.

提示：不妨设 A 是上三角矩阵, 根据 $AA^H = A^H A$, 考虑等号两边矩阵的对角线元素.

正规矩阵的结构定理

定理 设 $A\in C^{n\times n}$，则 A 是正规矩阵的充要条件是存在一个酉矩阵 U 使得

$$U^H AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{ 是矩阵 } A \text{ 的特征值.}$$

推论 1： n 阶正规矩阵有 n 个线性无关的特征向量 (必要不充分）

举例说明：可对角化的矩阵不一定可酉对角化.

设 X, Y 是两个线性无关但是不正交的向量，比如取

$$P = [X \quad Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

则 $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

可对角化，但不能酉对角化.

推论 2： 正规矩阵属于不同特征值的特征向量彼此正交.

提示：

$$U^H AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},\quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{ 是 } A \text{ 的特征值.}$$

U 的 n 个列向量分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量，它们构成一个标准正交的向量组. 所以属于不同特征值的特征子空间是两两正交的.

例：设

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解: 先计算矩阵的特征值

$$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=8.$

对于特征值 $\lambda_1=-1$，解线性方程组 $(-I-A)X=0$．求得其一个基础解系

$$X_1=\left[-1,2,0\right]^T,\quad X_2=\left[-1,0,1\right]^T$$

现在将 X_1, X_2 单位化并正交化，得到两个标准正交向量

$$\eta_1=\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right]^T,\quad \eta_2=\left[\frac{-4}{3\sqrt{5}},\frac{2}{2\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]^T$$

对于特征值 $\lambda_2 = 8$，解线性方程组 $(8I - A)X = 0$

求得其一个基础解系 $X_3 = \left[2,1,2\right]^T$，

将其单位化得到一个单位向量

$$\eta_3 = \left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^T$$

将这三个标准正交向量组成矩阵

$$Q=\left[\eta_1,\eta_2,\eta_3\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{\sqrt{5}} & \dfrac{-4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则矩阵 Q 即为所求正交矩阵, 且有 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 8\end{bmatrix}.$

定理 设 A 是正规矩阵，则

(1) A 是 H-阵的充要条件是 A 的特征值为实数.

(2) A 是反H-阵的充要条件是 A 的特征值的实部为零.

(3) A 是 U-阵的充要条件是 A 的特征值的模长为 1.

$\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^H,$$

$$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^H,$$