Matrix Analysis

# 矩阵分析

定义：设 $A$ 为正规矩阵，那么存在 $U \in U^{n\times n}$ 使得

$$A = \overbrace{[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]}^{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix}}^{U^H}$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^H + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^H + \cdots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^H$$

其中 $\alpha_i$ 是矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda_i$ 所对应的单位特征向量. 我们称上式为正规矩阵 $A$ 的谱分解表达式.

设正规矩阵 $A$ 有 $r$ 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，特征值 $\lambda_i$ 的代数重数为 $n_i$，$\lambda_i$ 所对应的 $n_i$ 个两两正交的单位特征向量为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{n_i}}$，则 $A$ 的谱分解表达式又可以写成

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\alpha_{ij}^H=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i G_i$$

其中 $G_i=\sum_{i=1}^{n_i}\alpha_{ij}\alpha_{ij}^H$，并且显然有

$$G_i^H=\boxed{G_i=G_i^2},\quad G_iG_k=0(i\neq k)$$

由上面的谱分解表达式又可以给出正规矩阵的一种刻划.

定理： 设$A$为$n$阶矩阵，有$r$个互异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$若$\lambda_i$的代数重数为$n_i$， 那么$A$为正规矩阵的充分必要条件是存在$r$个$n$阶矩阵$G_1,G_2,\cdots,G_r$满足：

(1) $A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i G_i$; (2) $G_i^H=G_i=G_i^2$

(3) $G_iG_k=0(i\neq k)$; (4) $\sum_{i=1}^{r}G_i=I$

(5) 满足上述性质的矩阵 $G_i$ 是唯一的;

(6) $\operatorname{rank}(G_i) = n_i$

其中 $G_i$ 称为正交投影矩阵.

例1: 求正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ 的谱分解表达式.

解： 首先求出矩阵$A$ 的特征值与特征向量. 容易计算

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)$$

从而$A$的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -3$$

当 $\lambda = 1$ 时，求得三个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1 = [1,1,0,0]^T, \alpha_2 = [1,0,1,0]^T, \alpha_3 = [-1,0,0,1]^T$$

当 $\lambda=-3$ 时，求得一个线性无关的特征向量为

$$\alpha_4=[1,-1,-1,1]^T$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化、单位化可得

$$\eta_1=\left[{}^{1}\!\!\diagup_{\sqrt{2}},{}^{1}\!\!\diagup_{\sqrt{2}},0,0\right]^T$$

$$\eta_2=\left[{}^{1}\!\!\diagup_{\sqrt{6}},{}^{-1}\!\!\diagup_{\sqrt{6}},{}^{2}\!\!\diagup_{\sqrt{6}},0\right]^T$$

$$\eta_3=\left[{}^{-1}\!\!\diagup_{\sqrt{12}},{}^{1}\!\!\diagup_{\sqrt{12}},{}^{1}\!\!\diagup_{\sqrt{12}},{}^{3}\!\!\diagup_{\sqrt{12}}\right]^T$$

将$\alpha_4$单位化可得 $\eta_4=\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^T$. 于是有:

$$G_1=\eta_1\eta_1^H+\eta_2\eta_2^H+\eta_3\eta_3^H \qquad G_2=\eta_4\eta_4^H$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \qquad =\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为 $A=G_1-3G_2$.

例2： 求正规矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解表达式.

解： 首先求出矩阵 $A$ 的特征值与特征向量. 容易计算

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda^2 + 2)$$

从而 $A$ 的特征值为 $\lambda_1 = -\sqrt{2}i, \lambda_2 = \sqrt{2}i, \lambda_3 = 0$ .

依次求出属于这三个特征值的特征向量为：

$$\alpha_1=\left[-\sqrt{2},-i,1\right]^T,\alpha_2=\left[\sqrt{2},-i,1\right]^T,\alpha_3=[0,i,1]^T$$

再将其单位化可得三个标准正交的特征向量

$$\eta_1=\left[{}^{-1}\!/_{\sqrt{2}},{}^{-i}\!/_{2},{}^{1}\!/_{2}\right]^T$$

$$\eta_2=\left[{}^{1}\!/_{\sqrt{2}},{}^{-i}\!/_{2},{}^{1}\!/_{2}\right]^T$$

$$\eta_3=\left[0,{}^{i}\!/_{\sqrt{2}},{}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\right]^T$$

于是有

$$G_1=\eta_1\eta_1^H=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4}i & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}i & \frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$G_2=\eta_2\eta_2^H=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4}i & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}i & \frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \eta_3 \eta_3^{\ H}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为

$$A = -\sqrt{2} i G_1 + \sqrt{2} i G_2 + 0 G_3$$