2010版

一. 解:

(1) $d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^2(\lambda+1)^3$

$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

$d_1(\lambda)=1$

故Smith标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-2)^2(\lambda+1)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 不相似

$|\lambda I-A|=(\lambda-a)^n$

$|\lambda I-B|=(\lambda-a)^n+(-1)^{n+2}\cdot\varepsilon\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda-a & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-a & -1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-a)^n-\varepsilon$

故A,B特征值不同 故不相似

二. 由已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3i \\ 0 & 4 & 0 \\ -3i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|A-\lambda E|=(\lambda-4)(4-\lambda)(\lambda+2)$

当$\lambda=4$时, $A-4E=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 \\ -3i & 0 & -3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha_1=(i,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$

单位正交化: $u_1=(\frac{i}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$, $u_2=(0,1,0)^T$

当$\lambda=-2$时, $A+2E=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3i \\ 0 & 6 & 0 \\ -3i & 0 & 3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\alpha_3=(-i,0,1)^T$ 单位化 $u_3=(-\frac{i}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$

故 $U=(u_1,u_2,u_3)=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt2} & 0 & -\frac{i}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$

则 $X=UY$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ 使

$f(x)=X^HAX=Y^H(U^HAU)Y$

$=4\bar{y}_1y_1+4\bar{y}_2y_2-2\bar{y}_3y_3$

三. $AA^H=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$|AA^H-\lambda E|=\lambda^2(10-\lambda)$

奇异值为$\sqrt{10}$

$AA^H-10E\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_1=(-1,0,1)^T$ $u_1=(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$

$AA^H\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_2=(0,1,0)^T$ $\alpha_3=(1,0,1)^T$

则 $U_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}^T$, $U=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$

令 $V_1=A^HU_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{bmatrix}$

则 $V=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}$

故 $A=U\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$

四. 证明:

B是正定H阵 则 $B=Q^HQ$

$|A+B|=|A+Q^HQ|$

$=|Q^H(Q^H)^{-1}AQ^{-1}Q+Q^HQ|$

$=|Q^H|\,|(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+E|\,|Q|$

$\because$ A是半正定H阵 $\therefore$ A的特征值全为非负

$\therefore |(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+E|\geqslant|E|=1$

又 $A\neq0$ 故 $|(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+E|>1$

$\therefore |A+B|>|Q^H|\,|Q|=|Q^HQ|=|B|$ 得证.

五. $\rho(A)=\frac12$

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(x^{k+1})'=(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1})'$

$=(\frac{x}{1-x})'$, $|x|<1$

$=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

$R=1$

$\because \rho(A)<R$ 故 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^k$ 收敛.

且 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^k=(E-A)^{-2}=\cdots$

六. 解:

$|A-\lambda E|=-(\lambda+1)^3$

$A+E\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rank(A+E)=1$

$q=n-rank(A+E)=2$ 块.

$(A+E)^2\simeq\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rank(A+E)^2=0$

阶数$\geqslant2$的Jordan块有1个

故Jordan标准形为$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\varphi_A(\lambda)=(\lambda+1)^2$

$p(x)=a_0+a_1x$，则$p'(x)=a_1$

$p(1)=f(1)=a_0+a_1$

$p'(1)=f'(1)=a_1$

$\therefore \begin{cases}a_0=f(1)-f'(1)\\a_1=f'(1)\end{cases}$

$\therefore f(A)=[f(1)-f'(1)]E+f'(1)A$

(1) $f(A)=e^{tA}$

$f(x)=e^{tx}$，$f(1)=e^t$，$f'(1)=e^t$

则$f(A)=e^tA$

(2) $f(x)=\sin\pi x$

则$f(A)=-\pi E+\pi A$

七. 解：

$|A-\lambda E|=-\lambda(\lambda^2+2)$

$\therefore \lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{2}i$，$\lambda_3=-\sqrt{2}i$

当$\lambda_1=0$时，$A-0E\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-i\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\alpha_1=(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

当$\lambda_2=\sqrt{2}i$时，$A-\sqrt{2}iE\sim\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}i&0\\0&1&i\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2})^T$

当$\lambda_3=-\sqrt{2}i$时，$A+\sqrt{2}iE\sim$

$G_1=\alpha_1\alpha_1^H$

$G_2=\alpha_2\alpha_2^H$

$G_3=\alpha_3\alpha_3^H$

则$A=0\cdot G_1+\sqrt{2}iG_2-\sqrt{2}iG_3$

八. 令$\begin{bmatrix}2x_1-x_2\\3x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=Ax$

则$\|x\|=\|Ax\|_2$

①非负性. ~~当$x\neq0$时，$\|x\|=\|Ax\|_2>0$~~

由A是满秩方阵.

$Ax=0$只有零解.

$\therefore$当$x\neq0$时，$\|x\|>0$

②齐次性. $\|kx\|=\|kAx\|_2=|k|\,\|Ax\|_2=|k|\,\|x\|$

③三角不等式：

$\|x+y\|=\|A(x+y)\|_2=\|Ax+Ay\|_2$

$\leq\|Ax\|_2+\|Ay\|_2$

$=\|x\|+\|y\|$

$\therefore$是C^2上的向量范数

九. 解：

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&0&2\\2&4&6\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\3\end{bmatrix}$

$=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\1&0\\2&0\\2&4\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}_{C}$

$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\begin{bmatrix}-\frac{1}{30}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{15}\\\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}&-\frac{4}{15}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{30}&\frac{1}{30}&\frac{1}{15}&\frac{1}{15}\end{bmatrix}$

则最佳最小二乘解为$x=A^+b$

求解得：$x=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}\\\frac{1}{5}\\\frac{3}{10}\end{bmatrix}$