矩阵序列与极限

定义：设矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=\left[a_{ij}{}^{(k)}\right]\in C^{m\times n}$，如果 mn 个数列 $\{a_{ij}{}^{(k)}\}$，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$ 都收敛，则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$收敛.

进一步，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}{}^{(k)}=a_{ij}$，那么 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=A=[a_{ij}]$

我们称矩阵 A 为矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 的极限.

例：如果设 $A^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)}\right]\in C^{2\times2}$，其中

$$a_{11}^{(k)}=\frac{k+1}{3k},\quad a_{12}^{(k)}=r^{k}\,(0<r<1)$$

$$a_{21}^{(k)}=r^{1/k}\,(r>1),\quad a_{22}^{(k)}=\frac{k^{2}-k}{k^{2}+k}$$

那么

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定理： 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于A的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$$

其中$\left\|A^{(k)}-A\right\|$为任意一种矩阵范数.

证明：取矩阵范数

$$\|A\|=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

必要性：设 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A=[a_{ij}]$

那么由定义可知对每一对 i, j 都有

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| = 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$$

从而有 $$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| = 0$$

上式即为 $$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)} - A\right\| = 0$$

充分性：设

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

那么对每一对 i,j 都有

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\, j=1,2,\cdots,n)$$

即 $$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

故有 $$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A = [a_{ij}]$$

现在已经证明了定理对于所设的范数成立，如果 $\|A\|_\alpha$ 是另外一种范数，那么由范数的等价性可知

$$d_1 \left\|A^{(k)} - A\right\| \le \left\|A^{(k)} - A\right\|_\alpha \le d_2 \left\|A^{(k)} - A\right\|$$

这样，当 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$ 时同样可得

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|_{\alpha}=0$$

因此定理对于任意一种范数都成立.

矩阵序列的极限运算的基本性质:

（1）一个收敛的矩阵序列的极限是唯一的.

（2）设 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$， $\lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B$，则

$$\lim_{k\to\infty} aA^{(k)} + bB^{(k)} = aA + bB, \quad a,b \in C$$

（3）设 $A^{(k)} \in C^{m\times l}$，$B^{(k)} \in C^{l\times n}$，如果

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A, \quad \lim_{k\to\infty} B^{(k)} = B$$

那么 $$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} B^{(k)} = AB$$

（4）设 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$，其中 $A^{(k)} \in C^{m\times n}, P \in C^{m\times m}, Q \in C^{n\times n}$

那么 $$\lim_{k\to\infty} PA^{(k)}Q = PAQ$$

（5）设 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$，且$\{A^{(k)}\}, A$ 均可逆，则 $\{(A^{(k)})^{-1}\}$

也收敛，且 $$\lim_{k\to\infty} (A^{(k)})^{-1} = A^{-1}$$

例：若对矩阵 A 的某一范数 $\|A\|<1$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

例：已知矩阵序列：$A, A^2, \cdots, A^k, \cdots$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\rho(A)<1$.

证明： 设 A 的Jordan标准形

$$J=\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2),\cdots,J_r(\lambda_r))$$

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

于是 $$A^k=P\mathrm{diag}(J_1^k(\lambda_1),J_2^k(\lambda_2),\cdots,J_r^k(\lambda_r))P^{-1}$$

显然，$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty} J_i^k(\lambda_i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,r$

又因
$$J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & c_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & c_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

其中
$$c_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (当\, l \le k)$$
$$c_k^l = 0 \quad (当\, l > k)$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty} J_i^k(\lambda_i)=0$ 的充要条件是 $|\lambda_i|<1$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k=0$ 的充要条件是 $\rho(A)<1$.