课程编号MTH17075　　　　　　　　　　　　考试时间:2016.6.27 9:30-11:30

北京理工大学2015-2016学年第二学期2013级矩阵分析期末试题B卷及解答

一、(10分)求下面λ-矩阵的初等因子组,Smith标准形和各阶行列式因子。

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3 & & \\ & \lambda(\lambda+1)^2 & \\ & & \lambda^2(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

解:由$A(\lambda)$的形式可知$A(\lambda)$的初等因子为:$\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda+1,(\lambda+1)^2$;从而不变因子为$d_1(\lambda)=\lambda$,$d_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)$,$d_3(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)^2$;行列式因子为$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda$,$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)$,$D_3(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^6(\lambda+1)^3$;Smith标准形为$diag(\lambda,\lambda^2(\lambda+1),\lambda^3(\lambda+1)^2)$。

二、(15分)已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&1&3\end{bmatrix}$。(1)求A的Jordan标准形和最小多项式;(2)求矩阵函数$\sin A$,e^{tA}。

解:(1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$,特征值$\lambda=2$(三重),$rank(2I-A)=rank\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}=1$,故对应$\lambda=2$的Jordan块有$3-1=2$个,故A的Jordan标准形$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$,最小多项式$m(\lambda)=(\lambda-2)^2$;

(2)法一:设变换矩阵$P=(X_1,X_2,X_3)$,$P^{-1}AP=J$,$AP=(AX_1,AX_2,AX_3)=(2X_1,2X_2,X_2+2X_3)=PJ$,得:$(A-2I)X_1=(A-2I)X_2=0$,$(A-2I)X_3=X_2$,解$(A-2I)^2X_3=0$得:$X_3=(0,0,1)^T$,代入得:$X_2=(1,-1,1)^T$,解$(A-2I)X_1=0$得:$X_1=(1,0,0)^T$,故$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,因此矩阵函数

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(2)&0&0\\0&f(2)&f'(2)\\0&0&f(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&f'(2)\\0&f(2)-f'(2)&-f'(2)\\0&f'(2)&f(2)+f'(2)\end{bmatrix}$$,所以

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin2&\cos2&\cos2\\0&\sin2-\cos2&-\cos2\\0&\cos2&\sin2+\cos2\end{bmatrix},\quad e^{tA}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&t\\0&1-t&-t\\0&t&1+t\end{bmatrix}。$$

法二:设$p(x)=a_0+a_1x$,则$\begin{cases}p(2)=a_0+2a_1=f(2)\\p'(2)=a_1=f'(2)\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_0=f(2)-2f'(2)\\a_1=f'(2)\end{cases}$,故$f(A)$的多项式表示为:

$$f(A)=p(A)=f(2)I+f'(2)(A-2I)=f(2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+f'(2)\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&f'(2)\\0&f(2)-f'(2)&-f'(2)\\0&f'(2)&f(2)+f'(2)\end{bmatrix}$$,答案同上。

三、(10分)已知$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$,证明:A可对角化,并求A的谱分解。

证:$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$,特征值$\lambda_1=-2$,$\lambda_2=6$(二重),相应的线性无关特征向量分别为$\alpha_1=(1,-2,0)^T$,$\alpha_2=(1,2,0)^T$,$\alpha_3=(0,0,1)^T$,A有$n=3$个线性无关特征向量,故A可对角化。

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&-1/4&0\\1/2&1/4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\beta_1=\begin{bmatrix}\frac12\\-\frac14\\0\end{bmatrix}$,$\beta_2=\begin{bmatrix}\frac12\\\frac14\\0\end{bmatrix}$,$\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,故A的谱分解式为:

$$A=\lambda_1\alpha_1\beta_1^T+\lambda_2\alpha_2\beta_2^T+\lambda_2\alpha_3\beta_3^T=-2\begin{bmatrix}\frac12&-\frac14&0\\-1&\frac12&0\\0&0&0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}\frac12&\frac14&0\\1&\frac12&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

课程编号MTH17075　　　　　　　　　　　　　　　　考试时间:2016.6.27 9:30-11:30

北京理工大学2015-2016学年第二学期2013级矩阵分析期末试题B卷及解答

一、(10分)求下面λ-矩阵的初等因子组,Smith标准形和各阶行列式因子。

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3 & & \\ & \lambda(\lambda+1)^2 & \\ & & \lambda^2(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

解:由$A(\lambda)$的形状可知$A(\lambda)$的初等因子为:$\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda+1,(\lambda+1)^2$,从而不变因子为$d_1(\lambda)=\lambda$,$d_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)$,$d_3(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)^2$,行列式因子为$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda$,$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)$,$D_3(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^6(\lambda+1)^3$,Smith标准形为$\mathrm{diag}\{\lambda,\lambda^2(\lambda+1),\lambda^3(\lambda+1)^2\}$。

二、(15分)已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&1&3\end{bmatrix}$。(1)求$A$的Jordan标准形和最小多项式;(2)求矩阵函数$\sin A$,e^{tA}。

解:(1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$,A特征值$\lambda=2$(三重),$\mathrm{rank}(\lambda I-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}=1$,故对应$\lambda=2$的Jordan块有$3-1=2$个,故A的Jordan标准形$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$,最小多项式$m(\lambda)=(\lambda-2)^2$;

(2)法一:设变换矩阵$P=(X_1,X_2,X_3)$,$P^{-1}AP=J$,$AP=(AX_1,AX_2,AX_3)=(2X_1,2X_2,X_2+2X_3)=PJ$,得:$(A-2I)X_1=(A-2I)X_2=0$,$(A-2I)X_3=X_2$,解$(A-2I)^2X_3=0$得:$X_3=(0,0,1)^T$,代入得:$X_2=(1,-1,1)^T$,解$(A-2I)X_1=0$得:$X_1=(1,0,0)^T$,故$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,因此矩阵函数$f(A)=Pf(J)P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(2)&0&0\\0&f(2)&f'(2)\\0&0&f(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&f'(2)\\0&f(2)-f'(2)&-f'(2)\\0&f'(2)&f(2)+f'(2)\end{bmatrix}$,所以

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin 2&\cos 2&\cos 2\\0&\sin 2-\cos 2&-\cos 2\\0&\cos 2&\sin 2+\cos 2\end{bmatrix},\quad e^{tA}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&t\\0&1-t&-t\\0&t&1+t\end{bmatrix}。$$

法二:设$p(x)=a_0+a_1x$,则$\begin{cases}p(2)=a_0+2a_1=f(2)\\p'(2)=a_1=f'(2)\end{cases}$,解得:$\begin{cases}a_0=f(2)-2f'(2)\\a_1=f'(2)\end{cases}$,故$f(A)$的多项式表示为:

$$f(A)=p(A)=f(2)I+f'(2)(A-2I)=f(2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+f'(2)\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&f'(2)\\0&f(2)-f'(2)&-f'(2)\\0&f'(2)&f(2)+f'(2)\end{bmatrix}$$,答案同上。

三、(10分)已知$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$,证明:A可对角化,并求A的谱分解。

证:$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$,特征值$\lambda_1=-2$,$\lambda_2=6$(二重),相应的线性无关特征向量分别为$\alpha_1=(1,-2,0)^T$,$\alpha_2=(1,2,0)^T$,$\alpha_3=(0,0,1)^T$,A有$n=3$个线性无关特征向量,故A可对角化。

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&-1/4&0\\1/2&1/4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\beta_1=\begin{bmatrix}\frac12\\-\frac14\\0\end{bmatrix}$,$\beta_2=\begin{bmatrix}\frac12\\\frac14\\0\end{bmatrix}$,$\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,故A的谱分解式为:

$$A=\lambda_1\alpha_1\beta_1^T+\lambda_2\alpha_2\beta_2^T+\lambda_2\alpha_3\beta_3^T=-2\begin{bmatrix}\frac12&-\frac14&0\\-1&\frac12&0\\0&0&0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}\frac12&\frac14&0\\1&\frac12&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

九.(10分)已知不相容方程组:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+6x_2+4x_3=3 \end{cases}$$

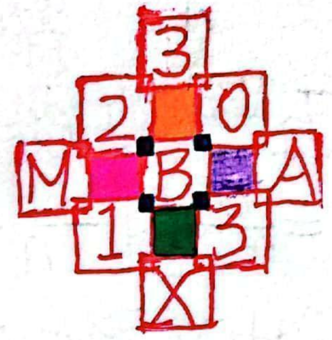
求其最佳最小二乘解。

解:法一:设 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, $b=(1,0,1,3)^T$,则原方程组即为 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\1&1&0\\2&2&0\\2&6&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$,故A的满秩分解 $A=BC=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\\2&0\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,故

最佳最小二乘解为 $x=A^+b=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^Hb$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10&10\\10&20\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-1&5&10&-2\\1&1&2&2\\2&-4&-8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\0.3\\0.2\end{bmatrix};$$



法二:设 $y_1=x_1+3x_2+2x_3$, $y_2=x_1+x_2$, $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in C^3$,若x是最小二乘解,

则 $(y_1-1)^2+y_2^2+(2y_2-1)^2+(2y_1-3)^2=f(y)$ 应最小,

解 $\nabla f(y)=0$ 得:$\begin{cases}y_1-1+4y_1-6=0\\y_2+4y_2-2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_1=1.4\\y_2=0.4\end{cases}$,由实际意义知。

$(y_1,y_2)^T=(1.4,0.4)^T$ 是 $f(y)$ 的最小值点,由此得:$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=1.4\\x_1+x_2=0.4\end{cases}$,等价

于 $\begin{cases}x_2+x_3=0.5\\x_1+x_2=0.4\end{cases}$,若x是最小模解,则 $\|x\|_2^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_2^2+(x_2-0.5)^2+(x_2-0.4)^2$ 应最小,由此知

当 $x_2=\frac{0.5+0.4}{3}=0.3$ 时,$\|x\|_2$ 最小,此时 $x_1=0.1$, $x_3=0.2$,故原方程组的最佳最小二乘解为

$x=(x_1,x_2,x_3)^T=(0.1,0.3,0.2)^T$。

我临走前对你说过:
坐等你给满分的。

Written by ZH, 2016.6.27, 22:00