诱导范数

定义：设 $\|X\|_\alpha$ 是向量范数，$\|A\|_\beta$ 是矩阵范数，如果对于任何矩阵 A 与向量 X 都有

$$\|AX\|_\alpha \le \|A\|_\beta \|X\|_\alpha$$

则称矩阵范数 $\|A\|_\beta$ 与向量范数 $\|X\|_\alpha$ 是相容的.

例：矩阵的Frobenius范数与向量的2-范数是相容的.

证明：$\|AX\|_2 = \|AX\|_F \le \|A\|_F \|X\|_F = \|A\|_F \|X\|_2$

例 设 $\|X\|_\alpha$ 是向量的范数，则

$$\|A\|_i=\max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

满足矩阵范数的定义，且 $\|A\|_i$ 是与向量范数 $\|X\|_\alpha$ 相容的矩阵范数.

证明： 首先我们验证此定义满足范数的四条性质。非负性，齐次性与三角不等式易证. 现在考虑矩阵范数的相容性.

设 $B \neq 0$，那么

$$\|AB\|_i = \max_{X\neq 0}\frac{\|ABX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} = \max_{BX\neq 0}\left(\frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha}\frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}\right)$$

$$\leq \max_{BX\neq 0}\frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha}\max_{X\neq 0}\frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

$$\leq \max_{Y\neq 0}\frac{\|AY\|_\alpha}{\|Y\|_\alpha}\max_{X\neq 0}\frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

$$= \|A\|_i\|B\|_i$$

因此$\|A\|_i$的确满足矩阵范数的定义.

最后证明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 是相容的.

由 $\|A\|_i$ 的定义可知, 当 $X \neq 0$ 时,

$$\|A\|_i \geq \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}, \rightarrow \|AX\|_\alpha \leq \|A\|_i \|X\|_\alpha$$

当 $X = 0$ 时, $\|AX\|_\alpha = \|A\|_i \|X\|_\alpha = 0$,

这说明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 相容的.

定义：上面所定义的矩阵范数称为由向量范数 $\|X\|_\alpha$ 所诱导的诱导范数或算子范数． 由向量 p--范数 $\|X\|_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵 p--范数．即

$$\|A\|_p = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p}$$

常用的矩阵 p--范数为 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$ 和 $\|A\|_\infty$.

证明不要求掌握，但是以下三种范数的计算在考试范围！！！

定理： 设 $A \in C^{m\times n}$，则

（1）列和范数 $\|A\|_1 = \max\limits_j (\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|), \quad j = 1,2,\cdots,n$

（2）谱范数 $\|A\|_2 = \max\limits_j (\lambda_j (A^H A))^{1/2}, \quad j = 1,2,\cdots,n$

其中 $\lambda_j(A^H A)$ 表示矩阵 $A^H A$ 的第 j 个特征值.

（3）行和范数 $\|A\|_\infty = \max\limits_i (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|), \quad i = 1,2,\cdots,m$

例： 已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，计算 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_F$.

解： $\|A\|_1 = 5$, $\|A\|_F = \sqrt{23}$, $\|A\|_\infty = 5$,

$A^H A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，所以 $A^H A$ 的特征值为 5, 15, 3. $\|A\|_2 = \sqrt{15}$.

例：证明：对于任何矩阵$A \in C^{m\times n}$都有

$$(a)\quad \|A^H\|_1 = \|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$$

$$(b)\quad \|A^H\|_2 = \|A^T\|_2 = \|A\|_2$$

$$(c)\quad \|A^H A\|_2 = \|A\|_2^2$$

矩阵的谱半径及其性质

定义：设 $A \in C^{n\times n}$，A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，
我们称

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

为矩阵 A 的谱半径.

例：设 $A \in C^{n\times n}$，那么 $\rho(A) \le \|A\|$.

其中 $\|A\|$ 是矩阵 A 的任何一种范数.

$$AX = \lambda X, X \ne 0$$

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\|$$

$$\le \|A\|\|X\|, \longrightarrow |\lambda| \le \|A\|.$$

例：设 A 是一个 n 阶正规矩阵，则 $\rho(A)=\|A\|_2$

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$A$ 是正规矩阵, 所以存在酉矩阵 U 使得 $A=U\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$，从而

$$A^H A=U\operatorname{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^H$$

所以 $\|A\|_2=\max_j(\lambda_j(A^H A))^{1/2}=\max_j|\lambda_j|=\rho(A).$

例： 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数. 证明：

(1) $\|I\| \geq 1$

(2) A为可逆矩阵, λ 为 A 的特征值，则有

$$\left\|A^{-1}\right\|^{-1} \leq |\lambda| \leq \|A\|$$