实验： 音叉的受迫振动与共振

【实验目的】

1、了解音叉振动系统在驱动力和阻尼力作用下的运动规律。

2、学会用变量控制实验法研究振动系统的速度与其它相关量之间的关系。

3、掌握绘制系统振动速度与驱动力频率关系曲线的方法，并从曲线求出共振频率和品质因数。

4、通过对音叉双臂振动与对称双臂质量关系的测量，研究音叉共振频率与附在音叉双臂一定位置上相同物块质量的关系。

【预备问题】

1、何为位移共振？ 何为速度共振？

2、振动曲线的锐度值等于系统的品质因数，其物理意义是什么？

3、实验中在音叉臂上加砝码时，为什么每次加砝码的位置要固定？

【实验原理】

系统在回复力的作用下做周期性运动的现象被称之为振动。振动是物质运动的基本形式之一，实际的振动系统总会受到各种阻尼，根据所受阻尼的情况，振动系统分为无阻尼自由振动系统和有阻尼振动系统两类。系统的振动由于要克服内在或外在的各种阻尼而消耗自身的能量，如果系统没有补充能量，振动就会衰减，最终停止振动。要使振动能持续下去，就必须对系统施加持续的周期性外力，以补充因各种阻尼而损失的能量。振动系统在周期性外力作用下产生的振动叫做受迫振动。当外加的驱动力的频率与振动系统的固有频率相同时，振动系统就会产生共振现象。

音叉是一个典型的振动系统，其二臂对称、振动相反，而中心杆处于振动的节点

位置，净受力为零而不振动，我们将它固定在音叉固定架上是不会引起振动衰减的。其固有频率可因其质量、音叉臂长短、粗细、材质不同而不同。音叉具有广泛的应用，如用于产生标准的“纯音”、鉴别耳聋的性质、用于检测液位的传感器、用于检测液体密度的传感器、以及计时等等。

本实验借助于音叉，来研究受迫振动及共振现象。用带铁芯的电磁线圈产生不同频率的电磁力，作为驱动力。同样用电磁线圈来检测音叉振动，测量受迫振动与驱动力频率的关系，研究受迫振动与共振现象及其规律。

实验时，将一组电磁线圈置于钢质音叉臂的上下方两侧，并靠近音叉臂。对驱动线圈施加交变电流，产生交变磁场，使音叉臂磁化，产生交变的驱动力而使音叉振动。接收线圈靠近被磁化的音叉臂放置，可感应出音叉臂的振动信号。由于感应电流 $I \propto \frac{dB}{dt}$， $\frac{dB}{dt}$代表交变磁场变化的快慢，其值大小与音叉振动速度有关，速度越快，磁场变化越快，产生的电流越大，从而使测得的电压值越大，可近似认为输出电压代表了音叉的速度幅值。所以，接收线圈测量电压值获得的曲线为音叉受迫振动的速度变化曲线。

1、简谐振动与阻尼振动

物体的振动速度不大时，它所受的阻力大小通常与速率成正比，若以 F 表示阻力大小，可将阻力写成下列代数式：

$$F = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

式中 γ 是与阻力相关的比例系数，其值决定于运动物体的形状、大小和周围介质的性质等。

物体的上述振动在有阻尼的情况下，振子的动力学方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - kx$$

其中 m 为振子的等效质量，k 为与振子属性有关的劲度系数。

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$， $2\delta = \frac{\gamma}{m}$ 代入上式可得：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

式中 ω_0 是对应于无阻尼时的系统振动的固有角频率，δ 为阻尼系数。

当阻尼较小时，式(2)的解为：

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{3}$$

式中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 。

由公式(3)可知，如果 δ=0，则认为是无阻尼的运动，这时 $x = A_0\cos(\omega t + \varphi_0)$ ，成为简谐运动。在 δ≠0，即在有阻尼的振动情况下，此运动是一种衰减运动。从公式 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 可知，相邻两个振幅最大值之间的时间间隔为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{4}$$

与无阻尼的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 相比，周期变大。

2、受迫振动

实际的振动都是阻尼振动，一切阻尼振动最后都要停止下来。要使振动能持续下去，必需对振子施加持续的周期性外力，使其因阻尼而损失的能量得到不断的补充。振子在周期性外力作用下发生的振动叫受迫振动，而周期性的外力又称驱动力。实际发生的许多振动都属于受迫振动，例如声波的周期性压力使耳膜产生的受迫振动，电磁波的周期性电磁场力使天线上电荷产生的受迫振动等。

为简单起见，假设驱动力有如下的形式：

$$F = F_0\cos\omega t$$

式中 F_0 为驱动力的幅值，ω 为驱动力的角频率。

振子处在驱动力、阻力和线性回复力三者的作用下，其动力学方程成为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx + F_0\cos\omega t \tag{5}$$

仍令 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，$2\delta=\dfrac{\gamma}{m}$，得到：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{6}$$

微分方程理论证明，在阻尼较小时，上述方程的解是：

$$x=A_0e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\varphi_0)+A\cos(\omega t+\varphi) \tag{7}$$

式中第一项为暂态项，在经过一定时间之后这一项将消失，第二项是稳定项．在振子振动一段时间达到稳定后，其振动式即成为：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{8}$$

应该指出，上式虽然与自由简谐振动式(即在无驱动力和阻力下的振动)相同，但实质已有所不同．首先其中 ω 并非是振子的固有角频率，而是驱动力的角频率，其次 A 和 φ 依赖于振子的性质、阻尼的大小和驱动力的特征。事实上，只要将式(8)代入方程(6)，就可计算出

$$A=\frac{F_0}{\omega\sqrt{\gamma^2+(\omega m-\frac{k}{\omega})^2}}=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} \tag{9}$$

$$tg\varphi=\frac{\gamma}{\omega m-\frac{k}{\omega}} \tag{10}$$

其中：$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，$\gamma=2\delta\cdot m$

在稳态时，振动物体的速度

$$v=\frac{dx}{dt}=v_{\max}\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}) \tag{11}$$

其中
$$v_{\max}=\frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2+(\omega m-\frac{k}{\omega})^2}} \tag{12}$$

3、共振

在驱动力幅值 F_0 固定的情况下，应有怎样的驱动角频率 ω 才可使振子发生强烈振动？这是个有实际意义的问题。下面分别从振动速度和振动位移两方面进行简单分析。

3.1 速度共振

从相位上看，驱动力与振动速度之间有相位差$\varphi+\dfrac{\pi}{2}$，一般地说，外力方向与物体运动方向并不相同，有时两者同向，有时两者反向。同向时驱动力做正功，振子输入能量；反向时驱动力做负功，振子输出能量。输入功率的大小可由 $F\cdot v$ 计算。设想在振子固有频率、阻尼大小、驱动力幅值 F_0 均不变的情况下，仅改变驱动力的频率 ω，则不难得知，如果满足$\omega m-\dfrac{k}{\omega}=0$时，振子的速度幅值 v_{max} 就有最大值。

由$\omega m-\dfrac{k}{\omega}=0$可得：

$\omega=\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$v_{max}=\dfrac{F_0}{\gamma}=\dfrac{F_0}{2\delta m}$，这时 tg$\varphi\to\infty$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

由此可见，当驱动力的频率等于振子固有频率时，驱动力将与振子速度始终保持同相，于是驱动力在整个周期内对振子做正功，始终给振子提供能量，从而使振子速度能获得最大的幅值。这一现象称为速度共振。速度幅值 v_{max} 随 ω 的变化曲线如图 1 所示。

显然 γ 或 δ 值越小，v_{max}~ω 关系曲线的极值越大。描述曲线陡峭程度的物理量一般用锐度表示，其值等于品质因素：

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{f_0}{f_2-f_1} \tag{13}$$

其中 f_0 为 ω_0 对应的频率，f_1、f_2 为 v_{max} 下降到最大值的 0.707 倍时对应的频率值。

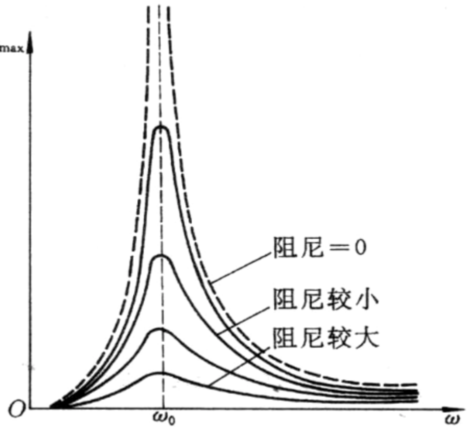

图 1　速度共振曲线

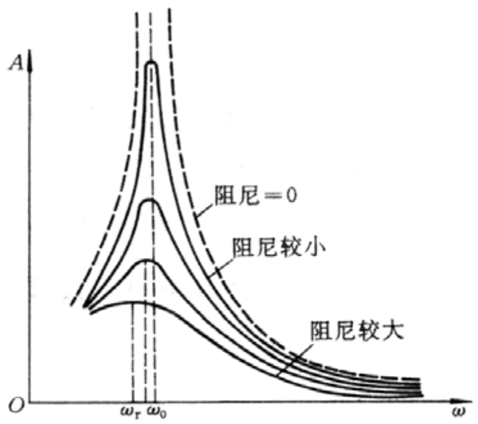

图 2　位移共振曲线

3.2、位移共振

驱动力的频率 ω 为何值时才能使音叉臂的振幅 A 有最大值呢？对式(9)求导并令其一阶导为零，即可求得 A 的极大值及对应的 ω 值为：

$$A=\frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \tag{14}$$

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \tag{15}$$

由此可知，在有阻尼的情况下，当驱动力的圆频率 $\omega=\omega_r$ 时，音叉臂的位移振幅 A 有最大值，称为位移共振，这时的 $\omega<\omega_0$。位移共振的幅值 A 随 ω 的变化曲线如图 2 所示。

由(14)式可知，位移共振幅值的最大值与阻尼 δ 有关。阻尼越大，振幅的最大值越小；阻尼越小，振幅的最大值越大。在很多场合，由于阻尼 δ 很小，发生共振时位移共振幅值过大，从而引起系统的损坏，这是我们需要十分重视的。

比较图 1 和图 2 可知，速度共振和位移共振曲线不完全相同。对于有阻尼的振动系统，当速度发生共振时，位移并没有达到共振。其原因在于，对于作受迫振动的振子在平衡点有最大幅值的速度时，其运动时受到的阻力也达到最大，于是在平衡点上的最大动能并没有能全部转变为回转点上的势能，以致速度幅值的最大并不对应位移振幅的最大．这就是位移共振与速度共振并不发生在同一条件下的原因．显然，如果阻尼很小，两种共振的条件将趋于一致，这一点也可从图 2 的位移共振曲线清楚地看出来。

4、音叉的振动周期与质量的关系

从公式(4) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$ 可知，在阻尼 δ 较小、可忽略的情况下有：

$$T\approx\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{16}$$

这样我们可以通过改变质量 m，来改变音叉的共振频率。我们在一个标准基频为

256Hz 的音叉的两臂上对称等距开孔，可以知道这时的 T 变小，共振频率 f 变大；将两个相同质量的物块 m_X 对称地加在两臂上，这时的 T 变大，共振频率 f 变小。从式(16)可知这时：

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot (m_0 + m_X) \tag{17}$$

其中 k 为振子的劲度系数，k 为常数，它与音叉的力学属性有关。m_0 为不加质量块时的音叉振子的等效质量，m_x 为两个振动臂增加的物块等效质量，如果砝码安装位置固定，可近似认为 m_x 与砝码质量成正比。

由式(17)可见，音叉振动周期的平方与质量成正比。由此可由测量音叉的振动周期来测量未知质量，并可制作测量质量和密度的传感器。

【实验仪器】

音叉受迫振动与共振实验仪包括 260Hz 左右基频的钢质音叉，2 个电磁线圈、磁阻尼装置、4 对加载质量块(由小到大为 5g 一对、10g 两对、15g 一对，)、测试架、音频信号发生器、2V 交流数字电压表和数字频率计等。

图 3 音叉受迫振动与共振实验仪

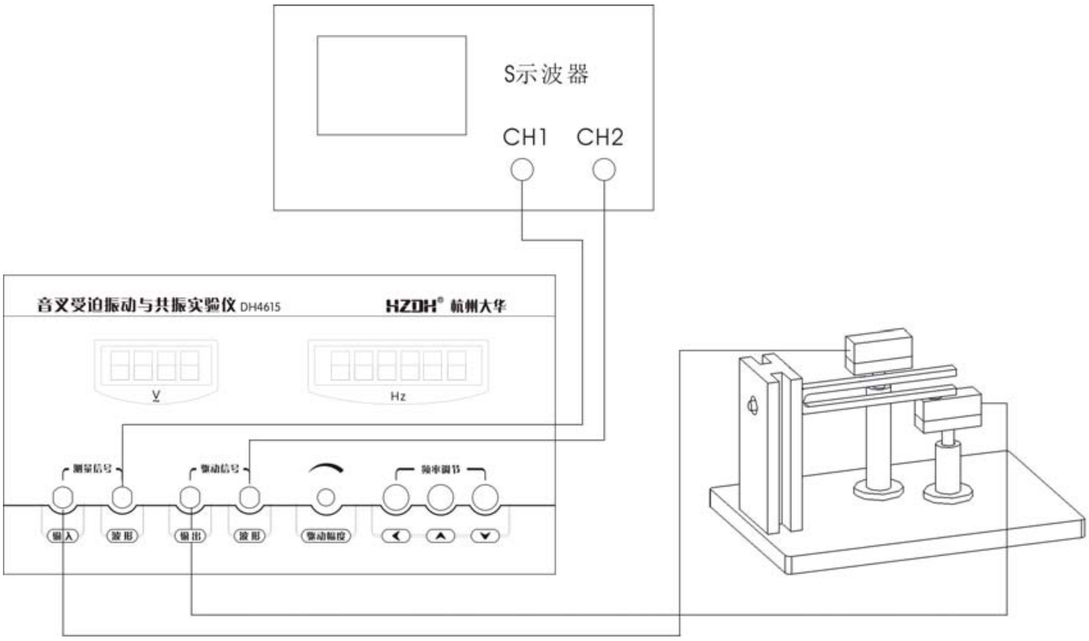

图 4 实验装置连线图(用示波器观测时的连线图)

【实验内容及步骤】

1、将实验架上的驱动器连线接至实验仪的驱动信号的“输出”端，实验架上的接收器连线接至实验仪的测量信号“输入”端。驱动波形和接收波形的输出可以连接到示波器上观测。测量信号“输入”端内部与交流电压表相连。调节驱动器和接收器到音叉臂的距离，连接好仪器后接通电源，使仪器预热 10min。

2、测量无阻尼状态和有阻尼状态下音叉的速度-幅频特性曲线。

测量时将驱动器和接收器摆放到适当位置，应先找到大概的共振频率，同时选择一个合适的驱动信号输出幅度(选定后，整个实验过程中必须保持不变)，然后按照频率由低到高改变驱动信号的频率 f，读取对应的数字电压表示值 U，填入数据表格。注意在共振频率附近数据应密集一些，确保找准共振频率。

无(有)阻尼状态下音叉的速度-幅频特性实验数据表格

驱动信号输出幅度：

f(Hz)				……				
U(V)				……				

3、改变音叉质量，测量所加质量 m_x 与共振频率 f 之间的关系

在无阻尼状态下，将不同质量块(5g、10g、15g、20g、25g)分别加到音叉双臂指定的位置上，并用螺丝旋紧。测出音叉双臂对称加相同质量物块时，相对应的共振频率。记录 m_x~f 关系数据，填入数据表格。

音叉共振频率 f 与所加质量 m_x 之间关系实验数据表格

m_x(g)						
f(Hz)						

【数据处理】

1、找出音叉在无阻尼和有阻尼两种状态下作受迫振动时的共振频率 f_0 及相应的 U_{max}。

2、在坐标纸上绘制无阻尼和有阻尼两种状态下的 U~f 关系曲线。从图上求出两个半功率点 f_1 和 f_2 的值，代入公式计算音叉在无阻尼和有阻尼两种状态下振动曲线的锐度(Q 值)。并对结果进行分析。

3、绘制音叉振动周期平方 T_2 与所加质量 m_x 的关系图，并分析其特点和意义。

【注意事项】

1、实验中所测量的共振曲线是在驱动力恒定的条件下进行的，因此实验中测量共振曲线时，都要保持信号发生器的输出幅度不变。

2、加不同质量砝码时注意每次的位置一定要固定，因为不同的位置会引起共振频率的变化。

3、驱动线圈和接收线圈距离音叉臂的位置要合适，距离近容易相碰，距离远信号

变小。测量共振曲线时驱动线圈和接收线圈的位置确定后不能再移动，否则会造成曲线失真。

【思考题】

1、平移阻尼块的位置，可能会发生什么现象？

2、在重复测量时，前后的实验结果可能不完全一致，可能的原因有哪些？

【参考文献】

[1] 陈思，陈骏逸 音叉作受迫振动的速度共振幅频响应曲线的研究. 实验技术与管理. 2007， 12，48－50

[3] 沈元华，陆申龙. 基础物理实验. 高等教育出版社. 2005

[4] 赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程: 力学. 高等教育出版社. 2000