TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ
BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN
TS. Tống Thành Trung

GIÁO TRÌNH TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

Giáo trình
TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
Địa chỉ: 207 Đường Giải Phóng, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Website: http://nxb.neu.edu.vn E-mail: nxb@neu.edu.vn
Điện thoại/Fax: (024) 36280280/Máy lẻ: 5722

Chịu trách nhiệm xuất bản: **TS. NGUYỄN ANH TÚ**
Giám đốc Nhà xuất bản
Chịu trách nhiệm nội dung: **GS.TS. NGUYỄN THÀNH ĐỘ**
Tổng biên tập
Biên tập: TRỊNH THỊ QUYÊN
Chế bản: TỐNG THÀNH TRUNG
Thiết kế bìa: VƯƠNG NGUYỄN
Đọc sách mẫu: TRỊNH THỊ QUYÊN

Số xác nhận ĐKXB: 2723-2022/CXBIPH/26-211/ĐHKTQD
Mã ISBN: 978-604-330-400-8
QĐXB Số: 530/QĐ-NXBĐHKTQD, ngày 28 tháng 11 năm 2022
Định dạng: PDF; Dung lượng: 3.0 (MB)
Địa chỉ phát hành sách điện tử: enxb.neu.edu.vn; drm.neu.edu.vn
Lưu chiểu Quý IV năm 2022.

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Rời rạc (discrete) là gì?

Tôi xin trả lời: Rời rạc ngược lại với liên tục. Tập các số nguyên là rời rạc. Tập các số thực là liên tục. Những đối tượng được coi là rời rạc nếu nó bao gồm một số hữu hạn các bộ phận tối giản (không thể làm nhỏ hơn). Một tập hợp vô hạn nào đó, chẳng hạn như tập các số tự nhiên, cũng được coi là rời rạc.

Với mục đích viết một giáo trình làm tài liệu giảng dạy, học tập học phần Toán rời rạc cho Trường Đại học Kinh tế Quốc dân và giúp sinh viên hiểu những kiến thức cơ bản của Toán rời rạc, áp dụng những kiến thức đó vào chuyên ngành của mình, đồng thời giải quyết một số bài toán thường gặp trong cuộc sống, tác giả đã chọn lọc những nội dung cơ bản, cần thiết cho sinh viên các chuyên ngành Hệ thống thông tin quản lý, Khoa học máy tính, Công nghệ thông tin, Thương mại điện tử và Công nghệ tài chính. Dựa vào tầm quan trọng và tính ứng dụng của nội dung kiến thức, chúng tôi chọn lọc các chủ đề chính để trình bày trong giáo trình này là: Lý thuyết tổ hợp, Thuật toán, Lý thuyết đồ thị, Cây và Đại số Boole. Bởi vì, đồ thị biểu diễn được rất nhiều cấu trúc và nhiều bài toán thực tế có thể được biểu diễn bằng đồ thị. Ví dụ, cấu trúc liên kết của một website có thể được biểu diễn bằng một đồ thị có hướng. Lý thuyết đồ thị được ứng dụng nhiều trong phân tích lưới và trong nghiên cứu phân tử. Do vậy, sự phát triển của các thuật toán xử lý đồ thị là một trong các mối quan tâm chính của khoa học máy tính. Một số chủ đề không tách rời Toán rời rạc đó là Tập hợp và Hàm. Các ý tưởng của quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự cũng được sử dụng trong Toán học và Khoa học máy tính. Các nguyên lý về lôgic cần thiết cho các nhà quản lý trong tất cả các lĩnh vực. Vì vậy, những chủ đề cần thiết của Toán học rời rạc cần được tìm hiểu ngoài Đồ thị và Cây là: Tập hợp, hàm và các quan hệ hai ngôi, Lôgic và Đại số Boole.

Toán rời rạc đã phát triển rất nhanh trong những thập kỷ gần đây. Một phần lý do của sự phát triển đó là các máy tính kỹ thuật số hoạt động dựa trên tính rời rạc. Một máy tính không thể biểu diễn tất cả các số thực, nhưng có thể biểu diễn một số tập hợp rất lớn các số thực. Nó thực hiện các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, so sánh, ..., trong phạm vi các tập hợp số thực đó. Nghiên cứu về máy tính đòi hỏi kiến thức về Toán rời rạc. Bạn sẽ thấy những cách sử dụng Toán rời rạc như vậy trong cuốn sách này. Toán rời rạc cũng được áp dụng trong kinh doanh, khoa học xã hội, kỹ thuật điện, mật mã và trong nhiều lĩnh vực khác.

Cuốn sách này trình bày những nội dung cơ bản của lý thuyết Toán rời rạc ứng dụng trong công nghệ thông tin và tin học. Cuốn sách được hoàn thiện dựa trên những bài soạn của tác giả khi giảng dạy cho 9 khóa sinh viên (từ khóa K54 đến K62) chuyên ngành Hệ thống thông tin quản lý, Khoa học máy tính và công nghệ thông tin của Trường Đại học Kinh tế Quốc dân.

Trong giáo trình này, đa số các định lý quan trọng được phát biểu nội dung và chứng minh chi tiết, còn một số định lý chỉ được phát biểu kết quả (không có chứng minh) nhưng được minh họa bằng những ví dụ để sinh viên hiểu, dễ áp dụng. Tác giả đưa ra khá nhiều các ví dụ minh họa các định nghĩa, định lý để bạn đọc hiểu rõ và áp dụng tốt những nội dung đó trong lĩnh vực chuyên môn của mình và ứng dụng những kiến thức đó trong thực tế cuộc sống. Nội dung cuốn sách là kiến thức cơ sở cho các khóa học về khoa học máy tính, chẳng hạn khóa học cấu trúc dữ liệu, thuật toán, lý thuyết tự động hóa,...

Kiến thức nền tảng cần có để đọc cuốn sách này là Toán cho các nhà kinh tế và Nhập môn Công nghệ thông tin. Môn Toán rời rạc có thể dạy cho sinh viên năm thứ nhất hoặc năm thứ hai. Dựa trên các nội dung cơ bản của môn Toán rời rạc và thời lượng giảng dạy học phần, cuốn sách được tác giả cấu trúc thành 6 chương như sau:

Chương 1: Lôgic, Tập hợp và Ánh xạ

Chương 2: Thuật toán

Chương 3: Đếm các phần tử

Chương 4: Lý thuyết đồ thị

Chương 5: Cây

Chương 6: Đại số Boole

Cuối mỗi chương tác giả đưa ra một hệ thống bài tập đa dạng về mức độ và tương ứng với các nội dung lý thuyết đã trình bày. Phần cuối của cuốn sách tác giả trình bày những hướng dẫn hoặc đáp số một số bài tập chọn lọc.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Bộ môn Toán cơ bản, Khoa Toán kinh tế, Trường Đại học Kinh tế Quốc dân đã có những góp ý quý báu cả về nội dung và hình thức giáo trình. Cảm ơn Phòng Quản lý Khoa học, Phòng Quản lý Đào tạo và Nhà xuất bản Trường Đại học Kinh tế Quốc dân với những giúp đỡ nhiệt tình, nhanh chóng về thủ tục hành chính để cuốn sách sớm đến với bạn đọc. Cuốn sách lần đầu tiên được biên soạn nên không tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc xa gần để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn trong những lần tái bản sau. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ email của TS. Tống Thành Trung: trungtt@neu.edu.vn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

TS. Tống Thành Trung

Chương 1

LÔGIC, TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

Nói một cách trực quan, lôgic là quy tắc mà dựa vào đó để xem xét các phương pháp lập luận. Lôgic cung cấp các quy tắc và kỹ thuật để xác định lập luận nào là đúng, lập luận nào là sai. Trong cuộc sống hằng ngày, chúng ta sử dụng các lập luận để chứng minh những quan điểm khác nhau. Chẳng hạn, một học sinh muốn chứng minh với bố mẹ là mình học giỏi trong năm học thì cần chỉ ra kết quả học tập và nhận xét của giáo viên cuối năm học đó. Hay một công ty muốn chứng minh lợi nhuận của mình thì cần chỉ ra tổng doanh thu và tổng chi phí.

Trong một số dạng lôgic, người ta quan tâm đến việc phân biệt lập luận tốt, lập luận không tốt và việc dạy lý luận thế nào cho tốt, còn Lôgic toán học và Triết học phân tích (analytical philosophy) người ta lại nhấn mạnh vào lôgic như là một đối tượng nghiên cứu riêng. Do vậy, Lôgic toán học và Triết học phân tích được nghiên cứu ở một mức độ trừu tượng hơn.

Lôgic toán học được phân chia thành hai lĩnh vực nghiên cứu khác nhau: thứ nhất là áp dụng các kỹ thuật trong ngôn ngữ hình thức vào toán học và lập luận toán học, và thứ hai, theo một hướng khác, sự áp dụng các kỹ thuật trong toán học vào việc biểu diễn và phân tích lôgic hình thức.

Trong toán học và khoa học máy tính, lôgic toán hay lôgic được sử dụng để chứng minh các kết quả. Cụ thể, trong toán học chúng ta sử dụng lôgic hoặc lập luận lôgic để chứng minh các định lý còn trong khoa học máy tính chúng ta sử dụng lôgic hoặc lập luận lôgic để chứng minh tính đúng đắn của các chương trình và các định lý. Chính vì tầm quan trọng và sự gần gũi của lôgic mệnh đề với thực tế cuộc sống nên chúng tôi đưa các kiến thức về mệnh đề vào bài đầu Chương 1.

Trong chương này chúng tôi không những trình bày về lôgic mệnh đề mà còn trình bày về lý thuyết tập hợp, bởi vì ngày nay ngôn ngữ tập hợp đã trở thành một công cụ quan trọng của nhiều lĩnh vực toán học. Nó cung cấp cơ sở để mô tả chính xác các khái niệm phức tạp trong toán học hiện đại.

Chủ đề thứ ba được đề cập đến trong Chương 1 là ánh xạ. Đây là khái niệm mở rộng của khái niệm hàm số mà các bạn sinh viên đã được làm quen từ phổ thông trung học và khái niệm này thể hiện mối quan hệ giữa hai tập hợp.

1.1. LÔGIC VÀ MỆNH ĐỀ

1.1.1. *Mệnh đề*

Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1.1. *Mệnh đề là một câu khẳng định có tính chất hoặc đúng hoặc sai, không xảy ra trường hợp vừa đúng vừa sai.*

Ví dụ 1.1.1. *Các câu khẳng định: A: "Hôm nay, trời có mưa."; B: "2 là số nguyên tố"; C: "$2 + 2 = 3$" là những mệnh đề.*

Ta lần lượt kí hiệu là Mệnh đề A; Mệnh đề B; Mệnh đề C.

Câu phát biểu: "Không biết hôm nay trời nắng hay mưa?" không là mệnh đề, vì nó không phải là câu khẳng định và không có tính chất chỉ xảy ra một trong hai trường hợp hoặc đúng hoặc sai.

Câu phát biểu: "Có thể hôm nay là thứ sáu" không là mệnh đề, vì đây là câu phỏng đoán, không phải là câu khẳng định nên phát biểu này cũng có thể đúng, cũng có thể sai chứ không xảy ra chỉ một trường hợp hoặc đúng hoặc sai.

Câu phát biểu: "Thời tiết đẹp làm sao!" không là mệnh đề vì đó là một câu cảm thán nói về cảm nhận của cá nhân người phát biểu, không xét đến tính đúng sai trong trường hợp này.

Một mệnh đề đúng thì ta gán cho nó giá trị chân lý bằng 1 (hay gán bằng chữ T viết tắt của chữ True).

Mệnh đề sai thì ta gán cho mệnh đề đó giá trị chân lý bằng 0 (hay gán bằng chữ F viết tắt của chữ False).

Ví dụ 1.1.2. *Ta xét các câu phát biểu sau:*

i) A: "7 là một số nguyên."

ii) B: "$\sqrt{7}$ là một số nguyên."

iii) C: "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam."

Mỗi câu phát biểu trên đều là câu khẳng định và nó chỉ mang một tính chất hoặc là đúng hoặc là sai, không xảy ra trường hợp vừa đúng vừa sai. Do đó, cả ba phát biểu trên là những mệnh đề. Câu $i)$ là đúng, câu $ii)$ là sai và câu $iii)$ là đúng. Vậy, ta nói mệnh đề A và C là những mệnh đề đúng và sẽ gán giá trị chân lý cho A và C là 1 (hay T). Mệnh đề B được gán giá trị chân lý là 0 (hay F).

Các phép toán đối với mệnh đề:

a. Phủ định: Cho A là một mệnh đề. Câu phát biểu "Không phải là A" là một mệnh đề khác, được gọi là mệnh đề phủ định của A.

Kí hiệu: $\overline{A}$

Ví dụ 1.1.3. *Cho mệnh đề A: "Hôm nay là thứ 6". Câu phát biểu trái nghĩa với A là: "Hôm nay không phải là thứ 6", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề A.*

Bảng giá trị chân lý:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

b. Phép hội: Giả sử A và B là hai mệnh đề cho trước. Mệnh đề "A và B", kí hiệu $A \wedge B$, đúng khi cả A và B cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại được gọi là mệnh đề hội của A và B.

Phép toán tạo ra mệnh đề hội từ hai hay nhiều mệnh đề cho trước được gọi là phép hội của các mệnh đề đó.

Ví dụ 1.1.4. *Cho mệnh đề A: "Lớp toán rời rạc học tại phòng B203 có 20 sinh viên nam" và mệnh đề B: "Lớp toán rời rạc học tại phòng B203 có 25 sinh viên nữ".*

Khi đó, ta có mệnh đề $A \wedge B$: "Lớp toán rời rạc học tại phòng B203 có 20 sinh viên nam và 25 sinh viên nữ".

Ví dụ 1.1.5. *Xét mệnh đề A: "p là số nguyên chẵn" và mệnh đề B: "p là số nguyên chia hết cho 3". Khi đó, ta có mệnh đề $A \wedge B$:*

"p là số nguyên chẵn và chia hết cho 3".

c. Phép tuyển: Cho 2 mệnh đề A và B. Mệnh đề "A hoặc B", kí hiệu $A \vee B$, là một mệnh đề sai khi cả A và B cùng sai và đúng trong các trường hợp còn lại. Mệnh đề $A \vee B$ được gọi là mệnh đề tuyển của hai mệnh đề A và B.

Phép toán tạo ra mệnh đề tuyển từ hai hay nhiều mệnh đề cho trước được gọi là phép tuyển.

Ví dụ 1.1.6. *Giả sử ta có mệnh đề A: "Hôm nay, sinh viên lớp hệ thống thông tin học môn Toán rời rạc" và mệnh đề B: "Hôm nay, sinh* *viên lớp hệ thống thông tin được nghỉ học." Khi đó, mệnh đề $A \vee B$: "Hôm nay, sinh viên lớp hệ thống thông tin học môn Toán rời rạc hoặc được nghỉ học".*

Ví dụ 1.1.7. *Cho mệnh đề A và B như sau:*
A: "$3^2 + 4^3$ là số nguyên chẵn".
B: "$3^2 + 4^3$ là số nguyên lẻ".
Khi đó, mệnh đề $A \vee B$ là: "$3^2 + 4^3$ là số nguyên chẵn hoặc lẻ".

Bảng giá trị chân lý của mệnh đề tuyển và hội:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

d. Phép tuyển loại:

Mệnh đề tuyển loại của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề, được ký hiệu $A \oplus B$, mà nó chỉ đúng khi mệnh đề A đúng, B sai hoặc B đúng nhưng A sai, còn sai trong các trường hợp còn lại. Tức là, mệnh đề tuyển loại của hai mệnh đề chỉ đúng khi và chỉ khi hai mệnh đề đó không cùng tính đúng sai.

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ví dụ 1.1.8. *Xét hai mệnh đề A: " Hôm nay là thứ hai" , B: " Hôm nay trời nắng". Khi đó, mệnh đề tuyển loại của A và B, kí hiệu $A \oplus B$, là mệnh đề chỉ đúng khi một trong hai trường hợp sau xảy ra: " Hôm nay là thứ hai và hôm nay trời không nắng" hoặc " Hôm nay không phải là thứ hai và hôm nay trời nắng", còn sai trong các trường hợp còn lại.*

1.1.2. *Lôgic*

Lôgic toán là một nhánh nhỏ của toán học có mối liên hệ chặt chẽ với các nền tảng của toán học, lý thuyết khoa học máy tính và lôgic triết học. Lĩnh vực này bao gồm cả nghiên cứu toán học về lôgic và các ứng dụng của lôgic hình thức cho các lĩnh vực toán học khác. Các chủ đề thống nhất trong lôgic toán học bao gồm nghiên cứu sức mạnh biểu đạt của các hệ thống hình thức và sức mạnh suy diễn của các hệ thống chứng minh hình thức. Lôgic toán thường được chia thành các lĩnh vực lý thuyết mệnh đề, lý thuyết mô hình, lý thuyết đệ quy và lý thuyết chứng minh. Các lĩnh vực này chia sẻ các kết quả cơ bản về lôgic, đặc biệt là lôgic bậc nhất và khả năng xác định. Kể từ khi ra đời, lôgic toán góp phần thúc đẩy việc nghiên cứu các cơ sở của toán học. Nghiên cứu này bắt đầu vào cuối thế kỷ 19 với sự phát triển của các khung tiên đề cho hình học, số học và giải tích.

Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1.2. *Lôgic học là một ngành khoa học nghiên cứu các nguyên tắc và các tiêu chí của suy luận đúng đắn. Nó là khoa học về các nguyên tắc hình thức của lý luận.*

Một trong các đối tượng của lôgic học là các mệnh đề và mối quan hệ giữa các mệnh đề. Các mối quan hệ giữa các mệnh đề trong lôgic được thể hiện bởi các phép toán lôgic.

Ví dụ 1.1.9. *Câu phát biểu: "Dịch Covid-19 xảy ra nên chúng tôi phải học online" biểu thị mối liên hệ nhân quả giữa mệnh đề A: "Dịch Covid-19 xảy ra" và mệnh đề B: "chúng tôi phải học online", do mệnh đề A xảy ra nên mệnh đề B cũng xảy ra. Ta nói câu phát biểu này có tính lôgic.*

Các phép toán lôgic

a. Phép kéo theo:

Định nghĩa 1.1.3. *Cho hai mệnh đề A và B. Mệnh đề kéo theo, kí hiệu $A \Rightarrow B$, là một mệnh đề mới được thành lập từ hai mệnh đề đã cho và có tính chất nó chỉ sai khi A đúng và B sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại.*

Trong mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$, mệnh đề A được gọi là giả thiết, mệnh đề B được gọi là kết luận. Bảng giá trị chân lý:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ví dụ 1.1.10. *Ta xét phát biểu sau: " Nếu hôm nay là thứ bảy thì tôi sẽ đi đá bóng."*

Ta đặt A và B là các mệnh đề tương ứng với các phát biểu sau:

A: " Hôm nay là thứ bảy"

B: " Tôi sẽ đi đá bóng."

Khi đó, phát biểu đã cho có dạng $A \Rightarrow B$. Phát biểu này gọi là mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$.

Ví dụ 1.1.11. *Giả sử A và B là hai mệnh đề cho trước và C là mệnh đề phát biểu dưới dạng công thức:*

$$\overline{A \wedge B} \Rightarrow (A \vee B).$$

Ta có bảng giá trị chân lý của mệnh đề C như sau:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{(A \wedge B)}$	$A \vee B$	$C = \overline{A \wedge B} \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0

b. Phép tương đương:

Định nghĩa 1.1.4. *Cho hai mệnh đề A và B. Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ (A tương đương với B) là một mệnh đề mới được thành lập từ hai mệnh đề đã cho và có tính chất chỉ đúng khi A và B có cùng giá trị chân lý, sai trong các trường hợp còn lại.*

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	0

Ví dụ 1.1.12. *Giả sử A và B là hai mệnh đề cho trước. Chứng minh rằng mệnh đề $A \Rightarrow B$ tương đương với mệnh đề $\overline{A} \wedge B$.*

Để chứng minh hai mệnh đề tương đương, ta lập bảng giá trị chân lý và sẽ nhận thấy hai mệnh đề đó cùng các giá trị chân lý trong mỗi trường hợp tương ứng.

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

1.1.3. *Lượng từ và công thức*

a. Lượng từ $\exists, \forall$.

Lượng từ “Tồn tại”, kí hiệu “$\exists$”, sẽ có ít nhất một phần tử thỏa mãn tính chất; điều kiện hay mệnh đề được viết sau chữ tồn tại.

Lượng từ “Với mọi”, kí hiệu “$\forall$”, có nghĩa là tất cả các đối tượng (các phần tử) đều thỏa mãn tính chất; điều kiện hay mệnh đề được viết sau chữ “với mọi”.

b. Công thức:

Định nghĩa 1.1.5. *Công thức toán học là một quan hệ hoặc quy tắc toán học được biểu diễn bằng những kí hiệu toán học.*

Một công thức toán học thường kết nối hai hay nhiều đại lượng bằng dấu bằng hay dấu bất đẳng thức. Khi biết giá trị của một số đại lượng trong công thức, ta có thể tính được giá trị của các đại lượng còn lại.

Ví dụ 1.1.13. *Diện tích của hình chữ nhật bằng tích chiều dài nhân với chiều rộng. Ta thường viết dưới dạng công thức là $S = x \times y$, trong đó S kí hiệu là diện tích, x kí hiệu là chiều dài, y kí hiệu chiều rộng.*

1.1.4. *Phép toán đối với các xâu bit*

Máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit là một kí tự 0 hoặc 1 (binarydigit).

Biến Boole (BooleanVariable). Một biến được là BooleanVariable nếu nó chỉ có hai giá trị là đúng hoặc sai.

Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit, đó là dãy ký tự gồm các số 0 và số 1.

Định nghĩa 1.1.6. *Một xâu bit (hoặc một xâu nhị phân) là dãy gồm một hoặc nhiều bit (tức là một dãy số chỉ gồm số 0 và 1). Chiều dài của xâu là số các bit trong xâu đó.*

Ví dụ 1.1.14. *Dãy* 1010100011 *là một xâu bít có chiều dài bằng 10.*

Các phép toán đối với xâu bit là OR, AND, XOR, NOT tương ứng với các phép toán đối với các mệnh đề: $\vee$, $\wedge$, $\oplus$, phép phủ định.

Các phép toán đối với xâu bit là OR, AND, XOR được thực hiện trên các xâu bit có cùng độ dài dựa trên các phép toán OR, AND, XOR giữa hai bit tương ứng theo bảng sau:

		AND	OR	XOR
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	0

Ví dụ 1.1.15.

Xâu 1:	0110110110
Xâu 2:	1100011101
OR:	1110111111
AND:	0100010100
XOR:	1010101011

Ví dụ 1.1.16.

Xâu 1:	11010111010101
Xâu 2:	01100011011010
OR:	11110111011111
AND:	01000011010000
XOR:	10110100001111

1.2. SƠ LƯỢC VỀ LÝ THUYẾT TẬP HỢP

1.2.1. *Một số khái niệm cơ bản*

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học. Tập hợp không được định nghĩa, mà chỉ được mô tả như là sự tụ tập của một lớp các đối tượng nào đó. Mỗi đối tượng của tập hợp được gọi là một phần tử của tập hợp đó.

Kí hiệu tập hợp bởi các chữ cái in, chẳng hạn $A, B, C, X, Y, \ldots$

Ví dụ 1.2.1.

$$A = \{2, 4, 6, 8\}\,; B = \{1, 2, 3, 4, ...\}\,;$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Khi mô tả một tập hợp, ta thường sử dụng cách liệt kê tất cả các phần tử hoặc nêu tính chất đặc trưng của tập hợp để phân biệt phần tử bất kì thuộc tập hợp hoặc không thuộc tập hợp đó.

Một tập hợp có hữu hạn phần tử được gọi là tập hữu hạn. Tập hợp có vố số phần tử được gọi là tập vô hạn.

Cho tập hợp hữu hạn A. Số phần tử trong tập A được gọi là lực lượng (hay gọi là bản số) của tập A.

Kí hiệu là $|A|$.

Tập con: Ta nói tập hợp A là tập con của tập B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc tập B. Kí hiệu: $A \subseteq B$.

Trường hợp A là tập con của tập B và $A \neq B$ thì A được gọi là tập con không tầm thường (hay tập con thực sự) của tập B và viết $A \subset B$.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu $\emptyset$. Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Tập hợp bằng nhau: Ta nói tập hợp A bằng tập hợp B nếu và chỉ nếu A là tập con của B và ngược lại.

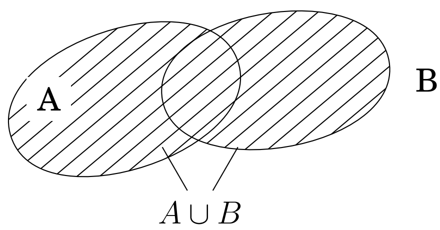
Ta kí hiệu: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

1.2.2. *Các phép toán tập hợp*

a. Một số phép toán đối với các tập hợp

Phép hợp:

Định nghĩa 1.2.1. *Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.*



Kí hiệu: $A \cup B$.

Ví dụ 1.2.2.
a) Cho các tập hợp $X = \{a, b, c, d, e\}$*;* $Y = \{c, d, e, f, g, h\}$ *và* $Z = \{h, p, q, r\}$*. Khi đó,* $X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$*,*

$$X \cup Z = \{a, b, c, d, e, h, p, q, r\},$$

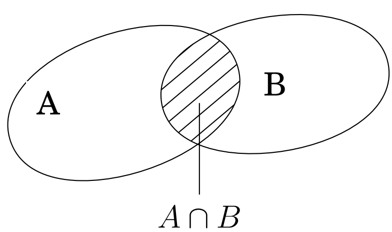
$$Y \cup Z = \{c, d, e, f, g, h, p, q, r\}.$$

b) Cho A *là tập các số nguyên không dương, tức là* $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$*. Khi đó,*

$$A \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}.$$

Phép giao:

Định nghĩa 1.2.2. *Giao của hai tập hợp* A *và* B *là một tập hợp gồm tất cả các phần tử chung của* A *và* B*.*



Kí hiệu: $A \cap B$

Ví dụ 1.2.3. *Cho các tập hợp* $X = \{a, b, c, d, e\}$; $Y = \{c, d, e, f, g, h\}$ *và* $Z = \{h, p, q, r\}$. *Khi đó,*

$$X \cap Y = \{c, d, e\},$$

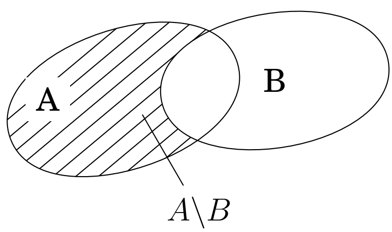
$$X \cap Z = \emptyset,$$

và $Y \cap Z = \{h\}$.

Hai tập hợp A và B được gọi là rời nhau nếu $A \cap B = \emptyset$.

Phép hiệu:

Định nghĩa 1.2.3. *Hiệu tập hợp* A *với tập hợp* B *là một tập hợp, kí hiệu* $A \backslash B$ *(hoặc* $A - B$*), gồm tất cả các phần tử thuộc tập hợp* A *nhưng không thuộc tập hợp* B.



Khi $B \subseteq A$ thì hiệu của tập hợp A với tập hợp B được gọi là phần bù của tập hợp B trong tập hợp A.

Kí hiệu phần bù của tập hợp B trong tập hợp A là: C_A^B hay $\overline{B}$.

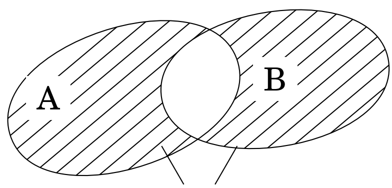
Ví dụ 1.2.4. *Cho hai tập hợp* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *và* $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. *Khi đó, ta có:*

$$X \backslash Y = \{1, 2\} \text{ và } Y \backslash X = \{5, 6, 7\}.$$

Từ đó, ta nhận thấy: Phép toán hiệu của hai tập hợp không có tính chất giao hoán.

Hiệu đối xứng:

Định nghĩa 1.2.4. *Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B là hợp của tập $A \setminus B$ và $B \setminus A$.*



$(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Kí hiệu: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Ví dụ 1.2.5. *Xét hai tập hợp X và Y trong ví dụ 1.2.4. Khi đó:*

$$X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = \{1, 2, 5, 6, 7\}.$$

Tích Đề-các:

Định nghĩa 1.2.5. *Tích Đề-các của tập hợp A với tập hợp B là một tập hợp chứa tất cả các cặp phần tử có thứ tự (a, b) sao cho $a \in A$ và $b \in B$ và được kí hiệu như sau: $A \times B = \{(a, b) : \quad a \in A,\ b \in B\}$.*

Như vậy, tích Đề-các của tập hợp A với tập hợp B là một tập hợp mới chứa tất cả các cặp phần tử có thứ tự (a, b) sao cho $a \in A$ và $b \in B$.

Đặc biệt, khi $A = B$ thì ta có tập bình phương Đề-các: $A^2 = A \times A$.

Ví dụ 1.2.6. *Cho hai tập hợp $X = \{1, 2\}$ và $Y = \{3, 4, 5\}$. Khi đó, ta có các tích Đề-các:*

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

Nhận xét: Từ Ví dụ 1.2.6, ta suy ra $X \times Y \neq Y \times X$, tức là phép toán tích Đề-các của hai tập hợp không có tính giao hoán.

b. Một số tính chất

1) Cho X, Y và Z là các tập con của tập U. Khi đó, các khẳng định sau đúng:

a) Nếu $X \subseteq Y$ thì $X \cup Y = Y,\ X \cap Y = X$.

b) Luật đồng nhất: $X \cup \emptyset = X,\ X \cap \emptyset = \emptyset$.

c) Luật lũy đẳng: $X \cup X = X,\ X \cap X = X$.

d) Luật giao hoán: $X \cup Y = Y \cup X,\ X \cap Y = Y \cap X$.

e) Luật kết hợp:

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z),$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z).$$

f) Luật phân phối:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

g) Luật nuốt: $X \cap (X \cup Y) = X,\quad X \cup (X \cap Y) = X$.

2) Ta đã biết phép toán hợp, giao, hiệu đối xứng của hai tập hợp có tính chất giao hoán, nhưng phép toán hiệu và tích Đề-các của hai tập hợp không có tính giao hoán. Tức là, nói chung $A \backslash B \neq B \backslash A$ và $A \times B \neq B \times A$.

3) Công thức De Morgan

$$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$$

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B).$$

Tổng quát:

$$X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash A_i), \qquad X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)$$

1.2.3. *Biểu diễn tập hợp trên máy tính*

Ta đã biết nhiều phương pháp biểu diễn các tập hợp trên máy tính, chẳng hạn:

a. Phương pháp biểu diễn các tập hợp trên máy tính bằng cách lưu trữ các phần tử của nó theo cách không sắp thứ tự. Phương pháp này có nhược điểm là khi thực hiện các phép toán hợp, giao, phần bù của các tập hợp sẽ phức tạp và mất thời gian.

b. Phương pháp biểu diễn các tập hợp trên máy tính bằng cách lưu trữ các phần tử của nó dưới dạng sắp có thứ tự (sắp xếp tăng dần hay giảm dần) các phần tử của tập vũ trụ. Ưu điểm của phương pháp biểu diễn này là làm cho việc tính nghiệm tổ hợp các tập hợp trở nên dễ dàng hơn.

Mỗi phương pháp biểu diễn trên đều có những ưu nhược điểm riêng. Việc chọn phương pháp biểu diễn tập hợp trên máy tính theo cách nào thì cần dựa vào tính hiệu quả trong việc thực hiện các phép toán đối với tập hợp, thời gian thực hiện các phép toán đó cũng như dung lượng bộ nhớ.

Ví dụ 1.2.7. *Giả sử $\mathcal{U}$ là một tập hữu hạn ($\mathcal{U}$ có kích thước hợp lý để số phần tử của $\mathcal{U}$ không lớn hơn bộ nhớ máy tính).*

Trước hết ta cần sắp xếp các phần tử của $\mathcal{U}$ (theo thứ tự tăng dần hay giảm dần), chẳng hạn a_1, a_2, $\ldots$, a_n, sau đó biểu diễn tập con A của $\mathcal{U}$ bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i của xâu này bằng 1 nếu $a_i \in A$ và bằng 0 khi $a_i \notin A$.

Khi biểu diễn tập $\mathcal{U}$ dưới dạng $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tức là ta đã sử dụng phương pháp lưu trữ tập $\mathcal{U}$ theo kiểu sắp thứ tự tăng dần.

Gọi A là tập các số nguyên lẻ thuộc $\mathcal{U}$. Vậy, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ được biểu diễn bằng xâu 1010101010. Chiều dài xâu biểu diễn bằng số phần tử của tập $\mathcal{U}$.

Tập $B \subset \mathcal{U}$, B *gồm các số nguyên chẵn thuộc* $\mathcal{U}$. *Khi đó, tập* $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *được biểu diễn bằng xâu* 0101010101.

Tập $C \subset \mathcal{U}$, C *gồm các số thuộc* $\mathcal{U}$ *và bé hơn hay bằng* 5. *Tập* $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *được biểu diễn bằng xâu* 1111100000

Xâu biểu diễn cho tập hợp $A \cup C$ *là:* 1111101010 *và xâu biểu diễn cho tập hợp* $A \cap C$ *là:* 1010100000.

Nếu tập $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \mathcal{U}$ *thì tập* $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *sẽ được biểu diễn bằng xâu bít* 0101010101.

Thực hiện phép toán hợp, giao, hai tập bằng các phép toán Boole trên các xâu bit.

Xâu bit đối $\cup$: OR

Xâu bit đối với giao $\cap$: AND

Ví dụ 1.2.8. *Cho tập hợp* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *được biểu diễn bằng xâu* 1111100000 *và tập hợp* $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *được biểu diễn bằng xâu* 1010101010.

Khi đó, ta có:

Tập hợp $A \cup B$ *được biểu diễn bằng xâu:* 1111101010 *và tập hợp* $A \cap B$ *được biểu diễn bằng xâu* 1010100000.

Tập hợp $A \setminus B$ *được biểu diễn bởi xâu nhị phân* 0101000000.

Chú ý:

+ Để nhận được xâu bit biểu diễn cho hợp của hai tập hợp, ta thực hiện phép tuyển ($\vee$ = OR) hai xâu bit đó.

+ Để nhận được xâu bit biểu diễn cho giao của hai tập hợp, ta thực hiện phép hội ($\wedge$ = AND) hai xâu bit đó.

+ Để nhận được xâu bit biểu diễn cho phần bù của tập hợp A, ta chỉ việc thay số 0 bởi 1 và 1 bởi 0 trong xâu bit biểu diễn tập A.

Ví dụ 1.2.9. *Cho các tập hợp*

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{1, 2, 3, 8\}, B = \{3, 4, 8, 9\}$ *và* $C = \{6, 7, 8, 9\}$.

a) Tìm xâu bit biểu diễn các tập hợp $A \cup B, A \cup B \cup C$.

b) Tìm xâu bit biểu diễn các tập hợp $A \cap B, A \cap B \cap C$.

c) Tìm xâu bit biểu diễn các tập hợp $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.

Giải. Ta có Xâu bit biểu diễn tập hợp A là 1110000100.

Xâu bit biểu diễn tập hợp B là 0011000110.

Xâu bit của biểu diễn tập hợp C là 0000011110.

a) Xâu bit của $A \cup B$ là 1111000110 (hay$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$).

Xâu bit của $A \cup B \cup C$ là 1111011110

(hay $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$).

b) Xâu bit của $A \cap B$ là 0010000100 (hay $A \cap B = \{3, 8\}$).

Xâu bit của $A \cap B \cap C$ là 0000000100 (hay $A \cap B \cap C = \{8\}$).

c) Xâu bit của $\overline{A}$ là 0001111011 (hay $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 9, 10\}$).

Xâu bit của $\overline{B}$ là 1100111001 (hay $\overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 10\}$).

Xâu bit của $\overline{C}$ là 1111100001 (hay $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$).

1.3. ÁNH XẠ VÀ QUAN HỆ HAI NGÔI

1.3.1. *Ánh xạ (Maps)*

Định nghĩa ánh xạ giữa hai tập hợp:

Định nghĩa 1.3.1. *Cho hai tập hợp X và Y. Ánh xạ từ tập X vào Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất một phần tử $y \in Y$.*

$$\begin{aligned} f: \quad & X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tập hợp X được gọi là tập nguồn, tập hợp Y được gọi là tập đích.

Phần tử $y \in Y$ đặt tương ứng với phần tử $x \in X$ qua quy tắc f được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và x được gọi là phần tử tạo ảnh của y.

Tập ảnh: Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $A \subseteq X$, ta gọi tập hợp

$$f(A) = \{f(x) : \quad x \in A\}$$

là tập ảnh của tập hợp A qua ánh xạ f.

Vậy, tập ảnh của một tập hợp A qua ánh xạ f là tập hợp gồm tất cả các phần tử là ảnh của các phần tử thuộc tập A qua ánh xạ f. Tập ảnh của một tập hợp A là một tập con của tập đích.

Tập tạo ảnh: Tập tạo ảnh của tập $B \subset Y$ qua ánh xạ f là tập hợp được kí hiệu và xác định như sau:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Trong trường hợp đặc biệt, tập Y là tập con của tập $\mathbb{R}$ thì ta gọi ánh xạ $f : X \to Y$ là hàm (function), xác định trên X. Khi cả tập X và tập Y là những tập con của tập số thì ta gọi ánh xạ $f : \ X \longrightarrow Y$ là một hàm số.

Một số hàm quan trọng trong Toán rời rạc là hàm sàn và hàm trần. Cho số thực x, hàm sàn của x là phép làm tròn số x thành số nguyên lớn nhất nhưng nhỏ hơn hay bằng x. Hàm trần của x là phép làm tròn x lên thành số nguyên nhỏ nhất, nhưng lớn hơn hay bằng x.

Định nghĩa 1.3.2. *Hàm sàn của x là quy tắc gán cho mỗi số thực x với số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x.*

Kí hiệu: $\lfloor x \rfloor$

Định nghĩa 1.3.3. *Hàm trần của x là quy tắc gán cho mỗi số thực x với số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng x.*

Kí hiệu: $\lceil x \rceil$

Ví dụ 1.3.1. *Ta có các giá trị hàm sàn và hàm trần:* $\lfloor 1,9 \rfloor = 1$*;* $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$*;* $\lceil 1,9 \rceil = 2$*;* $\lceil -3,1 \rceil = -3$*,* $\lceil 5 \rceil = 5$.

Ta có một số tính chất của hàm sàn và hàm trần:

+) $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

+) $x - 1 \le \lfloor x \rfloor \le x$

+) $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$

+) $x \le \lceil x \rceil < \lceil x \rceil + 1$

+) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

+) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

Ví dụ 1.3.2. *Cho các tập hợp* $X = \mathbb{R}$*,* $Y = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$, $A = \{1, 3, 4\}$ *và* $B = \{0\}$. *Xét ánh xạ:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \left[-\tfrac{1}{4}; +\infty\right) \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Tìm tập hợp $f(A)$ *và* $f^{-1}(B)$.

Giải. Ta có, tập ảnh $f(A) = \{f(1), f(3), f(4)\} = \{0, 2, 6\}$; và tập tạo ảnh $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$.

Thực chất của việc tìm tập hợp $f(A)$ là tìm tất cả các phần tử thuộc tập đích $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ mà phần tử đó là ảnh của các phần tử thuộc tập A. Ta gọi $f(A)$ là tập ảnh của tập A qua ánh xạ f. Còn việc tìm tập hợp $f^{-1}(B)$ là tìm các phần tử thuộc tập nguồn sao cho ảnh của nó qua ánh xạ f thuộc tập B. Ta gọi $f^{-1}(B)$ là tập tạo ảnh của B qua ánh xạ f.

Tập hợp

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}. \end{aligned}$$

1.3.2. *Đơn ánh - Toàn ánh - Song ánh*

Định nghĩa 1.3.4. *Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một đơn ánh nếu $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ hay nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì kéo theo $x_1 = x_2$.*

Định nghĩa 1.3.5. *Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu tập ảnh $f(X) = Y$. Tức là, $\forall y \in Y \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y$. Hay nói cách khác, mọi phần tử của tập đích đều là ảnh của ít nhất một phần tử của tập nguồn.*

Định nghĩa 1.3.6. *Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.*

Ví dụ 1.3.3.

a) Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

không phải là đơn ánh vì $f(-1) = f(1)$ và cũng không phải là toàn ánh vì $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

b) $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực không âm, ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

là một đơn ánh nhưng không là toàn ánh vì $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

c) Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

là một toàn ánh vì $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, nhưng không là đơn ánh vì $f(0) = f(\pi)$.

d) Ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, do đó nó là một song ánh.

1.3.3. *Ánh xạ ngược - Tích hai ánh xạ (phép hợp thành)*

Định nghĩa 1.3.7. *Cho hai tập hợp X, Y và một song ánh $f: X \to Y$, với sự tương ứng $x \mapsto y = f(x)$. Khi đó, mỗi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của duy nhất một phần tử $x \in X$ nên ta có một quy tắc khác đặt tương ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Quy tắc đặt tương ứng đó xác định một ánh xạ từ Y vào X. Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của song ánh f và được kí hiệu là:*

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad & Y \to X, \\ & y \mapsto x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Khi các tập hợp $X \subseteq \mathbb{R}$ và $Y \subseteq \mathbb{R}$ thì khái niệm ánh xạ ngược trở thành khái niệm hàm số ngược.

Ví dụ 1.3.4.

a) Hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 2x - 3$ có hàm ngược là:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{y} \mapsto f^{-1}(y) = x = \frac{y+3}{2}.$$

b) Hàm số $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty), x \mapsto y = f(x) = 2^x$ có hàm ngược là:

$$f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \mathrm{y} \mapsto \mathrm{x} = \log_2 y.$$

c) Hàm số $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty), x \mapsto y = f(x) = x^2$ không có hàm ngược vì nó không phải là song ánh.

Chú ý: Ta có thể đặt lại tên biến và ta đánh tráo tên biến x, y cho nhau nên ta cũng coi hàm số $y = \frac{x+3}{2}$ là hàm ngược của hàm số $y = 2x - 3$. Hàm số $y = \log_2(x)$ cũng được coi là hàm ngược của hàm số $y = 2^x$. Điều này có nghĩa là khi nói về các hàm ngược nhau thì ta chỉ quan tâm đến các quy tắc của chúng là ngược nhau và tập nguồn, tập đích đảo cho nhau chứ không quan tâm đến tên gọi các biến độc lập hay biến phụ thuộc.

Định nghĩa 1.3.8. *Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Hợp thành (hoặc tích) của ánh xạ f với ánh xạ g là một ánh xạ, được kí hiệu $g \circ f$ hoặc gf và xác định như sau:*

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & X \to Z \\ & x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Phép hợp thành các ánh xạ có tính chất kết hợp, nghĩa là $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ khi các hợp thành $g \circ f$ và $h \circ g$ xác định.

Ánh xạ $id_X : X \to X$ xác định bởi công thức $id_X(x) = x$, với mọi $x \in X$, được gọi là ánh xạ đồng nhất của X. Nếu $f : X \to Y$, ta có $f \circ id_X = f$ và $id_X \circ f = f$. Dễ dàng thấy rằng hợp thành của hai đơn ánh là một đơn ánh, hợp thành của hai toàn ánh là một toàn ánh. Do đó, hợp thành của hai song ánh là một song ánh. Tình huống ngược lại ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3.1. *Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó, nếu $g \circ f$ là một đơn ánh thì f là đơn ánh; nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.*

Chứng minh mệnh đề này coi như một bài tập.

Ví dụ 1.3.5. *Từ các ánh xạ:*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

Ta có các ánh xạ tích sau:

$$\begin{array}{rcrcl} g\circ f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x^2+1)^3 \end{array} \quad \textit{và} \quad \begin{array}{rcrcl} f\circ g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^6+1. \end{array}$$

Từ ví dụ trên ta suy ra, phép toán tích của hai ánh xạ không có tính chất giao hoán.

1.3.4. *Quan hệ hai ngôi*

Định nghĩa 1.3.9. *Cho hai tập hợp A và B. Một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là một tập con của tích Đề-các $A \times B$.*

Cho S là một quan hệ hai ngôi từ A đến B, tức là $S \subseteq A \times B$. Giả sử $a \in A$, $b \in B$, nếu $(a, b) \in S$ thì ta nói a có quan hệ S với b.

Kí hiệu: aSb

Nếu $(a, b) \notin S$ thì ta nói a không quan hệ S với b. kí hiệu $a\overline{S}b$.

Ví dụ 1.3.6. *Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$. Khi đó, tập hợp $S = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\}$ được gọi là một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B. Ta có, $S \subset A \times B$ và kí hiệu $1S2$, $1S4$, $1S6$.*

Ví dụ 1.3.7. *Cho hai tập hợp:*

$A = \{$ *Hồ Gươm, Chùa Bái Đính, Phố cổ Hội An, Cầu Rồng, Vịnh Hạ Long* $\}$,

$B = \{$ *Ninh Bình, Quảng Ninh, Quảng Nam, Hà Nội, Đà Nẵng* $\}$.

Với hai phần tử bất kỳ $x \in A$ và $y \in B$. Ta định nghĩa quan hệ giữa x và y như sau: "x là địa danh của y". Sử dụng quan hệ này, ta tìm được các cặp sắp thứ tự (x, y) là: (Hồ Gươm, Hà Nội), (Chùa Bái Đính, Ninh Bình), (Phố cổ Hội An, Quảng Nam), (Cầu Rồng, Đà Nẵng), (Vịnh Hạ Long, Quảng Ninh).

Nếu kí hiệu $S = \{$(Hồ Gươm, Hà Nội), (Chùa Bái Đính, Ninh Bình), (Phố cổ Hội An, Quảng Nam), (Cầu Rồng, Đà Nẵng), (Vịnh Hạ Long, *Quảng Ninh)* $\}$ *thì* S *là tập con của* $A \times B$*, vì vậy* S *là một quan hệ hai ngôi từ* A *tới* B.

Ví dụ 1.3.8. *Xét một quan hệ hai ngôi* S *trên* $\mathbb{R}$*, tức là một tập con của* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*, được định nghĩa như sau:*

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Ta có S là tập tất cả các điểm nằm trên đường tròn đơn vị, tức là đường tròn tâm $\mathrm{O}\,(0,0)$ *bán kính bằng 1 và* $0S1$ *nhưng* $2\overline{S}3$.

Ví dụ 1.3.9. *Một hãng hàng không phục vụ 5 thành phố* c_1*,* c_2*,* c_3*,* c_4 *và* c_5*. Bảng số sau đây biểu diễn chi phí bay của hãng từ thành phố* c_i *đến thành phố* c_j*. Chẳng hạn, chi phí bay từ thành phố* c_1 *đến* c_3 *là* 100 *USD và chi phí bay từ thành phố* c_4 *đến* c_2 *là* 200 *USD.*

Nơi đi \ Nơi đến	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1		*140*	*100*	*150*	*200*
c_2	*190*		*200*	*160*	*220*
c_3	*110*	*180*		*190*	*250*
c_4	*190*	*200*	*120*		*150*
c_5	*200*	*100*	*200*	*150*	

Bây giờ chúng ta xác định mối quan hệ R *trên tập hợp các thành phố* $A = c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ *như sau:* c_iRc_j *nếu và chỉ nếu chi phí đi từ* c_i *đến* c_j *được xác định và nhỏ hơn hoặc bằng* 180 *USD. Tìm* R.

Giải:

Quan hệ hai ngôi R là tập con của tích Đề-các $A \times A$ bao gồm tất cả các thành phố (c_i, c_j) thỏa mãn chi phí đi từ c_i đến c_j bé hơn hay bằng 180 USD. Do đó,

$$\begin{aligned} R = \{&(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_2, c_4), (c_3, c_1), (c_3, c_2), \\ &(c_4, c_3), (c_4, c_5), (c_5, c_2), (c_5, c_4)\}. \end{aligned}$$

Định lý 1.3.1. *Cho R là một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B và giả sử A_1, A_2 là các tập con của A. Khi đó:*

a. *Nếu* $A_1 \subseteq A_2$ *thì* $R(A_1) \subseteq R(A_2)$.

b. $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$.

c. $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

Chứng minh. a. Nếu $\forall y \in R(A_1)$ thì tồn tại $x \in A_1$ sao cho xRy. Mặt khác, theo giả thiết $A_1 \subseteq A_2$ nên $x \in A_2$. Vậy, $y \in R(A_2)$. Từ đó, suy ra $R(A_1) \subseteq R(A_2)$.

b. $\forall y \in R(A_1 \cup A_2)$, theo định nghĩa, tồn tại phần tử x trong tập $A_1 \cup A_2$ sao cho xRy. Mà $x \in A_1 \cup A_2$ tương đương với $x \in A_1$ hoặc $x \in A_2$. Nếu $x \in A_1$ và xRy thì $y \in R(A_1)$. Nếu $x \in A_2$ và xRy thì $y \in R(A_2)$. Kết hợp hai trường hợp này, ta suy ra $y \in R(A_1) \cup A_2$. Vậy, $R(A_1 \cup A_2) \subseteq R(A_1) \cup R(A_2)$ (1).

Ngược lại, ta có $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ nên theo phần a, $R(A_1) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $R(A_2) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$. Do vậy, $R(A_1) \cup R(A_2) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$.

c. Với mọi $y \in R(A_1 \cap A_2)$ thì tồn tại phần tử x trong $A_1 \cap A_2$ sao cho xRy. Do $x \in A_1 \cap A_2$ nên x thuộc cả hai tập hợp A_1 và A_2. Từ đó, ta suy ra y thuộc cả hai tập hợp $R(A_1)$ và $R(A_2)$, tức là $y \in R(A_1) \cap R(A_2)$. Vậy, $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$. □

Định lý 1.3.2. *Cho R và S là hai quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B. Nếu $R(a) = S(a), \forall a \in A$ thì $R = S$.*

Chứng minh. Nếu aRb thì $b \in R(a)$. Mà theo giả thiết $R(a) = S(a)$ nên $b \in S(a)$, tức là aSb. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được nếu aSb thì aRb. Vậy $R = S$. □

Ma trận của quan hệ hai ngôi

Chúng ta có thể biểu diễn quan hệ hai ngôi giữa hai tập hợp hữu hạn bằng một ma trận. Nếu $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ là hai tập hữu hạn tương ứng chứa m và n phần tử và R là một quan hệ hai ngôi từ A đến B thì chúng ta có thể biểu diễn R bởi ma trận cấp $m \times n$: $M_R = [m_(ij)]_{m\times n}$ với các phần tử được xác định như sau:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{nếu} \quad (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

Ma trận M_R được gọi là ma trận của quan hệ hai ngôi R.

Ví dụ 1.3.10. *Cho ma trận M biểu diễn quan hệ hai ngôi R từ tập A đến tập B.*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Tìm quan hệ hai ngôi R.

Giải:

Vì M là ma trận cấp 3×4 nên ta đặt $A = \{a_1, a_2, a_3$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Khi đó, $(a_i, b_j) \in R$ nếu và chỉ nếu $m_{ij} = 1$.

Vậy, $R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_4), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_3)\}$

Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.3.10. *Cho S là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp X, (tức là $S \subseteq X \times X$). Khi đó, S là một quan hệ tương đương trong X khi và chỉ khi S có các tính chất sau:*

i. Tính phản xạ: $\forall\ a \in X :\ aSa$.

ii. Tính đối xứng: $\forall a, b \in X :$ *Nếu* aSb *thì* bSa.

iii. *Tính bắc cầu:* $\forall\, a, b, c \in X:$ *Nếu* $aSb \wedge bSa$ *thì* aSc.

Ví dụ 1.3.11.

a) *Quan hệ "=" trên tập hợp các số thực là quan hệ tương đương.*

b) *Cho m là số nguyên dương cố định. Ta xác định một quan hệ hai ngôi S trên $\mathbb{Z}$ như sau:*

Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, aSb nếu và chỉ nếu $m|(a-b)$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho $a-b=mk$. Ta chứng minh quan hệ S là quan hệ tương đương.

Thật vậy, với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a-a=0$. Ta có: $a-a=m\cdot 0,$ suy ra aSa. (tính phản xạ).

Giả sử $a, b \in \mathbb{Z}$ và aSb. Ta cần chứng minh bSa. Thật vậy, do aSb nên tồn tại số nguyên k sao cho $a-b=mk$, suy ra $b-a=m(-k)$. Do đó, $m|\,(b-a)$, nghĩa là bSa (tính đối xứng).

Với mọi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, giả sử aSb và bSc. Ta cần chứng minh aSc. Thật vậy, theo định nghĩa quan hệ S thì tồn tại hai số nguyên dương p, q sao cho $a-b=mp$ và $b-c=mq$. Khi đó:

$$a-c=(a-b)+(b-c)=mp-mq=m\,(p+q)=mk,$$

trong đó $k=p+q\in\mathbb{Z}$, điều này suy ra quan hệ hai ngôi S có tính chất bắc cầu. Vậy quan hệ đồng dư S trong định nghĩa trên là một quan hệ tương đương.

c) *Giả sử X là tập các vectơ trong không gian$\mathbb{R}^3$*

$$\overrightarrow{\mathrm{a}}=\overrightarrow{\mathrm{b}}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{a}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\mathrm{b}}\\ |\overrightarrow{\mathrm{a}}|=|\overrightarrow{\mathrm{b}}|\end{cases}$$

Quan hệ bằng nhau của hai véctơ là quan hệ tương đương.

d) *Giả sử X là tập các sinh viên của lớp Khoa học máy tính. Quan hệ hai ngôi $R=\{(x,y)\mid x$ và y có cùng chiều cao$\}$ là một quan hệ tương đương.*

Ví dụ 1.3.12. *Xét quan hệ hai ngôi R trên tập $\{1, 3, 5, 7\}$*

$$R = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (2, 2); (2, 7); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (7, 2); (7, 7); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}$$

Quan hệ hai ngôi R ở trên có tính phản xạ vì $(1, 1)$; $(3, 3)$; $(5, 5)$; $(7, 7)$ thuộc R. Quan hệ R có tính chất đối xứng vì với mọi (x, y) trong R thì ta cũng có (y, x) trong R. Cuối cùng, quan hệ hai ngôi R có tính chất bắc cầu bởi vì với mọi (x, y) và (y, z) trong R thì ta có (x, z) trong R.

Vậy, R là một quan hệ tương đương trên tập $\{1, 2, 3, 5, 7\}$.

Ví dụ 1.3.13. *Quan hệ hai ngôi R trên tập $X = \{3, 4, 5, 7\}$ được định nghĩa như sau: $(x, y) \in R$ nếu $x \leq y, x, y \in X$, không là quan hệ tương đương vì R không có tính đối xứng. Chẳng hạn, $(3, 7) \in R$ nhưng $(7, 3) \notin R$.*

Định nghĩa 1.3.11. *Cho R là một quan hệ tương đương trên tập X. Với mỗi $a \in X$, ta đặt $[a] = \{x \in X \mid xRa\}$ và gọi $[a]$ là lớp tương đương của phần tử a theo quan hệ tương đương R trên tập X. Tức là, $[a]$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử trong X có quan hệ hai ngôi R với a.*

Ta có kết quả: Với R là một quan hệ tương đương trên tập X thì tập $\mathcal{S} = \{[a] \mid a \in X\}$ là một phép phân hoạch trên tập X. Khi đó, các tập hợp $[a]$ với $a \in X$ được gọi là các lớp tương đương của X bởi quan hệ tương đương R.

Ví dụ 1.3.14. *Ta xét R là một quan hệ hai ngôi trên tập X các xâu bit có độ dài 8 được định nghĩa như sau: s_1Rs_2 với điều kiện là 4 bit đầu của s_1 và s_2 trùng nhau. Khi đó:*

a) Chứng tỏ rằng R là một quan hệ tương đương.

b) Liệt kê danh sách các phần tử của mỗi lớp tương đương.

c) Hỏi có bao nhiêu lớp tương đương trên tập X.

Giải:

a) Để chỉ ra quan hệ hai ngôi R là một quan hệ tương đương, chúng ta phải chứng tỏ rằng R có đầy đủ ba tính chất: tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Đối với từng tính chất, chúng ta sẽ kiểm tra trực tiếp theo định nghĩa.

+) Ta có R là phản xạ vì sRs, với mọi xâu tám bit s.

+) Về tính đối xứng, đối với tất cả các chuỗi tám bit s_1 và s_2, nếu s_1Rs_2, thì s_2Rs_1. Sử dụng định nghĩa của R, ta có: Nếu bốn bit đầu tiên của s_1 và s_2 trùng nhau thì hiển nhiên bốn bit đầu tiên của s_2 và s_1 trùng nhau.

+) Đối với tính bắc cầu, với mọi chuỗi tám bit s_1, s_2 và s_3, nếu s_1Rs_2 và s_2Rs_3 thì s_1Rs_3. Một lần nữa sử dụng định nghĩa của R, ta có: Nếu bốn bit đầu tiên của s_1 và s_2 trùng nhau và bốn bit đầu tiên của s_2 và s_3 trùng nhau thì bốn bit đầu tiên của s_1 và s_3 trùng nhau.

Vậy, R là một quan hệ tương đương.

b) Ta nhận thấy rằng mỗi xâu phân biệt có bốn bit xác định một lớp tương đương. Ví dụ: xâu 0111 xác định lớp tương đương bao gồm tất cả các xâu tám bit bắt đầu 0111. Do đó, số lớp tương đương là bằng số xâu bốn bit. Chúng ta có thể liệt kê tất cả các xâu đó là:

$$\begin{gathered}0000, 0001, 0010, 0011,\\ 0100, 0101, 0110, 0111,\\ 1000, 1001, 1010, 1011,\\ 1100, 1101, 1110, 1111\end{gathered}$$

và từ đó ta xác định được các lớp tương đương.

$$\begin{gathered}00000000, 00010000, 00100000, 00110000,\\ 01000000, 01010000, 01100000, 01110000,\\ 10000000, 10010000, 10100000, 10110000,\\ 11000000, 11010000, 11100000, 11110000\end{gathered}$$

c) Từ kết quả câu b) ta có 16 lớp tương đương.

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.3.12. *Cho X là một tập hợp và một quan hệ hai ngôi S trên X. Ta nói S là một quan hệ thứ tự trong X (quan hệ thứ tự giữa các phần tử của X) nếu S thỏa mãn các tính chất sau:*

i) Tính phản xạ: $\forall a \in X : \ aSa$.

ii) Tính phản đối xứng: $\forall a, b \in X :$ *Nếu* $aSb \wedge bSa$ *thì* $a = b$.

iii) Tính bắc cầu: $\forall\, a, b, c \in X : \ $ *nếu* $aSb \wedge bSa$ *thì* aSc.

Ví dụ 1.3.15.

a) Quan hệ "$\leq$" trong tập số thực là quan hệ thứ tự.

b) Quan hệ ":" trong tập các số nguyên dương là quan hệ thứ tự.

c) Quan hệ "$\subset$" trong một họ các tập hợp nào đó là một quan hệ thứ tự.

Ví dụ 1.3.16. *Cho S là một quan hệ hai ngôi trên tập $\mathbb{Z}$ được xác định như sau: Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, aSb khi và chỉ khi $ab \geq 0$. Hỏi S có là quan hệ thứ tự hay không? Vì sao?*

Giải:

Ta dễ dàng chỉ ra S có tính chất phản xạ, đối xứng. Nhưng S không có tính chất bắc cầu vì $-2S0$ và $0S7$ nhưng $-2\overline{S}7$. Vậy S không là quan hệ tương đương và cũng không là quan hệ thứ tự.

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 1

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Mệnh đề	Proposition
Bảng giá trị chân lý	Truth table
Xâu bit	Bit string
Phép toán đối với xâu bit	Bit operation
Mệnh đề phủ định	Negative proposition
Phép hội	Conjunction
Phép tuyển	Disjunction
Phép tuyển loại	The exclusive or of propositions
Phép kéo theo	Implication
Phép tương đương	Biimplication
Tập vô hạn	Infinite set
Tập hữu hạn	Finite set
Lực lượng của tập hợp	Cardinal set
Tập rỗng	Empty set
Tập con	Subset
Tập hợp bằng nhau	Equal sets
Phép hợp	Union of sets
Phép giao	Intersection of sets
Phép hiệu	Set difference
Phần bù	The complement of a set
Hiệu đối xứng	The symetric difference
Tích Đềcác	Cartesian product
Ánh xạ	Mapping
Tập nguồn, tập đích	Domain, Range
Đơn ánh	One-to-one function, injection
Toàn ánh	Onto function, surjection
Song ánh	One-to-one function, bijection

Ánh xạ hợp hay Tích ánh xạ	Combinative mapping
Quan hệ hai ngôi	Binary relation
Quan hệ tương đương	Equivalence relation
Quan hệ thứ tự	Ordered relation

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

MỆNH ĐỀ VÀ LÔGIC

Bài 1.1: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $p \wedge \overline{p}$ b) $p \vee \overline{p}$

c) $(p \vee \overline{q}) \Rightarrow q$ d) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Bài 1.2: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $p \oplus q$ b) $p \oplus \overline{p}$

c) $p \oplus \overline{q}$ d) $\overline{p} \oplus \overline{q}$

e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \overline{q})$ f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \overline{q})$

Bài 1.3: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $p \Rightarrow \overline{q}$ b) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)$

c) $\overline{p} \Rightarrow q$ d) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{p} \Leftrightarrow q)$

e) $(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ f) $(\overline{p} \wedge q) \Rightarrow p$

Bài 1.4: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $(p \vee q) \vee r$ b) $(p \vee q) \wedge r$

c) $(p \wedge q) \vee r$ d) $(p \wedge q) \wedge r$

e) $(p \vee q) \wedge \overline{r}$ f) $(p \wedge q) \vee \overline{r}$

Bài 1.5: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$ b) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$

c) $\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ d) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$

e) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$ f) $(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

Bài 1.6: Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $p \Rightarrow (q \wedge r) \vee \overline{p}$ b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

c) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Bài 1.7: Sử dụng bảng giá trị chân lý để chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ b) $(p \vee (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ d) $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$

Bài 1.8: Chứng minh mệnh đề $A : (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ tương đương lôgic với mệnh đề $B : p \Rightarrow (q \vee r)$.

Bài 1.9: Chứng minh mệnh đề $A : (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ không tương đương lôgic với mệnh đề $B : p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

Bài 1.10: Xác định giá trị của χ sau mỗi khi gặp câu lệnh dưới dây trong một chương trình máy tính, nếu biết trước khi tới câu lệnh đó $\chi = 1$.

a) If $1 + 2 = 3$ then $\chi = \chi + 1$

b) If $(1 + 1 = 3)$ or $(2 + 2 = 3)$ then $\chi := \chi + 1$

c) If $(2 + 3 = 5)$ and $(3 + 4 = 7)$ then $\chi := \chi + 1$

d) If $(1 + 1 = 2)$ XOR $(1 + 2 = 3)$ then $\chi := \chi + 1$

e) If $\chi < 2$ then $\chi := \chi + 1$

Bài 1.11: Thực hiện các phép toán OR, AND, XOR đối với các cặp xâu bit sau:

a) $1011110;\ 0100001$

b) $11110000;\ 10101010$

c) $0001110001;\ 1001001000$

d) $1111111111;\ 0000000000$

e) $1010101011;\ 1100110011$

Bài 1.12: Xác định các xâu bit từ những biểu thức sau:

a) $11000 \wedge (01011 \vee 11011)$

b) $(01111 \wedge 10101) \vee 01000$

c) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$

d) $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$

LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Bài 1.13: Cho A, B, C và D là các tập con của tập $\mathcal{U}$. Vẽ biểu đồ Ven của các tập hợp sau:

a) $A \cap B \cap C \cap D$

b) $(A \cup B \cup C) \cap D$

c) $(A \cup B) \cap (C \cap D)$.

Bài 1.14: Cho A là tập hợp các sinh viên sống cách xa trường trong vòng bán kính 1 km và B là tập hợp các sinh viên đang trên đường tới lớp. Hãy mô tả các sinh viên thuộc một trong các tập hợp sau:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

Bài 1.15: Giả sử A là tập hợp các sinh viên năm thứ hai ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân và B là tập hợp các sinh viên học môn Toán rời rạc ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân. Hãy biểu diễn các tập sau qua A và B.

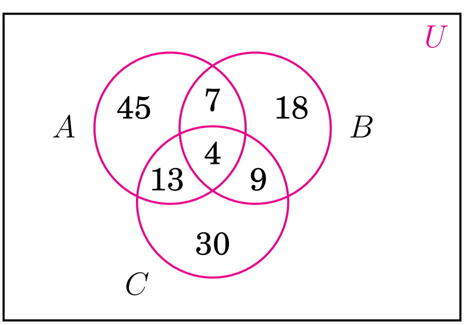
a) Tập hợp các sinh viên năm thứ hai học toán rời rạc ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân.

b) Tập hợp sinh viên năm thứ hai ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân không học toán rời rạc.

c) Tập hợp các sinh viên ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân hoặc là năm thứ hai, hoặc học toán rời rạc.

d) Tập hợp các sinh viên ở Trường Đại học Kinh tế Quốc dân, hoặc không là sinh viên năm thứ hai, hoặc không học toán rời rạc.

Bài 1.16: Trong hình dưới đây, A là tập hợp các sinh viên học môn Đại số, B là tập các sinh viên học môn Toán rời rạc, C là tập các sinh viên học môn Tin học đại cương. Số ở trong mỗi miền biểu diễn số sinh viên thuộc miền đó.



a) Hỏi số sinh viên học hai môn trong ba môn học đã cho.

b) Tìm số sinh viên học môn Đại số và Toán rời rạc.

c) Tìm số sinh viên học môn Đại số và Tin học đại cương.

d) Tìm số sinh viên học môn Toán rời rạc và Tin học đại cương.

e) Tìm số sinh viên học môn Đại số.

f) Tìm số sinh viên học môn Tin học đại cương.

g) Tìm số sinh viên học môn Toán rời rạc.

h) Tìm số sinh viên học môn Đại số hoặc học môn Toán rời rạc hoặc học môn Tin học đại cương.

Bài 1.17: Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{0, 3, 6\}$. Xác định các tập hợp:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$.

Bài 1.18: Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$ và $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Tìm các tập hợp:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

Bài 1.19: Cho các tập hợp $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, e, f\}$ và $B = \{b, g\}$ và $C = \{d, e, g\}$, trong đó coi $\mathcal{U}$ là tập vũ trụ (the universal set). Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $A \times B$ b) $B \times C$

c) $A \times C$ d) $A \times B \times C$

Bài 1.20: Cho A là một tập hợp, chứng minh: $\overline{\overline{A}} = A$

Bài 1.21: Cho A là một tập hợp, chứng minh:

a) $A \cup \emptyset = A$ b) $A \cup A = A$

c) $A \cap A = A$ d) $A \setminus \emptyset = A$

e) $A \cap \emptyset = A$ f) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

Bài 1.22: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh:

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

Bài 1.23: Tìm hai tập hợp A và B thỏa mãn các điều kiện $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}$ và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Bài 1.24: Cho A và B là hai tập hợp bất kì, chứng minh: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
a) Bằng cách chỉ ra mỗi vế là tập con của vế kia.

a) Bằng cách dùng bảng thuộc tính.

Bài 1.25: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh:
a) $(A \cap B) \subseteq A$

b) $A \subseteq (A \cup B)$

c) $A \setminus B \subseteq A$

d) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

e) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Bài 1.26: Cho ba tập hợp A, B và C. Chứng minh:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

a) Bằng cách chứng tỏ vế này là tập con của vế kia.

b) Bằng cách dùng bảng thuộc tính.

Bài 1.27: Cho A, B và C là ba tập hợp bất kì, chứng minh rằng:
a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$ b) $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$

c) $(A \backslash B) \setminus C \subseteq A \setminus C$ d) $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \emptyset$

e) $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$

Bài 1.28: Chứng minh rằng với A và B là hai tập hợp bất kì, ta có:

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

Bài 1.29: Chứng minh rằng với A và B là hai tập hợp bất kì, ta có:

$$(A, \cap B,) \cup \left(, A, \cap \overline{B}\right) = A$$

Bài 1.30: Cho các tập hợp A, B và C. Chứng minh rằng:
a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bài 1.31: Cho ba tập hợp A, B và C. Chứng minh rằng:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

Bài 1.32: Cho ba tập hợp $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Tìm các tập hợp sau:

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

Bài 1.33: Cho trước các tập A, B và C. Vẽ biểu đồ Ven đối với các tập hợp sau:

a) $A \cap (B \cup C)$ b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Bài 1.34: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh rằng $A \subseteq B$ khi và chỉ khi $A \cup B = B$.

Bài 1.35: Cho A, B và C là ba tập con của tập S và $\overline{C}$ là phần bù của tập C trong S. Chứng minh rằng: Nếu $A \cap C = B \cap C$ và $A \cap \overline{C} = B \cap \overline{C}$ thì $A = B$.

Bài 1.36: Cho A, B và C là các tập hợp sao cho $A \cap B = A \cap C$ và $A \cup B = A \cup C$. Chứng minh $B = C$.

Bài 1.37: Cho ba tập hợp A, B và C thỏa mãn $(A \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right) = \emptyset$. Chứng minh rằng $A \cap B = \emptyset$, trong đó $\overline{C}$ là phần bù của tập C.

Bài 1.38: Ta gọi hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B là một tập hợp được kí hiệu và xác định như sau: $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Chứng minh rằng $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Bài 1.39: Cho A, B và C là ba tập hợp khác rỗng. Chứng minh rằng:

$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Bài 1.40: Cho A, B, C là các tập con của $\mathcal{U}$. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $((A\backslash B) \cup (A \cap B)) \cap \left((B\backslash A) \cup \overline{(A \cup B)}\right) = \emptyset$

b) $A\backslash (B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

c) $A\backslash (B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$

d) $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

f) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Bài 1.41: Chứng minh các tính chất:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

b) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \times \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} (A_i \cap B_i)$,

c) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$,

d) $(A\backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$,

e) $A \times (B\backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$.

Bài 1.42: Cho A, B, C là các tập con của tập $\mathcal{U}$. Chứng minh rằng:

$A\backslash C = B\backslash C$ khi và chỉ khi $A \cup C = B \cup C$.

Bài 1.43: Cho A, B, C là ba tập hợp bất kì. Chứng minh rằng:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Bài 1.44: Cho hai tập hợp A và B là các tập con hữu hạn của tập hợp $\mathcal{U}$. Chứng minh rằng:

a) $|A\backslash B| = |A| - |A \cap B|$

b) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, và $|A \cup B| = |A| + |B|$ khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

c) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Bài 1.45: Giả sử rằng tập vũ trụ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Biểu diễn các tập dưới đây bằng các xâu bit với bit thứ i trong xâu là 1 nếu i thuộc tập đó, bằng 0 trong các trường hợp ngược lại.

a) $\{3, 4, 5\}$ b) $\{1, 3, 6, 10\}$ c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

Bài 1.46: Dùng tập vũ trụ như bài 45, tìm các tập được biểu diễn bởi các xâu sau:

a) 1111001111 b) 0101111000 c) 1000000001

Bài 1.47: Các tập con nào của một tập vũ trụ hữu hạn được biểu diễn bởi các xâu bit sau:
a) Xâu gồm toàn các số0.

b) Xâu gồm toàn các số1.

Bài 1.48: Xác định xâu bit biểu diễn hiệu của tập hợp A với tập hợp B, biết rằng:

$A = \{1, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4, 7\}$ là các tập con của tập vũ trụ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bài 1.49: Xác định xâu bit biểu diễn hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B, biết rằng:

$A = \{1, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4, 7\}$ là các tập con của tập vũ trụ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bài 1.50: Hãy chỉ rõ các phép toán trên các xâu bit được thực hiện như thế nào để tìm các tổ hợp sau của tập hợp:

$$\begin{array}{ll} A = \{a, b, c, d, e\} & B = \{b, c, d, g, p, t, u\} \\ C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\} & D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}. \end{array}$$

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

d) $A \cup B \cup C \cup D$

ÁNH XẠ VÀ QUAN HỆ HAI NGÔI

Bài 1.51: Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ, A và B là hai tập con của X, C và D là hai tập con của Y. Chứng minh rằng:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

e) $f(X \backslash A) \supset f(X) \backslash f(A)$;

f) $f^{-1}(Y \backslash C) \supset X \backslash f^{-1}(C)$.

Bài 1.52: Giả sử n là số tự nhiên cho trước, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là ánh xạ được xác định bởi $f(k) = n - k$ nếu $k < n$ và $f(k) = n + k$ nếu $k \geq n$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh hay không?

Bài 1.53: Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Gọi $h = g \circ f$ là ánh xạ tích của f và g. Chứng minh rằng:

a) Nếu h là đơn ánh thì f là đơn ánh. Nếu bổ sung thêm điều kiện f là toàn ánh thì g là đơn ánh.

b) Nếu h là toàn ánh thì g là toàn ánh. Nếu bổ sung thêm điều kiện g là đơn ánh thì f là toàn ánh.

Bài 1.54: Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi có một ánh xạ g từ Y đến X sao cho $g \circ f = id_X \ \ (X \neq \emptyset)$

Bài 1.55: Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi có một ánh xạ $g : Y \to X$ sao cho $f \circ g = id_Y$.

Bài 1.56: Cho ba ánh xạ $f : X \to Y; g : V \to X$. Chứng minh:

a) Nếu f là đơn ánh và $f \circ g = f \circ g'$ thì $g = g'$.

b) Nếu với mọi g, g' và với mọi tập V mà $f \circ g = f \circ g'$ kéo theo $g = g'$ thì f là đơn ánh.

Bài 1.57: Hãy chỉ ra ba quan hệ hai ngôi khác nhau từ tập $A = \{a, b, c\}$ tới tập $B = \{0, 2\}$.

Bài 1.58: Tìm số các quan hệ hai ngôi trên tập hợp n phần tử.

Bài 1.59: Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Hãy xác định tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu của các quan hệ hai ngôi sau trên tập A.

a) $S = \{(1,4),(4,1)\}$

b) $S = \{(1,1)\}$

c) $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2)\}$

d) $S = \{(1,3),(1,4)\}$

Bài 1.60: Trong các quan hệ hai ngôi sau, quan hệ nào là quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

a) $S = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid |a-b| \le 4\}$

b) $S = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (a-b) \vdots 7\right\}$.

Bài 1.61: Hãy chỉ ra ba quan hệ tương đương trên tập $A = \{1,2,3\}$.

Bài 1.62: Trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi S như sau:

$$S = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid \left(a^2-b^2\right) \vdots 5\right\}.$$

Chứng minh quan hệ hai ngôi S là quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

Chương 2

THUẬT TOÁN

Trong môn Đại số, chúng ta đã biết cách giải hệ phương trình tuyến tính. Tuy nhiên, trong thực hành chúng ta thường minh họa cách giải các hệ phương trình hai hoặc ba ẩn với hai hoặc ba phương trình. Bởi vì khi số biến và số phương trình tăng lên thì việc giải hệ phương trình đó mà không có máy tính rất phức tạp và mất nhiều thời gian. Điều này cũng xảy ra trong việc giải bài toán: Hỏi số $1+3^{3^{11}}$ có thể biểu diễn thành tích của hai số nguyên a và b được hay không? Chúng ta gần như không thể giải quyết được bài toán này mà không sử dụng đến máy tính. Rất may, các chương trình máy tính phát huy hiệu quả tốt nhất để giải quyết các bài toán kiểu này cũng như giải hệ phương trình tuyến tính với số phương trình và số ẩn lớn.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày một số thuật toán cơ bản làm cơ sở để giải quyết các bài toán lớn sau này.

2.1. THUẬT TOÁN

Trước hết, ta hiểu thuật toán là gì? Một cách hiểu đơn giản: Thuật toán là lời giải bài toán theo từng bước mà đáp số hay câu trả lời bài toán được đưa ra sau hữu hạn bước. Từ "Thuật toán" (Algorithm) xuất phát bởi tên nhà toán học Ba Tư từ thế kỷ thứ 9.

2.1.1. *Định nghĩa và tính chất*

Định nghĩa 2.1.1. *Thuật toán là một quy trình xác định hoặc tập hợp các quy tắc phải tuân theo gồm hữu hạn bước trong việc thực hiện lời giải một bài toán và nó có thể thực hiện được bằng máy tính. Thuật ngữ "Algorithm" nghĩa là thuật toán.*

Ví dụ 2.1.1. *Tìm phần tử lớn nhất trong ba số a, b, c.*

Để giải bài toán này, chúng ta cần sử dụng thuật toán như sau:

Bước 1: Nhập vào giá trị các phần tử a, b, c. Đặt tên giá trị lớn nhất cần tìm là max.

Bước 2: Gán $max := a$.

Bước 3: Nếu $max < b$ thì $max := b$.

Bước 4: Nếu $max < c$ thì $max := c$.

Bước 5: Trả lời giá trị lớn nhất trong danh sách ba số đã cho là max.

Trong thuật toán trên, bước 1 chính là bước khai báo giá trị của các số trong danh sách cho trước và đặt tên biến cần tìm giá trị lớn nhất là max. Bước 2, ta giả sử số lớn nhất là a và gán giá trị a cho max. Bước 3 và bước 4 là so sánh max với các số còn lại trong danh sách. Nếu $max < b$ hay $max < c$ thì gán giá trị của số lớn hơn cho max. Nếu không xảy ra các trường hợp đó thì thực hiện bước tiếp theo. Bước 5 là bước đưa ra đáp số của bài toán.

Nếu trong danh sách ban đầu có nhiều phần tử hơn thì thuật toán của ta lặp lại các bước 3 và 4.

Tính chất: Qua định nghĩa và ví dụ trên, chúng ta nhận thấy một thuật toán cần phải có các tính chất sau:

a. **Đầu vào (Input):** Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được chỉ rõ.

b. **Đầu ra (Output):** Từ mỗi tập các giá trị đầu vào, thuật toán sẽ tạo ra các giá trị đầu ra. Các giá trị đầu ra chính là nghiệm của bài toán.

c. **Tính xác định:** Các bước của một thuật toán phải được xác định một cách chính xác.

d. **Tính hữu hạn:** Một thuật toán cần phải tạo ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn bước (nhưng có thể rất lớn) đối với mọi tập đầu vào.

e. **Tính hiệu quả:** Mỗi bước của thuật toán cần phải thực hiện một cách chính xác và trong một khoảng thời gian hữu hạn.

f. **Tính tổng quát:** Thủ tục cần phải áp dụng được cho mọi bài toán có dạng mong muốn, chứ không chỉ cho một tập đặc biệt các giá trị đầu vào.

2.1.2. *Các quy ước giả code*

Để miêu tả thuật toán, chúng ta sử dụng giả code, cú pháp của các giả code này được miêu tả trong phần này.

Phép gán, kí hiệu $:=$ là phép thay thế giá trị của biến bên trái dấu $:=$ bởi giá trị hay biểu thức bên phải dấu $:=$. Phát biểu $x := a$ nghĩa là gán giá trị a cho x, tức là thay thế giá trị cũ của x bởi giá trị a. Ta đọc là "x nhận giá trị a" hay "gán giá trị a cho x". Đây là phát biểu của phép gán giá trị.

Dạng tổng quát của phép gán giá trị là:

$$var := \text{biểu thức;}$$

Biểu thức tính được giá trị và giá trị của nó được gán cho var.

Cấu trúc điều khiển

Chúng ta sử dụng các cú pháp sau để miêu tả cấu trúc chọn và cấu trúc lặp.

Có hai cách phát biểu cấu trúc chọn là:

If *Biểu thức logic* **then** *câu lệnh*

Nếu biểu thức logic đúng thì câu lệnh có hiệu lực.

If *Biểu thức logic* **then** *câu lệnh 1* **else** *câu lệnh 2*

Nếu biểu thức logic đúng thì câu lệnh 1 có hiệu lực, nếu không thì câu lệnh 2 có hiệu lực.

Vòng lặp *While* có dạng:

while *biểu thức logic* **do** *nội dung lặp*

Nếu biểu thức logic có hiệu lực và giá trị của nó đúng thì nội dung lặp được thực hiện. Sau đó, nội dung lặp tiếp tục được thực hiện khi biểu thức logic vẫn còn đúng.

Vòng lặp **for** có dạng:

for $var :=$ *bắt đầu* **to** *giới hạn* **do** *nội dung lặp* trong đó, *var* là một biến nguyên. Biến*var* là tập hợp các giá trị cụ thể được chỉ ra trong *bắt đầu*. Nếu $var \leq$ *giới hạn* thì *nội dung lặp* được thực hiện.

Vòng lặp *do/while* có dạng:

do *nội dung* **while** *biểu thức logic*

Biểu thức logic được thực hiện đầu tiên và khi *biểu thức logic* có hiệu lực thì tiếp tục thực hiện *nội dung*. Nội dung tiếp tục được thực hiện khi nào *biểu thức logic* vẫn còn đúng.

Khối các câu lệnh

Khối câu lệnh là một tập hợp các câu lệnh đơn được viết trong cặp begin - end:

begin
Câu lệnh 1
Câu lệnh 2
⋮
Câu lệnh n
end

Câu lệnh return

Câu lệnh return được sử dụng để đưa ra các kết quả đã tính toán được theo thuật toán và nó có dạng:

return *biểu thức*;

Giá trị cụ thể chỉ trong biểu thức được đưa ra. Chú ý rằng trong một thuật toán, việc thực hiện câu lệnh return cũng là việc cuối cùng của thuật toán.

Mảng (danh sách)

Một danh sách là tập hợp tất cả các phần tử cùng dạng. Chiều dài của danh sách là số các phần tử của danh sách. Một cách thuận tiện để lưu trữ và tính toán trên danh sách là sử dụng mảng. Chúng ta sử dụng các kí hiệu mảng sau:

$L[1\dots n]-$ L là một mảng có n thành phần được đánh số thứ tự từ 1 tới n.

Nếu dữ liệu cho trước dưới dạng bảng thì chúng ta dùng mảng hai chiều lưu trữ dữ liệu. Mảng hai chiều được kí hiệu như sau:

$M[1\dots m, 1\dots n] - M$ là một mảng hai chiều có m hàng và n cột. Kí hiệu $M[i,j]$ là phần tử ở hàng i cột j của M.

Đọc và in các câu lệnh

Câu lệnh **read** x; nghĩa là đọc giá trị và lưu trữ vào biến x.

Câu lệnh **print** x; nghĩa là đưa ra giá trị của x.

Chương trình con (Thủ tục)

Trong ngôn ngữ lập trình, thuật toán được đặt trong các dạng chương trình con. Các chương trình con này gọi là các thủ tục con hay các module. Các thủ tục con có hai loại điển hình. Một là, thủ tục tính toán một giá trị duy nhất, giá trị này chính là giá trị của thủ tục đó và nó được đưa ra bởi câu lệnh return. Chẳng hạn trong ngôn ngữ lập trình C++ ta gọi là hàm đưa ra giá trị (valued-returning fucntion), trong Java gọi là valued-returning methods và trong Pascal được gọi là các hàm (functions). Một kiểu khác của chương trình con là thực hiện một nhiệm vụ, chẳng hạn như sắp xếp các phần tử của một danh sách. Chẳng hạn, trong ngôn ngữ C++, thủ tục con được gọi là voi function, trong Java chúng được gọi là voi methods và trong Pascal chúng được gọi là procedures.

Trong cuốn sách này, chúng tôi sử dụng thuật ngữ **Function** để thiết kế các thủ tục con tìm giá trị duy nhất và **Procedure** cho thủ tục còn lại. Chúng ta sẽ sử dung cụm từ **begin** và **end** để bắt đầu và kết thúc cả hai thủ tục con.

Ví dụ 2.1.2. *Mô tả thuật toán tìm phần tử nhỏ nhất trong một dãy số hữu hạn.*

Thuật toán 2.1.1 Tìm phần tử nhỏ nhất của một dãy số hữu hạn.

Input: L – Danh sách n phần tử
n – số phần tử của danh sách
Output: phần tử nhỏ nhất của L

function phần tử nhỏ nhất
  begin
    $min := L[1]$;
    for $i := 2$ to n **do**
      if $min > L[i]$ **then**
        $min := L[i]$;
    return min;
  end

Ví dụ 2.1.3. *Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong một dãy số hữu hạn.*

Thuật toán 2.1.2 Tìm phần tử lớn nhất trong dãy số hữu hạn.

Input: L – Danh sách n phần tử
n – số phần tử của danh sách
Output: phần tử lớn nhất của L

```
function MaxElement(L, n, max)
    begin
        max := L[1];
        for i := 2 to n do
            if max < L[i] then
                max := L[i];
        return max;
    end
```

Chú thích

Trong việc miêu tả các bước của một thuật toán, chúng ta cần sử dụng các chú giải để làm rõ hơn từng bước. Có hai loại chú giải là đơn dòng và đa dòng. Chú giải theo kiểu đơn dòng là nội dung chú giải được ghi trong một dòng và được ghi trong cặp kí hiệu / /. Chú giải đa dòng là nội dung chú giải được ghi trong nhiều dòng và được ghi trong các ký hiệu /* và */.

2.1.3. *Thuật toán sắp xếp và tìm kiếm*

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày về thuật toán sắp xếp các phần tử trong một danh sách cho trước, thuật toán chỉ ra một phần tử cho trước có nằm trong một danh sách đã cho hay không và thuật toán tìm phần tử lớn nhất, phần tử bé nhất trong một danh sách được sắp thứ tự.

Khi sắp xếp một danh sách thì ta thường có hai thuật toán là sắp xếp chọn (Selection sort) và sắp xếp chèn (Insertion sort).

Thuật toán sắp xếp chọn của một danh sách được thực hiện bằng cách chọn phần tử nhỏ nhất trong danh sách ban đầu sau đó di chuyển tới vị trí đầu của danh sách bằng cách đổi chỗ cho phần tử ở vị trí đầu. Tiếp theo, ta lại tìm phần tử nhỏ nhất trong danh sách kể từ phần tử thuộc vị trí thứ hai và đổi vị trí của phần tử nhỏ nhất tìm được cho phần tử ở vị trí thứ hai. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ sắp xếp được danh sách đã cho theo thứ tự tăng dần.

Chẳng hạn, giả sử ta có danh sách 10 phần tử sau:

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
16	55	27	7	25	62	45	4	65	50

Ban đầu, danh sách này chưa được sắp xếp. Ta tìm phần tử nhỏ nhất trong danh sách, trong trường hợp này là phần tử ở vị trí thứ 8. Sau đó, ta đổi số 4 (ở vị trí thứ 8) với số 16 (ở vị trí thứ 1) cho nhau. Ta được danh sách:

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
4	55	27	7	25	62	45	16	65	50

Tiếp theo, ta lặp lại quá trình trên đối với danh sách gồm các phần tử từ vị trí thứ hai trở đi. Để hoàn thiện thuật toán sắp xếp, chúng ta cần thực hiện các thủ tục và các hàm sau:

Ví dụ 2.1.4. *Xác định vị trí phần tử nhỏ nhất trong một danh sách cho trước.*

Thuật toán 2.1.3 Xác định vị trí của phần tử nhỏ nhất trong một danh sách.

Input: L – Danh sách
$first$ – chỉ số phần tử thứ nhất trong danh sách con
$last$ – chỉ số phần tử cuối cùng trong danh sách con

Output: Vị trí của phần tử nhỏ nhất trong danh sách $L[first \dots last]$ được đưa ra.

function minLocation($L, first, last$)
  begin
    $minIndex := first$;
    for $loc := first + 1$ to $last$ **do**
      if $L[loc] < L[minIndex]$ **then**
        $minIndex := loc$;
    return $minIndex$;
  end

Ví dụ 2.1.5. *Đổi chỗ hai phần tử trong một danh sách*

Thuật toán 2.1.4 Đổi chỗ hai phần tử trong một danh sách

Input: L – Danh sách
$first$ – chỉ số phần tử thứ nhất trong danh sách con
$second$ – chỉ số phần tử thứ hai trong danh sách con
Output: Danh sách sau khi hoán đổi $L[first]$ và $L[second]$

begin
  $temp := L[first]$;
  $L[first] := L[second]$;
  $L[second] := temp$;
end

Ví dụ 2.1.6. *Sắp xếp chọn*

Thuật toán 2.1.5 Sắp xếp chọn

Input: L – Danh sách
n – số các phần tử trong danh sách L
$second$ – chỉ số phần tử thứ hai trong danh sách con
Output: Danh sách L được sắp xếp

begin
  for $loc := 1$ to $n - 1$ **do**
    begin
      $minIndex := minLocation(L, loc, n)$;

```
5:          hoandoi(L, loc, minIndex);
6:       end
7: end
```

Bây giờ chúng ta mô tả thuật toán sắp xếp chèn, thuật toán này có số phép so sánh ít hơn thuật toán sắp xếp chọn.

Giả sử ta có danh sách các phần tử sau:

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
15	18	26	30	23	17	65	45

Chiều dài danh sách là 8. Trong danh sách này, các phần tử $L[1]$, $L[2]$, $L[3]$ và $L[4]$ đã được sắp thứ tự. Bây giờ, ta coi như phần tử $L[5]$ là phần tử thứ nhất trong danh sách chưa được sắp xếp. Vì $L[5] < L[4]$, ta cần di chuyển $L[5]$ đến vị trí đúng của nó (chính là vị trí 3). Để di chuyển $L[5]$ vào vị trí 3, tức là thay thế cho $L[3]$ ta làm như sau: Trước tiên, ta copy $L[5]$ thay vào biến tạm (temp) trong một không gian bộ nhớ tạm, sau đó copy $L[4]$ thay vào $L[5]$ và tiếp theo copy $L[3]$ thay vào $L[4]$. Cuối cùng, ta copy temp thay vào $L[3]$ và được danh sách:

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
15	18	23	26	30	17	65	45

Bây giờ $L[1 \dots 5]$ được sắp xếp và $L[6 \dots 8]$ chưa được sắp xếp. Ta lặp lại quá trình này trên danh sách đã nhận được bằng cách di chuyển phần tử đầu tiên trong danh sách con chưa được sắp xếp đặt vào đúng vị trí của nó trong danh sách con đã được sắp xếp.

Ví dụ 2.1.7. *Sắp xếp chèn*

Thuật toán 2.1.6 Sắp xếp chèn (sapxepchen (L, n))

Input: $L[1 \dots n]$ – Danh sách
n – số các phần tử trong danh sách L
Output: Danh sách L được sắp xếp

```
function Sap_xep_chen(L, n)
    begin
        for firstOutOfOrder := 2 do to n do
            if L[firstOutOfOrder] < L[firstOutOfOrder − 1] then then
                begin
                    temp := L[firstOutOfOrder];
                    loc := firstOutOfOrder;
                end
            do
            begin
                L[Loc] := L[loc − 1];
                loc := loc − 1;
            end
            while (loc > 0 and L[loc − 1] > temp) do do
                L[loc] := temp;
    end
```

Bài toán xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê sắp thứ tự được gọi là bài toán tìm kiếm.

Ví dụ 2.1.8. *Bài toán kiểm tra chính tả, bài toán tìm kiếm các từ trong một cuốn từ điển là những dạng bài toán tìm kiếm. Trong đó, cuốn từ điển là một ví dụ về bảng liệt kê được sắp thứ tự.*

Ví dụ 2.1.9. *Thuật toán tìm kiếm tuyến tính (tìm kiếm tuần tự).*

Thuật toán 2.1.7 Tìm kiếm tuyến tính

Input: L – Danh sách n phần tử
n – kích thước của danh sách L
x – phần tử cần tìm kiếm

Output: Chỉ ra vị trí phần tử đầu tiên trong danh sách L bằng phần tử x, nếu không chỉ số đó bằng 0, (tức là phần tử x không có mặt trong danh sách L)

function $Ham\_Tim\_Kiem\_Tuyen\_Tinh(L, n, x)$
    begin
        $i := 1;$
        while $(i \geq n$ and $x \leq L[i])$ **do**
            $i := i + 1;$
            if $i \leq n$ **then**
                $location := i$
            else
                $location := 0;$
        return $location;$ /* *Là chỉ số dưới của số hạng bằng x hoặc $location = 0$ nếu không tìm được x* */
    end

Để chuẩn bị cho kiến thức cơ sở giải quyết ví dụ dưới đây về lập thuật toán kiểm tra một số cho trước có là số nguyên tố hay không, chúng ta ghi nhớ lại một số nội dung sau:

Định lý 2.1.1. *Mọi số nguyên $n \geq 2$ đều có thừa số nguyên tố.*

Chứng minh. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề:

$P(n)$: Nếu n là một số nguyên lớn hơn hay bằng 2 thì n có thừa số nguyên tố.

Ta chứng minh rằng $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.

Thật vậy, nếu $n = 2$ thì 2 là thừa số nguyên tố của n. Do đó, kết quả đúng trong trường hợp $n = 2$.

Giả sử k là một số nguyên dương sao cho $k \geq 2$ và các phát biểu $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ đúng, tức là mỗi các số nguyên $2, 3, 4, \ldots, k$ đều có thừa số nguyên tố.

Bây giờ ta xét số nguyên $k + 1 \geq 2$. Chúng ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Nếu $k + 1$ là số nguyên tố thì $k + 1$ là một thừa số nguyên tố của chính nó.

Giả sử $k + 1$ là hợp số. Khi đó, tồn tại số nguyên r và s sao cho $k + 1 = r \cdot s$, trong đó, $1 < r < k + 1$ và $1 < s < k + 1$. Theo giả thiết quy nạp, r có một thừa số nguyên tố và cũng chính là thừa số nguyên tố của $k + 1$. Do đó, $k + 1$ có thừa số nguyên tố.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận mọi số nguyên lớn hơn hay bằng 2 đều có thừa số nguyên tố. □

Định lý 2.1.2. *Nếu n là một số nguyên và là hợp số thì n có thừa số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$.*

Chứng minh. Giả sử rằng n là số nguyên và là hợp số. Khi đó, tồn tại hai số nguyên r và s sao cho $1 < r \leq s < n$ và $n = r \cdot s$. Suy ra $r \leq \sqrt{n}$ vì nếu $r > \sqrt{n}$ thì $t \geq r > \sqrt{n}$ và do đó $n = rs > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$, điều này vô lý.

Từ Định lý 2.1.1, ta tìm được một thừa số nguyên tố của r là p. Vậy p là thừa số nguyên tố của r và r là thừa số nguyên tố của n, do đó, p là thừa số nguyên tố của n. Hơn nữa, $p \leq r \leq \sqrt{n}$. □

Từ hai định lý trên ta suy ra các bước để kiểm tra một số nguyên cho trước là hợp số hay là số nguyên tố như sau:

Các bước kiểm tra một số nguyên $n > 1$ là số nguyên tố:

+) Kiểm tra n có bằng 2 hay không. Nếu $n = 2$ thì kết luận n là số nguyên tố và dừng lại. Nếu không thì chuyển sang bước 2.

+) Kiểm tra số 2 có là ước của n hay không. Nếu 2 là ước số của n thì kết luận n là hợp số. Nếu 2 không là ước số của n thì chuyển sang bước 3.

+) Tìm tất cả các số nguyên tố $p \leq \sqrt{n}$. Nếu không có số nguyên tố p như thế thì n là số nguyên tố. Còn nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $p \leq \sqrt{n}$ thì chuyển sang bước 4.

+) Kiểm tra số nguyên tố p tìm được ở bước 3 xem p có là ước số của n không. Nếu p là ước thì n là hợp số. Nếu mọi số p tìm được ở bước 4 không là ước của n thì n là số nguyên tố.

Từ các bước trên, ta có thuật toán như sau:

Ví dụ 2.1.10. *Viết thuật toán kiểm tra số nguyên dương m cho trước có là số nguyên tố hay không?*

Thuật toán 2.1.8 Kiểm tra số nguyên tố

Input: số nguyên dương m
Output: true nếu m là số nguyên tố, false nếu ngược lại.

function $Nguyento(m)$
  begin
    $i := 2;$
    while $(i \leq \sqrt{m}$ and $m \ mod \ i = 0)$ **do**
      $i := i + 1;$
      $Nguyento := i > \sqrt{m};$
  end

Ví dụ 2.1.11. *Thuật toán tìm kiếm nhị phân*

Thuật toán 2.1.9 Tìm kiếm nhị phân

Input: $L[1 \dots n]$ – Danh sách tìm kiếm
n – số phần tử trong danh sách
x – phần tử cần tìm kiếm

Output: Nếu x có trong danh sách L thì chỉ ra vị trí của nó;
nếu không gắn chỉ số của nó là 0

```
function Ham_tim_kiem_nhi_phan(L, n, x)
    begin
        first := 1; first la diem mut trai cua khoang tim kiem;
        last := n; last la diem mut phai cua khoang tim kiem;
        while first ≤ last do
            begin
                mid := ⌊(first+last)/2⌋;
                if L[mid] = x then
                    location := mid
                else
                    if L[mid] > x then
                        last := mid − 1
                    else
                        first := mid + 1;
                        location := 0;
            end
    end
```

Tiếp theo, sử dụng các thuật toán trên, chúng ta viết thuật toán trộn hai danh sách đã được sắp xếp. Giả sử cả hai danh sách L_1 và L_2 được sắp xếp trong cùng một danh sách L. Giả sử $L[s \dots m]$ biểu diễn các phần tử của L_1 và $L[m+1 \dots t]$ biểu diễn các phần tử của L_2. Gọi A là danh sách đã trộn. Khi đó, danh sách A sẽ có cùng kích thước với L.

Ví dụ 2.1.12. *Thuật toán trộn hai danh sách đã được sắp xếp theo thứ tự*

Thuật toán 2.1.10 Trộn hai danh sách

Input: L, A là các danh sách có cùng kích thước
S, t, $m - 1$ là các số nguyên dương
$L[s \ldots m]$ – Chứa danh sách con thứ nhất
$L[m+1 \ldots t]$ – Chứa danh sách con thứ hai

Output: A – $A[s \ldots t]$ chứa các phần tử của $L[s \ldots t]$ theo thứ tự

```
function merge_List(L, A, s, t, m)
    begin
        i := s;
        j := m + 1;
        k := s;
        while i ≤ m and j ≤ t do
            begin
                if L[i] < L[j] then
                    begin
                        A[k] := L[j];
                        i := i + 1;
                    end
                else
                    begin
                        A[k] := L[j];
                        j := j + 1;
                        k := k + 1;
                    end
                A[k] := L[i];
                k := k + 1;
                i := i + 1;
            end
        while j ≤ t do
            begin
```

```
                $A[k] := L[i];$
                $k := k + 1;$
                $j := j + 1;$
            end
    end
```

2.2. ĐỘ PHỨC TẠP CỦA THUẬT TOÁN

Mở đầu

Khi nào một thuật toán cho lời giải thỏa đáng đối với một bài toán? Một thuật toán cho một lời giải thỏa đáng thì cần ít nhất hai điều kiện. Thứ nhất, thuật toán phải luôn cho đáp số đúng. Làm thế nào để chứng minh được điều đó? Vấn đề này sẽ được trình bày bằng hai phương pháp chứng minh trong hai bài cuối của chương này, đó là sử dụng phương pháp quy nạp và phương pháp đệ quy. Thứ hai, thuật toán phải có hiệu quả. Trong bài này chúng ta sẽ xét vấn đề thứ hai này.

Hiệu quả của một thuật toán được phân tích như thế nào? Một thước đo hiệu quả của thuật toán là thời gian mà máy tính sử dụng để giải bài toán theo thuật toán đang xét, khi các giá trị đầu vào có một kích thước xác định. Một thước đo thứ hai về tính hiệu quả của thuật toán là đo dung lượng bộ nhớ đòi hỏi để thực hiện thuật toán khi các giá trị đầu vào có kích thước xác định.

Các vấn đề trên liên quan đến **độ phức tạp tính toán** của một thuật toán. Sự phân tích thời gian cần thiết để giải một bài toán có kích thước đặc biệt nào đó liên quan đến **độ phức tạp thời gian** của thuật toán. Sự phân tích bộ nhớ cần thiết của máy tính liên quan đến **độ phức tạp không gian** của thuật toán. Việc xem xét độ phức tạp thời gian và không gian của thuật toán là một vấn đề rất thiết yếu khi các thuật toán được thực hiện. Biết một thuật toán sẽ đưa ra đáp số trong một micro giây, trong một phút hoặc trong một năm là điều hết sức quan trọng. Tương tự như vậy, dung lượng bộ nhớ đòi hỏi phải là khả dụng để giải một bài toán, vì vậy độ phức tạp không gian cũng cần phải tính đến.

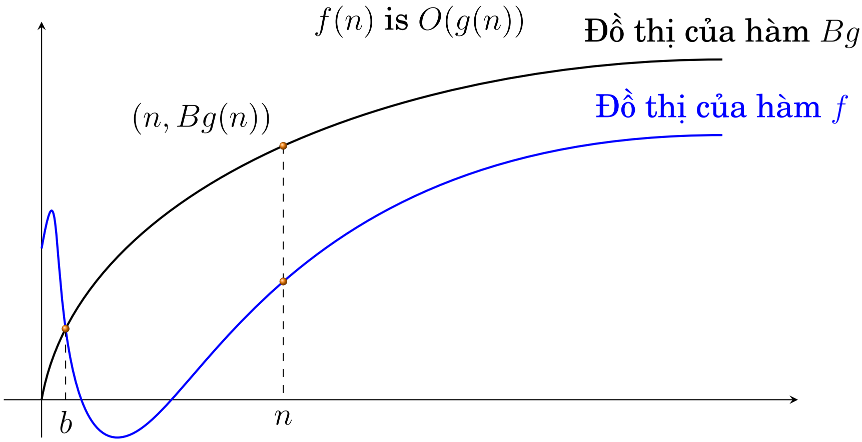
Sự xem xét độ phức tạp không gian gắn liền với các cấu trúc dữ liệu đặc biệt được dùng để thực hiện thuật toán. Vì các cấu trúc dữ liệu không được trình bày trong nội dung môn học này nên độ phức tạp không gian sẽ không được trình bày ở đây. Chúng ta tập trung xem xét về độ phức tạp thời gian.

Độ phức tạp thời gian của một thuật toán có thể biểu diễn qua số các phép toán được dùng bởi thuật toán đó khi các giá trị đầu vào có kích thước xác định. Các phép toán được dùng để đo độ phức tạp thời gian có thể là phép so sánh các số nguyên, các phép cộng, trừ, nhân, chia các số nguyên hoặc bất kì một phép tính sơ cấp nào khác. Sở dĩ độ phức tạp thời gian được mô tả thông qua số các phép toán đòi hỏi thay vì thời gian thực hiện của máy tính là bởi vì các máy tính khác nhau thực hiện cùng một phép tính sơ cấp trong các khoảng thời gian khác nhau. Hơn nữa, phân tích tất cả các phép toán thành các phép tính sơ cấp đối với các bit mà máy tính sử dụng là điều rất phức tạp. Các máy tính nhanh nhất hiện tại có thể thực hiện các phép toán sơ cấp trên các bit (ví dụ cộng, nhân, chia hoặc trao đổi hai bit) chỉ trong 10^{-9} giây (1 nano giây), nhưng một máy tính cá nhân có thể đòi hỏi tới 10^{-6} giây ($1\ \mu s$) tức là lâu hơn 1000 lần khi cùng thực hiện một phép tính.

Định nghĩa 2.2.1. *Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm giá trị thực, tức là miền giá trị của f và g là tập con của $\mathbb{R}$. Ta nói $f(x)$ là **big-O** của $g(x)$, kí hiệu là $f(x) = O(g(x))$, nếu tồn tại hằng số dương c và số x_0 sao cho*

$$|f(x)| \leq c|g(x)|, \text{ với mọi } x \geq x_0.$$

Ta minh họa hình ảnh các hàm $big - O$:



Ví dụ 2.2.1. *Cho* $f(n) = n^2 + 5n$ *và* $g(n) = n^2,\ n \geq 0$. *Ta sẽ chứng tỏ rằng* $f(n) = O(g(n))$.

Thậy vậy, ta có $5n \leq n^2$ với mọi $n \geq 5$. Suy ra, $n^2 + 5n \leq n^2 + n^2$ với mọi $n \geq 5$, hay $n^2 + 5n \leq 2n^2$ với mọi $n \geq 5$.

Chọn $c = 2$ và $n_0 = 5$ thì ta có

$$f(n) \leq cg(n), \text{ với mọi } n \ \geq 5.$$

Do $f(n)$ và $g(n)$ là những hàm không âm nên ta có:

$$|f(n)| \leq c|g(n)|, \text{ với mọi } n \ \geq 5.$$

Vậy, $f(n) = O(g(n))$.

Định lý 2.2.1. *Cho* $f(n)$ *là hàm đa thức* $f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0, a_m \neq 0, n \geq 0$ *và* m *là số nguyên không âm. Khi đó,* $f(n) = O(n^m)$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
|f(n)| &= |a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0| \\
&\leq |a_m| n^m + |a_{m-1}| n^{m-1} + \cdots + |a_1| n + |a_0| \\
&\leq |a_m| n^m + |a_{m-1}| n^m + \cdots + |a_1| n^m + |a_0| n^m \\
&= (|a_m| + |a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) n^m
\end{aligned}$$

với mọi $n \geq 1$. Đặt $c = |a_m| + |a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Khi đó,

$$|f(n) \leq cn^m|, \ \forall n \geq 1.$$

Do đó, $f(n) = O(n^m)$. □

Bảng sau đây liệt kê một số hàm $big - O$ thường xuất hiện trong việc phân tích các thuật toán. Đặt $f(n) = O(g(n))$, trong đó, n là kích thước của bài toán.

Hàm $g(n)$	Tốc độ tăng của $f(n)$
$g(n) = 1$	Tốc độ tăng là hằng, vì vậy nó không phụ thuộc vào n
$g(n) = \log n$	Tốc độ tăng là một hàm của $\log n$. Bởi vì, hàm logarit tăng chậm nên tốc độ tăng của f cũng chậm
$g(n) = n$	Tốc độ tăng là tuyến tính. Tốc độ tăng của f là tỉ lệ thuận với kích thước của bài toán
$g(n) = n \log n$	Tốc độ tăng nhanh hơn thuật toán tuyến tính
$g(n) = n^2$	Tốc độ tăng của hàm tăng nhanh theo kích thước của bài toán.
$g(n) = 2^n$	Tốc độ tăng theo hàm mũ. Tốc độ tăng được bình phương khi kích thước bài toán tăng gấp đôi.

Ví dụ 2.2.2. *Mô tả độ phức tạp thời gian của thuật toán tìm kiếm tuyến tính.*

Giải. Số các phép so sánh được dùng trong thuật toán này cũng sẽ được xem như thước đo độ phức tạp thời gian của nó. Ở mỗi bước của vòng lặp trong thuật toán, có hai phép so sánh được thực hiện: một để xem đã tới cuối danh sách chưa và một để so sánh phần tử x với một số phần tử của danh sách. Cuối cùng còn một phép so sánh nữa nằm ở ngoài vòng lặp. Như vậy, khi x không có mặt trong danh sách đã cho, tổng số phép so sánh đã được sử dụng là $2n+2$. Từ đó, thuật toán tìm kiếm tuyến tính đòi hỏi tối đa là $O(n)$ phép so sánh.

Ví dụ 2.2.3. *Mô tả độ phức tạp thời gian của thuật toán tìm kiếm nhị phân.*

Giải. Để đơn giản, ta giả sử rằng có $n = 2^k$ phần tử trong bảng liệt kê $L[1...n]$, với k là một số nguyên không âm. Chú ý rằng $k = \log n$ (nếu n-số phần tử trong danh sách không phải là lũy thừa của 2 thì ta có thể xem danh sách đó là một phần của danh sách lớn hơn với 2^{k+1} phần tử, trong đó $2^k < n < 2^{k+1}$. Do đó, 2^{k+1} là lũy thừa nhỏ nhất của 2 lớn hơn n.

Ở mỗi giai đoạn của thuật toán, $first$ và $last$ - vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng của danh sách con hạn chế tìm kiếm ở giai đoạn đó được so sánh để xem danh sách con này còn nhiều hơn một phần tử hay không. Nếu $first < last$ một phép so sánh sẽ được làm để xác định x có lớn hơn số hạng ở giữa của danh sách con hạn chế hay không.

Ở giai đoạn đầu tiên, việc tìm kiếm được hạn chế trong một bảng có 2^{k-1} số hạng. Cho đến đây, ta đã dùng hai phép so sánh. Thủ tục này sẽ được tiếp tục, mỗi giai đoạn dùng hai phép so sánh để hạn chế việc tìm kiếm trong một danh sách có số hạng chỉ bằng một nửa. Nói một cách khác, hai phép so sánh đã được dùng ở giai đoạn đầu tiên của thuật toán, khi danh sach có 2^k phần tử, hai phép so sánh nữa khi sự tìm kiếm được quy về danh sách có 2^{k-1} phần tử, rồi hai phép so sánh nữa khi sự tìm kiếm quy về danh sách có 2^{k-2} phần tử, $\ldots$, cho đến khi sự tìm kiếm quy về danh sách có hai phần tử thì hai phép so sánh nữa được sử dụng. Cuối cùng, khi trong danh sách chỉ còn môt phần tử, một phép so sánh sẽ cho chúng ta biết rằng không còn một phần tử nào thêm nữa và một phép so sánh cho biết số hạng đó có phải là x hay không.

Như vậy, cần phải có nhiều nhất $2k+2 = 2\log n + 2$ phép so sánh để thực hiện tìm kiếm nhị phân, khi danh sách tìm kiếm có 2^k phần tử. (Nếu n không phải là lũy thừa của 2, danh sách gốc sẽ được mở rộng tới danh sách có 2^{k+1} phần tử, với $k = \lfloor \log n \rfloor$ và sự tìm kiếm đòi hỏi phải thực hiện $2\lceil \log n \rceil + 2$ phép so sánh). Do đó, thuật toán tìm kiếm nhị phân đòi hỏi tối đa $O(\log n)$ phép so sánh. Từ sự phân tích trên ta suy ra thuật toán tìm kiếm nhị phân, ngay cả trong trường hợp xấu nhất, cũng hiệu quả hơn thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

Bảng thuật ngữ và bảng thời gian

Bảng 2.2.1. Các thuật ngữ thường dùng cho độ phức tạp của một thuật toán

Độ phức tạp	Thuật ngữ
$O(1)$	Độ phức tạp là hằng số
$O(\log n)$	Độ phức tạp logarit
$O(n)$	Độ phức tạp tuyến tính
$O(n \log n)$	Độ phức tạp nlogn
$O(n^b)$	Độ phức tạp đa thức
$O(b^n)$, $b > 1$	Độ phức tạp hàm mũ
$O(n!)$	Độ phức tạp giai thừa

Bảng 2.2.2. Thời gian máy tính được dùng bởi một thuật toán theo kích thước của bài toán

Kích thước	Các phép tính bit được sử dụng Đơn vị mặc định là: giây					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	$3 \cdot 10^{-9}$	10^{-8}	$3 \cdot 10^{-8}$	10^{-7}	10^{-6}	$3 \cdot 10^{-3}$
10^2	$7 \cdot 10^{-9}$	10^{-7}	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-5}	$4 \cdot 10^{13}$	*
10^3	$1,0 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}	$1 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	năm	*
10^4	$1,3 \cdot 10^{-8}$	10^{-5}	$1 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	*	*
10^5	$1,7 \cdot 10^{-8}$	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-2}$	10	*	*
10^6	$2 \cdot 10^{-8}$	10^{-3}	$2 \cdot 10^{-2}$	17 phút	*	*

2.3. MỘT SỐ THUẬT TOÁN

2.3.1. *Thuật toán đối với các phép tính số nguyên*

Trong mục này, chúng ta sẽ học cách biểu diễn một số nguyên theo các cơ số khác nhau và nắm được một số thuật toán cơ bản về phép tính số nguyên.

a. Biểu diễn một số nguyên theo cơ số b.

b. Cộng hai số nguyên.

c. Nhân hai số nguyên.

d. Tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên

a. Biểu diễn số nguyên trong máy tính

Định lý 2.3.1. *Nếu b là một số nguyên, $b > 1$ thì với mỗi số nguyên dương n cho trước đều biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:*

$$n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$$

$$(a_i \in \mathbb{Z}_+, a_i < b, a_k \neq 0). \quad \textbf{(2.1)}$$

trong đó, k là số nguyên không âm, $a_k \neq 0$ và $1 \leq a_i \leq b-1$ với $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Ví dụ 2.3.1. *Cho $n = 35$ và $b = 2$.*

$$\begin{array}{lll}
35 = 17 \cdot 2 + 1; & q_0 = 17 & a_0 = 1, \\
17 = 8 \cdot 2 + 1; & q_1 = 8 & a_1 = 1, \\
8 = 4 \cdot 2 + 0; & q_2 = 4 & a_2 = 0, \\
4 = 2 \cdot 2 + 0; & q_3 = 2 & a_3 = 0, \\
2 = 1 \cdot 2 + 0; & q_4 = 1 & a_4 = 0, \\
1 = 0 \cdot 2 + 1; & q_5 = 0 & a_5 = 1.
\end{array}$$

Do đó, $35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1.$

Định nghĩa 2.3.1. *Sự biểu diễn duy nhất của n trong* (2.1) *được gọi là biểu diễn n theo cơ số b.*

Kí hiệu

$$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0)_b \tag{2.2}$$

Đặc biệt:

Nếu $b = 10$ thì ta nói (2.2) là biểu diễn thập phân của n. (Decimal representation of n).

Nếu $b = 2$ thì ta nói (2.2) là biểu diễn nhị phân của n. (Binary representation of n).

Nếu $b = 8$ thì ta nói (2.2) là biểu diễn bát phân của n. (Octal representation of n).

Ta có thuật toán biểu diễn số nguyên dương trong cơ số thập phân theo cơ số nhị phân.

Ví dụ 2.3.2. *Số $(245)_8$ biểu diễn theo cơ số 10 là:* $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 = 165$
Số $(101011111)_2$ được biểu diễn theo cơ số thập phân là:

$$(101011111)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 351$$

Khai triển theo cơ số 8 của số $(12467)_{10}$

Chia 12467 *cho* 8 *ta được:*

$$12467 = 8 \cdot 1558 + \boxed{3}^{a_0}$$

Tiếp theo chia các thương tìm được cho 8 *ta được:*

$$1558 = 8 \cdot 194 + \boxed{6}^{a_1}$$

$$194 = 8 \cdot 24 + \boxed{2}^{a_2}$$

$$24 = 8 \cdot 3 + \boxed{0}^{a_3}$$

$$3 = 8 \cdot 0 + \boxed{3}^{a_4}$$

Do đó, $(12467)_{10} = (30263)_8$.

Ví dụ 2.3.3. *Khai triển một số nguyên (cơ số thập phân) sang cơ số nhị phân*

Thuật toán 2.3.11 Khai triển một số trong cơ số thập phân sang cơ số nhị phân

Input: n - là một số nguyên không âm
Output: Biểu diễn nhị phân của n

```
procedure decimalToBinary(n)
    begin
        if n > 0 then
            begin
                decimalToBinary (n ÷ 2);
                print n mod 2;
            end
    end
```

Ví dụ 2.3.4. *Khai triển một số nguyên theo cơ số b*

Thuật toán 2.3.12 Khai_triển_cơ_số_b (n: positive integer)

Input: Nhập vào số nguyên n
Nhập vào cơ số b
Output: Dạng khai triển số nguyên n theo cơ số b

```
procedure Khai_trien_so_nguyen_theo_co_so_b(n)
    begin
        q := n;
        k := 0;
        while q ≠ 0 do
            begin
                a_k := q mod b;
                q := ⌊q/b⌋;
                k := k + 1;
            end
        return (a_{k-1} a_{k-2} ... a_0);
    end
```

Ví dụ 2.3.5. *Thuật toán khai triển một số nguyên theo cơ số* 2

Thuật toán 2.3.13 Khai_triển_cơ_số 2 (n: positive integer)

Input: Nhập vào số nguyên n
Output: Dạng khai triển số nguyên n theo cơ số 2

```
procedure decinalToBinary(n)
    begin
        if n > 0 then then
            begin
                decimalToBinary(n div 2);
                print n mod 2;
            end
    end
```

b. Thuật toán cộng hai số nguyên

Ví dụ 2.3.6. *Sử dụng phép cộng trong hệ nhị phân hãy tìm tổng của hai số nguyên 125 và 38.*

Giải. *Trước hết biểu diễn hai số đã cho trong cơ số* 2 *ta được:* $125 = (1111101)_2, 38 = (100110)_2$. *Vậy,*

$$\begin{array}{r} 1111101 \\ + \quad 100110 \\ \hline 10100011 \end{array}$$

Ví dụ 2.3.7.

$$\begin{array}{r} (01100111)_2 \\ + \quad (10110011)_2 \\ \hline (100011010)_2 \end{array}$$

Ví dụ 2.3.8. *Thuật toán cộng các số nguyên*

Thuật toán 2.3.14 Cộng (a, b: positive)

Input: Nhập vào các số nguyên a và b
Output: Tổng của hai số a và b

function Addition(a, b)
  Khai triển nhị phân $a = (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2$
  Khai triển nhị phân $b = (b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0)_2$;
  $c := 0$;
  for $j := 0$ to $n-1$ **do**
    begin
      $d := \left\lfloor \frac{a_j+b_j+c}{2} \right\rfloor$;
      $s_j := a_j + b_j + c - 2d$;
      $c := d$;
      $s_n := c$;
      return Khai triển nhị phân của tổng là:

$(s_n s_{n-1} ... s_1 s_0)_2$;
end

c. Thuật toán nhân hai số nguyên

Ví dụ 2.3.9. *Tìm tích của hai số nguyên* $a = (1101)_2$ *và* $b = (101)_2$.

Giải. *Trước hết ta chú ý rằng*

$ab_0 \cdot 2^0 = (1101)_2 \cdot 1 \cdot 2^0 = (1101)_2$

$ab_1 \cdot 2^1 = (1101)_2 \cdot 0 \cdot 2^1 = (00000)_2$

và $ab_2 \cdot 2^2 = (110100)_2 \cdot 1 \cdot 2^2 = (110100)_2$.

Để tìm tích ta cộng các số $(1101)_2$, $(00000)_2$ *và* $(110100)_2$ *với nhau. Việc thực hiện phép cộng này được thực hiện như trên.*

$$
\begin{array}{r}
1101 \\
\times \quad 101 \\
\hline
1101 \\
0000 \\
1101 \\
\hline
1000001
\end{array}
$$

Vậy, ta được $(1101)_2 \times (101)_2 = (1000001)_2$.

Ví dụ 2.3.10. *Thuật toán nhân số nguyên*

Thuật toán 2.3.15 Nhân (a, b: positive integers)

Input: Nhập vào các số nguyên a và b
Output: Tích của hai số a và b

function Multiplication(a, b)
  begin
    for $j := 0$ to $n - 1$ **do**
      begin
        if $b_j := 1$ **then**
          $c_j := a$ được dịch đi j kí tự

else
$c_j := 0$
$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ là các tích thành phần
$p := 0;$
for $j := 0$ to $n-1$ **do**
$p := p + c_j;$
end
return p; /p *là giá trị tích* ab;/
end

d. Thuật toán tìm ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai số nguyên cho trước

Ví dụ 2.3.11. *Tìm ƯCLN (*414*,* 662*)*

$$662 = 414 \cdot 1 + 248$$

$$414 = 248 \cdot 1 + 166$$

$$248 = 166 \cdot 1 + 82$$

$166 = 82 \cdot 2 + \boxed{2}$. *Ta lại lấy thương chia cho số dư* 2 *và được*

$$82 = 2 \cdot 41,$$

số dư bằng 0.
Do đó, ƯCLN (414*,* 662*)* $= 2$ *vì* 2 *là số dư khác* 0 *của phép chia cuối cùng trong các phép chia liên tiếp ở trên.*

Ví dụ 2.3.12. *Tìm ƯCLN*

Thuật toán 2.3.16 ƯCLN (a, b: positive integers)

Input: Nhập vào các số nguyên a và b
Output: Ước chung lớn nhất của hai số a và b

function ƯCLN(a, b)
begin
$x := a;$

```
        y := b;
        while y ≠ 0 do
            begin
                r := x mod y;
                x := y;
                y := r;
            end
        return x;
    end
```

2.3.2. *Thuật toán RSA*

Thuật toán RSA là một thuật toán mã hóa khóa công khai được phát minh bởi Ron Rivest, Adi Shamir và Leonard Adleman vào năm 1977. Thuật toán RSA là thuật toán mật mã không đối xứng. Tính không đối xứng ở đây thể hiện ở chỗ nó hoạt động trên hai khóa khác nhau, tức là Khóa công khai và Khóa cá nhân. Khóa công khai được cấp cho tất cả mọi người và Khóa cá nhân được giữ riêng tư.

Một ví dụ về mật mã không đối xứng:

+ Một máy khách (ví dụ: trình duyệt) gửi khóa công khai của nó đến máy chủ và yêu cầu một số dữ liệu.

+ Máy chủ mã hóa dữ liệu bằng khóa công khai của máy khách và gửi dữ liệu đã mã hóa.

+ Khách hàng nhận dữ liệu này và giải mã nó.

Vì RSA có tính không đối xứng nên không ai khác ngoại trừ trình duyệt có thể giải mã dữ liệu ngay cả khi bên thứ ba có khóa công khai của trình duyệt.

Ý tưởng của RSA dựa trên thực tế từ việc rất khó để phân tích một số nguyên lớn thành các thừa số nguyên tố. Khóa công khai bao gồm hai số trong đó một số là tích của hai số nguyên tố lớn. Khóa cá nhân được sinh ra từ hai số nguyên tố giống nhau. Vì vậy, nếu ai đó có thể phân tích số lượng lớn, thì khóa riêng sẽ bị xâm phạm. Do đó, sức mạnh mã hóa hoàn toàn nằm ở kích thước khóa và nếu chúng ta tăng gấp đôi hoặc gấp ba kích thước khóa, sức mạnh của mã hóa sẽ tăng theo cấp số nhân. Các khóa RSA thường có độ dài 1024 hoặc 2048 bit, các chuyên gia tin rằng các khóa 1024 bit có thể bị hỏng trong tương lai gần. Nhưng cho đến nay, nó dường như là một nhiệm vụ không khả thi.

Bây giờ, chúng ta sẽ nghiên cứu cơ chế hoạt động của thuật toán mã khóa RSA.

Sinh khóa công khai

+) Chọn hai số nguyên tố. Giả sử là hai số $p = 2$ và $q = 7$. Khi đó, một bộ phận của khóa công khai là $N = p \times q = 14$.

+) Sau đó, chúng ta cần chọn một lũy thừa e thỏa mãn các điều kiện sau:

- e phải là một số nguyên.
- e và N nguyên tố cùng nhau.
- $1 < e < \Phi(N) = (p-1)(q-1)$.

Khóa công khai được đưa ra là (e, N). Giả sử ta chọn $e = 5$. Khi đó, khóa công khai trong trường hợp này là $(e, N) = (5, 14)$.

Sinh khóa cá nhân

- Chúng ta tính $\Phi(N) = (p-1)(q-1)$. Trong trường hợp này $\Phi(N) = 6$.
- Bây giờ ta tính khóa cá nhân, d theo công thức sau:

$$d = \frac{k \times \Phi(N) + 1}{e},$$

với số nguyên k nào đó. Hay $d \cdot e \equiv 1(mod \Phi(N))$. Chẳng hạn, nếu chọn $k = 8$ thì ta tính được $d = 11$. Khi đó, ta có khóa cá nhân là $d = 11$.

Bây giờ ta mã hóa kí tự B theo mã khóa công khai $(e, N) = (5, 14)$.

Ta chuyển chữ B thành số 2. Ta có $2^5 \equiv 4(mod 14)$. Dữ liệu được mã hóa là D tương ứng với số 4.

Với khóa mã cá nhân là $(11, 14)$ ta giải mã như sau: $4^{11} = 4194304 \equiv 2 \ (mod \ 14)$. Ta tìm được chữ B tương ứng với số 2.

Một ví dụ khác minh họa việc mã hóa và giải mã từ "Hi" đối với khóa công khai là $(e, N) = (5, 14)$:

Chuyển chữ cái thành số: H = 8 và I = 9.

Do đó, dữ liệu được mã hóa $c = 89^e = 89^5 = 5584059449$ và $c \equiv 3(mod 14)$.

Do đó, dữ liệu được mã hóa của chúng ta sẽ là 3.

Bây giờ chúng ta sẽ giải mã 3:

Dữ liệu được giải mã với khóa mã cá nhân $(11, 14)$ sẽ là $3^{11} = 177147 \equiv 89(mod 14)$.

Do đó, dữ liệu được mã hóa của chúng ta sẽ là 89 8 = H và 9 = I tức là "HI".

Chú ý: Trong minh họa trên ta cũng có thể tách ra tìm mã hóa từng chữ cái "H" và "I" riêng biệt.

2.3.3. *Thuật toán đối với các phép toán đa thức*

Trong học phần đại số, chúng ta đã biết đa thức một biến là biểu thức có dạng:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_(n-1)x^(n-1) + a_n x^n,$$

trong đó, $a_i, \forall i = \overline{0, n}$, là những số thực hoặc phức và n là số nguyên không âm. Nếu $p(x) = a_0$ thì $p(x)$ được gọi là đa thức hằng. Nếu $p(x)$ là đa thức hằng khác 0 (tức là $a_0 \neq 0$) thì ta nói bậc của $p(x)$ bằng 0. Trong trường hợp $p(x) = 0$ thì bậc của đa thức $p(x)$ là không xác định. Nếu $p(x)$ không là hằng và $a_n \neq 0$ thì n được gọi là bậc của đa thức $p(x)$.

Như ta đã biết, các phép toán cơ bản đối với đa thức là phép toán cộng, trừ, nhân, chia đa thức và tính giá trị của đa thức tại một điểm cho trước. Ví dụ, cho hai đa thức $p(x) = 1 + 3x - 5x^2$ và $q(x) = 3 - 4x$. Khi đó, bậc của đa thức $p(x)$ là 2 và bậc của đa thức $q(x)$ là 1.

Hơn nữa,

$$
\begin{aligned}
p(1) &= 2 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = -12, \\
p(x) + q(x) &= 4 - x - 5x^2, \\
p(x) - q(x) &= -2 + 7x - 5x^2, \\
p(x) \cdot q(x) &= 3 + 5x - 27x^2 + 20x^3
\end{aligned}
$$

Trong bài này, chúng ta sẽ thảo luận các thuật toán sau thực hiện phép toán đối với đa thức:

- Tính giá trị của đa thức tại một điểm
- Cộng hai đa thức
- Trừ hai đa thức
- Nhân hai đa thức

Ví dụ 2.3.13. *Tính giá trị của đa thức*

Thuật toán 2.3.17 Sắp xếp chèn

Input: $p-$ đa thức
$n-$ bậc của đa thức
$a-$ điểm mà cần tính giá trị của đa thức
Output: $p(a)$

```
function Ham_gia_tri(p, n, a)
    begin
        value = 0.0;
        for i := 0 to n do
            if p[i] ≠ 0.0 then
```

```
            value = value + p[i] * a^i;
        return value;
    end
```

Ví dụ 2.3.14. *Cộng hai đa thức*

Thuật toán 2.3.18 Cộng hai đa thức

Input: $p, q-$ các đa thức
$n-$ bậc của đa thức p
$m-$ bậc của đa thức q
Output: $p(x) + q(x)$

```
function Ham_tong(p, q, n, m)
    begin
        size := max(n, m);
        for i := 0 to min(n, m) do
            begin
                t[i] := p(i) + q[i];
                if size = n then
                    for i := min(n, m) to n do
                        t[i] := p[i]
                else
                    for i := min(m, n) to m do
                        t[i] = q[i];
            end
        return t;
    end
```

Ví dụ 2.3.15. *Phép trừ hai đa thức*

Thuật toán 2.3.19 Hiệu hai đa thức

Input: $p, q-$ các đa thức
$n-$ bậc của đa thức p
$m-$ bậc của đa thức q
Output: $p(x) - q(x)$

```
function Ham_hieu(p, q, n, m)
    begin
        size := max(n, m);
        for i := 0 to min(n, m) do
            begin
                t[i] := p(i) - q[i];
                if size = n then
                    for i := min(n, m) to n do
                        t[i] := p[i]
                else
                    for i := min(n, m) to m do
                        t[i] := -q[i];
            end
        return t;
    end
```

Ví dụ 2.3.16. *Phép nhân hai đa thức*

Thuật toán 2.3.20 Tích hai đa thức

Input: $p, q-$ các đa thức
$n-$ bậc của đa thức p
$m-$ bậc của đa thức q
Output: $p(x) \cdot q(x)$

```
function Ham_tich(p, q, n, m)
    begin
        for i := 0 to m + n do
            begin
                t[i] := 0;
                for i := 0 to n do
                    for k := 0 to m do
                        t[i + k] := t[i + k] + p[i] * q(k);
            end
        return t;
    end
```

2.3.4. *Thuật toán nhân hai ma trận*

Định nghĩa 2.3.2. *Cho hai ma trận* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *và* $B = [b_{jk}]_{n\times p}$. *Tích của ma trận* A *với ma trận* B *là một ma trận được kí hiệu và xác định như sau:*

$$C = AB = [c_{ik}]_{m\times p},$$

trong đó, c_{ik} *được xác định bởi công thức*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}, \quad \forall i = 1, 2, ..., m; \quad \forall k = 1, 2, ..., p. \quad \textbf{(2.3)}$$

Ví dụ 2.3.17. *Cho hai ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 1 & -6 \\ -4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận tích AB.

Giải.

Do ma trận A có cấp 3×4 và ma trận B có cấp là 4×2 nên tồn tại tích AB và ma trận tích AB có cấp là 3×2. Để tìm phần tử thuộc dòng i cột j của ma trận tích thì áp dụng công thức (2.3) ta nhân vô hướng véctơ dòng thứ i với véctơ cột j. Theo quy tắc này ta sẽ tìm được tất cả các phần tử của ma trận tích. Ta có kết quả sau:

$$AB = \begin{bmatrix} 25 & -35 \\ 24 & -49 \\ 39 & -32 \end{bmatrix}$$

Từ quy tắc nhân hai ma trận, ta xây dựng được thuật toán nhân hai ma trận dưới đây:

Ví dụ 2.3.18. *Thuật toán nhân ma trận*

Thuật toán 2.3.21 nhân_ma_trận (A, B: ma trận)

Input: Nhập ma trận A
Nhập ma trận B
Output: Ma trận tích AB

```
function Multiplication(A, B)
    begin
        for i := 1 to m do
            begin
                for j := 1 to p do
                    begin
                        c_ij := 0;
                        for q := 1 to n do
                            c_ij := c_ij + a_iq b_qj;
                    end
            end
```

12: **return** $C = [c_{ij}]$; /* *C là ma trận tích của ma trận A với ma trận B;* */
13: **end**

2.4. QUY NẠP TOÁN HỌC

Phép quy nạp toán học thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : P(n)$, trong đó, n_0 là một số nguyên dương nào đó.

Nguyên lý quy nạp thường có hai dạng sau:

Dạng thứ nhất của nguyên lý quy nạp toán học: Cho $P(n)$ là một mệnh đề hay tính chất nào đó chứa số nguyên không âm n và đặt n_0 là số nguyên không âm cố định.

a. Giả sử $P(n_0)$ đúng (tức là $P(n)$ đúng với $n = n_0$) .

b. Khi với k là một số nguyên sao cho $k \geq n_0$ và $P(k)$ đúng thì cần chứng minh $P(k+1)$ là đúng.

Khi đó $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq n_0$.

Bây giờ ta sẽ xem xét một ví dụ rất đơn giản sau để nhận ra các bước chứng minh bằng nguyên lý quy nạp.

Ví dụ 2.4.1. *Chứng minh rằng*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Giải.

Ta kí hiệu $P(n)$ là mệnh đề: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bởi vì ta muốn chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên n sao cho $n \geq 1$ ta bắt đầu kiểm tra $P(n)$ đúng khi $n = 1$.

Với $n = 1$ thì $1 = \frac{1(1+1)}{2}\cdot$ Do đó, $P(1)$ đúng.

Cho k là một số nguyên thỏa mãn $k \geq 1$. Giả sử $P(k)$ đúng, tức là

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Tiếp theo, ta phải kiểm tra $P(k+1)$ đúng, tức là chứng minh

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Tính toán vế trái của đẳng thức này ta được

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\tfrac{k}{2} + 1\right) \\ &= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Điều này suy ra $P(k+1)$ là đúng. Theo nguyên lý quy nạp suy ra $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n.

Chú ý: Từ ví dụ trên, chúng ta nhận thấy để chứng minh một bài toán bằng phương pháp quy nạp có ba bước sau:

a. **Bước cơ sở:** Ta chỉ ra $P(n_0)$ đúng với n_0 là một số nguyên không âm đặc biệt nào đó.

b. **Giả thiết quy nạp:** Giả sử k là một số nguyên sao cho $k \geq n_0$ và $P(k)$ đúng.

c. **Bước quy nạp:** Ta cần chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

Nhận xét: Nguyên lý quy nạp toán học là một công cụ rất hữu dụng trong việc chứng minh các bài toán. Tuy nhiên, chúng ta rất cần chú trọng đến cách sử dụng nguyên lý này, cách thực hiện từng bước của nguyên lý. Trong chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp, đôi khi ta thấy bước cơ sở đơn giản nên bỏ qua, điều này có thể dẫn đến những sai lầm. Ví dụ, ta xét một mệnh đề sau:

"5 là ước của $5n + 3$ với mọi n là số nguyên dương."

Chúng ta sẽ chỉ ra một chỗ hổng trong việc áp dụng nguyên lý này đối với chứng minh sau:

Bước giả thiết quy nạp: Giả sử k là một số nguyên thỏa mãn $k \geq 1$ và $P(k)$ đúng, tức là $5k+3$ chia hết cho 5.

Bước quy nạp: Bây giờ ta chứng tỏ rằng $P(k+1)$ đúng, tức là $5(k+1)+3$ chia hết cho 5. Thật vậy, $5(k+1)+3 = (5k+3)+5$. Bởi vì 5 chia hết cho 5 và $5k+3$ chia hết cho 5 (theo giả thiết quy nạp) nên $5(k+1)+3$ chia hết cho 5. Theo nguyên lý quy nạp thì 5 là ước của $5n+3$ với mọi n là số nguyên dương. Kết luận này sai vì ta có thể thử ngay $P(1)$ không đúng. Lý do của những mâu thuẫn trên là ta đã áp dụng nguyên lý quy nạp nhưng không thực hiện bước cơ sở.

Ví dụ 2.4.2. *Sử dụng nguyên lý quy nạp toán học chứng minh rằng* $7^n + 5$ *chia hết cho* 3 *với mọi số nguyên không âm* n.

Giải. Kí hiệu $P(n)$ là mệnh đề: "$7^n + 5$ chia hết cho 3".

Ta chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 0$, $P(n)$ là đúng. +) *Bước cơ sở:* Nếu $n = 0$ thì $7^n + 5 = 7^0 + 5 = 6$ chia hết cho 3. Do đó, $P(n)$ đúng với $n = 0$.

+) *Bước giả thiết quy nạp:* Giả sử $P(k)$ đúng đối với với số nguyên k thỏa mãn $k \geq 0$, tức là $7^k + 5$ chia hết cho 3.

+) *Bước quy nạp:* Ta chứng tỏ rằng $P(k+1)$ là đúng; tức là $7^{k+1} + 5$ chia hết cho 3.

Theo giả thiết quy nạp, 3 là ước của $7^k + 5$, mà 3 cũng là ước số của 30. Do đó, suy ra 3 là ước của $7\left(7^k + 5\right) - 30 = 7^{k+1} + 5$. Vậy, nếu $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ thì suy ra $P(k+1)$ cũng đúng. Do đó, theo nguyên lý quy nạp suy ra $7^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Ví dụ 2.4.3. *Chứng minh rằng:*

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Giải.

Đặt $P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

+) *Bước cơ sở:* Bởi vì, ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n nên bước cơ sở ta kiểm tra $P(n)$ đúng với giá trị $n = 0$. Thật vậy, với $n = 0$ thì ta có: $1 = 2^0 = 2 - 1$, do đó mệnh đề $P(0)$ đúng.

+) *Bước giả thiết quy nạp:* Giả sử $P(k)$ đúng với k là một số nguyên dương nào đó. Tức là,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

+) *Bước quy nạp:* Ta cần chứng minh đẳng thức sau đúng:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1. \quad (*)$$

Thật vậy, tính toán vế trái của $(*)$ ta được:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k+1} &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

Suy ra, $P(k+1)$ đúng. Từ đó, theo nguyên lý quy nạp ta kết luận: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$ với mọi $n \geq 0$.

Ví dụ 2.4.4. *Chứng minh rằng: Biểu thức $n^3 - 7n + 3$ chia hết cho 3, với mọi số nguyên dương n.*

Giải.

Đặt $P(n) : n^3 - 7n + 3$ chia hết cho 3.
Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$

* *Bước cơ sở:* Thật vậy, với $n = 1$ thì ta có: $1^3 - 7 \cdot 1 + 3 = -3 \vdots 3$, do đó $P(1)$ đúng.

* *Bước giả thiết quy nạp:* Giả sử $P(k)$ đúng với k là một số nguyên dương nào đó. Tức là, $k^3 - 7k + 3$ chia hết cho 3.

**Bước quy nạp:* Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là chứng minh: $(k+1)^3 - 7(k+1) + 3$ chia hết cho 3.

Ta có

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - 7(k+1) + 3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 7k - 7 + 3 \\ &= (k^3 - 7k + 3) + 3(k^2 + k - 2)\end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, $k^3 - 7k + 3$ chia hết cho 3. Mặt khác, $3(k^2 + k - 2)$ cũng chia hết cho 3. Do đó, $n^3 - 7n + 3$ chia hết cho 3, với mọi số nguyên dương n.

Các ví dụ trên chỉ ra cách sử dụng nguyên lý quy nạp ở dạng thứ nhất để chứng minh một mệnh đề nào đó đúng. Trong các ví dụ này, trong bước giả thiết quy nạp chúng ta giả sử mệnh đề $P(k)$ là đúng và sử dụng nó trong chứng minh $P(k+1)$ đúng. Bây giờ nếu ta giả sử $P(k)$ đúng thì tất các mệnh đề giữa bước cơ sở và bước giả thiết quy nạp, tức là các mệnh đề $P(n_0+1), ..., P(k-2), P(k-1)$ cũng phải đúng, mặc dù các mệnh đề này không cần sử dụng để chứng minh $P(k+1)$ đúng. Tuy nhiên, có nhiều trường hợp các mệnh đề ở giữa này cần được sử dụng trong chứng minh $P(k+1)$ đúng. Trong trường hợp này, ta có nguyên lý quy nạp dạng thứ 2.

Dạng thứ hai của nguyên lý quy nạp toán học: Cho $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số nguyên không âm n và n_0 là một số nguyên không âm cố định.

a. Giả sử $P(n_0)$ đúng.

b. Nếu với mọi số nguyên $k \geq n_0 \backslash P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), ..., P(k)$ đúng thì suy ra $P(k+1)$ đúng. Do đó, $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Ví dụ 2.4.5. *Xét dãy Fibonaci $f_1, f_2, f_3, ...,$ trong đó $f_1 = 1, f_2 = 1$ và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với $n \geq 3$. Khi đó,*

$$\begin{aligned} f_3 &= f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2 \\ f_4 &= f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $f_n \geq u^{n-2}$ *với* $n \geq 3$*, trong đó* $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Giải.

Đặt $P(n): \ f_n \geq u^{n-2}$, trong đó $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ta cần chứng minh rằng với mọi $n \geq 3, \quad p(n)$ đúng.

Bước cơ sở: Với $n = 3$ ta có $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ và $f_3 = 2$. Do đó $f_3 = 2 > u = u^{3-2}$.

Bước giả thiết quy nạp: Giả sử rằng $P(i)$đúng với mọi số nguyên i sao cho $3 \leq i \leq k$, trong đó k là số nguyên dương.

Bước quy nạp: Trong bước này chúng ta sẽ chỉ ra rằng $P(k+1)$ đúng. Ta thấy $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Suy ra $u^2 = u + 1$. Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} u^{k-1} &= u^2 \cdot u^{k-3} \\ &= (u+1) \cdot u^{k-3} \\ &= u^{k-2} + u^{k-3} \\ &\leq f_k + f_{k-1}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, $f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$ với $k \geq 3$.
Vậy $f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \geq u^{k-1}$. Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra $f_n \geq u^{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

2.5. PHÉP ĐỆ QUY

2.5.1. *Định nghĩa bằng đệ quy*

Kỹ thuật định nghĩa một đối tượng qua chính nó được gọi là đệ quy (hồi quy).

Chúng ta có thể dùng đệ quy để định nghĩa các dãy số, các hàm số và các tập hợp.

Ví dụ 2.5.1. *Cho dãy số* $\{a_n = 2^n\}_n$*,* $n = 0, 1, 2\ldots$*, được định nghĩa bằng đệ quy:*

$$a_0 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n, \ n = 0, 1, 2\ldots.$$

Dãy số $\{a_n = 3^n\}_n$*, với* $n = 0, 1, 2\ldots$ *được định nghĩa bằng công thức đệ quy như sau:*

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n,\ n = 0, 1, 2\ldots.$$

Tập hợp S *các số tự nhiên chia hết cho* 3 *được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

$$0 \in S,\ \forall x \in S \Rightarrow x + 3 \in S.$$

a. Các hàm định nghĩa bằng đệ quy

Để định nghĩa một hàm số xác định trên tập số nguyên không âm, chúng ta cho trước các điều kiện:

i) Giá trị của hàm tại $n = 0$

ii) Công thức tính giá trị của nó tại số nguyên n từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

Cách định nghĩa một hàm số như trên được gọi là định nghĩa hàm số bằng đệ quy.

Ví dụ 2.5.2. f *được định nghĩa bằng đệ quy: Cho hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *xác định bởi* $f(0) = 3, f(n+1) = 2f(n)+3$*. Hãy tính* $f(1), f(2), f(3), f(4)$.

Giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(0+1) = 2f(0) + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9\\
f(2) &= f(1+1) = 2f(1) + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21\\
f(3) &= f(2+1) = 2f(2) + 3 = 2 \times 21 + 3 = 45\\
f(4) &= f(3+1) = 2f(3) + 3 = 2 \times 45 + 3 = 93.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.3. *Định nghĩa đệ quy của hàm* $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Giải.

Phần đầu của định nghĩa đệ quy là:

$$f(0) = a_0$$

phần thứ hai của định nghĩa đệ quy là:

$$f(n+1) = f(n) + a_{n+1}$$

Ví dụ 2.5.4. *Cho* a_n *là số hạng thứ* n *của dãy số* $a_1, a_2, ..., a_n$ *thỏa mãn quan hệ đệ quy* $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 6,\ \ n \geq 3$*, với điều kiện ban đầu* $a_1 = 2$ *và* $a_2 = 8$*. Chứng minh rằng:* $a_n = 4^n - 3^n + 1,\ n \geq 1$.

Giải.

Ta chứng minh bài toán này bằng phương pháp quy nạp.

Bước cơ sở: Với $n = 1, 2$ thì sử dụng các điều kiện ban đầu ta có:

$$a_1 = 2 = 4^1 - 3^1 + 1,$$
$$a_2 = 8 = 4^2 - 3^2 + 1.$$

Điều này suy ra bài toán đúng với $n = 1, 2$.

Bước giả thiết quy nạp: Giả sử (2.5.4) đúng với mọi số nguyên dương $n = 1, 2, 3, ..., k$, $k \geq 2$.

Bước quy nạp: Với $n = k+1$, do $k \geq 2$ nên $n \geq 3$, $a_{k+1} = 7a_k - 12a_{k-1} + 6$, theo giả thiết quy nạp $a_k = 4^k - 3^k + 1$ và $a_{k-1} = 4^{k-1} - 3^{k-1} + 1$.
Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 7a_k - 12a_{k-1} + 6 \\
&= 7\left(4^k - 3^k + 1\right) - 12\left(4^{k-1} - 3^{k-1} + 1\right) + 6 \\
&= 7 \cdot 4^k - 12 \cdot 4^{k-1} - 7 \cdot 3^k + 12 \cdot 3^{k-1} + 1 \\
&= (7-3) \cdot 4^k - (7-4) \cdot 3^k + 1 \\
&= 4 \cdot 4^k - 3 \cdot 3^k + 1 \\
&= 4^{k+1} - 3^{k+1} + 1.
\end{aligned}$$

Kết quả này chứng tỏ đẳng thức (2.5.4) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra $a_n = 4^n - 3^n + 1, \quad n \geq 1$.

Định nghĩa 2.5.1. *Một quan hệ đệ quy (hồi quy) đối với một dãy số* a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ *là một phương trình biểu thị mối quan hệ giữa* a_n *với các số hạng* a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-2}, a_{n-1} *với mọi số nguyên* n *với* $n \geq k$, *trong đó* k *là số nguyên không âm. Các điều kiện ban đầu của quan hệ đệ quy là tập hợp các giá trị xác định của các số hạng* $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$.

Ví dụ 2.5.5. *Phương trình* $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ *với mọi* $n \geq 2$ *là một quan hệ đệ quy. Nó xác định công thức tính* a_n *thông qua* a_{n-1} *và* a_{n-2}. *Với* $k = 2$ *thì cần cho hai điều kiện ban đầu là* $a_0 = 5$ *và* $a_1 = 7$.

Ví dụ 2.5.6. *An sẽ nhận được số tiền lãi hằng năm của khoản tiền 10.000 USD gửi vào một ngân hàng với lãi suất* 7% *mỗi năm. An muốn biết tổng số tài khoản tích lũy sau* n *năm. Đặt* A_n *là tổng số tài khoản tích lũy của An sau* n *năm. Hãy xác định công thức đệ quy và các điều kiện ban đầu cho dãy* $A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...$

Giải.

Số tiền gửi ban đầu chính là điều kiện ban đầu $A_0 = 10.000$. Tổng số tiền tích lũy sau năm thứ $n-1$ sẽ là số tiền gốc của năm thứ n. Với tỷ lệ lãi suất là 7%, số tiền lãi trong năm thứ n sẽ là $(0,07)\,A_{n-1}$.

Vậy, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} &A_n = A_{n-1} + (0,07)\,A_{n-1}, \quad \forall n \geq 1, \\ &A_0 = 10000. \end{aligned}$$

b. Các tập hợp được định nghĩa bằng đệ quy

Ví dụ 2.5.7.

a) Tập hợp S *gồm các số nguyên chẵn được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

$$0 \in S; \ x \in S \Longrightarrow x - 2 \in S, \ x + 2 \in S$$

b) Tập hợp các số nguyên lẻ được định nghĩa bằng đệ quy là:

$$1 \in S,\ x \in S \Longrightarrow x - 2 \in S,\ x + 2 \in S$$

c) Tập các số nguyên dương đồng dư với $2\ mod\ 3$

$$2 \in S,\ x \in S \Longrightarrow x + 3 \in S.$$

2.5.2. *Các thuật toán đệ quy*

Định nghĩa 2.5.2. *Một thuật toán được gọi là đệ quy nếu nó giải bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán cũng như vậy nhưng dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.*

Ví dụ 2.5.8. *Thuật toán đệ quy tính* a^n

Procedure *power (a: số thực khác 0, n: số nguyên không âm)*

if *n = a* ***then*** *power (a, n) := 1*

else *power (a, n) = a * power (a, n-1)*

Ví dụ 2.5.9. *Thuật toán đệ quy tìm ƯCLN(a, b)*

Procedure ƯCLN (a, b:các số nguyên không âm, a<b)

if a = 0 **then** ƯCLN (a, b) := b

else ƯCLN(a, b) := ƯCLN (b mod a)

Ví dụ 2.5.10. *Thuật toán thủ tục đệ quy tính giai thừa*

Procedure factorial (n: nguyên dương)

if $n = 1$ **then** factorial $(n) := 1$

else factorial $(n) := n$ * factorial $(n - 1)$

Ví dụ 2.5.11. *Thủ tục lặp tính giai thừa*

Procedure Intevative factorial (n: nguyên dương);

$x := 1$

for $i := 1$ **to** n **do**

$x := i * n$

x là $n!$

Ví dụ 2.5.12. *Thủ tục đệ quy tính các số Fiboraci*

Procedure fibonaci (n: nguyên không âm)

if $n = 0$ **then** fibonaci $n := 0$

else fibonaci $n :=$ fibonaci $(n-1)$ + fibonaci $(n-2)$

Ví dụ 2.5.13. ***Nợ thẻ tín dụng:*** *Nam có số dư nợ* 3.000 *USD trên thẻ tín dụng, tính phí lãi suất* 1% *USD mỗi tháng trên bất kỳ số dư chưa thanh toán nào. Nam có thể đủ khả năng trả* 100 *USD cho số dư mỗi tháng. Số dư của Nam mỗi tháng sau khi thanh toán* 100 *USD được cho bởi công thức đệ quy*

$$B_0 = 3.000\ \textbf{\textit{USD}};\ B_n = 1,01B_{n-1} - 100.$$

Xác định số dư nợ của Nam sau khi thực hiện khoản thanh toán thứ $n,\ 1 \le n \le 34$*, tức là xác định* B_n.

Giải.
Theo công thức truy hồi:

$$B_0 = 3.000\ \textbf{USD};\ B_n = 1,01B_{n-1} - 100.$$

Ta có,

$$\begin{aligned}
B_1 &= 1,01B_0 - 100\\
B_2 &= 1,01B_1 - 100 = 1,01\cdot(1,01B_0 - 100) - 100\\
&= 1,01^2B_0 - 1,01\cdot 100 - 100\\
B_3 &= 1,01B_2 - 100 = 1,01\cdot(1,01^2B_0 - 1,01\cdot 100 - 100) - 100\\
&= 1,01^3B_0 - 1,01^3\cdot 100 - 1,01^2\cdot 100 - 100
\end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình này ta được công thức:

$$B_n = 1,01^n B_0 - \big(1,01^{n-1} + 1,01^{n-2} + \cdots + 1,01 + 1\big) \cdot 100$$

Áp dụng công thức tổng của n số hạng đầu tiên trong cấp số nhân với công bội $1,01$ ta tính được biểu thức trong ngoặc trong công thức trên:

$$1,01^{n-1} + 1,01^{n-2} + \cdots + 1,01 + 1 = \frac{1,01^n - 1}{1,01 - 1}$$

Do đó, ta tìm được:

$$B_n = 1,01^n B_0 - \frac{1,01^n - 1}{1,01 - 1} \cdot 100.$$

Ví dụ 2.5.14. ***Cho vay mua ô tô:*** *Trung mua một chiếc ô tô bằng cách vay* 18.500 *USD với lãi suất* $0,5\%$/*tháng. Khoản thanh toán hằng tháng thông thường của Trung là* $434,47$ *USD mỗi tháng, nhưng anh ấy nhận thấy mình có đủ khả năng và quyết định trả thêm* 100 *USD vào số dư nợ mỗi tháng. Số dư nợ của anh ta mỗi tháng được cho bởi công thức đệ quy:*

$$B_0 = 18.500;\ B_n = 1,005B_{n-1} - 534,47$$

Xác định số dư nợ của Trung sau khi thực hiện xong thanh toán lần thứ 10, *tức là xác định* B_{10}.

Giải.

Theo công thức truy hồi:

$$B_0 = 18.500;\ B_n = 1,005B_{n-1} - 534,47$$

Ta có,

$$\begin{aligned}
B_1 &= 1,005B_0 - 534,47\\
B_2 &= 1,005B_1 - 534,47 = 1,005 \cdot (1,005B_0 - 534,47) - 534,47\\
&= 1,005^2 B_0 - 1,005 \cdot 534,47 - 534,47\\
B_3 &= 1,005B_2 - 534,47\\
&= 1,005 \cdot (1,005^2 B_0 - 1,005 \cdot 534,47 - 534,47) - 534,47\\
&= 1,005^3 B_0 - -1,005^2 \cdot 534,47 - 1,005 \cdot 534,47 - 534,47
\end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình này ta được công thức:

$$B_n = 1,005^n B_0 - \left(1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \cdots + 1,005 + 1\right) \cdot 534,47$$

Áp dụng công thức tổng của n số hạng đầu tiên trong cấp số nhân với công bội $1,005$ ta tính được biểu thức trong ngoặc trong công thức trên:

$$1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \cdots + 1,005 + 1 = \frac{1,005^n - 1}{1,005 - 1}$$

Do đó, ta được,

$$B_n = 1,005^n B_0 - \frac{1,005^n - 1}{1,005 - 1} \cdot 534,47.$$

Thay $n = 10$ vào B_n ta được $B_{10} = 13.979,519$ USD.

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 2

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Thuật toán	Algorithm
Thuật toán tìm kiếm	Searching algorithm
Thuật toán tìm kiếm tuyến tính	Linear search algorithm
Thuật toán sắp xếp	Algorithms of sorting
Tìm kiếm tuần tự	Sequential search
Tìm kiếm nhị phân	Binary search
Sắp xếp chọn	Selection sort
Sắp xếp chèn	Insertion sort
Độ phức tạp tính toán	The computational complexity
Độ phức tạp thời gian	The time complexity
Độ phức tạp không gian	The space complexity
Ma trận	Matrix
Quy nạp toán học	Mathemtical Induction
Phép đệ quy	Recurrence
Thuật toán đệ quy	Recursive Algorithms

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

THUẬT TOÁN VỀ CÁC PHÉP TÍNH SỐ NGUYÊN

Bài 2.1: Chuyển dạng biểu diễn thập phân sang dạng biểu diễn nhị phân của các số nguyên sau:

a) 231 b) 4532 c) 97644

Bài 2.2: Cũng câu hỏi như bài 1 đối với các số nguyên sau:

a) 321 b) 1023 c) 100632

Bài 2.3: Chuyển từ dạng biểu diễn nhị phân sang biểu diễn thập phân của các số nguyên sau:

a) 11111 b) 1000000001

c) 101010101 d) 110100100010000

Bài 2.4: Ta dùng các kí hiệu OR, AND và XOR thay cho các phép toán lôgic $\wedge$, $\vee$ và $\oplus$ như thường được dùng trong ngôn ngữ lập trình. Hãy thực hiện các phép tính OR, AND và XOR của các xâu bít sau:

a) 1011011100; 0101101101

b) 1110001010; 1010101111

c) 110001110101; 001101110010

Bài 2.5: Xác định các biểu thức sau:

a) $11001 \wedge (00110 \vee 10101)$;

b) $(101011 \wedge 0101001) \vee 1100010$;

c) $(10111001 \oplus 01001101) \oplus 00011110$.

QUY NẠP TOÁN HỌC

Bài 2.6: Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng:

$3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1}-1)}{4}$, trong đó, n là số nguyên không âm.

Bài 2.7: Chứng minh rằng:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2.8: Chứng minh rằng:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2.9: Chứng minh rằng:

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},$$

với n là số nguyên không âm.

Bài 2.10: Chứng minh rằng:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Bài 2.11: Chứng minh rằng:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2.12: Chứng minh rằng:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{2},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2.13: Chứng minh rằng:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},\ \forall n : \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n > 1 \end{cases}$$

Bài 2.14: Chứng minh $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \mathrm{O}(n^5 - n^4)$.

PHÉP ĐỆ QUY

Bài 2.15: Giải phương trình $a_n = 2a_{n-1} + n \cdot 2^n$ với điều kiện ban đầu là $a_0 = 1$.

Bài 2.16: Giải phương trình $a_n = 2a_{n-1} + n^3 \cdot 2^n$ với điều kiện ban đầu là $a_0 = 2$.

Bài 2.17: Giải phương trình $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$, với điều kiện ban đầu là $a_0 = 1$.

Bài 2.18: Giải phương trình $a_n = ra_{n-1} + r^n$ với điều kiện ban đầu là $a_0 = 1$.

Bài 2.19: Giải phương trình $a_n = ra_{n-1} + s^n$ với điều kiện ban đầu là $a_0 = 1$.

Bài 2.20: Giải phương trình $a_n = ra_{n-1} + n$ với điều kiện ban đầu là $a_0 = 1$.

THUẬT TOÁN

Bài 2.21: Cho hàm số $f(n) = 2n^4 + 7n + 5,\ n \geq 0$. Sử dụng định nghĩa để chứng minh $f(n) = O(n^4)$.

Bài 2.22: Chứng minh rằng $\sqrt(1) + \sqrt(2) + \cdots + \sqrt(n) \leq n^(3/2)$. Từ đó, chứng minh $\sqrt(1) + \sqrt(2) + \cdots + \sqrt(n) = O(n^(3/2))$.

Bài 2.23: Hãy viết thuật toán đệ quy tính $n \cdot x$ với mọi số nguyên dương n và số nguyên x.

Bài 2.24: Hãy viết thuật toán đệ quy tính tổng của n số nguyên dương đầu tiên.

Bài 2.25: Hãy viết thuật toán đệ quy tính tổng của n số nguyên dương lẻ đầu tiên.

Bài 2.26: Hãy viết thuật toán đệ quy tính a^{2^n} trong đó a là một số thực và n là số nguyên dương.

$\Big($Gợi ý: Dùng đẳng thức $a^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2\Big)$.

Bài 2.27: Hãy viết thuật toán tìm đệ quy tìm số hạng thứ n của dãy $\{a_n\}$, biết dãy số đó được xác định như sau: $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, với $n = 3, 4, 5, \ldots$

Bài 2.28: Hãy viết thuật toán đệ quy và thuật toán lặp tìm số hạng thứ n của dãy được xác định như sau: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5$ và $a_n = a_{n-1} \cdot (a_{n-2})^2 \cdot (a_{n-3})^3$, với $n = 3, 4, 5, \ldots$ Thuật toán nào hiệu quả hơn?

Chương 3

BÀI TOÁN ĐẾM CÁC PHẦN TỬ

Trong Chương 3, chúng tôi trình bày cơ sở của phép đếm, một số nguyên lý đếm như nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ và nguyên lý Dirichlet. Sau đó, chúng ta sẽ thảo luận về công thức đếm như công thức tổ hợp, chỉnh hợp và quan hệ truy hồi. Các khái niệm này được sử dụng trong phân tích một hệ với thời gian rời rạc, phân tích thuật toán hoặc sửa lỗi code,...

Cuối chương này, chúng tôi trình bày các bài toán tồn tại, bài toán liệt kê. Đây là những bài toán quan trọng để giải quyết các vấn đề trong thực tế cuộc sống. Thực ra, trước khi giải quyết bài toán đếm số lượng thì chúng ta cần xem xét, kiểm tra xem có tồn tại nghiệm hay các phần tử thỏa mãn tính chất đã cho hay không. Nghiên cứu bài toán tồn tại sẽ cho ta phương pháp xét sự tồn tại kết quả của bài toán. Sau khi kiểm tra sự tồn tại kết quả của bài toán thì chúng ta mới sử dụng các nguyên lý đếm, các công thức đếm để chỉ ra số kết quả của bài toán. Trong trường hợp số kết quả là hữu hạn, chúng ta cần một mức cụ thể hơn là chỉ rõ các kết quả đó, đây là bài toán liệt kê. Ngày nay, với công cụ máy tính hiện đại có thể chỉ cho chúng ta tất cả các kết quả của bài toán mặc dù chúng khá lớn. Điều này cho chúng ta cách nhìn trực quan, chi tiết về lời giải bài toán.

3.1. BÀI TOÁN ĐẾM

Trong thực tế, chúng ta thường gặp những bài toán đếm số đồ vật có chung một hay một số tính chất nào đó. Để đáp ứng nhu cầu cuộc sống hàng ngày, chúng ta cần phải tính số lượng các đối tượng hoặc xác định số cách thực hiện để giải quyết một công việc cụ thể nào đó. Những vấn đề đó sinh ra bài toán đếm. Các bài toán đếm có mặt thường xuyên trong Toán học và trong Khoa học máy tính. Chẳng hạn, trong khoa học máy tính chúng ta đếm số câu lệnh trong một thuật toán, đếm số mật khẩu có thể tạo được theo một số điều kiện nào đó của các tài khoản email, face book,... Trong chương này, chúng ta sẽ thảo luận về một số kỹ thuật đếm. Các ý tưởng về phép hợp, giao và tích Đề-các của các tập hợp sẽ được sử dụng để hiểu các kỹ thuật cơ bản này.

3.1.1. *Cơ sở của phép đếm*

Hai nguyên lý cơ bản của phép đếm:

a. Nguyên lý cộng (Addition Principle)

b. Nguyên lý nhân (Mutiplication Principle)

a. Nguyên lý cộng

Giả sử có hai công việc: Công việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, công việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách và nếu hai công việc này không thể làm đồng thời thì có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai công việc đó.

Ví dụ 3.1.1. *Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong hai danh sách tương ứng có* 26, 42 *bài. Biết rằng hai danh sách không có bài thực hành nào chung. Hỏi có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?*

Ta có: $26 + 42 = 68$ cách.

Ví dụ 3.1.2. *Một trường trung học phổ thông có* 500 *học sinh lớp* 10*,* 450 *học sinh lớp* 11 *và* 400 *học sinh* 12*. Cần chọn một học sinh đại diện cho trường tham gia vào Ban chấp hành Hội học sinh, sinh viên Thành phố. Hỏi có bao nhiêu cách?*

Ta có: $500 + 450 + 400 = 1350$ cách.

Tổng quát:

+) Giả sử có m việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$ có thể làm tương ứng bằng n_1, n_2, $\ldots$, n_m cách và giả sử không có hai việc nào đó có thể làm đồng thời. Khi đó, số cách làm một trong m việc là: $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

+) Giả sử một công việc có m phương án giải quyết khác nhau, phương án thứ i có n_i cách $(i = \overline{1, m})$. Vậy, số cách giải quyết công việc đó là: $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Để vận dụng có hiệu quả nguyên lý cộng, ta chuyển cách diễn đạt nguyên lý này sang ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho n tập hợp A_k $(1 \le k \le n)$ với $|A_k| = m_k$ và $\forall i, j\,(1 \le i, j \le n)$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, khi $i \neq j$. Khi đó, số cách chọn a_1, hoặc a_2, $\ldots$ hoặc a_n (trong đó a_i thuộc tập A_i) sẽ bằng số phần tử a thuộc tập $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ và bằng $|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |A_k|$.

Ví dụ 3.1.3. *Tìm số các số nguyên nằm giữa số* 4 *và* 100 *mà chữ số hàng đơn vị là* 3 *hoặc* 5 *hoặc* 7*.*

Giải.

Cách 1: Bài toán đã cho chia làm hai trường hợp là các số có 1 chữ số và các số có 2 chữ số thỏa mãn đề bài.

+) Có hai số có 2 chữ số thỏa mãn đề bài là 5 và 7.

+) Có 9×3 số có hai chữ số thỏa mãn đề bài.

Vậy, có tổng số $2 + 9 \times 3 = 29$ số thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Ta đặt: T_1 là tập hợp các số nguyên nằm giữa 4 và 100 mà chữ số hàng đơn vị là 3.

T_2 là tập hợp các số nguyên nằm giữa 4 và 100 mà chữ số hàng đơn vị là 5.

T_3 là tập hợp các số nguyên nằm giữa 4 và 100 mà chữ số hàng đơn vị là 7.

Ta có $13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83$ và 93 là 9 số nằm giữa 4 và 100 mà có chữ số hàng đơn vị là 3. Do đó, $|T_1| = 9$.

Có 10 số nguyên $5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85$ và 95 nằm giữa 4 và 100, đồng thời có chữ số hàng đơn vị bằng 5. vậy $|T_2| = 10$.

Ta cũng có 10 số nguyên $7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87$ và 97 nằm giữa 4 và 100, đồng thời có chữ số hàng đơn vị bằng 7 nên $|T_3| = 10$.

Tất cả các trường hợp này là độc lập với nhau, nên số các số nguyên nằm giữa 4 và 100 mà có chữ số hàng đơn vị là 3 hoặc 5 hoặc 7 là $9 + 10 + 10 = 29$.

Ví dụ 3.1.4. *Mỗi người sử dụng máy tính đều có mật khẩu dài từ 6 đến 8 kí tự, trong đó mỗi kí tự là một chữ cái Tiếng Anh in hoa hoặc chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu có thể tạo được?*

Giải.

Ta đặt S_6, S_7, S_8 là ba tập hợp các mật khẩu lần lượt gồm 6, 7, 8 kí tự và thỏa mãn đề bài.

Do có 10 chữ số 0, $1, \ldots$, 9 và 26 chữ cái Tiếng Anh nên ta có số mật khẩu gồm 6 kí tự là:$|S_6| = 36^6 - 26^6$ (trong đó, 26^6 là số mật khẩu có 6 kí tự và chỉ gồm toàn bằng chữ cái Tiếng Anh in hoa).

Tương tự: $|S_7| = 36^7 - 26^7$ (trong đó 26^7 là số mật khẩu có 7 kí tự và chỉ gồm toàn bằng chữ cái Tiếng Anh in hoa).

$|S_8| = 36^8 - 26^8$ (trong đó, 26^8 là số mật khẩu có 8 kí tự và chỉ gồm toàn bằng chữ cái Tiếng Anh in hoa).

Do đó, số mật khẩu có thể tạo được thỏa mãn đề bài là:

$$|S| = |S_6| + |S_7| + |S_8| = 2.684.483.063.360.$$

Ví dụ 3.1.5. *Với sáu chữ số:* 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5 *có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm* 4 *chữ số khác nhau và trong mỗi số nhất thiết phải có chữ số* 1*?*

Giải.

Gọi số phải lập là $\overline{abcd}$. Vì trong $\overline{abcd}$ nhất thiết phải có mặt chữ số 1, nên ta xét các tập A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là các tập số có dạng $\overline{1bcd}, \overline{a1cd}, \overline{ab1d}, \overline{abc1}$.

a) Xét tập A_1 khi lập số dạng $\overline{1bcd}$. Ta có thể chọn b là chữ số t bất kì trong 5 chữ số: 0, 2, 3, 4, 5; c chỉ có thể chọn chữ số s bất kì trong 4 chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{t\}$, d chỉ có thể chọn một trong ba chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{t, s\}$. Do vậy, số khả năng lập các số có dạng $\overline{1bcd}$ là $5 \times 4 \times 3 = 60$ hay $|A_1| = 60$.

b) Xét tập A_2, A_3, A_4.

+ Xét A_2. Chữ số a đứng đầu của số $\overline{a1cd}$, nên nó không thể là số 0, do đó a có thể chọn chữ số t là một trong 4 chữ số 2, 3, 4, 5; c chỉ có thể chọn chữ số s là một trong 4 chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{t\}$; d chỉ có thể chọn một trong ba chữ số thuộc tập $\{0, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{t, s\}$. Bởi vậy, số khả năng lập được các số có dạng $\overline{a1cd}$ là $4 \times 4 \times 3 = 48$ hay $|A_2| = 48$.

Lý luận tương tự như trên, ta có số các số thuộc tập A_3 và A_4 cũng bằng số các số thuộc tập A_2.

+ Vì các số thuộc các tập hợp khác nhau đều khác nhau, nên $\forall\, i$, j $(1 \leq i, j \leq 4)$ và $i \neq j$ đều có $A_i \cap A_j = \emptyset$. Bởi vậy, số các số cần tìm được tính bằng quy tắc cộng, nghĩa là bằng $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 60 + 48 + 48 + 48 = 204$.

b. Nguyên lý nhân

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai giai đoạn, giai đoạn thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, giai đoạn thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi giai đoạn thứ nhất đã được hoàn thành. Khi đó, có $n_1 \times n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.

Giả sử một công việc nào đó được tách ra thành một dãy thứ tự gồm k giai đoạn:

+) Giai đoạn 1 có m_1 cách

+) Sau khi thực hiện xong giai đoạn 1 có m_2 cách thực hiện giai đoạn 2,... cứ tiếp tục giai đoạn thứ k có m_k cách.

Vậy, tất cả có $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ cách hoàn thành công việc.

Tương tự đối với quy tắc cộng, ta cũng chuyển quy tắc nhân sang ngôn ngữ tập hợp như sau:

Giả sử có n tập hợp $A_k, (1 \leq k \leq n)$ với $|A_k| = m_k$. Khi đó, số cách chọn (S) bộ gồm n phần tử $(a_1, a_2, ..., a_n)$ với $a_i \in A_i\,(1 \leq i \leq n)$ sẽ là:

$$S = |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n = \prod_{k=1}^{n} m_k.$$

Ví dụ 3.1.6. *Từ thành phố A đến thành phố B có* 3 *con đường, từ thành phố A đến thành phố C có* 2 *con đường, từ thành phố B đến thành phố D có* 2 *con đường, từ thành phố C đến thành phố D có* 4 *con đường. Không có con đường nào nối thành phố B với thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D?*

Giải.

Ta biết rằng để đi từ thành phố A đến thành phố D có hai cách chọn đi từ A qua B rồi đến D hoặc đi từ A qua C rồi đến D.

Trước hết, ta tìm số đường đi từ A đến D qua B. Có ba cách chọn đường từ A sang B và hai cách chọn đường từ B sang D nên theo quy tắc nhân, số cách chọn đường đi từ A đến D qua B là $3 \times 2 = 6$.

Tương tự, số cách chọn đường để đi từ A đến D qua C là $2 \times 4 = 8$.

Vì cách chọn đường đi từ A đến D qua B và cách chọn đường đi từ A đến D qua C không phụ thuộc nhau, nên theo quy tắc cộng, ta có số con đường đi từ A đến D là: $6 + 8 = 14$.

Ví dụ 3.1.7. *Một người dự định đánh số những chiếc ghế trong một giảng đường bằng cách ghi một chữ cái Tiếng Anh và tiếp theo là một số nguyên dương có hai chữ số. Hỏi có thể đánh được bao nhiêu ghế theo quy tắc trên?*

Giải.

Do có 26 chữ cái Tiếng Anh nên ta có 26 cách chọn chữ. Vì có 90 số nguyên dương có hai chữ số nên số cách đánh số ghế trong giảng đường thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $26 \times 90 = 2340$. Vì vậy, sẽ có 2340 ghế được đánh số theo yêu cầu của đề bài.

Ví dụ 3.1.8. *Hỏi có bao nhiêu biển đăng kí xe máy mang số 29 của Hà Nội nếu mỗi biển gồm 3 nhóm kí tự thỏa mãn các yêu cầu sau:*

Nhóm thứ nhất: gồm hai chữ số cố định là 29.

Nhóm thứ hai: gồm một chữ cái Tiếng Anh và sau chữ cái đó là một chữ số

Nhóm thứ ba: gồm 5 chữ số.

Giải.

Nhóm 1: có hai chữ số cố định là 29 nên có 1 cách.

Nhóm 2: có 26×10 cách thành lập.

Nhóm 3: có 10^5 cách thành lập.

Vậy, ta có: $26 \times 10^6 = 26.000.000$ biển số xe thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3.1.2. *Nguyên lý bù trừ (The principle of Inclusion-Exclusion)*

Khi hai công việc có thể làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính cách thực hiện công việc, cộng số cách làm mỗi việc lại sẽ dẫn đến trùng lặp vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần. Để tính số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta gọi đó là nguyên lý bù trừ.

Định lý 3.1.1. *Với các tập hợp tùy ý $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta có:*

i) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

ii) $$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

iii)

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| \\ & - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| \\ & - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp theo $n\,(n \geq 2)$, ta có thể tìm ra công thức tính số phần tử của tập hợp là hợp cuả n tập: A_1, A_2, $\ldots$, A_n.

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = {} & \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ & - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \,.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.9. *Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài* 11 *bit hoặc bắt đầu bằng hai bit* 1 *hoặc kết thúc bằng* 3 *bit* 0.

Giải.

Xâu nhị phân có độ dài 11 bit bắt đầu bằng hai bit 1 là: $2^9 = 512$

Xâu nhị phân có độ dài 11 bit kết thúc bằng 3 bit 0 là: $2^8 = 256$

Xâu nhị phân có độ dài 11 bit bắt đầu bằng hai bit 1 và kết thúc bằng 3 bit 0 là: 2^6

Vậy, số xâu nhị phân thỏa mãn đề bài là:

$$2^9 + 2^8 - 2^6 = 512 + 256 - 64 = 704.$$

Ví dụ 3.1.10. *Có bao nhiêu xâu gồm* 3 *chữ số thập phân?*

a) Không chứa cùng một chữ số ba lần.

b) Bắt đầu bằng chữ số lẻ.

c) Có đúng hai chữ số 4*?*

Giải.

a) Ta có: Số xâu không chứa cùng một chữ số ba lần chính bằng số xâu chứa ba chữ số bất kì trừ đi số xâu chứa cùng một chữ số ba lần. Vậy, số xâu thỏa mãn đề bài là: $10 \cdot 10 \cdot 10 - 10 = 990$.

b) Chữ số đầu tiên của xâu là số lẻ nên có 5 cách chọn $(1, 3, 5, 7, 9)$. Hai chữ số còn lại bất kì nên có 10 cách chọn trong 10 chữa số $0, 1, \ldots, 9$. Vậy, ta có: $5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$ xâu.

c) Ta xếp 2 chữ số 4 vào 3 vị trí trước sẽ có 3 cách xếp. Một vị trí còn lại có thể xếp 1 trong 9 chữ số. Vậy, ta có $9 \cdot 3 = 27$ xâu thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 3.1.11. *Tìm số các số nguyên dương bé hơn hay bằng* 2022 *mà chia hết cho ít nhất một trong các số nguyên tố* 2, 3 *và* 5.

Giải.
Gọi A là tập tất cả các số nguyên dương bé hơn hay bằng 2022 mà chia hết cho 2, tức là

$$\begin{aligned} A &= \{2n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 2n \leq 2022\} \\ &= \left\{2n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \tfrac{2022}{2}\right\} \\ &= \{2n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 1011\}. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra $|A| = 1011$. Tương tự, đặt

$$\begin{aligned} B &= \{3n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 3n \leq 2022\} \\ &= \left\{3n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{3} \right\rfloor\right\} \\ &= \{3n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 674\}. \end{aligned}$$

Suy ra $|B| = 674$.

Đặt

$$\begin{aligned} C &= \{5n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 5n \leq 2022\} \\ &= \left\{5n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{5} \right\rfloor\right\} \\ &= \{5n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 404\}. \end{aligned}$$

Suy ra $|C| = 404$.

Ta có $A \cap B$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương bé hơn hay bằng 2022 mà chia hết cho 2 và 3. Do 2 và 3 là các số nguyên tố cùng nhau nên một số nguyên dương chia hết cho 2 và 3 khi và chỉ khi chia hết cho $2 \times 3 = 6$. Vậy,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{6n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 6n \leq 2022\} \\ &= \left\{6n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{6} \right\rfloor\right\} \\ &= \{6n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 337\}. \end{aligned}$$

Từ đó, ta được $|A \cap B| = 337$.

Lý luận tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{10n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 10n \leq 2022\} \\ &= \left\{10n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{10} \right\rfloor\right\} \\ &= \{10n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 202\}. \end{aligned}$$

Suy ra $|A \cap C| = 202$;

$$\begin{aligned} B \cap C &= \{15n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 15n \leq 2022\} \\ &= \left\{15n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{15} \right\rfloor\right\} \\ &= \{15n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 134\} \end{aligned}$$

Suy ra $|B \cap C| = 134$;

và

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{30n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < 30n \leq 2022\} \\ &= \left\{30n \mid n \in \mathrm{Z}, 0 < n \leq \left\lfloor \tfrac{2022}{30} \right\rfloor\right\} \\ &= \{30n \mid n \in \mathrm{Z}, 1 \leq n \leq 67\} \end{aligned}$$

Suy ra $|A \cap B \cap C| = 67$;

Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ - |\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| \\ &= 1011 + 674 + 404 - 337 - 202 - 134 + 67 \\ &= 1483. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.12. *Cho tập hợp các số tự nhiên* $X = \{1, 2, 3, ..., 12024\}$. *Hỏi có bao nhiêu số trong tập hợp* X *không chia hết cho bất cứ số nào trong ba số* 3, 4, 7*?*

Giải.

Gọi $A_i = \left\{x \in X \quad | \quad x \vdots\, i\right\}$, $i = 3, 4, 7$. Khi đó, $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập hợp các số của tập X chia hết cho ít nhất một trong ba số 3, 4, 7. Vì vậy, số các số thuộc tập X mà không chia hết cho bất cứ số nào trong ba số 3, 4, 7 là:

$$|X| - |A_3 \cup A_4 \cup A_7|.$$

Mặt khác, $|A_3 \cup A_4 \cup A_7| = N_1 - N_2 + N_3$. Trong đó,

$$\begin{aligned} N_1 &= |A_3| + |A_4| + |A_7| = \left\lfloor \tfrac{12024}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{12024}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{12024}{7} \right\rfloor \\ &= 4008 + 3006 + 1717 = 8731. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= |A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_7| + |A_4 \cap A_7| \\ &= \left\lfloor \tfrac{12024}{3\times 4} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{12024}{3\times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{12024}{4\times 7} \right\rfloor \\ &= 1002 + 572 + 429 = 2003. \end{aligned}$$

$$N_3 = |A_3 \cap A_4 \cap A_7| = \left\lfloor \tfrac{12024}{3\times 4\times 7} \right\rfloor = 143.$$

Vậy, số các số thuộc tập X thỏa mãn đề bài là:

$$|X| - N_1 + N_2 - N_3 = 12024 - 8731 + 2003 - 143 = 5153.$$

3.1.3. *Công thức truy hồi*

Bây giờ ta quan tâm đến bài toán đếm mà kết quả đếm phụ thuộc vào 1 tham số đầu vào (kí hiệu n), ví dụ: D_n, U_n,$\ldots$ nhưng việc biểu diễn kết quả đếm như một hàm của n không phải đơn giản. Do đó, ta tìm công thức liên hệ giữa kết quả đếm ứng với n và các kết quả đếm ứng với các giá trị bé hơn n. Nhờ công thức đó và một vài giá trị ban đầu ta có thể tính mọi giá trị còn lại. Công thức kiểu này gọi là công thức truy hồi hay công thức đệ quy.

Ví dụ 3.1.13. *Trên mặt phẳng, kẻ n đường thẳng sao cho không có 2 đường thẳng nào song song và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Hỏi mặt phẳng được chia thành mấy phần?*

Giải.

Gọi số phần mặt phẳng được chia bởi n đường thằng là S_n.

Giả sử ta đã kẻ $n-1$ đường thẳng, bây giờ kẻ thêm đường thẳng thứ n thì số phần mặt phẳng tăng thêm sẽ bằng số giao điểm của đường thẳng thứ n với $n-1$ đường thẳng ban đầu và cộng thêm 1.

Do đó, ta có phương trình $S_n = S_{n-1} + n$, $n \geq 1$

Trong đó,

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= S_0 + 1 \\ S_2 &= S_1 + 2 \\ S_3 &= S_2 + 3 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ S_k &= S_{k-1} + k \end{aligned}$$

Suy ra $S_n = S_0 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$

Ví dụ 3.1.14. *(Tháp Hà Nội)*

Cho 3 *cọc a, b, c. Trên cọc a có 1 chồng gồm n đĩa đường kính giảm dần từ dưới lên trên. Cần phải chuyển chồng đĩa từ cọc a sang cọc c, tuân thủ quy tắc: mỗi lần chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đĩa có đường kính nhỏ lên trên đĩa có đường kính lớn hơn. Trong quá trình chuyển được phép dùng cọc b làm cọc trung gian. Tìm số lần di chuyển ít nhất để thực hiện xong nhiệm vụ đặt ra.*

Giải.

Gọi h_n là số lần di chuyển ít nhất cần thực hiện để giải xong bài toán với n đĩa.

Ta xây dựng công thức đệ quy để tính h

Ta có $h_1 = 1$

Giả sử $n \geq 2$. Việc di chuyển gồm 3 bước:

1. Chuyển $n-1$ đĩa từ cọc a đến cọc b sử dụng cọc c làm trung gian (giả thiết quy nạp)

2. Chuyển 1 đĩa (đường kính lớn nhất) từ a sang c

3. Chuyển $n-1$ đĩa từ cọc b sang cọc c (sử dụng cọc a làm trung gian). Bước này thực hiện được nhờ giả thiết quy nạp (Bước 1. và Bước 2.) đòi hỏi giải bài toán với $n-1$ đĩa.

Số lần di chuyển đĩa cần thực hiện là:

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \\ h_n &= 2^n - 1, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Tổng số lần chuyển ở bước 1 và bước 3 là $2h_n - 1$

$$\begin{aligned} h_1 = 1, h_2 &= 2.1 + 1 = 2(2-1) + 1 = 2^2 - 1 \\ h_3 &= 2 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 1 \end{aligned}$$

Công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Xét công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng, bậc k.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{3.1}$$

trong đó c_1, c_2 , . . ., c_k là các hằng số, $c_k \neq 0$.

Tìm công thức số hạng tổng quát a_n của dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn (3.1)

+) Dãy số $\{a_n\}$ sẽ được xác định duy nhất nếu thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$a_0 = c_0, \ a_1 = c_1, \ \ldots, \ a_{k-1} = c_{k-1}$$

Đặc biệt: $a_n = c_1 a_{n-1}$

Nếu $k = 1$ thì

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 \cdot a_0 = c_1 \cdot c_0 \\ a_2 &= c_1 \cdot a_1 = c_1 \cdot c_1 \cdot c_0 = c_1^2 \cdot c_0 \\ a_3 &= c_1 \cdot a_2 = c_1^3 \cdot c_0 \ldots \end{aligned}$$

Nếu chọn $c_0 = 1$ thì ta tìm được $a_n = r^n$.

Bây giờ ta tìm nghiệm của (3.1) dưới dạng $a_n = r^n$

Suy ra r là nghiệm của phương trình:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} \tag{3.2}$$

hay:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0 \tag{3.3}$$

Phương trình (3.3) được gọi là phương trình đặc trưng của (3.1).

Định lý 3.1.2. *(Trường hợp $k = 2$). Cho c_1, c_2 là các hằng số thực. Giả sử phương trình: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2. Khi đó, dãy số $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức truy hồi $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ khi và chỉ khi:*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n, \tag{3.4}$$

với $n = 0, 1, \ldots$ và α_1, α_2 là hai số thực (Phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu).

Chứng minh:

$\Longrightarrow$). Ta chứng minh nếu r_1, r_2 thỏa mãn: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ và α_1, α_2 là 2 hằng số cho trước.

và

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n. \\ \text{Khi đó, } a_n &= c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}. \end{aligned}$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} r_1^n = c_1 \cdot r_1 + c_2;\ r_2^n &= c_1 \cdot r_2 + c_2 \\ c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} &= c_1\left(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}\right) + c_2\left(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}\right) \\ &= \left(c_1 \alpha_1 r_1^{n-1} + c_2 \alpha_1 r_1^{n-2}\right) + \left(c_1 \alpha_2 r_2^{n-1} + c_2 \alpha_2 r_2^{n-2}\right) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}\left(c_1 \cdot r_1 + c_2\right) + \alpha_2 r_2^{n-2}\left(c_1 \cdot r_2 + c_2\right) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} \cdot r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} \cdot r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$). Giả sử dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$. Ta cần chứng minh số hạng tổng quát a_n có dạng:

$$a_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n,$$

trong đó r_1, r_2 là nghiệm của phương trình: $r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0$.

Giả sử a_n là nghiệm (3.4) với điều kiện ban đầu $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$.

Ta có:

$$\begin{cases} a_0 &= c_0 &= \alpha_1 = \alpha_2 \\ a_1 &= c_1 &= \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 &= \frac{c_1 - c_0 r_2}{r_1 - r_2} \\ \alpha_2 &= \frac{c_0 r_1 - c_1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

Nghiệm (α_1, α_2) của (*) là duy nhất. Do đó, dãy số $\{a_n\}$ là duy nhất.

Ví dụ 3.1.15. *Dãy Fibonaci*

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \\ F_0 &= F_1 = 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tìm công thức của F_n theo n.

Giải.

Ta có phương trình đặc trưng của phương trình (3.5) là:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Suy ra, $F_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_1 r_2^n$.

Trong đó, α_1, α_2 được xác định bởi hai điều kiện ban đầu $F_0 = F_1 = 1$.

Do đó, $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 \cdot r_1 + \alpha_2 \cdot r_2 &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \alpha_2 &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$

Vậy, ta nhận được:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Định lý 3.1.3. *(Trường hợp nghiệm kép). Cho c_1, c_2 là các hằng số thực và $c_2 \neq 0$. Giả sử phương trình $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có nghiệm* *kép r_0. Khi đó, dãy số $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức đệ quy $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1.\ r_0^n + \alpha_2 \cdot n.\ r_0^n$, $n = 0, 1, \ldots$, trong đó, α_1, α_2 là hai hằng số.*

Ví dụ 3.1.16. *Tìm nghiệm cho công thức truy hồi*

$$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$$

với các điều kiện: $a_0 = 1$ và $a_1 = 12$.

Giải.

Phương trình đặc trưng: $r^2 - 8r + 16 = 0$.

Phương trình trên có nghiệm kép $r = 4$. Do đó, nghiệm của hệ thức đã cho có dạng: $a_n = \alpha_1.\ 4^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 4^n$.

Sử dụng điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 12$ ta suy ra $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.

Vậy, ta được dãy số $\{a_n = 4^n + 2n \cdot 4^n\}$ là nghiệm của công thức truy hồi đã cho.

Định lý 3.1.4. *(Trường hợp tổng quát $k > 2$)*

Cho c_1, c_2 , $\ldots$, c_n là các số thực. Giả sử phương trình đặc trưng:

$$r^k - c_1 \cdot r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

có k nghiệm thực phân biệt r_1, r_2, $\ldots$, r_k. Khi đó, dãy số $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$$

khi và chỉ khi: $a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^n$, với $n = 0, 1, \cdots$, trong đó α_1, α_2, $\ldots$, α_k là các hằng số.

Ví dụ 3.1.17. *Tìm nghiệm của hệ thức $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với điều kiện ban đầu: $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.*

Giải.

Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi đã cho là:

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2)(r-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 2 \\ r = 3 \end{array}\right.$$

Áp dụng Định lý 3.1.4, ta được công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{a_n\}$ là:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n.$$

Theo giả thiết $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Vậy, $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

3.2. LÝ THUYẾT TỔ HỢP

3.2.1. *Hoán vị (Permutation)*

Hoán vị của một tập hợp hữu hạn thực chất là một cách sắp xếp tất cả các phần tử của tập hợp đó.

a. Hoán vị không lặp

Định nghĩa 3.2.1. *Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập A theo một thứ tự nào đó (mỗi phần tử có mặt đúng một lần) được gọi là một hoán vị n phần tử của tập S. Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n.*

Ta có công thức: $P_n = n!$

Ví dụ 3.2.1. *Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt?*

Giải.

Vì mỗi số cần lập gồm 5 chữ số không trùng nhau, mỗi chữ số xuất hiện trong từng số cần lập đúng một lần, nên mỗi số cần lập chính là một hoán vị của 5 chữ số đã cho. Bởi vậy, số các số thỏa mãn đề bài có thể lập được bằng số hoán vị của tập 5 chữ số đã cho, tức là: $P_5 = 5! = 120$.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu một định nghĩa tổng quát hơn về hoán vị không lặp.

Định nghĩa 3.2.2. *Cho tập hợp S gồm n phần tử phân biệt, $(n \geq 1)$ và số nguyên r thỏa mãn $1 \leq r \leq n$. Một cách sắp xếp r phần tử của tập S theo một thứ tự nào đó được gọi là một r-hoán vị (r-permutation) của tập S.*

Trong trường hợp đặc biệt $r = n$, một n-hoán vị của tập S được gọi là một hoán vị của tập S.

Số r-hoán vị của tập S được kí hiệu và xác định bởi công thức:

$$P(n, r) = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Chú ý: Khái niệm r-hoán vị của tập hợp n phần tử chính là chỉnh hợp (không lặp) chập r của tập hợp n phần tử đó. Vì vậy, kí hiệu $P(n, r) \equiv A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ví dụ 3.2.2. *Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên nằm giữa 20000 và 50000 được thành lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho không có chữ số nào lặp lại trong mỗi số được thành lập.*

Giải.

Bất kì số tự nhiên nào nằm giữa 20000 và 50000 đều là số có 5 chữ số. Giả sử số đó có dạng $a_5a_4a_3a_2a_1$ sao cho $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và $a_5 \notin \{1, 5, 6\}$. Nếu tất các các chữ số là phân biệt và không hạn chế điều kiện của a_5 thì mỗi số tự nhiên có năm chữ số chính là một 5-hoán vị của tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, số các số đó là

$$P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720.$$

Bây giờ chúng ta tìm số các số tự nhiên dạng $a_5a_4a_3a_2a_1$ mà a_5 bằng 1, 5 hoặc 6.

Nếu $a_5 = 1$ thì ta sẽ có số $1a_4a_3a_2a_1$ trong đó, $a_i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ với $i = 1, 2, 3, 4$ và số các số đó chính là số $4-$hoán vị của tập $\{2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Tương tự, ta cũng có 120 số dạng $5a_4a_3a_2a_1$ và 120 số dạng $6a_4a_3a_2a_1$.

Do đó, số các số tự nhiên thỏa mãn đề bài là:

$$720 - 120 - 120 - 120 = 360.$$

Ví dụ 3.2.3. *Một tổ có 7 sinh viên nam và 6 sinh viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sinh viên của tổ đó thành một hàng mà không có hai sinh viên nữ nào đứng cạnh nhau?*

Giải.

Theo các điều kiện đã cho, giữa hai sinh viên nữ phải có một sinh viên nam. Giả sử bảy sinh viên nam kí hiệu là $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$ và họ đứng trong một hàng như sau:

$$GB_1;\ GB_2;\ GB_3;\ GB_4;\ GB_5;\ GB_6;\ GB_7;$$

Đối với nữ sinh có 8 vị trí. Trong 8 vị trí này sẽ có 6 nữ sinh đứng vào, mỗi cách sắp xếp nữ sinh như thế là một 6-hoán vị của 8 phần tử. Do đó, số cách sắp xếp nữ sinh là $P(8, 6)$. Sau khi sắp xếp nữ sinh thì bảy sinh viên nam có thể đứng vào 7 vị trí khác nhau, nên số cách sắp xếp nam sinh viên là $P(7, 7)$. Áp dụng quy tắc nhân, số cách sắp xếp bảy nam sinh viên và sáu nữ sinh viên thành một hàng sao cho không có hai sinh viên nữ nào đứng cạnh nhau là:

$$\begin{aligned} P(8,6) \cdot P(7,7) &= \tfrac{8!}{(8-6)!} \cdot 7! &&= \tfrac{8!}{2!} \cdot 7! \\ &= \tfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} \cdot 7! &&= 101.606.400. \end{aligned}$$

b. Hoán vị lặp

Định nghĩa 3.2.3. *Hoán vị trong đó mỗi phần tử của nó có thể xuất hiện nhiều lần được gọi là hoán vị lặp.*

Một hoán vị lặp của n phần tử thuộc k loại nghĩa là một $n-$ hoán vị, trong đó phần tử thứ i được lặp lại n_i lần, với mọi $1 \leq i \leq k$ sao cho $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Số hoán vị lặp của n phần tử thuộc k loại, mà các phần tử loại $i\,(1 \leq i \leq k)$ xuất hiện n_i lần được kí hiệu là $P(n_1, n_2, ..., n_k)$ và được tính bằng công thức

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Ví dụ 3.2.4. *Cho tập hợp* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. *Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm* 9 *chữ số từ tập* X*, trong đó mỗi chữ số* $0, 1, 2, 3$ *xuất hiện đúng một lần, chữ số* 4 *xuất hiện đúng hai lần và chữ số* 5 *xuất hiện đúng ba lần?*

Giải.

Ta minh họa một số thỏa mãn đề bài là $x = 105.425.345$. Khi đó, dựa vào đặc điểm của các số cần tìm, ta kí hiệu các vị trí của số x một cách hình thức là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$. Do đó, mỗi số x tương ứng với một hoán vị của chín phần tử $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$.

Số các hoán vị của chín phần tử khác nhau $a_i\ \ (1 \leq i \leq 9)$ là $9!$, song do $a_4 = a_8 = 4$ nên khi đổi a_4 và a_8 cho nhau thì hoán vị $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ vẫn chỉ cho ta số x. Tương tự đổi chỗ ba phần tử a_3, a_6 và a_9 cho nhau thì ta vẫn được số x.

Như vậy, khi thực hiện $2!$ Hoán vị a_4, a_8 và $3!$ Hoán vị a_3, a_6, a_9 ta chỉ được một số cần tìm x.

Vậy, số các số có thể lập được là $S = \frac{9!}{2!3!} = 30240$.

3.2.2. *Tổ hợp (Combinations)*

Trong mục trên chúng ta không chỉ quan tâm đến số phần tử của một tập hợp cho trước mà còn quan tâm đến sự sắp xếp (thứ tự) của các phần tử đó. Tuy nhiên, có nhiều tình huống trong đó ta chỉ cần quan tâm đến số phần tử của một tập hợp cho trước. Chẳng hạn, một lớp học có 30 sinh viên, ta chọn ngẫu nhiên 3 sinh viên để phỏng vấn. Khi đó, nếu ba sinh viên ta lần lượt chọn là A, B và C hay B, C và A thì vẫn là cùng một kết quả. Bài toán đếm số tập hợp con gồm r phần tử được lấy từ tập n phần tử được gọi là bài toán tổ hợp.

a. Tổ hợp không lặp

Định nghĩa 3.2.4. *Cho tập hợp S gồm n phần tử phân biệt, $(n \geq 1)$ và số nguyên r thỏa mãn $1 \leq r \leq n$. Một tổ hợp (không lặp) chập r của n phần tử của S là một tập con A của S mà A chứa r phần tử phân biệt của tập S.*

Số tổ hợp (không lặp) chập r của n phần tử được kí hiệu và xác định bởi công thức:

$$C_n^r \text{ hay } \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \text{ hay } C\left(n, r\right) = \tfrac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ví dụ 3.2.5. *Hỏi có bao nhiêu cách thành lập một đội bóng đá thi đấu gồm 11 cầu thủ trong số 22 cầu thủ?*

Giải.

Ta chọn 11 cầu thủ trong số 22 cầu thủ, tức là tìm một tập con gồm 11 phần tử của một tập hợp gồm 22 phần tử. Số cách chọn chính là số tổ hợp chập 11 của 22.

$$\begin{aligned} C(22, 11) &= \tfrac{22!}{11!(22-11)!} = \tfrac{22!}{11!11!} \\ &= \tfrac{12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21\cdot22}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11} \\ &= 54264. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2.6. *Một sinh viên được yêu cầu phải trả lời 7 câu hỏi trong số 12 câu hỏi, mà 12 câu hỏi này được chia làm hai nhóm, mỗi nhóm gồm 6 câu. Sinh viên đó không được phép trả lời nhiều hơn 5 câu trong một nhóm. Hỏi sinh viên đó có bao nhiêu cách chọn 7 câu hỏi?*

Giải.

Sinh viên có thể chọn 7 câu hỏi thỏa mãn theo yêu cầu đề bài theo các cách sau:

Số câu hỏi thuộc nhóm A	Số câu hỏi thuộc nhóm B
5	2
4	3
3	4
2	5

Do đó, số cách mà sinh viên đó có thể chọn 7 câu hỏi là:

$$C(6,5) \cdot C(6,2) + C(6,4) \cdot C(6,3) + C(6,3) \cdot C(6,4) + C(6,2) \cdot C(6,5)$$
$$= 90 + 300 + 300 + 90 = 780.$$

Ví dụ 3.2.7. *Có bao nhiêu cách chia một lớp* 40 *học sinh thành* 4 *tổ, sao cho mỗi tổ có đúng* 10 *học sinh?*

Giải.

Đầu tiên ta lập tổ 1 bằng cách chọn bất kì 10 học sinh trong số 40 học sinh của lớp, nên số cách chọn bằng số tổ hợp chập 10 của 40:

$$C(40,10) = \frac{40!}{10!30!}$$

Tổ 2 có thể chọn 10 em tùy ý trong số 30 em còn lại, nên số cách thành lập Tổ 2 chính là số tổ hợp chập 10 của 30:

$$C(30,10) = \frac{30!}{10!20!}$$

Tổ 3 có thể chọn 10 học sinh trong số 20 học sinh còn lại, nên số cách thành lập Tổ 3 sẽ bằng số tổ hợp chập 10 của 20:

$$C(20,10) = \frac{20!}{10!10!}$$

Cuối cùng, Tổ 4 sẽ gồm 10 em học sinh còn lại, nên chỉ có một cách chọn Tổ 4.

Vậy, số cách chia tổ thỏa mãn đề bài là:

$$\begin{aligned} C(40,10)\cdot C(30,10)\cdot C(20,10)\cdot C(10,10) &= \tfrac{40!30!20!}{10!30!20!10!10!10!} \\ &= \tfrac{40!}{(10!)^4}. \end{aligned}$$

b. Tổ hợp lặp

Định nghĩa 3.2.5. *Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Một tổ hợp lặp chập r (r nguyên dương và không nhất thiết phải nhỏ hơn n) của n phần tử thuộc tập A là một bộ gồm r phần tử, mà mỗi phần tử này là một trong những phần tử của tập S.*

Ta sử dụng $\overline{C_n^r}$ hay $\overline{C(n,r)}$ để kí hiệu số tổ hợp lặp chập r của n phần tử. Khi đó, ta có: $\overline{C(n,r)} = C(n+r-1,r)$.

Ví dụ 3.2.8. *Giả sử có 4 loại bóng màu: Xanh, Đỏ, Tím, Vàng, với số lượng mỗi loại không hạn chế. Hai bộ bóng được xem là khác nhau nếu có ít nhất một màu với số lượng thuộc hai bộ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra các bộ gồm 6 quả bóng khác nhau?*

Giải.

Vì trong mỗi bộ sáu quả bóng có thể có các quả cùng màu và không phân biệt thứ tự chọn, nên số cách chọn các bộ sáu quả bóng bằng số tổ hợp chập sáu của 4 phần tử (tập hợp bóng cùng màu được coi là một phần tử) và được tính bằng công thức:

$$\overline{C(4,6)} = C(4+6-1,6) = \tfrac{9!}{6!3!} = 84.$$

Ví dụ 3.2.9. *Tiền giấy của Ngân hàng quốc gia Việt Nam lưu hành phổ biến trên thị trường có 10 loại là: 200, 500, 1.000, 2.000, 5.000, 10.000, 20.000, 100.000, 200.000, 500.000 (VNĐ). Hãy xác định số bộ khác nhau gồm 15 tờ tiền của Ngân hàng quốc gia Việt Nam.*

Giải.

Mỗi bộ gồm 15 tờ tiền thuộc không quá 10 loại, nên có những tờ tiền cùng loại. Mặt khác, trong mỗi bộ ta không quan tâm đến thứ tự sắp xếp, nên số bộ tờ tiền khác nhau gồm 15 tờ sẽ bằng số tổ hợp lặp chập 15 của 10, tức là bằng:

$$\overline{C(10,15)} = C(10+15-1,15) = \frac{24!}{15!9!} = 1.307.504.$$

3.3. BÀI TOÁN TỒN TẠI

3.3.1. *Giới thiệu bài toán*

Trong bài trước, chúng ta đã tập trung vào việc đếm cấu hình các tổ hợp, chẳng hạn đếm số tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị. Bên cạnh bài toán đếm số tổ hợp, ta còn có bài toán chỉ ra sự tồn tại một cấu hình thỏa mãn các tính chất cho trước. Vậy, trong các bài toán về tổ hợp xuất hiện bài toán thứ hai là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp thỏa mãn một số tính chất nào đó cho trước. Ta gọi bài toán đó là bài toán tồn tại tổ hợp.

Ví dụ 3.3.1. ***(Bài toán** 26 **sĩ quan)***

Người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp khác nhau: thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá để tham gia duyệt binh. Hỏi có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi hàng ngang cũng như mỗi hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và có cả 6 cấp bậc.

Giải.

Ta kí hiệu A, B, C, D, E, F là tên các trung đoàn; a, b, c, d, e, f là các cấp bậc.

Tổng quát: Ta thay số 6 bằng n.

Trường hợp $n = 4$ thì 16 sỹ quan

$$\begin{array}{cccc} Ab & Dd & Ba & Cc \\ Bc & Ca & Ad & Db \\ Cd & Bb & Dc & Aa \\ Da & Ac & Cb & Bd \end{array}$$

Trường hợp $n = 5$ thì ta có 25 sỹ quan

$$\begin{array}{ccccc}
Aa & Bb & Cc & Dd & Ec \\
Cd & De & Ea & Ab & Bc \\
Eb & Ac & Bd & Ce & Da \\
Be & Ca & Db & Ec & Ad \\
Dc & Ed & Ae & Ba & Cb
\end{array}$$

Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán này trong trường hợp $n = 6$ nhưng ông đã không thành công. Do vậy, ông đã đưa ra giả thuyết rằng không tồn tại cách xếp 36 sỹ quan thỏa mãn đề bài. Giả thuyết này đã được nhà toán học Pháp Tarri chứng minh năm 1901 bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp. Vậy, khi $n = 2$, $n = 6$ thì không có cách sắp xếp nào thỏa mãn đề bài. Euler đã căn cứ vào sự không tồn tại lời giải bài toán khi $n = 2$ và $n = 6$ để đề ra một giả thuyết tổng quát hơn là: không tồn tại cách xếp sỹ quan thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n = 4k + 2$. Sau gần hai thế kỷ, tức là vào năm 1960, ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda mới chỉ ra được một lời giải trong trường hợp $n = 10$ và sau đó chỉ ra phương pháp sắp xếp sỹ quan thỏa mãn yêu cầu đề bài cho trường hợp $n = 4k + 2$ với $k > 1$.

Ví dụ 3.3.2. *Chứng minh rằng không thể nối* 41 *máy tính thành một mạng sao cho mỗi máy nối được với đúng* 7 *máy khác.*

Giải.

Giả sử ngược lại là tìm được cách nối 41 máy thỏa mãn đề khi đó số lượng kênh nối là: $(7 \times 41) : 2 = 143,5$ (mâu thuẫn).

Ví dụ 3.3.3. *Có* 17 *học sinh tham gia một kỳ thi học sinh giỏi với* 9 *bài toán cần giải. Biết rằng với mỗi bài toán thì có đúng* 11 *học sinh giải được. Chứng minh rằng tồn tại hai học sinh mà với bất kì bài toán nào cũng có ít nhất một trong hai bạn này giải được.*

Giải.

Giả sử không tồn tại hai bạn học sinh thỏa mãn đề bài. Khi đó, với hai bạn học sinh bất kì luôn có bài toán nào đó mà cả hai bạn đều không giải được. Ta đếm số cặp [(học sinh 1, học sinh 2), bài toán] với điều kiện là cả hai học sinh đều không giải được bài toán cùng cặp. Ta biểu diễn bài toán là dòng và hai học sinh là hai cột, đồng thời số 0 là học sinh không giải được bài toán, số 1 là học sinh giả được bài toán. Ta cần đếm số các cặp hai số 0 trên cùng một dòng.

Có C_{17}^2 cách chọn hai học sinh, nên tổng số cặp ít nhất bằng C_{17}^2.

Với mỗi bài toán có đúng 6 học sinh không giải được, ta chọn ra trong số đó hai học sinh. Do đó, số cặp chọn được là $C_9^2 \cdot 9$.

Như vậy, ta có $136 = C_{17}^2 \leq C_9^2 \cdot 9 = 135$, điều này vô lý. Vậy, điều giả sử ở trên là sai, do đó ta luôn tìm được hai học sinh thỏa mãn đề bài.

3.3.2. *Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý lồng chim bồ câu) (The pigeonhole principle)*

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: The pigeonhole principle, cũng có sách gọi là The drawer principle) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G. Lejeune Dirichlet ($1805 - 1859$), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n+1$ con chim bồ câu vào n cái lồng $(n \in \mathbb{N}^*)$ thì luôn có ít nhất hai con chim bị nhốt trong cùng một lồng".

Một cách tổng quát, ta có định lý sau:

Định lý 3.3.1. *(Nguyên lý Dirichlet tổng quát) Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp với $N \geq k$ thì sẽ tồn tại ít nhất 1 hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật.*

Ví dụ 3.3.4. *Hỏi số sinh viên đăng kí học và thi môn toán rời rạc để chắc chắn có 10 người đạt cùng điểm thi, nếu thang điểm gồm 13 bậc: A^+, A, A^-, B^+, B, B^-, C^+, C, C^-, D^+, D, D^-, F.*

Giải.

Để chắc chắn có 10 người đạt cùng điểm thi thì số sinh viên tối thiểu là số nguyên N nhỏ nhất sao cho $\lceil \frac{N}{7} \rceil = 10$. Mặt khác, $10 = \lceil \frac{N}{7} \rceil < \frac{N}{7} + 1$, suy ra $N > 12 \times 7 = 84$. Do đó, ta chọn số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $N > 84$ là $N = 85$. Vậy, để chắc chắn có ít nhất 10 người đạt cùng bậc điểm thi thì số sinh viên thi cần tối thiểu là 85 người.

Ví dụ 3.3.5. *Trong số 367 người, bao giờ cũng tìm được 2 người có ngày sinh nhật giống nhau.*

Giải.

Ta biết rằng, mỗi năm có nhiều nhất là 366 ngày. Mà số người là 367. Theo nguyên lý Drichlet, tồn tại ít nhất $\lceil \frac{367}{366} \rceil = 2$ người có cùng ngày sinh.

Ví dụ 3.3.6. *Cho tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_{100}\}$ gồm 100 số nguyên dương phân biệt. Ta lấy các số nguyên dương trong tập X chia cho 75. Chứng minh rằng có ít nhất hai số dư của các phép chia đó là bằng nhau.*

Giải.

Gọi r_i là số dư khi chia x_i cho 75, $i = 1, 2, 3, ..., 100$. Đặt $R = \{r_1, r_2, ..., r_{100}\}$, tức là R là tập các số dư của 100 phép chia các phần tử của tập X cho 75. Khi đó, $|R| = 100$.

Mặt khác, một số nguyên dương khi chia cho 75 có số dư là r thì $0 \leq r \leq 74$. Đặt $S = \{0, 2, 3, ..., 74\}$.

Mỗi phần tử trong tập R tương ứng với một phần tử trong tập S, tức là mỗi phần tử trong R được gán cho một giá trị trong tập S.

Chúng ta coi tập các phần tử trong tập R như là những con chim câu và mỗi phần tử của tập S như là cái lồng nhốt chim. Khi đó, số chim câu $n = 100$, số lồng nhốt là $k = 75$ nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất hai chim được nhốt chung một lồng. Tức là, sẽ có ít nhất hai phần tử của tập R nhận chung giá trị trong tập S. Vậy, có ít nhất hai phép chia trong 100 phép chia các phần tử của tập X cho 75 có cùng số dư.

Ví dụ 3.3.7. *Trong số những người có mặt trên trái đất luôn tìm được* 2 *người có hàm răng giống nhau.*

Giải.

Mỗi người có hai hàm răng, mỗi hàm có nhiều nhất 16 chiếc nên có nhiều nhất $2^{32} = 4.294.967.296$ bộ hàm răng khác nhau mà số người trên trái đất hơn 9 tỷ người. Theo nguyên Lý Dirichlet sẽ có ít nhất 2 người có hàm răng giống nhau hoàn toàn.

Ví dụ 3.3.8. *Cho năm điểm bên trong một tam giác đều có độ dài cạnh bằng* 2*, chứng tỏ rằng có hai điểm sao cho khoảng cách giữa chúng lớn nhất là* 1.

Giải.

Vẽ tam giác đều có ba đỉnh là ba trung điểm của các cạnh của tam giác ban đầu. Tam giác này chia tam giác ban đầu thành bốn tam giác đều có độ dài cạnh bằng 1. Theo Nguyên tắc lồng chim câu, một trong bốn tam giác này phải chứa hai trong số 5 điểm đã cho và khoảng cách giữa hai điểm đó nhiều nhất là 1.

Ví dụ 3.3.9. *Cho* 8 *số tự nhiên* $a_1, a_2, \dots, a_8$ *thỏa mãn* $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_8 \leq 15$. *Chứng minh rằng, trong tất cả các hiệu số* $a_i - a_j$ *với* $1 \leq j < i \leq 8$ *có ba hiệu số bằng nhau.*

Giải.

Xét 7 hiệu $a_{i+1} - a_i$ với $i = 1, 2, \dots, 7$. Nếu trong số 7 hiệu này không có số nào bằng nhau thì ta có 7 hiệu phải là 2 số 1, 2 số 2, 2 số 3 và một số lớn hơn hay bằng 4. Như vậy:

$$\begin{aligned} 14 \geq a_8 - a_1 &= (a_8 - a_7) + (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + (a_4 - a_4) \\ &+ (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) \geq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \end{aligned}$$

hay $14 > 16$, điều này mâu thuẫn. Chứng tỏ điều giả sử là sai. Vậy, trong số các hiệu số $a_j - a_i$ với $j < i \leq 8$ phải có 3 hiệu số bằng nhau.

Ví dụ 3.3.10. *Cho $\{a_i\}_{i=1}^n$ là một dãy hữu hạn có chiều dài n, tức là có n phần tử.*

a) $\{a_i\}_{i=1}^n$ được gọi là một dãy tăng nghiêm ngặt nếu $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, hay viết cách khác $a_i < a_{i+1}$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.

b) $\{a_i\}_{i=1}^n$ được gọi là một dãy giảm nghiêm ngặt nếu $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$, hay viết cách khác $a_i > a_{i+1}$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.

c) Dãy con của $\{a_i\}_{i=1}^n$ là một dãy có dạng $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, trong đó, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Chẳng hạn, 2, 6, 8, 7, 10 *là một dãy con của dãy* 1, 2, 9, 6, 3, 8, 12, 7, 10, 15, 18.

Cho dãy số $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}\}$ gồm n^2+1 số thực phân biệt. Chứng tỏ rằng dãy số này có một dãy con tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt gồm $n+1$ phần tử.

Giải.

Ta xét phần tử a_k của dãy, trong đó $1 \leq k \leq n^2 + 1$. Bây giờ ta sẽ xây dựng một dãy tăng nghiêm ngặt hay giảm nghiêm ngặt.

Chẳng hạn, trong dãy 1, 2, 9, 6, 3, 8, 12, 7, 10, 15, bắt đầu từ số 2 ta có thể xây dựng các dãy con tăng nghiêm ngặt 2, 9, 12 và 2, 8, 12, 15. Tương tự, bắt đầu từ số 9, ta có thể xây dựng dãy con giảm nghiêm ngặt 9, 8, 7.

Bởi vì $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n^2+1}$ là dãy hữu hạn nên số các dãy con tăng nghiêm ngặt hay giảm nghiêm ngặt là hữu hạn. Trong số các dãy tăng nghiêm ngặt, ta chọn dãy con có độ dài lớn nhất. Tương tự, trong số các dãy giảm nghiêm ngặt, ta chọn dãy con có độ dài lớn nhất. Giả sử i_k là chiều dài lớn nhất của dãy con tăng nghiêm ngặt bắt đầu từ a_k và d_k là chiều dài lớn nhất của dãy con giảm nghiêm

ngặt bắt đầu từ a_k. Ta liên kết cặp đôi (i_k, d_k) với phần tử a_k.
Ta xét tập hợp $A = \{(i_k, d_k) : \quad k = 1, 2, 3, ..., n^2 + 1\}$.

Giả sử không tồn tại dãy con tăng nghiêm ngặt hay dãy con giảm nghiêm ngặt có chiều dài $n + 1$ của dãy $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n^2+1}$. Điều này suy ra $1 \leq i_k \leq n$ và $1 \leq d_k \leq n$ với mọi $k = 1, 2, 3, ..., n^2 + 1$.

Với mỗi k, i_k có n cách chọn và d_k có n cách chọn. Do đó, với mỗi k có n^2 cách chọn cặp (i_k, d_k).

Tập hợp A có $n^2 + 1$ phần tử và mỗi phần tử có n^2 cách chọn. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai phần tử trong tập A phải trùng nhau. Tức là tồn tại hai số nguyên u và v, $1 \leq u, v \leq n^2 + 1$ sao cho $(i_u, d_u) = (i_v, d_v)$, tức là $i_u = i_v$ và $d_u = d_v$.

Ta xét a_u và a_v. Do tất cả các phần tử của dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ là phân biệt nên suy ra hoặc $a_u < a_v$ hoặc $a_u > a_v$.

Giả sử $a_u < a_v$. Do $i_u = i_v$ nên tồn tại một dãy con tăng nghiêm ngặt, chẳng hạn $a_v, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_u}$ có chiều dài i_u bắt đầu từ a_v. Khi đó, $a_u, a_v, a_{i_2}, a_{i_3}, ..., a_{i_u}$ là dãy tăng nghiêm ngặt có chiều dài $i_u + 1$ bắt đầu từ a_u. Điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên là dãy con tăng nghiêm ngặt có chiều dài lớn nhất bắt đầu từ a_u là i_u.

Tương tự, giả sử $a_u > a_v$ thì sử dụng $d_u = d_v$, ta chỉ ra rằng có một dãy con giảm nghiêm ngặt có chiều dài $d_v + 1$ bắt đầu từ a_v.

Vậy giả thiết phản chứng của chúng ta ở trên là sai. Do đó, dãy $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n^2+1}$ có dãy con tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt có độ dài $n + 1$.

3.4. BÀI TOÁN LIỆT KÊ

3.4.1. *Giới thiệu bài toán*

Định nghĩa 3.4.1. *Bài toán đưa ra danh sách tất cả cấu hình tổ hợp thỏa mãn những tính chất nào đó được gọi là bài toán liệt kê tổ hợp.*

Để thực hiện bài toán liệt kê chúng ta cần xác định một thuật toán và từ thuật toán này có thể xác định được tất cả các cấu hình đang quan tâm.

Cách liệt kê cần đảm bảo 2 nguyên tắc:

a. Không được lặp lại cấu hình

b. Không được bỏ sót bất kỳ cấu hình nào

3.4.2. *Hai phương pháp liệt kê thường dùng*

Chúng ta thường sử dụng hai phương pháp liệt kê là:

+) Thuật toán sinh (phương pháp sinh)

+) Thuật toán quay lui

a. Thuật toán sinh (phương pháp sinh)

Phương pháp sinh có thể áp dụng để giải các bài toán liệt kê thỏa mãn điều kiện:

i. Có thể xác định được một thứ tự trên tập các cấu hình cần liệt kê. Từ đó có thể xác định được cấu hình đầu tiên và cấu hình cuối cùng trong thứ tự đã xác định.

ii. Xây dựng được thuật toán từ cấu hình chưa phải là cuối cùng đang có, đưa ra cấu hình tiếp.

Ví dụ 3.4.1. *Thuật toán sinh*

Thuật toán 3.4.1 Thuật toán sinh để giải bài toán liệt kê

Input: L - Dữ liệu cần liệt kê
Output: Danh sách liệt kê

procedure Generate;(L)
  begin<xây dựng cấu hình ban đầu>
    $Stop := false$;

```
    while not stop do
        begin <đưa ra cấu hình đang có>;
        sinh_kế_tiếp;
end
```

Sinh_kế_tiếp là thủ tục sinh ra cấu hình tiếp theo bởi thuật toán sinh kế tiếp đã xây dựng.

Ví dụ 3.4.2. *Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài n. Ta coi mỗi xâu nhị phân $b = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0$ là biểu diễn nhị phân của số nguyên $P(b)$.*

Ta nói xâu nhị phân $b = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0$ trước $b' = b'_{n-1}b'_{n-2}\ldots b'_0$ khi và chỉ khi $P(b) < P(b')$.

B	*P(b)*
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Chẳng hạn $n = 3$

Từ bảng trên, ta nhận thấy trong dãy xâu nhị phân có độ dài n, xâu đầu tiên là $00\ldots0$ và xâu cuối cùng của dãy là $11\ldots1$.

Giả sử xâu nhị phân $b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0$ đang có mặt trong dãy xâu nhị phân độ dài n, nếu xâu này gồm toàn số 1 thì quá trình liệt kê kết thúc, nếu không thì xâu nhị phân kế tiếp sẽ được xác định bằng cách cộng vào bên phải xâu đó với số 1 (modum 2 có nhớ).

Quy tắc sinh dãy kế tiếp:

i. Tìm $i+1$ chữ số đầu trên trong xâu nhị phân (tính từ phải sang) thỏa mãn $b_{i+1}=0$.

ii. Gán lại $b_{i+1}=1$ và $b_j=0$ với tất cả $j<i+1$. Xâu nhị phân mới thu được sẽ là xâu kế tiếp cần tìm.

Ví dụ 3.4.3. *Xét xâu nhị phân độ dài* 10 *là:* $b_9b_8b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$. *Chẳng hạn,* $b = 1101011111$.

Trong trường hợp này $i=4$, $b_5=1$, $b_j=0$, $\forall j=4,3,2,1,0$ thì xâu nhị phân kế tiếp là: $b' = 1101100000$.

Đối với xâu nhị phân $b = 11001001111$ (độ dài 11), ta có $i=3$ và $b_4=1$. Khi đó, ta tìm xâu kế tiếp bằng cách cho $b_j=0$, $\forall j=3,2,1,0$. Do đó, xâu nhị phân kế tiếp nhận được là: $b' = 11001010000$.

Thuật toán 3.4.2 Thuật toán sinh kế tiếp

Input: L - Sinh xâu nhị phân kế tiếp theo thứ tự từ điển từ xâu đang có $b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0 \neq 11\ldots1$

Output: L_1 - xâu tiếp theo

procedure Next-bit-string;(L_1)
    begin
        $i := 0$;
        while $b_i = 1$ **do**
            begin
                $b_i = 0$;
                $i := i + 1$;
            end
            $b_i := 1$;
    end

Chương trình Pascal thực hiện việc liệt kê các xâu nhị phân có độ dài n bằng phương pháp sinh:

Thuật toán 3.4.3 {Chương trình liệt kê xâu nhị phân}

var: n, i: integers;

b: array[1..15] of $0..1$;

$count$: word;

$stop$: boolean;

procedure Init;

var i: integer;

begin

write ('Cho biết độ dài xâu nhị phân:'); readln(n);

for $i := 1$ **to** n **do** $b[i] := 0$;

$stop := false$;

$count := 0$;

end;

procedure Xau_ke_tiep;

var i: interger;

begin

{sinh xâu nhị phân kế tiếp}

$i := n$;

while $(i \geq 1)$ **and** $(b[i] = 1)$ **do**

begin

$b[i] := 0$;

$i := i - 1$;

end;

if $i < 1$ **then** $stop := true$ **else** $b[i] := 1$;

end;

Begin { Chương trình chính }

Init;

While not *stop* **do**

Begin

{ đưa ra xâu nhị phân hiện tại}

$count := count + 1$;

write(count:5,'.');

for $i := 1$ to n **do** write($b[i]$: 2); writeln;

Xau_ke_tiep;

end;

write('Gõ enter để kết thúc'); readln;

End.

b. Thuật toán quay lui

Nội dung chính của thuật toán quay lui là xác định các thành phần của cấu hình bằng cách thử tất cả các khả năng. Giả sử cấu hình cần tìm được mô tả bằng 1 bộ phận gồm n thành phần $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Giả sử ta đã xác định được $i - 1$ thành phần $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ (ta gọi là lời giải bộ phận cấp $i - 1$), bây giờ, ta xác định thành phần x_i bằng cách duyệt tất cả các khả năng có thể đề cử cho nó (đánh số khả năng từ 1 đến n_i).

Xảy ra 2 trường hợp:

+) Nếu chấp nhận j thì xác định x_i theo j, sau đó nếu $i = n$ thì ta được 1 cấu hình, trái lại ta xác định x_{i-1}.

+) Nếu thử tất cả các khả năng mà không có khả năng nào chấp nhận thì quay lại bước trước để xác định lại x_{i-1}

Thuật toán 3.4.4 Procedure Try (i : integer);
var j: integer;

begin

for $j := 1$ **to** n_i **do**

if $\langle$ chấp nhận $j\rangle$ **then**

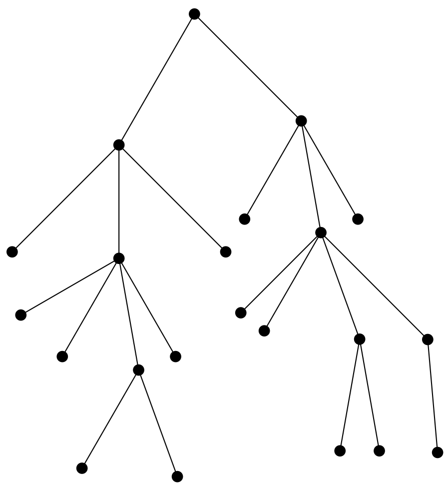
begin $\langle$xác nhận x_i theo $j\rangle$

if $i = n$ **then** $\langle$ghi nhận một cấu hình$\rangle$

else Try($i + 1$);
end;

end;

Cây liệt kê của lời giải theo thuật toán quay lui



Khả năng chọn x_1
Khả năng chọn x_2
Khi đã chọn x_1
Khả năng chọn x_3
Khi đã chọn x_1, x_2

Ví dụ 3.4.4. *Chương trình Pascal liệt kê dãy nhị phân*

Thuật toán 3.4.5 var n: integer

$b : array[1..30]$ of $0 \dots 1$;

$count : word$;

procedure Init;

begin

```
write ('n ='); readln(n);
count := 0;
end;
procedure Result;
var i:integer;
begin
count := count + 1;
write (count:5, '. ');
for i := 1 to n do write (b[i] : 2);
writeln;
end;
procedure try(i:integer);
var j:integer
begin for j := 0 to 1 do
begin
b[i] := j;
if i = n then Result
else Try(i + 1);
end;
end;
begin { main program }
Init; Try(1);
write ("Gõ enter để kết thúc. . . "); readln;
end.
```

3.5. THUẬT TOÁN SINH HOÁN VỊ VÀ SINH TỔ HỢP

Trong các bài trước, chúng ta đã biết các nguyên lý đếm, công thức đếm số các tổ hợp có thể có và biết cách kiểm tra khi nào cấu hình tổ hợp tồn tại. Nhiều bài toán trong thực tế không chỉ yêu cầu chúng ta đưa ra số lượng các kết quả mà còn yêu cầu liệt kê tất cả các kết quả có thể có của bài toán. Để liệt kê được các kết quả đó, chúng ta cần có những thuật toán tìm ra các kết quả hay các cấu hình tổ hợp. Chẳng hạn, bài toán về hành trình của người đưa hàng: Một người đưa hàng cần di chuyển qua 7 thành phố, xuất phát từ một thành phố nào đó, đi qua mỗi thành phố một lần rồi quay trở lại thành phố xuất phát. Biết rằng giữa hai thành phố bất kỳ trong 7 thành phố đó đều có đường đi. Trước khi bắt đầu hành trình, người đưa hàng muốn biết thứ tự các thành phố mà anh ta sẽ đi sao cho tốn ít thời gian nhất. Một lời giải của bài toán này là đưa ra tất cả các hoán vị của 7 thành phố sau đó chọn ra cách đi có tổng thời gian nhỏ nhất. Ta có 7! phương án di chuyển tương ứng với 7! hoán vị của các thành phố đã cho.

Có nhiều bài toán khác mà trong đó chúng ta cần tìm tất cả các hoán vị hoặc các tổ hợp được sinh ra để từ đó tìm ra lời giải bài toán. Trong bài này, chúng tôi sẽ trình bày thuật toán sinh hoán vị và thuật toán sinh tổ hợp. Đây cũng là những ví dụ cụ thể của thuật toán sinh kế tiếp trong bài trước.

3.5.1. *Thuật toán sinh hoán vị*

Định nghĩa 3.5.1. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \geq 1$ *và* $P_1 : a_1a_2\ldots a_n$, $P_2 : b_1b_2\ldots b_n$ *là hai hoán vị khác nhau của tập* X *(tức là tồn tại* i *sao cho* $a_i \neq b_i$*). Ta nói hoán vị* P_1 *nhỏ hơn (hay đứng trước)* P_2 *theo thứ tự từ điển, kí hiệu* $P_1 \prec P_2$*, nếu tồn tại số nguyên dương* $i : 1 \leq i \leq n$ *sao cho* $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$.

Ví dụ 3.5.1. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. *Khi đó, hoán vị* $P_1 = 3241756$ *nhỏ hơn hoán vị* $P_2 = 3241675$. *Kí hiệu* $3241756 \prec 3241675$.

Định nghĩa 3.5.2. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \geq 1$ *và* P_1 *là một hoán vị của* X. *Hoán vị* P_2 *của tập* X *được gọi là hoán vị kế tiếp lớn hơn hoán vị* P_1 *nếu không tồn tại hoán vị* P *của* X *sao cho* $P_1 \prec P \prec P_2$.

Ví dụ 3.5.2. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. *Khi đó hoán vị* $P_2 = 3241765$ *là hoán vị kế tiếp lớn hơn hoán vị* $P_1 = 3241756$.

Trong Ví dụ 3.5.1, với cách định nghĩa thứ tự các hoán vị như trong định nghĩa trên thì trong $7!$ hoán vị của tập X, ta sẽ có hoán vị nhỏ nhất là 1234567 và hoán vị lớn nhất là 7654321.

Tương tự, trong trường hợp tổng quát, hoán vị nhỏ nhất và hoán vị lớn nhất của tập $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ lần lượt là $123\ldots(n-2)(n-1)n$ và $n(n-1)(n-2)\ldots321$.

Mục tiêu của bài này này là chúng ta xây dựng thuật toán sinh ra tất cả các hoán vị tiếp theo từ một hoán vị cho trước chưa phải là hoán vị cuối cùng. Trước hết, ta sẽ thực hiện qua các ví dụ sau:

Ví dụ 3.5.3. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Ta xét hoán vị* $P = 18435627$. *Đặt* $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 2, a_8 = 7$. *Ta nhận thấy hai số hạng cuối của hoán vị* $a_7 < a_8$ *nên để sinh ra hoán vị kế tiếp lớn hơn ta chỉ việc đổi chỗ hai số* a_7 *và* a_8 *cho nhau và giữ nguyên các số còn lại. Ta được hoán vị kế tiếp lớn hơn của hoán vị* P *là* 18435672.

Ví dụ 3.5.4. *Cho tập hợp* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Xét hoán vị* $P : 18435762$. *Đặt* $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 7, a_7 = 6, a_8 = 2$. *Tìm tất cả các hoán vị của tập* X *là hoán vị kế tiếp lớn hơn hoán vị* P.

Để sinh ra hoán vị kế tiếp lớn hơn hoán vị P ta lần lượt thực hiện các bước sau:

Bước 1: Trong ví dụ này, khi xét hai số cuối, ta có $a_7 > a_8$ nên ta không thực hiện phép đổi chỗ hai số này.

Bước 2: Tiếp theo ta so sánh hai số a_6 và a_7 và cũng không xảy ra trường hợp $a_6 < a_7$ nên ta cũng không đổi chỗ hai số này.

Bước 3: Dịch chuyển tiếp về bên trái, ta so sánh hai số a_5 và a_6 và nhận thấy $a_5 < a_6$.

+) Trong các số a_6, a_7, a_8 ta chọn ra số nhỏ nhất nhưng lớn hơn a_5. Đối với ví dụ này a_7 là số được chọn.

+) Ta thực hiện việc đổi chỗ hai số a_5 và a_7 cho nhau. Khi đó, ta được hoán vị 18436752.

+) Sau đó, ta thực hiện việc sắp xếp các số a_6, a_7, a_8 theo thứ tự tăng dần, trong ví dụ này ta có 3 số cuối của hoán vị là 257.

Vậy, ta được hoán vị kế tiếp lớn hơn hoán vị P là 18436257.

Từ các ví dụ trên, ta có thuật toán để giải bài toán tổng quát sinh hoán vị của tập n phần tử cho trước như sau:

Thuật toán 3.5.6 Thuật toán sinh hoán vị

Input: P - Danh sách chứa một hoán vị cho trước
n - Số các phần tử trong một hoán vị
Output: L - Danh sách chứa các hoán vị lớn hơn sau P

```
procedure NextLargestPermutation(P, L, n)
    begin
        for i := 0 to n do
            L[i] = P[i];
            i := n − 1;
            / Tìm chỉ số lớn nhất i sao cho L[i] < L[i + 1] /
        while L[i] > L[i + 1] do
            i := i − 1;
            /* Tìm chỉ số j của phần tử nhỏ nhất
            trong L[i + 1 . . . n] sao cho L[i] < L[j] ∗ /
            j : n;
        while L[i] > L[j] do
```

```
            j := j − 1;
            swap (L[i], L[j]);
            /* Sắp xếp các phần tử trong L[i + 1 . . . n]
             theo thứ tự tăng dần*/
            s := i + 1;
            t := n;
        while t > s do
            begin
                swap (L[s], L[t]);
                s := s + 1;
                t := t − 1;
            end
    end
```

3.5.2. *Thuật toán sinh tổ hợp*

Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng thuật toán sinh tổ hợp chập r (không lặp) của một tập hợp n phần tử, trong đó $1 \leq r \leq n$. Ta nhắc lại Định nghĩa 3.2.4 với trường hợp đặc biệt tập $S = X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Định nghĩa 3.5.3. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ và số thực r thỏa mãn $1 \leq r \leq n$. Một tổ hợp (không lặp) chập r của tập hợp X là một tập con $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ của X mà A chứa r phần tử phân biệt của tập hợp X.*

Trong bài toán liệt kê, các phần tử của tổ hợp chập r : $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ được giả thiết sắp thứ tự $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$.

Ví dụ 3.5.5. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Khi đó, các tập hợp $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ và $\{5, 6, 7, 8\}$ là những tổ hợp chập 4 của tập hợp đã cho.*

Xét tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Giả sử $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ và $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ là hai tổ hợp chập r của tập X. Ta đặt $a = a_1a_2 \ldots a_r$ và $b = b_1b_2 \ldots b_r$

là những xâu kí tự lần lượt tương ứng với hai tổ hợp $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$.

Định nghĩa 3.5.4. *Ta nói a nhỏ hơn b theo thứ tự từ điển, kí hiệu $a \prec b$, nếu tồn tại số nguyên dương $i :\ 1 \leq i \leq n$ sao cho $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$.*

Ví dụ 3.5.6. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, , 5, 6, 7, 8\}$. Xâu kí tự $a = 1234$ và $b = 1235$ lần lượt biểu diễn hai tổ hợp chập 4 của X. Theo Định nghĩa 3.5.4 thì $a \prec b$.*

Định nghĩa 3.5.5. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \ \geq 1$. Giả sử $a = a_1a_2 \ldots a_r$ và $b = b_1b_2 \ldots b_r$ là những xâu kí tự tương ứng với hai tổ hợp chập r của X. Ta nói b là tổ hợp kế tiếp lớn hơn a nếu không tồn tại xâu kí tự s biểu diễn một tổ hợp chập r của X thỏa mãn $a \prec s \prec b$.*

Ví dụ 3.5.7. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*

i) Xét các xâu kí tự $a = 3456$, $b = 3457$, $c = 3478$ tương ứng với các tổ hợp chập 4 của tập X. Ta có $a \prec b$ và $a \prec c$. Trong đó, b là tổ hợp kế tiếp lớn hơn a.

ii) Xâu kí tự $s = 1234$ biểu diễn tổ hợp chập 4 nhỏ nhất của tập X. Xâu kí tự $m = 5678$ biểu diễn tổ hợp chập 4 lớn nhất của X.

Giả sử $a = a_1a_2 \ldots a_r$ là xâu kí tự tương ứng với tổ hợp lớn nhất chập r của tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Khi đó,

+) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

+) Giá trị lớn nhất của a_r là n, giá trị lớn nhất của a_{r-1} là $n - 1$, $\ldots$, giá trị lớn nhất của a_1 là $n - r + 1$. Trường hợp tổng quát, giá trị lớn nhất của a_i là $n - r + i$ với mọi $i :\ 1 \leq i \leq r$.

Ví dụ 3.5.8. *Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tìm các xâu kí tự biểu diễn các tổ hợp lớn hơn kế tiếp của các tổ hợp sau đối với tập X.*

a) $a = 1235$, $b = 1239$.

b) $c = 134789$.

Giải.

a) Đối với xâu $a = 1235$, phần tử cuối cùng bên phải $a_4 = 5$ chưa bằng giá trị lớn nhất có thể có của nó nên ta chỉ cần cộng giá trị của a_4 thêm 1 đơn vị. Các phần tử còn lại giữ nguyên. Ta dễ dàng tìm được xâu kí tự kế tiếp lớn hơn xâu a là $x = 1236$.

+) Đối với xâu b, giá trị của b_4 đã là giá trị lớn nhất của nó, $b_4 = 9$ nên ta xét phần tử kế bên trái là phần tử $b_3 = 3$, chưa là giá trị lớn nhất có thể có của b_3 (chưa bằng 8) nên ta tăng b_3 thêm 1 đơn vị, lúc này $b_3 = 4$ và thay phần tử cuối cùng bên phải, tức là b_4 bởi số $4 + 1$. Các kí tự còn lại giữ nguyên. Vậy, ta được xâu kí tự biểu diễn tổ hợp chập 4 kế tiếp lớn hơn xâu $b = 1239$ là $b = 1245$.

b) Trong xâu kí tự $c = 134789$, các phần tử c_3, c_4, c_5, c_6 đều đã nhận giá trị lớn nhất có thể có của nó nên ta tăng c_3 thêm 1 đơn vị, vì vậy c_3 thay bằng $= 5$. Sau đó, thay $c_4 = c_3 + 1 = 5 + 1 = 6$, $c_5 = c_3 + 2 = 5 + 2 = 7$, $c_6 = c_3 + 3 = 5 + 3 = 8$. Vậy, xâu kí tự biểu diễn tổ hợp chập 6 lớn nhất kế tiếp của xâu $c = 134789$ là $c = 135678$.

Từ ví dụ trên ta có thuật toán để giải bài toán tổng quát sinh tổ hợp chập r của tập n phần tử cho trước như sau:

Thuật toán 3.5.7 Thuật toán sinh tổ hợp

Input: A - Danh sách chứa một tổ hợp chập r của tập cho trước
n - Số các phần tử của tập hợp ban đầu

Output: L - Danh sách chứa các tổ hợp chập r lớn hơn sau A

procedure NextLargestCombination(A, L, n, r)
    begin
        for $i := 0$ to r **do**
            $L[i] = A[i]$;
            /* Tìm chỉ số lớn nhất i sao cho $L[i]$
            chưa nhận giá trị lớn nhất của nó. */
        $i := r$;
        $max := n$;

while $L[i] = max$ **do**
  begin
    $i := i - 1;$
    $max := max - 1;$
  end
 tăng $L[i]$ thêm 1
$L[i] := L[i] + 1;$
/* Tập hợp các phần tử bên phải của $L[i]$
 là các số nguyên liên tiếp */
for $j := i + 1$ to r **do**
  $L[j] := L[j - 1] + 1;$
end

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 3

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Quy tắc cộng	Addition principle
Quy tắc nhân	Multiplication principle
Nguyên lý bù trừ	The principle of Inclusion-Exclusion
Hoán vị	Permutations
Hoán vị lặp	Permutations with repetitions
Tổ hợp	Cobinations
Tổ hợp lặp	Cobinations with repetitions
Nguyên lý Dirichlet	Pigeonhole principle
Thuật toán sinh	Generation Algorithms
Thuật toán quay lui	Backtracking Algorithms

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN VÀ BÀI TOÁN TỔ HỢP

Bài 3.1: Tính số các số nguyên nằm giữa 4 và 100 mà chữ số tận cùng là 3 hoặc 5 hoặc 7.

Bài 3.2: Tìm số các xâu bit có độ dài bằng 12 mà bắt đầu với bốn kí tự 1011.

Bài 3.3: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số chia hết cho 3 hoặc 7.

Bài 3.4: Tìm các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 và bé hơn hay bằng 500 thỏa mãn điều kiện sau:
a) Có các chữ số phân biệt.

b) Có các chữ số phân biệt và chia hết cho 5.

c) Chứa ba chữ số.

Bài 3.5: Có một trăm vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải đặc biệt.
a) Hỏi có bao nhiêu cách trao thưởng?

b) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng giải đặc biệt?

c) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết người giữ vé số 47 trúng một trong các giải?

d) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết người giữ vé số 47 không trúng giải thưởng?

e) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết hai người giữ vé số 47 và 62 trúng giải thưởng?

f) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết ba người giữ vé số 47, 25 và 62 trúng giải thưởng?

g) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết bốn người giữ vé số 47, 25, 68 và 62 trúng giải thưởng?

h) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu biết bốn người giữ vé số 47, 25, 68 và 62 không trúng giải thưởng?

i) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu một trong bốn người giữ vé số 47, 25, 68 và 62 trúng giải đặc biệt?

j) Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu những người giữ vé số 47 và 25 trúng giải nhưng hai người giữ vé số 68 và 62 không trúng giải?

Bài 3.6: Một đội bóng có 15 cầu thủ.
a) Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ để thi đấu.

b) Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ trong danh sách 15 cầu thủ của đội sao cho mỗi cầu thủ được phân công chơi ở một trong 11 vị trí đã định?

Bài 3.7: Một lớp học có 40 sinh viên.
a) Có bao nhiêu cách chọn 4 sinh viên vào ban cán sự lớp?

b) Có bao nhiêu cách chọn ban cán sự gồm: bí thư, phó bí thư, lớp trưởng và lớp phó?

Bài 3.8: Một giáo sư soạn 60 câu hỏi đúng sai về môn Toán rời rạc, trong đó có 35 câu trả lời đúng. Nếu thứ tự các câu hỏi là tùy ý thì có bao nhiêu đáp án khác nhau?

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ VÀ NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Bài 3.9: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 10 hoặc bắt đầu bằng hai bit 1 hoặc kết thúc bằng 3 bit 0?

Bài 3.10: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 11 hoặc bắt đầu bằng hai bit 0 hoặc kết thúc bằng hai bit 1?

Bài 3.11:
a) Chứng tỏ rằng trong 5 số được chọn từ 8 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết phải có một cặp số có tổng bằng 9.

b) Điều khẳng định trong câu a) còn đúng không nếu ta chọn 4 số trong số 8 số nguyên dương đầu tiên đã cho?

Bài 3.12:

a) Chứng tỏ rằng trong 7 số được chọn từ 10 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết phải có một cặp số có tổng bằng 11.

b) Điều khẳng định trong câu a) còn đúng không nếu ta chọn 6 số trong số 10 số nguyên dương đầu tiên đã cho?

Bài 3.13: Một công ty giữ hàng hóa trong kho. Số các ngăn chứa trong kho được xác định bởi số gian hàng, số ô trong mỗi gian và số các giá ở mỗi ô. Biết nhà kho có 50 gian, mỗi gian có 85 ô và mỗi ô có 5 giá. Hỏi hàng hóa tối thiểu phải bằng bao nhiêu để ít nhất có hai sản phẩm được đặt trong cùng một ngăn?

Bài 3.14*: Cho $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\} \subset N^*$ thỏa mãn điều kiện $1 \leq a_{p+1} - a_p \leq 1999$ với mọi $p \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số p, q với $p < q$ sao cho a_p chia hết a_q.

Bài 3.15*: Giả sử có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm gồm 5 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời và mỗi học sinh chỉ được phép chọn một trong bốn phương án đó để trả lời cho câu hỏi tương ứng. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho các học sinh có thể làm bài thi theo cách nào đó mà cứ n học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số n học sinh này) để hai học sinh nào đó trong bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất hai câu hỏi.

Bài 3.16*: Gọi A là tập hợp tất cả các bộ ba $x = (x_1, x_2, x_3)$ mà $x_1, x_2, x_3 \in [0, 7] \cap Z$. Bộ $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$ được gọi là trội hơn bộ $y = (y_1, y_2, y_3) \in A$ nếu $x \neq y$ và $x_i \geq y_i$ với mọi $i \in \{1, 2, 3\}$. Khi đó, ta viết $x \succ y$. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho mọi tập con n-phần tử của A đều chứa ít nhất hai bộ x, y mà $x \succ y$.

CÔNG THỨC TRUY HỒI

Bài 3.17: Hãy tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi sau với điều kiện ban đầu tương ứng. (Sử dụng phương pháp lặp)

a) $a_n = 3a_{n-1}$ $a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 2,$ $a_0 = 3$

c) $a_n = a_{n-1} + n$ $a_0 = 1$

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$ $a_0 = 4$

e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$ $a_0 = 1$

f) $a_n = 3a_{n-1} - 1$ $a_0 = 1$

g) $a_n = na_{n-1}$ $a_0 = 5$

h) $a_n = 2na_{n-1}$ $a_0 = 1.$

Bài 3.18: Một người gửi 1000 USD vào tài khoản của mình trong một ngân hàng với lãi suất kép 8% một năm.
a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi để tính tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n của người đó.

b) Tìm công thức tường minh để tính tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n?

c) Sau 100 năm thì tổng số tiền có trong tài khoản của người đó là bao nhiêu?

Bài 3.19: Giả sử dân số toàn thế giới năm 1995 là 7 tỷ người và tăng với tốc độ 3% một năm.
a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho dân số thế giới trong n năm, sau năm 1995.

b) Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới của năm thứ n, sau năm 1995.

c) Năm 2018 dân số thế giới là bao nhiêu?

Bài 3.20: Một nhân viên bắt đầu làm việc tại công ty từ năm 1986, với lương khởi điểm là 900 (ngàn VNĐ). Hàng năm anh ta nhận thêm 200 (ngàn VNĐ) và 5% lương của năm trước.
a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó n năm sau năm 1996.

b) Lương của nhân viên đó năm 2018 là bao nhiêu?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này n năm sau năm 1997.

Bài 3.21*: Cho số nguyên $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của 1, 2, $\ldots$, n sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.

Bài 3.22*: Tìm số tập con của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Bài 3.23*: Có n quả bóng $b_1, b_2, ..., b_n$ và $2n$ hộp $h_1, h_2, ..., h_{2n}$. Biết rằng quả bóng $b_i \ \ (i = 1, 2, ..., n)$ chỉ bỏ được vào các hộp $h_1, h_2, ..., h_{2i}$. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ $k\,(1 \leq k \leq n)$ quả bóng vào hộp, biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng? (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).

Bài 3.24: Có $n \ \ (n > 1)$ thí sinh ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau luôn có đề khác nhau, biết rằng trong ngân hàng đề có đúng $m \quad (m > 1)$ và hiển nhiên mỗi đề có nhiều bản.

Bài 3.25*: Giả sử A và E là hai đỉnh đối diện của một bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ đỉnh A. Tại mỗi đỉnh của bát giác (trừ đỉnh E), mỗi cú nhảy con ếch chỉ có thể nhảy tới hai đỉnh kề với đỉnh đó. Khi con ếch nhảy vào đỉnh E, nó sẽ bị kẹt vĩnh viễn ở đó. Cho trước số nguyên dương n. Hỏi với n cú nhảy, có bao nhiêu cách để con ếch nhảy vào đỉnh E?

Bài 3.26*: Cho một bảng ô vuông $n \times n \quad (n > 1)$. Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 2 ô vuông được đánh dấu? (Hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).

Bài 3.27*: Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện:
a) n có 1000 chữ số;

b) Tất cả các chữ số của n là lẻ;

c) Hiệu của hai số liên tiếp bất kì của n luôn bằng 2.

BÀI TOÁN TỒN TẠI

Bài 3.28: Chứng minh rằng tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

Bài 3.29: Chứng minh rằng, mỗi tập gồm 10 số nguyên dương hai chữ số $\bar{ab}$ đều có hai tập con không giao nhau với tổng các số thuộc mỗi tập hợp là bằng nhau.

Bài 3.30: Cho dãy số có 17 số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số nguyên đó không có ước nguyên tố nào khác $3, 5, 7$ và 19. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong 17 số đã cho có tích của chúng là một số chính phương.

Bài 3.31: Giả sử một đội bóng đá ghi được ít nhất một bàn thắng trong 20 trận liên tiếp. Nếu nó ghi được tổng cộng 30 bàn thắng trong 20 trận đấu đó, chứng tỏ rằng trong một số trận đấu liên tiếp, nó ghi được đúng 9 bàn thắng.

BÀI TOÁN LIỆT KÊ

Bài 3.32: Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài 4.

Bài 3.33: Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài 5 mà có kí tự cuối cùng bằng 1.

Bài 3.34: Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và số $M = 12$. Tìm tất cả các tập con gồm 3 phần tử của tập X sao cho tổng của các phần tử đó bằng 12.

Bài 3.35*: Một người đưa thư phân phát thư tới 19 nhà ở một dãy phố. Người đưa thư phát hiện ra rằng không có 2 nhà liền kề nhau cùng nhận thư trong cùng một ngày và không có nhiều hơn hai nhà liền kề cùng không nhận thư trong cùng một ngày. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối thư?

THUẬT TOÁN SINH HOÁN VỊ VÀ SINH TỔ HỢP

Bài 3.36: Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Xét hoán vị $P = 3124765$. Tìm hoán vị kế tiếp lớn hơn của hoán vị P.

Bài 3.37: Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ta xét hoán vị $P = 1247365$. Hãy tìm hoán vị kế tiếp lớn hơn của hoán vị P.

Bài 3.38: Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ta xét xâu kí tự $s = 1246$ biểu diễn tổ hợp $\{1, 2, 4, 6\}$ của tập X. Hãy tìm tổ hợp kế tiếp lớn hơn của s.

Bài 3.39: Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Tìm các tổ hợp kế tiếp lớn hơn của các tổ hợp $a = 1245,\ b = 12345$.

Chương 4

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Lý thuyết đồ thị là ngành được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng trong hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ thứ 18 bởi nhà Toán học Thụy Sĩ tên là Leonhard Euler (1707-1783). Trong suốt 200 năm qua, lý thuyết đồ thị đã được sử dụng trong rất nhiều các ứng dụng khác nhau. Đồ thị biểu diễn và mô hình hóa các mạch điện, hợp chất hóa học, bản đồ đường cao tốc,... Lý thuyết đồ thị được sử dụng trong phân tích các mạch điện, xác định các tuyến đường ngắn nhất, lập kế hoạch dự án, ngôn ngữ học, di truyền học và trong các khoa học xã hội... Lý thuyết đồ thị được ứng dụng nhiều trong cả hai kiểu phân tích lưới. Kiểu thứ nhất là phân tích để tìm các tính chất về cấu trúc của một lưới, chẳng hạn nó là một scale-free network hay là một small-world network. Kiểu thứ hai, phân tích để đo đạc, chẳng hạn mức độ lưu thông xe cộ trong một phần của mạng lưới giao thông (transportation network). Ngoài ra, Lý thuyết đồ thị còn được dùng trong nghiên cứu phân tử. Trong vật lý vật chất ngưng tụ, cấu trúc ba chiều phức tạp của các hệ nguyên tử có thể được nghiên cứu định lượng bằng cách thu thập thống kê về các tính chất lý thuyết đồ thị có liên quan đến cấu trúc tô pô của các nguyên tử. Ví dụ, các vành đường đi ngắn nhất Franzblau (Franzblau's shortest-path rings). Trong chương này, chúng ta sẽ thảo luận về những kiến thức cơ bản của Lý thuyết đồ thị và một số ứng dụng của nó trong khoa học máy tính. Cuối Chương 3, chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán tìm đường đi ngắn nhất, bài toán tô màu đồ thị và một vài ứng dụng của nó.

4.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

4.1.1. *Mở đầu về đồ thị*

Định nghĩa 4.1.1. *Đồ thị G là bộ ba (V, E, f), trong đó*

i) V là tập hợp hữu hạn khác rỗng, được gọi là tập đỉnh.

ii) E là một tập hợp hữu hạn (có thể là tập rỗng), được gọi là tập cạnh.

iii) f là ánh xạ (được gọi là hàm liên thuộc), đặt tương ứng mỗi cạnh $e \in E$ với duy nhất một tập con của V gồm một phần tử $\{v\}$ hoặc duy nhất tập con của V gồm hai phần tử $\{u, v\}$.

Kí hiệu: $G = (V, E, f)$ hay $G = (V, E)$.

Như vậy, đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm tập hợp V khác rỗng, có hữu hạn phần tử (gọi là tập đỉnh) và tập E chứa các đường nối các cặp đỉnh của V (gọi là tập các cạnh), trong đó mỗi cạnh là đường nối một đỉnh với chính nó hoặc hai đỉnh với nhau.

Cạnh nối một đỉnh với chính nó được gọi là khuyên.

Người ta phân loại đồ thị dựa vào đặc tính của các cạnh và số các cạnh nối giữa các cặp đỉnh của đồ thị. Chẳng hạn, có nhiều cạnh nối cùng một cặp đỉnh hay có nhiều nhất một cạnh nối mỗi cặp đỉnh hay mỗi cạnh tương ứng với cặp đỉnh có thứ tự hay cặp đỉnh không tính thứ tự,.... Dựa vào các đặc điểm này, chúng ta thường gặp 5 loại đồ thị sau:

* Đơn đồ thị (Simple graphs)

* Đa đồ thị (Multigraphs)

* Giả đồ thị (Pseudographs)

* Đồ thị có hướng (Directed graphs)

* Đa đồ thị có hướng (Directed multigraphs)

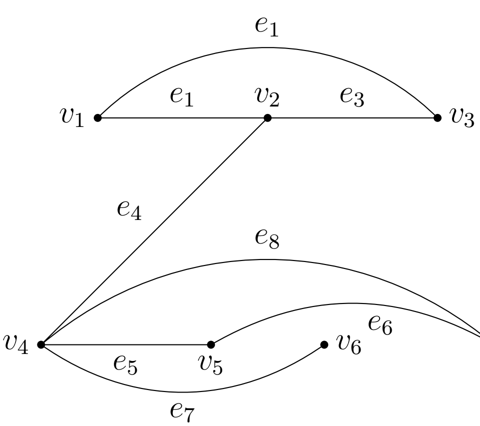
Định nghĩa 4.1.2. *Một đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là một đơn đồ thị nếu mỗi cạnh của G là một cặp đỉnh không tính thứ tự và giữa hai đỉnh bất kì có nhiều nhất một cạnh, đồng thời không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó.*

Khi không sợ nhầm lẫn, ta có thể viết gọn đồ thị G thay cho đồ thị $G = (V, E)$.

Đơn đồ thị có đặc điểm là: giữa 2 đỉnh bất kì hoặc không có cạnh hoặc có một cạnh duy nhất 2 chiều (vô hướng) và không có đường nào nối 1 đỉnh với chính nó (tức là không có khuyên).

Ví dụ 4.1.1. *Cho hai tập hợp:*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$, *trong đó* $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3\}$, $e_3 = \{v_2, v_3\}$, $e_4 = \{v_2, v_4\}$, $e_5 = \{v_4, v_5\}$, $e_6 = \{v_5, v_7\}$, $e_7 = \{v_4, v_6\}$, $e_8 = \{v_4, v_7\}$, $e_2 = \{v_1, v_3\}$. *Khi đó,* $G = (V, E)$ *là một đơn đồ thị.*



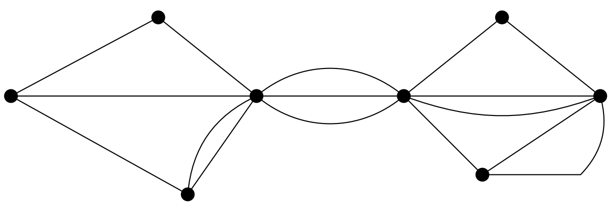
Định nghĩa 4.1.3. *Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là một đa đồ thị nếu mỗi cạnh của G là đường nối một cặp đỉnh không tính thứ tự (cạnh vô hướng) và không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó.*

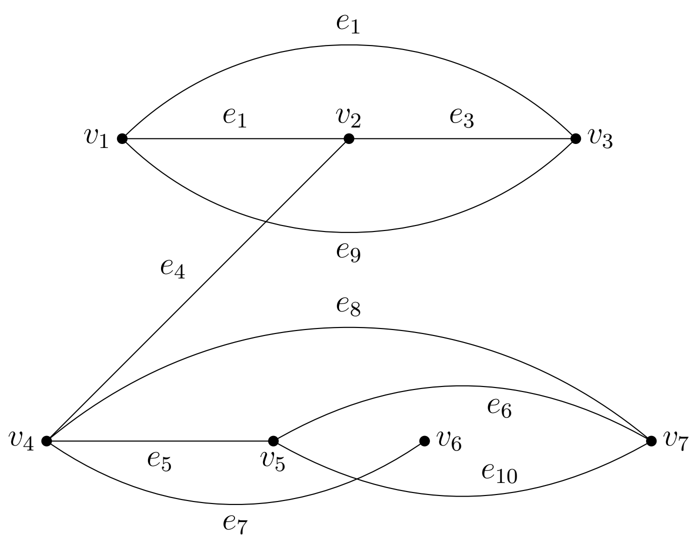
Vậy, một đa đồ thị $G = (V, E)$ gồm tập cạnh V hữu hạn, khác rỗng; tập E các cạnh vô hướng và một hàm f từ E tới

$$\{\{u, v\} : \; u \in V, \; v \in V, \; u \neq v\}.$$

Các cạnh e_1 và e_2 được gọi là hai cạnh song song hay cạnh bội nếu: $f(e_1) = f(e_2)$.

Ví dụ 4.1.2. *Các đồ thị sau là đa đồ thị:*





Đặc điểm của đa đồ thị:

+ Giữa 2 đỉnh có thể có nhiều đường nối (nhiều cạnh).

+ Các đường nối là 2 chiều (cạnh vô hướng)

+ Không có đường nối 1 đỉnh với chính nó (không có khuyên).

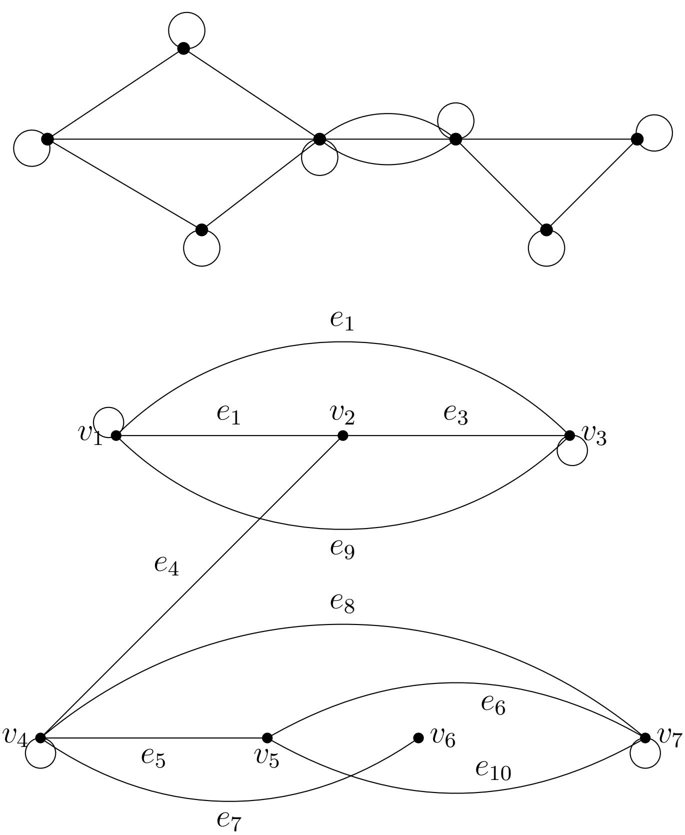
Do đó, đối với đa đồ thị ta không thể dùng số cặp đỉnh để xác định số cạnh.

Định nghĩa 4.1.4. *Giả đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị mà mỗi cạnh đều là cạnh vô hướng và có thể có cạnh nối một đỉnh với chính nó.*

Hay nói cách khác, giả đồ thị $G = (V, E)$ là một cấu trúc rời rạc gồm một tập đỉnh V hữu hạn khác rỗng, một tập E các cạnh vô hướng và ánh xạ f từ tập E tới $\{\{u, v\} : u \in V, v \in V\}$.

Một cạnh của đồ thị được gọi là một khuyên nếu $f(e) = \{u\}$, với u là một đỉnh nào đó.

Ví dụ 4.1.3. *Các đồ thị sau là giả đồ thị:*



Đặc điểm của giả đồ thị:

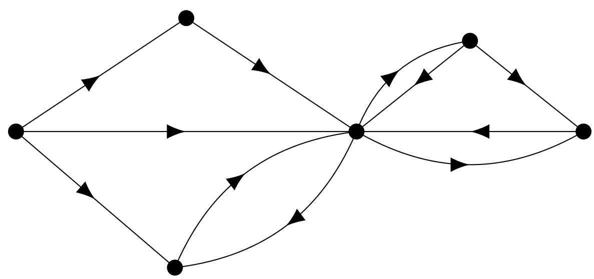
+ Có thể có cạnh 1 đỉnh với chính nó (có khuyên),

+ Tất cả các cạnh của giả đồ thị đều là cạnh vô hướng và có thể có nhiều cạnh vô hướng giữa một cặp đỉnh.

Vậy, giả đồ thị có chứa các khuyên và có cạnh bội.

Định nghĩa 4.1.5. *Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là đồ thị gồm tập V hữu hạn, khác rỗng các đỉnh và tập E các cạnh mà mỗi cạnh là một cặp có thứ tự của các phần tử t thuộc V và không có hai cạnh nào cùng chung một cặp đỉnh.*

Ví dụ 4.1.4. *Đồ thị sau là một đồ thị có hướng*



Đặc điểm của đồ thị có hướng:

+ Có thể có nhiều cạnh giữa 2 đỉnh nhưng khác chiều.

+ Các cạnh của đồ thị có hướng có xác định hướng, tức là các cặp đỉnh của đồ thị có hướng có tính thứ tự.

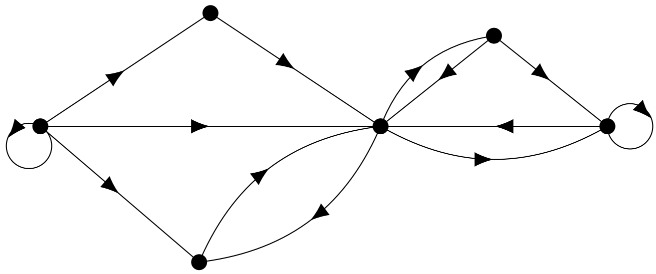
+ Không có cạnh bội cùng chiều nối cùng 1 cặp đỉnh. Đồ thị có hướng có thể có khuyên hoặc không có khuyên.

Định nghĩa 4.1.6. *Một đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đa đồ thị có hướng nếu mỗi cạnh là một cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.*

Hay nói cách khác, đa đồ thị gồm tập V khác rỗng, hữu hạn phần tử (các đỉnh), tập E hữu hạn các cạnh có hướng và một hàm f từ E tới $\{\{u, v\} : \ u \in V, \ v \in V\}$.

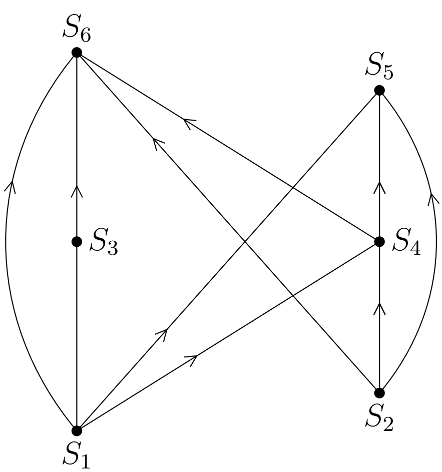
Các cạnh e_1 và e_2 là các cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

Ví dụ 4.1.5. *Đồ thị sau là đa đồ thị có hướng*



Ví dụ 4.1.6. *Các chương trình máy tính có thể thi hành nhanh hơn bằng cách thực hiện đồng thời một số câu lệnh nào đó. Điều quan trọng là không thực hiện câu lệnh đòi hỏi kết quả của câu lệnh khác chưa được thực hiện. Sự phụ thuộc của các câu lệnh vào câu lệnh trước có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng. Mỗi câu lệnh được biểu diễn bằng một đỉnh và có một cạnh từ một đỉnh tới đỉnh khác nếu câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ hai không thể thực hiện được trước khi câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ nhất được thực hiện. Đồ thị này được gọi là đồ thị có ưu tiên trước sau.*

Một chương trình máy tính và đồ thị của nó được biểu diễn trong hình dưới đây. Chẳng hạn, câu lệnh S_5 không thể thực hiện trước khi các câu lệnh S_1, S_2 và S_4 được thực hiện.



$S_1\ a := 0$ $\quad S_4\ d := b + a$

$S_2\ b := 1$ $\quad S_5\ e := d + 1$

$S_3\ c := a + 1$ $\quad S_6\ e := c + d$

Đặc điểm của đa đồ thị có hướng:

+ Các cạnh có hướng.

+ Có thể nối 1 cặp đỉnh bằng nhiều đường có hướng và có thể có khuyên.

+ Giữa 2 đỉnh có thể có các cạnh bội cùng chiều.

Bảng 4.1.1: Thuật ngữ cơ bản

Loại	**Cạnh**	**Cạnh bội**	**Khuyên**
Đơn đồ thị	Vô hướng	Không	Không
Đa đồ thị	Vô hướng	Có	Không
Giả đồ thị	Vô hướng	Có	Có
Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	Có

Ví dụ 4.1.7.

a) ***Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học***
Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật. Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hóa bằng đồ thị "lấn tổ". Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh. Một cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau.

b) ***Đồ thị ảnh hưởng***
Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người, ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng đến suy nghĩ của những người khác. Đồ thị có hướng được gọi là đồ thị ảnh hưởng có thể dùng để mô

hình bài toán này. Mỗi người trong nhóm được biểu diễn bằng một đỉnh. Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh a có ảnh hưởng đến người được biểu diễn bằng đỉnh b thì có một cung có hướng nối từ đỉnh a đến đỉnh b.

c) ***Thi đấu vòng tròn***
Một cuộc thi đấu thể thao trong đó mỗi đội đấu với mỗi đội khác đúng một lần gọi là đấu vòng tròn. Cuộc thi đấu như thế có thể được mô hình bằng một đồ thị có hướng trong đó mỗi đội là một đỉnh. Một cung đi từ đỉnh a đến đỉnh b nếu đội a thắng đội b.

4.1.2. *Một số thuật ngữ về đồ thị*

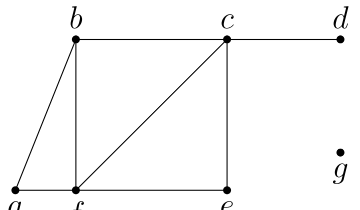
Định nghĩa 4.1.7. *Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là liền kề nếu $\{ u, v\}$ là một cạnh của G. Nếu cạnh $e = \{u, v\}$ (tức là, cạnh e nối hai đỉnh u và v) thì e gọi là cạnh liên thuộc với các đỉnh u, v. Các đỉnh u, v được gọi là các điểm đầu của cạnh $\{u, v\}$.*

Định nghĩa 4.1.8. *Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.*

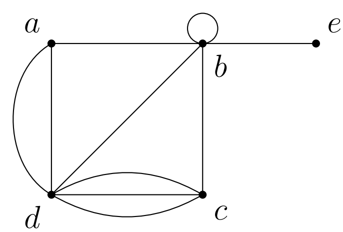
Kí hiệu bậc của đỉnh u là $\deg(u)$.

Định nghĩa 4.1.9. *Cho đồ thị G và v là một đỉnh của đồ thị G. Ta nói đỉnh v là đỉnh cô lập nếu v không nối với bất kì đỉnh nào trong đồ thị.*

Ví dụ 4.1.8. *Cho hai đồ thị sau:*



(H1)



(H2)

Trong đồ thị (H1): Ta có $\deg(a) = 2$, $\deg(b) = 4 = \deg(c) = \deg(f)$, $\deg(e) = 3$, $\deg(d) = 1$, $\deg(g) = 0$.

Trong đồ thị (H2): $\deg(a) = 4$, $\deg(b) = 6$, $\deg(c) = 5$, $\deg(d) = 6$, $\deg(e) = 1$.

Một đỉnh của đồ thị vô hướng được gọi là đỉnh cô lập nếu nó có bậc 0.

Một đỉnh của đồ thị vô hướng có bậc 1 *được gọi là đỉnh treo.*

Trong cả hai đồ thị trên ta đều có tổng các bậc của các đỉnh gấp đôi số cạnh của đồ thị đó. Cụ thể:

Trong đồ thị (H1): $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) + \deg(f) + \deg(g) = 18$ *và đồ thị (H1) có* 9 *cạnh.*

Trong đồ thị (H_2)*:* $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) = 22$*, số cạnh của (H2) là* 10 *cạnh và* 1 *khuyên.*

Từ ví dụ trên, ta có kết quả tổng quát sau:

Định lý 4.1.1. *(Định lí bắt tay hay Định lí Euler)*
Cho $G = (V, E)$ *là một đồ thị vô hướng có* e *cạnh. Khi đó:*

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

(Định lí này đúng cả khi đồ thị có cạnh bội hoặc có các khuyên).

Chứng minh. Giả sử G là một đồ thị vô hướng n cạnh và m đỉnh, $v_1, v_2, ..., v_m$. Ta cần xác định

$$\deg(v_1) + \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_{m-1}) + \deg(v_m).$$

Bây giờ, bậc $\deg(v_i)$ của đỉnh v_i là số cách cạnh nối với v_i. Mỗi cạnh e hoặc là một khuyên hoặc là nối giữa hai đỉnh phân biệt. Nếu e là khuyên tại đỉnh v thì ta tính hai bậc cho v. Mặt khác, nếu e nối hai đỉnh khác nhau u và v thì tính e một bậc tại mỗi đỉnh. Vậy, ta thấy rằng khi tính tổng $\deg(v_1) + \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_{m-1}) + \deg(v_m)$, thì mỗi cạnh đã được tính hai lần. Do đồ thị có n cạnh, tổng trên sẽ bằng $2n$. Do vậy,

$$\deg(v_1) + \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_{m-1}) + \deg(v_m) = 2n.$$

$\square$

Ví dụ 4.1.9. *Cho một đồ thị có* 10 *đỉnh và mỗi đỉnh đều có bậc* 6*. Hỏi đồ thị đó có bao nhiêu cạnh?*

Giải.

Tổng số bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị là: $10 \times 6 = 60$. Áp dụng định lí bắt tay ta có: $2e = 60$, suy ra $e = 30$. Vậy, đồ thị đã cho có 30 cạnh.

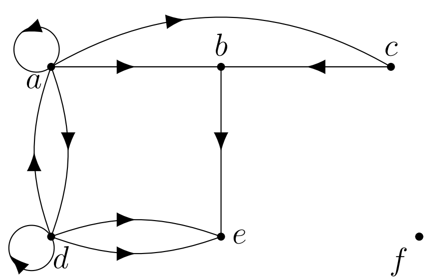
Hệ quả 4.1.1. *Tổng số bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị vô hướng là một số nguyên chẵn.*

Hệ quả 4.1.2. *Một đồ thị vô hướng có số chẵn các đỉnh bậc lẻ.*

Định nghĩa 4.1.10. *Khi* $\{u, v\}$ *là một cạnh của đồ thị có hướng* G *thì ta nói* u *nối tới* v *hay* v *được nối từ* u*. Đỉnh* u *là đỉnh đầu,* v *đỉnh cuối của cạnh* $\{u, v\}$*. Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên trùng nhau.*

Định nghĩa 4.1.11. *Trong đồ thị có hướng, bậc vào của đỉnh* v*, kí hiệu* $deg^-(v)$*, là số các cạnh có đỉnh cuối là* v*. Bậc ra của đỉnh* v*, kí hiệu* $deg^+(v)$*, là số các cạnh có đỉnh đầu là* v*. (Khuyên tại một đỉnh thì tính thêm* 1 *đơn vị đầu vào và* 1 *đơn vị đầu ra).*

Ví dụ 4.1.10. *Tìm bậc vào, bậc ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng dưới đây:*



Giải.

Các bậc vào là $\deg^-(a) = 2$, $\deg^-(b) = 2$, $\deg^-(c) = 1$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 3$ và $\deg^-(f) = 0$.

Các bậc ra là $\deg^+(a) = 4$, $\deg^+(b) = 1$, $\deg^+(c) = 1$, $\deg^+(d) = 4$, $\deg^+(e) = 0$ và $\deg^+(f) = 0$.

Vì mỗi cạnh có một đỉnh là đỉnh đầu và một đỉnh là đỉnh ra nên tổng các bậc vào và tổng các bậc ra của tất cả các đỉnh trong một đồ thị có hướng là bằng nhau và bằng chính số cạnh của đồ thị đó. Ta có định lí sau:

Định lý 4.1.2. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó:*

$$\sum_{v\in V} deg^-(v) = \sum_{v\in V} deg^+(v) = |E|$$

Nếu một đồ thị có hướng nhưng các tính chất mà chúng ta xét không phụ thuộc vào hướng thì ta có thể bỏ đi hướng của tất cả các cạnh và được đồ thị vô hướng. Một đồ thị vô hướng tạo thành từ đồ thị có hướng bằng cách bỏ đi hướng của tất cả các cạnh được gọi là đồ thị nền.

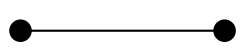
4.1.3. *Đơn đồ thị đặc biệt*

a. **Đồ thị đầy đủ (Complete graph):** Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.

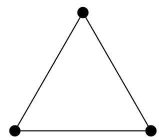
Định lý 4.1.3. *Số cạnh của một đồ thị đầy đủ với n đỉnh là $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Chứng minh. Giả sử G là một đồ thị đầy đủ n đỉnh. Khi đó, G là một đơn đồ thị vì tồn tại nhiều nhất một cạnh giữa hai đỉnh phân biệt. Mỗi đỉnh v của đồ thị G có $n-1$ đỉnh liền kề với v. Do đó, bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G là $n-1$. Do G có n đỉnh nên tổng số bậc của tất cả các đỉnh của G là $n(n-1)$. Theo định lí Euler (Định lí 4.1.3) ta có số cạnh của G là $n_e = \frac{n(n-1)}{2}$. □

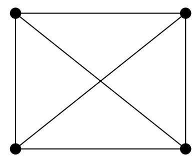
Các đồ thị sau là đồ thị đầy đủ



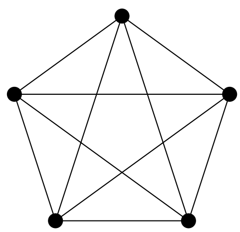
K_2



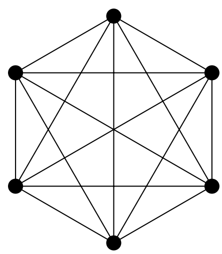
K_3



K_4

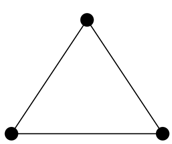


K_5

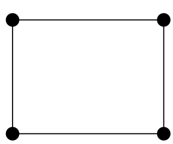


K_6

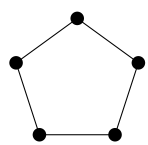
b. Chu trình (vòng) (Cycles): Chu trình C_n, $n \geq 3$ là 1 đồ thị có n đỉnh v_1, v_2, $\ldots$ v_n và các cạnh $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2$, $v_3\}$, $\ldots$ $\{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$.



C_3

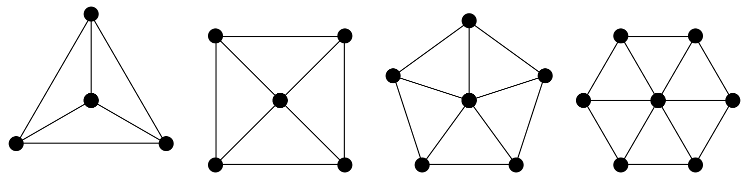


C_4



C_5

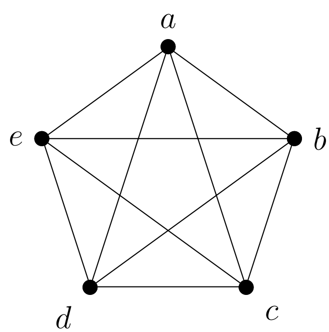
c. Đồ thị hình bánh xe (Wheel Graph): Khi thêm một đỉnh vào chu trình C_n với $n \geq 3$ và nối đỉnh này với mỗi đỉnh trong n đỉnh của C_n bằng những cạnh mới, ta sẽ nhận được đồ thị hình bánh xe. Các đồ thị hình bánh xe W_3, W_4, W_5 và W_6 được biểu diễn bởi các hình dưới đây:



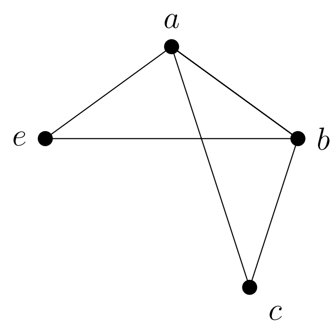
$W3$ $W4$ $W5$ $W6$

d. Đồ thị con (Subgraph): Cho đồ thị $G = (V, E)$. Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ được gọi là đồ thị con của $G = (V, E)$ nếu V_1 là tập con khác rỗng của v và E_1 là tập con của E.

Ví dụ 4.1.11. *Đồ thị con của K_5:*



$K5$



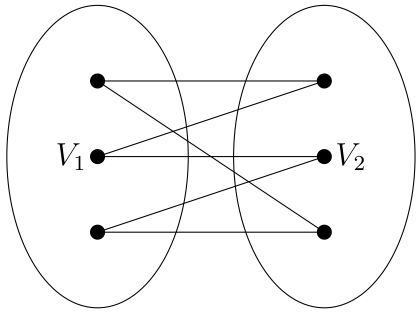
Đồ thị con của $K5$

e. Đồ thị lập phương (The $n-$ cube graph Q_n): Đơn đồ thị 2^n đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng với một xâu nhị phân độ dài n và hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi 2 xâu nhị phân tương ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit được gọi là đồ thị lập phương, ký hiệu là Q_n. Như vậy, mỗi đỉnh của Q_n có bậc là n và số cạnh của Q_n là $n \cdot 2^{n-1}$ (từ công thức $2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$).

4.1.4. *Đồ thị phân đôi (Bipartite Graph)*

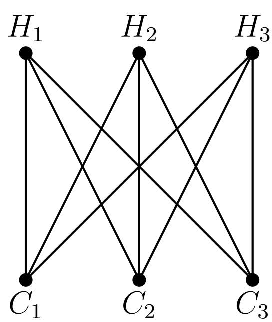
Định nghĩa 4.1.12. *Một đơn đồ thị G được gọi là đồ thị phân đôi nếu tập hợp các đỉnh V của nó có thể phân thành 2 tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị được nối bởi một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.*

Đồ thị phân đôi đầy đủ, kí hiệu $K_{m,n}$, là đồ thị có tập đỉnh được phân thành hai tập con khác rỗng tương ứng m đỉnh và n đỉnh, giữa hai đỉnh bất kì của hai tập con đó đều có duy nhất một cạnh và không có cạnh nào nối hai đỉnh trong cùng một tập con.



Ví dụ 4.1.12. *Một ví dụ trong thực tế về đồ thị phân đôi đầy đủ:*

Giả sử có ba hộ gia đình, chẳng hạn H_1, H_2 và H_3, mỗi hộ gia đình liên kết với các trung tâm của ba công ty: C_1, C_2 và C_3 mà các công ty này cung cấp nước, dịch vụ điện thoại và dịch vụ điện sinh hoạt. Đồ thị biểu diễn các yêu cầu trên chính là một đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$, được minh họa bởi hình dưới đây.



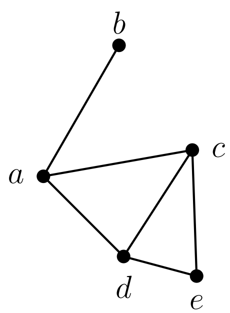
4.2. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

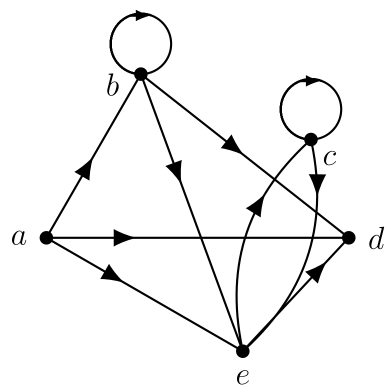
Hai đồ thị có dạng như nhau, theo nghĩa có phép tương ứng một-một (hay một song ánh) giữa hai tập đỉnh của chúng mà vẫn bảo tồn tính liền kề giữa các đỉnh, được gọi là hai đồ thị đẳng cấu. Hay nói cách khác, nếu tồn tại một song ánh từ tập đỉnh của đồ thị này đến tập đỉnh của đồ thị kia, sao cho hai đỉnh liền kề trong đồ thị này thì có ảnh cũng là hai đỉnh liền kề trong đồ thị kia.

4.2.1. *Biểu diễn đồ thị bằng danh sách liền kề*

Một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh bội là liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị. Nói cách khác, để biểu diễn đồ thị không có cạnh bội ta dùng danh sách liền kề. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 4.2.1. *Cho hai đồ thị:*





Ta có các bảng liệt kê tất cả các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh của đồ thị như sau:

Bảng 4.2.1. Danh sách các cạnh của đơn đồ thị

Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	b, c, d
b	a
c	a, e, d
d	a, c, e
e	c, d

Bảng 4.2.2. Danh sách các cạnh của đồ thị có hướng

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
a	b, d, e
b	b, d, e
c	c, e
d	không có
e	d

4.2.2. *Ma trận liền kề (Adjacency Matrices)*

Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, trong đó $|V| = n$ và các đỉnh được liệt kê một cách tùy ý v_1, v_2,..., v_n. Ma trận liền kề A (hay kí hiệu là A_G) của đồ thị G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận không - một cấp $n \times n$ có phần tử thuộc hàng i, cột j bằng 1 nếu hai đỉnh v_i và v_j liền kề nhau và bằng 0 nếu chúng không là hai đỉnh liền kề.

Ma trận liền kề của đơn đồ thị là $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là } 1 \text{ cạnh của } G \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối giữa } v_i \text{ và } v_j \end{cases}$$

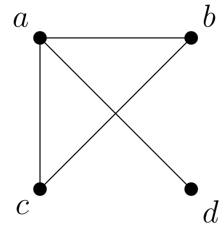
Ma trận liền kề cũng biểu diễn đa đồ thị hay giả đồ thị (đồ thị vô hướng có khuyên và có cạnh bội). Mỗi khuyên tại đỉnh v_i được biểu diễn bằng số 1 tại vị trí (i, i) của ma trận liền kề.

$$a_{ij} = \begin{cases} k & \text{nếu có } k \text{ cạnh nối giữa hai đỉnh } v_i \text{ và } v_j \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối giữa } v_i \text{ và } v_j \end{cases}$$

Ma trận liền kề của đồ thị có hướng n đỉnh $G = (V, E)$ (đơn đồ thị có hướng hoặc đa đồ thị có hướng) là ma trận vuông cấp n, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} k & \text{nếu có } k \text{ cạnh nối từ } v_i \text{ tới } v_j \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối từ } v_i \text{ tới } v_j \end{cases}$$

Ví dụ 4.2.2. *Viết ma trận liền kề của đồ thị sau:*

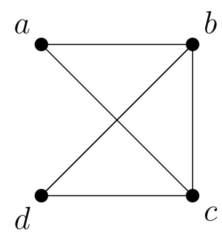


Giải.

Ma trận liền kề của đồ thị trên là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4.2.3. *Viết ma trận liền kề của đồ thị:*

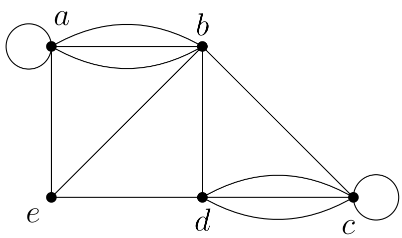


Giải.

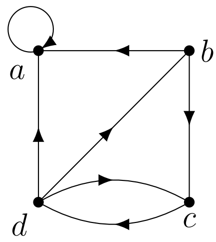
Ta có ma trận liền kề của đồ thị trên là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4.2.4. *Viết ma trận liền kề của các đồ thị sau:*



(G1)



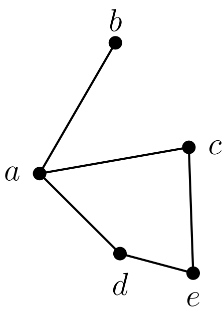
(G2)

Giải.

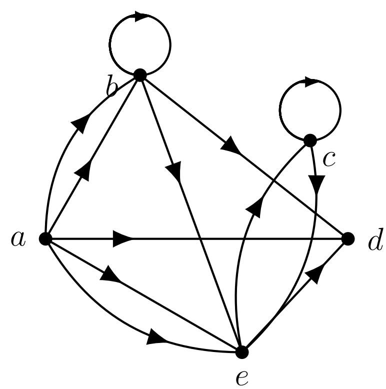
Giả sử A, B lần lượt là hai ma trận liền kề của đồ thị $(G1)$ và $(G2)$. Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4.2.5. *Viết ma trận liền kề của đồ thị sau:*



(G3)



(G4)

Giải.

Gọi A, B lần lượt là hai ma trận liền kề của đồ thị $(G3)$ và $(G4)$. Khi đó, ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

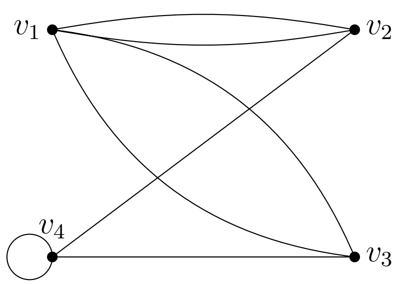
Ma trận liền kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng nhưng ma trận liền kề của đồ thị có hướng nói chung không là ma trận đối xứng.

Ví dụ 4.2.6. *Vẽ đồ thị có ma trận liền kề là:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải.

Chúng ta xây dựng đồ thị G sao cho $A_G = A$. Để làm điều này, trước hết ta nhận thấy ma trận liền kề là ma trận vuông cấp 4 nên đồ thị tương ứng sẽ có 4 đỉnh. Chúng ta kí hiệu các hàng là v_1, v_2, v_3, v_4 và các cột bởi v_1, v_2, v_3, v_4. Bây giờ ta vẽ đồ thị với bốn đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4.



Nhận xét.

1. *Trong ma trận liền kề của đồ thị vô hướng, tổng các phần tử trên dòng i là bậc của đỉnh thứ i (v_i) của đồ thị.*

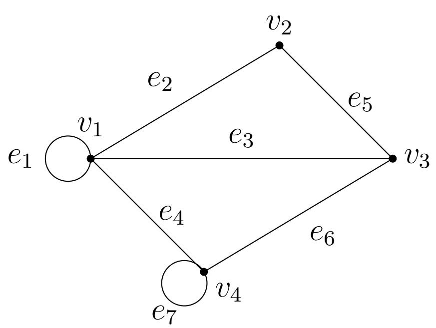
2. *Trong ma trận liền kề của đồ thị có hướng, tổng các phần tử trên dòng thứ i là bậc ra của đỉnh v_i và tổng các phần tử ở cột thứ j là bậc vào của đỉnh v_j.*

4.2.3. *Ma trận liên thuộc (Incidence Matrices)*

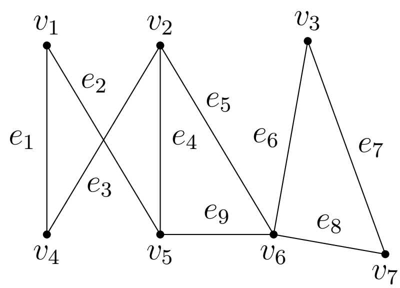
Định nghĩa 4.2.1. *Cho đồ thị vô hướng G có m đỉnh v_1, v_2,...,v_m, trong đó $m > 0$ và n cạnh e_1, e_2,..., e_n. Ma trận liên thuộc I_G tương ứng với thứ tự của m đỉnh v_1, v_2, ..., v_m và n cạnh e_1, e_2,..., e_n là ma trận cấp $m \times n$: $I_G = [m_{ij}]_{m\times n}$, trong đó, các phần tử m_{ij} được xác định như sau:*

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ không nối với } v_i \\ 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ nối với } v_i \\ 2 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ là một khuyên tại } v_i \end{cases}$$

Ví dụ 4.2.7. *Tìm các ma trận liên thuộc của các đồ thị sau:*



($G3$)



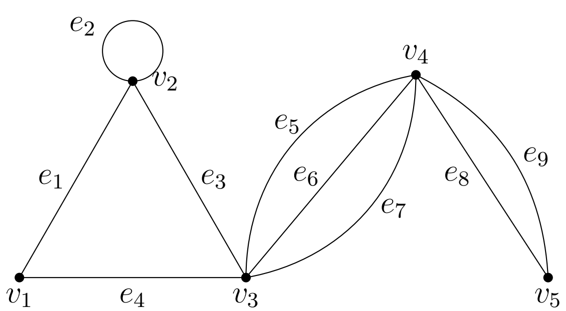
($G4$)

Giải.

Gọi A , B lần lượt là ma trận liên thuộc của hai đồ thị (G_3) và (G_4). Khi đó, ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4.2.8. *Viết ma trận liên thuộc của đồ thị sau:*



Giải.

Ma trận liên thuộc của đồ thị đã cho là:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

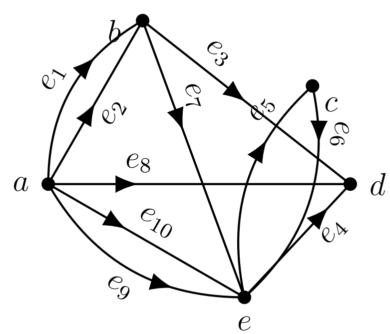
Nhận xét.

1. *Đối với đồ thị vô hướng, ma trận liên thuộc có một hàng gồm toàn số* 0 *thì đỉnh tương ứng với hàng đó là đỉnh cô lập.*
2. *Các cạnh bội trong đồ thị sinh ra các cột giống nhau trong ma trận liên thuộc của nó.*
3. *Đối với đơn đồ thị hoặc đa đồ thị vô hướng thì ma trận liên thuộc của nó có mỗi cột có đúng hai số 1.*
4. *Đối với đơn đồ thị hoặc đa đồ thị vô hướng thì số các số 1 có trong một hàng của ma trận liên thuộc chính bằng bậc của đỉnh tương ứng.*

Định nghĩa 4.2.2. *Cho đồ thị có hướng* $G = (V, E)$*, trong đó tập đỉnh* $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$*, tập cạnh* $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$*. Khi đó, ma trận liên thuộc của đồ thị* G *là ma trận cấp* $m \times n$*,* $I = [s_{ij}]_{m\times n}$ *với:*

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{nếu cạnh } e_j \textit{ nối từ đỉnh } v_i \\ -1 & \textit{nếu cạnh } e_j \textit{ nối tới đỉnh } v_i \\ 0 & \textit{nếu cạnh } e_j \textit{ không liên thuộc với đỉnh } v_i \end{cases}$$

Ví dụ 4.2.9. *Viết ma trận liên thuộc của đa đồ thị có hướng sau:*



Giải.

Ma trận liên thuộc của đồ thị đã cho là:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

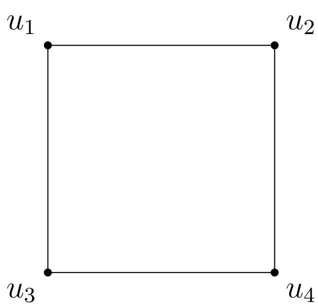
4.2.4. *Sự đẳng cấu của 2 đồ thị*

Định nghĩa 4.2.3. *Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ đẳng cấu với nhau nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ sao cho các đỉnh v_i, v_j liền kề nhau trong G_1 khi và chỉ khi $f(v_i), f(v_j)$ là hai đỉnh liền kề nhau trong G_2.*

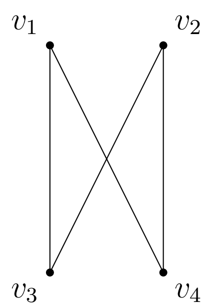
Song ánh f trong định nghĩa trên gọi là một đẳng cấu.

Kí hiệu hai đồ thị G_1 và G_2 đẳng cấu với nhau là: $G_1 \simeq G_2$.

Ví dụ 4.2.10. *Xét hai đồ thị sau*



(G)

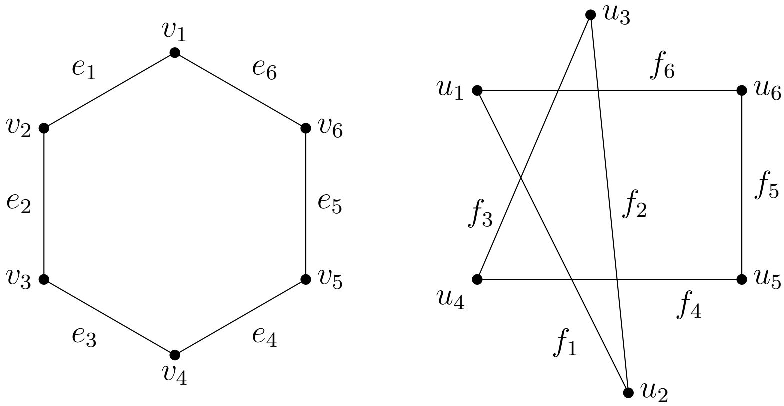


(H)

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & H \\ & u_1 & \longmapsto & v_1 \\ & u_2 & \longmapsto & v_4 \\ & u_3 & \longmapsto & v_3 \\ & u_4 & \longmapsto & v_2 \end{array}$$

Ta có f là song ánh. Do đó, hai đồ thị đã cho đẳng cấu với nhau.

Ví dụ 4.2.11. *Xét các đồ thị* G_1 *và* G_2 *sau:*



(G1) (G2)

Cả hai đồ thị đã cho đều có sáu đỉnh, sáu cạnh. Hơn nữa cả hai đều là đơn đồ thị. Dãy bậc của cả hai đồ thị này là $2, 2, 2, 2, 2, 2$. Hình ảnh biểu diễn (G_1) khác với hình ảnh biểu diễn G_2.

Ta định nghĩa ánh xạ $f : V_1 \longrightarrow V_2$ bởi công thức sau:

$$\begin{array}{rll} f: & v_1 \longmapsto u_1, & v_4 \longmapsto u_4 \\ & v_2 \longmapsto u_2, & v_5 \longmapsto u_5 \\ & v_3 \longmapsto u_3, & v_6 \longmapsto u_6 \end{array}$$

và $h : E_1 \longrightarrow E_2$ được xác định như sau:

$$\begin{array}{rll} h: & e_1 \longmapsto f_1, & e_4 \longmapsto f_4 \\ & e_2 \longmapsto f_2, & e_5 \longmapsto f_5 \\ & e_3 \longmapsto f_3, & e_6 \longmapsto f_6 \end{array}$$

Ta nhận thấy, nếu v_i và v_j là các đỉnh của cạnh e_k trong (G_1) thì $f(v_i) = u_i$ và $f(v_j) = u_j$ là các đỉnh của cạnh $h(e_k) = f_k$ trong (G_2). Do đó, hai đồ thị (G_1) và (G_2) là đẳng cấu.

Định lý 4.2.1. *Cho bốn đơn đồ thị G, G_1, G_2 và G_3. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng.*

i) *G tự đẳng cấu với chính nó.*

ii) *Nếu G_1 đẳng cấu với G_2 thì G_2 đẳng cấu với G_1.*

iii) *Nếu G_1 đẳng cấu với G_2 và G_2 đẳng cấu với G_3 thì G_1 đẳng cấu với G_3.*

Định lý 4.2.2. *Cho hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ đẳng cấu với nhau. Khi đó, số các đỉnh bậc k của đồ thị G_1 bằng số các đỉnh bậc k của đồ thị G_2.*

Từ Định lý 4.2.2, ta suy ra quan hệ đẳng cấu giữa các đồ thị trong tập các đơn đồ thị là quan hệ tương đương.

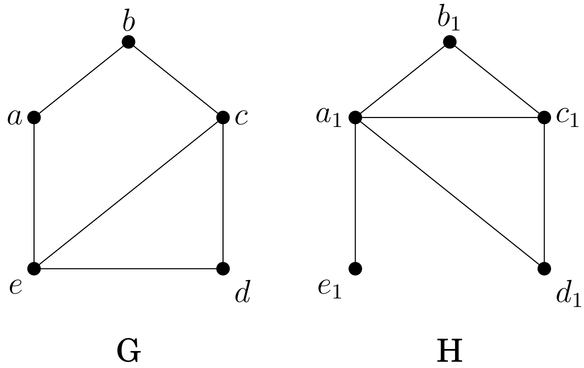
Định lý 4.2.3. *Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi các đỉnh của chúng được gán nhãn sao cho ma trận liền kề của hai đồ thị đó bằng nhau.*

Chú ý: Để chứng minh 2 đơn đồ thị không đẳng cấu với nhau ta thường sử dụng cách chỉ ra chúng không có chung một tính chất nào đó mà 2 đơn đồ thị đẳng cấu cần phải có. Từ đó, vi phạm tính bất biến của phép đẳng cấu. Chẳng hạn, hai đơn đồ thị đẳng cấu thì có cùng số đỉnh, có cùng số cạnh và bậc của hai đỉnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là

$$\begin{aligned} f:\ & G \longrightarrow H \\ & v \longmapsto f(v) = u \end{aligned}$$

và $\deg(v) = \deg(f(v))$.

Ví dụ 4.2.12. *Hai đơn đồ thị sau không đẳng cấu với nhau vì không có cùng số đỉnh bậc* 1.



+ G và H có cùng số đỉnh và cùng số cạnh.
+ Đỉnh e_1 bậc 1 trong H. Trong G không có đỉnh nào bậc 1.

4.3. TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ

4.3.1. *Đường đi*

Định nghĩa 4.3.1. *Đường đi độ dài n từ đỉnh u tới đỉnh v, với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là dãy gồm n cạnh e_1, e_2, e_3, ..., e_n và $n+1$ đỉnh của đồ thị sao cho $e_1 = \{x_0, x_1\}$, $e_2 = \{x_1, x_2\}$,..., $e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$.*

Kí hiệu đường đi: $x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_n, x_n$

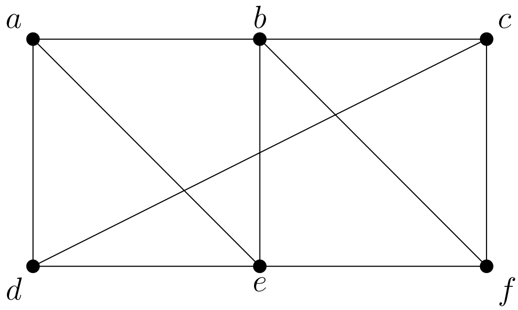
Khi đồ thị là đơn ta kí hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh x_0, x_1, $\ldots$, x_n (vì danh sách các đỉnh này xác định duy nhất đường đi).

Đường đi gọi là một chu trình nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là điểm đầu và điểm cuối của đường đi đó trùng nhau $(x_0 \equiv x_n)$.

Đường đi hoặc chu trình gọi là đơn nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Một đường đi hoặc chu trình không đi qua đỉnh nào quá một lần (trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối của chu trình là trùng nhau) được gọi là đường đi sơ cấp hoặc chu trình sơ cấp. Rõ ràng rằng một đường đi (chu trình) sơ cấp là đường đi (chu trình) đơn.

Ví dụ 4.3.1. *Chỉ ra các đường đi đơn, đường đi không là đường đi đơn và chu trình trong đơn đồ thị H_1.*



(H_1)

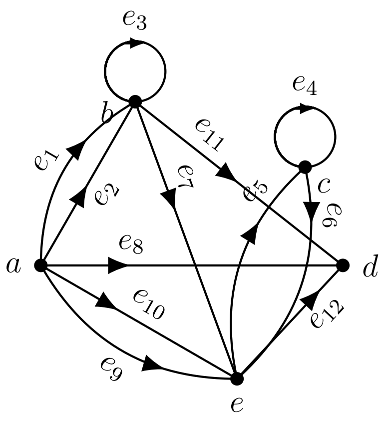
+) a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4 vì $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$ đều là các cạnh.

+) d, e, c, a không là đường đi vì $\{c, e\}$ không là cạnh.

+) a, d, c, f, e, b, a là một chu trình độ dài 6.

+) đường đi a, b, e, d, a, b độ dài 5, không là đường đi đơn.

Ví dụ 4.3.2. *Chỉ ra đường đi độ dài 3, 4, 5, 6 trong đồ thị sau:*



Giải.

Ta có đường đi độ dài 3: $a, e_1, b, e_7, e, e_{12}, d$.

Đường đi độ dài 4 là: $a, e_2, b, e_7, e, e_5, c, e_6, e$.

Đường đi độ dài 5 là: $a, e_2, b, e_7, e, e_5, c, e_6, e, e_{12}, d$.

Đường đi độ dài 6 là: $a, e_1, b, e_7, e, e_5, c, e_4, c, e_6, e, e_{12}, d$.

Ví dụ 4.3.3. *Chứng minh rằng: Nếu bậc mỗi đỉnh của đồ thị G bé hơn hay bằng 2 thì G chứa một chu trình.*

Giải.

Ta chọn một đỉnh u và một cạnh e_1 nhận u là một đầu mút và đầu mút còn lại là u_1. Nếu $u = u_1$ thì e_1 là một khuyên và tại u ta có một chu trình (u, e_1, u). Giả sử $u \neq u_1$. Do bậc của u lớn hơn hay bằng 2 nên tồn tại một đỉnh liền kề u_2 của u_1. Nếu $u_2 = u$ thì tồn tại cạnh bội e_1 và e_2 giữa u và u_1 và ta có vòng lặp (u, e_1, u_1, e_2, u).

Giả sử G là một đơn đồ thị. Chọn đỉnh u và một cạnh e_1 nhận u là một đầu mút và đầu mút còn lại là u_1 khác u. Do $\deg(u) \geq 2$ và G là đơn đồ thị ta có thể chọn một cạnh e_2 với u_1 là một đầu mút và đầu mút còn lại là u_2 khác cả u và u_1. Sử dụng $\deg(u_2) \geq 2$, do đó ta chọn một cạnh $e_3 \neq e_2$ với u_2 là một đỉnh và đỉnh còn lại là $u_3 \neq u_2$ và $u_3 \neq u_1$. Nếu $u_3 = u$ ta được chu trình $(u, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, u_3)$. Bây giờ $\deg(u_3) \geq 2$, lặp lại quá trình này và ta chọn một cạnh $e_4 \neq e_3$ với u_3 là một đỉnh và đỉnh còn lại là u_4. Vì $u_4 \neq u_3$, nếu u_4 là u hoặc u_1 thì ta sẽ nhận được vòng lặp. Nếu u_4 khác u, u_1 thì tiếp tục lặp lại quá trình này. Bởi vì số các đỉnh là hữu hạn, phép lặp ở trên cuối cùng cũng tìm được vòng lặp $u, e_1, u_1, e_2, u_2, ..., u_i, e_{i+1}, u_{i+1}$ sao cho $u, u_1, u_2, ..., u_i$ là các đỉnh phân biệt và $e_1, e_2, ..., e_{i+1}$ là các cạnh phân biệt và $u_{i+1} \equiv u_j$ với j nào đó, trong đó $1 \leq j < i$, khi đó ta nhận được một chu trình của đồ thị G là:

$$u_j, e_{j+1}, u_{j+1}, e_{j+2}, u_{j+2}, ..., u_i, e_i, u_{i+1} = u_j.$$

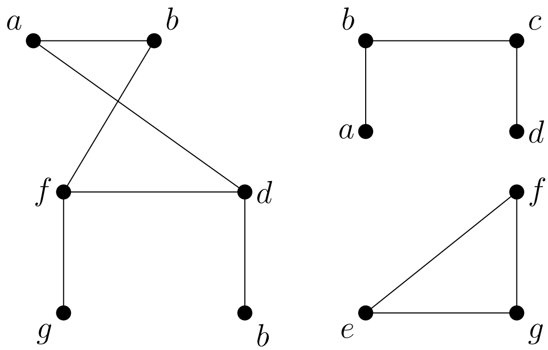
Định nghĩa 4.3.2. *Đường đi độ dài n, với n là một số nguyên dương, từ đỉnh u tới đỉnh v trong một đồ thị có hướng là dãy gồm n cạnh có hướng $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ và $n + 1$ đỉnh của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}, f(e_2) = \{x_1, x_2\}, ..., f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$.*

Khi đồ thị không có cạnh bội thì ta kí hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh được gọi là một chu trình.

4.3.2. *Tính liên thông trong đồ thị vô hướng*

Định nghĩa 4.3.3. *Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu đồ thị đó có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của nó.*

Ví dụ 4.3.4. *Cho hai đồ thị sau:*



H_2 H_3

Đồ thị H_2 là liên thông vì giữa 2 đỉnh phân biệt bất kì của đồ thị đều có đường đi.

Đồ thị H_3 không liên thông vì giữa đỉnh a và đỉnh e của H_3 không có đường đi nào.

Định lý 4.3.1. *Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.*

+) Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông mà mỗi cặp đồ thị con này không có đỉnh chung. Các đồ thị con liên thông rời nhau trong một đồ thị được gọi là các thành phần liên thông.

Định lý 4.3.2. *Một đồ thị vô hướng liên thông n đỉnh thì có ít nhất $n-1$ cạnh.*

Chứng minh. Chúng ta chứng minh Định lý 4.3.2 bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$ thì định lý đúng.

Giả sử định lý đúng với đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ n đỉnh.

Ta cần chứng minh định lý đúng với đồ thị vô hướng liên thông G có $n+1$ đỉnh. Bởi vì G là đồ thị liên thông, bậc của mỗi đỉnh của G lớn hơn hay bằng 1. Giả sử bậc của mỗi đỉnh của G lớn hơn hay bằng 2 thì tổng bậc của tất cả các đỉnh của G lớn hơn hay bằng $2(n+1) > 2n$. Vậy, số cạnh của G lớn hơn n. Bây giờ, ta giả sử rằng đồ thị G có đỉnh v có bậc 1. Ta xây dựng đồ thị G_1 từ đồ thị G bằng cách xóa đinh v và cạnh liên thuộc với đỉnh v. Khi đó, G_1 là đồ thị liên thông với n đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, số cạnh của G_1 ít nhất là $n-1$. Do đó, số cạnh của đồ thị G ít nhất là n. Vậy, định lý đúng với đồ thị có $n+1$ đỉnh.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận đồ thị vô hướng liên thông n đỉnh có ít nhất $n-1$ cạnh. □

Định lý 4.3.3. *Cho G là một đơn đồ thị có số đỉnh nhỏ hơn hay bằng $2n$. Nếu bậc mỗi đỉnh của đồ thị G lớn hơn hay bằng n thì đồ thị đó là liên thông.*

Chứng minh. Ta chứng minh phản chứng.

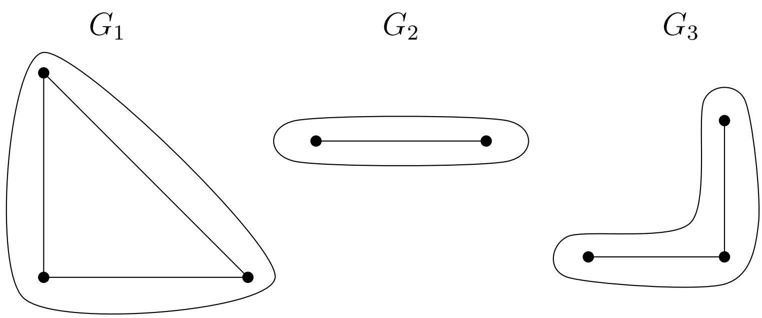
Giả sử G là một đơn đồ thị với số đỉnh nhỏ hơn hay bằng $2n$ và bậc của mỗi đỉnh của nó ít nhất là n nhưng đồ thị G không liên thông. Khi đó, G có thể được chia thành các thành phần $G_1, G_2, \ldots, G_m, m \geq 2$. Do mỗi đỉnh của G có bậc lớn hơn hay bằng n và G là đơn đồ thị nên mỗi đỉnh có ít nhất n đỉnh liền kề. Do đó, mỗi thành phần chứa ít nhất $n+1$ đỉnh. Suy ra số đỉnh của đồ thị G ít nhất là $m(n+1) \geq 2(n+1) > 2n$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.
Vậy, đồ thị G là liên thông. □

Ví dụ 4.3.5. *Giả sử rằng một nước có 100 thành phố. Từ mỗi thành phố đều có tuyến xe ô tô chạy đến ít nhất 50 thành phố khác. Hỏi ta có thể đi từ bất kì một thành phố nào đó đến một thành phố khác bằng một chuyến xe ô tô trên tuyến đã có rồi đổi xe để đi tiếp đến thành phố thứ 3 được không?*

Giải.

Ta coi đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có 100 đỉnh tương ứng với 100 thành phố. Hai đỉnh u và v được coi là liền kề nhau nếu và chỉ nếu chúng là hai đỉnh phân biệt và có một tuyến xe trực tiếp giữa hai đỉnh đó. Khi đó, G là đơn đồ thị với 100 đỉnh. Do từ mỗi thành phố có 50 tuyến xe ôtô trực tiếp đến ít nhất 50 thành phố khác nên bậc của mỗi đỉnh ít nhất là 50. Theo Định lí 4.3.3 thì đồ thị G là liên thông. Vậy, trong G sẽ có đường đi giữa hai đỉnh bất kì. Do đó, ta có thể đi từ một thành phố này đến một thành phố khác trên tuyến xe đã có rồi chuyển tuyến xe và đi đến thành phố thứ 3.

Ví dụ 4.3.6. *Cho đồ thị* $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

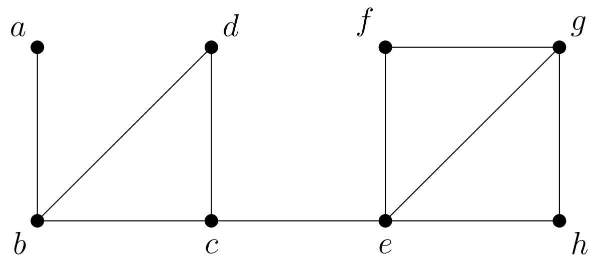


Khi đó, đồ thị G có các thành phần liên thông là G_1, G_2 và G_3.

Một đỉnh mà khi xóa đi đỉnh đó và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu, được gọi là đỉnh cắt hay điểm khớp.

Một cạnh mà khi ta bỏ đi cạnh đó sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn so với đồ thị xuất phát được gọi là cạnh cắt hay một cầu.

Ví dụ 4.3.7. *Tìm các đỉnh cắt và cạnh cắt của đồ thị.*



+) Các đỉnh cắt là: b, c, e

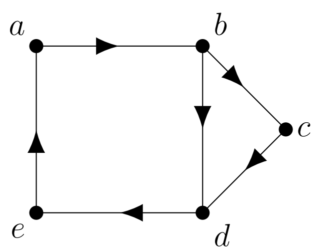
+) Các cạnh cắt của đồ thị trên là: $\{a, b\}, \{c, e\}$.

4.3.3. *Tính liên thông trong đồ thị có hướng*

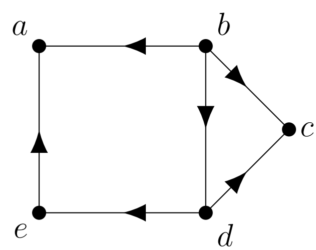
Định nghĩa 4.3.4. *Đồ thị có hướng gọi là liên thông mạnh nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a với mọi đỉnh a và b của đồ thị.*

Định nghĩa 4.3.5. *Đồ thị có hướng gọi là liên thông yếu nếu có đường đi giữa 2 đỉnh bất kì của đồ thị vô hướng nền.*

Ví dụ 4.3.8. *Xét các đồ thị có hướng sau*



H_4



H_5

Ta có:

+) Đồ thị H_4 là liên thông mạnh.

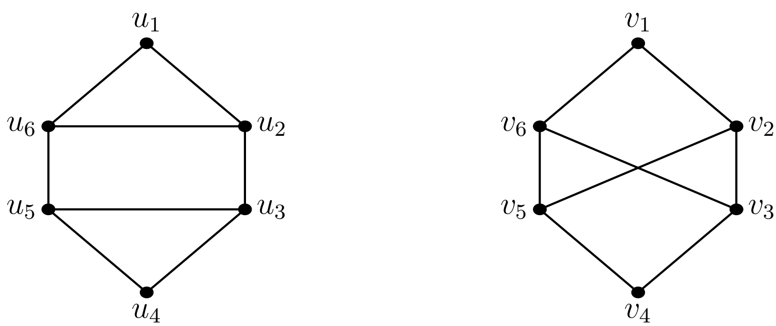
Suy ra H_4 cũng là liên thông yếu.

+) Đồ thị H_5 không là liên thông mạnh nhưng H_5 là liên thông yếu. (Vì H_5 không có đường đi hướng từ a tới b).

4.3.4. *Đường đi và sự đẳng cấu*

Ngoài cách áp dụng định nghĩa hay các định lý từ 4.2.1 đến 4.2.3 trong bài 2 của chương này để chứng minh hai đồ thị là đẳng cấu hoặc không đẳng cấu, ta còn có cách dùng đường đi và chu trình xác định xem hai đồ thị có đẳng cấu hay không? Trong mục này chúng ta sẽ trình bày nội dung này.

Ví dụ 4.3.9. *Xét xem hai đồ thị sau có đẳng cấu với nhau hay không? Vì sao?*

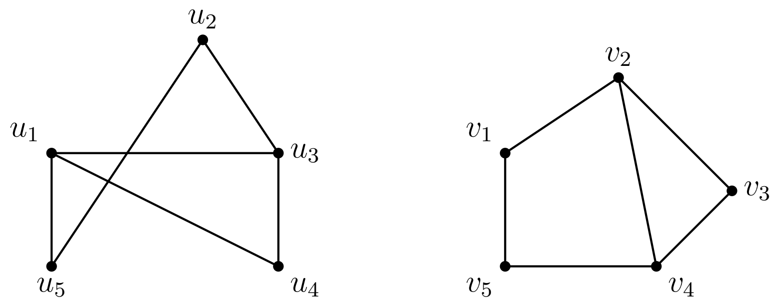


H_6 H_7

Giải.

Ta nhận thấy, đồ thị H_6 và H_7 có cùng số đỉnh, cùng số cạnh và số đỉnh bậc 2, số đỉnh bậc 3 đều bằng nhau. Tuy nhiên, đồ thị H_6 có chu trình đơn độ dài bằng 3, chẳng hạn, chu trình $u_1,\ u_2,\ u_6$, nhưng đồ thị H_7 không có chu trình đơn độ dài 3. Do đó, không tồn tại đẳng cấu giữa đồ thị H_6 và đồ thị H_7.
Vậy, hai đồ thị H_6 và H_7 không đẳng cấu.

Ví dụ 4.3.10. *Xét xem hai đồ thị sau có đẳng cấu với nhau hay không? Vì sao?*



H G

Giải.

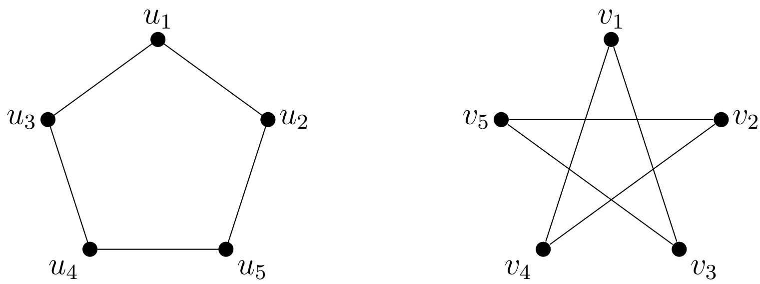
Cả hai đồ thị G và H đều có 5 đỉnh và 6 cạnh, trong đó có 2 đỉnh bậc 3 và 3 đỉnh bậc 2, đồng thời cả hai đồ thị đều có một chu trình đơn độ dài 3, một chu trình đơn độ dài 4 và một chu trình đơn độ dài 5. Hai đồ thị có tất cả các tính chất tương đồng nên G và H có thể đẳng cấu. Để khẳng định hai đồ thị có thực sự đẳng cấu hay không ta xây dựng phép đẳng cấu giữa hai đồ thị.

Ta chỉ ra một song ánh f từ tập đỉnh của đồ thị H tới tập đỉnh của đồ thị G

$$\begin{array}{rccc} f: & V_H & \longleftrightarrow & V_G \\ & u_1 & \longmapsto & v_2 \\ & u_2 & \longmapsto & v_5 \\ & u_3 & \longmapsto & v_4 \\ & u_4 & \longmapsto & v_3 \\ & u_5 & \longmapsto & v_1 \end{array}$$

và f thỏa mãn các điều kiện trong định nghĩa.
Vậy, hai đồ thị đã cho đẳng cấu với nhau.

Ví dụ 4.3.11. *Chứng minh rằng hai đồ thị G_1 và G_2 trong hình dưới là đẳng cấu.*



$\mathbf{G_1}$ $\mathbf{G_2}$

Hai đồ thị trên có cùng số đỉnh, cùng số cạnh và mỗi đỉnh của hai đồ thị đều cùng bậc hai. Ta xét ánh xạ:

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_3, f(u_3) = v_4, f(u_4) = v_2, f(u_5) = v_5.$$

Khi đó, các ma trận liền kề của hai đồ thị đã cho tương ứng với ánh xạ f là:

$$A(G_1) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(G_2) = \begin{array}{c} \\ f(u_1) \\ f(u_2) \\ f(u_3) \\ f(u_4) \\ f(u_5) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) & f(u_5) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

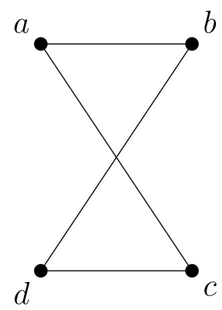
Do $A(G_1) = A(G_2)$ nên ta có hai đồ thị G_1 và G_2 đẳng cấu với nhau.

Nếu trong Ví dụ 4.3.10, ta muốn chứng minh hai đồ thị đẳng cấu bằng cách sử dụng đường đi hay chu trình thì ta cần biết cách đếm số đường đi và số chu trình có cùng độ dài giữa hai đồ thị. Vì vậy, ta cần kiến thức phần tiếp theo đây, đó là mục đếm đường đi giữa các đỉnh của đồ thị.

4.3.5. *Đếm đường đi giữa các đỉnh*

Định lý 4.3.4. *Cho G là một đồ thị với ma trận liền kề A theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (trong đó, các cạnh vô hướng hoặc có hướng hay là cạnh bội, có thể có khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r từ đỉnh v_i tới đỉnh v_j, trong đó r là 1 số nguyên dương bằng giá trị của phần tử a_{ij} trong ma trận A^r.*

Ví dụ 4.3.12. *Cho đồ thị G*



Hỏi có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ a tới d trong G.

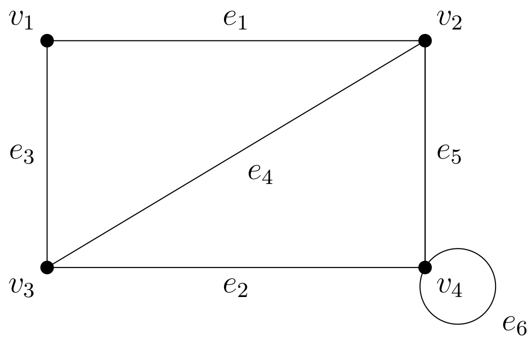
Giải.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Giả sử ta sắp xếp các đỉnh của đồ thị theo thứ tự a, b, c, d. Ta có, phần tử thuộc dòng 1 cột 4 của ma trận A^4 là 8. Do đó, có 8 đường đi độ dài 4 từ a đến d.

Ví dụ 4.3.13. *Tìm số đường đi độ dài bằng* 2 *từ đỉnh* v_1 *tới* v_2 *và số đường đi từ đỉnh* v_2 *tới* v_3 *sau đó viết tên các đường đi này.*



Giải.

Giả sử các đỉnh của đồ thị này là v_1, v_2, v_3 và v_4. Khi đó, ma trận liền kề theo thứ tự các đỉnh đó là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Giả sử $A^2 = [b_{ij}]$. Từ ma trận này ta thấy $b_{12} = 1$ chính là số đường đi có độ dài bằng 2 từ đỉnh v_1 tới v_2 trong đồ thị G. Đường đi duy nhất có độ dài bằng 2 từ đỉnh v_1 tới v_2 là (v_1, v_3, v_2).

Mặt khác, ta lại có $b_{12} = 2$ nên số đường đi có độ dài bằng 2 từ đỉnh v_1 tới v_2 trong đồ thị G là 2. Các đường đi này là (v_2, v_1, v_3) và (v_2, v_4, v_3).

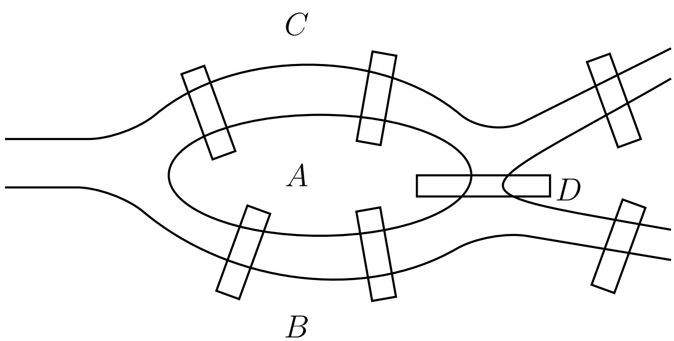
4.4. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

4.4.1. *Đường đi Euler và chu trình Euler*

a. Ví dụ mở đầu

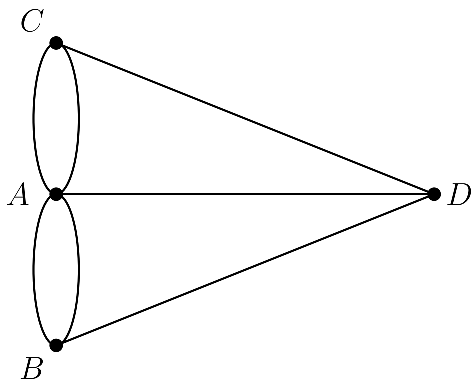
Bài toán:

Thành phố Konigsberg (Kaliningrad) thuộc Nga được chia thành bốn miền đất bởi một con sông. Người ta xây dựng 7 cây cầu nối giữa các vùng với nhau (Hình vẽ).



Hỏi có thể xuất phát từ một địa điểm trong thành phố đi qua tất cả các cầu, mỗi chiếc cầu đi qua một lần duy nhất rồi trở lại điểm xuất phát được không?

Nhận xét: Hình ảnh các vùng đất của thành phố Konigsberg và các cây cầu được minh họa như một đa đồ thị dưới đây, trong đó mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng một vùng đất, mỗi cạnh của đồ thị tương ứng là một cây cầu. Khi đó, bài toán đã cho tương đương với bài toán: Có tồn tại hay không một chu trình đơn của đa đồ thị G (hình dưới) mà chu trình đơn đó chứa tất cả các cạnh của đồ thị?



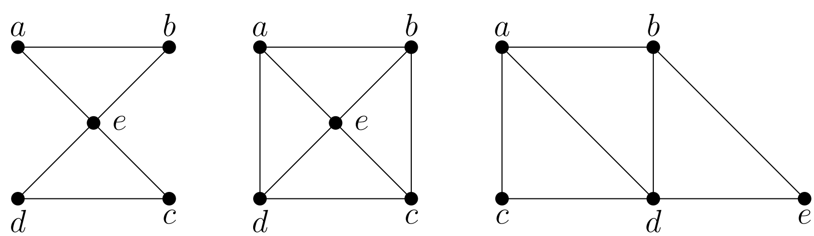
Nhà toán học Thụy Sỹ, Leonhard Euler đã giải bài toán này và công bố năm 1763. Câu trả lời của ông là không tồn tại chu trình đơn như thế, có nghĩa là không thể có cách đi nào thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Để tìm hiểu lời giải của bài toán này, chúng ta nghiên cứu về khái niệm đường đi Euler và chu trình Euler.

b. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 4.4.1. *Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler. Đường đi Euler trong G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G.*

Ví dụ 4.4.1. *Đồ thị nào trong các đồ thị vô hướng dưới đây có chu trình Euler? Đồ thị nào có đường đi Euler?*



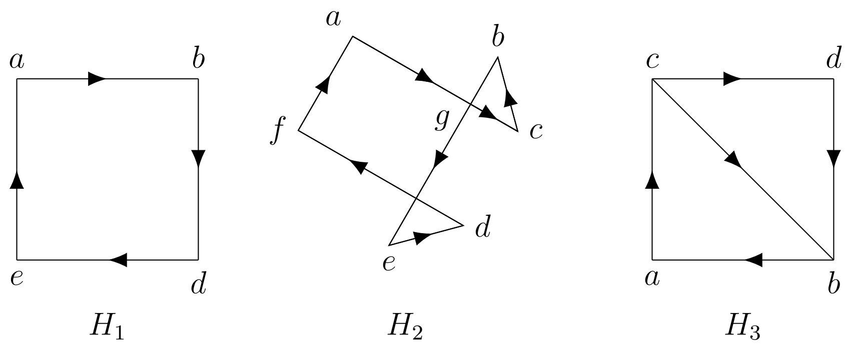
G_1 G_2 G_3

Đồ thị G_1 có chu trình Euler: a, e, c, d, b, a

G_2, G_3 không có chu trình Euler.

G_3: có đường đi Euler.

Ví dụ 4.4.2. *Đồ thị nào trong các đồ thị có hướng dưới đây có chu trình Euler? Đồ thị nào có đường đi Euler?*



H_2: có chu trình Euler: a, g, c, b, g, e, d, f, a.

H_1, H_3: không có chu trình Euler.

H_3: có đường đi Euler: c, a, b, c, d, b.

H_1: không có đường đi Euler

4.4.2. *Điều kiện cần và đủ cho chu trình và đường đi Euler*

Bổ đề 4.4.1. *Cho G là một đồ thị liên thông có một hoặc hai đỉnh. Nếu mọi đỉnh của G có bậc chẵn thì G có một chu trình Euler.*

Chứng minh. Giả sử G là đồ thị có duy nhất một đỉnh, chẳng hạn đỉnh u. Khi đó, ta có hai trường hợp xảy ra là: Không có khuyên nào tại u hoặc có hữu hạn khuyên tại u. Nếu không có khuyên nào tại u thì u có thể coi là một chu trình Euler của G. Trường hợp có hữu hạn khuyên tại u, chẳng hạn $e_1, e_2, \dots, e_n$, $n \geq 1$. Khi đó, $(u, e_1, u, e_2, \dots, e_n, u)$ là một chu trình Euler của G.

Giả sử G có hai đỉnh là u và v sao cho bậc của hai đỉnh đều là số chẵn. Do G là đồ thị liên thông nên u và v là liên thông. Vì vậy, có số chẵn các cạnh bội nối u với v. Giả sử $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2k}\}$, $k \geq 1$ là tập tất cả các cạnh nối giữa u và v. Gọi $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $n \geq 0$ là các khuyên tại u và $g_1, g_2, \ldots, g_m$, $m \geq 0$ là các khuyên tại v. Khi đó, ta xét đường đi sau của G:

$$(u, e_1, u, e_2, \ldots, u, e_n, u, f_1, v, g_1, v, g_2, v, \ldots, g_m, v,$$
$$f_2, u, f_3, v, f_4, \ldots, f_{2k-1}, v, f_{2k}, u)$$

Đây là đường đi xuất phát từ u, đi qua tất cả các khuyên tại u, một cạnh từ u tới v, tất cả các khuyên tại v, sau đó đi qua một cạnh từ v tới u. Đường đi này không lặp lại bất kỳ cạnh nào, điểm đầu và điểm cuối trùng nhau là u và chứa tất cả cạnh của G do đó nó là một chu trình Euler của G. □

Định lý 4.4.1. *Một đa đồ thị liên thông vô hướng có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*

Chứng minh. Giả sử G là đồ thị có chu trình Euler.
Nếu G là đồ thị tầm thường thì G chỉ có một đỉnh v và không có cạnh. Do đó, bậc của v bằng 0, đó là số chẵn.
Giả sử G là đồ thị không tầm thường, tức là G chứa hơn một đỉnh. G chứa một chu trình Euler chẳng hạn:

$$C : (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, \ldots, e_{n-1}, v_n = v_1)$$

Ta có C chứa tất cả các đỉnh và các cạnh của đồ thị G. Tuy nhiên, C không chứa lặp lại bất kì cạnh nào của G, mặc dù một đỉnh của G có thể lặp lại trong C hai hay nhiều lần. Đặt u là một đỉnh của G, do G là đồ thị liên thông nên u không là điểm cô lập. Vì thế, u là một điểm mút của một cạnh nào đó của G. Ta giả sử đây là lần xuất hiện đầu tiên của đỉnh u trong C. Khi đó, u cũng là v_n và ta coi đây là lần xuất hiện cuối cùng của u trong C. Với hai lần xuất hiện này, cùng với hai cạnh e_1 và e_{n-1} ta có hai đơn vị thêm vào cho bậc của u.

Bây giờ ta giả sử u là đỉnh v_i nào đó trong C, với $1 < i < n$. Khi đó, u là điểm mút của hai cạnh e_{i-1} và e_i. Các cạnh này đóng góp 2 đơn vị cho bậc của u. Ta suy ra bậc của đỉnh bất kì trong C luôn là số chẵn. Do đó, bậc của đỉnh bất kì trong G cũng là số chẵn.

Ngược lại, ta giả sử G là đồ thị liên thông và tất cả các đỉnh của G đều có bậc là số chẵn. Khi đó, ta cần chứng minh đồ thị G có một chu trình Euler.

Giả sử G có n cạnh. Ta sử dụng phương pháp quy nạp để chứng G có chu trình Euler theo số cạnh của G.

Bước cơ sở:

Nếu $n = 0$, tức là G không có cạnh thì G là một đỉnh đơn, chẳng hạn đỉnh u. Khi đó, (u) là một chu trình Euler.

Bước giả thiết quy nạp:

Giả sử với n là số nguyên dương và mọi đồ thị liên thông G có k cạnh, $1 \leq k < n$, với tất cả các đỉnh bậc chẵn đều có chu trình Euler.

Bước quy nạp:

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông với n cạnh và bậc của tất cả các đỉnh đều là số chẵn. Nếu số các đỉnh của đồ thị bằng $1, 2$ thì đã được chứng minh trong Bổ đề 4.4.1. Bây giờ, ta giả sử số đỉnh của G lớn hơn hay bằng 3.

Do G là liên thông nên tồn tại các đỉnh v_1, v_2, v_3 và các cạnh e_1, e_2 sao cho v_1, v_2 là các đầu mút của cạnh e_1 và v_2, v_3 là các đầu mút của cạnh e_2. Ta xét đồ thị con $G_1 = (V_1, E - 1)$, trong đó $V_1 = V, E_1 = E - \{e_1, e_2\}$. Tiếp theo, ta thêm cạnh e nối hai đỉnh v_1, v_3 vào đồ thị con này và được đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$, trong đó $V_2 = V, E_2 = E_1 \cup \{e\}$. Thực chất, G_2 có được từ G bằng cách xóa đinh các cạnh e_1, e_2, nhưng không xóa các đỉnh liền kề với các cạnh này và thêm cạnh e nối giữa hai đỉnh v_1, v_3.

Trong đồ thị G, giả sử $deg(v_1) = r, deg(v_2) = m$ và $deg(v_3) = t$. Do ta xóa đi cạnh e_1, e_2 nên trong G_1, $deg(v_1) = r - 1, deg(v_2) = m - 2$ và $deg(v_3) = t - 1$. Bây giờ, trong đồ thị G_2 ta thêm cạnh e nối hai đỉnh v_1, v_3 do đó, trong đồ thị G_2 ta có $deg(v_1) = r, deg(v_2) = m - 2$

và $deg(v_3) = t$. Trong việc xây dựng đồ thị G_1 từ G và G_2 từ G_1, các đỉnh khác của chúng không bị ảnh hưởng, tức là bậc của các đỉnh này trong đồ thị G_2 như bậc của nó trong đồ thị G. Vậy, suy ra mọi đỉnh của đồ thị G_2 có bậc chẵn.

Bây giờ, G_2 có thể không liên thông. Ta chứng minh rằng số thành phần liên thông của G_2 bé hơn hay bằng 2.

Bởi vì v_1 và v_3 là hai đầu mút của cạnh e trong G_2 nên v_1 và v_2 thuộc cùng một thành phần liên thông của G_2, chẳng hạn là C_1. Đỉnh v_2 không trong C_1. Gọi C_2 là thành phần liên thông của G_2 chứa v_2. v là một đỉnh của G_2 thì v cũng là một đỉnh của G. Do G là liên thông nên tồn tại đường đi P từ v đến v_1 trong G.

Nếu P chứa một trong hai cạnh e_1 hoặc e_2 thì P không chứa đường đi từ v đến v_1 trong G_2. Goi P_1 là đường đi có điểm cuối là v_1 hoặc v_2 hoặc v_3. Nếu P_1 là đường đi từ v đến v_1 trong G_1 thì v và v_1 thuộc cùng một thành phần liên thông của C_1. Nếu P_1 có điểm cuối là v_3 thì (P_1, e, v_1) là một đường đi từ v đến v_1. Do đó, trong trường hợp này, v cũng thuộc thành phần liên thông C_1. Giả sử P_1 có điểm cuối là v_2 thì v thuộc thành phần C_2. Vậy, bất kì đỉnh v của G_2 đều thuộc C_1 hoặc C_2. Do đó, G_2 có một $(C_1 \equiv C_2)$ hoặc hai thành phần liên thông.

Giả sử G_2 chỉ có một thành phần liên thông, C_1. Thì G_2 là liên thông với $n-1$ cạnh. Theo giả thiết quy nạp G_2 có chu trình Euler, chẳng hạn T_1. Từ T_1 ta xây dựng chu trình Euler T của đồ thị G bằng cách thay đồ thị con (v_1, e, v_3) bằng đường đi $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$.

Giả sử G_2 có hai thành phần liên thông, C_1 và C_2. Mỗi thành phần $C_i,\ i = 1, 2$ là đồ thị liên thông sao cho các đỉnh của nó đều bậc chẵn và số các đỉnh trong C_i là $n_i < n$. Do đó, theo giả thiết quy nạp C_i có chu trình Euler $T_i,\ i = 1, 2$. Ta có T_1 chứa v_1 và T_2 chứa v_2. Khi đó, (v_1, e, v_3) là đường đi con của T_1. Hơn nữa, ta có thể giả sử T_2 là một chu trình từ v_2 tới v_2.

Bây giờ ta xây dựng chu trình Euler của đồ thị G bằng cách sửa T_1 như sau: Trong T_1 thay (v_1, e, v_3) bởi (v_1, e_2, v_2), theo sau là T_2, rồi

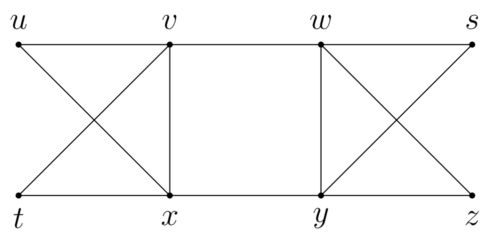
tiếp đến là (v_2, e_2, v_3).
Vậy, ta tìm được chu trình Euler của đồ thị G. □

Thuật toán Fleury: Ta có thể xây dựng được một chu trình Euler trong đồ thị liên thông G có bậc của tất cả các đỉnh đều chẵn như sau: Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo hai quy tắc sau:

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xoá nó đi; sau đó xoá đỉnh cô lập (nếu có);

2. Không bao giờ đi qua một cầu, trừ trường hợp không còn cách đi nào khác.

Ví dụ 4.4.3. *Sử dụng thuật toán Fleury tìm chu trình Euler của đồ thị sau:*



Giải.

Xuất phát từ đỉnh $u \Longrightarrow$ đi theo cạnh (u, v) đến đỉnh $v \Longrightarrow$ xóa đi cạnh $(u, v) \Longrightarrow$ đi theo cạnh (v, w) đến đỉnh $w \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (v, w) $\Longrightarrow$ đi theo cạnh (w, s) đến đỉnh $s \Longrightarrow$ xóa đi cạnh $(w, s) \Longrightarrow$ đi theo cạnh (s, y) đến đỉnh $y \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (s, y), khi đó s trở thành đỉnh cô lập và xóa nốt đỉnh $s \Longrightarrow$ đi theo cạnh (y, w) đến đỉnh w (chú ý trong trường hợp này từ y chỉ có thể đi theo cạnh (y, w) hoặc (y, z) chứ không đi qua cạnh cầu (y, x) trong khi vẫn còn cạnh đi khác) $\Longrightarrow$ đi theo cạnh (w, z) đến đỉnh $z \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (w, z), khi đó w trở thành đỉnh cô lập và xóa nốt đỉnh $w \Longrightarrow$ đi theo cạnh (z, y) đến đỉnh $y \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (y, z) và đỉnh $z \Longrightarrow$ đi theo cạnh (y, x) đến đỉnh x

(lúc này từ đỉnh y hết đường đi khác nên phải đi qua cạnh cầu (y, x)) $\Longrightarrow$ xóa đi cạnh (y, x) và đỉnh $y \Longrightarrow$ đi theo cạnh (x, v) đến đỉnh $v \Longrightarrow$ xóa đi cạnh $(x, v) \Longrightarrow$ đi theo cạnh (v, t) đến đỉnh $t \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (v, t) và đỉnh $v \Longrightarrow$ đi theo cạnh (t, x) đến đỉnh $x \Longrightarrow$ xóa đi cạnh (t, x) và đỉnh $t \Longrightarrow$ đi theo cạnh (t, u). Như vậy ta được một chu trình Euler đi từ u đến u.

Định lý 4.4.1 cho biết điều kiện cần và đủ để một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler, nhưng không chỉ ra cách xây dựng chu trình Euler. Bây giờ chúng ta sẽ liệt kê các bước để xây dựng một chu trình Euler trong một đa đồ thị liên thông có tất cả các đỉnh đều là đỉnh bậc chẵn.

Các bước xây dựng chu trình Euler:

Bước 1: Chọn một đỉnh v làm đỉnh bắt đầu của chu trình.

Bước 2: Xây dựng một đường đi từ v tới v với các cạnh phân biệt như sau: Chọn một cạnh, chẳng hạn cạnh e_1 với v là một trong hai điểm đầu của cạnh e_1. Giả sử điểm đầu còn lại của e_1 là u_1. Nếu u_1 trùng với v thì chuyển sang bước 3. Nếu u_1 khác v thì chọn một cạnh e_2 khác e_1 và nhận u_1 là một trong hai điểm đầu. Giả sử u_2 là điểm đầu còn lại của cạnh e_2. Nếu u_2 trùng với u_1 thì chuyển sang bước 3. Nếu u_2 khác u_1 thì tiếp tục chọn cạnh e_3 khác e_1 và e_2 đồng thời nhận u_2 làm một điểm đầu. Cứ tiếp tục theo cách này, ta được dãy các đỉnh và cạnh là $v, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, e_{i-1}, u_i$, trong đó tất cả các cạnh $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{i-1}$ là phân biệt, e_1 là cạnh nối v với u_1, e_2 là cạnh nối u_1 với u_2,..., e_j là cạnh nối từ u_j tới u_{j+1}, với mọi $j = 2, 3, 4, \dots, i-1$. Nếu $u_i = v$ thì ta xây dựng được đường đi từ v tới v với các cạnh phân biệt, rồi chuyển sang bước 3. Nếu $u_i \neq v$ thì chọn một cạnh $e_i \neq e_j, j = 1, 2, \dots, i-1$, sao cho u_i là một điểm đầu của cạnh đó. Nếu điểm đầu còn lại trùng với v thì chuyển sang bước 3, nếu không thì cứ tiếp tục quá trình này, sau hữu hạn bước ta sẽ được đường đi từ v đến v.

Bước 3: Nếu chu trình T_1 nhận được trong bước 2 chứa tất cả các cạnh của đồ thị thì dừng. Nếu không thì ta chọn cạnh e_j khác tất cả các cạnh của T_1 sao cho một trong các điểm đầu, chẳng hạn w, của e_j là một đỉnh của T_1.

Bước 4: Xây dựng chu trình T_2 với điểm bắt đầu là w như bước 1, 2 sao cho tất cả các cạnh của T_2 khác với các cạnh của T_1.

Bước 5: Xây dựng chu trình T_3 bằng cách ghép chu trình T_2 với T_1 tại w. Sau đó lặp lại bước 3 với chu trình T_3.

Thuật toán xây dựng chu trình Euler:

Procedure Euler (G: đa đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)

chu trình := chu trình trong G bắt đầu tại một đỉnh được chọn tùy ý và các cạnh được thêm vào để xây dựng đường đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh này.

$H := G$ với các cạnh của G sau khi bỏ đi chu trình

While H còn các cạnh

Begin

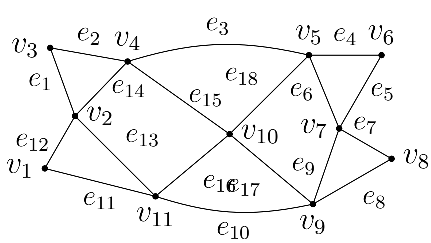
chu trình con := chu trình trong H bắt đầu tại đỉnh trong H cũng là đầu mút của một cạnh thuộc chu trình.

$H := H$ với các cạnh của chu trình con, và tất cả các đỉnh cô lập bị loại bỏ.

chu trình := chu trình với chu trình con được chèn vào tại một đỉnh thích hợp.

End chu trình là chu trình Euler.

Ví dụ 4.4.4. *Đồ thị sau có chu trình Euler hay không? Nếu có thì hãy tìm một chu trình Euler.*



Giải.

Đồ thị trên là đồ thị liên thông và tất cả các đỉnh của nó đều là đỉnh bậc chẵn do đó đồ thị đã cho có chu trình Euler. Để tìm một chu trình Euler, chúng ta dựa vào thuật toán trên. Ta xét các chu trình sau:

$$\begin{aligned}
C_1 :&(v_3, e_2, v_4, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
C_2 :&(v_4, e_3, v_5, e_{18}, v_{10}, e_{15}, v_4)\\
C_3 :&(v_5, e_4, v_6, e_5, v_7, e_6, v_5)\\
C_4 :&(v_7, e_7, v_8, e_8, v_9, e_9, v_7)\\
C_5 :&(v_9, e_{10}, v_{11}, e_{16}, v_{10}, e_{17}, v_9)\\
C_5 :&(v_{11}, e_{11}, v_1, e_{12}, v_2, e_{13}, v_{11})
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng hai chu trình bất kỳ trong 6 chu trình trên đều không có cạnh chung. Hơn nữa, nếu e là một cạnh thì e chỉ thuộc một trong các chu trình C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 và C_6. Tiếp theo, chúng ta xây dựng một chu trình như sau:

Sử dụng C_5 và C_6, ta xây dựng chu trình:

$$T_5 : \ (v_9, e_{10}, C_6, e_{16}, v_{10}, e_{17}, v_9)$$

bằng cách thay thế v_{11} bằng C_6.
Sau đó, chúng ta sử dụng C_4 và T_5 xây dựng chu trình:

$$T_4 : \ (v_7, e_7, v_8, e_8, T_5, e_9, v_7)$$

bằng cách thay đỉnh v_9 bởi T_5. Tiếp theo, chúng ta sử dụng C_3 và T_4 để xây dựng chu trình:

$$T_3 : \ (v_5, e_4, v_6, e_5, T_4, e_6, v_5)$$

bằng cách thay v_7 bởi T_4. Bây giờ chúng ta sử dụng chu trình C_2 và T_3 để xây dựng chu trình:

$$T_2 : \ (v_4, e_3, T_3, e_{18}, v_{10}, e_{15}, v_4)$$

bằng cách thay v_5 bởi T_3. Cuối cùng, sử dụng C_1 và T_2, ta xây dựng chu trình:

$$T_1 : \ (v_3, e_3, T_2, e_{14}, v_2, e_1, v_3)$$

bằng cách thay v_4 bởi T_2. Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned}
T_1: \quad & (v_3, e_2, T_2, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
&= (v_3, e_2, v_4, e_3, T_3, e_{18}, v_{10}, e_{15}, v_4, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
&= (v_3, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_6, e_5, T_4, e_6, v_5, e_{18}, v_{10},\\
&\quad e_{15}, v_4, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
&= (v_3, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_6, e_5, v_7, e_7, v_8, e_8, T_5, e_9,\\
&\quad v_7, e_6, v_5, e_{18}, v_{10}, e_{15}, v_4, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
&= (v_3, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_6, e_5, v_7, e_7, v_8, e_8, v_9, e_{10}, C_6, e_{16}, v_{10}, e_{17},\\
&\quad v_9, e_9, v_7, e_6, v_5, e_{18}, v_{10}, e_{15}, v_4, e_{14}, v_2, e_1, v_3)\\
&= (v_3, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_6, e_5, v_7, e_7, v_8, e_8, v_9, e_{10}, v_{11}, e_{11}, v_1,\\
&\quad e_{12}, v_2, e_{13}, v_{11}, e_{16}, v_{10}, e_{17}, v_9, e_9, v_7, e_6, v_5, e_{18}, v_{10},\\
&\quad e_{15}, v_4, e_{14}, v_2, e_1, e_3)
\end{aligned}$$

là một chu trình Euler.

Định lý 4.4.2. *Một đa đồ thị vô hướng liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.*

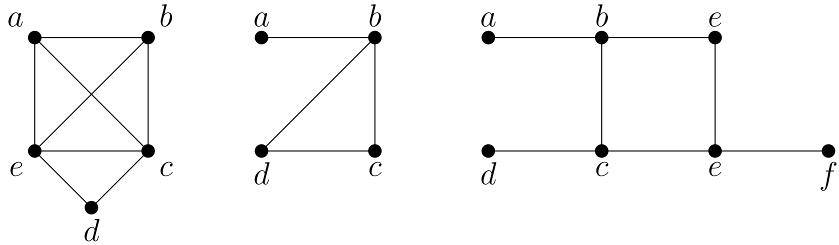
Ví dụ 4.4.5. *Áp dụng Định lí 4.4.1 đối với bài toán các cây cầu ở Konigsberg. Ta thấy, đồ thị G là một đa đồ thị liên thông có tất cả các đỉnh đều là đỉnh bậc lẻ. Do đồ thị G không có chu trình Euler.*

4.4.3. *Đường đi Hamilton và chu trình Hamilton*

a. Định nghĩa

Định nghĩa 4.4.2. *Đường đi x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đường đi Hamilton nếu $V = \{x_0$, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, $x_n\}$ và $x_i \neq x_j$ với $0 \leq i < j \leq n$. Chu trình x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n, x_0 ($n > 1$) trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là chu trình Hamilton nếu x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n là đường đi Hamilton.*

Ví dụ 4.4.6. *Cho các đồ thị vô hướng:*



G_1 G_2 G_3

Tìm đường đi Hamilton và chu trình Hamilton của các đồ thị đã cho.

Giải.

G_1 có chu trình Hamilton: a, b, c, d, e, a

G_2 không có chu trình Hamilton

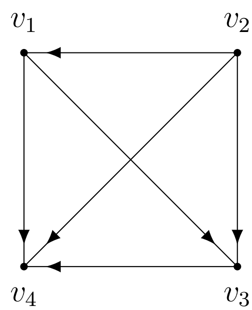
G_2 có đường đi Hamilton: a, b, c, d

G_3 không có cả đường đi và chu trình Hamilton

Ví dụ 4.4.7. *Trong một giải đấu bóng có 4 đội tham gia, mỗi đội phải đấu với đội khác đúng một trận và không có ràng buộc gì. Hãy chỉ ra một danh sách tất cả các đội bóng được liệt kê theo thứ tự sao cho mỗi đội bị thua đội kế tiếp trong danh sách.*

Giải.

Ta kí hiệu các đội tương ứng là các đỉnh v_1, v_2, v_3 và v_4 của đồ thị và các trận đấu giữa các đội tương ứng với cạnh có hướng, trong đó đỉnh đầu tương ứng là đội thắng, đỉnh cuối là đội thua. Ta có đồ thị sau:



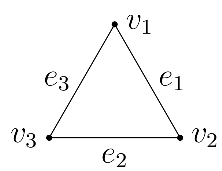
Trong đồ thị có hướng này, ta nhận thấy $v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_4$ là một đường đi Hamilton có hướng.

Vậy, danh sách thỏa mãn đề bài là v_4, v_3, v_1, v_2.

b. Định lí

Định lý 4.4.3. *Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh, trong đó $n \geq 3$. Nếu mỗi đỉnh của đồ thị G có bậc ít nhất bằng $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ thì G có chu trình Hamilton.*

Chứng minh. Giả sử $n = 3$. Gọi v_1, v_2 và v_3 là các đỉnh của đồ thị G. Mỗi đỉnh của đồ thị G đều có bậc lớn hơn hay bằng 2. Do G là đơn đồ thị nên mỗi đỉnh của đồ thị G có bậc 2. Đặt e_1 là cạnh liên thuộc với đỉnh v_1 và v_2, e_2 là cạnh liên thuộc với v_2 và v_3 và e_3 là cạnh liên thuộc với v_3 và v_1 (như hình vẽ dưới đây)



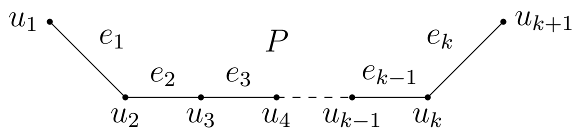
Ta suy ra đồ thị G là một chu trình. Do đó, đồ thị G có chu trình Hamilton là

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1).$$

Giả sử $n \geq 4$. Đặt T là tập hợp chứa tất cả các đường đi trong G. Do T là tập hợp hữu hạn nên tồn tại một đường đi, chẳng hạn

$$P : (u_1, e_1, u_2, e_12, u_3, e_3, \ldots, u_k, e_k, u_{k+1}).$$

Giả sử P là một đường đi có số đỉnh lớn nhất trong T. Giả sử đường P có dạng như hình vẽ:



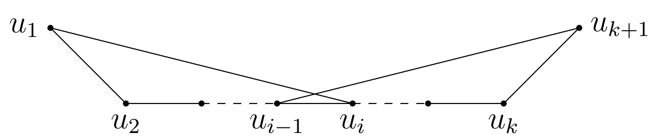
Gọi v là đỉnh liền kề với đỉnh u_1 trong đồ thị G. Giả sử $v \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Khi đó, G có đường đi gồm $k+2$ đỉnh. Điều này mâu thuẫn với việc chọn P là đường đi trong tập hợp T và đường đi P có số đỉnh lớn nhất.

Do đó, $v = u_i$ với giá trị i nào đó trong tập $\{1, 2, \ldots, k+1\}$. Bởi vì G không có khuyên, v không thể trùng với u_1. Khi đó, bậc của đỉnh v lớn hơn hay bằng $\frac{n}{2}$. Do u_1 có ít nhất $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ đỉnh liền kề mà tất cả đều thuộc P nên P có ít nhất $1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ đỉnh. Tương tự, tất cả các đỉnh liền kề với đỉnh u_{k+1} cũng thuộc P.

Bây giờ ta chứng minh rằng với đỉnh u_i của P, trong đó $i = 2, 3, \ldots, k+1$ sao cho u_1 là một đỉnh liền kề với u_i, trong khi u_{i-1} là đỉnh liền kề với u_{k+1}.Giả sử rằng điều này không đúng. Khi đó, với mỗi đỉnh u_i, nếu u_i liền kề với u_1 thì u_{i-1} không là đỉnh liền kề với u_{k+1}. Vậy, có ít nhất $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ đỉnh của P không liền kề với đỉnh u_{k+1}. Bởi vì G là đơn đồ thị với n đỉnh nên ta suy ra:

$$deg(u_{k+1}) \leq (n-1) - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

điều này mâu thuẫn. Do đó, tồn tại một đỉnh u_i,$2 \leq i \leq k+1$ sao cho u_i liền kề với u_1 và u_{i-1} liền kề với u_{k+1}.



Gọi P_1 là đường đi con (bộ phận) của đường đi P từ u_i tới u_{k+1} và P_2 là đường đi con của P từ u_{i-1} tới u_1.

Nếu $i = k + 1$ thì ta có $P_1 = (u_{k+1})$.

Bây giờ chúng ta xây dựng chu trình

$$C = (u_1, e_{i1}, u_i, P_1, u_{k+1}, e_{i2}, u_{i-1}, P_2, u_1)$$

trong đó, u_1, u_i là những đầu mút của các cạnh e_{i1} và u_{k+1}, u_{i-1} là những đầu mút của các cạnh e_{i2}. Ta có C chứa tất cả các đỉnh của P. Bây giờ ta cần chứng minh rằng C chứa tất cả các đỉnh của G.

Giả sử v là đỉnh của đồ thị G nhưng không thuộc C. Khi đó, chu trình C chứa ít nhất $\lceil 1 + \frac{n}{2} \rceil$ vì vậy tồn tại nhiều nhất $\lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor$. Suy ra $deg(v) geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Vậy, phải tồn tại một đỉnh của C, chẳng hạn w, liền kề với đỉnh v. Bây giờ ta gán nhãn các đỉnh và các cạnh của C như sau:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_{k+2} = v_1).$$

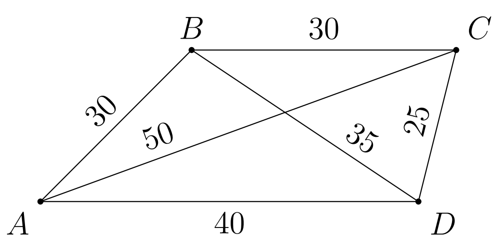
Giả sử $w = v_j,\ 1 \le j \le k + 1$. Gọi e là cạnh nối v với v_j. Khi đó,

$$P' :\ (v, e, v_j, e_j, v_{j+1}, e_{j+1} \ldots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_{k+2} = v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{j-1}).$$

là đường đi trong G từ v tới v_{j-1}. Bây giờ số các đỉnh trong P' nhiều hơn 1 đỉnh so với P, điều này mâu thuẫn. Do vậy, C chứa tất cả các đỉnh của đồ thị G. Suy ra, C là một chu trình Hamilton của G. □

Định lý 4.4.4. *Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh, trong đó $n \ge 3$. Nếu với hai đỉnh bất kỳ không liền kề u và v của đồ thị G đều thỏa mãn $\deg(u) + \deg(v) \ge n$ thì G có chu trình Hamilton.*

Ví dụ 4.4.8. *Hãy tưởng tượng rằng hình vẽ dưới đây là một bản đồ hiển thị bốn thành phố và khoảng cách tính bằng km giữa chúng. Giả sử một nhân viên bán hàng phải đi đến mỗi thành phố đúng một lần, bắt đầu và kết thúc ở thành phố A. Tìm đường đi của nhân viên bán hàng sao cho tổng quãng đường đi là ngắn nhất?*



Giải.

Bài toán này có thể được giải quyết bằng cách viết tất cả các chu trình Hamilton mà đỉnh đầu và đỉnh cuối là A và tính tổng quãng đường đi được cho mỗi chu trình.

Đường đi	**Tổng khoảng cách (Tính theo km)**
A, B, C, D, A	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
A, B, D, C, A	$30 + 35 + 25 + 50 = 125$
A, C, B, D, A	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
A, C, D, B, A	140
A, D, B, C, A	155
A, D, C, B, A	125

Do đó, một trong hai tuyến đường A, B, C, D, A hoặc A, D, C, B, A cho tổng khoảng cách tối thiểu là 125 km.

Bài toán tổng quát về sự di chuyển của người bán hàng liên quan đến việc tìm một chu trình Hamilton trong một đồ thị bất kì có n đỉnh trong đó, mỗi cạnh được đánh dấu bằng một khoảng cách, tổng khoảng cách của đường đi đó là ngắn nhất. Một cách để giải quyết vấn đề chung là sử dụng phương pháp của Ví dụ 4.4.8: Viết tất cả các chu trình Hamilton bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh cụ thể, tính tổng khoảng cách cho mỗi đỉnh và chọn một chu trình mà tổng này là nhỏ nhất. Tuy nhiên, ngay cả đối với các giá trị cỡ trung bình của n, phương pháp này không thực tế. Đối với một đồ thị đầy đủ có 30 đỉnh, cần phải kiểm tra $\frac{29!}{2} \approx 4,42 \times 10^{30}$ chu trình Hamilton bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh cụ thể. Ngay cả khi mỗi chu trình có thể được tìm thấy và tổng khoảng cách của nó được tính chỉ trong một nano giây, nó sẽ yêu cầu khoảng $1,4 \times 10^{14}$ năm để hoàn thành việc tính toán. Hiện tại, không có thuật toán nào hiệu quả hơn được biết để giải quyết vấn đề di chuyển của nhân viên bán hàng nói chung. Tuy nhiên, có những thuật toán hiệu quả tìm ra các lời giải "khá tốt" - tức là các chu trình, mặc dù không nhất thiết phải có tổng khoảng cách nhỏ nhất có thể, nhưng có tổng khoảng cách nhỏ hơn hầu hết các chu trình Hamilton khác.

Ví dụ 4.4.9. *Có n đại biểu đến dự hội nghị. Mỗi ngày họp một lần và các đại biểu ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải hội nghị có bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới. Lưu ý rằng n người đều muốn làm quen với nhau.*

Giải.

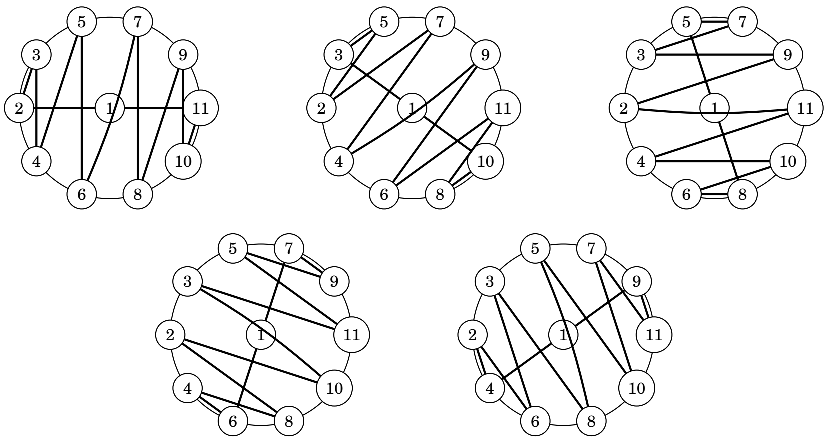
Xét đồ thị gồm n đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau. Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ K_n. Mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Bái toán quy về việc tìm các chu trình Hamilton phân biệt của đồ thị đầy đủ K_n (hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng không có cạnh chung).

Ta có định lý sau:

Định lý 4.4.5. *Đồ thị đầy đủ K_n với n lẻ và $n \geq 3$ có đúng $\frac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.*

Giải bài toán sắp xếp chỗ ngồi với $n = 11$. Có $\frac{11-1}{2} = 5$ cách sắp xếp chỗ ngồi phân biệt như sau:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 1 \\
1, & 3, & 5, & 2, & 7, & 4, & 9, & 6, & 11, & 8, & 10, & 1 \\
1, & 5, & 7, & 3, & 9, & 2, & 11, & 4, & 10, & 6, & 8, & 1 \\
1, & 7, & 9, & 5, & 11, & 3, & 10, & 2, & 8, & 4, & 6, & 1 \\
1, & 9, & 11, & 7, & 10, & 5, & 8, & 3, & 6, & 2, & 4, & 1
\end{array}
$$



4.5. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Nhiều bài toán được mô hình bằng đồ thị có trọng số. Đó là đồ thị vô hướng mà mỗi cạnh của nó được gán cho một số nguyên (hoặc số thực) gọi là trọng số của cạnh đó. Chẳng hạn về mô hình đường không, đường bộ, ..., trong đó, mỗi đỉnh của đồ thị biểu diễn một địa điểm, mỗi cạnh của đồ thị biểu diễn thời gian đi giữa hai địa điểm hoặc chi phí để đi quãng đường giữa hai địa điểm là hai đầu mút của cạnh đó. Các đồ thị có trọng số cũng được dùng để lập mô hình các mạng máy tính, mô hình chi phí truyền thông, mô hình thời gian thực hiện của các máy tính, thời gian truyền thông tin giữa các máy tính qua các đường truyền thông hoặc mô hình khoảng cách giữa các máy tính, ...

Một trong những ứng dụng quan trọng liên quan đến đồ thị có trọng số là bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số. Trong chương trình này, chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán E. Dijkstra giới thiệu năm 1959, để tìm đường đi ngắn nhất của một đồ thị có trọng số cho trước. Thuật toán Dijkstra thực hiện theo cách xây dựng các cấu trúc lặp tập hợp S bao gồm tất cả các đỉnh của đồ thị G với chiều dài ngắn nhất.

Cho G là đồ thị vô hướng có trọng số. Giả sử u và v là hai đỉnh của G, P là đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v trong đồ thị G. Chiều dài của đường P, kí hiệu $L(P)$, là tổng trọng số của tất cả các cạnh trên đường đi P, ta cũng gọi là chiều dài từ v tới u và ngược lại.

Xét đồ thị vô hướng liên thông G với tập đỉnh $V = \{a = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n = z\}$. Giả sử, ta cần xác định đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh z và độ dài của đường đi ngắn nhất đó.

Trước hết, ta gán nhãn cho đỉnh $v \in V$ là $L(v)$ và gán tập $S = \emptyset$. Đặt $N = V \backslash S$, trong đó V là tập tất cả các đỉnh của G. Vậy, ban đầu thì $N = V$ và $V = S \cup N$.

Với mỗi đỉnh $v \in V$, ta gán cho một nhãn $L(v)$ như sau:

i) Đầu tiên, ta gán $L(a) = 0$ và $L(v) = \infty$ với mọi đỉnh còn lại $v \in V$.

ii) Nếu $v \in S$ thì nhẫn $L(v)$ biểu diễn chiều dài của đường đi ngắn nhất từ a tới v.

iii) Sau mỗi lần lặp lại thuật toán, giá trị $L(v)$ tại mỗi đỉnh của tập đỉnh v được thay đổi theo cách dưới đây.

Trong thuật toán Dijkstra, tại mỗi bước lặp của thuật toán ta chọn một đỉnh $v \in N$ sao cho:

$$L(v) = \min\{L(v) \ \ |u \in N\}$$

Sau đó, đỉnh v được loại khỏi tập n và nhập vào tập S. Đối với mọi đỉnh $w \in N$ mà liên thuộc với v ta kiểm tra đường đi từ a tới w qua v (sử dụng đường ngắn nhất từ a tới v) xem có ngắn hơn đường hiện tại từ a tới w hay không.

$$L(w) > L(v) + W[v, w].$$

Nếu bất đẳng thức này đúng thì giá trị của $L(w)$ được gán $L(w) := L(v) + W[v, w]$.

Nếu bất đẳng thức không đúng thì ta giữ nguyên $L(w)$.

Kết thúc thuật toán, khi $z \in S$ và $L(z)$ là chiều dài ngắn nhất của đường đi từ đỉnh a đến đỉnh z .

Ta tóm tắt thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất như sau:

1. $S := \emptyset$

2. $N := V$

3. Với mọi đỉnh $u \in V$, $u \neq a$, $L(u := \infty)$,

4. $L(a) := 0$

5. Khi $z \notin S$ thì

5.a. Cho $v \in N$ sao cho $L(v) = \min\{L(u) \mid u \in N\}$

5.b. $S := S \cup \{v\}$

5.c. $N := N \backslash \{v\}$

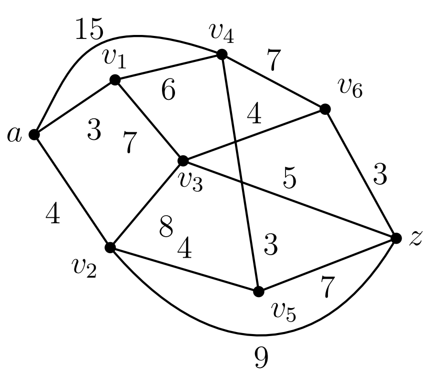
5.d. Với mọi $w \in N$ sao cho tồn tại một cạnh từ v đến w

5.d.1 Nếu $L(v) + W[v, w] < L(w)$ thì $L(w) := L(v) + W[v, w]$.

5.d.2 Nếu $L(v) + W[v, w] \geq L(w)$ thì giữ lại nhãn của $L(w)$.

Thuật toán dừng khi $z \in S$.

Ví dụ 4.5.1. *Sử dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh z trong đồ thị sau:*



Giải.

Bước 1: Trước hết ta có:

$$\begin{aligned} S &= \emptyset \\ N &= \{a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, z\} = V. \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Chọn a thêm vào cho tập S và loại a ra khỏi tập N.

Bước 2: Ta được:

$$\begin{aligned} S &= \{a\} \\ N &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, z\}. \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	3	4	∞	15	∞	∞	∞

Từ bảng giá trị nhãn của các đỉnh, ta chọn đỉnh v_1 nhập vào tập S và loại v_1 khỏi tập N.

Bước 3: Khi đó,

$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1\} \\ N &= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, z\}. \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	3	4	10	9	∞	∞	∞

Do $L(v_1) + W[v_1, v_4] = 3 + 6 = 9 < L(v_4) = 15$ nên ta đã gán $L(v_4) := 9$ và $L(v_1) + W[v_1, v_3] = 3 + 7 = 10 < L(v_3) = \infty$ nên ta gán $L(v_3) := 10$.

Chọn đỉnh v_2 mà nhãn của nó có giá trị nhỏ nhất nhập vào tập S và loại khỏi tập n ta được: $S = \{a, v_1, v_2\},\ N = \{v_3, v_4, v_5, v_6, z\}$.

Bước 4:

$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1, v_2\} \\ N &= \{v_3, v_4, v_5, v_6, z\}. \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	3	4	10	9	8	∞	13

Do $L(v_2)+W[v_2,v_3]=4+8=12>10=L(v_3)$ nên ta giữ nguyên nhãn của v_3.

$L(v_2)+W[v_2,v_5]=4+4=8<L(v_5)=\infty$ ta gán $L(v_5):=8$;

$L(v_2)+W[v_2,z]=4+9=13<L(z)=\infty$ ta gán $L(z):=13$;

Suy ra,

Bước 5:

$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1, v_2, v_5\} \\ N &= \{v_3, v_4, v_6, z\}. \end{aligned}$$

$L(v_5)+W[v_5,v_4]=8+3=11>L(v_4)=9$ nên ta giữ nguyên $L(v_4):=9$;

$L(v_5)+W[v_5,z]=8+7=15>L(z)=13$ nên ta giữ nguyên $L(z):=13$;

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	3	4	10	9	8	∞	13

So sánh giá trị nhãn của các đỉnh trong tập đỉnh N, ta chọn v_4 nhập vào S và loại khỏi N.

Bước 6:

$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1, v_2, v_5, v_4\} \\ N &= \{v_3, v_6, z\}. \end{aligned}$$

$L(v_4)+W[v_4,v_6]=9+7=16<L(v_6)=\infty$ nên ta gán $L(v_6):=16$.

$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
0	3	4	10	9	8	16	13

Chọn v_3 nhập vào S và loại khỏi N.

Bước 7:

$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1, v_2, v_5, v_4, v_3\} \\ N &= \{v_6, z\}. \end{aligned}$$

Do $L(v_3)+W[v_3,v_6]=10+4=14<L(v_6)=16$ nên ta gán

$$L(v_6):=14.$$

Do $L(v_3) + W[v_3, z] = 10 + 5 = 15 > L(z) = 13$ nên ta giữ nguyên nhãn $L(z) := 13$.

Ta tiếp tục so sánh giá trị nhãn các đỉnh còn lại trong tập N và chọn được đỉnh z thêm vào cho tập S và loại khỏi tập N. Khi đó,

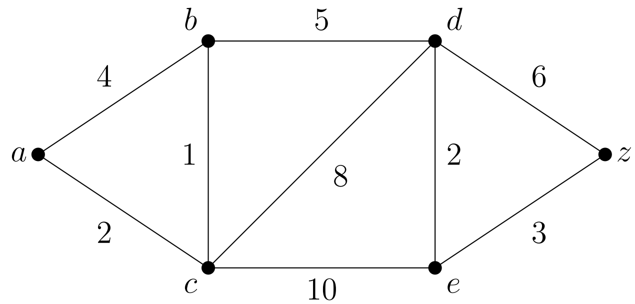
$$\begin{aligned} S &= \{a, v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, z\} \\ N &= \{v_6\}. \end{aligned}$$

Lúc này ta có đỉnh z thuộc tập S rồi nên thuật toán kết thúc. Vậy đường đi ngắn nhất cần tìm là đường đi lần lượt qua các đỉnh: a, v_2, z có tổng trọng số là 13.

Ta tổng kết các bước của lời giải bài toán trên bằng bảng sau:

S	$L(a)$	$L(v_1)$	$L(v_2)$	$L(v_3)$	$L(v_4)$	$L(v_5)$	$L(v_6)$	$L(z)$
$\emptyset$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\{a\}$		[3]	4	∞	15	∞	∞	∞
$\{a, v_1\}$			[4]	10	9	∞	∞	∞
$\{a, v_1, v_2\}$				10	9	[8]	∞	13
$\{a, v_1, v_2, v_5\}$				10	[9]		∞	13
$\{a, v_1, v_2, v_5, v_4\}$				[10]			16	13
$\{a, v_1, v_2, v_5, v_4, v_3\}$							14	[13]
$\{a, v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, z\}$								13

Ví dụ 4.5.2. *Sử dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh z trong đồ thị sau:*



Giải.

Bước 1: Đặt

$$\begin{aligned} S &= \emptyset \\ N &= \{a, b, c, d, e, z\} \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	∞	∞	∞	∞	∞

Bước 2: Chọn đỉnh a nhập vào tập S và loại khỏi N.

$$\begin{aligned} S &= \{a\} \\ N &= \{b, c, d, e, z\} \end{aligned}$$

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	4	2	∞	∞	∞

Bước 3: Chọn đỉnh c nhập vào tập S và loại khỏi N.

$$\begin{aligned} S &= \{a, c\} \\ N &= \{b, d, e, z\} \end{aligned}$$

Do $L(c) + W[c, b] = 2 + 1 = 3 < L(b)$ nên ta gán $L(b) := 3$.

Do $L(c) + W[c, d] = 2 + 8 = 10 < L(d)$ nên ta gán $L(d) := 10$.

Do $L(c) + W[c, e] = 2 + 10 = 12 < L(e) = \infty$ nên ta gán $L(e) := 12$.

Vậy, ta được bảng giá trị các nhãn:

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	3	2	10	12	∞

Bước 4: Căn cứ vào giá trị nhãn của các điểm còn lại trong n ta tiếp chọn đỉnh b loại khỏi n và nhập vào tập S .

$$\begin{aligned} S &= \{a, c, b\} \\ N &= \{d, e, z\} \end{aligned}$$

Do $L(b) + W[b, d] = 3 + 5 = 8 < L(d) = 10$ nên ta gán $L(d) := 8$.

Vậy, ta được bảng giá trị các nhãn:

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	3	2	8	12	∞

Bước 5: Căn cứ vào giá trị nhãn của các điểm còn lại trong n ta tiếp chọn đỉnh d loại khỏi n và nhập vào tập S .

$$\begin{aligned} S &= \{a, c, b, d\} \\ N &= \{e, z\} \end{aligned}$$

Do $L(d) + W[d, e] = 8 + 2 = 10 < L(e) = 12$ nên ta gán $L(e) := 10$.

Do $L(d) + W[d, z] = 8 + 6 = 14 < L(z) = \infty$ nên ta gán $L(z) := 14$.

Vậy, ta được bảng giá trị các nhãn:

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	3	2	8	10	14

Bước 6: Tiếp tục chọn điểm e nhập vào tập hợp S và loại điểm đó khỏi tập N, ta được

$$\begin{aligned} S &= \{a, c, b, d, e\} \\ N &= \{z\} \end{aligned}$$

Do $L(e) + W[e, z] = 10 + 3 = 13 < L(z) = 14$ nên ta gán $L(z) := 13$.

Cuối cùng, ta nhập đỉnh z vào tập S và thuật toán kết thúc.

Ta có bảng tổng kết các bước của bài toán trên như sau:

S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
$S = \emptyset$	0	∞	∞	∞	∞	∞
$S = \{a\}$		4	[2]	∞	∞	∞
$S = \{a, c\}$		[3]		10	12	∞
$S = \{a, c, b\}$				[8]	12	∞
$S = \{a, c, b, d\}$					[10]	14
$S = \{a, c, b, d, e\}$						[13]
$S = \{a, c, b, d, e, z\}$						13

Nhận xét: Thuật toán Dijkstra chỉ đưa ra chiều dài ngắn nhất của đường đi từ một đỉnh này đến một đỉnh khác trong một đồ thị liên thông và tập hợp các đỉnh mà đường đi ngắn nhất có thể đi qua. Nó không chỉ ra đường ngắn nhất đó.

Sau đây sẽ là thuật toán đường đi ngắn nhất Dijkstra:

Ví dụ 4.5.3. *Thuật toán Dijkstra.*

Thuật toán 4.5.1 Thuật toán Dijkstra (G, W, a, z, N)

Input: G - Đơn đồ thị liên thông
n - Số các đỉnh của đồ thị G
W - ma trận trọng số
a - đỉnh đầu
z - đỉnh cuối

Output: $L(z)$ là chiều dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới z.

function $Thuat\_Toan\_Dijkstra(G, W, a, z, N)$
  begin
    $S := emptyset;$
    $N := TapcacdinhtrongG;$
    for $u \in N$ **do**
      $L(u) := \infty;$
      $L(a) := 0;$
    while $z \notin S$ **do**
      begin
        $min := \infty$
        for $u \in N$ **do**
          if $L(u) < min$ **then**
            begin
              $min := L(u);$
              $v := u;$
            end
          $S := S \cup \{v\};$
          $N := N \backslash \{v\};$
        for $w \in N$ **do** do

```
                    if (v, w) ∈ GvaL(v) + W[v, w] < L(w) then
                        L(w) := L(v) + W[v, w]
            end
    end
    return L(z) ;
```

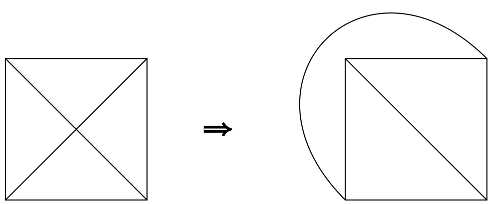
4.6. ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

4.6.1. *Đồ thị phẳng*

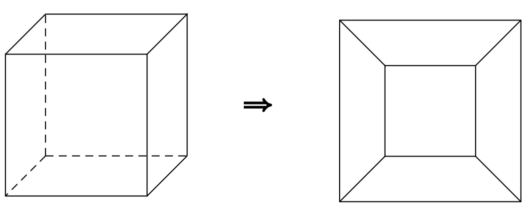
a. Định nghĩa

Định nghĩa 4.6.1. *Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có hai cạnh nào cắt nhau (tại một điểm không phải là điểm mút của các cạnh). Hình vẽ của một đồ thị phẳng trên một mặt phẳng nào đó được gọi là hình biểu diễn phẳng của đồ thị đó.*

Ví dụ 4.6.1. K_4 *là đồ thị phẳng vì có thể vẽ lại như Hình 3 không có đường cắt.*



K_4 Hình 3



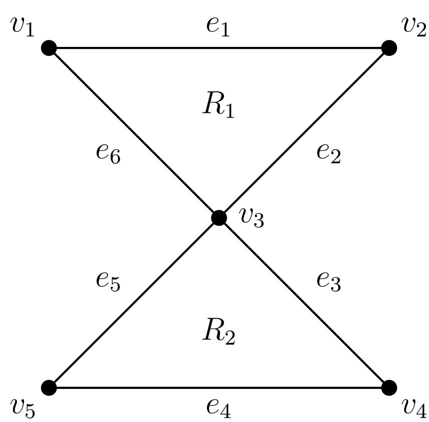
Q_3 Hình 4

Vậy, đồ thị Q_3 là đồ thị phẳng vì nó có thể biểu diễn trên mặt phẳng bằng một đồ thị không có hai cạnh nào cắt nhau trừ các đầu mút (Hình 4).

Số mặt (n_f) của đồ thị phẳng G là số miền phẳng được chia bởi hình biểu diễn phẳng của G.

Tập hợp các cạnh bao một miền được gọi là biên của miền đó. Miền phẳng nằm bên ngoài hình biểu diễn phẳng của đồ thị G được gọi là mặt ngoài của G. Miền phẳng không là mặt ngoài của đồ thị G được gọi là mặt trong của đồ thị đó.

Ví dụ 4.6.2. *Xét đồ thị trong hình sau:*



Đồ thị phẳng trên chia mặt phẳng thành ba miền phẳng. Khi đó, ta nói đồ thị đã cho có ba mặt.

Miền 1 (R_1): Biên là chu trình $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_6, v_1)$. Biên của R_1 bao gồm các cạnh e_3, e_4 và e_6.

Miền 2 (R_2): Biên là chu trình $(v_4, e_4, v_5, e_5, v_3, e_3, v_4)$. Biên của R_2 bao gồm các cạnh e_3, e_4 và e_5.

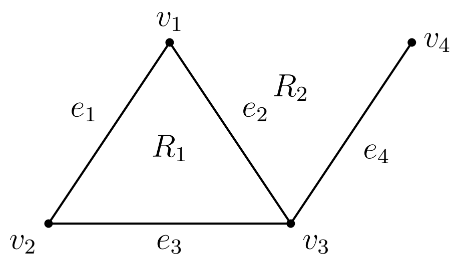
Cả hai miền R_1 và R_2 là các miền trong của đồ thị đã cho.

Miền 3 (R_3): là phần mặt phẳng nằm ngoài đồ thị phẳng này. Biên của miền R_3 bao gồm các cạnh e_1, e_6, e_5, e_2, e_4 và e_3.

Vậy, đồ thị trên có ba mặt là R_1, R_2 và R_3.

Với đồ thị phẳng này, ta có số cạnh $n_e = 6$ và số mặt $n_f = 3$. Từ đó, ta tìm được mối quan hệ: $n_v - n_e + n_f = 2$.

Ví dụ 4.6.3. *Xét đồ thị sau:*



Đồ thị này là biểu diễn phẳng của đồ thị phẳng. Đồ thị này chia mặt phẳng thành hai miền.

Miền 1 (R_1): Miền này là miền trong (Mặt trong của đồ thị). Biên của R_1 bao gồm các cạnh e_1, e_2 và e_3.

Miền 2 (R_2): Miền này là miền ngoài (Mặt ngoài của đồ thị). Biên của R_2 bao gồm các cạnh $e_1, e - 2, e_3$ và e_4.

Trong đồ thị phẳng này, ta có số cạnh $n_e = 4$, số đỉnh $n_v = 4$ và số mặt $n_f = 2$. Từ đó, ta tìm được mối quan hệ: $n_v - n_e + n_f = 2$.

Qua các ví dụ trên ta thấy có một quan hệ giữa số đỉnh, số cạnh và số mặt của đồ thị phẳng là $n_v - n_e + n_f = 2$. Vậy, đẳng thức này có đúng cho bất kỳ đồ thị phẳng nào không? Kết quả này đã được Euler chứng minh vào năm 1752.

b. Công thức Euler:

Định lý 4.6.1. *(Công thức Euler) Giả sử G là một đồ thị phẳng, liên thông với n_e cạnh và n_v đỉnh. Gọi n_f là số mặt của đồ thị G. Khi đó, ta có $n_v - n_e + n_f = 2$.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo số cạnh n_e.

Nếu $n_e = 0$ thì đồ thị chỉ có một đỉnh và một mặt. Do đó,

$$n_v - n_e + n_f = 2.$$

Với k là một số nguyên dương. Giả sử $n_v - n_e + n_f = 2$ đúng với mọi đồ thị phẳng liên thông có số cạnh là $n_e = k - 1$.

Cho G là đồ thị phẳng liên thông với $n_e = k$ cạnh và $n_v = t$ đỉnh. Giả sử G không có chu trình. Khi đó, G không có miền trong và có duy nhất một miền ngoài. Suy ra $n_f = 1$. Bây giờ ta chứng minh G chứa một đỉnh bậc 1. Chọn đỉnh v trong G. Nếu $\deg(v) = 1$ thì việc chứng minh là xong. Trường hợp $\deg(v) > 1$, giả sử $v - 1$ là một đỉnh liền kề với v trong G. Vì G không có chu trình nên G không có khuyên độc lập, do đó, v_1 khác v. Nếu $\deg(v_1) = 1$ thì việc chứng minh là xong. Nếu $\deg(v_1) > 1$ thì tồn tại v_2 là đỉnh liền kề với v_1. Vì G không có chu trình nên v_2 khác v_1 và v. Nếu $\deg(v_2) \neq 1$ thì ta tìm được đỉnh liền kề v_3 của đỉnh v_2 khác với các đỉnh v, v_1 và v_2. Bởi vì G có hữu hạn đỉnh nên suy ra G phải có đỉnh u có bậc 1. Bây giờ ta xóa đi đỉnh này và một cạnh liền kề với nó ta được đồ thị H liên thông với $k - 1$ cạnh và $t - 1$ đỉnh. Áp dụng giả thiết quy nạp đối với đồ thị H, ta có công thức $n_v - n_e + n_f = 2$. Do đó, $(t - 1) - (k - 1) + n_f = 2$. Suy ra $t - k + n_f = 2$. Tức là, $n_v - n_e + n_f = 2$.

Giả sử G có một chu trình C. Gọi e là một cạnh trong chu trình C. Bây giờ ta xây dựng một đồ thị mới $G_1 = G \backslash \{e\}$. Khi đó, đồ thị G_1 vẫn là đồ thị phẳng liên thông. Giả sử số mặt của đồ thị G là $n_f = m$. Trong khi xây dựng G_1 ta chỉ xóa đi duy nhất cạnh e và không xóa đi đỉnh nào nên $n_v = t, n_e = k - 1$. Bây giờ $C \backslash \{e\}$ không là chu trình trong G_1 và số mặt của G_1 là $n_f = m - 1$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho đồ thị G_1 ta có $t - (k - 1) + (m - 1)$. Suy ra, $t - k + m = 2$. Do đó, $n_v - n_e + n_f = 2$. □

Ví dụ 4.6.4. *Giả sử một đơn đồ thị phẳng G, liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?*

Giải.

Theo giả thiết, đồ thị phẳng G có 20 đỉnh, tức là $n_v = 20$ và mỗi đỉnh có bậc 3 nên tổng số bậc ở các đỉnh là: $20 \cdot 3 = 60$.

Theo định lí bắt tay ta có số cạnh của đồ thị đã cho là: $2 \cdot n_e = 60$ suy ra $n_e = 30$.

Do đó, áp dụng công thức Euler:

$$r = n_e - n_v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

Hệ quả 4.6.1. *Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với n_e cạnh, n_v đỉnh trong đó $n_v \geq 3$ thì $n_e \leq 3 \cdot n_v - 6$.*

Chứng minh. Theo giả thiết G là đồ thị phẳng nên G có biểu diễn phẳng. Xét một biểu diễn phẳng của G. Giả sử $n_v = 3$, do G là đơn đồ thị liên thông có 3 đỉnh nên suy ra $n_e \leq 3$. Vậy ta có $n_e \leq 3 \cdot 3 - 3$, tức là $n_e \leq 3 \cdot n_v - 6$. Bây giờ ta xét trường hợp $n_v > 3$. Nếu G không chứa chu trình nào thì ta sẽ chứng minh $n_e = n_v - 1$.
Khi đó,

$$3n_v - 6 = (n_v - 1) + (n_v - 2) + (n_v - 3) > n_v - 1.$$

Vậy,

$$3n_v - 6 = (n_v - 1) + (n_v - 2) + (n_v - 3) > n_v - 1 = n_e$$

Giả sử đồ thị G chứa một chu trình. Do G là đơn đồ thị nên G có thể chứa một chu trình với 3 cạnh, cho nên số các cạnh biên của một mặt của đồ thị G lớn hơn hay bằng 3. Giả sử n_f là số mặt trong biểu diễn phẳng của G và mỗi cạnh của G là biên của một hay một số mặt trong biểu diễn phẳng.

Do đó, tổng số cạnh biên của n_f mặt lớn hơn hay bằng $n_f \cdot 3$. Trong phép đếm, một cạnh được đếm nhiều nhất hai lần. Vậy, tổng các cạnh biên của các mặt từ n_e cạnh của G bé hơn hay bằng $2n_e$. Vậy,

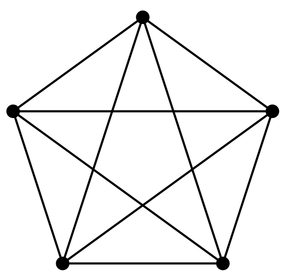
$n_f \cdot 3 \leq 2n_e$. Áp dụng định lý Euler

$$\begin{aligned}
& n_v - n_e + n_f = 2 \\
& \Longrightarrow 3n_v - 3n_e + 3n_f = 6 \\
& \Longrightarrow 3n_e = 3n_v + 3n_f - 6 \\
& \Longrightarrow 3n_e \leq 3n_v + 2n_e - 6 \\
& \Longrightarrow n_e \leq 3n_v - 6.
\end{aligned}$$

□

Hệ quả 4.6.2. *Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có n_e cạnh, n_v đỉnh trong đó $n_v \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì $n_e \leq 2n_v - 4$.*

Ví dụ 4.6.5. *Chứng minh K_5 không là đồ thị phẳng.*



K_5

Giải.

Đồ thị K_5 có 5 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 4 nên ta có:

$$2n_e = 5 \cdot 4 = 20$$

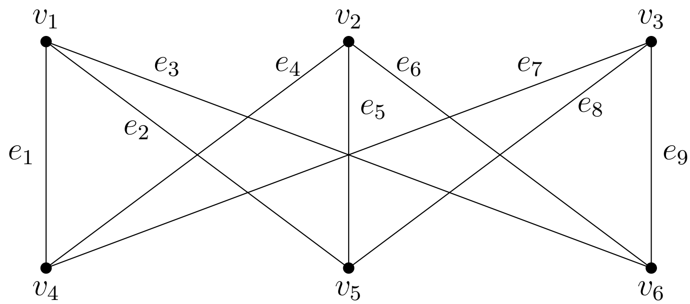
Suy ra, $n_e = 10$ cạnh. $3n_v - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < n_e = 10$

Suy ra, đồ thị K_5 không thỏa mãn Hệ quả 4.1.1.

Vậy, K_5 là đồ thị không phẳng.

Ví dụ 4.6.6. *Đồ thị $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.*

Chứng minh. Đồ thị $K_{3,3}$ được biểu diễn như hình vẽ dưới đây:



Giả sử $K_{3,3}$ là đồ thị phẳng. Khi đó, ta sẽ có một hình biểu diễn phẳng của $K_{3,3}$. Hình biểu diễn phẳng này chia mặt phẳng thành n_f miền. Áp dụng định lý Euler, ta có:

$$n_v - n_e + n_f = 2$$

Với đồ thị $K_{3,3}$ thì số đỉnh $n_v = 6$ và số cạnh $n_e = 9$. Do đó,

$$6 - 9 + n_f = 2 \Longrightarrow n_f = 5.$$

Mặt khác, vì $K_{3,3}$ là đồ thị phân đôi nên không chứa bất kì tam giác nào (không chứa chu trình độ dài 3) nhưng chứa các chu trình độ dài 4, chẳng hạn,

$$(v_1 e_3 v_6 e_9 v_3 e_8 v_5 e_2 v_1).$$

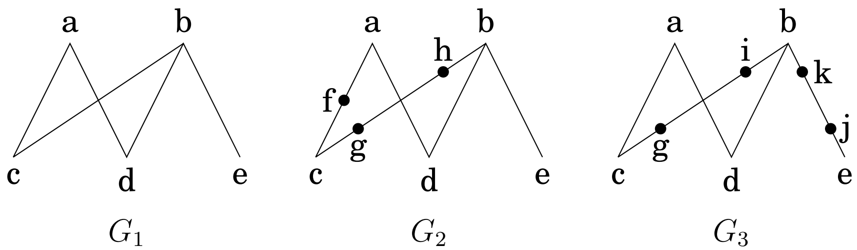
Do đó, tổng số các cạnh biên của 5 mặt sẽ lớn hơn hay bằng $5.4 = 20$. Trong phép đếm, cách cạnh có thể được đếm nhiều nhất là 2 lần. Vì vậy, số lần xuất hiện 9 cạnh làm cạnh biên là bé hơn hay bằng 18. Điều này mẫu thuẫn. Vậy, $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng. $\square$

c. Định lí Kuratowski

Nếu một đồ thị là phẳng thì mọi đồ thị nhận được từ đồ thị này bằng cách bỏ đi cạnh $\{u, v\}$ và thêm vào đỉnh mới w cùng hai cạnh $\{u, w\}$, $\{w, v\}$ cũng là phẳng. Phép toán này gọi là phép phân chia sơ cấp.

Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đồng phôi với nhau nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép nhân chia sơ cấp.

Ví dụ 4.6.7. *Các đồ thị sau đồng phôi.*



Định lý 4.6.2. *Một đơn đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.*

4.6.2. *Tô màu đồ thị*

Thông thường có hai bài toán tô màu một đồ thị là: tô màu các đỉnh của đồ thị và tô màu các cạnh của đồ thị. Trong chương trình này, chúng ta xét bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị.

a. Định nghĩa

Bài toán: Xác định số màu tối thiểu cần thiết để tô một bản đồ sao cho các miền kề nhau không cùng 1 màu. Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng 1 đồ thị. Để lập sự tương ứng đó, mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng 1 đỉnh của đồ thị. Nếu hai miền của bản đồ có biên giới chung thì có cạnh nối hai đỉnh tương ứng của đồ thị. Hai miền chung nhau chỉ một đỉnh không coi là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách như vậy gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ đang xét.

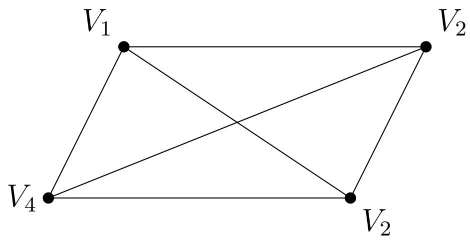
Định nghĩa 4.6.2. *Tô màu một đơn đồ thị là phép gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh liền kề nào được gán cùng màu.*

Định nghĩa 4.6.2 có thể phát biểu cách khác theo ngôn ngữ toán học là:

Định nghĩa 4.6.3. *Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị và $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ là tập n màu. Một phép tô màu đồ thị G sử dụng tập màu*

M là ánh xạ $f : V \longrightarrow M$ thỏa mãn điều kiện: với hai đỉnh liền kề bất kì $u, v \in V$ thì $f(u) \neq f(v)$. Với mỗi đỉnh v của đồ thị G ảnh của nó $f(v)$ được gọi là màu tô của đỉnh v.

Ví dụ 4.6.8. *Cho đồ thị G như hình vẽ dưới đây.*



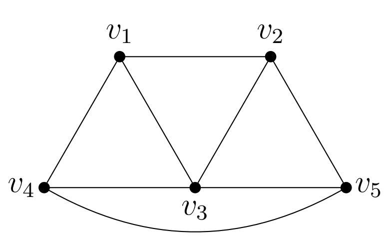
Đồ thị trên có 4 đỉnh v_1, v_2, v_3 và v_4. Giả sử tập màu $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, trong đó, m_1 là màu xanh, m_2 là màu đỏ, m_3 là màu tím, m_4 là màu vàng.

Ta xác định ánh xạ như sau:

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow & M \\ & v_1 & \longmapsto & f(v_1) = m_1 \\ & v_2 & \longmapsto & f(v_2) = m_2 \\ & v_3 & \longmapsto & f(v_3) = m_3 \\ & v_4 & \longmapsto & f(v_4) = m_4 \end{array}$$

Ta gọi f là phép tô màu cho đồ thị G. Đồ thị G trong ví dụ này sử dụng 4 màu tô.

Ví dụ 4.6.9. *Xét đồ thị sau*



Đồ thị trên có 5 đỉnh là v_1,v_2,v_3,v_4 và v_5. Giả sử tập màu $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, trong đó, m_1 là màu xanh, m_2 là màu đỏ, m_3 là màu tím.

Ta xác định ánh xạ như sau:

$$\begin{array}{rcl} f: V & \longrightarrow & M \\ v_1 & \longmapsto & f(v_1) = m_1 \\ v_2 & \longmapsto & f(v_2) = m_2 \\ v_3 & \longmapsto & f(v_3) = m_3 \\ v_4 & \longmapsto & f(v_4) = m_4 \\ v_5 & \longmapsto & f(v_5) = m_1 \end{array}$$

Đồ thị G trong ví dụ này sử dụng 3 màu tô. Câu hỏi đặt ra là số màu để tô cho đồ thị này thỏa mãn định nghĩa 4.6.2 có ít hơn 3 được hay không? Ta có thể tìm được số màu ít nhất có thể tô cho mỗi đơn đồ thị G được không? Những câu hỏi này dẫn đến định nghĩa sau:

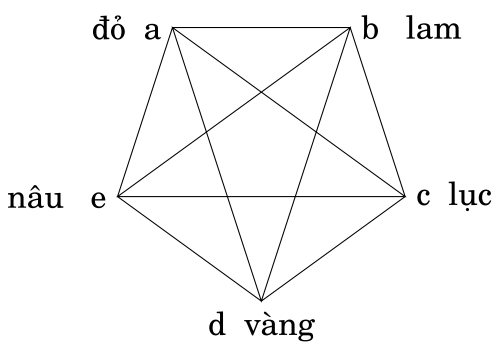
Định nghĩa 4.6.4. *Số màu của một đồ thị là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu đồ thị đó.*

Kí hiệu: χ_G hay $\chi(G)$ là số màu của đồ thị G.

b. Định lí:

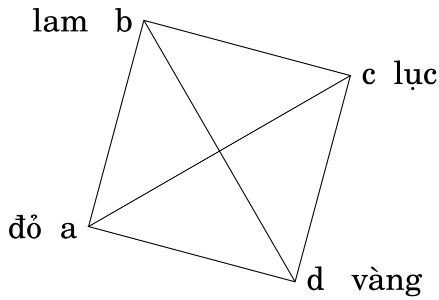
Định lý 4.6.3. *(Định lí bốn màu): Số màu của một đồ thị phẳng không lớn hơn* 4.

Ví dụ 4.6.10. *Tìm số màu của đồ thị* K_n



Giải.

Số màu của đồ thị K_4 là 4 nên ta cần dùng 4 màu để tô đồ thị K_4.



K_n $(n \geq 5)$ không phẳng

Vậy, số màu cần tô của đồ thị K_n, ($n \geq 5$) là n.

Số màu của đồ thị K_4 là 4.

Số màu của đồ thị K_3 là 3.

Số màu của đồ thị K_2 là 2

Ví dụ 4.6.11. *Tìm số màu tối thiểu của đồ thị phân đôi, đầy đủ $K_{m,n}$, với $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

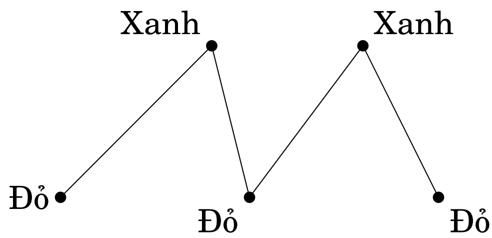
Giải.

Ta đã biết rằng đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có tập đỉnh phân thành hai tập rời nhau V_1 gồm m đỉnh và tập V_2 gồm n đỉnh và giữa hai đỉnh bất kì trong cùng tập V_1 hoặc cùng tập V_2 đều không có cạnh nối. Do đó, ta tô m đỉnh trong tập V_1 bởi một màu; tô n đỉnh của tập V_2 bởi một màu khác.

Vì mỗi cạnh chỉ nối từ 1 đỉnh thuộc tập đỉnh này đến tập đỉnh kia nên không có 2 đỉnh liền kề nào cùng màu.

Vậy, đồ thị phân đôi đầy đủ có 2 màu.

Ví dụ 4.6.12. *Đơn đồ thị phân đôi, liên thông G sau có hai màu:*



Định lý 4.6.4. *Cho G là một đơn đồ thị không tầm thường (tức là, G chứa ít nhất một cạnh). Khi đó, $\chi(G) = 2$ khi và chỉ khi G là đồ thị phân đôi.*

Chứng minh.

$\Longleftarrow$) Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị phân đôi. Khi đó, tập đỉnh v được phân thành hai tập con khác rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2. Đặt $M\{m_1, m_2\}$ là tập hai màu. Ta xét quy tắc: $f : V \longrightarrow M$ với $f(v) = m_1$ và $\forall v \in V_1$ và $f(v) = m_2$ và $\forall v \in V_2$. Do $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ nên ta suy ra nếu $v_1 = v_2$ thì $f(v_1) = f(v_2)$, tức là, f là ánh xạ. Từ định nghĩa f suy ra không có hai đỉnh liền kề nào có cùng màu. Do đó, $\chi(G) \leq 2$. Mặt khác, do G chứa ít nhất một cạnh nên $\chi(G) > 1$. Vậy $\chi(G) = 2$.

$\Longrightarrow$) Đảo lại, giả sử $\chi(G) = 2$. Điều này suy ra đồ thị G chứa ít nhất một cạnh và tồn tại hàm $f : V \longrightarrow M = \{m_1, m_2\}$ sao cho không có hai đỉnh liền kề nào có cùng ảnh.

Đặt $V_1 = \{v \in V \mid f(v) = m_1\}$ và $V_2 = \{v \in V \mid f(v) = m_2\}$. Suy ra, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ và $V_1 \cup V_2 = V$. Gọi e là cạnh có hai đỉnh là v_1 và v_2. Bởi vì v_1 và v_2 không cùng màu nên $v_1 \in V_1$ khi và chỉ khi $v_2 \in V_2$. Do đó, G là đồ thị phân đôi. □

Định nghĩa 4.6.5. *Cho G là đồ thị có các đỉnh là v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n. Bậc lớn nhất của các đỉnh là một số nguyên được kí hiệu và xác định như sau:*

$$\Delta(G) = max\{\deg(v_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Định lý 4.6.5. *Nếu G là một đơn vị đồ thị thì ta luôn có:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo số đỉnh n.

Nếu $n = 1$ thì G chỉ có 1 đỉnh, không có cạnh. Do đó $\chi(G) = 1$ và $\Delta(G) = 0$. Từ đó, suy ra

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1.$$

Giả sử định lý đúng với đơn đồ thị G có số đỉnh là $k-1$, $(k > 1, k \in \mathbb{Z})$. Tức là, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ta cần chứng minh định lý đúng với đơn đồ thị G có k đỉnh. Xét đỉnh v của đồ thị G và xây dựng đồ thị $G_1 = G\backslash\{v\}$. Đồ thị G_1 có được từ đồ thị G bằng cách xóa đi đỉnh v và tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh v. Ta có $\Delta(G_1) \leq \Delta(G)$. Đồ thị G_1 là đơn đồ thị có $k-1$ đỉnh. Theo giả thiết quy nạp ta có: $\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) + 1$. Suy ra $\chi(G_1) \leq \Delta(G) + 1$.

Do đó, G_1 có thể được tô màu hoàn toàn với nhiều nhất $\Delta(G_1) + 1$ màu. Mặt khác, đỉnh v có nhiều nhất $\Delta(G)$ đỉnh liền kề. Vì $\Delta(G) < \Delta(G)+1$ nên ta không dùng hết $\Delta(G)+1$ màu để tô cho $\Delta(G)$ đỉnh liền kề với v. Do đó, tồn tại một màu chưa được sử dụng trong $\Delta(G) + 1$ màu này tô màu cho đỉnh v.

Vậy, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. □

Ta thường sử dụng thuật toán sau để tô màu một đơn đồ thị:

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$, với tập đỉnh $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Để tô màu đơn đồ thị này, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Liệt kê các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần, chẳng hạn:

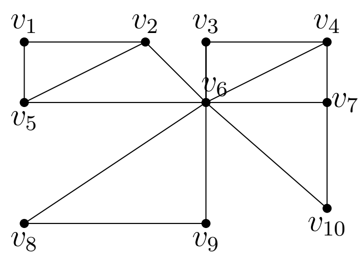
$$\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \deg(v_2) \geq \cdots \geq \deg(v_n)$$

Gán màu một cho đỉnh v_1 và cho các đỉnh tiếp theo trong danh sách mà không liền kề với đỉnh v_1. Thủ tục gán màu 1 cho các đỉnh dừng lại khi không còn đỉnh nào có thể gán màu 1 được nữa.

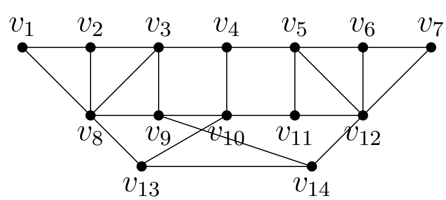
Bước 2: Tiếp tục gán màu 2 cho các đỉnh chưa được gán màu 1 trong danh sách theo cách tương tự như gán màu 1.

Do đồ thị có hữu hạn đỉnh nên sau hữu hạn bước lặp thì tất cả các đỉnh sẽ được gán màu.

Ví dụ 4.6.13. *Gán màu cho các đồ thị sau:*



(G_1)



(G_2)

Giải.

Đối với đồ thị G_1 ta lần lượt gán màu như sau: chọn màu xanh gán cho các đỉnh $\{v_1, v_6\}$, màu đỏ gán cho các đỉnh $\{v_2, v_3, v_8, v_{10}\}$. Ba đỉnh $\{v_4,\ v_5,\ v_9\}$ có các đỉnh liền kề đã có màu xanh và đỏ rồi mà ba đỉnh này không liền kề nhau nên ta gán cho chúng màu tím, đỉnh còn lại v_7 liền kề với 3 đỉnh $v_4,\ v_6,\ v_10$ có ba màu đã gán màu tím, xanh, đỏ rồi nên ta phải gán cho đỉnh này màu khác, chẳng hạn màu vàng. Vậy, đồ thị đã cho có số màu tối thiểu là 4.

Đối với đồ thị G_2, ta sẽ có cách gán màu sau:

$v_1, v_3, v_5, v_7, v_{10}, v_{14}$: Màu xanh

$v_2, v_4, v_6, v_9, v_{11}, v_{13}$: Màu đỏ

v_8, v_{12} : Màu tím

Vậy, đồ thị G_2 có số màu tối thiểu cần tô là 3 màu.

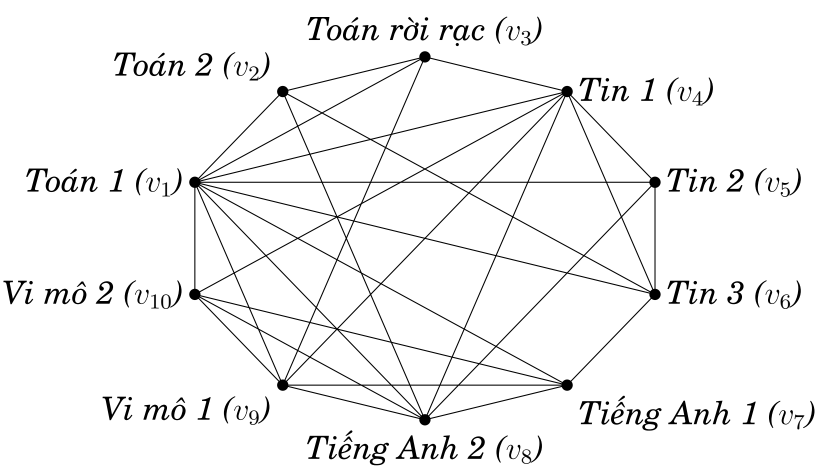
4.6.3. *Một số ứng dụng của bài toán tô màu*

Bài toán tô màu có rất nhiều ứng dụng khác nhau, chẳng hạn để xếp lịch thi, gán nhãn, phân chia tần số, vẽ bản đồ,...

Ví dụ 4.6.14. *Hãy lập lịch thi các môn Toán 1, Toán 2, Toán rời rạc, Tin 1, Tin 2, Tin 3, Tiếng Anh 1, Tiếng Anh 2 và Vi mô 1, Vi mô 2 thỏa mãn các điều kiện:*

+ Số ca thi là ít nhất

+ Không có sinh viên nào có hai môn bị trùng ca thi.



Biết rằng không có sinh viên nào thi cả môn Tin 3 và Toán rời rạc, không có sinh viên nào thi cả Tin 3 và Vi mô 2, không có sinh viên nào thi cả Tiếng Anh 2 và Toán rời rạc, nhưng có sinh viên thi tất cả các tổ hợp còn lại.

Giải.

Bài toán đã cho quy về bài toán tô màu của đồ thị. Do đỉnh v_1 liền kề với tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị nên ta sẽ gán cho v_1 một màu, chẳng hạn màu xanh. Khi đó, các đỉnh còn lại không có đỉnh nào có màu xanh. Ta chọn màu đỏ gán cho các đỉnh v_2, v_4, v_7 màu đỏ, các đỉnh v_3, v_5, v_{10} được gán cho màu tím và hai đỉnh v_6, v_8 ta gán màu vàng. Đỉnh v_9 còn lại liền kề với các đỉnh có màu xanh, đỏ, tím, vàng nên ta cần gán cho nó màu mới, chẳng hạn màu hồng.
Vậy, đồ thị đã cho có 5 màu.

Từ kết quả tô màu ta phân lịch các ca thi như sau:

Ca thi	**Môn thi**
Ca 1	Toán 1
Ca 2	Vi mô 1
Ca 3	Toán 2, Tin 1, Tiếng Anh 1
Ca 4	Toán rời rạc, Tin 2, Vi mô 2
Ca 5	Tin 3, Tiếng Anh 2

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 4

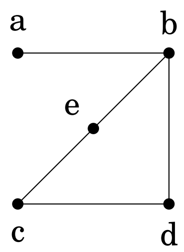
Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Đồ thị	Graphs
Đơn đồ thị	Simple graph
Đa đồ thị	Multigraph
Giả đồ thị	Pseudograph
Đồ thị có hướng	Simple directed graph
Đa đồ thị có hướng	Directed Multigraph
Đồ thị đầy đủ K_n	Complete graph
Đồ thị vòng C_n	Cycle graph
Đồ thị bánh xe W_n	Wheel graph
Đồ thị lập phương Q_n	n-cube graph
Đồ thị phân đôi	Bipartite Graph
Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$	CompleteBipartite Graph
Đỉnh cô lập	Isolated vertex
Đỉnh treo	Pendant vertex
Định lý bắt tay	The handshaking theorem
Đồ thị con	Subgraph
Danh sách liền kề	Adjacency list
Ma trận liền kề	Adjacency matrix
Ma trận liên thuộc	Incidence matrix
Các đơn đồ thị đẳng cấu	Isomorphic simple graphs
Đường đi	Walk
Đường đi có hướng	Directed walk
Đường đi đơn	Simple walk or Trail
Đường đi sơ cấp	Path
Chu trình	Circuit
Chu trình đơn	Simple curcuit
Chu trình sơ cấp	Cycles
Đồ thị liên thông	Connected graph
Đường đi Euler	Euler path
Chu trình Euler	Euler circuit

Đường đi Hamilton	Hamilton path
Chu trình Hamilton	Hamilton circuit
Đồ thị có trọng số	Weighted graph
Bài toán đường đi ngắn nhất	Shortest-path problem
Thuật toán Dijkstra	Dijkstra's algorithm
Đồ thị phẳng	Planar graph
Miền biểu diễn phẳng của đồ thị	Regions of a representation of a planar graph
Công thức Ơle	Euler's formula
Tô màu bản đồ	Map coloring
Tô màu đồ thị	Graph coloring
Đồ thị đối ngẫu	Dijkstra Algorithm
Số màu đồ thị	Chromatic number
Định lý Kuratowski	Kuratowski's theorem
Định lý bốn màu	The four color theorem

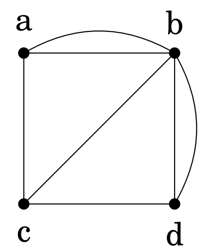
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

CÁC KHÁI NIỆM VỀ ĐỒ THỊ VÀ CÁC LOẠI ĐỒ THỊ

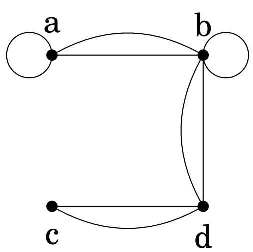
Bài 4.1: Cho các đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng sau:



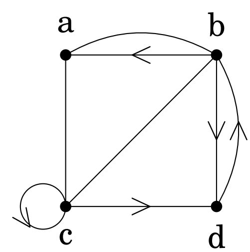
(G_1)



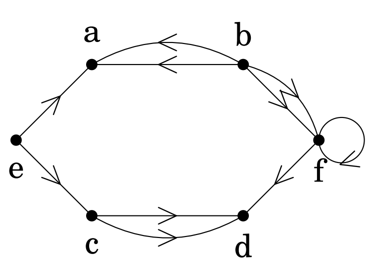
(G_2)



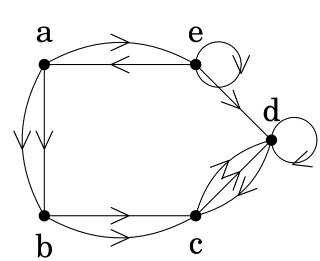
(G_3)



(G_4)



(G_5)

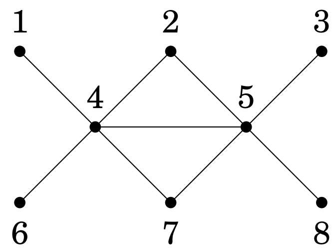


(G_6)

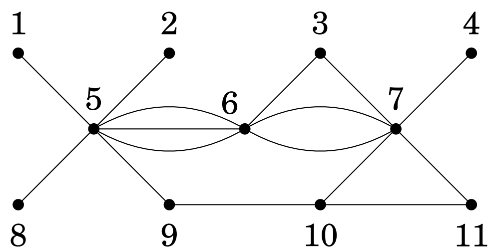
a) Trong các đồ thị trên, hãy chỉ ra đồ thị nào là đơn đồ thị? Đơn đồ thị có hướng? Đa đồ thị? Đa đồ thị có hướng?

b) Trong các đồ thị vô hướng đã cho không là đơn đồ thị, hãy tìm các cạnh mà nếu bỏ đi chúng sẽ nhận được đơn đồ thị.

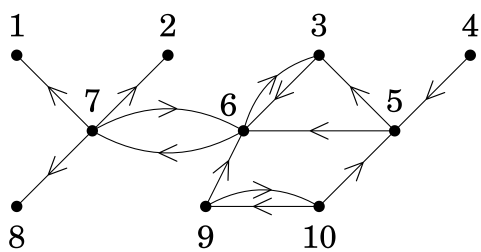
Bài 4.2: Cho các mạng máy tính có dạng đồ thị H_1, H_2, H_3. Mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, cạnh nối hai đỉnh là đường truyền thông giữa hai trung tâm máy tính ở hai đỉnh đó.



H_1



H_2



H_3

Ba mạng trên thuộc dạng đồ thị loại nào? Hãy nêu ý nghĩa của mỗi mạng đó.

Bài 4.3: Vẽ các đồ thị vô hướng có ma trận liền kề sau và đọc tên các đồ thị đó:

$$\text{a) } A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{b) } B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bài 4.4:

a) Tổng tất cả các phần tử trên một dòng của ma trận liền kề của đồ thị vô hướng bằng bao nhiêu?

b) Tổng tất cả các phần tử trên một dòng của ma trận liền kề của đồ thị có hướng bằng bao nhiêu?

Bài 4.5:

a) Tổng tất cả các phần tử trên một cột của ma trận liền kề của đồ thị vô hướng bằng bao nhiêu?

b) Tổng tất cả các phần tử trên một cột của ma trận liền kề của đồ thị có hướng bằng bao nhiêu?

Bài 4.6: Biểu diễn ma trận liền kề của mỗi đồ thị sau:

a) K_4 b) $K_{1,4}$ c) $K_{2,3}$

d) C_4 e) W_4 f) Q_3

Bài 4.7: Tìm số các đường đi độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của đồ thị đầy đủ K_n, biết giá trị của n là:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Bài 4.8: Tìm số các đường đi độ dài n giữa hai đỉnh không liền kề của đồ thị $K_{3,3}$ nếu n là

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Bài 4.9: Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị. Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên tập đỉnh V gồm các cặp đỉnh (u, v) sao cho tồn tại đường đi từ u

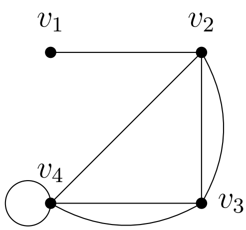
tới v hoặc $u = v$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

Bài 4.10: Giả sử rằng v là một đỉnh của cạnh cắt của một đơn đồ thị. Chứng minh rằng v là một đỉnh cắt nếu và chỉ nếu nó không là đỉnh cô lập (đỉnh treo).

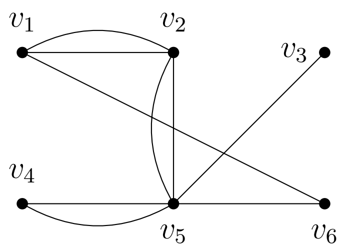
Bài 4.11: Chứng minh rằng một đơn đồ thị với số đỉnh lớn hơn hay bằng 2 thì có ít nhất hai đỉnh không là đỉnh cắt.

Bài 4.12*: Chứng minh rằng nếu đơn đồ thị G có k thành phần liên thông và mỗi thành phần liên thông này lần lượt có số đỉnh là n_1, n_2, $\ldots$, n_{k-1}, n_k, thì số các cạnh của G không vượt quá: $\sum\limits_{i=1}^{k} C_{n_i}^2$.

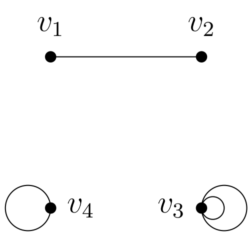
Bài 4.13: Tìm bậc của mỗi đỉnh trong các đồ thị sau:



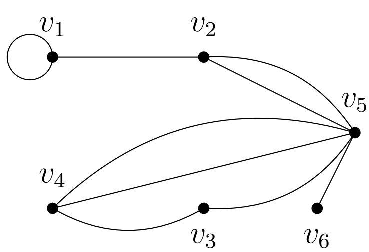
(a)



(b)

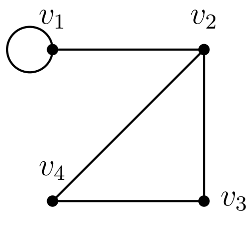


(c)

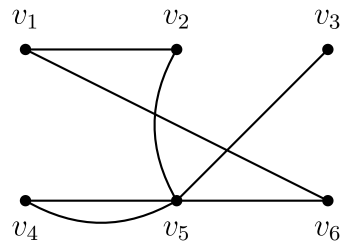


(d)

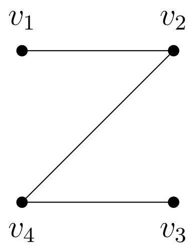
Bài 4.14: Xác định đồ thị nào trong các đồ thị sau là đơn đồ thị:



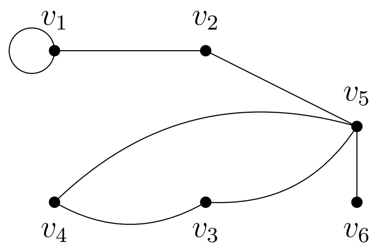
(a)



(b)



(c)



(d)

Bài 4.15: Vẽ đồ thị vô hướng có các đỉnh với dãy bậc tương ứng là 0, 3, 4, 4, 5, 5, 5.

Bài 4.16: Vẽ đồ thị có các tính chất đã cho hoặc giải thích tại sao khi không tồn tại tính chất đó.

a) Đơn đồ thị năm đỉnh, mỗi đỉnh bậc 2

b) Đơn đồ thị với các đỉnh có bậc là 1 dãy 3, 3, 3, 3, 4.

c) Đồ thị có 6 cạnh và các đỉnh có bậc là 1, 2, 3, 4, 6.

Bài 4.17: Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có bậc của các đỉnh là 5, 2, 2, 2, 2, 1? Vẽ đồ thị đó.

Bài 4.18: Có tồn tại hay không một đơn đồ thị với 5 đỉnh và có bậc sau? Nếu tồn tại, hãy vẽ các đồ thị đó.

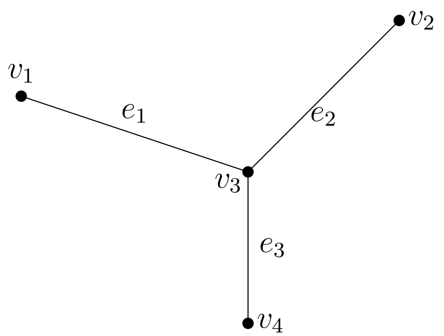
a) $3, 3, 3, 3, 2$ b) $1, 2, 3, 4, 5$
c) $1, 2, 3, 4, 4$ d) $3, 4, 3, 4, 3$
e) $0, 1, 2, 2, 3$ f) $1, 1, 1, 1, 1$

<u>Bài 4.19</u>: Có tồn tại hay không một đơn đồ thị với 6 đỉnh và có bậc sau? Nếu tồn tại, hãy vẽ các đồ thị đó.

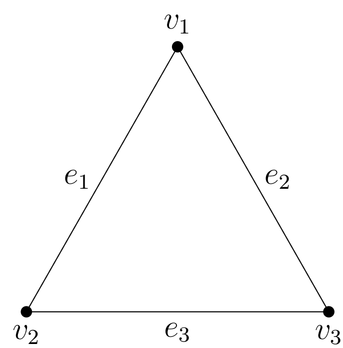
a) $0, 1, 2, 3, 4, 5$	b) $1, 2, 3, 4, 5, 6$
c) $2, 2, 2, 2, 2, 2$	d) $3, 2, 3, 2, 3, 2$
e) $3, 2, 2, 2, 2, 3$	f) $1, 1, 1, 1, 1, 1$
g) $3, 3, 3, 3, 3, 5$	h) $1, 2, 3, 4, 5, 5$

<u>Bài 4.20</u>: Có bao nhiêu đỉnh trong một đồ thị với 20 cạnh nếu mỗi đỉnh có bậc 5?

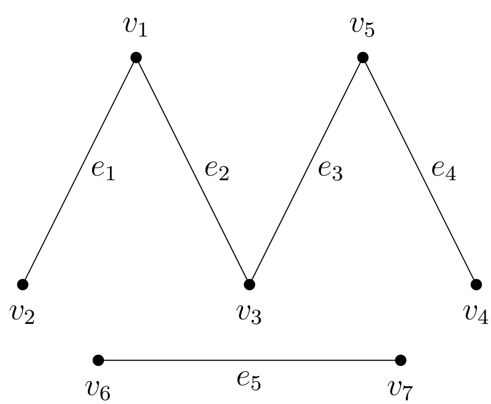
<u>Bài 4.21</u>: Đồ thị nào trong các đồ thị sau là đồ thị phân đôi?



(a)

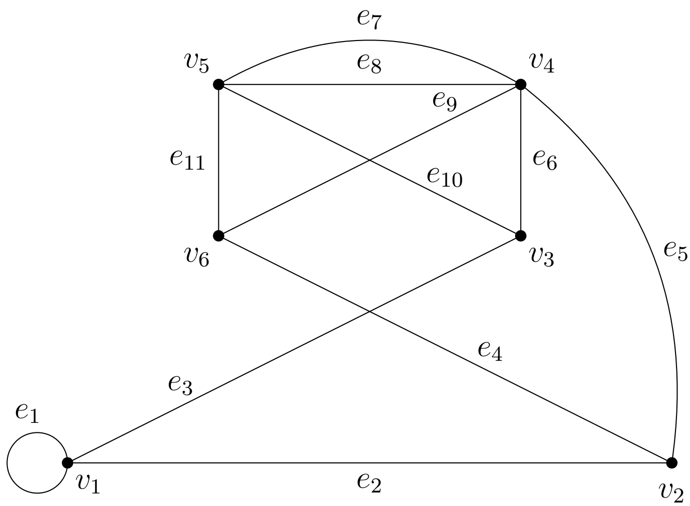


(b)

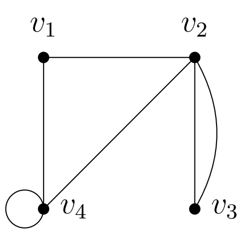


(c)

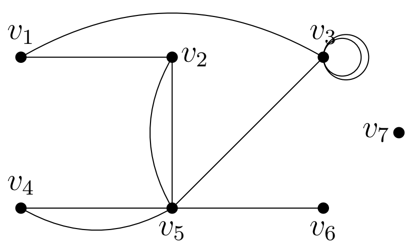
Bài 4.22: Tìm ba đồ thị con của đồ thị sau:



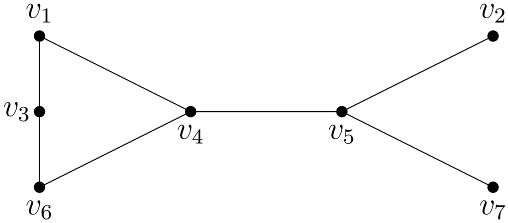
Bài 4.23: Liệt kê bậc của các đỉnh trong các đồ thị sau và tìm số đỉnh bậc lẻ.



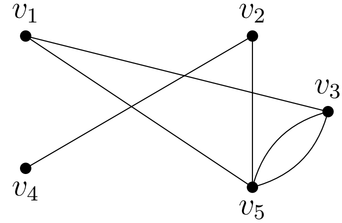
(a)



(b)



(c)



(d)

Bài 4.24: Viết dãy các bậc của các đồ thị trong bài tập 16.

Bài 4.25: Vẽ đồ thị vô hướng với dãy bậc của các đỉnh là $1, 1, 4, 6, 6$.

Bài 4.26: Vẽ đồ thị vô hướng có 5 đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sao cho $\deg(v_1) = 3$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 3$, $\deg(v_5) = 2$ và v_1, v_2 là hai đỉnh liền kề với v_5.

Bài 4.27: Vẽ đơn đồ thị với 5 đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sao cho $\deg(v_1) = 3$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 3$, $\deg(v_5) = 2$ và v_1, v_2 là hai đỉnh liền kề với v_5.

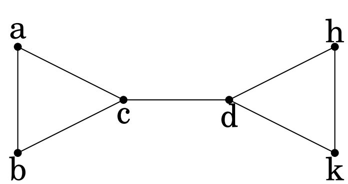
Bài 4.28: Chứng minh rằng: Nếu bậc mỗi đỉnh của đồ thị G đều lớn hơn hay bằng 2 thì G chứa một chu trình.

Bài 4.29: Chứng minh rằng một đơn đồ thị với n đỉnh và m thành phần liên thông có nhiều nhất $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}$ cạnh.

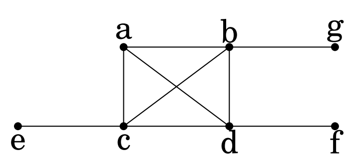
Bài 4.30: Cho G là một đồ thị liên thông với số đỉnh $n \geq 2$. Chứng minh tính chất: Nếu số cạnh của đồ thị G bé hơn số đỉnh của nó thì đồ thị G có một đỉnh bậc 1.

ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

Bài 4.31: Cho các đồ thị



(G_1)



(G_2)

Đồ thị (G_1) và (G_2) có đường đi Hamilton và chu trình Hamilton không? Nếu có thì vẽ đường đi Hamilton và chu trình Hamilton đó. Nếu không thì giải thích vì sao?

Bài 4.32: Với giá trị nào của m và n thì đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{n,m}$ có chu trình Hamilton?

Bài 4.33: Chứng minh rằng đồ thị phân đôi đầy đủ với các số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton.

Bài 4.34: Đồ thị đầy đủ n đỉnh kí hiệu là K_n $(n \geq 1)$. Chứng minh rằng đồ thị K_n $(n \geq 3)$ có chu trình Hamilton.

Bài 4.35: Với giá trị nào của n thì các đồ thị sau có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler.:

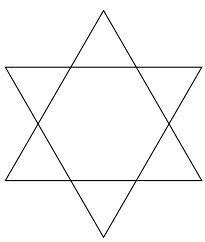
a) K_n (đồ thị đầy đủ n đỉnh)

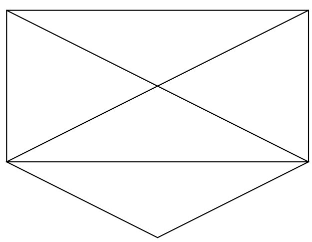
b) C_n (đồ thị chu trình n đỉnh)

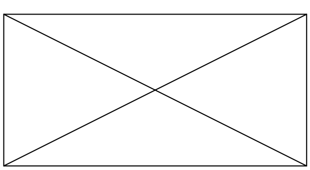
c) W_n (đồ thị bánh xe n đỉnh)

d) Q_n (đồ thị khối n, có 2^n cạnh và mỗi đỉnh đều bậc n).

Bài 4.36: Có thể vẽ bức tranh bằng một nét liền, không nâng bút khỏi giấy đối với ba hình dưới đây được hay không và giải thích vì sao?







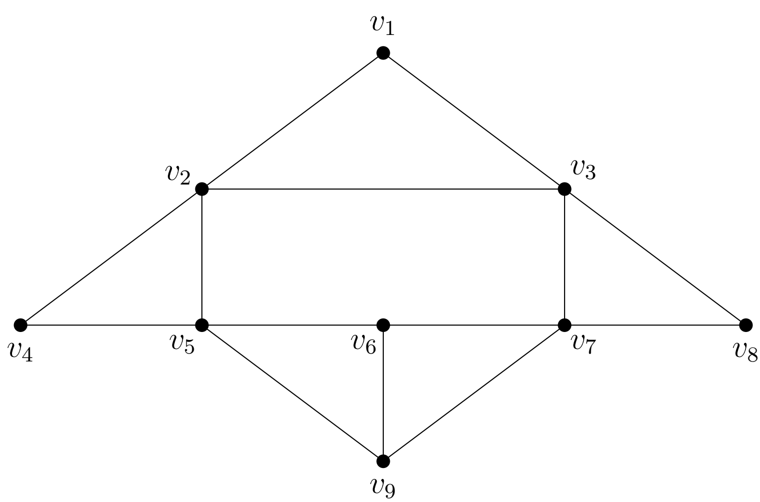
Bài 4.37: Một nước có 10 thành phố. Hãy thiết lập một mạng cầu hàng không sao cho:

a) Mỗi thành phố có cầu hàng không nối trực tiếp với đúng 3 thành phố khác.

b) Từ mỗi thành phố có cầu hàng không đi tới một thành phố tùy ý sao cho trên đường hành trình tới đích có thể đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đi qua đúng một lần.

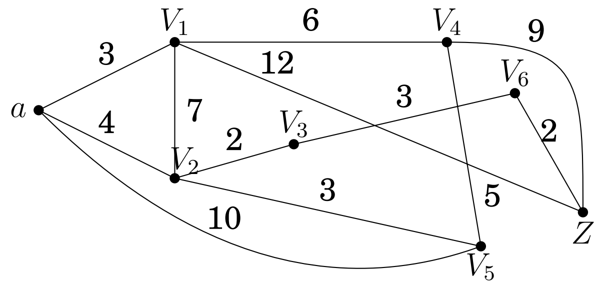
ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Bài 4.38: Bản đồ thành phố mà người đưa thư cần phải đi qua được biểu diễn bởi đồ thị sau:



Người đưa thư xuất phát từ đỉnh v_6 lần lượt đi qua tất cả các địa điểm của thành phố (các đỉnh của đồ thị) để đưa thư rồi quay về nơi xuất phát. Hãy chỉ ra đường ngắn nhất của người đưa thư với giả thiết độ dài mỗi cạnh là như nhau.

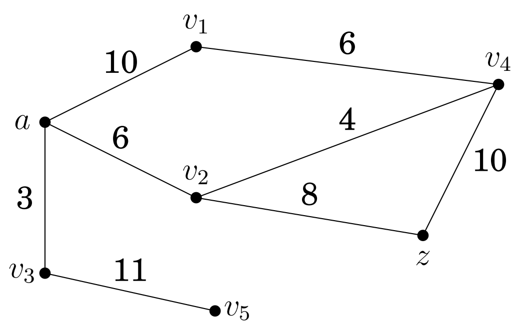
Bài 4.39: a) Tìm ma trận trọng số của đồ thị sau:

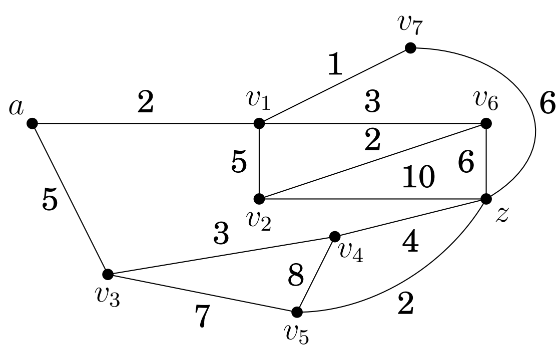


b) Tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z. Chỉ ra một đường đi ngắn nhất đó.

Bài 4.40:

a) Tìm ma trận trong số các đồ thị sau:

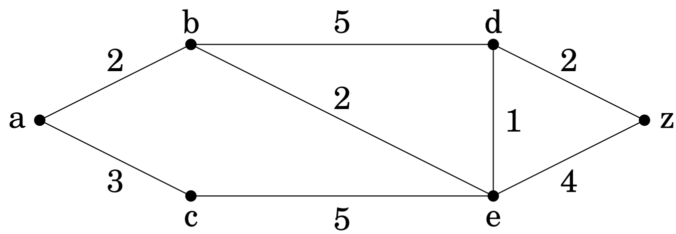




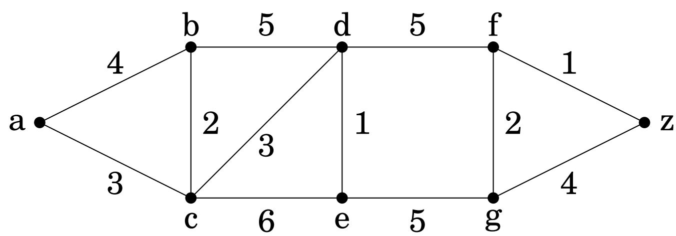
b) Sử dụng thuật toán Dijkstra để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh z trong các đồ thị trên.

Bài 4.41: Sử dụng thuật toán Dijkstra để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh z trong các đồ thị sau:

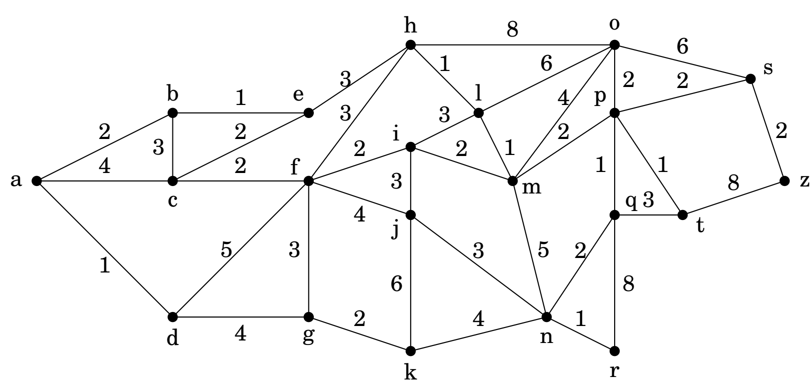
a)



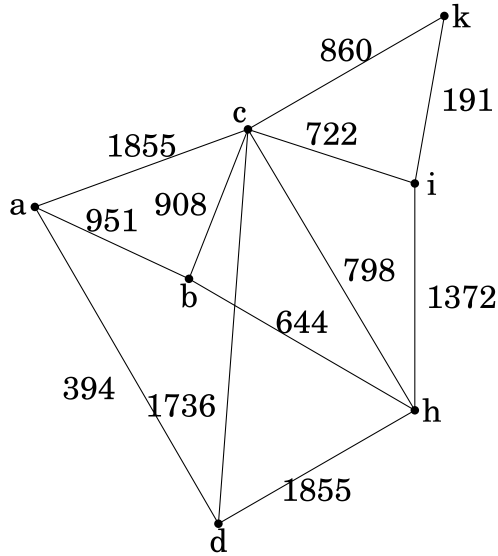
b)



c)



Bài 4.42: Cho đồ thị có trọng số về mô hình mạng máy tính cục bộ



Trong đó, mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, trọng số của cạnh là độ dài (tính ra mét) giữa hai trung tâm máy tính tương ứng. Tìm đường đi ngắn nhất từ:

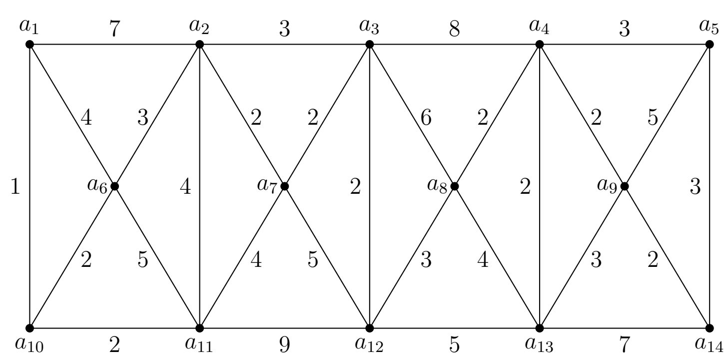
a) Trung tâm máy tính k đến trung tâm máy tính d.

b) Trung tâm máy tính i đến trung tâm máy tính a.

c) Trung tâm máy tính h đến trung tâm máy tính a.

c) Trung tâm máy tính b đến trung tâm máy tính i.

Bài 4.43: Cho đồ thị có trọng số sau:



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a_1 đến a_{14}.

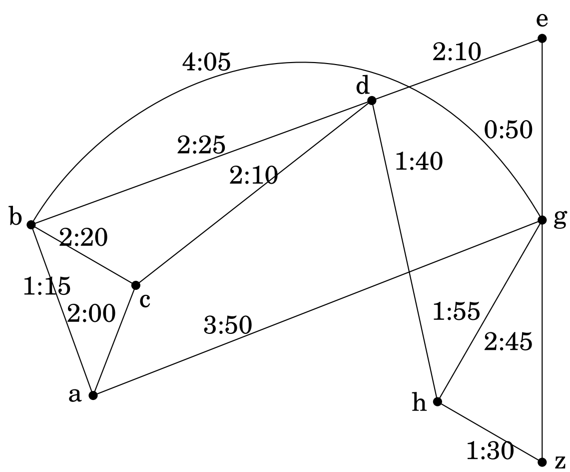
Bài 4.44: Cho đồ thị có trọng số dùng để lập mô hình hệ thống hàng không, ở đây mỗi đỉnh là một thủ đô của một quốc gia nào đó. Cạnh nối giữa hai đỉnh là đường bay giữa hai thủ đô của hai quốc gia tương ứng. Trọng số của cạnh là thời gian bay giữa 2 thủ đô của hai nước này. Hãy tìm đường bay có giờ bay ít nhất giữa các đỉnh theo mô hình đồ thị sau:

a) Thủ đô g đến thủ đô a.

b) Thủ đô e đến thủ đô b.

c) Thủ đô h đến thủ đô c.

d) Thủ đô a đến thủ đô z.



ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU

Bài 4.45: Trong một đơn đồ thị phẳng liên thông, chứng tỏ rằng tồn tại một đỉnh v sao cho $\deg(v) \leq 5$.

Bài 4.46: Chứng minh rằng: Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có n_e cạnh và n_v đỉnh với $n_v \geq 3$ và không có chu trình đơn độ dài 3 thì $n_e \leq 2n_v - 4$.

Bài 4.47*: Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với n_e cạnh và n_v đỉnh không chứa chu trình đơn độ dài 4 hoặc bé hơn. Chứng minh rằng: $n_e \leq \frac{5n_v-10}{3}$ nếu $n_v \geq 4$.

Bài 4.48: Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau có tính chất: Khi di chuyển một đỉnh bất kì và các cạnh liên thuộc với đỉnh đó thì ta được một đồ thị phẳng?

a) K_5 b) K_6 c) $K_{3,3}$ d) $K_{3,4}$

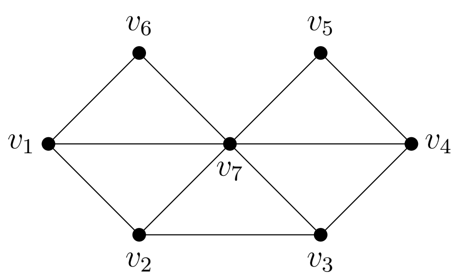
Bài 4.49: Cho chu trình $\mathcal{C}_6$. Hãy tìm $\chi(\mathcal{C}_6)$

Bài 4.50: Cho chu trình $\mathcal{C}_7$. Hãy tìm $\chi(\mathcal{C}_7)$

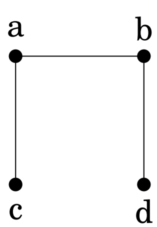
Bài 4.51: Cho đồ thị đầy đủ K_n. Hãy tìm $\chi(K_n)$

Bài 4.52: Cho đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{2,3}$. Hãy tìm $\chi(K_{2,3})$.

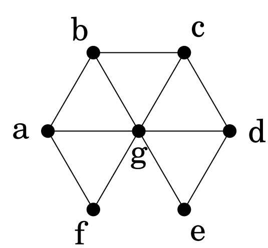
Bài 4.53: Tìm $\chi(G)$ của đồ thị G sau:



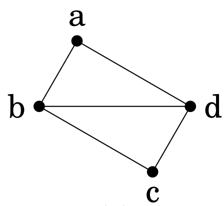
Bài 4.54: Tìm số màu tối thiểu cần tô cho các đồ thị sau:



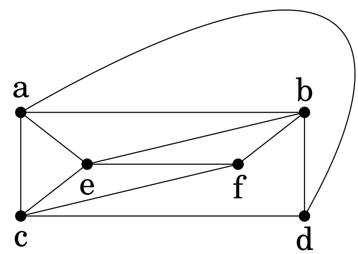
(a)



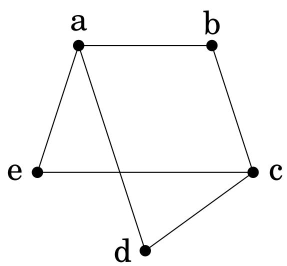
(b)



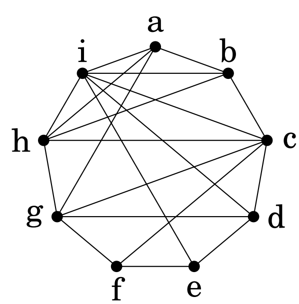
(c)



(d)



(e)

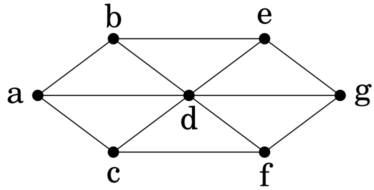


(g)

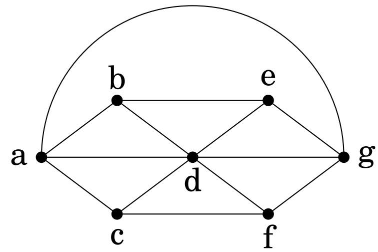
Bài 4.55: Hãy lập lịch thi các môn Toán 115, Toán 116, Toán 185, Toán 195, CS101, CS102, CS273 và CS473 (CS-Tin học) với số ít nhất các đợt thi, nếu không có sinh viên nào thi cả hai môn Toán 115 và CS473, Toán 116 và CS473, Toán 195 và CS 101, Toán 195 và CS 102, Toán 115 và Toán 116, Toán 115 và Toán 185, Toán 185 và Toán 195, nhưng có sinh viên thi trong một tổ hợp khác của các môn.

Bài 4.56: Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loài thú sẽ ăn thịt các con thú khác nếu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng tự nhiên này?

Bài 4.57: Cho hai đồ thị G_1 và G_2 dưới đây:



(G_1)



(G_2)

Tìm $\chi(G_1)$ và $\chi(G_2)$.

Bài 4.58: Tìm $\chi(K_{m,n})$ của đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$.

Bài 4.59: Chứng minh rằng

$$\chi(\mathcal{C}_n) = \begin{cases} 2 & \text{nếu} \quad n = 2k \\ 3 & \text{nếu} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (\text{với mọi } n \geq 3)$$

Bài 4.60: Tìm $\chi(W_n)$, trong đó W_n là đồ thị bánh xe với $n+1$ đỉnh ($n \geq 3$).

Bài 4.61: Có tồn tại hay không đơn đồ thị phẳng liên thông với 35 đỉnh và 100 cạnh? Vì sao?

Bài 4.62: Cho G là một đơn đồ thị. Chứng minh rằng $\chi(G)$ khi và chỉ khi G có một chu trình lẻ.

Bài 4.63: Chứng minh rằng một đơn đồ thị có chu trình và có số lẻ các đỉnh không thể tô bằng hai màu.

Bài 4.64: Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông. Chứng minh rằng số màu tối thiểu của G là $\chi(G) \leq 6$.

Chương 5

CÂY

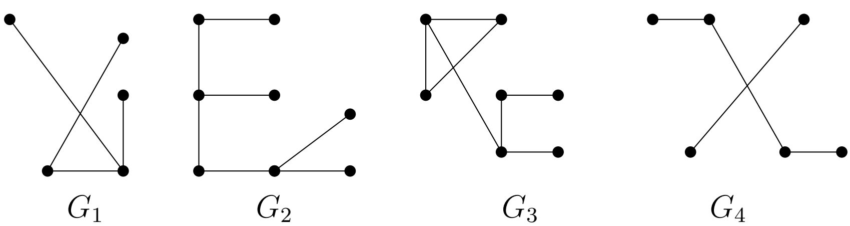
Trong chương này, chúng ta nghiên cứu một loại quan hệ đặc biệt hữu ích trong nhiều ứng dụng sinh học, khoa học máy tính và thường được biểu thị bằng biểu đồ của nó. Những mối quan hệ này rất cần thiết cho việc xây dựng cơ sở dữ liệu và trình biên dịch ngôn ngữ, đây là hai lĩnh vực quan trọng trong khoa học máy tính. Chúng được gọi là cây hoặc đôi khi gọi là cây có gốc, vì vẻ ngoài của chúng.

5.1. MỞ ĐẦU VỀ CÂY

5.1.1. *Khái niệm về cây*

Định nghĩa 5.1.1. *Cây đồ thị (hay gọi tắt là cây) là một đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình đơn.*

Ví dụ 5.1.1.



Các đồ thị G_1 và G_2 là cây.

Đồ thị G_3 không là cây vì G_3 có chu trình đơn.

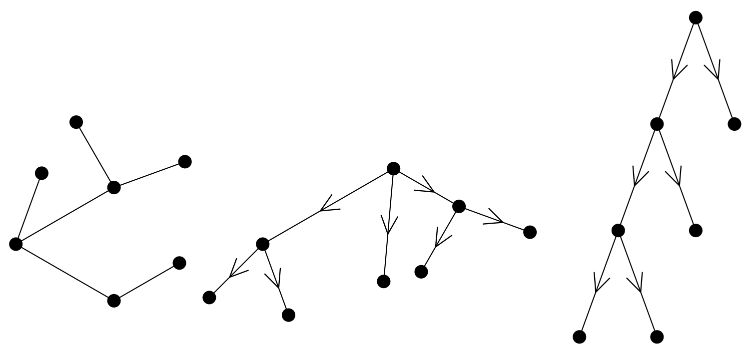
Đồ thị G_4 không là cây vì G_4 không liên thông.

Định lý 5.1.1. *Đồ thị vô hướng là một cây nếu giữa mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại một đường đi đơn duy nhất.*

Một điểm đặc biệt của cây gọi là đỉnh gốc. Khi xác định điểm gốc ta gán cho mỗi cạnh một hướng từ gốc đi ra.

Cây cùng với gốc sinh ra một đồ thị có hướng gọi là cây có gốc.

Giả sử T là cây có gốc, v là một đỉnh khác gốc của T. Ta gọi đỉnh u là cha của v hay v là con của u nếu có một cạnh duy nhất có hướng từ u đến v.



Các đỉnh có cùng cha gọi là anh em.

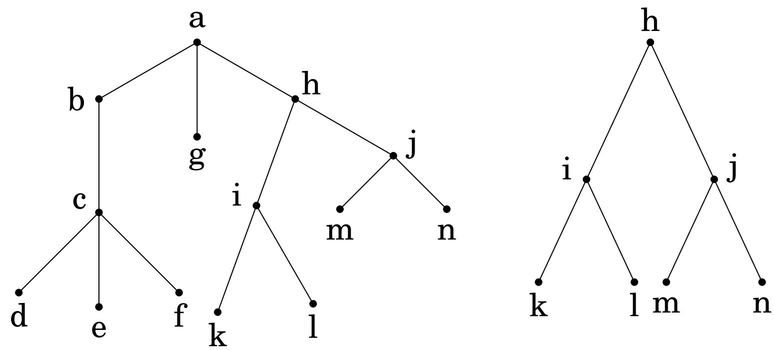
Tổ tiên của một đỉnh khác với gốc là các đỉnh trên đường đi từ gốc tới đỉnh này (tức là cha, ông của nó, ...).

Con cháu của đỉnh v là các đỉnh mà nhận v là tổ tiên.

Các đỉnh của cây gọi là lá nếu nó không có con.

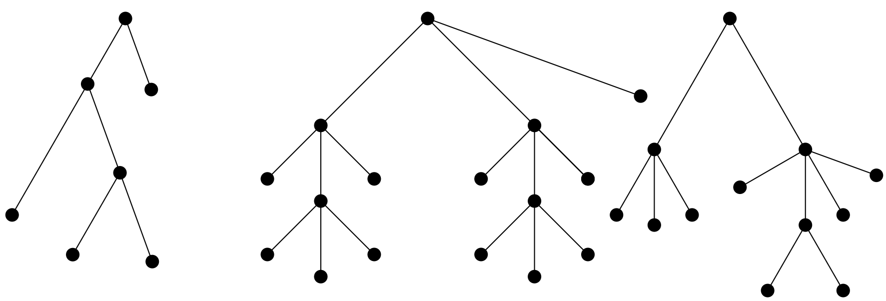
Các đỉnh của cây có con gọi là đỉnh trong.

Ví dụ 5.1.2.



Định nghĩa 5.1.2. *Cây có gốc được gọi là cây $m-$phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó không có hơn m con. Cây được gọi là $m-$phân đầy đủ nếu mọi đỉnh trong có đúng m con. Cây $2-$phân được gọi là cây nhị phân.*

Ví dụ 5.1.3.



T_1 là cây nhị phân đầy đủ

T_2 là tam phân đầy đủ

T_3 không là cây $m-$phân đầy đủ

Cây có gốc được sắp (hay có thứ tự) là cây có gốc trong đó các con của mỗi đỉnh trong được sắp xếp theo một thứ tự nhất định.

Trong cây nhị phân có thứ tự, các đỉnh trong có 2 con, con thứ nhất là con bên trái, con thứ 2 là con bên phải.

5.1.2. *Tính chất của cây*

Định lý 5.1.2. *Cây n đỉnh có đúng $n-1$ cạnh.*

Định lý 5.1.3. *Cây $m-$phân đầy đủ với i đỉnh trong sẽ có tất cả $n = m \cdot i + 1$ đỉnh.*

Định lý 5.1.4. *Cây $m-$phân đầy đủ với*

i. *n đỉnh có $i = \frac{n-1}{m}$ đỉnh trong và $l = \frac{(m-1)\cdot n+1}{m}$ lá.*

ii. *i đỉnh trong có $n = m \cdot i + 1$ đỉnh và $l = (m-1)i + 1$ lá.*

iii. *có $n = \frac{m \cdot l - 1}{m-1}$ đỉnh và $i = \frac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.*

Định lý 5.1.5. *Nếu cây $m-$phân có độ cao h thì nó có nhiều nhất m^h lá trong.*

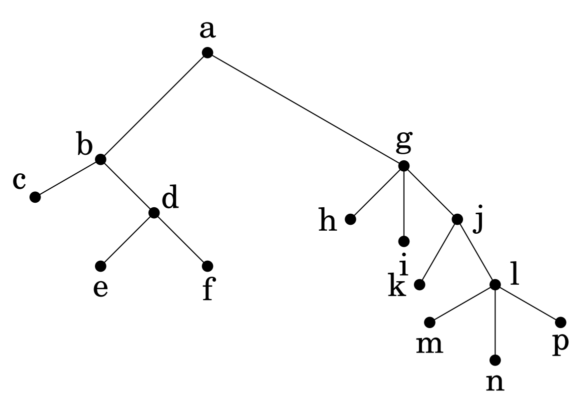
Mức của đỉnh v trong cây có gốc là độ dài của đường đi duy nhất từ gốc tới v.

Mức của gốc biểu thị bằng số 0.

Độ cao của cây là mức cao nhất của tất cả các đỉnh của cây đó.

Cây cân đối là cây có gốc mà cây con tại mỗi đỉnh có đường đi và độ dài như nhau.

Ví dụ 5.1.4. *Cho cây đồ thị*



Ta có:

Mức của các đỉnh b và g là 1

Mức của các đỉnh c, d, h, i, j là 2

Độ cao của cây là 5

Hệ quả 5.1.1. *Nếu cây $m-$phân có độ cao h và có l lá thì $h \geq \lceil log_m l \rceil$. Nếu cây $m-$phân đó là đầy đủ và cân đối thì $h = \lceil \log_m l \rceil$ (số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng $\log l$).*

5.1.3. *Một số loại cây*

a. Cây tìm kiếm nhị phân

Cây tìm kiếm nhị phân là một cây nhị phân trong đó mỗi con của một đỉnh hoặc là con bên phải hoặc là con bên trái, không có đỉnh nào có hơn một con bên phải hay hơn một con bên trái và mỗi đỉnh được gán một khóa (mỗi giá trị của khóa xác định được một phần tử), các đỉnh được gán khóa theo nguyên tắc: Khóa của một đỉnh lớn hơn khóa tất cả các đỉnh thuộc cây con bên trái và nhỏ hơn tất cả các đỉnh thuộc cây con bên phải của nó.

Để định vị một phần tử ta thêm nó vào cây tìm kiếm nhị phân. Vị trí của một phần tử sẽ xác định được nếu nó có ở trong cây.

Tiếp theo, chúng ta sẽ miêu tả thuật toán tìm kiếm và thuật toán chèn. Hàm tìm kiếm sẽ tìm một đối tượng nào đó trong cây tìm kiếm nhị phân cho trước. Nếu đối tượng được tìm thấy hàm sẽ cho giá trị đúng, ngược lại sẽ có giá trị sai. Chúng ta sẽ bắt đầu với cây có gốc. Giả sử gốc của cây chúng ta đang xét trùng với gốc của cây tìm kiếm nhị phân. Nếu cây nhị phân khác rỗng, trước tiên chúng ta so sánh đối tượng tìm kiếm với gốc. Nếu chúng giống nhau thì thuật toán dừng lại. Ngược lại, nếu đối tượng tìm kiếm nhỏ hơn gốc thì chúng ta lần lượt duyệt từ cây con bên trái rồi đến cây con bên phải. Chúng ta lặp lại quá trình này cho đỉnh tiếp theo. Nếu đối tượng tìm kiếm có trong cây tìm kiếm nhị phân thì việc tìm kiếm của chúng ta kết thúc ở đỉnh chứa đối tượng tìm kiếm. Ngược lại, nếu đối tượng cần tìm không có trong cây tìm kiếm nhị phân thì việc tìm kiếm kết thúc với cây con bằng rỗng. Vậy, thuật toán tìm kiếm nhị phân tổng quát như sau:

Thuật toán tìm cây tìm kiếm nhị phân

Input: root - cũng coi như là gốc của cây tìm kiếm nhị phân

searchItem - đối tượng cần tìm kiếm

Output: Trả lời Return true nếu searchItem là cây, ngược lại trả lời Return false

Function search (root, searchItem)

Begin

current:= root;

While current khác 0 **do**

If nhãn của current = searchItem **then**

Return true;

Else

If nhãn current > searchItem **then**

current := cây con bên trái của cây hiện tại; sau đó ta tiếp tục xét cây con bên trái của cây con tìm được

else

current := cây con bên phải của cây hiện tại; sau đó tiếp tục xét cây con bên phải của cây con tìm được

Return false

End

Sau khi chèn một đối tượng vào cây tìm kiếm nhị phân, kết quả cây nhị phân này vẫn là cây tìm kiếm nhị phân. Để chèn một đối tượng, trước tiên ta cần tìm cây tìm kiếm nhị phân và tìm vị trí để chèn đối tượng mới vào. Sau đó, ta thực hiện thuật toán chèn đối tượng mới vào vị trí đã được xác định. Thuật toán tìm vị trí để chèn đối tượng mới tương tự như thuật toán tìm kiếm nhị phân. Bây giờ, chúng ta trình bày thuật toán chèn các đối tượng vào cây tìm kiếm nhị phân.

Thuật toán 5.1.1 Thuật toán chèn vào cây nhị phân

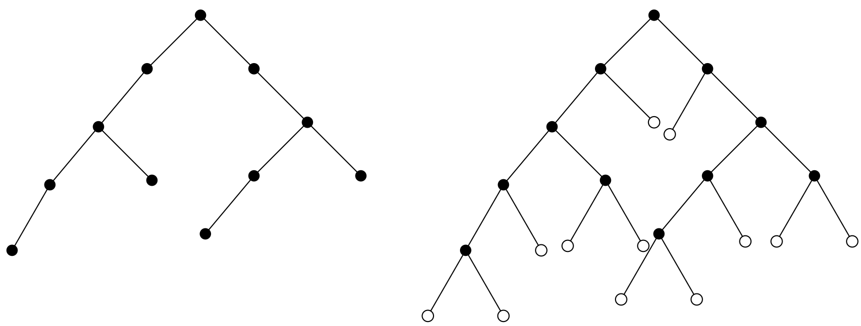
Input: $root-$ cũng coi như gốc của cây nhị phân
$insertItem-$ là đối tượng được chèn vào cây nhị phân

Output: $root-$ là gốc của cây nhị phân sau khi chèn đối tượng $insertItem$

procedure $InsertBinSearchTree(root, insertItem)$
  begin
    Tạo đỉnh mới: $newVertex$ và chép $insertItem$ vào $newVertex$
    if $root$ bằng không **then**
      begin
        cây là rỗng;
        $root := newVertex;$
      end
    else
      begin
        $trailcurrent = current;$
        if nhãn của $current = insertItem$ **then**
          begin
            in "lỗi: không thể chèn đối tượng trùng nhau";
            return ;
          end
      end
    if nhãn của $current > insertItem$ **then**
      $current :=$ con bên trái của $current;$
    else

```
            current := con bên phải của current;
        chèn đối tượng mới vào cây tìm kiếm nhị phân
        if nhãn của trailcurrent > insertItem then
            Con bên trái của trailcurrent := newVertex;
        else
            Con bên phải của trailcurrent := newVertex;
    end
```

Ví dụ 5.1.5. *Cho cây đồ thị*



Hình bên phải là một cây tìm kiếm nhị phân đầy đủ được tạo ra từ cây bên trái bằng cách bổ sung thêm các đỉnh.

b. Cây quyết định

Cây có gốc trong đó mỗi đỉnh trong tương ứng với một quyết định và mỗi cây con tại đỉnh này ứng với mỗi một kết cục có thể của quyết định được gọi là cây quyết định.

Ví dụ 5.1.6. *Có* 8 *đồng xu giống nhau, trong đó có* 7 *đồng xu thật có trọng lượng như nhau,* 1 *đồng xu giả có trọng lượng nhỏ hơn. Nếu dùng một chiếc cân* 2 *đĩa thì cần cân bao nhiêu lần để xác định được đồng xu giả này?*

Giải.

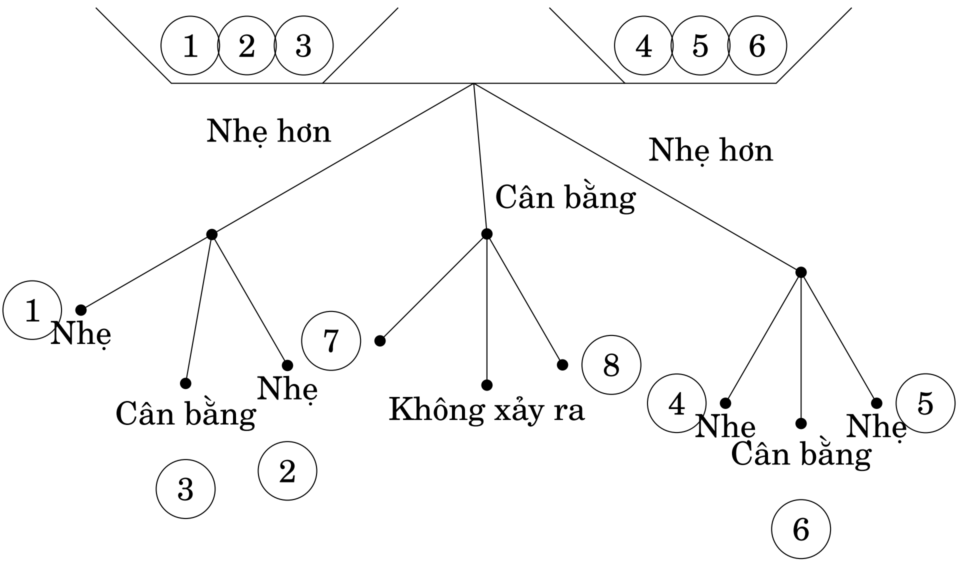
Mỗi lần cân có 3 trường hợp xảy ra, nếu biểu diễn bằng đồ thị ta có cây tam phân.

Cây tam phân này có số lá bằng 8 vì trong cây quyết định có 8 kết cục có thể xảy ra (1 trong 8 đồng xu là giả), mỗi đồng xu được biểu diễn bằng 1 lá.

Ta có số lần nhiều nhất để xác định đồng xu giả là chiều cao của cây quyết định.

Từ Hệ quả 5.1.1, suy ra $h = \lceil log_3 8 \rceil = 2$

Vậy, ta cần ít nhất 2 lần cân để xác định được đồng xu giả. Việc xác định đồng xu giả được biểu diễn như hình dưới đây.



5.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP DUYỆT CÂY

5.2.1. *Hệ địa chỉ phổ dụng*

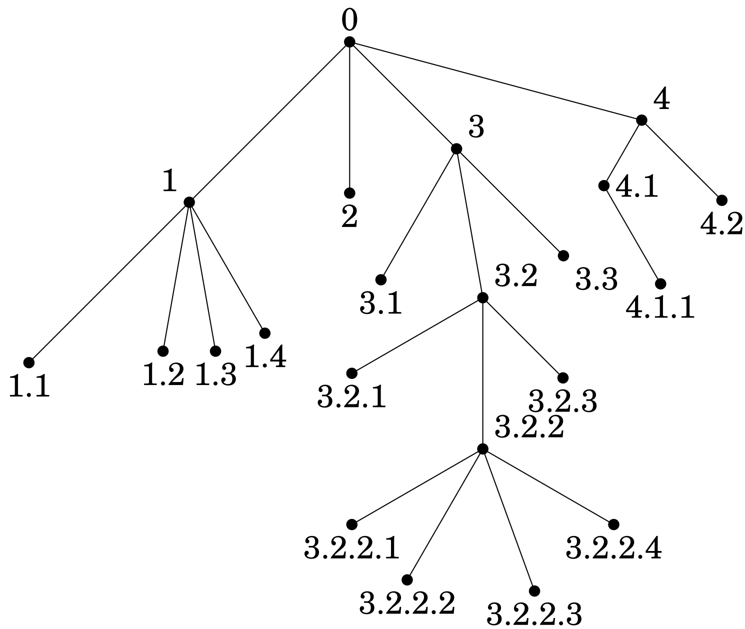
Các thủ tục duyệt tất cả các đỉnh của cây có gốc và được sắp thứ tự đều dựa trên việc sắp thứ tự các đỉnh con.

Một cách gán như sau được gọi là hệ địa chỉ phổ dụng:

a. Gán nhãn cho gốc bằng số nguyên 0. Sau đó k đỉnh con của gốc (ở mức 1) từ trái qua phải được gán các nhãn là $1, 2, 3, \ldots, k$.

b. Với mọi đỉnh v ở mức n có nhãn là A thì k_v đỉnh con của nó từ trái qua phải được gán nhãn là $A1,\ A2,\ \ldots,\ Ak_v$.

Ví dụ 5.2.1. *Ta gán nhãn cho cây sau theo hệ địa chỉ phổ dụng.*



5.2.2. *Các thuật toán duyệt cây*

+) Duyệt tiền thứ tự

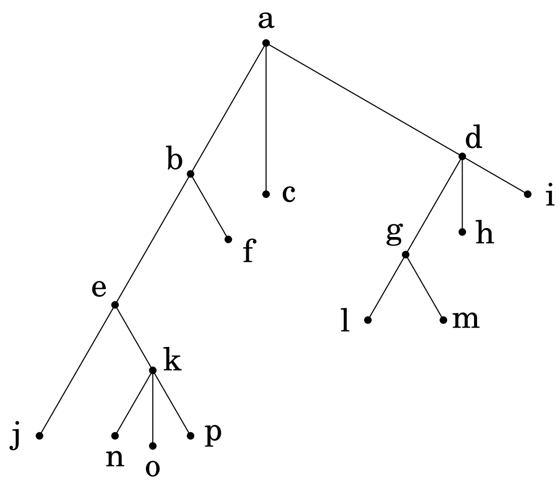
+) Duyệt trung thứ tự

+) Duyệt hậu thứ tự

Định nghĩa 5.2.1. *Giả sử T là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc r. Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt tiền thứ tự của T. Nếu không thì ta gọi $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$ là các cây con của r tính từ trái qua phải của T. Duyệt tiền thứ tự sẽ viếng thăm r đầu tiên. Tiếp tục duyệt T_1 theo kiểu tiền thứ tự sau đó duyệt T_2 theo kiểu tiền thứ tự, cứ như vậy cho đến T_n được duyệt theo kiểu tiền thứ tự.*

Như vậy, cách duyệt cây theo kiểu tiền thứ tự là ta sẽ duyệt đỉnh gốc trước, sau đó lần lượt duyệt các cây con từ trái qua phải. Khi duyệt mỗi cây con thì lại duyệt đỉnh gốc của cây con trước và tiếp tục quá trình này cho đến khi duyệt xong tất cả các đỉnh của cây.

Ví dụ 5.2.2. *Duyệt cây dưới đây theo kiểu tiền thứ tự ta thực hiện như sau:*



+) Viếng thăm gốc a.

+) Duyệt tiền thứ tự cây con có gốc b sau đó duyệt tiền thứ tự cây con có gốc $c,\ d$.

+) Duyệt tiền thứ tự cây con có gốc b bắt đầu bằng cách liệt kê b sau đó là các đỉnh của cây con có gốc e, sau đó cây con có gốc $f, \ldots$

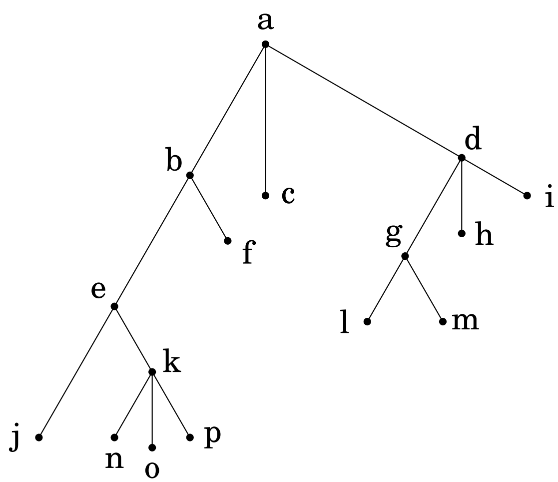
Vậy duyệt cây theo tiền thứ tự cây T là:

$$a,\ b,\ e,\ j,\ k,\ n,\ o,\ p,\ f,\ c,\ d,\ g,\ l,\ m,\ h,\ i.$$

Định nghĩa 5.2.2. *Giả sử T là 1 cây có gốc và được sắp với gốc r. Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt trung thứ tự của T. Nếu không thì ta gọi T_1, T_2, $\ldots$, T_n là các cây con của đỉnh r tính từ trái qua phải của T. Duyệt trung thứ tự bắt đầu bằng việc duyệt T_1 theo kiểu trung thứ tự, sau đó viếng thăm r. Tiếp tục duyệt T_2 theo kiểu trung thứ tự, tiếp tục duyệt T_3 theo kiểu trung thứ tự và cứ tiếp tục cho đến khi T_n được duyệt theo kiểu trung thứ tự.*

Theo định nghĩa 5.2.2, cách duyệt cây theo kiểu trung thứ tự, nghĩa là ta sẽ duyệt cây con đầu tiên bên trái của đỉnh gốc trước, rồi duyệt đến đỉnh gốc, sau đó duyệt tiếp tục duyệt đến các cây con tiếp theo cho đến hết. Cách duyệt mỗi cây con cũng tuân theo cách duyệt kiểu trung thứ tự.

Ví dụ 5.2.3. *Cách duyệt trung thứ tự của cây*



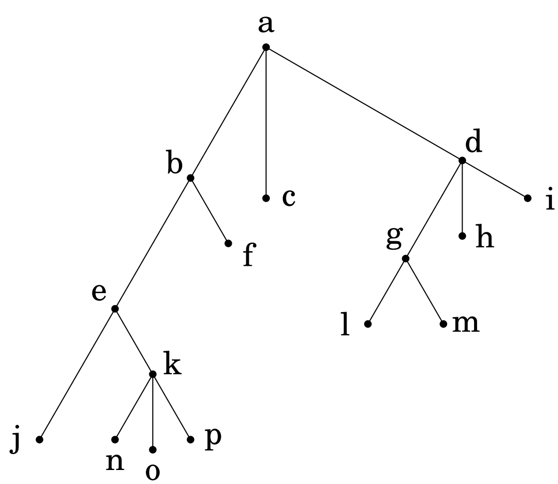
+) Duyệt trung thứ tự bắt đầu duyệt cây con có gốc b, sau đó là gốc a, duyệt trung thứ tự cây con có gốc c (chính là c) và duyệt kiểu trung thứ tự cây con gốc d.

+) Kết quả của cách duyệt kiểu trung thứ tự đối với cây trên là: j, e, n, k, o, p, b, f, a, c, e, g, m, d, h, i.

Định nghĩa 5.2.3. *Giả sử T là 1 cây có gốc và được sắp với gốc r. Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt hậu thứ tự của T. Ngược lại, ta giả sử T_1, T_2, $\ldots$, T_n là các cây con của T đối với gốc r, tính từ trái sang phải. Duyệt hậu thứ tự sẽ bắt đầu bằng việc duyệt T_1 theo kiểu hậu thứ tự, sau đó duyệt T_2 theo kiểu hậu thứ tự và cứ tiếp tục cho đến khi T_n được duyệt theo kiểu hậu thứ tự và cuối cùng kết thúc bằng việc viếng thăm r.*

Như vậy, cách duyệt kiểu hậu thứ tự là ta duyệt lần lượt các cây con tính từ trái qua phải theo kiểu hậu thứ tự. Sau khi duyệt hết các cây con rồi chúng ta mới duyệt tới đỉnh gốc sau cùng.

Ví dụ 5.2.4. *Duyệt cây sau đây theo kiểu hậu thứ tự.*



Sử dụng phương pháp duyệt theo kiểu hậu thứ tự cây đã cho ta lần lượt viếng thăm các đỉnh sau: j, n, o, p, k, e, f, b, c, l, m, g, h, i, d, a.

Duyệt theo kiểu hậu thứ tự: Lần lượt thăm các cây con từ trái sang phải theo kiểu hậu thứ tự, cuối cùng thăm gốc.

Duyệt theo kiểu trung thứ tự: Duyệt cây con bên trái của đỉnh gốc theo kiểu trung thứ tự rồi thăm gốc sau đó, thăm các cây con khác lần lượt từ trái qua phải.

Duyệt theo kiểu tiền thứ tự: Thăm gốc, sau đó duyệt các cây con của gốc theo kiểu tiền thứ tự tính từ trái qua phải.

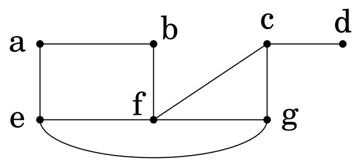
5.3. CÂY KHUNG VÀ CÂY KHUNG NHỎ NHẤT

5.3.1. *Cây khung*

a. Định nghĩa

Định nghĩa 5.3.1. *Cho G là một đơn đồ thị. Một cây được gọi là cây khung của G nếu nó là một đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh của G.*

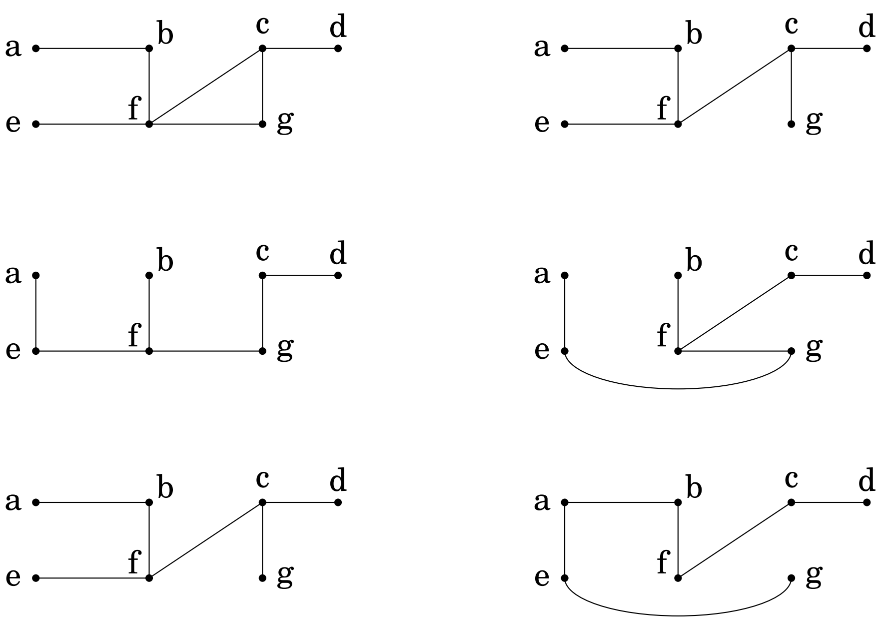
Ví dụ 5.3.1. *Tìm cây khung của đồ thị G sau:*



Giải.

Đồ thị G là liên thông nhưng không là cây vì nó chứa các chu trình đơn, chẳng hạn, a, b, f, e và e, f, g, ...

Xóa đi cạnh $\{a, e\}$, $\{e, g\}$ ta được các đồ thị con trở thành cây đồ thị. Ta gọi các cây đồ thị này là cây khung của đồ thị đã cho.



Định lý 5.3.1. *Một đơn đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó chứa ít nhất một cây khung.*

Chứng minh. Giả sử đồ thị G có một cây khung G_1, G_1 chứa tất cả các đỉnh của G. Do đó, giữa hai đỉnh bất kì đều tồn tại đường đi trong G_1, đó cũng là đường đi trong G. Vì vậy, G là liên thông. Ngược lại, giả sử G là đồ thị liên thông. Nếu G không có chu trình thì G là một cây. Nếu G có chu trình, gọi C_1 là một chu trình trong G và e_1 là một cạnh trong C_1. Bây giờ ta xây dựng đồ thị $G_1 = G - e_1$ bằng cách xóa đi cạnh e_1 từ đồ thị G nhưng giữ lại đỉnh. Rõ ràng, G_1 là một đồ thị con của G và nó chứa tất cả các đỉnh của đồ thị G. Bởi vì e_1 là một cạnh của chu trình, G_1 vẫn liên thông. Nếu G_1 không có chu trình thì G_1 là một cây và chính là cây khung của đồ thị G. Nếu G_1 có một chu trình C_2 thì xóa đi cạnh e_2 của C_2 và xây dựng đồ thị con liên thông G_2 mà chứa tất cả các đỉnh của G_1 (cũng là chứa tất cả các đỉnh của G). Nếu G_2 chứa chu trình thì tiếp tục quá trình này. Bởi vì G có hữu hạn số cạnh nên nó chỉ chứa hữu hạn chu trình. Do đó, tiếp tục quá trình xóa các cạnh, nhưng giữ lại các đỉnh từ các chu trình thì cuối cùng chúng ta được đồ thị con liên thông G_k chứa tất cả các đỉnh của đồ thị G và không có chu trình nào. Khi đó, G_k là một cây khung của đồ thị G. □

b. Thuật toán xây dựng cây khung

Thuật toán xây dựng cây khung bằng cách xóa đi các cạnh tạo ra khối chu trình đơn. Phương pháp này không hiệu quả vì phải nhận biết được các chu trình đơn, mà việc nhận biết ra tất cả các chu trình đơn trong một đồ thị rất khó khăn.

Thay vì việc loại bỏ cạnh ta có thể xây dựng cây khung bằng cách ghép thêm các cạnh của đồ thị để hình thành nên cây khung.

Phương pháp: Ta thường sử dụng hai phương pháp sau để xây dựng cây khung:

+ Phương pháp tìm kiếm ưu tiên chiều sâu

+ Phương pháp tìm kiếm ưu tiên chiều rộng

Phương pháp tìm kiếm ưu tiên chiều sâu

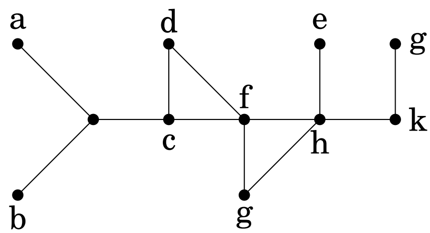
+ Tạo một cây có gốc và cây khung sẽ là đồ thị hướng nền của cây có gốc này.

+ Xây dựng cạnh nối bằng cách chọn 1 đỉnh làm gốc, lần lượt ghép các cạnh vào sao cho mỗi cạnh mối ghép sẽ nối đỉnh cuối cùng trền đường đi với 1 đỉnh còn chưa thuộc đường đi và tiếp tục.

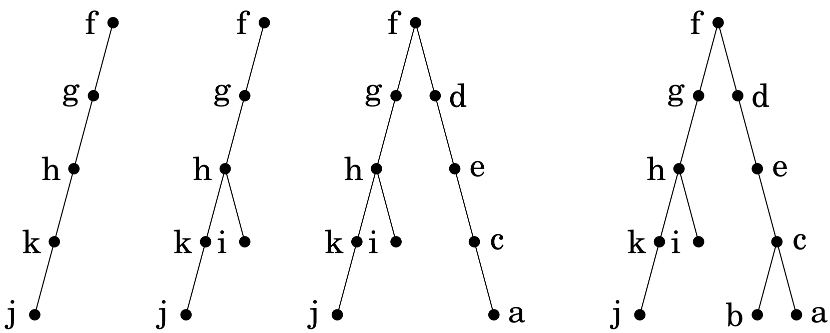
+ Nếu đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị thì cây do đường đi tạo nên là cây khung

+ Nếu đường đi không qua tất cả các đỉnh thì cần thêm cạnh khác vào đường đi, và nếu có thể xây dựng đường đi mới xuất phát từ đỉnh này qua các đỉnh chưa thuộc đường đi hoặc lùi lại 2 đỉnh trên đường đi và xây dựng đường đi mới.

Ví dụ 5.3.2. *Dùng thuật toán ưu tiên chiều sâu tìm cây khung của đồ thị sau:*



Chọn đỉnh f làm gốc



Phương pháp tìm kiếm ưu tiên chiều rộng

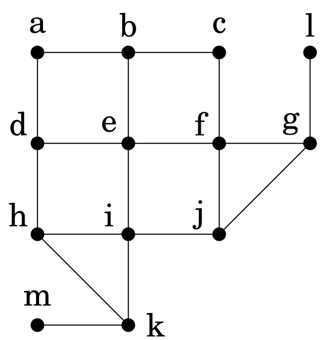
+ Xây dựng cây có gốc của đồ thị đã cho và đồ thị vô hướng nền của cây có gốc này sẽ tạo ra cây khung của đồ thị ban đầu.

+ Chọn 1 đỉnh làm gốc, sau đó ghép tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh này (các đỉnh mới ghép là đỉnh mức 1 của cây).

+ Sắp xếp các đỉnh theo một thứ tự nào đó, mỗi đỉnh ở mức 1 lại được viếng thăm thứ tự vừa sắp, ghép tất cả cạnh liên thuộc với nó vào cây sao cho không tạo nên chu trình.

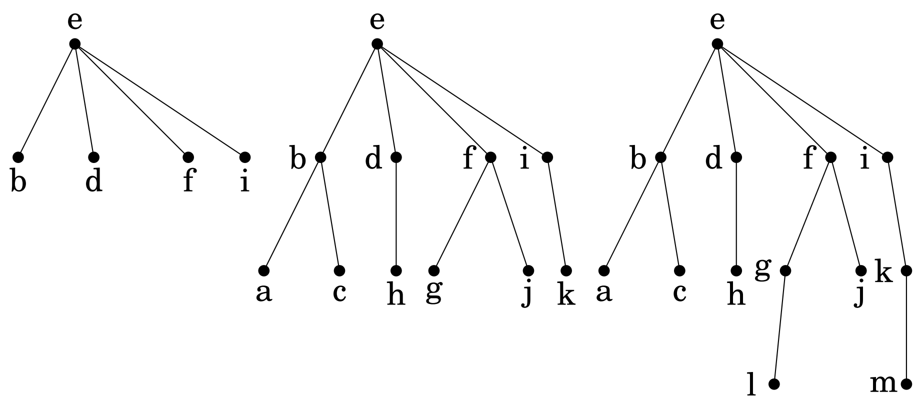
+ Sắp xếp các đỉnh con của mỗi đỉnh theo một thứ tự nào đó và lặp lại bước trên.

Ví dụ 5.3.3. *Sử dụng phương pháp tìm kiếm ưu tiên chiều rộng, hãy tìm cây khung của đồ thị sau:*



Giải.

Ta chọn đỉnh e làm gốc, sau đó ghép tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh e: $\{e, b\}$,$\{e, d\}$, $\{e, f\}$, $\{e, i\}$. Tiếp tục lần lượt ghép tất cả các cạnh liên thuộc với mỗi đỉnh: b, d, f, i. Lặp lại bước trên với các đỉnh tiếp theo ta sẽ được cây khung sau:



5.3.2. *Cây khung nhỏ nhất*

a. Định nghĩa

Định nghĩa 5.3.2. *Cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị vô hướng liên thông, có trọng số là* 1 *cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.*

b. Thuật toán Prim

Thuật toán Prim còn được gọi là phương pháp lân cận gần nhất. Bắt đầu từ 1 đỉnh tùy ý của đồ thị, giả sử là đỉnh s, đầu tiên ta nối s với các đỉnh lân cận gần nhất, chẳng hạn y. Nghĩa là trong các cạnh liên thuộc với đỉnh s, cạnh $\{s, y\}$ có độ dài nhỏ nhất. Tiếp theo trong số các cạnh liên thuộc với 2 đỉnh s hoặc y ta tìm cạnh có độ dài nhỏ nhất, từ cạnh này ta tìm được đỉnh thứ 3 và thu được cây bộ phận gồm 3 đỉnh và 2 cạnh. Quá trình này được tiếp tục cho đến khi ta thu được cây đồ thị gồm n đỉnh và $n-1$ cạnh, đó là cây khung nhỏ nhất cần tìm của đồ thị đã cho.

Procedure Prim (G: đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh)

T:= cạnh có trọng số nhỏ nhất

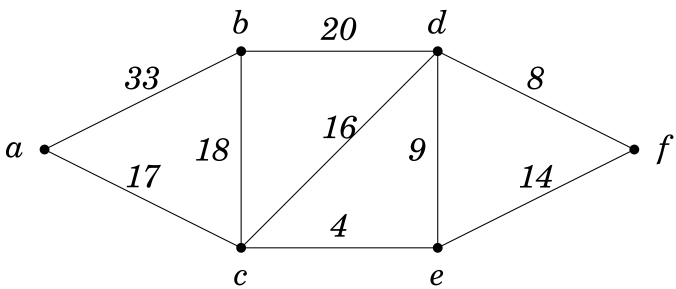
For $i := 1$ to $n-2$

Begin $e :=$ cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với 1 đỉnh trong T và không tạo ra chu trình trong T nếu ghép nó vào T.

$T := T$ với e được ghép vào.

End $\{T$ là cây khung nhỏ nhất của $G\}$.

Ví dụ 5.3.4. *Cho đồ thị*



Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị trên theo thuật toán Prim.

Giải.

Ma trận trọng số của đồ thị trên là:

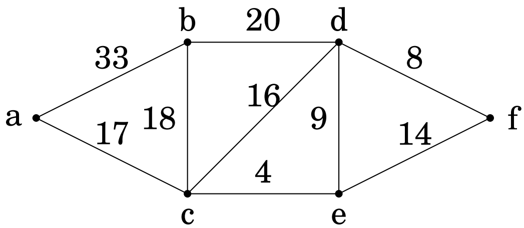
$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 33 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ 33 & 0 & 18 & 20 & \infty & \infty \\ 17 & 18 & 0 & 16 & 4 & \infty \\ \infty & 20 & 16 & 0 & 9 & 8 \\ \infty & \infty & 4 & 9 & 0 & 14 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 14 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

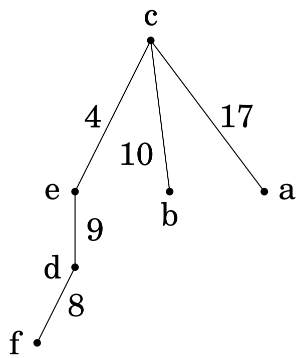
Bước lặp	a	b	c	d	e	f	V_H	T
Khởi tạo	$[0, a]$	$[33, a]$	$[17, a]^*$	$[\infty, a]$	$[\infty, a]$	$[\infty, a]$	a	$\emptyset$
1		$[18, c]$		$[16, c]$	$[4, c]^*$	$[\infty, a]$	a, c	(a, c)
2		$[18, c]$		$[9, e]^*$		$[14, e]$	a, c, e	(a, c), (c, e)
3		$[18, c]$				$[8, d]^*$	a, c, e, 4	(a, c), (c, e), (e, d)
4		$[18, c]^*$					a, c, e,f	(a, c), (c, e), (e, d), (d, f)
5							a, c, e, f, b	(a, c), (c, e), (e, d), (d, f), (c, b)

c. Thuật toán Kruskal:

Để xây dựng cây khung nhỏ nhất $H = (V, T)$ bằng thuật toán Kruskal ta thực hiện như sau:

Sắp xếp các cạnh của đồ thị G theo thứ tự không giảm về độ dài của chúng và bắt đầu với tập hợp $T = \emptyset$, ở mỗi bước ta sẽ lần lượt duyệt trong danh sách các cạnh đã sắp xếp, từ cạnh có độ dài nhỏ nhất đến cạnh có độ dài lớn hơn, để tìm ra cạnh mà việc bổ sung nó vào tập T không tạo thành chu trình trong tập này. Chẳng hạn, ta xét đồ thị dưới đây:



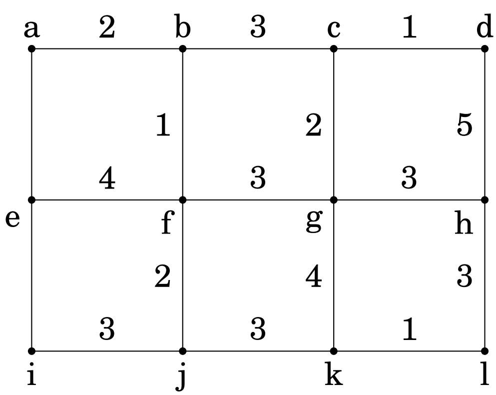


Ta sắp xếp các cạnh như sau:

Cạnh	(c,e)	(d,f)	(d,e)	(e,f)	(c,d)	(a,c)	(b,c)	(b,d)	(a,b)
Độ dài	4	8	9	14	16	17	18	20	33

Dựa vào bảng sắp xếp trên, ta chọn cạnh (c,e). Sau đó lần lượt bổ sung các cạnh (e,d), (d,f), (c,b), (c,a).

Ví dụ 5.3.5. *Sử dụng thuật toán Prim và thuật toán Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị sau:*



Giải. Thuật toán Prim

Bước chọn	Cạnh	Trọng số
1	(b, f)	1
2	(a, b)	2
3	$(f, j$	2
4	(a, e)	3
5	(i, j)	3
6	(f, g)	3
7	(c, g)	2
8	(c, d)	1
9	$(g, h$	3
10	(h, l)	3
11	(k, l)	1
		24

Thuật toán Kruskal

Bước chọn	Cạnh	Trọng số
1	(c, d)	1
2	(k, l)	1
3	(b, f)	1
4	(c, g)	2
5	(a, b)	2
6	(f, i)	2
7	(b, c)	3
8	(f, k)	3
9	(g, h)	3
10	(i, j)	3
11	(a, e)	3
		24

5.4. BÀI TOÁN TỐI ƯU

Trong bài này, chúng tôi minh họa một ứng dụng của cây đồ thị vào việc xây dựng lời giải của bài toán tối ưu tổ hợp.

5.4.1. *Giới thiệu bài toán*

Trong nhiều vấn đề ứng dụng của bài toán tổ hợp các cấu hình tổ hợp còn được gán cho một giá trị bằng số đánh giá giá trị sử dụng của cấu hình đối với mục đích sử dụng cụ thể nào đó. Bài toán lựa chọn trong số các cấu hình tổ hợp chấp nhận được cấu hình có giá trị sử dụng tốt nhất được gọi là bài toán tối ưu tổ hợp.

Bài toán tối ưu tổng quát:

Tìm cực đại (cực tiểu) của phiếm hàm

$$f(X) \longrightarrow min(max)$$

với điều kiện: $X \in D$, trong đó D là tập hữu hạn phần tử.

Ta gọi

$$f(X) : \text{là hàm mục tiêu.}$$

$$D : \text{là tập các phương án.}$$

$$X \in D : X \text{ được gọi là một phương án.}$$

Phương án $X^* \in D$ mà tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) được gọi là phương án tối ưu. Khi đó, giá trị $f^* = f(X^*)$ gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

Ví dụ 5.4.1. ***(Bài toán người du lịch)***

Một người muốn đi thăm quan n thành phố T_1, T_2, ..., T_n. Xuất phát từ một thành phố bất kì trong n thành phố đó, người du lịch đi qua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đúng 1 lần rồi quay lại thành phố đã xuất phát. Biết c_{ij} là chi phí đi từ thành phố T_i đến T_j

$(i, j = \overline{1, n})$; Hãy tìm hành trình (thỏa mãn các điều kiện đặt ra) với tổng chi phí nhỏ nhất.

Mỗi hành trình du lịch sau:

$$T_{\pi(1)} \longrightarrow T_{\pi(2)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_{\pi(n)} \longrightarrow T_{\pi(1)}$$

tương ứng với 1 hoán vị $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$

Khi đó, hàm tổng chi phí tương ứng với hành trình trên là $f(\pi) = c_{\pi(1)\pi(2)} + \cdots + c_{\pi(n-1)\pi(n)} + c_{\pi(n)\pi(1)}$

Kí hiệu $\prod$ là tập tất cả các hoán vị $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ của n số $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ta có bài toán $min\{f(\pi) : \ \ \pi \in \prod\}$

(Tổng số hành trình của người du lịch là $n!$, nhưng thực sự có $(n-1)!$ hành trình thực sự khác nhau, vì có thể xuất phát từ thành phố bất kì, nên ta có thể cố định một thành phố là thành phố xuất phát).

Ví dụ 5.4.2. ***(Bài toán cái túi)***

Một nhà thám hiểm cần đem theo một cái túi có trọng lượng không quá W. Có n đồ vật có thể mang theo. Đồ vật thứ i nặng a_i và giá trị sử dụng là c_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Hỏi nhà thám hiểm cần đem theo các đồ vật nào để tổng giá trị sử dụng của các đồ vật đem theo là lớn nhất.

Một phương án đem theo đồ của nhà thám hiểm có thể biểu diễn bằng 1 vectơ nhị phân độ dài n, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trong đó $x_i = 1$ nếu đồ vật thứ i được đem theo, $x_i = 0$ nếu ngược lại.

Giá trị của hàm mục tiêu tại phương án X là: $f(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$

Tổng trọng lượng đồ vật là: $g(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$

Bài toán đã cho quy về bài toán: Tìm các vectơ nhị phân có độ dài n thỏa mãn: $g(X) \leq W$ sao cho $f(X)$ max.

5.4.2. *Các thuật toán duyệt*

a. Duyệt toàn bộ

Phương pháp duyệt toàn bộ được thực hiện như sau: Trên cơ sở các thuật toán liệt kê tổ hợp, ta tiến hành duyệt từng phương án của bài toán, đối với mỗi phương án ta tính giá trị của hàm mục tiêu và so sánh các giá trị hàm mục tiêu tại tất cả các phương án được liệt kê, từ đó ta chọn phương án tối ưu.

Phương pháp này khó thực hiện và mất rất nhiều thời gian. Vì thế, chúng ta thường sử dụng phương pháp khác, gọi là phương pháp duyệt nhánh cận.

b. Thuật toán duyệt nhánh cận

Bài toán tối ưu tổng quát:

$$\min \ \{f(X): \ X \in D\}$$
$$D \text{ là tập hữu hạn phần tử.}$$

Giả sử:

$$D = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n : \\ X \text{ thỏa mãn tính chất } P\}.$$

Với A_1, A_2, ..., A_n là các tập hữu hạn, P là 1 tính chất trên tập tích đề các $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Thuật toán nhánh cận có thể áp dụng để giải bài toán trên nếu như có thể tìm được 1 hàm g xác định trên tập tất cả các phương án bộ phận của bài toán thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$g(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq min\{f(X): \ X \in D, \ x_i = a_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, k\}$

với mọi lời giải bộ phận $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ và $\forall k = 1, 2, \ldots$.

Đối với kỹ thuật duyệt toàn bộ (kỹ thuật vét cạn) thì ta xét tất cả các phương án rồi tìm ra phương án tối ưu. Nghĩa là, ta cần xây dựng một cây tìm kiếm các phương án bằng cách xây dựng từ đỉnh gốc đến tất cả các đỉnh lá. Kỹ thuật này có nhược điểm là thời gian thực hiện rất lớn và khó thực hiện. Đối với kỹ thuật "tham lam" ta chỉ cần xây dựng một phương án thì thời gian thực hiện nhanh, nhưng nhược điểm là phương án ta xây dựng được chưa chắc đã là phương án tối ưu. Trong mục này, chúng ta sẽ xét một kỹ thuật là duyệt nhánh cận, đây là kỹ thuật tìm được phương án tối ưu trong khoảng thời gian có thể chấp nhận được.

Ta đã biết, cây tìm kiếm phương án là một cây có gốc biểu diễn cho tập tất cả các phương án có thể có, mỗi đỉnh lá biểu diễn cho một phương án nào đó. Đỉnh n có các đỉnh con tương ứng với các khả năng có thể lựa chọn tập phương án xuất phát từ n. Kỹ thuật xây dựng cây tìm kiếm phương án theo kiểu này được gọi là kỹ thuật phân nhánh.

Kỹ thuật duyệt nhánh cận là xây dựng cây tìm kiếm phương án tối ưu nhưng không cần xây dựng toàn bộ cây tìm kiếm mà sử dụng giá trị cận để hạn chế bớt các nhánh của cây. Chúng ta xây dựng đến đỉnh nào đó thuộc một nhánh nào đó mà không dẫn đến phương án tối ưu thì cắt bỏ và thực hiện việc quay lui. Để thực hiện được việc quay lui thì chúng ta cần đưa vào một giá trị cận. Căn cứ vào giá trị cận này mà chúng ta sẽ quyết định ngừng hướng đó (cắt bỏ nhánh đó) để chuyển sang hướng khác hay không. Nếu ta cắt bỏ được nhiều nhánh trên cây thì thời gian tìm kiếm phương án tối ưu nhanh hơn.

Với mỗi đỉnh trên cây ta sẽ xác định một giá trị cận tương ứng. Giá trị cận là giá trị gần với giá trị của phương án. Với bài toán min ta sẽ xác định cận dưới, còn đối với bài toán max ta sẽ xác định cận trên. Cận dưới là giá trị nhỏ hơn hay bằng giá của phương án. Cận trên là giá trị lớn hơn hay bằng giá của phương án. Nếu ta tìm được cận dưới càng lớn thì càng tốt cho bài toán min và nếu ta tìm được cận trên càng nhỏ thì càng tốt cho bài toán max. Do vậy, đối với thuật toán nhánh cận thì công thức xác định giá trị cận rất quan trọng. Việc xác định tốt các giá trị cận giúp ta cắt bỏ được nhiều nhánh trên cây và giá trị cận càng sát với giá phương án thì càng tốt.

Bài toán người du lịch tương tự như bài toán đường đi của người giao hàng (Traveling Sales Problem) nên chúng ta sẽ xét ví dụ sau để gần gũi với chuyên ngành kinh tế.

Ví dụ 5.4.3. *Có một người giao hàng cần đi giao hàng n thành phố. Xuất phát từ một thành phố nào đó sau đó lần lượt đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đi một lần và trở lại thành phố xuất phát. Khoảng cách giữa hai thành phố có thể được đo bằng khoảng cách địa lý hay cước phí hay thời gian di chuyển. Ta gọi chung là độ dài. Giả sử rằng từ một thành phố bất kỳ đều có đường đi đến các thành phố còn lại. Tìm một chu trình của người giao hàng đó sao cho tổng độ dài các đoạn đường đi là ngắn nhất.*

Giải. Ta mô hình hóa bài toán trên bằng đồ thị. Mỗi đỉnh của đồ thị biểu diễn một thành phố, mỗi cạnh của đồ thị có trọng số biểu diễn độ dài giữa hai thành phố tương ứng. Theo giả thiết từ một thành phố bất kỳ đều có đường đi đến các thành phố còn lại nên đồ thị mô hình hóa bài toán trên là đồ thị liên thông.

Nếu chúng ta dùng kỹ thuật vét cạn (duyệt toàn bộ) thì độ phức tạp theo thời gian của bài toán là độ phức tạp mũ với $(n-1)!/2$.

Đối với kỹ thuật tham lam, chúng ta xây dựng phương án tối ưu bằng cách lựa chọn những cạnh có độ dài nhỏ nhất để đưa vào phương án đó theo thuật toán lân cận gần nhất. Nhưng phương án tìm được chưa chắc đã là phương án tối ưu.

Kỹ thuật nhánh cận sẽ tìm được phương án tối ưu trong một thời gian có thể chấp nhận được. Thực chất của phương pháp này là cải tiến kỹ thuật vét cạn. Kỹ thuật nhánh cận bao gồm kỹ thuật phân nhánh (xây dựng cây tìm kiếm phương án tối ưu) và xây dựng công thức tính cận và tính giá trị cận tại mỗi đỉnh của cây.

- Chọn một thành phố bất kỳ làm thành phố xuất phát (chọn đỉnh gốc - đỉnh bậc 0).

- Đỉnh gốc có $n-1$ đỉnh con (đỉnh bậc 1) tương ứng với các khả năng đi ra từ thành phố ở bậc 0.
- Mỗi đỉnh con ở bậc 1 có $n-2$ đỉnh con (đỉnh bậc 2) tương ứng với các khả năng đi ra từ thành phố bậc 1.
- Đến bậc $n-1$ thì ta đã có $n-1$ cạnh, tiếp theo ta cần đi đến thành phố cuối cùng rồi quay lại về thành phố ban đầu (đỉnh gốc) sẽ được một phương án.

Bài toán đã cho là bài toán tìm min nên ta áp dụng công thức tính cận dưới. Cận dưới càng lớn thì càng tốt vì khi đó cận dưới càng sát với giá của phương án và ta sẽ cắt giảm được nhiều nhánh trên cây. Do đó, chúng ta giảm được thời gian thực hiện thuật toán.

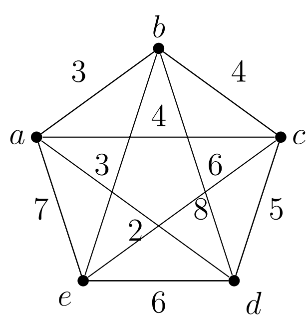
Đối với bài toán người giao hàng ta xây dựng công thức nhánh cận như sau:

Tại đỉnh gốc: Cận dưới (CD) = $n\times$ độ dài cạnh nhỏ nhất.

Tại đỉnh bậc i: CD = TGT $\times$ độ dài cạnh nhỏ nhất trong số các cạnh còn lại chưa sử dụng.

TGT là tổng độ dài các cạnh từ thành phố xuất phát đến thành phố đang xét.

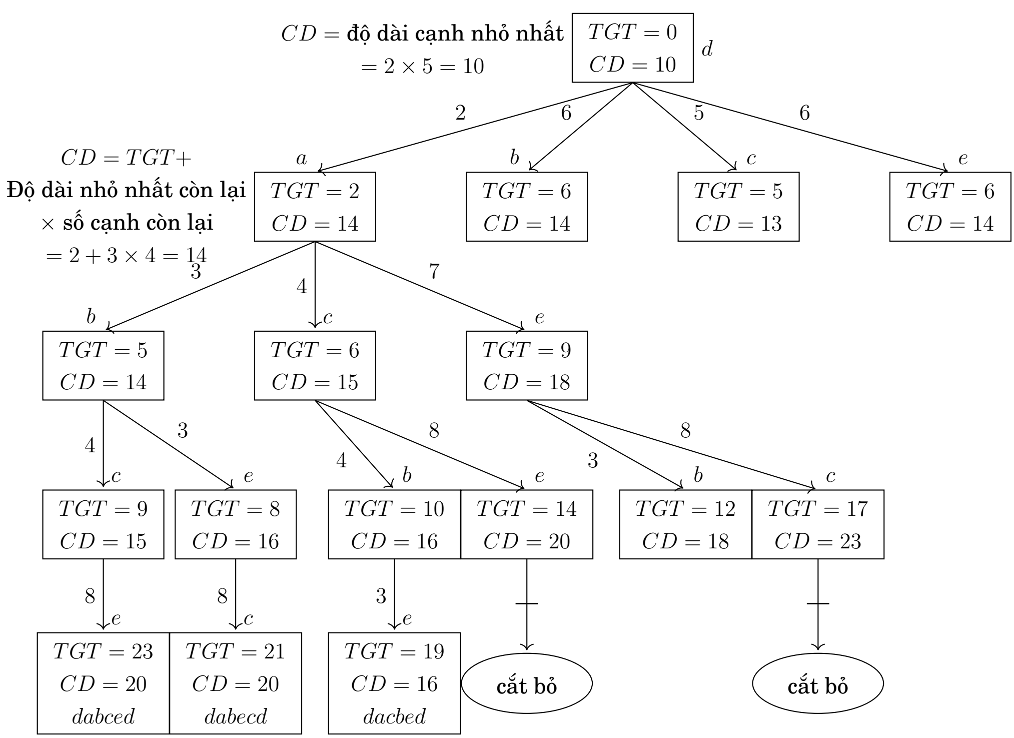
Bây giờ chúng ta xét một ví dụ cụ thể với 5 thành phố với độ dài các cạnh được minh họa bằng đồ thị sau:



Nếu ta giải bài toán này bằng phương duyệt toàn bộ thì chúng ta phải xét $\frac{4!}{2} = 12$ chu trình.

Chúng ta giải bài toán này bằng kỹ thuật tham lam theo cách tiếp cận là xây dựng một cây phương án bằng cách chọn các cạnh có độ dài nhỏ nhất để đưa vào phương án đó. Trước hết, ta chọn cạnh có độ dài nhỏ nhất là cạnh $ad = 2$, tiếp theo chúng ta chọn cạnh ab và be cùng có độ dài bằng 3. Hai cạnh có độ dài bằng 4 là bc và ac không đưa vào phương án được vì nếu đưa vào thì sẽ tạo ra các chu trình đơn. Vì vậy, chúng ta đưa cạnh $cd = 5$ vào cây phương án. Do đó, ta được cây phương án là $c \to d \to a \to b \to e$. Từ e quay lại c ta sẽ được một chu trình và phương án này có độ dài là 21.

Bây giờ chúng ta giải bài toán trên bằng phương pháp nhánh cận. Ta xuất phát từ đỉnh d, tính toán cận dưới tại mỗi đỉnh và ta được hình ảnh cây phương án như hình vẽ dưới đây:



Việc tính cận dưới (CD) và TGT tại mỗi đỉnh b, c, e coi như một bài tập và bạn đọc sẽ vẽ thêm vào cây đồ thị trên. Từ đó, chúng ta sẽ tìm được phương án thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 5.4.4. *Một trong các bài toán được ứng dụng nhiều trong thực tế là bài toán (dạng khác) về cái túi của nhà thám hiểm. Ở đây, thay vì có n đồ vật ta giả thiết là có n loại đồ vật và số lượng mỗi loại đồ vật không hạn chế. Ta có bài toán cái túi dạng mới là: Có n loại đồ vật, đồ vật thứ i có trọng lượng là a_i và giá trị sử dụng là c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Cần chọn các đồ vật cho vào một túi có trọng lượng tối đa là W sao cho tổng giá trị sử dụng của các đồ vật trong túi là lớn nhất.*

Bài toán cái túi ở trên là bài toán tìm max. Thuật toán để giải bài toán cái túi theo kỹ thuật nhánh cận được thực hiện như sau:

Chúng ta xác định danh sách các loại đồ vật sắp xếp theo thứ tự giảm dần của đơn giá (đơn giá bằng giá trị sử dụng chia cho trọng lượng). Tức là, ta sẽ xét các đồ vật theo thứ tự đơn giá từ lớn đến nhỏ.

Bước 1: Đỉnh gốc biểu diễn cho trạng thái ban đầu của cái túi, trong đó chưa có đồ vật nào. Lúc này, tổng giá trị sử dụng (kí hiệu TGT) của nó bằng 0. Cận trên (CT) của đỉnh gốc là trọng lượng của cái túi $W \times$ giá trị sử dụng lớn nhất (giá trị sử dụng của đồ vật đầu tiên đã sắp xếp).

Bước 2: Ta sẽ phân nhánh cho đỉnh gốc. Đỉnh gốc sẽ có các đỉnh con tương ứng với khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn nhất. Có bao nhiêu khả năng lựa chọn loại đồ vật có đơn giá lớn nhất thì sẽ có bấy nhiêu đỉnh con của gốc. Với mỗi đỉnh con của gốc, chúng ta sẽ tính lại các thông số:

+ TGT = TGT của đỉnh cha + Số đồ vật được chọn $\times$ đơn giá mỗi đồ vật.

+ Trọng lượng còn lại của cái túi (W) = Trọng lượng W của cái túi ở đỉnh cha - Số đồ vật được chọn $\times$ Trọng lượng mỗi đồ vật.

+ Cận trên được xác định bởi công thức: (CT) = TGT + $W\times$ đơn giá của đồ vật sẽ xét kế tiếp.

Bước 3: Trong các đỉnh con, ta sẽ ưu tiên phân nhánh cho nút con nào có cận trên lớn hơn trước. Các đỉnh con của đỉnh này sẽ tương ứng với khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn tiếp theo. Với mỗi đỉnh, ta lại xác định các thông số TGT, W và CT theo công thức ở bước 2.

Lặp lại bước 3 và có thể tìm được một số đỉnh lá, nghĩa là ta có thể tìm được một số phương án. Trong số các phương án tìm được có một phương án mà giá của nó lớn nhất ta gọi là giá lớn nhất tạm thời. Phương án ứng với giá lớn nhất tạm thời được gọi là phương án tối ưu tạm thời. Đối với những đỉnh trong mà có cận trên nhỏ hơn hay bằng giá lớn nhất tạm thời thì ta không cần phân nhánh cho đỉnh đó (ta cắt bỏ nhánh của đỉnh này).

Nếu tất cả các đỉnh của đồ thị đều đã được phân nhánh hoặc bị cắt bỏ thì phương án có giá trị lớn nhất tạm thời là phương án tối ưu cần tìm.

Trước khi vào giải quyết bài toán tổng quát trong Ví dụ 5.4.4, chúng ta xem xét một ví dụ cụ thể sau:

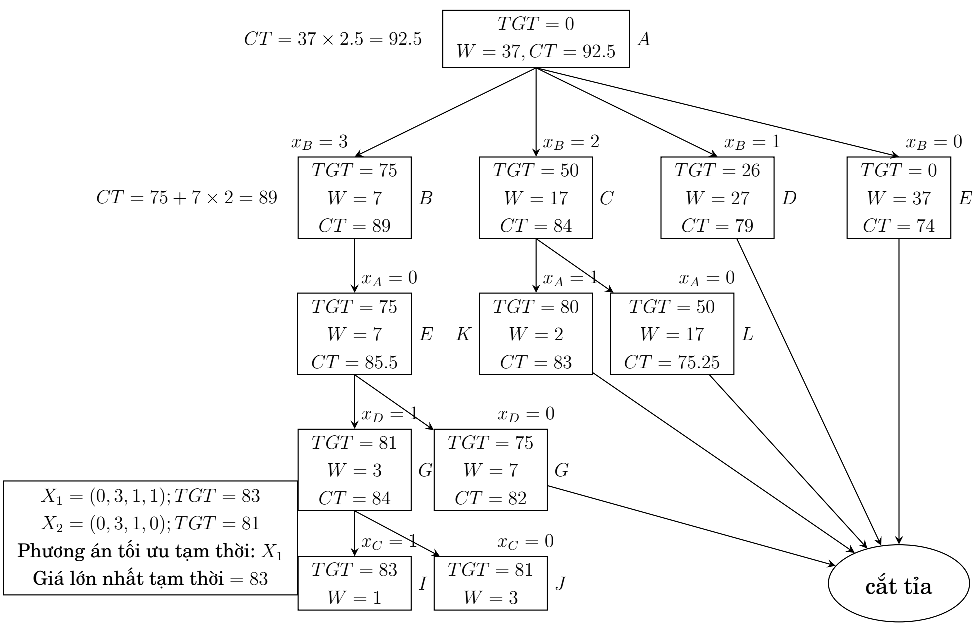
Ví dụ 5.4.5. *Một nhà thám hiểm cần đem theo một cái túi có trọng lượng không quá* 37*. Có* 4 *loại đồ vật A, B, C, D có thể mang theo. Trọng lượng và giá trị sử dụng của mỗi loại đồ vật được cho trong bảng sau. Hỏi nhà thám hiểm cần đem theo các loại đồ vật nào để tổng giá trị sử dụng của các đồ vật đem theo là lớn nhất.*

Đồ vật	Trọng lượng	Giá trị sử dụng
A	15	30
B	10	25
C	2	2
D	4	6

Giải. Trước hết, tính đơn giá cho mỗi loại đồ vật và sắp xếp theo thứ tự giảm dần ta được bảng sau:

Đồ vật	Trọng lượng	Giá trị sử dụng	Đơn giá
B	10	25	$2,5$
A	15	30	2
D	4	6	$1,5$
C	2	2	1

Ta ký hiệu TGT là tổng giá trị, W là trọng lượng, CT là cận trên tại đỉnh tương ứng. Áp dụng lần lượt theo ba bước trên ta được cây tìm kiếm phương án sau:



Bài toán trong Ví dụ 5.4.4 được mô hình hóa như sau:
Tìm giá trị:

$$f^* = max\{f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \ i = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (1)$$

Ký hiệu D là tập các phương án của bài toán (1).

$$D = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,\ x_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta giả sử các đồ vật được đánh số sao cho các bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n} \quad (2)$$

Ta xây dựng hàm tính cận dưới, cùng với bài toán (1) ta xét bài toán cái túi có biến liên tục sau:

$$g^* = max\{f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq W, \ x_i \geq 0 \ i = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (3)$$

Mệnh đề 5.4.1. *Phương án tối ưu của bài toán* (3) *là véc tơ* $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_n}, \ldots, \bar{x_n})$ *với các thành phần được xác định bởi công thức:* $\bar{x_1} = \frac{b}{a_1}$, $\bar{x_2} = \bar{x_3} = \ldots = \bar{x_n} = 0$, *và giá trị tối ưu của bài toán là* $g^* = \frac{c_1 b_1}{a_1}$.

Bây giờ ta áp dụng mệnh đề trên để giải quyết bài toán trong Ví dụ 5.4.4.

Giải. Ta xét $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một phương án bất kì của bài toán (3). Khi đó, từ đẳng thức (3) và do $x_i \geq 0$, ta suy ra

$$c_i x_i \geq \frac{c_1}{a_1} \cdot a_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Do đó, $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{c_1}{a_1} \cdot a_i x_i = \frac{c_1}{a_1} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \frac{c_1}{a_1} \cdot b = g^*$.

Bây giờ, giả sử ta có phương án bộ phận cấp $k : (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Khi đó, giá trị sử dụng của các đồ vật trong túi là: $\sigma_k = c_1 u_1 + c_1 u_2 + \ldots + c_k u_k$ và trọng lượng còn lại chưa sử dụng của cái túi là $b_k = b - c_1 u_1 - c_1 u_2 - \ldots - c_k u_k$.

Ta có:

$$max\{f(X) : \quad X \in D, x_i = u_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$$

$$max\{\sigma_k + \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i : \quad \sum_{i=k+1}^{n} a_i x_i \leq b_k, x_i \in \mathbb{Z}_+, i = k+1, k+2, \ldots, n\}$$

$$\sigma_k + max\{\sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i : \quad \sum_{i=k+1}^{n} a_i x_i \leq b_k, x_i \in \mathbb{Z}_+, i = k+1, k+2, \ldots, n\}$$

Theo mệnh đề 5.4.1, giá trị của số hạng thứ 2 trong biểu thức trên là $\frac{c_{k+1}b_k}{a_{k+1}}$.

Khi đó,

$$max\{f(x): \quad x \in D, x_i = u_i, i = 1, 2, \ldots, k\} \leq \sigma_k + \frac{c_{k+1}b_k}{a_{k+1}}.$$

Vậy, ta có thể tính cận trên cho phương án bộ phận $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ bởi công thức

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \sigma_k + \frac{c_{k+1}b_k}{a_{k+1}}.$$

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 5

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Cây	Trees
Cây con	Subtree
Cây có gốc	Rooted tree
Đỉnh trong	Internal vertex
Đỉnh ngoài (lá)	Leaf
Đỉnh con	Child of a vertex v in a rooted tree
Đỉnh anh em	Sibling of a vertex v in a rooted tree
Đỉnh cha	Parent of v in a rooted tree
Tổ tiên của môt đỉnh	Ancestor of a vertex v in a rooted tree
Cây m-phân	m-ary tree
Cây m-phân đầy đủ	Full m-ary tree
Mức của đỉnh	Level of a vertex
Chiều cao của cây	Height of a tree
Cây tìm kiếm nhị phân	Binary search tree
Cây quyết định	The decision tree
Hệ địa chỉ phổ dụng	Prefix code
Duyệt cây tiền thứ tự	Preorder traversal
Duyệt cây trung thứ tự	Inorder traversal
Duyệt cây hậu thứ tự	Postorder traversal
Cây khung	Spanning tree
Cây khung nhỏ nhất	Minimum spanning tree
Tìm kiếm theo chiều rộng	The breadth-first search
Tìm kiếm theo chiều sâu	The depth-first search/backtracking
Thuật toán Kruskal	Kruskal's algorithm
Thuật toán Prim	Prim's algorithm
Bài toán tối ưu	Optimization problem
Hàm mục tiêu	Ojective function
Thuật toán duyệt toàn bộ	Brute - force search/Exhaustive search
Thuật toán duyệt nhánh cận	Branch and bound algorithm

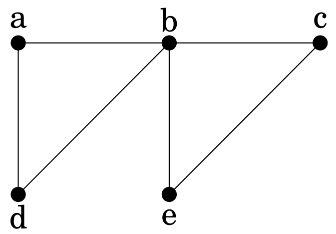
BÀI TẬP CHƯƠNG 5

CÂY VÀ CÂY KHUNG

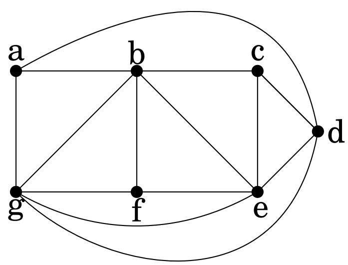
Bài 5.1: Cần phải xóa đi bao nhiều cạnh khỏi đồ thị liên thông với n đỉnh và m cạnh để nhận được một cây khung?

Trong các bài 5.2 – 5.6 hãy tìm cây khung của đồ thị đã cho bằng cách xóa đi các cạnh trong các chu trình đơn.

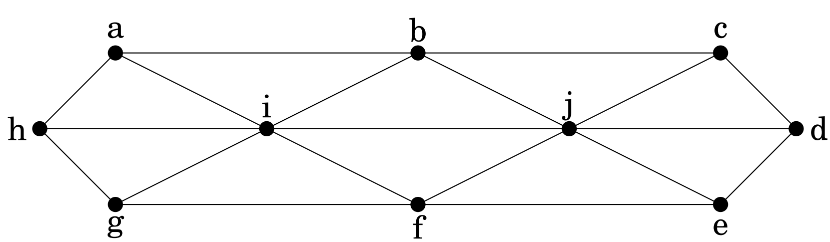
Bài 5.2:



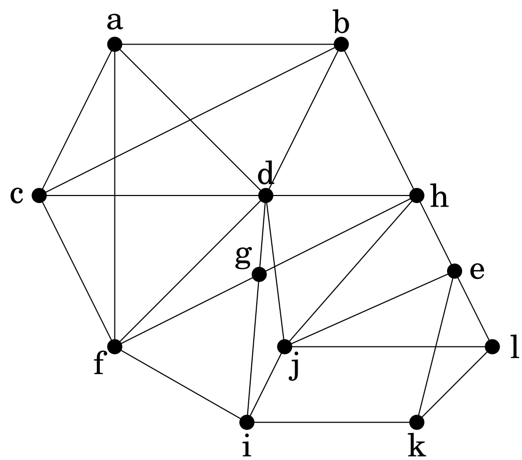
Bài 5.3:



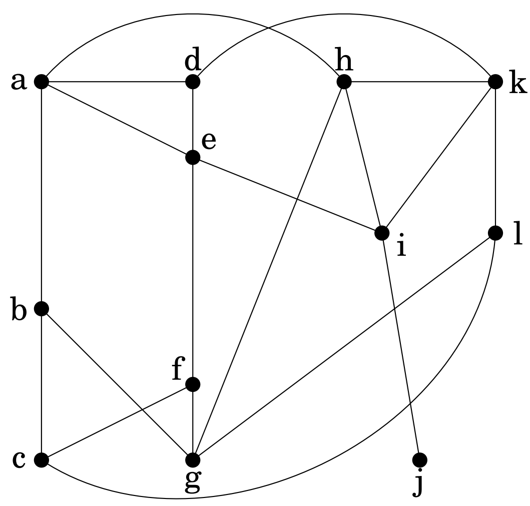
Bài 5.4:



Bài 5.5:



Bài 5.6:



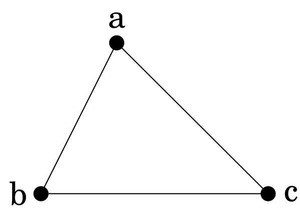
Bài 5.7: Hãy tìm cây khung cho mỗi đồ thị sau:

a) K_5 b) $K_{4,4}$ c) $K_{1,6}$

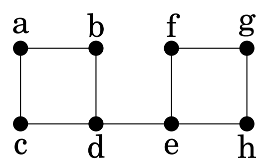
d) Q_3 e) C_5 f) W_5

Trong các bài tập 5.8 – 5.10 hãy vẽ tất cả các cây khung của đồ thị đơn tương ứng.

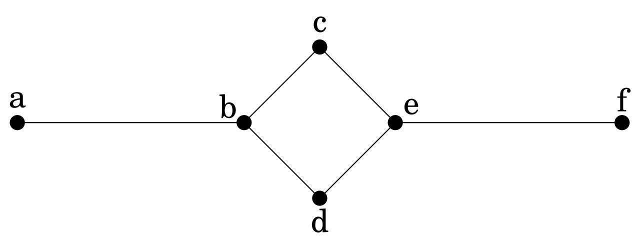
Bài 5.8:



Bài 5.9:



Bài 5.10:



Bài 5.11: Mỗi đồ thị sau có bao nhiêu cây khung khác nhau?

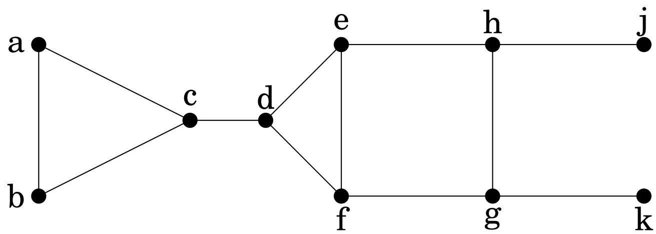
a) K_3 b) K_4 c) $K_{2,2}$ d) C_5

Bài 5.12: Mỗi đồ thị sau có bao nhiêu cây khung không đẳng cấu?

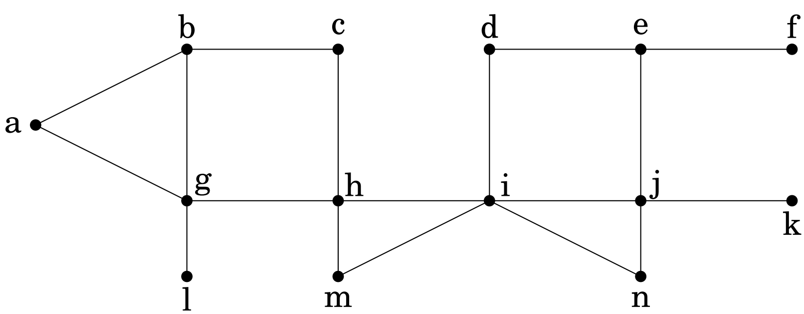
a) K_3 b) K_4 c) K_5

Trong các bài 5.13 – 5.15 dùng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu hãy xác định cây khung của các đơn đồ thị đã cho bằng cách chọn đỉnh a làm đỉnh gốc của cây và giả sử rằng các đỉnh được sắp theo thứ tự điểm.

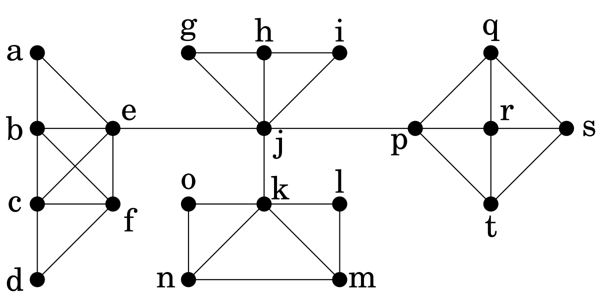
Bài 5.13:



Bài 5.14:

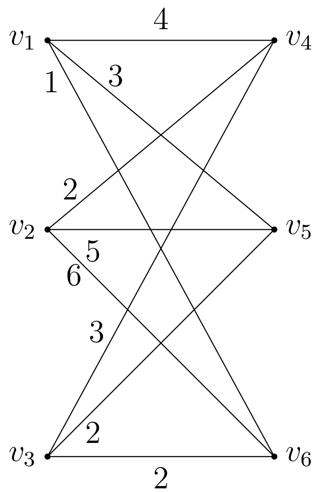


Bài 5.15:

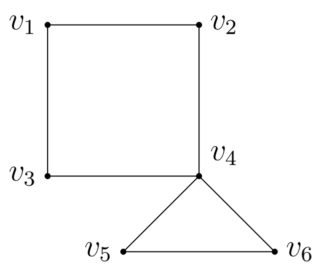


CÂY KHUNG NHỎ NHẤT

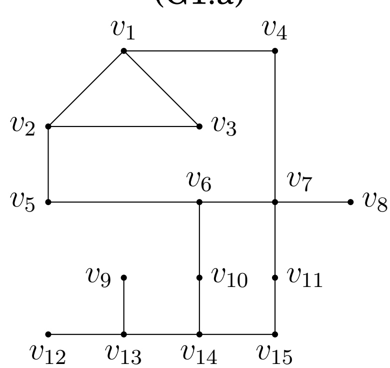
Bài 5.16: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị sau bằng cách sử dụng đỉnh v_1 làm điểm gốc.



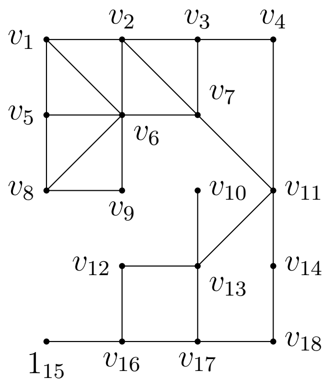
Sử dụng các đồ thị sau để giải các bài tập từ 5.17 – 5.25.



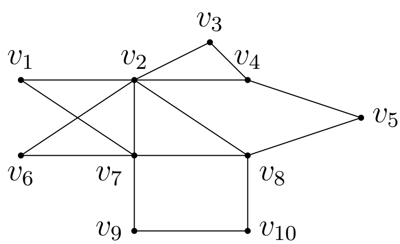
(G1.a)



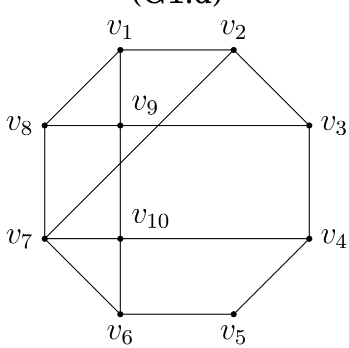
(G1.b)



(G1.c)



(G1.d)



(G1.e)

Bài 5.17: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.a) coi đỉnh v_4 là đỉnh gốc.

Bài 5.18: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.b) coi đỉnh v_1 là đỉnh gốc.

Bài 5.19: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.c) coi đỉnh v_1 là đỉnh gốc.

<u>Bài 5.20</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.d) coi đỉnh v_1 là đỉnh gốc.

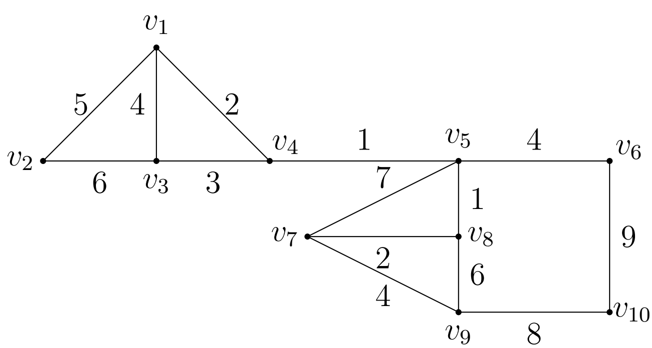
<u>Bài 5.21</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.e) coi đỉnh v_1 là đỉnh gốc.

<u>Bài 5.22</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.b) coi đỉnh v_7 là đỉnh gốc.

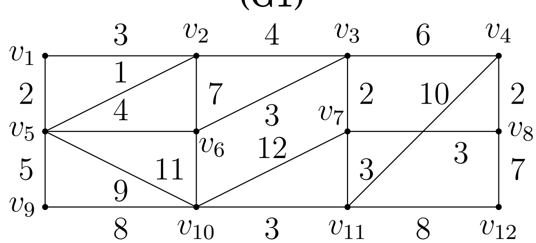
<u>Bài 5.23</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.c) coi đỉnh v_{11} là đỉnh gốc.

<u>Bài 5.24</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.d) coi đỉnh v_3 là đỉnh gốc.

<u>Bài 5.25</u>: Sử dụng thuật toán ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của đồ thị (G1.e) coi đỉnh v_{10} là đỉnh gốc. *Sử dụng các đồ thị sau để giải các bài tập từ 5.26 – 5.32.*



(G1)



(G2)

<u>Bài 5.26</u>: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G1) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_1 làm điểm gốc.

Bài 5.27: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G1) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_5 làm điểm gốc.

Bài 5.28: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G1) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_7 làm điểm gốc.

Bài 5.29: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G2) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_1 làm điểm gốc.

Bài 5.30: Sử dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G2) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_6 làm điểm gốc.

Bài 5.31: Sử dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G1) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_1 làm điểm gốc.

Bài 5.32: Sử dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị (G2) ở trên bằng cách sử dụng đỉnh v_1 làm điểm gốc.

BÀI TOÁN TỐI ƯU

Bài 5.33: Một nhà thám hiểm cần đem theo một cái túi có trọng lượng không quá 40. Có 4 loại đồ vật A, B, C, D có thể mang theo. Trọng lượng và giá trị sử dụng của mỗi loại đồ vật được cho trong bảng sau. Hỏi nhà thám hiểm cần đem theo các loại đồ vật nào để tổng giá trị sử dụng của các đồ vật đem theo là lớn nhất.

Đồ vật	Trọng lượng	Giá trị sử dụng
A	10	30
B	8	28
C	2	2
D	4	8

Bài 5.34: Một công ty xây dựng có ba kỹ sư tên là Nam, Hùng và Mạnh. Họ được phân công phụ trách ba dự án A, B, C. Chi phí để thực hiện từng dự án của mỗi kỹ sư được cho bởi bảng sau (đơn vị 1000 USD). Tìm cách phân công sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất?

Kỹ sư	Dự án		
	A	B	C
Nam	11	14	6
Hùng	8	10	11
Mạnh	9	12	7

Bài 5.35*: S là tập con của $\{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$ có tính chất hiệu của hai phần tử bất kì của S khác 4 và 7. Hãy tìm số phần tử lớn nhất của tập S.

Chương 6

ĐẠI SỐ BOOLE

Đại số Boole đã trở thành một bộ môn toán học độc lập vào những năm 20 của thế kỷ XX và hiện nay nó là một bộ phận quan trọng của đại số trừu tượng hiện đại. Đại số Boole được gọi tên theo nhà toán học Anh thế kỷ XIX, G. Boole. Ông là người đặt nền móng cho bộ môn này khi nghiên cứu một cách có hệ thống phép tính các mệnh đề, làm cơ sở cho đại số lôgic hiện đại.

Đại số Boole có ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật (phân tích và tổng hợp các sơ đồ tiếp xúc, là những phần tử của máy tính) và trong toán học (logic toán, giải tích hàm, lý thuyết xác suất, quy hoạch toán học).

Ngày nay, một bộ phận quy hoạch toán học đang phát triển mạnh là quy hoạch rời rạc với các biến Boole (tức là biến chỉ nhận giá trị là 0 hoặc 1).

6.1. MỞ ĐẦU VỀ ĐẠI SỐ BOOLE

6.1.1. *Biểu thức Boole và hàm Boole*

Đại số Boole nghiên cứu về các phép toán và quy tắc trên tập $B = \{0, 1\}$. Các phép toán thường dùng nhất của đại số Boole là phép lấy phần bù ($^{-}$), tổng Boole (+) và tích Boole (·). (Tương ứng với các phép toán trên các mệnh đề là phép phủ định ($^{-}$), phép tuyển ($\vee$), phép hội hai mệnh đề ($\wedge$)).

Định nghĩa 6.1.1. *Mỗi biến số mà nó chỉ nhận các giá trị trong tập hợp* $B = \{0, 1\}$ *được gọi là biến Boole.*

Ký hiệu: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Biến x là một biến Boole nếu x chỉ nhận hai giá trị là 0 và 1. Hay nói cách khác, miền giá trị của biến Boole là tập hợp B.

Định nghĩa 6.1.2. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các biến Boole. Một biểu thức Boole trên tập* $B = \{0, 1\}$ *được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

i) 0 *và* 1 *là các biểu thức Boole.*

ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các biểu thức Boole.*

iii) Nếu α *là một biểu thức Boole thì* $\bar{\alpha}$

iv) Nếu α_1 *và* α_2 *là hai biểu thức Boole thì* $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2$ *cũng là các biểu thức Boole.*

v) Các biểu thức Boole trên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *chỉ được thành lập bằng các quy tắc từ i)-iv).*

Ta ký hiệu biểu thức Boole trên B bằng các chữ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Nếu α là một biểu thức của n biến Boole phân biệt $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ thì ta ký hiệu $\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Ví dụ 6.1.1. *Các biểu thức* $(x_1 + \bar{x}_2)$*;* $(x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_3)$ *và* $(x_1 \cdot x_2 + \overline{x_3 + x_2})$*, trong đó* $x_1, x_2, x_3 \in B = \{0, 1\}$*, là những biểu thức Boole.*

Ví dụ 6.1.2. *Xây dựng bảng giá trị chân lý của biểu thức Boole*

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + (x_2 \cdot \overline{x}_3))$$

Giải. Do x_1, x_2, x_3 chỉ nhận các giá trị là 0 và 1 nên ta có tám trường hợp xảy ra như bảng sau:

x_1	x_2	x_3	$x_1 + x_2$	$\overline{x}_3$	$x_2 \cdot \overline{x}_3$	$x_1 + (x_2 \cdot \overline{x}_3)$	α
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0

Đặt $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B,\ 1 \leq i \leq n\}$

Định nghĩa 6.1.3. *Một hàm số $f : B^n \to B$ được gọi là hàm Boole bậc n. Nghĩa là, hàm số Boole bậc n là hàm số xác định trên tập B^n và chỉ nhận hai giá trị $\{0, 1\}$.*

Các giá trị hàm Boole thường được cho bằng bảng giá trị.

Ví dụ 6.1.3. *Cho hàm số $f(x, y) = x \cdot \overline{y} + \overline{x}$*

x	y	$f(x, y) = x \cdot \overline{y} + \overline{x}$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Hàm số $f(x, y)$ xác định ở trên chính là hàm số Boole bậc 2.

Các hàm Boole thường được biểu diễn bằng kiến thức của các biến với các phép toán Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu thị một hàm Boole.

Hai hàm n biến F và G được gọi là bằng nhau nếu

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = G(a_1, a_2, \ldots, a_n), \forall a_i \in B.$$

Hai biểu thức Boole có dạng khác nhau nhưng biểu diễn chung một hàm Boole được gọi là hai biểu thức bằng nhau (hay hai biểu thức tương đương).

Ký hiệu $\alpha = \beta$.

Ví dụ 6.1.4. *Các biểu thức Boole $x \cdot y$, $x \cdot y + 0$, $x \cdot y \cdot 1$ là bằng nhau.*

Giải. Để chứng tỏ các biểu thức Boole trên là bằng nhau, chúng ta lập bảng giá trị chân lý và nhận thấy trong tất cả các trường hợp, giá trị chân lý của các biểu thức trên giống nhau.

x	y	$x \cdot y$	$x \cdot y + 0$	$x \cdot y \cdot 1$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Sau đây, chúng ta định nghĩa một số phép toán của hàm Boole.

Định nghĩa 6.1.4. *Phần bù của hàm Boole F được kí hiệu $\overline{F}$, trong đó,*

$$\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)},\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B.$$

Định nghĩa 6.1.5. *Tổng và tích của hai hàm Boole:*

$$(F + G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$(FG)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

6.1.2. *Các hằng đẳng thức của đại số Boole*

Cho x, y, z là các biến Boole, khi đó, ta có các tính chất sau:

Các hằng đẳng thức	
Hằng đẳng thức	Tên gọi
$\overline{\overline{x}} = x$	Luật bù kép
$x + x = x, \quad x \cdot x = x$	Luật lũy đẳng
$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$	Luật đồng nhất
$x + (x \cdot y) = x, \quad x \cdot (x + y) = x$	Luật hút
$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$	Luật giao hoán
$x + (y + z) = (x + y) + z,$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Luật kết hợp
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	Luật phân phối
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}, \ \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	Luật DeMorgan
$x + \overline{x} = 1, x \cdot \overline{x} = 0$	Luật nghịch đảo
$x + 1 = 1, x \cdot 0 = 0$	Luật trội

Ví dụ 6.1.5. *Chứng minh luật kết hợp*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Giải.

Ta đặt $\alpha(x, y, z) = x \cdot (y \cdot z)$ và $\beta(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z$. Ta có bảng giá trị chân lý:

x	y	z	$y \cdot z$	$x \cdot y$	$x \cdot (y \cdot z)$	$(x \cdot y) \cdot z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Từ bảng giá trị chân lý trên, ta suy ra, $\alpha(b_1, b_2, b_3) = \beta(b_1, b_2, b_3)$ với mọi giá trị $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$ tương ứng là các giá trị của x, y, z. Do đó, $\alpha = \beta$. Vậy, ta có $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Ví dụ 6.1.6. *Chứng minh luật phân phối*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Giải.

Ta đặt $\alpha(x, y, z) = x \cdot (y + z)$ và $\beta(x, y, z) = x \cdot y + x \cdot z$. Ta có bảng giá trị chân lý:

x	y	z	$y + z$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y + x \cdot z$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Từ bảng giá trị chân lý trên, ta suy ra, $\alpha(b_1, b_2, b_3) = \beta(b_1, b_2, b_3)$ với mọi giá trị $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$ tương ứng là các giá trị của x, y, z. Do đó, $\alpha = \beta$. Vậy, ta có $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

* Đặt $\alpha(x, y, z) = x + (y \cdot z)$ và $\beta(x, y, z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
Ta có bảng giá trị chân lý:

x	y	z	$y \cdot z$	$x + y$	$x + z$	$x + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (x + z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Từ bảng giá trị chân lý trên, ta suy ra, $\alpha(b_1, b_2, b_3) = \beta(b_1, b_2, b_3)$ với mọi giá trị $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$ tương ứng là các giá trị của x, y, z. Do đó, $\alpha = \beta$. Vậy, ta có $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Cho α, β, γ là các biểu thức Boole của n biến Boole $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Khi đó, ta có các tính chất sau:

Các hằng đẳng thức	
Hằng đẳng thức	Tên gọi
$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$	Luật bù kép
$\alpha + \alpha = \alpha, \quad \alpha \cdot \alpha = \alpha$	Luật lũy đẳng
$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha$	Luật đồng nhất
$\alpha + (\alpha \cdot \beta) = \alpha, \quad \alpha \cdot (\alpha + \beta) = \alpha$	Luật hút
$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Luật giao hoán
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$ $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	Luật kết hợp
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$ $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$	Luật phân phối
$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$	Luật DeMorgan
$\alpha + \overline{\alpha} = 1$, $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 0$	Luật nghịch đảo
$\alpha + 1 = 1$, $\alpha \cdot 0 = 0$	Luật trội

Tính đối ngẫu của biểu thức Boole

Định nghĩa 6.1.6. *Cho α là một biểu thức Boole. Biểu thức Boole β được gọi là biểu thức đối ngẫu của α nếu β có được từ α bằng cách thay các phép toán của α theo cách: Tổng Boole thay bởi tích Boole, tích Boole thay bởi tổng Boole và chuyển 1 thành 0, chuyển 0 thành 1.*

Ví dụ 6.1.7. *Tìm các đối ngẫu của $x \cdot (y + 0)$ và $\overline{x} \cdot 1 + (\overline{y} + z)$*

Giải.

Đổi chỗ các dấu $\cdot$ và + cho nhau, các số 0 và 1 cho nhau trong các biểu thức trên ta sẽ nhận được các đối ngẫu của chúng. Các đối ngẫu đó tương ứng là $x + y \cdot 1$; $(\overline{x} + 0) \cdot (\overline{y} \cdot z)$.

Ví dụ 6.1.8. *Xét biểu thức Boole $\alpha = (x_1 + 1) \cdot \overline{x}_2 + x_3$. Khi đó, biểu thức Boole đối ngẫu của α là $\alpha^d = ((x_1 \cdot 0) + \overline{x}_2) \cdot x_3$.*

6.1.3. *Định nghĩa đại số Boole*

Định nghĩa 6.1.7. *Đại số Boole là một tập hợp B có hai phần tử 0 và 1 với hai phép toán hai ngôi $\vee$ và $\wedge$ và phép toán $^{-}$ thỏa mãn các tính chất sau:*

$$\begin{array}{ll}
\textit{Luật đồng nhất} & \begin{cases} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{cases} \\
\textit{Luật hút} & \begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ x \wedge \overline{x} = 0 \end{cases} \\
\textit{Luật kết hợp} & \begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{cases} \\
\textit{Luật giao hoán} & \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases} \\
\textit{Luật phân phối} & \begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z \end{cases}
\end{array}$$

6.2. BIỂU DIỄN CÁC HÀM ĐẠI SỐ BOOLE

6.2.1. *Các hàm đại số Boole sơ cấp*

Định nghĩa 6.2.1. *Các hàm đại số Boole sau được gọi là hàm sơ cấp*

$$f_n: \ B^n \longrightarrow B \qquad (\textit{với } n \leq 2).$$

Nếu $n = 0$ thì có hai hàm hằng là $f_0 \equiv 0$ và $f_0 \equiv 1$.

Nếu $n = 1$ thì có hai hàm xác định bởi bảng sau:

x	f_{11}	f_{12}
0	0	1
1	1	0

Hàm $f_{12}(x)$ được gọi là hàm phủ định, ký hiệu là $\overline{x}$.

Hàm $f_{11}(x)$ được gọi là hàm đồng nhất.

Nếu $n = 2$ thì ta có 10 hàm xác định bởi bảng sau:

x	y	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0

Trong đó, tên gọi một số hàm thông dụng trong 10 hàm trên là:

+) Hàm $g_1(x, y)$ được gọi là hàm hội (hay hàm tích) của x và y, ký hiệu $x\&y$ hay $x \cdot y$ hay $x \wedge y$.

+) Hàm $g_2(x, y)$ được gọi là hàm tuyển của x và y, ký hiệu $x \vee y$.

+) Hàm $g_3(x, y)$ được gọi là hàm tổng (hay hàm modun 2) của x và y, ký hiệu $x + y$.

+) Hàm $g_4(x, y)$ được gọi là hàm kéo theo, ký hiệu $x \Rightarrow y$.

+) Hàm $g_5(x, y)$ được gọi là hàm tương đương, ký hiệu $x \Leftrightarrow y$.

+) Hàm $g_6(x, y)$ được gọi là hàm Vebb, ký hiệu $x \circ y$.

+) Hàm $g_7(x, y)$ được gọi là hàm Sheffer, ký hiệu $x|y$.

Tính chất:

i. Kết hợp $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$

ii. Giao hoán $x \vee y = y \vee x$
$x \cdot y = y \cdot x$

iii. Phân phối $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y)(x \vee z)$
$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee xz$

iv. Đối ngẫu $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

6.2.2. *Biểu diễn các hàm đại số Boole*

Quy ước: Để thuận tiện cho việc trình bày, ta quy ước như sau: Giả sử x là một biến Boole và $\sigma \in \{0, 1\}$. Khi đó,

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad \sigma = 0 \\ \bar{x} & \text{nếu} \quad \sigma = 1 \end{cases}$$

với $x \in B = \{0, 1\}$.

Từ quy ước trên ta có $x^\sigma = 1 \iff x = \sigma$.

Cho một họ các hàm đại số Boole $\{f_i, \quad i \in I\}$

$\vee_{i \in I} f_i$: Tuyển của một họ

$\underset{i \in I}{\wedge} f_i$ hay $\underset{i \in I}{\&} f_i$: Hội của một họ

Tập đặc trưng của hàm f

$T_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$

Tính chất: $T_{\overline{f}} = \overline{T}_f, T_{f \vee g} = T_f \cup T_g, \ T_{f \cap g} = T_f \cap T_g$

Định lý 6.2.1. *Mọi hàm đại số Boole $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i \in B}^{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_i^{\sigma_i}} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad \forall i \in [1, n].$$

Hệ quả 6.2.1. *Hàm đại số Boole $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thể khai triển được theo một đối số x_i dưới dạng:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \overline{x}_i \cdot f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &\wedge x_i \cdot f(x_i, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n) \end{aligned}$$

Hệ quả 6.2.2. *Hàm đại số Boole $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thể khai triển được dưới dạng:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee\nolimits_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\ \in\ T_f}^{x^{\sigma_1}\ldots x^{\sigma_n}}$$

(Công thức khai triển này gọi là dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn của f và mỗi số hạng của nó được gọi là một cấu tạo đơn vị của f).

Ví dụ 6.2.1. *Cho hàm đại số Boole bậc 3 xác định bởi bảng sau:*

x_1	$f(x_2$	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Khi đó, dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn của hàm f là:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) \vee (x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3).$$

Ngoài hệ tuyển, hội và phủ định, tồn tại nhiều hệ khác cũng có tính chất: Tất cả các hàm đại số Boole đều được biểu diễn qua các thành viên của hệ. Một hệ hàm như vậy được gọi là một hệ đầy đủ. Chẳng hạn có thể chứng minh các hệ sau là các hệ đầy đủ:

$$\{0, 1, x + y, x \wedge y\}, \{x, x \vee y\}, \{x, x \wedge y\}, \{x|y\}, \{x \circ y\}.$$

6.2.3. *Biểu diễn tối thiểu của hàm đại số Boole*

Biểu diễn hàm đại số Boole f qua một hệ đầy đủ H là không duy nhất. Chẳng hạn, hàm Sheffer, khi biểu diễn qua hệ tuyển, hội và phủ định có hai cách biểu diễn là:

$$x|y = \overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Mỗi một biểu diễn f tương ứng với một cách "ghép" các thành viên của H (mà ta gọi là các yếu tố cơ bản) để thu được f. Hiển nhiên, một vấn đề thực tế quan trọng là, cần tìm một biểu diễn sao cho việc ghép như thế là tốn ít các yếu tố cơ bản nhất. Theo một nghĩa nào đó, điều này dẫn đến việc tìm một công thức biểu diễn hàm f trên hệ H với số ký hiệu các yếu tố cơ bản là ít nhất. Một công thức như thế, được gọi là một biểu diễn tối thiểu của hàm f trong hệ H.

Về nguyên tắc, số công thức biểu diễn hàm f là hữu hạn, nên bằng cách duyệt tất cả các khả năng, ta luôn tìm được biểu diễn tối thiểu của f. Tuy nhiên, số khả năng này là rất lớn nên việc duyệt tất cả các khả năng đòi hỏi một khối lượng tính toán khổng lồ, do đó trên thực tế khó thực hiện được ngay cả trên những siêu máy tính.

Vì thế, việc xây dựng thuật toán hữu hiệu để biểu diễn dạng tối tiểu của các hàm đại số Boole càng trở nên cấp bách và cần thiết, nhưng nó là một bài toán khó. Cho đến nay, bài toán này vẫn chưa được giải quyết thỏa đáng ngay cả trong một số trường hợp đơn giản và nó đang được tiếp tục nghiên cứu.

Một hệ đầy đủ được nghiên cứu nhiều nhất là hệ tuyển, hội và phủ định. Bài toán tìm biểu diễn tối thiểu của các hàm đại số Boole trong hệ này đã được nghiên cứu mấy chục năm gần đây. Tuy nhiên, kết quả đạt được mới chỉ đề cập đến một số dạng biểu diễn riêng biệt trong hệ đó, đó là dạng biểu diễn chuẩn tắc của các hàm Boole mà ta sẽ nghiên cứu trong bài tiếp theo.

Giả sử $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm đại số Boole. Một hàm đại số Boole $g(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ được gọi là một nguyên nhân (implicant) của f nếu tập T_g là tập con của T_f, nói cách khác, nếu $(g \Rightarrow f) = 1$. Ta dễ dàng nhận thấy rằng mỗi phép hội sơ cấp trong một dạng tuyển chuẩn tắc của f là một nguyên nhân của f.

Một hội sơ cấp A được gọi là một nguyên nhân nguyên tố của f, nếu A là một nguyên nhân của f sao cho không thể xóa đi bất cứ biến nào trong nó (cùng với dấu phủ định nếu có) để A vẫn còn là nguyên nhân của f.

6.3. DẠNG TUYỂN CHUẨN TẮC HÀM ĐẠI SỐ BOOLE

6.3.1. *Các khái niệm cơ bản*

Cho n biến x_1, x_2,..., x_n. Một biểu thức dạng:

$$x_{i1}^{\sigma_1} x_{i2}^{\sigma_2} \ldots x_{ij}^{\sigma_j}$$

trong đó, $\sigma_1, \ldots, \sigma_j \in \{0, 1\}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq n$ và $i_t \neq i_s$ nếu $t \neq s$ được gọi là hội sơ cấp của n biến x_1, x_2, ..., x_n. Số các biến xuất hiện trong hội sơ cấp được gọi là hạng của hội sơ cấp đó.

Ví dụ 6.3.1. *Hội sơ cấp* $x_1\, \overline{x_3} x_4$ *có hạng* 3.

Hội sơ cấp $x_1 x_3 x_5\, \overline{x_7}$ *có hạng* 4.

Giả sử $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm đại số Boole. Một công thức biểu diễn f dưới dạng tuyển của một số hội sơ cấp khác nhau của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là một dạng tuyển chuẩn tắc của hàm f.

Ví dụ 6.3.2. *Công thức* $\overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y}$ *là một dạng tuyển chuẩn tắc của hàm* $x + y$.

Các công thức $\overline{x} \vee \overline{y}$ và $\overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y}$ là các dạng tuyển chuẩn tắc của hàm Sheffer $x|y$.

6.3.2. *Dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn*

Định lý 6.3.1. *Tuyển của một số bất kỳ các nguyên nhân của hàm f cũng là một nguyên nhân của hàm đó.*

Chứng minh. Tập đặc trưng của tuyển này là hợp của các tập đặc trưng của các nguyên nhân đang xét, vì thế nó cũng là tập con của tập đặc trưng của hàm f. □

Định lý 6.3.2. *Giả sử S là một hệ đầy đủ các nguyên nhân của hàm f. Khi đó tuyển của tất cả các nguyên nhân trong S sẽ trùng với f (ta cũng nói tuyển này thực hiện f).*

Chứng minh. Áp dụng định nghĩa về hệ đầy đủ, ta nhận được $\bigcup\limits_{g \in S} T_g = T_f$. Vế trái của đẳng thức này chính là tập đặc trưng của tuyển đăng xét. Từ đó, suy ra kết luận định lý. □

Một số phép toán mà chúng ta thường sử dụng trong quá trình biến đổi tìm dạng chuẩn tắc của hàm đại số Boole:

+) Phép nuốt sơ cấp $(\alpha \cdot \beta) \vee \alpha = \alpha$

+) Phép dán $(\alpha \cdot x) \vee (\alpha \cdot \overline{x}) = \alpha$

+) Phép dán không đầy đủ $(\alpha \cdot x) \vee (\alpha \cdot \overline{x}) = \alpha \vee (\alpha \cdot x) \vee (\alpha \cdot \overline{x})$.

+) Phép dán mở rộng $\alpha \cdot \gamma \vee \beta \cdot \overline{\gamma} = \alpha \cdot \gamma \vee \beta \cdot \overline{\gamma} \vee \alpha \cdot \beta$.

Trong đó, α, β và γ là các biểu thức Boole bất kỳ, x là biến Boole.

Mỗi hội sơ cấp hạng k: $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_j}^{\sigma_j}$ được gọi là một nguyên nhân hạng k của hàm f. Một cấu tạo đơn vị của f là một nguyên nhân hạng n của nó.

Định lý 6.3.3.

a) Một nguyên nhân hạng k của hàm f $(k < n)$ là kết quả của phép dán hai nguyên nhân hạng $k+1$ của hàm đó.

b) Một nguyên nhân hạng k của hàm f $(k \leq n)$ là nguyên nhân nguyến tố của f nếu không thể dán được bất kỳ nguyên nhân hạng k nào của f.

Từ Định lý 6.3.3 ta có thuật toán Quine sau đây để tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm đại số Boole $f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

Bước 1: Tìm dạng chuẩn tắc hoàn toàn của hàm f, ký hiệu f_0.

Bước 2: Từ f_i ta xây dựng f_{i+1} bằng cách thực hiện tất cả các phép dán không đầy đủ đối với các hội sơ cấp hạng $n-i$ trong hàm f, sau đó xóa bỏ tất cả các hội sơ cấp $n-i$ có được bằng phép nuốt sơ cấp.

Bước 3: Lặp lại bước 2 cho đến khi thu được $f_{k+1} = f_k$. Khi đó f_k sẽ là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

Ví dụ 6.3.3. *Tìm dạng chuẩn tắc thu gọn của hàm*

$$f = (x \cdot y \cdot z) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot z) \vee (x \cdot \overline{y} \cdot z) \vee (x \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}).$$

Giải:

Ta có $f_0 = f$. Dùng phép dán không đầy đủ đối với các hội sơ cấp hạng 3, ta được

$$(y \cdot z) \vee (x \cdot z) \vee (x \cdot y) \vee (x \cdot y \cdot z) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot z) \vee (x \cdot \overline{y} \cdot z) \vee (x \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}).$$

Sau đó, dùng các phép nuốt sơ cấp ta được

$$f_1 = (y \cdot z) \vee (x \cdot z) \vee (x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}).$$

Đến đây các hội sơ cấp hạng 2 không dán được với nhau, tức là $f_2 = f_1$ và f_1 là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

6.3.3. *Dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu*

Sau khi tìm được dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn f, nghĩa là tìm được tất cả các nguyên nhân nguyên tố của nó, ta tiếp tục sử dụng phương pháp Quine để tìm dạng chuẩn tắc tối thiểu của f như sau: Lập một bảng chữ nhật, mỗi cột ứng với một cấu tạo đơn vị của f và mỗi dòng ứng với một nguyên nhân nguyên tố của f. Tại ô (i, j), ta đánh dấu $+$ nếu nguyên nhân nguyên tố ở dòng i là một phần con của cấu tạo đơn vị ở cột j. Ta cũng nói rằng khi đó, nguyên nhân nguyên tố i là phủ cấu tạo đơn vị j. Một hệ S các nguyên nhân nguyên tố của f được gọi là phủ hàm của f, nếu mọi cấu tạo đơn vị của f đều được phủ ít nhất bởi một thành viên thuộc hệ. Dễ thấy rằng, nếu hệ S là phủ hàm f thì nó là đầy đủ, nghĩa là tuyển các thành viên trong S là thực hiện f.

Một nguyên nhân nguyên tố được gọi là cốt yếu, nếu thiếu nó thì một hệ các nguyên nhân nguyên tố không thể phủ hàm f. Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu được tìm như sau: tại những cột chỉ có duy nhất một dấu $+$, xem dấu $+$ đó thuộc dòng nào thì dòng đó tương ứng với một nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Việc lựa chọn các nguyên nhân nguyên tố trên bảng đã đánh dấu, để được dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu ta tiến hành theo các bước:

Bước 1: Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu

Bước 2: Xóa tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu, tức là tất cả các cột có ít nhất một dấu $+$ tại những dòng ứng với các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 3: Trong bảng còn lại, xóa nốt những dòng không còn dấu $+$ và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xóa bớt một cột.

Bước 4: Sau các bước trên, tìm một hệ các nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất phủ tất cả các cột còn lại.

Tuyển của các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu và các nguyên nhân trong hệ S sẽ là dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm f.

Ví dụ 6.3.4. *Tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm f trong ví dụ 6.3.3 với bảng sau khi đã đánh dấu $+$ có dạng:*

	xyz	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}z$	$xy\overline{z}$	$\overline{xyz}$
xy	$+$			$+$	
xz	$+$		$+$		
yz	$+$	$+$			
$\overline{xyz}$					$+$

Giải.

Trong trường hợp này, mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Hàm f có dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu, đồng thời cũng chính là dạng chuẩn tắc thu gọn là:

$$f_1 = yz \vee xz \vee xy \vee \overline{xyz}.$$

CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG 6

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
Biến Boole	Boolean variable
Biểu thức Boole	Boolean expressions
Hàm Boole	Boolean function
Luật giao hoán	Commutative laws
Luật giao hoán	Commutative laws
Luật kết hợp	Associative laws
Luật phân phối	Distributive laws
Luật lũy đẳng	Idempotent laws
Luật đồng nhất	Identity laws
Luật nghịch đảo	Inverse laws
Luật trội	Dominance laws
Luật hút	Absorption laws
Luật DeMorgan	DeMorgan's laws
Hàm Boole sơ cấp	Boolean algebra
Biểu diễn tối tiểu của hàm Boole	Minimization of a Boolean function

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 6.1: Tìm giá trị của các biểu thức sau:

a) $1 \cdot \overline{0}$ b) $1 + \overline{1}$

c) $0 \cdot \overline{0}$ d) $\overline{(1 + 0)}$

Bài 6.2: Tìm các giá trị (nếu có) của biến Boole x thỏa mãn các phương trình sau:

a) $x \cdot 1 = 0$ b) $x + x = 0$

c) $x \cdot 1 = x$ d) $x \cdot \overline{x} = 1$.

Bài 6.3: Tìm các biến Boole x và y thỏa mãn phương trình $xy = x + y$.

Bài 6.4: Có bao nhiêu hàm Boole bậc 7 khác nhau?

Bài 6.5: Chứng minh luật hút $x + (x \cdot y) = x$ bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức Boole. Trong đó, x, y là các biến Boole.

Bài 6.6: Chứng minh rằng hàm Boole $F(x, y, z) = xy + xz + yz$ có giá trị bằng 1 nếu và chỉ nếu ít nhất một trong các biến x, y, z có giá trị bằng 1.

Bài 6.7: Chứng minh đẳng thức:

$$x\overline{y} + y\overline{z} + \overline{x}z = \overline{x}y + \overline{y}z + x\overline{z}.$$

Trong đó, x, y, z là các biến Boole.

Bài 6.8: Cho toán tử Boole $\oplus$ (hay gọi là toán tử xor), được định nghĩa như sau:

$$1 \oplus 1 = 0,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 0 \oplus 1 = 1 \text{ và } 0 \oplus 0 = 0.$$

Chứng minh:

a) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$

b) $x \oplus y = (x + \overline{y}) + (\overline{x} + y)$

c) $x \oplus y = y \oplus x$

Bài 6.9: Chứng minh hoặc bác bỏ các đẳng thức sau:

a) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

b) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$

c) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

Bài 6.10: Tìm đối ngẫu của các biểu thức sau:

a) $x + y$ b) $\overline{xy}$

c) $xyz + \overline{xyz}$ d) $x\overline{z} + x \cdot 0 + \overline{x} \cdot 1.$

Trong các bài tập 6.11 – 6.20, tìm dạng tuyển chuẩn tắc của mỗi hàm bằng cách sử dụng các kỹ thuật đại số Boole.

Bài 6.11: $f(x, y) = x \vee xy$

Bài 6.12: $f(x, y, z) = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$

Bài 6.13: $f(x, y, z) = x \vee y(x \vee \overline{z})$

Bài 6.14: $f(x, y, z) = (yz \vee x\overline{z})\overline{(x\overline{y} \vee z)})$

Bài 6.15: $f(x, y, z) = x \vee (\overline{y} \vee (x\overline{y} \vee x\overline{z})$

Bài 6.16: $f(x, y, z) = (\overline{x}y \vee \overline{xz})(\overline{x \vee yz})$

Bài 6.17: $f(x, y, z) = (x \vee \overline{x}y \vee \overline{x}y\overline{z})(xy \vee \overline{xz})(y \vee xy\overline{z})$

Bài 6.18: $f(w, x, y, z) = wy \vee (w\overline{y} \vee z)(x \vee \overline{w}z)$

Bài 6.19: $f(x, y, z) = (\overline{x}y \vee \overline{xz})\overline{(xyz \vee y\overline{z})}(x\overline{y}z \vee x\overline{y} \vee x\overline{yz} \vee \overline{xyz})$

Bài 6.20: $f(w, x, y, z) = (\overline{w}x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z})(\overline{\overline{wy}z \vee xy\overline{z} \vee yxz})(\overline{w}z \vee xy \vee \overline{w}\,\overline{y}z) \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}yz)$

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN VÀ LỜI GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP

Chương 1

Bài 1.1: Ta có bảng giá trị chân lý của các mệnh đề:

a) $p \wedge \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
1	0	0
0	1	0

b) $p \vee \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
1	0	1
0	1	1

c) $(p \vee \overline{q}) \Rightarrow q$

p	q	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$	$(p \vee \overline{q}) \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

d) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Bài 1.2: Ta có bảng giá trị chân lý của các mệnh đề như sau:

a) $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

b) $p \oplus \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \oplus \overline{p}$
1	0	1
0	1	1

c) $p \oplus \overline{q}$

p	q	$\overline{q}$	$p \oplus \overline{q}$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1

d) $\overline{p} \oplus \overline{q}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \oplus \overline{q}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \overline{q})$

p	q	$\overline{q}$	$p \oplus q$	$p \oplus \overline{q}$	$(p \oplus q) \vee (p \oplus \overline{q})$
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1

f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \overline{q})$

p	q	$\overline{q}$	$p \oplus q$	$p \oplus \overline{q}$	$(p \oplus q) \wedge (p \oplus \overline{q})$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0

Bài 1.3:

a) $p \Rightarrow \overline{q}$

p	q	$\overline{q}$	$p \Rightarrow \overline{q}$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

b) $\overline{p} \Leftrightarrow q$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \Leftrightarrow q$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

c) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1

d) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0

e) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{p} \Leftrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{p} \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1

f) $(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$	$p \Leftrightarrow q$	$(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Bài 1.4:

a) $(p \vee q) \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

b) $(p \vee q) \wedge r$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0

c) $(p \wedge q) \vee r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

d) $(p \wedge q) \wedge r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

e) $(p \vee q) \wedge \overline{\mathrm{r}}$

p	q	r	$\overline{r}$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \overline{r}$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

f) $(p \wedge q) \vee \overline{r}$

p	q	r	$\overline{r}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \overline{r}$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1

Bài 1.5:

a) $p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{q}$	$\overline{q} \vee r$	$p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

b) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{p}$	$p\ q$	$\overline{p}\ r$	$(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

c) $\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{p}$	$q \Rightarrow r$	$\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

d) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{q}$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{q} \Leftrightarrow r$	$(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

e) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

f) $(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

Bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$	$q \Leftrightarrow r$	$(\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Bài 1.10:

a) $\chi = 2(T)$

b) $\chi = 1(F)$

c) $\chi = 2(T)$

d) $\chi = 1(F)$

e) $\chi = 2(T)$

Bài 1.11:

a) 1011110

0100001

$-----$

1111111 $OR\ bit$

0000000 $AND\ bit$

1111111 $XOR\ bit$

b) 11110000

10101010

$------$

11111010 $OR\ bit$

10100000 $AND\ bit$

01011010 $XOR\ bit$

c) 0001110001

1001001000

$-----$

10011110011 $OR\ bit$

00010000000 $AND\ bit$

10001110011 $XOR\ bit$

d) 1111111111

0000000000

$------$

1111111111 $OR\ bit$

0000000000 $AND\ bit$

1111111111 $XOR\ bit$

Bài 1.12:

a)
$$\begin{array}{ll} & 01011 \\ \bigvee & \\ & 11011 \\ & --- \\ & 11011 \\ \bigwedge & \\ & 11000 \\ & --- \\ & 11000 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & 01111 \\ \bigwedge & \\ & 10101 \\ & --- \\ & 00101 \\ \bigvee & \\ & 01000 \\ & --- \\ & 01101 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 01010 \\ \oplus \\ 11011 \\ --- \\ 10001 \\ \oplus \\ 01000 \\ --- \\ 11001 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccc} 11011 & & 10001 \\ \bigvee & & \bigvee \\ 01010 & & 11011 \\ --- & & --- \\ 11011 & & 11011 \\ & & \\ & & 11011 \\ & & \bigwedge \\ & & 11011 \\ & & --- \\ & & 11011 \end{array}$$

Bài 1.14:

a) $A \cap B$: tập hợp các sinh viên sống cách xa trường trong vòng bán kính một dặm và đang trên đường tới lớp.

b) $A \cup B$: tập hợp tất cả các sinh viên hoặc sống cách xa trường trong vòng bán kính một dặm hoặc đang trên đường tới lớp (hoặc cả hai)

c) $A \backslash B$: tập hợp tất cả các sinh viên sống cách xa trường trong vòng bán kính một dặm và không đang trên đường tới lớp.

d) $B \backslash A$: tập hợp tất cả các sinh viên đang trên đường tới lớp và sống gần trường trong vòng bán kính một dặm.

Bài 1.15:

a) $A \cap B$	c) $A \cup B$
b)$A \backslash B$	d) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Bài 1.17: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 3, 6\}$

a)$A \cap B = \{3\}$	c) $A \backslash B = \{1, 2, 4, 5\}$
b) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	d) $B \backslash A = \{0, 6\}$

Bài 1.18: $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

a) $A \cap B = \{a, b, c, d, e\} = A$

b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = B$

c) $A \backslash B = \emptyset$

d) $B \backslash A = \{f, g, h\}$

Bài 1.20: Ta có bảng tính thuộc

A	$\overline{\text{A}}$	$\overline{\overline{\text{A}}}$
1	0	1
0	1	0

Vì cột A và $\overline{\overline{\text{A}}}$ giống nhau nên ta có: $A = \overline{\overline{A}}$.

Bài 1.22:

a) $A \cup B = B \cup A$. Ta có bảng tính thuộc

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Hai cột $A \cup B$ và $B \cup A$ giống nhau nên: $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$. Ta có bảng tính thuộc

A	B	$A \cap B$	$B \cap A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Ta thấy hai cột $A \cap B$ và $B \cap A$ giống nhau nên: $A \cap B = B \cap A$

<u>Bài 1.23</u>: $A \backslash B = \{1, 5, 7, 8\} \quad \Rightarrow \begin{cases} \{1, 5, 7, 8\} \subseteq A \\ \{1, 5, 7, 8\} \subseteq B \end{cases}$

$B \backslash A = \{2, 10\} \quad \Rightarrow \begin{cases} \{2, 10\} \subseteq B \\ \{2, 10\} \subseteq A \end{cases}$

$A \cap B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow \begin{cases} \{\ 3,\ 6,\ 9\ \} \subseteq \mathrm{A} \\ \{\ 3,\ 6,\ 9\ \} \subseteq \mathrm{B} \end{cases}$

Vậy $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{2, 3, 6, 9, 10\}$

<u>Bài 1.24</u>:

a) +) Giả sử $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ và $x \notin B$.

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (1).

+) Giả sử $x \notin \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ và $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (đpcm).

b) Ta có bảng thuộc tính:

A	**B**	$\overline{\mathrm{A}}$	$\overline{\mathrm{B}}$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$	$\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Ta thấy cột $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ giống nhau, vậy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Bài 1.25:

a) Giả sử $x \in (A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cap B \subseteq A$.

b) Giả sử $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subseteq (A \cup B)$.

c) Giả sử $x \in A \backslash B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \backslash B \subseteq A$.

d) Giả sử $x \in A \cap (B \backslash A) \Rightarrow \begin{cases} x \in a \\ x \notin B \backslash A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \Rightarrow x = \varnothing \\ x \notin A \end{cases}$.

$\Rightarrow A \cap (B \backslash A) \subset \varnothing$ và hiển nhiên $A \cap (B \backslash A) \subset \varnothing$.

Bài 1.26:

a) Giả sử $x \in \overline{A \cap B \cap C} \Rightarrow x \notin A$ hoặc $x \notin B$ hoặc $x \notin C$.

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$ hoặc $x \in \overline{C} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap B \cap C} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

$\Leftrightarrow$ Giả sử $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \Rightarrow x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{C}$.

$\Rightarrow x \notin A$ hoặc $x \notin B$ hoặc $x \notin C \Rightarrow x \notin A \cap B \cap C$.

$\Rightarrow x \in \overline{A \cap B \cap C} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \subset \overline{A \cap B \cap C}$.

Vậy $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

b) Ta có bảng thuộc tính:

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A\cap B\cap C$	$\overline{A\cap B\cap C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

Ta thấy hai cột $\overline{A\cap B\cap C}$ và $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ giống nhau nên:
$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

Bài 1.27:

a) Theo Bài 1.25b có: $(A\cup B)\subseteq(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$. Vậy ta có điều cần phải chứng minh.

b) Theo Bài 1.25a có: $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap B$.

c) Giả sử $x\in(A\backslash B)\backslash C\Rightarrow\begin{cases}x\in A\backslash B\\ x\notin C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\notin B\\ x\notin C\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in A\backslash C\\ x\notin B\end{cases}\Rightarrow x\in(A\backslash C)\backslash B.$

$\Rightarrow(A\backslash B)\backslash C\subseteq(A\backslash C)\backslash B\subseteq A\backslash C\Rightarrow(A\backslash B)\backslash C\subseteq A\backslash C$, (theo kết quả Bài 1.25c).

d) Giả sử $x \in (A\backslash C) \cap (C\backslash B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A\backslash C \\ x \in C\backslash B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin C \\ x \notin C \\ x \notin B \end{cases}$.

$\Rightarrow x \in \varnothing$.

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (A\backslash C) \cap (C\backslash B) \subset \varnothing \\ \text{mà } (A\backslash C) \cap (C\backslash B) \supset \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow (A\backslash C) \cap (C\backslash B) = \varnothing.$

Bài 1.28:

- Giả sử $x \in A\backslash B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$.

  $\Rightarrow A\backslash B \subset A \cap \overline{B}$ (1).

- Giả sử $x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A\backslash B$.

  $\Rightarrow A \cap \overline{B} \subset A\backslash B$ (2).

  Từ (1) và (2) $\Rightarrow A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

Bài 1.29: Ta có bảng thuộc tính:

A	B	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Ta thấy cột A và cột $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ giống nhau nên:

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Bài 1.30:

a) Ta có bảng thuộc tính:

A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	$(A \cup B) \cup C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Ta thấy cột $A \cup (B \cup C)$ và $(A \cup B) \cup C$ giống nhau nên:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

b) Ta có bảng thuộc tính:

A	B	C	$A \cap B$	$B \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	$(A \cap B) \cap C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Ta thấy hai cột $A \cap (B \cap C)$ và $(A \cap B) \cap C$ giống nhau nên:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

c) Ta có bảng thuộc tính:

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup B$	$A \cup C$	$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ta thấy hai cột $A \cup (B \cap C)$ và $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ giống nhau nên:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C).$$

Bài 1.31:

a) $A \cap B \cap C = \{4, 6\}$.

b) $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

c) $(A \cup B) \cap C$:

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

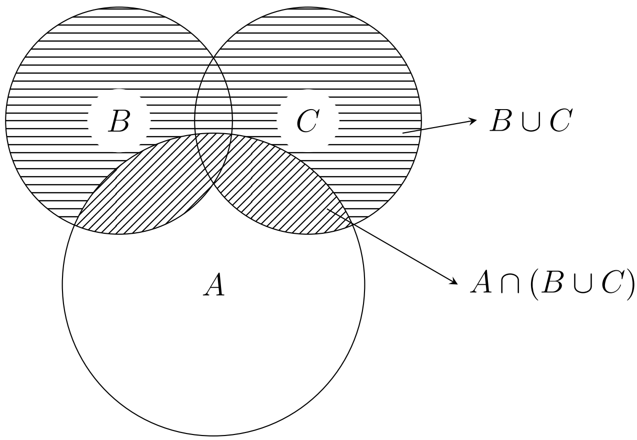
$\Rightarrow (A \cup B) \cap C = \{4, 5, 6, 8, 10\}$.

d) $A \cap B = \{0, 2, 4, 6\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

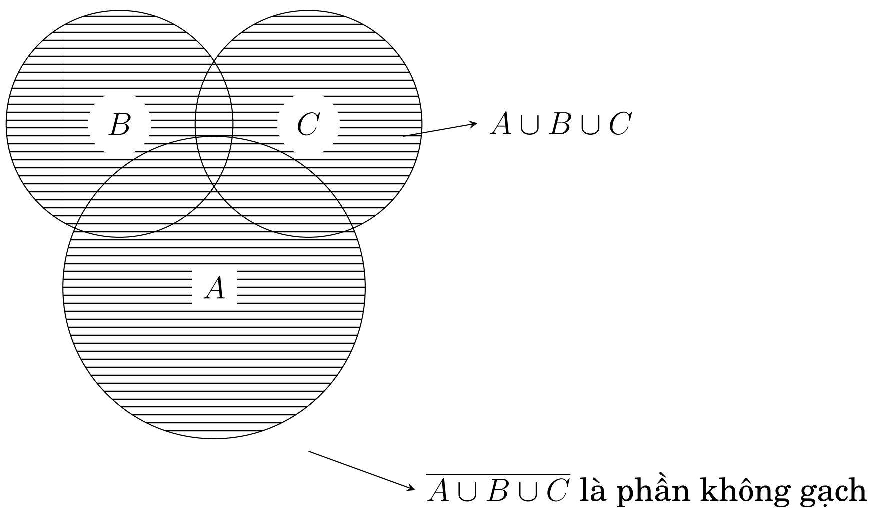
$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Bài 1.32:

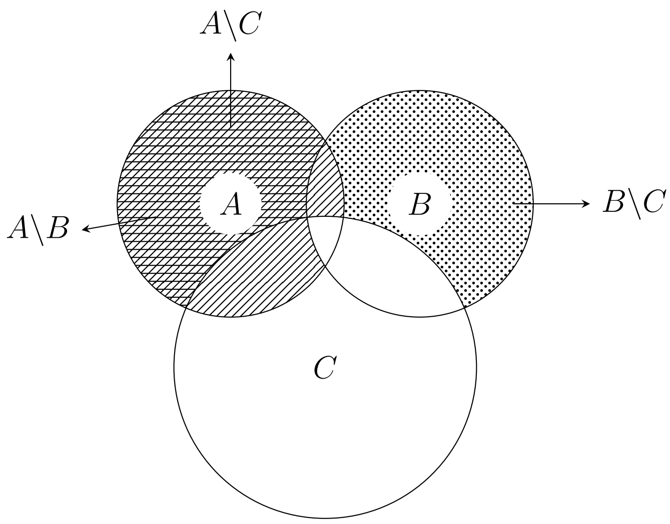
a) $A \cap (B \cup C)$



b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$



c) $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$



Vậy $(A\backslash B) \cup (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$ là toàn bộ phần gạch.

<u>Bài 1.45</u>:

a) $00111\ 00000$.

b) $10100\ 10001$.

c) $01110\ 01110$.

<u>Bài 1.46</u>:

a) Xâu $11110\ 01111$ biểu diễn tập $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$.

b) Xâu $01011\ 11000$ biểu diễn tập $\{2, 4, 5, 6, 7\}$.

c) Xâu $10000\ 00001$ biểu diễn ập $\{1, 10\}$.

Bài 1.47:

a) $\varnothing$.

b) $\cup$.

Bài 1.50:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, p, t, v\}$.

b) $A \cap B = \{b, c, d\}$.

c) Trước hết ta tính $A \cup D = \{a, b, c, d, e, h, i, n, o, t, u, v, y\}$.

$B \cup C = \{b, c, d, e, i, g, p, t, v, o, u, x, y, z\}$.

Vậy $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{b, c, d, e, i, o, u, v, y\}$.

d) $A \cup B \cup C \cup D = \{a, b, c, d, e, i, g, h, n, o, p, t, u, v, y, x, z\}$.

Chương 2

Bài 2.1:

a) Ta có:

$$\begin{array}{lll} 231 = 115 \cdot 2 + 1 & 28 = 14 \cdot 2 + 0 & 3 = 1 \cdot 2 + 1 \\ 115 = 57 \cdot 2 + 1 & 14 = 7 \cdot 2 + 0 & 1 = 0 \cdot 2 + 1 \\ 57 = 28 \cdot 2 + 1 & 7 = 3 \cdot 2 + 1 & \end{array}$$

Vậy $(231)_{10} = (11100111)_2$.

b) Ta có:

$$\begin{array}{lll} 4532 = 2 \cdot 2266 + 0 & 1133 = 2 \cdot 566 + 1 & 283 = 2 \cdot 141 + 1 \\ 2266 = 2 \cdot 1133 + 0 & 566 = 2 \cdot 283 + 0 & 141 = 2 \cdot 70 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 70 = 2 \cdot 35 + 0 & 8 = 2 \cdot 4 + 0 & 1 = 2 \cdot 0 + 1 \\ 35 = 2 \cdot 17 + 1 & 4 = 2 \cdot 2 + 0 & \\ 17 = 2 \cdot 8 + 1 & 2 = 2 \cdot 1 + 0 & \end{array}$$

Vậy $(4532)_{10} = (1000110110100)_2$.

c) Ta có:

$$\begin{array}{lll} 97644 = 2 \cdot 48822 + 0 & 1525 = 2 \cdot 762 + 1 & 23 = 2 \cdot 11 + 1 \\ 48822 = 2 \cdot 24411 + 0 & 762 = 2 \cdot 381 + 0 & 11 = 2 \cdot 5 + 1 \\ 24411 = 2 \cdot 12205 + 1 & 381 = 2 \cdot 190 + 1 & 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ 12205 = 2 \cdot 6102 + 1 & 190 = 2 \cdot 95 + 0 & 2 = 2 \cdot 1 + 0 \\ 6102 = 2 \cdot 3051 + 0 & 95 = 2 \cdot 47 + 1 & 1 = 2 \cdot 0 + 1 \\ 3051 = 2 \cdot 1525 + 1 & 47 = 2 \cdot 23 + 1 & \end{array}$$

Vậy $(97644)_{10} = (10111110101101100)_2$.

<u>Bài 2.2</u>:

a)
$$\begin{array}{lll} 321 = 2 \cdot 160 + 1 & 40 = 2 \cdot 20 + 0 & 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ 160 = 2 \cdot 80 + 0 & 20 = 2 \cdot 10 + 0 & 2 = 2 \cdot 1 + 0 \\ 80 = 2 \cdot 40 + 0 & 10 = 2 \cdot 5 + 0 & 1 = 2 \cdot 0 + 1 \end{array}$$

Vậy $(321)_{10} = (101000001)_2$.

b)
$$\begin{array}{lll} 1023 = 2 \cdot 511 + 1 & 63 = 2 \cdot 31 + 1 & 3 = 2 \cdot 1 + 1 \\ 511 = 2 \cdot 255 + 1 & 31 = 2 \cdot 15 + 1 & 1 = 2 \cdot 0 + 1 \\ 255 = 2 \cdot 127 + 1 & 15 = 2 \cdot 7 + 1 & \\ 127 = 2 \cdot 63 + 1 & 7 = 2 \cdot 3 + 1 & \end{array}$$

Vậy $(1023)_{10} = (1111111111)_2$

c) $100623 = 2 \cdot 50316 + 0$ $\qquad$ $7579 = 2 \cdot 3789 + 1$

$50316 = 2 \cdot 15158 + 0$ $\qquad$ $3789 = 2 \cdot 1894 + 1$

$15158 = 2 \cdot 7579 + 0$ $\qquad$ $1894 = 2 \cdot 947 + 0$

$947 = 2 \cdot 473 + 1$ $\qquad$ $59 = 2 \cdot 29 + 1$ $\qquad$ $3 = 2 \cdot 1 + 1$

$473 = 2 \cdot 236 + 1$ $\qquad$ $29 = 2 \cdot 14 + 1$ $\qquad$ $1 = 2 \cdot 0 + 1$

$236 = 2 \cdot 118 + 1$ $\qquad$ $14 = 2 \cdot 7 + 0$

$118 = 2 \cdot 59 + 0$ $\qquad$ $7 = 2 \cdot 3 + 1$

Vậy $(100632)_{10} = (111011001101000)_2$.

Bài 2.3:

a) $(11111)_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = (31)_{10}$.

b) $(1000000001)_2 = 2^9 + 1 = (513)_{10}$.

c) $(101010101)_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = (309)_{10}$.

d) $(110100100010000)_2 = 2^{14} + 2^{13} + 2^{11} + 2^8 + 2^4 = (26896)_{10}$.

Bài 2.6:

- Với $n = 1$ có: $VT = 3 \cdot 5$; $VP = \dfrac{3 \cdot (5^2 - 5)}{4} = 3 \cdot 5$.
  $\Rightarrow VT = VP$.
- Giả sử đẳng thức đúng đến n.

- Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n+1$. Thật vậy:

$$VT = \underbrace{3\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + \cdots + 3\cdot 5^n}_{\text{giả thiết}} + 3\cdot 5^{n+1}$$

$$= \underbrace{\frac{3\cdot(5^{n+2}-5)}{4} + 3\cdot 5^{n+1}}_{\text{quy nạp}} = \frac{3\cdot(5\cdot 5^{n+1}-5)}{4}$$

$$= \frac{3\cdot(5^{n+2}-5)}{4} = VP$$

Vậy ta có điều cần phải chứng minh.

Bài 2.7:

- Với $n=1$ có: $VT = 1^2$; $VP = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 \Rightarrow VT = VP$
- Giả sử đẳng thức đúng đến n. Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n+1$. Thật vậy:

$$VT = \underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}_{\text{giả thiết}} + (n+1)^2$$

$$= \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2}_{\text{quy nạp}}$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = VP$$

Bài 2.10:

- Với $n = 1$ có: $VT = 1 \cdot 2$; $VP = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 1 \cdot 2$
  $\Rightarrow VT = VP$.
- Giả sử đẳng thức đúng đến n.
- Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} VT &= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = VP \end{aligned}$$

Bài 2.11:

- Với $n = 1$ có: $VT = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $VP = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 1 \cdot 2 \cdot 3$
  $\Rightarrow VT = VP$.
- Giả sử đẳng thức đúng đến n.
- Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} VT &= [1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)] \\ &\quad + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n+1)(n+2) + 3\left(\frac{n}{4} + 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = VP \end{aligned}$$

Chương 3

Bài 3.14: Đặt $A(1;j) := a_1 + j - 1$ với mọi j nguyên dương mà $j \leq 1999$ và bằng quy nạp ta định nghĩa:

$$B_i := \coprod_{k=1}^{1999} A(i-1,k), A(i;j) := B_i + A(i-1;j).$$

Với mọi i, j nguyên dương mà $i \geq 2$, $j \leq 1999$. Từ cách xây dựng trên, dễ dàng chứng minh $A(m;j) < A(n;j)$, $A(m;j)|A(n;j)$ với mọi bộ ba số nguyên dương m, n, j và $j \leq 1999$ mà $m \leq n$. Từ cách xây dựng trên, cũng dễ thấy với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$: $A(j;1)$, $A(j;2)$,...,$A(i;1999)$ là số nguyên dương liên tiếp (không bé hơn a_1). Do đó, theo giả thuyết của bài toán về tập hợp A, thì tồn tại $j_i \in \mathbb{Z} \cap [1;1999]$ để $A(i;j) \in A$. Khi đó, vì j_1, j_2,...,$j_{200} \in \mathbb{Z} \cap [1;1999]$, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nguyên dương $m < n \leq 2000$ mà $j_m = j_n =: j$; với chung, ta tìm được cặp chỉ số $p < q$ sao cho $a_p = A(m;j_m) = A(m;j)$ chia hết $A(n;j) = A(n;j_n) = a_q$, điều phải chứng minh.

Bài 3.15: Trước tiên ta chứng minh rằng nếu $n \leq 24$ thì trong mọi trường hợp yêu cầu của bài toán đều không được thỏa mãn.

Xét $I := \{1;2;3;4\}$. Bài làm của mỗi học sinh có thể được đặt tương ứng với một bộ $x = (x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) \in I^5$; trong đó x_i là số thứ tự của phương án mà học sinh đã chọn để trả lời cho câu hỏi thứ i ($i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq 5$). Ngoài ra, nếu $x \in I^5$ ta cũng sẽ chấp nhận cách viết $x = (x_1;x')$ với $x' = (x_2;x_3;x_4;x_5) \in I^4$. Bằng cách như vậy, dễ thấy I^5 được phân hoạch thành $4^4 = 256$ tập con (rời nhau); mỗi tập con gồm đúng 4 bộ chỉ khác nhau ở thành phần thứ nhất, tức là tập con có dạng:

$$A_{x'} = \{(1;x');(2;x');(3;x');(4;x')\} \subset I^5 \qquad (2.10).$$

Với $x' \in^4$. Vì $2000 > 7 \times 256$ nên theo nguyên lý Dirichlet có tám học sinh (khác nhau) A_1, A_2,...,A_8 mà bài làm của họ thì ứng với các bộ cùng thuộc một tập con A nào đó (trong số 256 tập con nói trên).

Nhưng $2000 - 8 = 1992 > 7 \times 256$ nên lại theo nguyên lý Dirichlet - tồn tại tám học sinh (khác nhau, trong số 1992 học sinh còn lại) là B_1, B_2,...,B_8 có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con B nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Cuối cùng, vẫn có $1992 - 8 = 1984 > 7 \times 256$ nên dùng nguyên lý Dirichlet một lần nữa, từ 1984 học sinh còn lại, ta tiếp tục tìm ra tám học sinh (khác nhau), là C_1, C_2,...,C_8 mà bài làm của họ ứng với các bộ trong cùng một tập con C nào đó. Từ bốn học sinh bất kỳ trong số 24 học sinh:

$$A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1, B_2, \ldots, B_8, C_1, C_2, \ldots, C_8$$

Ta luôn chọn ra được hai học sinh có bài làm tương ứng với các bộ thuộc cùng một tập con (một trong ba tập con A, B hoặc C); chẳng hạn, đó là các học sinh A_i và A_j ($i, j \in \mathbb{Z}$; $1 \leq i; j \leq 8$) mà bài làm ứng với hai bộ trong A. Theo cách xây dựng các tập con (1), bài làm của hai học sinh này chỉ có thể khác nhau ở tối đa là một câu hỏi (chính là câu hỏi thứ nhất, nếu hai bài làm không hoàn toàn giống nhau); yêu cầu của bài toán đã không được thỏa mãn!

Bây giờ, ta chỉ ra một tình huống mà $n = 25$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán:

Muốn vậy xét:

$$S := \left\{ x \in I^5 \sum_{i=1}^{5} x_i \equiv 0 \pmod 4 \right\} \qquad (2.11)$$

Rõ ràng, tập hợp S gồm đúng $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 256$ bộ.
Hơn nữa (2) cho thấy, khi $x, y \in S$ thì:

$$x \neq y \Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}^*, i < j < 5, x_i \neq y_i, x_j \neq y_j \qquad (2.12).$$

Lấy d là một tập con 250 phần tử của S và xét tình huống mà: với mỗi $x \in D$ tồn tại đúng 8 học sinh có bài làm cùng ứng với bộ x (tình huống này hoàn toàn có thể xảy ra vì $2000 = 8 \times 250$). Khi ấy do $25 > 8 \times 3$ theo nguyên lý Dirichlet, cứ 25 học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số 25 học sinh này) có bài làm ứng với bốn bộ x, y, z,

$t \in D \subset S$ đôi một khác nhau, và theo (3), hai học sinh nào trong bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi, đúng như yêu cầu bài toán.

Vậy nên số tự nhiên bé nhất phải tìm là 25.

<u>Bài 3.16</u>:

1. Trước hết, xét tập hợp $B := \{x \in Ax_1 + x_2 + x_3 = 11\}$. Có thể kiểm tra trực tiếp rằng B là một tập con gồm 48 phần tử của A, B gồm đúng 4 phần tử có dạng $x = (0; x_2; 11 - x_2)$ với $4 \leq x_2 \leq 7$; 5 phần tử có dạng $x = (1; x_2; 10 - x_2)$ với $3 \leq x_2 \leq 7$; 6 phần tử có dạng $x = (2; x_2; 9 - x_2)$ với $2 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (3; x_2; 8 - x_2)$ với $1 \leq x_2 \leq 7$; 8 phần tử có dạng $x = (4; x_2; 7 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (5; x_2; 6 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 5$ và 5 phần tử có dạng $x = (7; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 4$.

   Rõ ràng B không chứa hai bộ x, y nào mà $x \succ y$

2. Tiếp theo, cho $N \ni n \geq 49$ và B là một tập con n phần tử bất kỳ của A. ta sẽ chứng minh rằng B chứa ít nhất hai bộ x, y mà $x \succ y$.

   Muốn vậy, ta xét các tập con sau của A:

   $C_1 : \{x \in A | x_1 = 0 \vee x_2 = 7\}$,

   $C_2 := \{x \in A | x_1 = 1 \vee x_2 \leq 6\} \vee (x_1 \geq 1 \wedge x_2 = 6)$,

   $C_3 := \{x \in A | x_1 = 2 \vee x_2 \leq 5\} \vee (x_1 \geq 2 \wedge x_2 = 5)$,

   $C_4 := \{x \in A | x_1 = 3 \vee x_2 \leq 4\} \vee (x_1 \geq 3 \wedge x_2 = 4)$,

   $C := \bigcap\limits_{i=1}^{4} C_i$; $D := A \backslash C = \{x \in A | x_1 \geq 4 \vee x_2 \leq 3\}$,

   $C_{i,j} := \{x \in C_i | x_3 = j\}$ $(i, j \in \mathbb{Z}; 1 \leq i \leq 4; 0 \leq j \leq 7)$,

   $D_{p,q} := \{x \in D | x_1 = p, x_2 = q\}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7; 0 \leq q \leq 3)$

   và ta chỉ cần khảo sát hai trường hợp:

(i) Nếu $B \cap C$ là một tập có nhiều hơn 32 phần tử, thì do chỉ có 32 tập con $C_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{Z}$; $1 \le i \le 7$), tạo thành một "phân hoạch" của C, nên theo nguyên lý Dirichlet, B phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y ($x \neq y$) của cùng một tập con $C_{i,j}$ nào đó ($i, j \in \mathbb{Z}$; $1 \le i \le 4$; $0 \le j \le 7$) từ cấu trúc của $C_{i,j}$, ta thấy x và y có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta có thể giả sử là $x \succ y$.

(ii) Nếu $B \cap C$ có không có quá 32 phần tử, thì $B \cap D$ chứa ít nhất $n - 32 \ge 17$ phần tử nhưng chỉ có 16 tập con $D_{p,q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$; $4 \le p \le 7$; $0 \le q \le 3$) tạo thành một "phân hoạch" của D; nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, B phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y ($x \neq y$) của cùng một tập con $D_{i,j}$ nào đó ($p, q \in \mathbb{Z}$; $4 \le p \le 7$; $0 \le q \le 3$); từ cấu trúc của $D_{p,q}$ ta thấy x và y có thể so sánh được theo quan hệ "trội". Do đó, ta có thể giả sử là $x \succ y$.

Từ 1. và 2., ta nhận được số tự nhiên bé nhất cần tìm là $n = 49$. (Điều phải chứng minh).

Bài 3.21: Gọi S_n là số các hoán vị thỏa mãn điều kiện bài toán. Để ý rằng các hoán vị mà $a_n = n$ là S_{n-1}. Còn số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i = n$ ($1 \le i \le n-1$) là C_{n-1}^{i-1}.

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Chú ý rằng: $S_2 = 1$, từ đó ta có $S_n = 2^n - n - 1$.

Ở bài này, ta thiết lập hệ thức truy hồi xuất phát từ S_n đi đến S_{n-1}. Trong một số trường hợp, ta lại đi theo hướng ngược lại. Chẳng hạn, bài toán sau ta thực hiện cách thiết lập hệ thức truy hồi theo hướng từ S_{n-1} đến S_n:

Bài toán: Giả sử F_k là tập hợp tất cả các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, trong đó A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) là một tập con của $\{1, 2, 3 \ldots, n\}$ (các tập A_1, A_2,..., A_k có thể trùng nhau). Hãy tính:

$$S_n = \sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_k) \in F_k} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|.$$

(trường hợp $n = 1998$ là bài thi $APMO1998$).

Giải: Do có 2^n tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên có 2^{nk} bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$. Với mỗi k bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, ta có thêm hoặc không thêm n vào tập A_i để được k bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của $\{1, 2, \ldots, n\}$. Với chú ý rằng số n v k bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ và có $2^k - 1$ cách thêm n vào k bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ thì ta có:

$$S_n = 2^k S_{n-1} + (2^k - 1) \cdot 2^{k(n-1)}.$$

Dễ thấy: $S_1 = 2^k - 1$. Từ đấy bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$S_n = n \cdot 2^{k(n-1)}(n^k - 1).$$

<u>Bài 3.22</u>: Gọi S_n là tập hợp con khác rỗng của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho mỗi tập con không có hai phần tử nào là số nguyên liên tiếp. Chia các phần tử của S_n thành hai nhóm.

Nhóm không chứa $\{n\}$: các tập con như vậy là $|S_{n-1}|$;

Nhóm chứa phần tử n: $\{n\}$ hoặc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, n\}$ $(n \geq 1)$. Rõ ràng: $a_i \neq n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nên số các tập con như vậy là: $|S_{n-2}| + 1$.

Do vậy: $|S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| + 1$.

Với chú ý $|S_2| = 2$, $|S_2| = 4$, ta có:

$$|S_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] - 1.$$

Mặt khác, số tập con không rỗng của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ là $2^2 - 1$. Vậy số tập con mà trong mỗi tập con không có hai phần tử nào là hai số nguyên liên tiếp là:

$$2^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

Bài 3.23: Đặt $S_{n,k}$ là số cách bỏ k quả bóng vào các hộp. Giả sử $2 \leq k \leq n$. Nếu một trong k quả bóng được chọn là b_n thì $(k-1)$ quả bóng còn lại để có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k-1}$ cách. Đồng thời, b_n có $2n-(k-1) = 2n-k+1$ cách chọn một hộp trong các hộp còn lại để bỏ. Do đó, số cách bỏ bóng trong trường hợp này là $(2n-k+1)\cdot S_{n-1,k-1}$.

Trường hợp quả b_n không được chọn. Để ý rằng $k \leq n-1$. Mọi quả bóng trong các quả bóng b_1, b_2,…,b_{n-1} đều có thể bỏ vào c hộp bằng $S_{n-1,k}$ cách, suy ra:

$S_{n,k} = S_{n-1,k} + (2^n - k - 1)\cdot S_{n-1,k-1}$ ($n \geq 3$, $2 \leq k \leq n$).

Dễ thấy:

$S_{n,n} = (n+1)S_{n-1,n-1}$, $S_{n,1} = n(n+1)$, $S_{1,1} = 2$.

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$S_{n,k} = \frac{(n+1)\cdot k!(C_n^k)^2}{n-k+1}.$$

Bài 3.24: Nhận xét rằng do thí sinh ngồi theo vòng tròn, nên một cách tự nhiên chúng ta nghĩ việc tìm cách "cắt" và "nắn" vòng tròn thành hàng thẳng.

Cách 1. Kí hiệu P_n là số cách phát đề hợp lệ cho n học sinh a_1, a_2,…,a_n ngồi theo vòng tròn (một cách phát đề được coi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ một đề và hai thí sinh bất kỳ ngồi cạnh nhau thì nhận được hai loại đề khác nhau)

Ta viết $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ nếu a_i và a_j cùng loại đề và $a_i \neq a_j$ trong trường hợp ngược lại, ta chứng minh:

$$P_{n+1} = (m-2)P_n + (m-1)P_{n-1} \qquad (*)$$

Xét một cách phát đề hợp lệ cho $n+1$ thí sinh a_1, a_2,…,a_{n+1}.

Nếu $a_1 \neq a_n$ thì bỏ a_{n+1} đi, ta có một cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và có $m-2$ cách phát đề cho a_{n+1}.

Nếu $a_1 = a_n$ thì bỏ a_{n+1} và a_n i, ta có một cách phát đề hợp lệ cho $n-1$ thí sinh $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Ta có $(m-1)$ cách phát đề cho (a_n, a_{n+1}) để hợp lệ với $a_n = a_1$. Vậy ta có được $(*)$

Mặt khác, dễ thấy $P_2 = m(m-1)$; $P_3 = m(m-1)(m-2)$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được: $P_n = (m-1)^n + (n-1)(-1)^2$.

Cách 2. Bài toán tương đương với việc đếm số các dãy (a_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$) thỏa mãn điều kiện: $a_i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$, …, $a_n \neq a_1$.

Trong tập hợp các dãy (a_i) thỏa mãn $a_i \in M$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_1 \neq 2$, $a_2 \neq a_3$,…, $a_n \neq a_1$, gọi A_n, B_n lần lượt là tập hợp các dãy (a_i) mà $a_1 \neq a_n$ và $a_1 = a_n$.

Do với mỗi dãy thuộc B_n, nếu bỏ đi số a_n thì ta được dãy thuộc A_{n-1} nên $|B_n| = |A_n|$. Mặt khác, dễ thấy $|B_n| + |A_n| = m(m-1)^{n-1}$ (do a_1 có $(m-1)$ cách chọn khác a_i với mọi $i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Vậy, $|A_n| = m(m-1)^{n-1} - |A_{n-1}|$.

Với chú ý $|A_2| = m(m-1)$, ta được $|A_n| = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n$.

Đó chính là đáp số cần tìm.

<u>Bài 3.25</u>: Từ C (hoặc G), sau hai bước nhảy ếch, có thể về lại C hoặc tới A nếu $n > 2$, do đó:

$$a_{2n} = 2b_{2n-2} + b_{2n-2}, \forall n > 0 \qquad \textbf{(1.15)}$$

Từ (1.14) và (1.15), suy ra: $a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-4}$.

Cùng với $a_2 = 0$, $a_4 = 2$, ta dễ dàng có điều phải chứng minh.

<u>Bài 3.26</u>: Gọi S_n là số cách đánh dấu trong bảng $m \times n$. Xét tập T gồm các ô vuông nằm trong cột cuối cùng (tính từ phải sang) và hàng cuối cùng (tính từ trên xuống), ta gọi A_n là các cách đánh dấu mà có hai ô vuông kề nhau trong T cùng được đánh dấu hoặc cùng không được đánh dấu và B_n là các cách đánh dấu mà các ô vuông trong T được đánh dấu xen kẽ.

Dễ thấy mỗi cách đánh dấu thuộc B_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc B_{n-1}, còn mỗi cách đánh dấu thuộc A_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc A_{n-1} và một cách đánh dấu thuộc B_n (Điều này suy ra khi xét bảng ô vuông $(n-1) \times (n-1)$ có được từ bảng $n \times n$ sau khi bỏ T).

Từ đó ta có

$|B_n| = |B_{n-1}|$, $|A_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}|$ $(n > 2)$

Mặt khác $S_n = |A_n| + |B_n|, \forall n > 1$ nên $S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2}, \forall n > 3$.
Dễ thấy rằng: $S_2 = 6$, $S_3 = 14$.
Từ đó bằng quy nạp ta có: $S_n = 8n - 10, \forall n \geq 2$.

Bài 3.27: Trong tập hợp S_k các số nguyên dương n có k chữ số thỏa mãn (ii) và (iii) gọi A_k, B_k, C_k, D_k, E_k lần lượt là tập hợp các số tận cùng bởi $1, 3, 5, 7, 9$.

Từ mỗi số thuộc A_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thi nhận được một số thuộc B_{k-1}, mặt khác từ mỗi số thuộc B_{k-1} nếu ta bổ sung thêm số 1 làm chữ số tận cùng thi nhận được một số thuộc A_k, do đó $|A_k| = |B_{k-1}|$. Từ mỗi số thuộc B_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc A_{k-1} hoặc C_{k-1}, nếu ta bổ sung thêm số 3 làm chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc B_k. Do đó, $|B_k| = |A_{k-1}| + |C_{k-1}|$.

Tương tự, ta có: $|C_k| = |B_{k-1}| + |D_{k-1}|$, $|D_k| = |C_{k-1}| + |E_{k-1}|$

và $|E_k| = |D_k|$, $(\forall k > 1)$.

Sử dụng năm đẳng thức trên, bằng cách thế liên tục, ta có:

$$\begin{aligned}
|S_k| &= |A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k| + |E_k| \\
&= |A_{k-1}| + 2|B_{k-1}| + 2|C_{k-1}| + 2|D_{k-1}| + |E_{k-1}| \\
&= 2|A_{k-2}| + 3|B_{k-2}| + 3|C_{k-2}| + 3|D_{k-2}| + 2|E_{k-2}| \\
&= 3|A_{k-3}| + 4|B_{k-3}| + 4|C_{k-3}| + 4|D_{k-2}| + 3|E_{k-3}|
\end{aligned}$$

Suy ra, $|S_k| = 3|S_{k-2}|$ $(\forall k > 3)$. Do $S_k = 8$ nên $|S_{1000}| = 6 \cdot 3^{499}$.

Bài 3.31: Gọi g_i là tổng số bàn thắng được ghi trong các trận từ 1 đến i. Xét bộ số $\{g_1; g_2; \ldots; g_{20}; g_1 + 9; \ldots; g_{20} + 9\}$, tất cả đều là số nguyên dương từ 1 đến 39. Vì có 40 số trong tập hợp, theo Nguyên lý lồng chim bồ câu, một số xuất hiện ít nhất hai lần. Vì đội ghi bàn ít nhất một lần trong mỗi trò chơi nên chúng ta có $g_i \neq g_j$ với mọi $i \neq j$, và do đó $g_i + 9 \neq g_j + 9$ với mọi $i \neq j$. Theo đó tồn tại i và j sao cho $g_i + 9 = g_j$. Số bàn thắng ghi được trong các trận $i+1; i+2; \ldots; j$ bằng $g_j - g_i = 9$.

Chương 4

Bài 4.1: G_1 là đơn đồ thị vô hướng; G_2 là đa đồ thị vô hướng; G_3 là giả đồ thị; G_4 là đồ thị có hướng; G_5, G_6 là đa đồ thị có hướng.

Bài 4.2: Mạng H_1 là đơn đồ thị vô hướng

Mạng H_2 là đa đồ thị vô hướng

Mạng H_3 là đồ thị có hướng.

Bài 4.5:

a) Trong đồ thị vô hướng, mỗi cạnh liền kề với đỉnh j được gán số 1 ở cột thứ j. Vậy, tổng tất cả các phần tử ở cột j cho biết số cạnh liền kề với đỉnh j. Hay nói cách khác, tổng số tất cả các phần tử trên cột j của ma trận liền kề của một đồ thị vô hướng bằng số bậc của đỉnh j trừ đi số khuyên tại đỉnh j (Vì mỗi khuyên tại đỉnh j được tính hai lần cho bậc của đỉnh j).

b) Trong đồ thị có hướng, mỗi cạnh mà đỉnh cuối là j được gán số 1 ở cột thứ j. Vậy, tổng tất cả các phần tử ở cột j cho biết số cạnh nhận đỉnh j là đỉnh cuối. Nói cách khác, tổng số tất cả các phần tử trên cột j của ma trận liền kề của một đồ thị có hướng bằng số bậc vào của đỉnh j.

Bài 4.6: Để giải bài này trước hết chúng ta cần vẽ đồ thị sau đó gán nhãn cho các đỉnh của nó. Ta xây dựng ma trận liền kề A theo nguyên tắc sau: Gán số 1 cho phần tử thuộc dòng i, cột j của ma trận A nếu hai đỉnh i và j là liền kề nhau và nếu ngược lại thì gán số 0. Theo nguyên tắc đó ta được các ma trận liền kề sau:

a) K_4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $K_{1,4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $K_{2,3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) C_4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e) W_4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

f) Q_3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 4.7: Ta có ma trận liền kề của đồ thị K_4 là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Không mất tổng quát, ta gọi các đỉnh là 1, 2, 3, 4 và ta tìm số đường đi độ dài n từ đỉnh 1 tới đỉnh 2. Một đường đi độ dài n được xác định bằng cách chọn $n-1$ đỉnh trung gian. Mỗi đỉnh trong đường đi này phải khác với đỉnh ngay sau nó.

a) Đường đi độ dài2cần chọn 1 đỉnh làm trung gian và phải khác với hai đỉnh mút của đường đi. Chỉ có thể là đỉnh 3 hoặc đỉnh 4. Vậy có 2 đường đi độ dài 2 giữa hai đỉnh trong đồ thị K_4.

b) Ta kí hiệu đường đi độ dài 3 từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 trong đồ thị K_4 là 1, x, y, 2. Nếu $x = 2$ thì có 3 cách chọn y. Nếu $x = 3$ thì có 2 cách chọn y và tương tự trong trường hợp $x = 4$. Vậy có $3 + 2 + 2 = 7$ đường đi độ dài 3 giữa hai đỉnh của đồ thị K_4.

c) Ta kí hiệu đường đi cần tìm là 1, x, y, z, 2. Nếu $x = 3$ thì theo câu b có 7 cách chọn y, z. Tương tự trong trường hợp $x = 4$. Nếu $x = 2$ thì y và z có thể là cặp số phân biệt có thứ tự trong tập hợp $\{1, 3, 4\}$, do đó có 6 cách chọn.

   Vậy có $7 + 7 + 6 = 20$ đường đi độ dài 4 giữa hai đỉnh của K_4.

d) Ta kí hiệu đường đi độ dài 5 giữa đỉnh 1 và đỉnh 2 trong đồ thị K_4 là: 1, w, x, y, z, 2.

   Nếu $w = 3$ thì theo câu c, có 20 cách chọn x, y, z. Tương tự trong trường hợp $w = 4$.

   Nếu $w = 2$ thì x phải khác 2 nên có 3 cách chọn x. Ứng với mỗi cách chọn x, theo câu b, thì có 7 cách chọn y, z. Do đó số đường đi trong trường hợp này là 21.

   Vậy, số đường đi độ dài 5 giữa hai đỉnh phân biệt bất kì của đồ thị K_4 là $20 + 20 + 21 = 61$.

Bài 4.8: Ta có ma trận liền kề của đồ thi $K_{3,3}$ là:

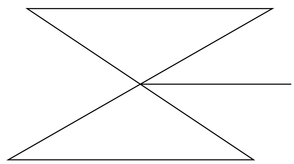
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giả sử các đỉnh của đồ thị $K_{3,3}$ là 1, 2, 3, 4, 5, 6 và hai đỉnh 1, 2 không liền kề. Nghĩa là hai đỉnh này phải nằm cùng trong một phần của đồ thị. Có 3 cách chọn đỉnh trung gian trong mỗi đường đi. Do đó, ta có các kết quả sau: a) 3^1. b) 0.
c) $3^3 = 27$. d) 0.

Bài 4.17: Số các cạnh của đồ thị bằng một nửa tổng các bậc. Do đó, đồ thị này có

$$\frac{5+2+2+2+2+1}{2} = 7 \text{ cạnh.}$$

Đồ thị như hình minh họa:

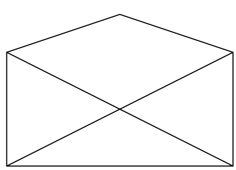


Bài 4.18:

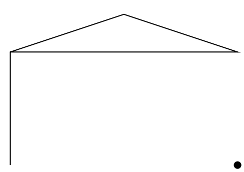
+) Không tồn tại đồ thị trong câu b) vì tổng các bậc là số lẻ. (Hoặc ta có cách lý luận khác là: Đơn đồ thị 5 đỉnh thì không thể có đỉnh nào có bậc lớn hơn 4). Lý luận tương tự chứng tỏ không tồn tại đồ thị thỏa mãn d) và f).

+) Không tồn tại đồ thị thỏa mãn c) vì tồn tại hai đỉnh bậc 4 thì tồn tại hai đỉnh có cạnh nối với tất cả các đỉnh còn lại. Do mỗi đỉnh còn lại đều phải nối với hai đỉnh bậc 4 nên không thể có đỉnh nào bậc 1.

+) Các đồ thị thỏa mãn a) và e) được chỉ ra dưới đây:



a)



e)

Bài 4.31:

a) Rõ ràng đồ thị K_2 có một đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler. Với n lẻ, $n > 2$ thì tồn tại một chu trình Euler (vì bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị là số chẵn và bằng $n-1$). Nếu n là số chẵn và $n>2$ thì tồn tại ít nhất 4 đỉnh có bậc lẻ, do đó đồ thị$K_n$không có đường đi Euler. Vậy, không tồn tại $n \neq 2$ để K_n có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler.

b) Do C_n là một chu trình Euler với mọi n nên không có giá trị của n thỏa mãn đề bài.

c) Một đồ thị hình bánh xe W_n có ít nhất ba đỉnh bậc 3 (quanh vành của nó) vì vậy khồng có đường đi Euler.

d) Lý luận tương tự như trong câu a. Ta có Q_1 (tương tự lý luận cho K_2) có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler. Với n lẻ, $n>1$ thì tồn tại rất nhiều đỉnh bậc lẻ và với n chẵn, $n>1$ thì tồn tại một chu trình Euler. Do đó, chỉ có duy nhất giá trị $n=1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 4.37: Chúng ta áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm độ dài đường đi ngắn nhất trong bài này. Sau đó dựa vào kết quả đó để xây dựng đường đi ngắn nhất.

a) Trước tiên ta nhập đỉnh a vào tập S với nhãn $L(a)=0$ và khi đó, nhãn đỉnh b sẽ là $L(b)=2$, nhãn đỉnh c là $L(c)=3$. Vì nhãn đỉnh b nhỏ hơn nên ta nhập đỉnh b vào tập S và có nhãn của các đỉnh $L(d)=7$, $L(e)=4$, nhãn đỉnh c không đổi. Tiếp theo, ta nhập đỉnh c vào tập S và các nhãn khác không đổi. Sau đó nhập đỉnh e vào tập S ta được nhãn các đỉnh còn lại là $L(d)=5$, $L(z)=8$. Ta tiếp tục nhập đỉnh d vào tâp S và nhãn của đỉnh z thay đổi là $L(z)=7$. Cuối cùng ta nhập đỉnh z vào tập S và thuật toán kết thúc. Ta được đường đi ngắn nhất là a, b, e, d, z với độ dài 7.

b) Lý luận tương tự như câu a.

c) Với đồ thị c, ta cũng lý luận tương tự như câu a. Đồ thị này phức tạp hơn nên các bước lặp nhiều hơn và quá trình lặp sẽ lâu hơn nhưng cách thức lặp không thay đổi. Ta sẽ tìm được đường đi ngắn nhất là $a, b, e, h, l, m, p, s, z$ với độ dài ngắn nhất là 16.

<u>Bài 4.41</u>: Nếu G có 1 hoặc 2 đỉnh thì bài toán đúng.

Nếu G có từ 3 đỉnh trở lên thì áp dụng công thức $e \leq 3v - 6 \Leftrightarrow 3e \leq 6v - 12 \quad (1)$. Giả sử mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc lớn hơn hay bằng 6 thì theo định lý bắt tay ta có:

$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$ suy ra $2e \geq 6v$. Điều này mâu thuẫn với (1). Vậy tồn tại ít nhất một đỉnh v của đồ thị G sao cho $\deg(v) \leq 5$.

<u>Bài 4.42</u>: Trước hết ta chú ý rằng bậc của mỗi miền phẳng ít nhất là 4. Vì các đỉnh đều không có khuyên hoặc không có cạnh bội và không có chu trình độ dài 3. Bậc của mỗi miền không bị chặn ít nhất là 4 do ta giả thiết $v \geq 3$. Do đó, ta có $2e \geq 4r \Leftrightarrow r \leq \dfrac{e}{2}$. Áp dụng công thức Euler ta được:

$$e - v + 2 \leq \frac{e}{2} \Leftrightarrow e \leq 2v - 4.$$

<u>Bài 4.43</u>: Chứng minh tương tự như bài 42, nhưng bậc của mỗi miền ít nhất là 5. Vậy, ta có $2e \geq 5r \Leftrightarrow r \leq \dfrac{2e}{5}$. Áp dụng công thức Euler về quan hệ giữa số cạnh, số đỉnh của một đồ thị vô hướng, ta được:

$$e - v + 2 \leq \frac{2e}{5} \Leftrightarrow e \leq \frac{5v - 10}{3}.$$

<u>Bài 4.44</u>:

a) Nếu bỏ đi 1 đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh đó trong đồ thị K_5 thì ta được đồ thị K_4 là đồ thị phẳng.

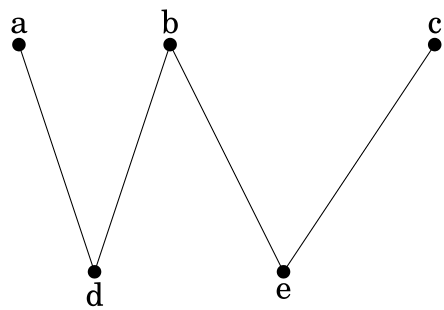
b) Nếu bỏ đi 1 đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh đó trong đồ thị K_6 thì ta được đồ thị K_5 không là đồ thị phẳng.

c) Nếu bỏ đi 1 đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh đó trong đồ thị $K_{3,3}$ thì ta được đồ thị $K_{3,2}$ là đồ thị phẳng.

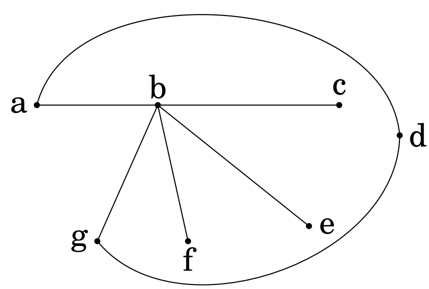
d) Ta hiểu ý câu hỏi này là: "Có hay không trường hợp bỏ đi một đỉnh bất kì và các cạnh liên thuộc với đỉnh đó từ đồ thị $K_{3,4}$ ta đều được đồ thị phẳng?". Câu trả lời của ta là không. Chẳng hạn, nếu bỏ đi 1 đỉnh trong phần đồ thị có 4 đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh đó trong đồ thị $K_{3,4}$ thì ta được đồ thị $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.

Chương 5

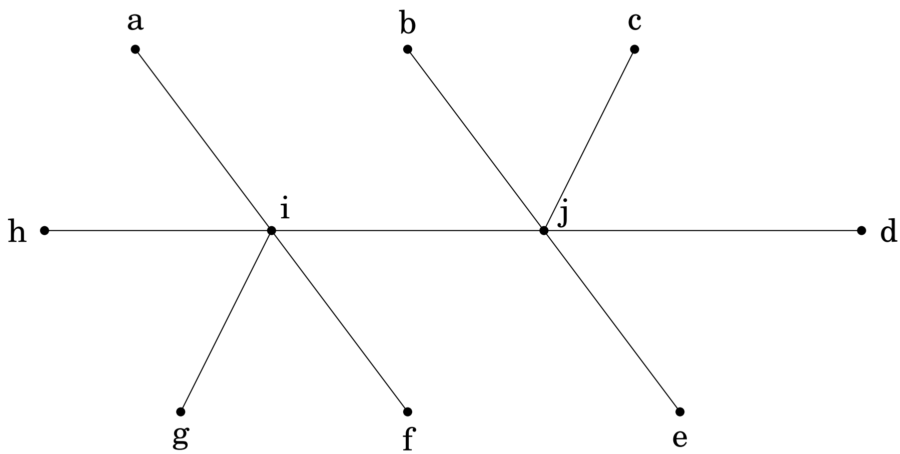
Bài 5.2: Từ đồ thị đã cho, xóa đi các cạnh a, b và b, c, ta được cây khung sau:



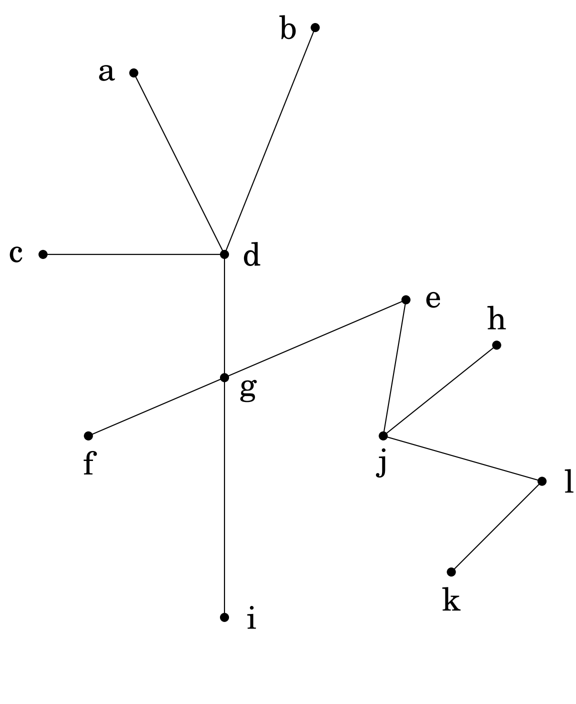
Bài 5.3:



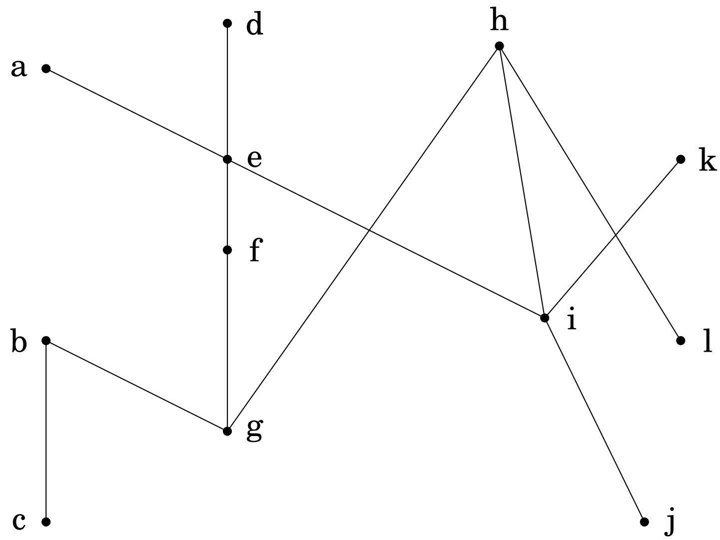
Bài 5.4:



Bài 5.5: Ta có cây khung sau:

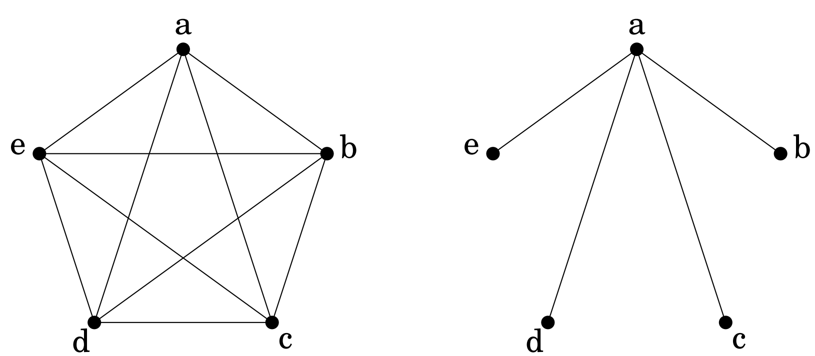


Bài 5.6:

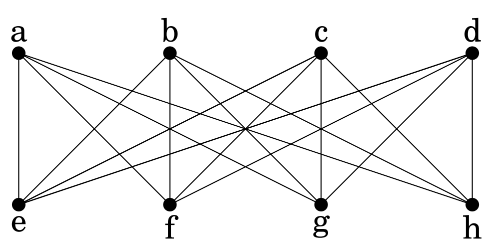


Bài 5.7:

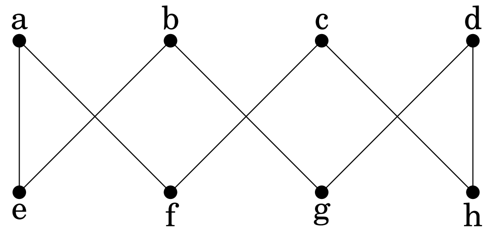
a)



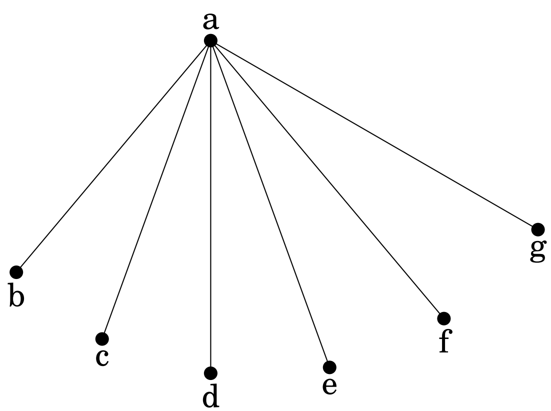
b) $K_{4,4}$



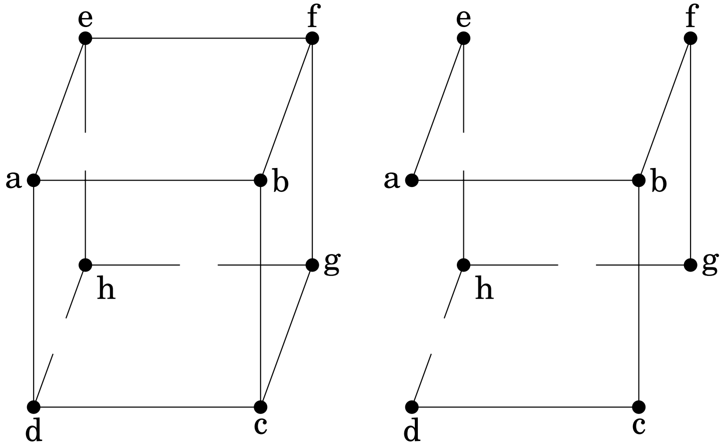
Cây khung nhận được là:



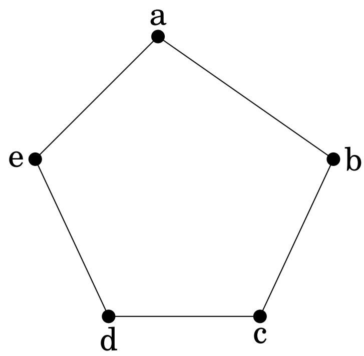
c) $K_{1,6}$



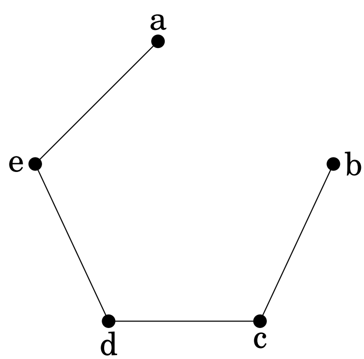
Cây khung chính là $K_{1,6}$



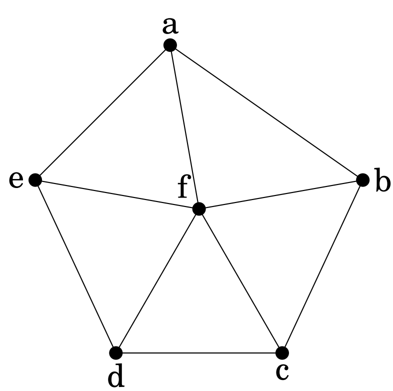
d)



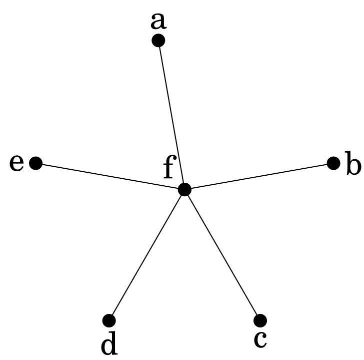
e) C_5



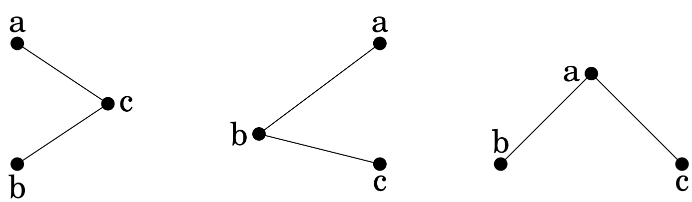
f) W_5



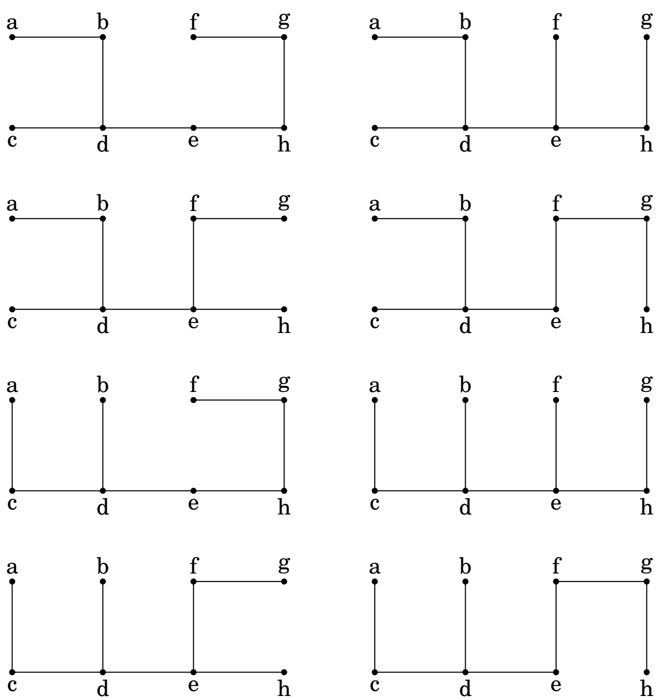
Cây khung của W_5 ở trên là:

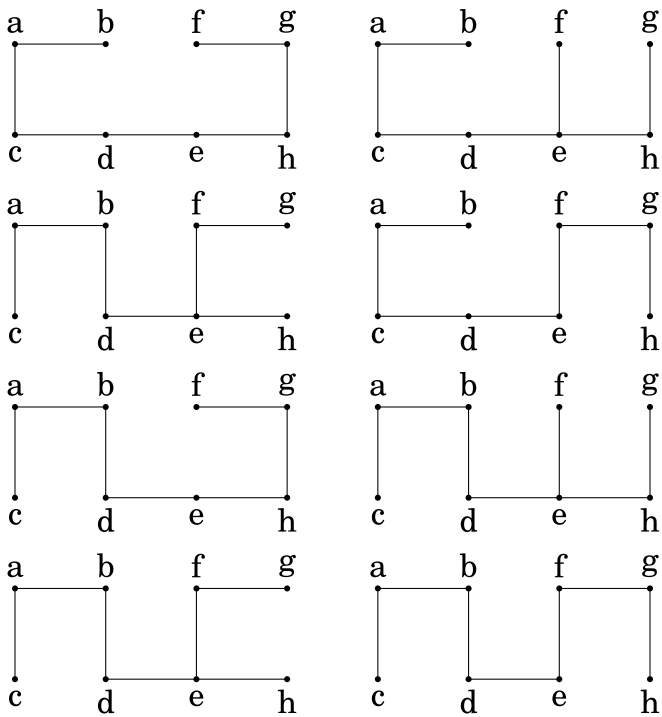


Bài 5.8:

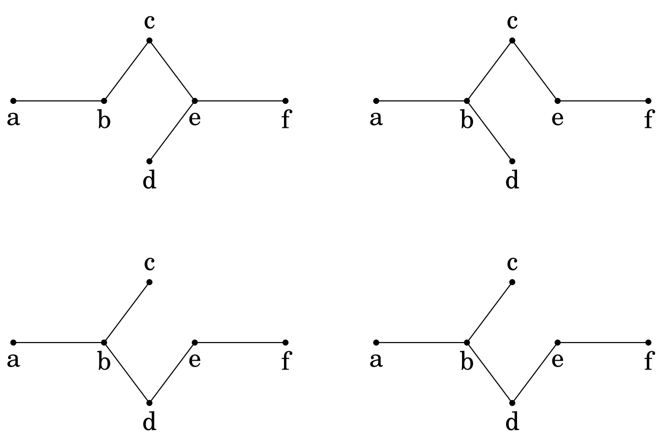


Bài 5.9:

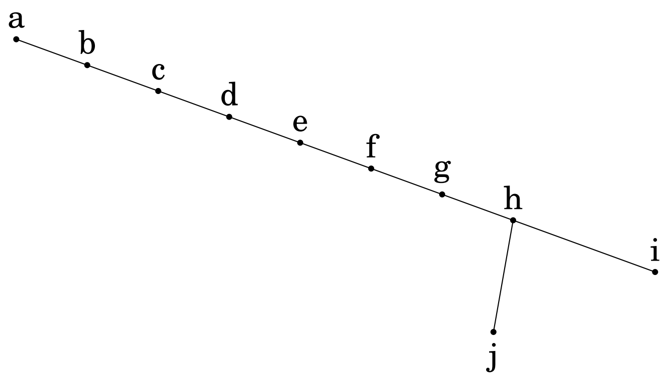



a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h
a b f g
c d e h

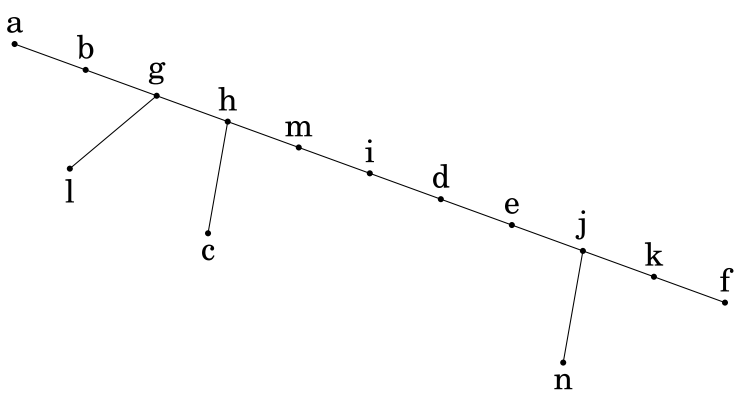
<u>Bài 5.10</u>:


c
a b e f
d
c
a b e f
d
c
a b e f
d
c
a b e f
d

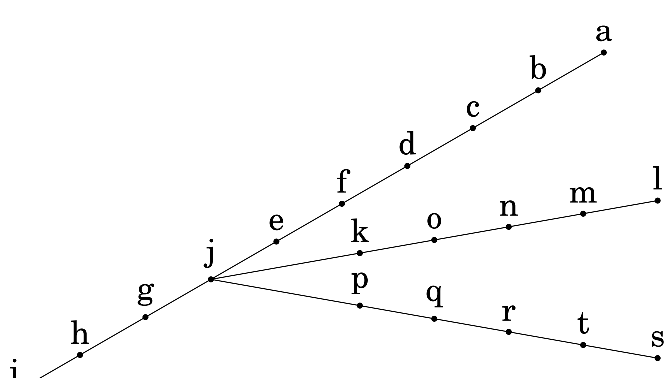
Bài 5.13:



Bài 5.14:



Bài 5.15:



Chương 6

Bài 6.1:

a) $1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 = 1$

b) $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$

c) $\overline{0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

d) $\overline{1 + 0} = \overline{1} = 0$

Bài 6.2:

a) $x \cdot 1 = 0 \Rightarrow 0$

b) $x + x = 0 \Rightarrow x = 0$.

c) $x \cdot 1 = x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

d) $x \cdot \overline{x} = 1$ không có giá trị của x

Bài 6.3:

$$x \cdot y = x + y$$

Ta có:

x	y	$x \cdot y$	$x + y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 0 \end{array}\right.$

Bài 6.4: Số hàm Boole bậc 7 khác nhau là: 2^{2^7} (hàm).

Bài 6.5:

$$\begin{aligned} x + xy &= (x + x)(x + y) \\ &= x \cdot (x + y) \\ &= (x = 0)(x + y) \\ &= x + 0 \cdot y = x. \end{aligned}$$

Bài 6.6: $F(x, y, z) = xy + xz + yz$

x	y	z	xy	xz	yz	$xy + xz + yz$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Vậy $F(x, y, z) = xy + xz + yz$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu ít nhất hai trong số ba biến x, y, z có giá trị là 1.

Bài 6.7: Ta có:

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$x\overline{y}$	$y\overline{z}$	$z\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{z}z$	$x\overline{z}$	Vế trái	Vế phải
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Vậy, vế trái $= x\overline{y} + y\overline{z} + \overline{x}z =$ Vế phải $= \overline{x}y + \overline{y}z + x\overline{z}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đỗ Đức Giáo (2014), *Toán rời rạc ứng dụng trong tin học* (tái bản lần thứ 3), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

2. Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành (2009), *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

3. David J. Hunter, (2017), *Essentials of discrete mathematics*, Third Edition, Jones & Bartlett learning.

4. D.S. Malik and M.K. Sen (2004), *Discrete mathematical structures: Theory and applications*, Thomson Course Technology.

5. D. P Acharjya Sreekumar, (2005), *Fundamental Approach to Discrete Mathematcs*, New Age International Publishers.

6. Kenneth H.Rosen (1997, Bản dịch), *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.

7. Kenneth H. Rosen, (2012), *Discrete Mathematcs and Its applications*, Seventh Edition, The McGraw Hill.

8. Kevin Ferland, (2009), *Discrete Mathematcs: An Introduction to proofs and combinatorics*, Houghton Mifflin Company, Boston New York.

9. Richard Johnsonbaugh, (2018), *Discrete Mathematcs*, Eight Edition, Pearson.

10. Susanna S.EPP, (2020), *Discrete mathematics with applications*, Fifth Edition, Cengage.