NEW

Semester - II

MATHEMATICS–II

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.
Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   - (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   - (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   - (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   - (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   - (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   - (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   - (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)

(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)

(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

3 आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)
6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)
7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)
8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
(To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

Q.12:- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix) ज्ञात करें।

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor-}A = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(9-16) = -7$, $A_{21} = -(6-12) = +6$, $A_{31} = +(8-9) = -1$

$A_{12} = -(3-4) = +1$, $A_{22} = +(3-3) = 0$, $A_{32} = -(4-3) = -1$

$A_{13} = +(4-3) = +1$, $A_{23} = -(4-2) = -2$, $A_{33} = +(3-2) = 1$

Adj A = Transpose of Co-factor A

$R \longleftrightarrow C$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ **Ans**

Q.13:- आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

(Inverse Matrix)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$$= 2(1-4) - 5(3-2) + 3(6-1)$$
$$= 2(-3) - 5(1) + 3(5)$$
$$= -6 - 5 + 15$$
$$= -11 + 15 = 4 \neq 0$$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(1-4) = -3,$

$A_{12} = -(3-2) = -1$

$A_{13} = +(6-1) = 5$

$A_{21} = -(5-6) = +1$

$A_{22} = +(2-3) = -1$

$A_{23} = -(4-5) = +1$

$A_{31} = +(10-3) = 7$

$A_{32} = -(4-9) = +5$

$A_{33} = +(2-15) = -13$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$R \longleftrightarrow C$$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\because A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix} \quad \text{Ans}$$

Q.14:- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।
(Inverse Matrix)

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$$= 7(4-3)+1(-20-6)-1(30+12)$$
$$= 7(1)+1(-26)-1(42)$$
$$= 7-26-42 = -61 \neq 0$$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(4-3) = 1,$

$A_{12} = -(-20-6) = +26,$

$A_{13} = +(30+12) = 42,$

$A_{21} = -(2+3) = -5,$

$A_{22} = +(-14+6) = -8.$

$A_{23} = -(21+6) = -27$

$A_{31} = +(-1-2) = -3$

$A_{32} = -(7+10) = -17$

$A_{33} = +(-14+10) = -4$

$$\text{Cofactor } A = \begin{bmatrix} 1 & 26 & 42 \\ -5 & -8 & -27 \\ -3 & -17 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R \longleftrightarrow C$$

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\because A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-61} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
(To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

- **गुणांक आव्यूह तथा संवर्धित आव्यूह (Coefficient Matrix and Augmented Matrix):**

यदि रैखिक समी० निकाय (if Linear Equation System)

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{ ——— } (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \text{ ——— } (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \text{ ——— } (3)$$

माना
$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \& \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

गुणांक आव्यूह (Coefficient matrix)   संवर्धित आव्यूह (Augmented matrix)

$$\because \quad A \cdot X = B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj} A}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

Q.15:- समीकरणों $x + 3y + 3z = 1$ का हल आव्यूह विधि से ज्ञात करे।
$x + 4y + 3z = 0$ (Find the solution by matrix method.)
$x + 3y + 4z = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

माना $A \cdot X \quad B$

$\because A \cdot X = B$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \text{ ——— } (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4)$$

$$|A| = 1(7) - 3(1) + 3(-1)$$
$$= 7 - 3 - 3 = 1$$

$$\text{Cofactor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(16-9) = 7,\quad A_{21} = -(12-9) = -3$

$A_{12} = -(4-3) = -1,\quad A_{22} = +(4-3) = 1$

$A_{13} = +(3-4) = -1,\quad A_{23} = -(3-3) = 0$

$A_{31} = +(9-12) = -3$

$A_{32} = -(3-3) = 0$

$A_{33} = +(4-3) = 1$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R \leftrightarrow C$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}, \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Put in Eq (1)

$X = A^{-1} \cdot B$ ——— (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0-6 \\ -1+0+0 \\ -1+0+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 1, \; y = -1, \; z = 1}$$ Ans

Q.16:- समीकरणों का हल आव्यूह विधि से ज्ञात करे। (Find the solution by matrix method.)

(H.W.)

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x + 3y + 4z = 1$$

Q.17:- आव्यूह विधि (Matrix Method) से हल कीजिये।

(H.W.)

$$3x + 2y + 4z = 7$$
$$2x + y + z = 4$$
$$x + 3y + 5z = 2$$