

NEW

Semester - II

MATHEMATICS -II

UNIT

2

Integral Calculus (समाकलन गणित)

TOPICS

- ✓ 1. समाकलन की परिभाषा (Definition of Integration)
- ✓ 2. समाकलन के प्रकार (Types of Integration)
- ✓ 3. समाकलन से संबंधित सूत्र (Formula related to Integration)
- ✓ 4. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)
- ✓ 5. खण्डशः समाकलन (Integration by Parts)
- 6. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by partial fractions)
- 7. गामा फलन द्वारा समाकलन (Integration Using Gama Function)
- 8. समाकलन के अनुप्रयोग (Applications of Integration)

Q.41:- $\int \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^2} dx$

dx का समाकलन ज्ञात करो।

Find the integral.

$$= \int \frac{e^x(x^2+1+2x-2x)}{(1+x)^2} dx$$

$$= \int \frac{e^x[(x+1)^2 - 2x]}{(1+x)^2} dx$$

$$= \int \frac{e^x(x+1)^2 - 2x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$= \int \left[\frac{e^x(x+1)^2}{(1+x)^2} - \frac{2x \cdot e^x}{(1+x)^2} \right] dx$$

$$= \int e^x dx - \int \frac{2x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$= e^x - 2 \int \frac{e^x(x+1-1)}{(1+x)^2} dx$$

$$= e^x - 2 \int \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$= e^x - 2 \int \left[\frac{e^x(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= e^x - 2 \int_{\text{I}}^{\text{II}} \frac{1}{(x+1)} \cdot e^x \cdot dx - 2 \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$= e^x - 2 \left[\frac{1}{(x+1)} \cdot \int e^x dx - \int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \int e^x dx \right] dx \right] - 2 \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$= e^x - \frac{2}{(x+1)} \cdot e^x - 2 \cancel{\int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^x dx} - 2 \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx + C = e^x - \frac{2e^x}{(x+1)} + C \text{ Ans}$$

Q.42:- $\int e^x \sin x \, dx$ का समाकलन ज्ञात करो। (Find the integral).

$$\text{गणना } \int e^x \cdot \sin x \, dx = I$$

$$\int \underset{I}{e^x} \cdot \underset{II}{\sin x} \, dx = e^x \cdot \int \sin x \, dx - \int \left[\frac{d e^x}{dx} \cdot \int \sin x \, dx \right] dx$$

$$I = -e^x \cdot \cos x + \int \underset{I}{e^x} \cdot \underset{II}{\cos x} \cdot dx$$

$$I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \int \cos x \, dx - \int \left[\frac{d e^x}{dx} \cdot \int \cos x \, dx \right] dx$$

$$I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - I \Rightarrow I + I = e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\Rightarrow 2I = e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Ans

Q.43:- $\int e^x (\sin x + \cos x) dx$ का समाकलन ज्ञात करो। (Find the integral).

$$\Rightarrow \int (e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x) dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \sin x dx + \int e^x \cdot \cos x dx$$

I II

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \sin x dx + e^x \int \cos x dx - \int \left[\frac{de^x}{dx} \cdot \int \cos x dx \right] dx$$

$$\Rightarrow \cancel{\int e^x \cdot \sin x dx} + e^x \cdot \sin x - \cancel{\int e^x \cdot \sin x dx} = e^x \cdot \sin x + C \quad \underline{\text{Ans}}$$

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

- जब फलन भिन्नों के रूप में होते हैं, तो उन्हें दो या दो से अधिक आंशिक भिन्नों में तोड़कर समाकलन किया जाता है।

When functions are in the form of fractions, integration is done by breaking them into two or more partial fractions.

Note :-

- यदि अंश (ऊपर का फलन) की घात, हर (नीचे का फलन) की घात के बराबर या उससे अधिक हो तो सर्वप्रथम अंश को हर से भाग देगें। तत्पश्चात समाकलन करेंगे।

If the degree of the numerator (upper function) is equal to or greater than the degree of the denominator (lower function), then first we will divide the numerator by the denominator. Then we will integrate.

2. यदि हर के गुणनखण्ड करना सम्भव हो तो सर्वप्रथम गुणनखण्ड करके फिर आंशिक भिन्ने बनाकर समाकलन करेंगे।

If it is possible to factor the denominator, then first factor it and then make partial fractions and integrate.

क्र० सं०	प्रश्नों में मूल भिन्न का रूप	आंशिक भिन्न में परिवर्तित रूप
1.	$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)\dots}$	$\Rightarrow \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \dots$
2.	$\frac{f(x)}{(x-a)^2}$	$\Rightarrow \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$	$\Rightarrow \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)}$
4.	$\frac{f(x)}{(x-a)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$	$\Rightarrow \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$

आचार्य श्रीधर के सूत्र अनुसार (According to Acharya Sridhar's sutra),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Q.44:- $\int \frac{x^2+1}{(x^2-5x+6)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो। (Find the integral).

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 \Big) \overline{x^2 + 1} \quad (1) \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6}{5x - 5} \text{ शेष} \end{aligned}$$

$$\int \left[1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} \right] dx$$

Hint :- भागफल + $\frac{\text{शेष}}{\text{हर}}$

$$\int 1 \cdot dx + 5 \int \frac{x-1}{x^2-3x-2x+6} dx$$

$$x + 5 \int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx \quad \text{--- (1)}$$

आंशिक भ्रंजन (Partial fraction)

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$x-1 = A(x-3) + B(x-2) \quad \text{--- } \textcircled{2}$$

$x=2$ रखने पर

$$2-1 = A(2-3) + B(2-2)$$

$$1 = A(-1) + 0$$

$A = -1$

$x=3$ रखने पर

$$3-1 = A(3-3) + B(3-2)$$

$$2 = 0 + B(1)$$

$B = 2$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{2}{(x-3)}$$

Put in Eq ①

$$x+5 \int \left[\frac{-1}{(x-2)} + \frac{2}{(x-3)} \right] dx$$

$$x - 5 \int \frac{1}{x-2} dx + 10 \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$x - 5 \cdot \log(x-2) + 10 \cdot \log(x-3) + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q.45:- $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो। (Find the integral).