NEW

Semester - II

MATHEMATICS–II

UNIT

1 Determinants and Matrices (सारणिक तथा आव्यूह)

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.

Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)

(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)

(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

Imp.

3. आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)

6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)

Imp. 7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)

8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
Imp. (To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)

m . n संख्याओं के निकाय (system) को m पंक्तियों (rows) तथा n स्तम्भों (columns) में व्यवस्थित (arrange) कर तथा ब्रेकेट में बन्द करने पर, प्राप्त लम्ब सारिणी (rectangular array) को m × n क्रम (order mx n) का आव्यूह (matrix) कहते हैं।

Column (स्तम्भ)

Row (पंक्ति)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$(m \times n)$

(i) क्षैतिज रेखाएं (Horizontal Lines) = पंक्ति (Row)

(ii) ऊर्ध्वाधर रेखाएं (Vertical Lines) = स्तम्भ (Column)

(iii) पंक्ति की संख्या (No. of Row) $m = 2$

(iv) स्तम्भ की संख्या (No. of Column) $n = 3$

order of a matrix (आव्यूह का क्रम)

order = No. of Row × No. of Column
(पंक्ति की सं०)   (स्तम्भ की सं०)

$$\boxed{\text{order} = m \times n}$$

Q. & A.

① $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

③ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

⑤ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

Elements of matrix (आव्यूह के अवयव):-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Represent (निरूपण) $= \boxed{a_{ij}}$

i → Row, j → Column

जैसे → $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Element a_{23} का मान $= 9$

a_{31} का मान $= 4$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{13} = 1$, $a_{22} = 3$

a_{31} = not Possible.

2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)

(i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector) :-

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1} \quad (m \times n)$$

- No. of Column (स्तम्भ की सं०) = 1
- No. of Row (पंक्ति की सं०) > 1
- order (क्रम) = $m \times 1$

(ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

$(m\times n)$

- No. of Row (पंक्ति की सं०) = 1
- No. of column (स्तम्भ की सं०) > 1
- order (क्रम) = $1\times n$

(iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

No. of Row = No. of Column
(पंक्ति की सं०) = (स्तम्भ की सं०)

- order (क्रम) = $m \times m$ or $n \times n$

Determinant of a matrix (आव्यूह का सारणिक) :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

→ केवल Square matrix के सारणिक का ही मान ज्ञात कर सकते हैं।

Determinant (सारणिक) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}_{2\times 2}$

$$= (1\times 4 - 2\times 3) = \underline{\underline{-2}}$$

(iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह
(Singular and Non-singular Matrices)

→ जिस matrix के Determinant (सारणिक) का मान zero हो उसे Singular matrix कहते हैं।

$\boxed{|A| = 0} \longrightarrow$ Singular matrix

→ जिस matrix के Determinant (सारणिक) का मान zero न हो, उसे Non-Singular matrix कहते हैं। $\boxed{|A| \neq 0} \longrightarrow$ Non-Singular matrix.

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

R_1 के अनुदिश (Expand Along R_1)

$= 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35)$

$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$

$= -3 + 12 - 9$

$= -12 + 12 = 0$

$\because |A| = 0$

$\therefore$ matrix-A एक Singular matrix है।

② $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 20 - 24$

$= -4 \neq 0$

$\because |B| \neq 0$

$\therefore$ matrix $B \rightarrow$ Non-Singular