NEW

Semester - II

MATHEMATICS –II

UNIT-II
Integral Calculus

UNIT - II: Integral Calculus **(12 periods)**

Integration as inverse operation of differentiation. Simple integration by substitution, by parts and by partial fractions (for linear factors only). Introduction to definite integration. Use of formulae $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ for solving problems ,where m and n are positive integers. Applications of integration for (i). Simple problems on evaluation of area bounded by a curve and axes. (ii). calculation of volume of a solid formed by revolution of an area about axes. (Simple problems).

Cylinder (बेलन), Cone (शंकु), Sphere (गोला)

समाकलन द्वारा ठोसों का आयतन (Volume of Solids by Integration)

- परिक्रमित ठोसों के वक्रपृष्ठ तथा आयतन (Surface Areas and Volumes of Solids of Revolution)

(i) वक्र $y = f(x)$, X-अक्ष, सीमाओं $x = a$ तथा $x = b$ के बीच घिरे क्षेत्रफल को यदि X-अक्ष के परितः घुमाते हैं तो परिक्रमित ठोस का वक्र पृष्ठ तथा आयतन,

If the curve $y = f(x)$, X-axis, and the area enclosed between the limits $x = a$ and $x = b$ are rotated around the

① Volume (आयतन)

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx}$$

② वक्र पृष्ठ (Curved Surface Area)

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx}$$

(ii) वक्र $x = f(y)$, Y - अक्ष सीमाओं $y = c$ तथा $y = d$ के बीच घिरे क्षेत्रफल को यदि Y अक्ष के परितः घुमाते हैं तो परिक्रमित ठोस का वक्र पृष्ठ तथा आयतन,

Curve $x = f(y)$, Y - axis If the area enclosed between the limits $y = c$ and $y = d$ is rotated around the Y axis, then the curved surface and volume of the rotated solid,

① आयतन (Volume)

$$\boxed{V = \pi \int_c^d x^2 \cdot dy}$$

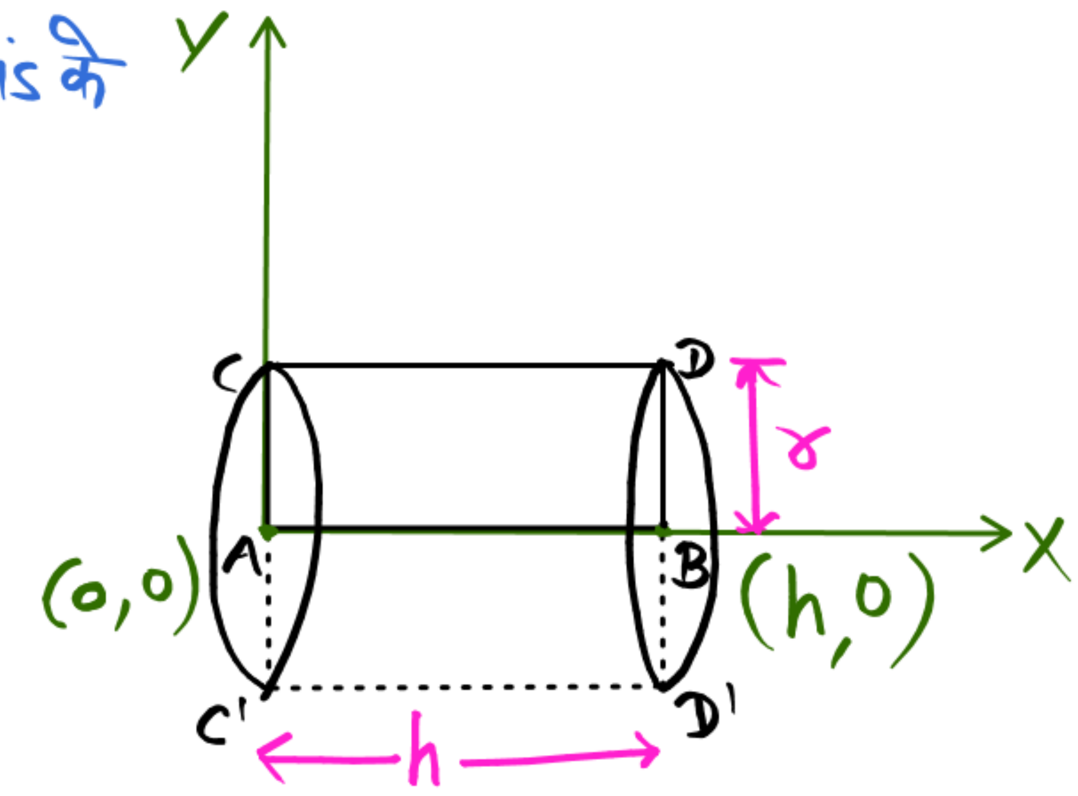
② वक्र पृष्ठ (Curved Surface)

$$\boxed{S = 2\pi \int_c^d x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy}$$

Q.79:- बेलन का वक्र पृष्ठ तथा आयतन (Surface Area and Volume of Cylinder) ज्ञात करें।

→ बेलन, एक आयत (Rectangle) को किसी अक्ष के परितः घुमाने से बनाता है।

→ माना चित्र के अनुसार आयत की AB भुजा को x-Axis के परितः घुमाने पर एक बेलन का निर्माण होता है।



बेलन की त्रिज्या (radius of cylinder) $= r$

बेलन की ऊँचाई (height of cylinder) $= h$

Limits $x = 0$ तथा $x = h$

रेखा CD का समी० (Equation of line CD)

$$y = r \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{Volume } (V) = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$$

$$V = \pi \int_0^h r^2 \cdot dx$$

$$= \pi r^2 \int_0^h 1 \cdot dx$$

$$= \pi r^2 [x]_0^h$$

$$= \pi r^2 [h - 0]$$

$$= \underline{\underline{\pi r^2 h}} \text{ घन इकाई } (\text{unit}^3)$$

वक्र पृष्ठ (Surface Area)

$$S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$S = 2\pi \int_0^h r \cdot \sqrt{1 + 0^2} \cdot dx$$

$$S = 2\pi r \int_0^h 1 \cdot dx$$

$$\left(\because y = r, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \right)$$

$$S = 2\pi r [x]_0^h$$

$$S = 2\pi r [h - 0]$$

$$S = \underline{\underline{2\pi r h}} \text{ वर्ग इकाई } (\text{unit}^2)$$

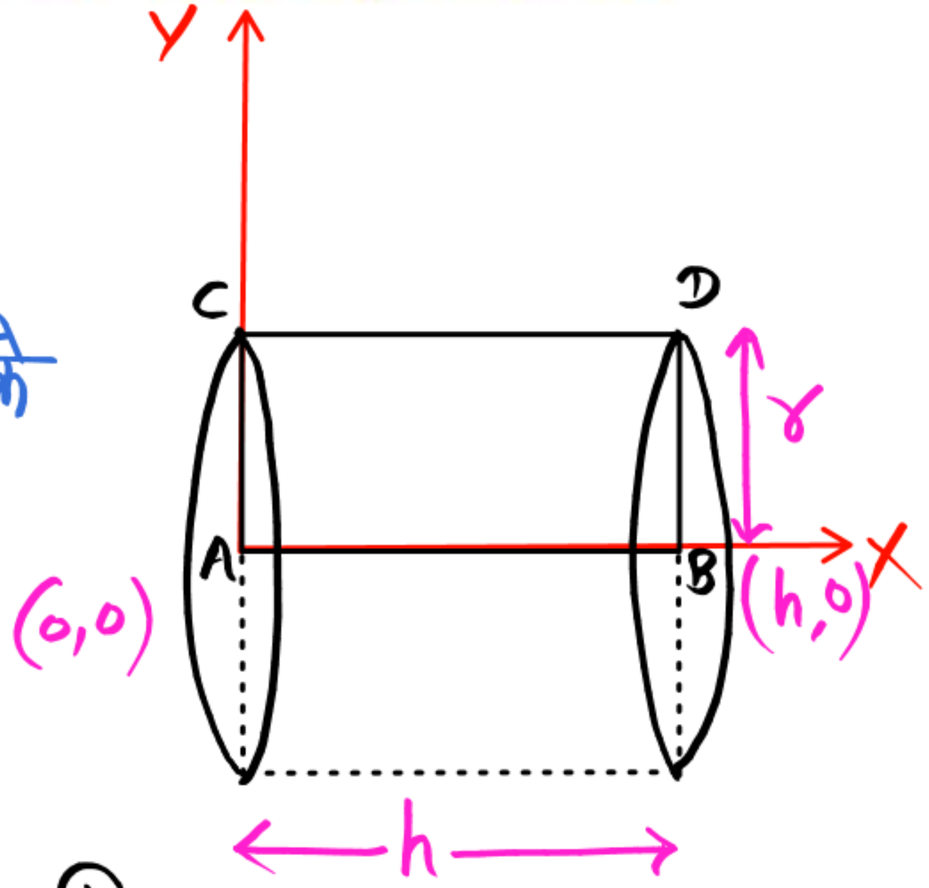
Q.80:- किसी बेलन के आधार की त्रिज्या 3 सेमी० तथा ऊँचाई 8 सेमी० है। बेलन का वक्र पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिये।

The radius of the base of a cylinder is 3 cm and its height is 8 cm. Find the curved surface area and volume of the cylinder.

Radius (त्रिज्या) $r = 3$ cm

height (ऊँचाई) $h = 8$ cm

चित्र के अनुसार एक आयत की AB भुजा को x-अक्ष के परितः घुमाने पर एक बेलन (cylinder) का निर्माण होता है।



Limit $x = 0$ तथा $x = h = 8$

Line CD का समी० $y = r \Rightarrow y = 3$ —(1)

$$\text{Volume } (V) = \pi\int_a^b y^2 \, dx$$

$$V = \pi\int_0^8 3^2 \, dx$$

$$V = 9\pi\int_0^8 1 \, dx$$

$$V = 9\pi\left[x\right]_0^8$$

$$V = 9\pi\left[8-0\right]$$

$$\underline{\underline{V = 72\pi}} \text{ घन इकाई}$$

$$\text{Surface Area } S = 2\pi\int_a^b y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$S = 2\pi\int_0^8 3 \cdot \sqrt{1+0^2} \, dx$$

$\because y = 3$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$$S = 6\pi\int_0^8 1 \cdot dx$$

$$= 6\pi\left[x\right]_0^8$$

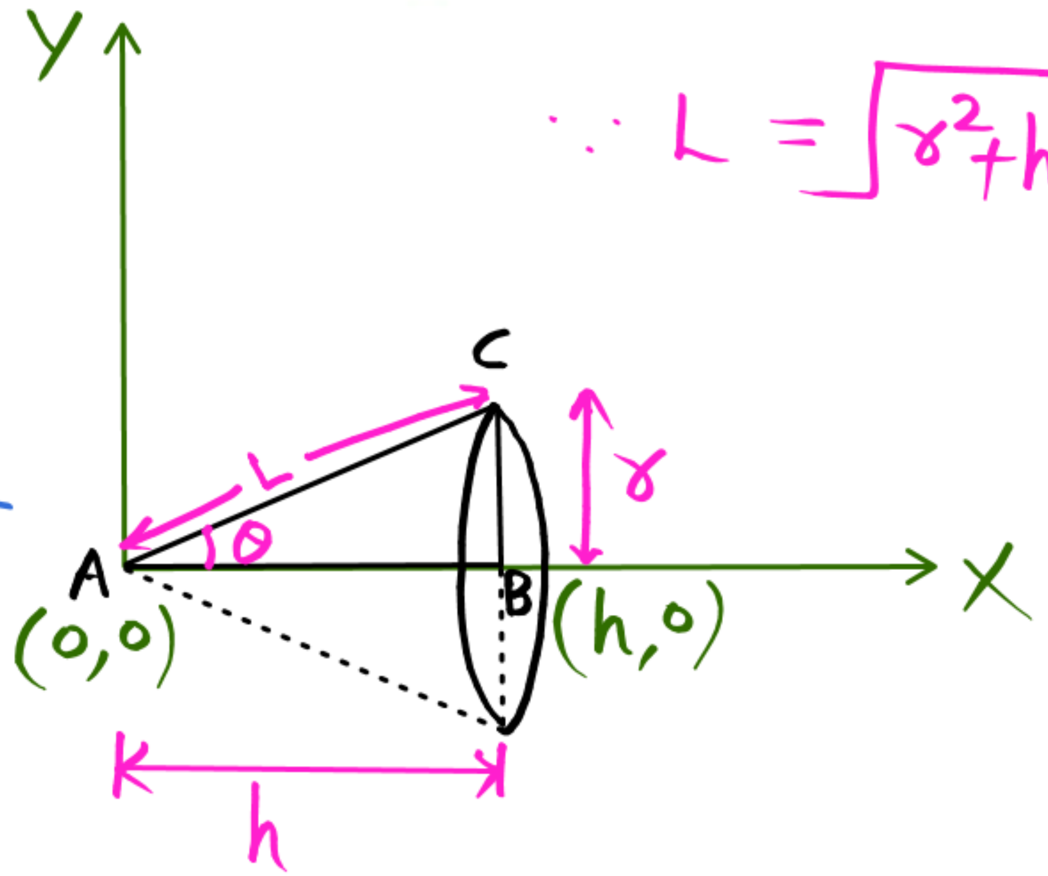
$$= 6\pi\left[8-0\right]$$

$$= \underline{\underline{48\pi}} \text{ वर्ग इकाई}$$

Q.81:- लम्बवृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।
(Surface area and volume of a right circular cone)

→ शंकु, एक समकोण त्रिभुज (Right angle Triangle) को किसी अक्ष के परितः घुमाने से बनता है।

→ चित्र के अनुसार समकोण त्रिभुज की AB भुजा को x-अक्ष के परितः घुमाने पर शंकु का निर्माण होता है।



$\because L = \sqrt{r^2+h^2}$

Limits $x=0$ तथा $x=h$

Line AC का समी० $y = m \cdot x$ $(\because m = \tan\theta)$

$y = \tan\theta \cdot x$

$y = \frac{r}{h} \cdot x$ ——— (1)

ΔABC में $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{r}{h}$

Volume (V) $= \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$= \frac{\pi r^2}{\cancel{h^2}} \left[\frac{h^{\cancel{3}}}{3} - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ घन इकाई}$$

वक्र पृष्ठ (Surface Area) $S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} \cdot x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot dx \quad \left(\because y = \frac{r}{h} \cdot x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h} \right)$$

$$= \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \cdot \frac{l}{h} dx \quad \because l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \frac{2\pi r l}{h^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi r l}{\cancel{h^2}} \left[\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{2}} - 0 \right] = \pi r l \text{ वर्ग इकाई}$$

$r = 3.5cm$ $h = 18cm$

Q.82:- एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी० तथा ऊँचाई 18 सेमी० है तो निश्चित समाकलन द्वारा इसका वक्र पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात करों।

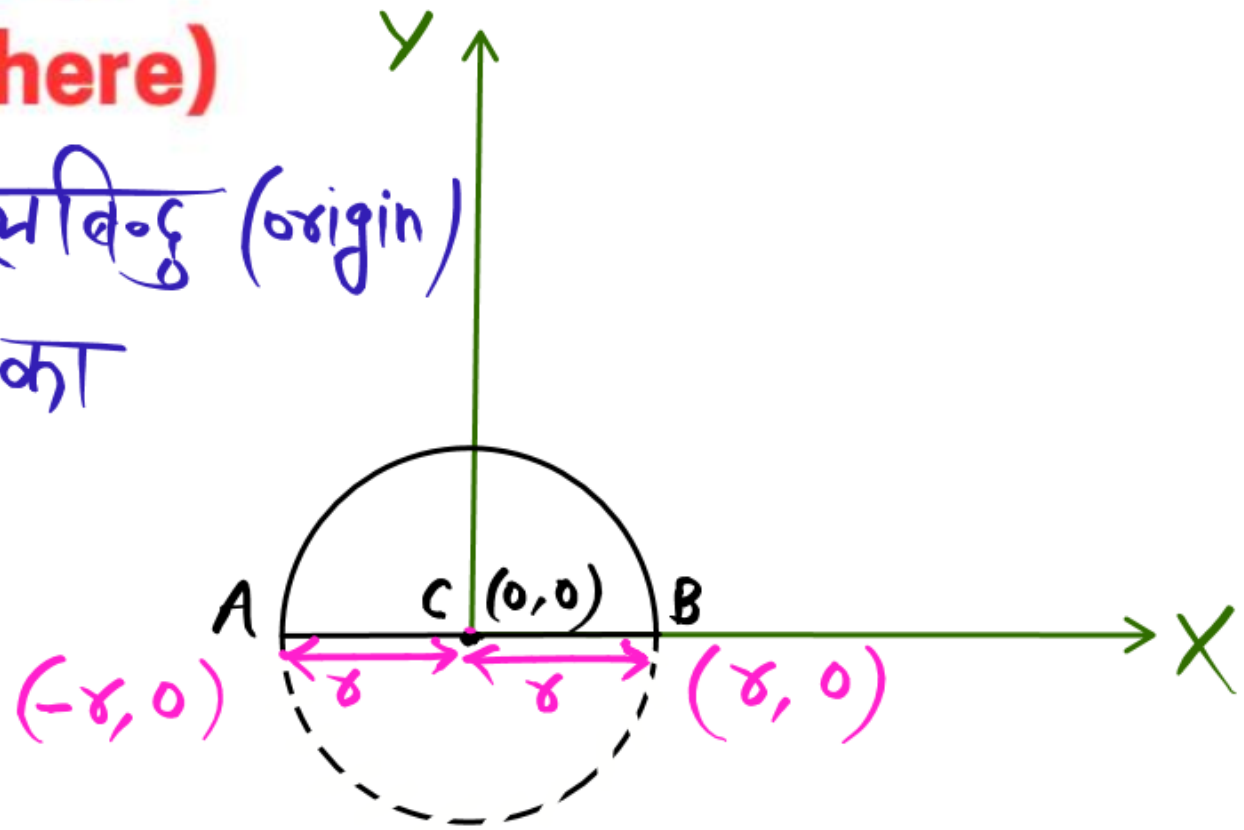
The radius of the base of a right circular cone is 3.5 cm and its height is 18 cm. Find its curved surface area and volume by definite integral. (H.W.)

$V = 231$ घन सेमी

$S = \frac{11\sqrt{1345}}{2}$

Q.83:- गोले का वक्र पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।
(Surface area and volume of a sphere)

एक अर्द्धवृत्त (Semi-circle) जिसका केन्द्र मूलबिन्दु (origin) पर है को x- अक्ष के परितः घुमाने पर गोले का निर्माण होता है।



केन्द्र (Centre) $= (0, 0)$

त्रिज्या (radius) $= r$

Limits $x = -r$ तथा $x = r$

अर्द्धवृत्त का समी० (Equation of Semi circle)

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{——— (1)} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Volume } (V) = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{r^3}{1} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{1} - \frac{r^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} \right] \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ घन इकाई}$$

$$\text{Surface Area } S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}$$

$$\because y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \cancel{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2 - x^2}}} \cdot dx$$

$$S = 2\pi r \int_{-r}^{r} 1 \cdot dx$$

$$S = 2\pi r \left[x \right]_{-r}^{r}$$

$$S = 2\pi r \left[r - (-r) \right]$$

$$S = 2\pi r \left[2r \right] \Rightarrow S = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$ <u>वर्ग इकाई</u>

$r = 5cm$

Q.84:- उस गोले का आयतन और वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 सेमी है और जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

Find the volume and curved surface area of a sphere whose radius is 5 cm and whose centre is at the origin. (H.W.)

Volume $= \frac{500}{3}\pi$ घन सेमी

Surface Area $= 100\pi$ वर्ग सेमी