NEW

Semester - II

MATHEMATICS–II

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.
Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)
(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)
(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)
(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)
(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

3 आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)
(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)
(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)
(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)
6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)
7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)
8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
(To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

Q.8:- यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध करो $A^2-5A+7I=0$ जबकि I एक इकाई आव्यूह, आर्डर 2×2 की है।

$$A^2 = A\times A$$
$$= \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}9-1 & 3+2\\ -3-2 & -1+4\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$L.H.S. = A^2-5A+7I$$
$$= \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & 5\\ -5 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}15 & 5\\ -5 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & 5\\ -5 & 10\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0=R.H.S. \quad \text{Proved!}$$

Q.9:- $A^2-4A-5I$ का मान निकालिये,

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix} \text{ तथा } I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^2 = A\times A$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+4+4&2+2+4&2+4+2\\2+2+4&4+1+4&4+2+2\\2+4+2&4+2+2&4+4+1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A-5I$$

$$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0 \text{ Ans}$$

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)

यदि किसी matrix A का cofactor $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)

यदि कोई matrix A है तो

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Adjoint of a matrix A, $\boxed{\text{adj } A = \text{Transpose of Co-factor } A}$ Row ⟷ Column

सह-गुणनखण्ड का परिवर्त आव्यूह

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)

यदि कोई matrix A दिया है –

तो matrix A का व्युत्क्रम (inverse) matrix $\boxed{A^{-1} = \dfrac{\text{adj}\,A}{|A|}}$ $|A| \neq 0$

(i) $|A|$ निकालें, $|A| \neq 0$

(ii) Co-factor A $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ निकालें।

(iii) Adj A = Transpose of Co-factor A निकालें।

A^{-1} के सूत्र में मान रखें।

Q.10:- आव्यूह A का प्रतिलोम (Inverse) निकालें यदि , $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-5 = 1 \neq 0$$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = +3$$

$$A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -5$$

$$A_{22} = +2$$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

adj A = Transpose of Co-factor A

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|}, \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ Ans}$$

Q.11:- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$, तो **adj. A** (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिये। तथा A^{-1}

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -28+30 = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -(-21-0) = 21$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (-18-0) = -18$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -(0-6) = +6$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = (-7-0) = -7$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-6-0) = +6$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (0+4) = 4$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5+3) = -8$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (4-0) = 4$$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} 2 & 21 & -18 \\ 6 & -7 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

adjA = Transpose of Co-factor A (Row $\longleftrightarrow$ Column)

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$\because A^{-1} = \dfrac{Adj\,A}{|A|}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$$= 1(-28+30) - 0 - 1(-18-0)$$

$$= 2 + 18$$

$$= \underline{\underline{20}} \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\,A}{|A|} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$ **Ans**

Q.12:- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix) ज्ञात करें।

(H.W.)

Q.13:- आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

(Inverse Matrix) (H.W.)

Q.14:- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।
(Inverse Matrix) (H.W.)