NEW

Semester - II

MATHEMATICS –II

UNIT

1 Determinants and Matrices (सारणिक तथा आव्यूह)

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.

Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Determinant (सारणिक)
2. Rows and columns of a determinants (सारणिक की पंक्तियां तथा स्तम्भ)
3. Order of a determinant (सारणिक का क्रम)
4. Value of Determinant (सारणिक का मान)
5. Minor (उपसारणिक या लघुघटक)
6. Co-factor (सहखण्ड)
7. Imp Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)
8. Extra Multiplication of two determinants (दो सारणिको का गुणनफल)
9. Imp Crammer's rule (क्रैमर का नियम)
10. Imp Condition for Consistency (सुसंगत के प्रतिबन्ध)
11. Condition of Collinearity of three points (तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिवन्ध)

समी० के मूल ज्ञात कीजिए।

Qus:- Find the roots of the equation (H.W.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$x = 2, -1$ Ans

$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 0 & -2-2x & 5-5x^2 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$$

C_1 के अनुदिश प्रसार

$$0 - 0 + 1\left(30 - 30x^2 + 30 + 30x\right) = 0$$

$$-30\left(x^2 - x - 1 - 1\right) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + x - 2 = 0$$

$$x(x-2) + 1(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$x = 2, -1$ Ans

Multiplication of two determinants
(दो सारणिको का गुणनफल)

यदि $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ & $D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

तो $D_1 \times D_2 = ?$ Rule → $\boxed{\text{Row by Row}}$

$$D_1 \cdot D_2 = \begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) & (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2) & (a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3) \\ (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1) & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) & (a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3) \\ (a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1) & (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2) & (a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3) \end{vmatrix}$$

- प्रथम सारणिक D1 की प्रथम पंक्ति के अवयवों को क्रमशः दूसरे सारणिक D2 के प्रथम, द्वितीय व तृतीय पंक्ति के संगत अवयवों से गुणा करते है। इनके योग से D1.D2 की प्रथम पंक्ति के अवयव प्राप्त होते है।

  The elements of the first row of the first determinant D1 are multiplied with the corresponding elements of the first, second and third rows of the second determinant D2 respectively. By their addition the elements of the first row of D1.D2 are obtained.

- इसी प्रकार D1 के द्वितीय व तृतीय पंक्ति के अवयवों को क्रमशः D2 के प्रथम, द्वितीय, तृतीय पंक्ति के संगत अवयवों से गुणा करके उनका योग लेने पर क्रमशः D1.D2 के व्दितीय व तृतीय पंक्ति के अवयव प्राप्त किया जा सकते हैं।

  Similarly, by multiplying the second and third row elements of D1 with the corresponding first, second and third row elements of D2 and taking their sum, the second and third row elements of D1 and D2 can be obtained respectively.

Qus:- If $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ and $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ then find $\Delta_1 \times \Delta_2$.

Trick → Row by Row

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} (3+8+6) & (9+8+0) & (6+16+6) \\ (1+0+18) & (3+0+0) & (2+0+18) \\ (2+12+3) & (6+12+0) & (4+24+3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 17 & 28 \\ 19 & 3 & 20 \\ 17 & 18 & 31 \end{vmatrix}$$

Ans

SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS (रैखिक समीकरण निकाय)

Homogeneous and Non-Homogeneous Equations (समघात तथा असमघात रैखिक समीकरण निकाय):-

- यदि अचर पद शून्य हैं, तो समीकरण समघात समीकरण कहलाते हैं, अन्यथा वे असमघात समीकरण होते हैं।

  If the constant terms are zero, the equations are called homogeneous equations, otherwise they are non-homogeneous equations.

Homogeneous (समघात)

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \text{--- (1)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \text{--- (2)}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \text{--- (3)}$$

Non - Homogeneous

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{--- (1)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{--- (2)}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \text{--- (3)}$$

Q. & A.

1. $4x + 5y + 3 = 0$ N
2. $x + y + z = 0$ H
3. $3x - 2y + 5 = 0$ N
4. $3y + 5x = 3z$ H
5. $2x - 5y - z - 1 = 0$ N
6. $-x - y = z$ H

Consistent and Inconsistent System of Equations (सुसंगत और असंगत समीकरण निकाय):

- समीकरणों की प्रणाली को सुसंगत कहा जाता है यदि इसका एक अद्वितीय हल होता है या इसमें अनंत कई हल होते हैं और यदि इसका कोई हल नहीं होता है तो इसे असंगत कहा जाता है।

The system of equations is said to be consistent if it has a unique solution or it has infinite many solutions and called inconsistent if it has no solution.

Consistent Equations → जिनका solution (हल) होता है।

Inconsistent Equations → जिनका कोई solution (हल) नहीं होता है।

Crammer's rule (क्रैमर का नियम)

Crammer's Rule का प्रयोग Linear Equation System (रैखिक समी० निकाय) को Solve (हल) करने के लिए किया जाता है।

यदि
$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{—— (1)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{—— (2)}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \text{—— (3)}$$

Note:- क्रैमर नियम के लिए d_1, d_2, d_3 शून्य नहीं होना चाहिए।
(अतः Non-Homogeneous Equation System होना चाहिए।)

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{——} \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \text{——} \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Solution:- $\boxed{x = \frac{D_1}{D}}$ $\boxed{y = \frac{D_2}{D}}$ $\boxed{z = \frac{D_3}{D}}$

Qus:- Solve the following equations using Cramer's rule

$3x - 2y = 5$

$4x + y = 14$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 28 = 33$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 20 = 22$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{22}{11} = 2$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}}$$ Ans

Qus:- **Solve the following equations using Cramer's rule:**

$$x + 2y + 3x = 1$$
$$2x + y - z = 2$$
$$3x + 4y + z = 6$$

Qus:- **Solve the following equations using Cramer's rule**

$$2x - y + z = 3$$
$$x + 3y - 2z = 11$$
$$3x - 2y + 4z = 1$$