NEW

Semester - II

MATHEMATICS –II

UNIT

2 Integral Calculus (समाकलन गणित)

UNIT-II
Integral Calculus

UNIT - II: Integral Calculus **(12 periods)**

Integration as inverse operation of differentiation. Simple integration by substitution, by parts and by partial fractions (for linear factors only). Introduction to definite integration. Use of formulae $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ for solving problems ,where m and n are positive integers. Applications of integration for (i). Simple problems on evaluation of area bounded by a curve and axes. (ii). calculation of volume of a solid formed by revolution of an area about axes. (Simple problems).

Gamma function. (गामा फलन)

TOPICS

1. समाकलन की परिभाषा (Definition of Integration)
2. समाकलन के प्रकार (Types of Integration)
3. समाकलन से संबंधित सूत्र (Formula related to Integration)
4. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)
5. खण्डशः समाकलन (Integration by Parts)
6. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by partial fractions)
7. गामा फलन द्वारा समाकलन (Integration Using Gama Function)
8. समाकलन के अनुप्रयोग (Applications of Integration)

निश्चित समाकलन (Definite Integration)

- जब किसी फलन का समाकलन दिए गए किन्हीं दो निश्चित सीमाओं के लिए किया जाता है तो उसे निश्चित समाकलन कहते हैं।

(When the integration of a function is done for any two given fixed limits then it is called definite integral.)

अनिश्चित समाकलन (Indefinite Integration) → $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

निश्चित समाकलन (Definite Integration) → $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$

Note → निश्चित समाकलन में 'C' का use नहीं करते हैं।

Find the value of Definite Integration :-
(निश्चित समाकलन का मान ज्ञात करना)

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

($f(x)$ का समाकलन $F(x)$ है।)

a = Lower Limit (निम्न सीमा)
b = upper Limit (उच्च सीमा)

→ सबसे पहले दिये गये function का समाकलन (Integration) करते हैं।

→ इसके बाद upper Limit & Lower Limit को बड़े कोष्ठक (Bracket) के ऊपर व नीचे लिखते हैं।

→ अब, पहले upper Limit & बाद में Lower Limit को x के स्थान पर लिखकर घटाते हैं।

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Ques:- $\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx$

$$= \left[\log_e x\right]_a^b$$

$$= \log_e b - \log_e a$$

$$= \log_e \left(\frac{b}{a}\right) \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Ques:- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\tan 0 - 0\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(0 - 0\right)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Ques :- $\int_0^1 e^x \cdot \cos e^x \cdot dx$

माना $e^x = t$

d. w. r. to x

$e^x \cdot dx = dt$

Limits change

$x = 0$ पर $t = e^0$

$t = 1$

$x = 1$ पर $t = e^1$

$t = e$

$$\int_1^e \cos t \cdot dt$$

$$= \left[\sin t\right]_1^e$$

$$= \sin(e) - \sin(1) \quad \text{Ans}$$

Ques :- $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx$

माना $\tan^{-1}x = t$

d. w. r. to x

$\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = dt$

Limit change

$x=0$ पर $t = \tan^{-1}(0)$

$t = 0$

$x=1$ पर $t = \tan^{-1}(1)$

$t = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cdot dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{\pi^3}{192} - 0 = \frac{\pi^3}{192} \text{ Ans}$$

Extra (out of Syllabus)

Properties of Definite Integration :-

① $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\cdot dt$

*② $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

③ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $(a<c<b)$

④ $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

⑤ (i) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ (जब $f(x)$ एक विषम फलन (odd function))
$f(-x) = -f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (जब $f(x)$ एक सम फलन (Even function))
$f(-x) = f(x)$

⑥ (i) $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 0$ (जब $f(2a-x) = -f(x)$)

(ii) $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (जब $f(2a-x) = f(x)$)