NEW

Semester - II

MATHEMATICS–II

UNIT

1 Determinants and Matrices (सारणिक तथा आव्यूह)

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.
Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)

(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)

(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

3. आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)
6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)
7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)
8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
(To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Row $\longleftrightarrow$ Column

A का Transpose matrix (परिवर्त आव्यूह) A' or $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A^T = A}$$

"यदि किसी matrix का Transpose, दिये गये matrix के बराबर हो तो इसे $\boxed{\text{Symmetric matrix}}$ कहते हैं।

Q. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो बताइए matrix A Symmytric है या नहीं।

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\because A = A'$

$\therefore$ Symmetric है।

Q. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$,

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ symmetric है

Q. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$\because A \neq A'$

$\therefore$ Symmetric नहीं है।

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

यदि $\boxed{A^T = -A}$ तो matrix A, skew-Symmetric (विषम सममित) कहलाता है।

जैसे-
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A का Transpose matrix (परिवर्त आव्यूह) $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^T = -A}$$

Q $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ कौन सा विषम सममित है ?

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -A$$

$\therefore$ A, विषम सममित है।

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = -\begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T \neq -A$$

$\therefore$ B, विषम सममित नहीं है।

3. आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

Imp (ii) आव्यूहों का योग व अन्तर
(Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

Imp. (iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

→ दो आव्यूह की समानता की शर्त (Condition of equality of two matrices)

(i) क्रम समान (order same) होना चाहिए।

(ii) दोनों के संगत अवयव (Corresponding elements) same हो।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

matrix A & B कब समान होंगे।

(i) order $\Rightarrow 2\times 3$ (same है।)

(ii) corresponding elements same होने के लिए $\boxed{a=2}$ & $\boxed{b=4}$

Q. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & x-y \\ x+y & 4 \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह A, B समान है।
तो $x+y$ का मान बताइए।

$$x-y = 2 \quad \text{--- (1)}$$
$$x+y = 3 \quad \text{--- (2)}$$

जोड़ने पर

$$2x = 5$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}}$$ Ans Put in Eq (2)

$$\frac{5}{2} + y = 3$$

$$y = \frac{3}{1} - \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{6-5}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$ Ans

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर
(Addition and Subtraction of Matrices)

दो आव्यूहों के योग व अन्तर की शर्तें (Condition for Add. & Sub. of two matrices)

(i) दोनों matrix का order same होना चाहिए।

(ii) संगत अवयव (corresponding elements) को जोड़ते या घटाते हैं।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ तो $A+B = ?$ & $A-B = ?$

$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ Ans $\qquad A-B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Ans

Q.1:- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A + B$ तथा $(A - B)$ का मान ज्ञात

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$ Ans

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ Ans

Q.2:- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, दिखलाइये $A + B = B + A$.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\because A+B = B+A$ **Proved!**

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

→ "यदि किसी matrix में किसी अदिश 'K' से गुणा किया जाए तो matrix के सभी elements को 'K' से गुणा करते हैं।"

जैसे Matrix $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ तो $K \cdot A = ?$

$$K \cdot A = \begin{bmatrix} K \cdot a_1 & K \cdot a_2 & K \cdot a_3 \\ K b_1 & K b_2 & K b_3 \\ K c_1 & K c_2 & K c_3 \end{bmatrix}$$

Q.3:- यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, तो 3 A का मान ज्ञात करें।

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 18 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$ Ans

Q.4:- यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ और $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ तो $2P - 3Q$ का मान ज्ञात कीजिये।

$$2P-3Q = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 16 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 15 \\ 15 & 21 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -9 & 10 & -1 \\ -15 & -5 & 18 \end{bmatrix} \text{ Ans}$$

V. Imp

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

शर्तें (Condition) :- (i) पहले matrix के column की सं० = दूसरे matrix के Row की सं०

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

④ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

इनमें से किसके लिए AB Possible है ?

सभी के लिए A·B Possible. ✓

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

A·B Possible नहीं है।

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ क्या AB और B·A दोनों Possible?

AB Possible है।

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

B·A. Possible नहीं है।

नियम (Rule) :-