

NEW

Semester - II

MATHEMATICS -II

UNIT

2

Integral Calculus (समाकलन गणित)

प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

प्रतिस्थापन (Substitution) \rightarrow किसी एक चर (variable) ' x ' के स्थान पर कोई दूसरा चर (variable) ' t ' रखने को प्रतिस्थापन कहते हैं। Hints \rightarrow (t मानकर समाकलन करेंगे)

Note :- (i) यदि कोई function कभी ($\sqrt{\quad}$) में है तो इस function को t या t^2 मानकर Integration करते हैं।

(ii) यदि कोई function $(ax \pm b)$ के रूप में है तो $(ax \pm b)$ को t मानकर Integration करते हैं या फिर Direct Formula use करके x के गुणांक (coefficient) से भाग कर देते हैं।

★ (iii) जिस function का Differential (अवकलन) दिया होता है, उसे \int मानकर Integral करते हैं।

Type-I \rightarrow यदि function $(ax \pm b)$ के रूप में हो

Rule:- $\rightarrow (ax \pm b)$ को \int मानकर integral करेंगे या फिर
 \rightarrow Direct formula use करके x के गुणांक से भाग करके।

Q:- ① $\int (8x+5)^5 \cdot dx$ को हल करें।

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Method-I (Direct)} &= \frac{(8x+5)^{5+1}}{(5+1) \times 8} + C \\ &= \frac{(8x+5)^6}{48} + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}} \end{aligned}$$

H.W.

Q. ① $\int a^{(3x+3)} dx$

② $\int \frac{x}{1+\cos 2x} \cdot dx$

③ $\int \sin(x^2+3) \cdot x \cdot dx$

④ $\int \tan(3x+1) dx$

⑤ $\int e^{(5x-6)} \cdot dx$

Ans ① $\int a^{(3x+3)} dx$
 $= \frac{a^{(3x+3)}}{3 \cdot \log_e a} + c$ Ans

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

Ans ④ $\int \tan(3x+1) dx$

$= \frac{\log_e \sec(3x+1)}{3} + c$ Ans

Ans ⑤ $\int e^{(5x-6)} dx = \frac{e^{(5x-6)}}{5} + c$ Ans

$$\textcircled{2} \int \frac{2}{1+\cos 2x} dx \quad \because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= \int \frac{\cancel{2}}{\cancel{1} + \cancel{2}\cos^2 x - \cancel{1}}$$

$$= \int \sec^2 x \cdot dx$$

$$= \tan x + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin^2(x^2+3) \cdot x \cdot dx$$

$$\text{माना } x^2+3 = t$$

$$\text{d. w. r. to } x$$

$$2x \cdot dx = dt$$

$$x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \sin^2 t \cdot \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin^2 t \cdot dt$$

$$\because \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[(x^2 + 3) - \left(\frac{\sin 2(x^2 + 3)}{2} \right) \right] + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q.9:- $\int e^{2x-3} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

$$= \int e^{2x-3} dx$$
$$= \frac{e^{(2x-3)}}{2} + c \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Type-II $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx$ के रूप के समाकलन

जहाँ $f(x)$ is a function (फलन)

& $f'(x) \rightarrow f(x)$ का अवकलन (differential)

Rule:- जिसका Differential दिया होता है, उसे t मानकर समाकलन करते हैं।

यहाँ पर, माना $f(x) = t$

d.w. t to x

$$f'(x) = \frac{dt}{dx}$$

$$f'(x) \cdot dx = dt$$

Ans:- $\rightarrow \int \frac{1}{t} dt = \log_e t + C = \log_e f(x) + C$ Ans

Q Prove that $\int \tan x \cdot dx = \log \sec x + C$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

माना $\cos x = t$
d.w.r.to x
 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$

$$\sin x \cdot dx = -dt$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot (-dt)$$

$$= -\log_e t + C$$

$$= -\log_e (\cos x) + C$$

Note:- जब दो function एक दूसरे के अवकलन (Differential) हों और वे भिन्न में हों तो हमेशा हर (Denominator) वाले function को t मानते हैं।

$$\begin{aligned} &= \log_e (\cos x)^{-1} + C \\ &= \log_e \left(\frac{1}{\cos x} \right) + C \\ &= \log_e \sec x + C \quad \text{Proved!} \end{aligned}$$

Q. Prove that $\int \cot x \cdot dx = \log_e \sin x + C$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

माना $\sin x = t$

d.w.r. to x

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$$\cos x \cdot dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log_e t + C = \log_e \sin x + C \quad \underline{\text{Proved!}}$$

Q.10:- $\int \frac{e^x}{(1+e^x)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

2nd तरीका

माना $e^x = t$
d.w.r. to x

$$e^x = \frac{dt}{dx}$$

$$e^x \cdot dx = dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t)} dt$$

$$= \log_e (1+t) + C$$

$$= \log_e (1+e^x) + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

माना $(1+e^x) = t$

d.w.r. to x

$$0 + e^x = \frac{dt}{dx}$$

$$e^x \cdot dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot dt$$

$$= \log_e t + C = \log_e (1+e^x) + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q.11:- $\int \frac{\cos x}{(\sin^4 x)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

माना $\sin x = t$
d. w. r. to x
 $\cos x \cdot dx = dt$

$$= \int \frac{1}{t^4} \cdot dt$$

$$= \int t^{-4} \cdot dt$$

$$= \frac{t^{-4+1}}{-4+1} + C$$

$$= \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q.12:- $\int \frac{3x^2}{(x^3+4)^3} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

माना $(x^3+4) = t$
d.w.r.to x
 $3x^2 + 0 = \frac{dt}{dx}$
 $3x^2 \cdot dx = dt$

$$= \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \int t^{-3} dt$$

$$= \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C$$
$$= \frac{(x^3+4)^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^3+4)^2} + C \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q.13:- $\int \sin^3 x \, dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.14:- $\int \frac{e^{m \tan^{-1} x}}{(1+x^2)} dx$

dx का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.15:- $\int \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.16:- $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.17:- $\int \frac{\sec^2 x}{3 + 4\tan x} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.18:- $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.19:- $\int \frac{x \tan^{-1} x^2}{1 + x^4} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.20:- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.21:- $\int \frac{x^2 + 1}{(1 + x)^2} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.

Q.22:- $\int \frac{1 + \sin 3x}{(3x - \cos 3x)} dx$ का समाकलन ज्ञात करो।
Find the integral.