







1 Determinants and Matrices (सारणिक तथा आव्यूह)





Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.

Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.



TOPICS

- 1. Determinant (सारणिक)
- र्थ. Rows and columns of a determinants (सारणिक की पंक्तियां तथा स्तम्भ)
- 3. Order of a determinant (सारणिक का क्रम)
- 4. Value of Determinant (सारणिक का मान)
- 🥕 Minor (उपसारणिक या लघुघटक)
- %. Co-factor (सहखण्ड)
- The 7. Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)
 - 8. Multiplication of two determinants (दो सारणिको का गुणनफल)
- 🍿 9. Crammer's rule (क्रैमर का नियम)
- 10. Condition for Consistency (सुसंगत के प्रतिबन्ध)
 - 11. Condition of Collinearity of three points (तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिवन्ध)

$$= 3(6-14)-5(4-56)+2(8-48)$$

$$= 3(-8) - 5(-52) + 2(-40)$$

$$=-24+260-80=260-104=156$$
 Ams

(Home Work)

$$= 1 (45-48) - 2 (36-42) + 3 (32-35)$$

$$=1(-3)-2(-6)+3(-3)$$



Minor (उपसारणिक या लघुघटक)

🔸 किसी सारणिक के <u>किसी अवयव से</u> हो<u>कर जाने वाली पंक्ति तथा स्तम्भ को निकाल देने पर</u> जो सारणिक प्राप्त होता है उसे उस अवयव का Minor (उपसारणिक या लघुघटक) कहते है।

The determinant obtained by removing the row and column passing through any element of a determinant is called the minor of that

element.

$$a_1$$
 at Minor = $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ c_2 at Minor = $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$a_2$$
 and minor $= b_1 c_1$
 $b_3 c_3$

$$C_2$$
 and C_3 are C_3 and C_3 and C_3 are C_3 and C_3 are C_3 and C_3 are C_3 and C_3 are C_3 are C_3 are C_3 are C_3 are C_3 and C_3 are C_3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & mino\delta = b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_3 & c_2 \end{vmatrix}$$



सहखंड (Co-factors)

 किसी सारणिक के किसी अवयव का सहखंड उस अवयव के उपसारणिक में उचित चिन्ह (धन या ऋण) लगाने से प्राप्त होता है।

The co- factor of any element of a determinant is obtained by applying appropriate sign (plus or minus) to the minor of that element.

$$(6-factor) = (-1)$$
 (i+i)
 $(7-factor) = (-1)$ x Minor

9, से हीकर पहला Row द पहला ही Column Pass ही 20 है।

$$a_1$$
 and a_2 a_3 a_4 a_5 a_5

$$C_2$$
 का C_3 = $(-1)^{i+j}$ $\begin{vmatrix} q_1 & b_1 \\ q_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{2} \begin{vmatrix} b_{2} & c_{2} \\ b_{3} & c_{3} \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} b_{2} & c_{2} \\ b_{3} & c_{3} \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} b_{3} & c_{3} \\ c_{3} & c_{3} \end{vmatrix}$$



Qus:- Find the minors (उपसारणिक या लघुघटक) of the elements 3 and 4 and the Co-factor (सहखण्ड) of the elements 6 and 2 in the determinant

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(i) 3 \text{ Ant minor} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 14 - 32$$

$$= -18 \text{ Ans}$$

(ii) 4 ATT minor =
$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24$$

8 0 7 | (iii) 6 ATT (0-factor = (-1)) | 5 4 | 0 7 | = + (35-0) = 35 ADS | = - (21-0) = -21 ADS | = - (21-0) =

Mathematics-II by Gaurav Sir



Qus:- In the determinant 2 4 6 ,find minors of 7 and 3 and cofactors of 5 and 9.

Mathematics-II by Gaurav Sir





Volume Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)

1. यदि सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ का प्रत्येक अवयव शून्य है तो सारणिक का मान शून्य होता है।

If every element of any row or any column of a determinant is zero then

the value of the determinant is zero.

Mathematics-II by Gaurav Sir



 यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ या कोई दो स्तम्भ सर्वंसम (identical) हैं तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।

If any two rows or any two columns of a determinant are identical then the value of that determinant is zero.

: असमें पहला और दूसरा Row एक समान है।



 यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों की स्तम्भों में तथा सभी स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित कर दिया जाए तो उस सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

If all the rows of a determinant are converted into columns and all the columns are converted into rows, then there is no change in the value of that determinant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = D_2$$

Mathematics-II by Gaurav Sir



4. यदि किसी सारणिक की <u>किन्हीं दो पंक्तियों</u> या <u>किन्हीं दो स्तम्भी</u> को <u>परस्पर बदल दिया जाए</u> तो उस सारणिक के मान का चिन्ह बदल जाता है।

If any two rows or any two columns of a determinant are interchanged then the sign of the value of that determinant changes.

$$D_{1} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{2} & a_{3} \\ b_{1} & b_{2} & b_{3} \\ c_{1} & c_{2} & c_{3} \end{vmatrix}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \longleftrightarrow C_3$$

$$- \begin{vmatrix} x & b_1 & a_2 \\ y & b_2 & a_3 \\ z & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$



5. यदि सारणिक की <u>किसी पंक्ति</u> य<u>ा किसी स्तम्भ का प्रत्येक अवयव के दो</u> से अधिक पदों का योगफल है तो सारणिक को उसी क्रम में दो या दो से अधिक सारणिक के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

If each element of any row or column of a determinant is the sum of two or more terms, then the determinant can be expressed as the sum of two or more tables in the same order.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + d_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 + d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Mathematics-II by Gaurav Sir



6.

- यदि सारणिक की किसी एक ही पंक्ति या किसी एक ही स्तम्भ में कोई संख्या उभयनिष्ठ है तो उस संख्या को एक गुणनखण्ड के रूप में सारणिक से बाहर लिया जा सकता है।
 If any number is common in any one row or any one column of the determinant then that number can be taken out of the determinant as a factor.
- यदि सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को किसी अचर से गुणा किया जाए तो पूरे सारणिक को उस अचर से भाग कर देते हैं।

If each element of any row or column of a determinant is multiplied by a constant, then the entire determinant is divided by that constant.

(ii)
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{K} \begin{vmatrix} k.a_1 & k.b_1 & k.C_1 \\ a_2 & b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{K} \begin{vmatrix} k.a_1 & k.b_1 & k.C_1 \\ a_2 & b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix}$$



7. यदि सारणिक को किसी एक पंक्ति या किसी एक स्तम्भ के सभी, अवयवों में किसी अचर से गुणा करके किसी अन्य पंक्ति या किसी अन्य स्तम्भ के संगत अवयवों में जोड़ा या घटा दिया जाए तो सारणिक का मान नहीं बदलता।

If all the elements of a row or a column of a determinant are multiplied by a constant and then added or subtracted to the corresponding elements of another row or another column, then the value of the determinant does

not change. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ $R_1 \rightarrow R_1 + k \cdot R_2$ $R_2 \rightarrow R_1 + k \cdot R_2$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 + k \cdot R_2$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_5 \rightarrow$