NEW

Semester - II

MATHEMATICS –II

UNIT

2 Integral Calculus (समाकलन गणित)

UNIT-II
Integral Calculus

UNIT - II: Integral Calculus **(12 periods)**

Integration as inverse operation of differentiation. Simple integration by substitution, by parts and by partial fractions (for linear factors only). Introduction to definite integration. Use of formulae $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ for solving problems ,where m and n are positive integers. Applications of integration for (i). Simple problems on evaluation of area bounded by a curve and axes. (ii). calculation of volume of a solid formed by revolution of an area about axes. (Simple problems).

Q.75:- वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ और अक्षों से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Find the area bounded by the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ and the axes.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ —— (1)

x- अक्ष का समी० $y = 0$ समी: (1) में रखने पर

$\sqrt{x} + 0 = \sqrt{a}$

Square on both side

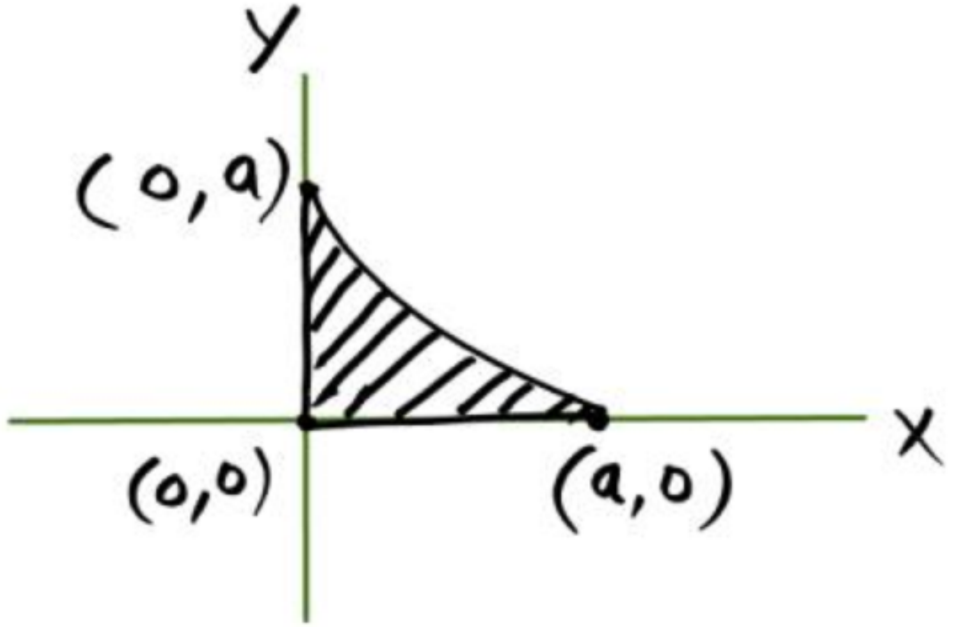
$\boxed{x = a}$

y- अक्ष का समी० $x = 0$ समी (1) में रखने पर

$0 + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

Square on both side

$\boxed{y = a}$



Limits $x = 0$ तथा $x = a$

समी (1) से $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

square

$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ —— (2)

$$\text{Area } (A) = \int_a^b y \cdot dx$$

$$A = \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \cdot dx$$

$$= \int_0^a \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(a + x - 2\sqrt{a} \cdot x^{1/2} \right) dx$$

$$= \left[a \cdot x + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a$$

$$A = \left[a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{a} \cdot a^{3/2} \right]$$

$$= \left[\frac{a^2}{1} + \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{6a^2 + 3a^2 - 8a^2}{6} \right]$$

$$= \frac{9a^2 - 8a^2}{6}$$

$= \dfrac{a^2}{6}$ वर्ग इकाई **Ans**

Q.76:- परवलय $ay = 3(a^2 - x^2)$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Find the area of the region enclosed between the parabola $ay = 3(a^2 - x^2)$ and the x-axis.

$$ay = 3(a^2 - x^2) \quad \text{—— (1)}$$

x-अक्ष का समी० $y = 0$ समी० (1) मे रखने पर

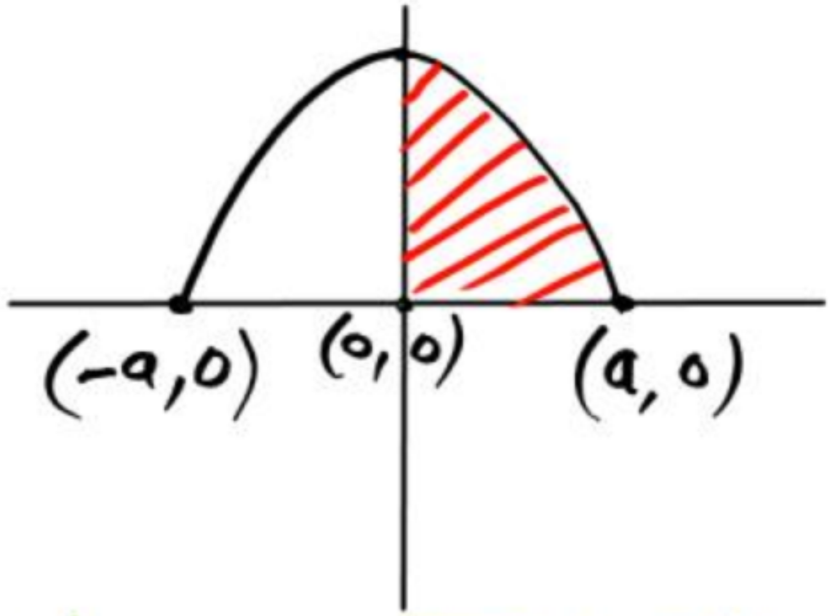
$$0 = 3(a^2 - x^2)$$

$$0 = a^2 - x^2$$

$$x^2 = a^2$$

squareroot

$$\boxed{x = \pm a}$$



Limits $x = 0$ तथा $x = a$

$$y = \frac{3}{a}(a^2 - x^2) \quad \text{—— (2)}$$

$$\text{Area} = 2\int_0^a y\cdot dx$$

$$= 2\int_0^a \frac{3}{a}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$= \frac{6}{a}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{6}{a}\left[a^2\cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{6}{a}\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right]$$

$$\text{Area} = \frac{6}{a}\left[\frac{3a^3-a^3}{3}\right]$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{a}}\left[\frac{2a^{\cancel{3}}}{\cancel{3}}\right]$$

$$= \underline{\underline{4a^2}}\ \text{वर्ग इकाई}$$

Ans

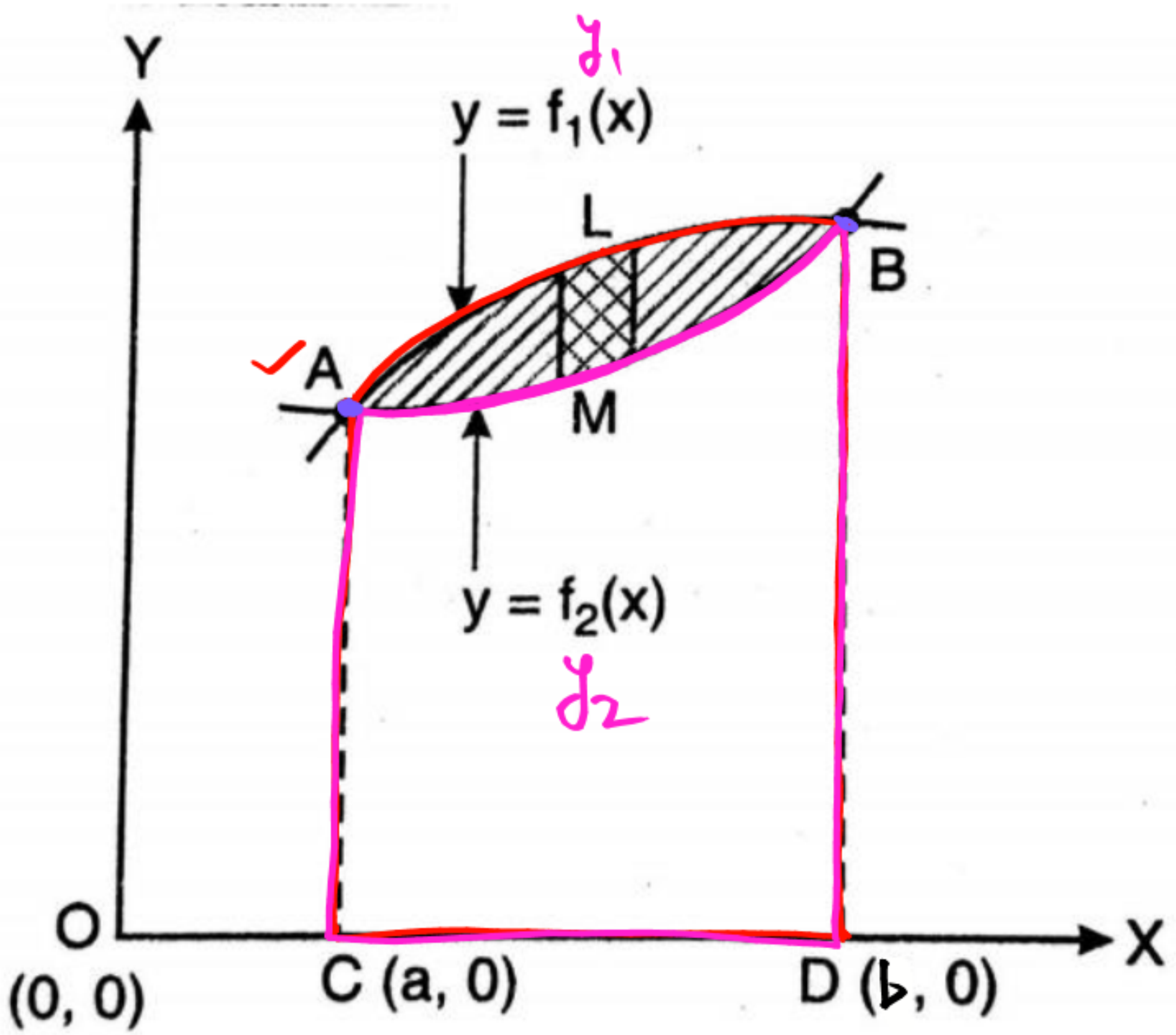
दो वक्रों के बीच घिरा क्षेत्रफल निकालना
(To Find Area Between Two Curves)

- माना दो वक्रों के समीकरण $y = f_1(x)$ (वक्र ALB) तथा $y = f_2(x)$ (वक्र AMB) है। जो बिन्दुओं A तथा B या $x = a$ तथा $x = b$ पर काटते हैं। अतः
  Let the equations of two curves be $y = f_1(x)$ (curve ALB) and $y = f_2(x)$ (curve AMB). Which intersect at points A and B or $x = a$ and $x = b$. So

- दोनों वक्रों के बीच घिरा रेखांकित क्षेत्रफल ALBMA = A = क्षेत्रफल ALBDCA - क्षेत्रफल AMBDCA
  Area bounded between the two curves ALBMA = A = Area ALBDCA – Area AMBDCA

$$A=\int_{x=a}^{x=b} f_1(x).dx-\int_{x=a}^{x=b} f_2(x).dx$$

या $$\text{Area}=\int_a^b y_1\cdot dx-\int_a^b y_2\cdot dx$$



Note:- जब दो Curves के बीच Area ज्ञात करने के लिए Limits, Ques. में न दी गई हो तो दोनों Curves के प्रतिच्छेद बिन्दु (intersection Points) ही Limits होते हैं।

→ intersection Points, find करने के लिए दोनों curves के समी॰ को Solve करके x & y की Value ज्ञात करते हैं।

Q.77:- समाकलन विधि द्वारा उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें जो कि रेखा $x = 2$ और परवलय $y^2 = 8x$ द्वारा परिबद्ध है।

Find the area of the region bounded by the line $x = 2$ and the parabola $y^2 = 8x$ by the method of integration.

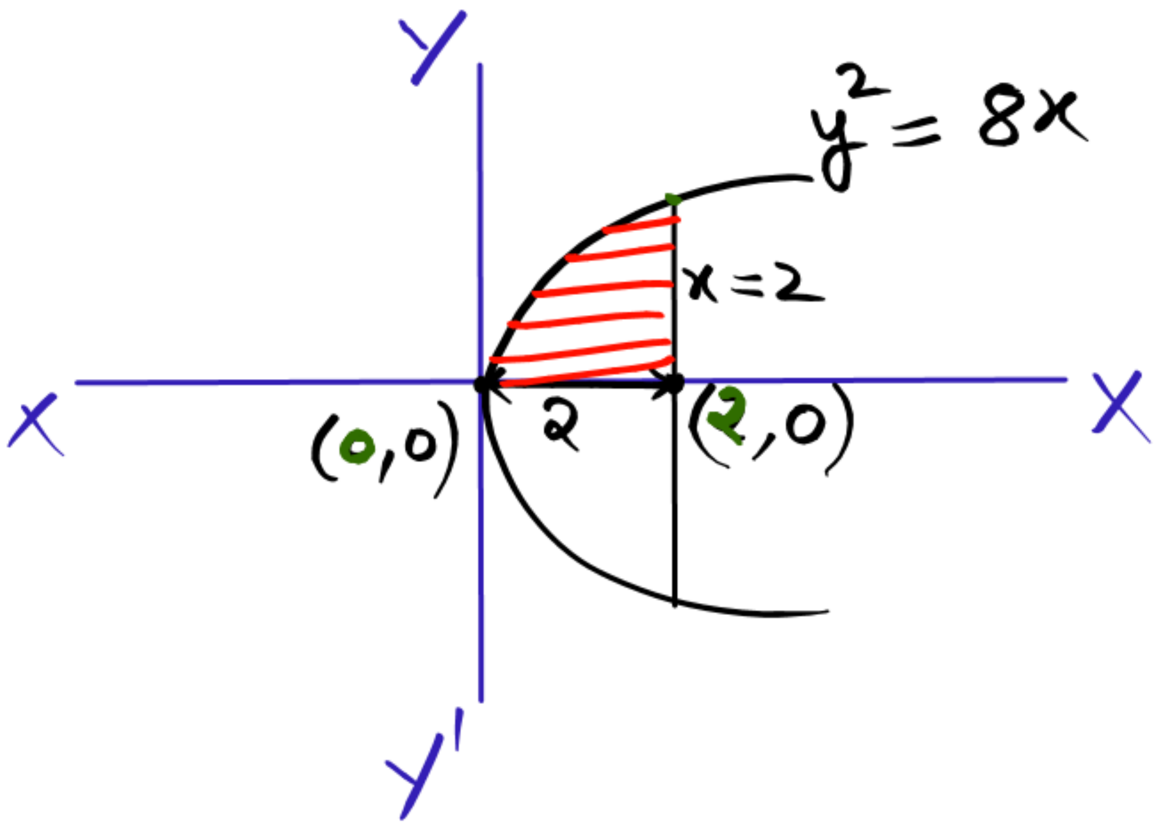
$x = 2$ —— (1)

$y^2 = 8x$ —— (2) $\left(\because y^2 = 4ax\right)$

Limits $x = 0$ तथा $x = 2$

$$\text{Area} = 2\int_0^2 y \cdot dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8x} \cdot dx$$



$$\text{Area} = 2 \times 2\sqrt{2} \int_0^2 x^{1/2} dx$$

$$= 4\sqrt{2} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^2$$

$$= 4\sqrt{2} \times \frac{2}{3} \left[x^{3/2} \right]_0^2$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[2^{3/2} - 0 \right]$$

$$= \frac{8}{3} \times 2^2$$

$$= \frac{8}{3} \times 4 = \frac{32}{3}$$ वर्ग इकाई Ans

Q.78:- वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area between the curves $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

$y^2 = 4ax$ —— ①

$x^2 = 4ay$ —— ②

दोनों curve का intersection Point :-

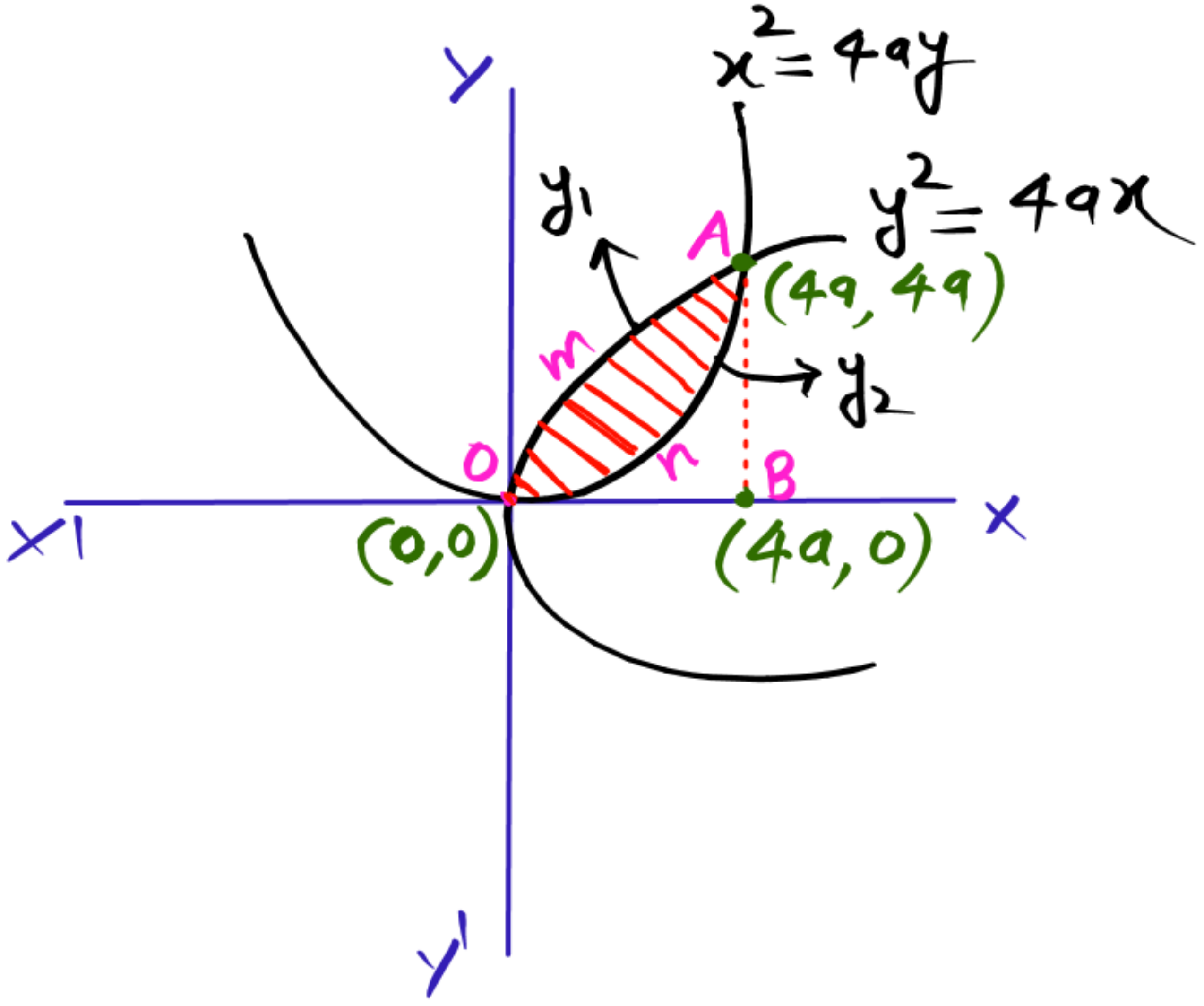
समी ① से y का मान समी ② में रखने पर

$x^2 = 4a\sqrt{4ax}$

Square on both side

$x^4 = 16a^2 \times 4ax$

$x^3 = 64a^3 \Rightarrow \boxed{x = 4a}$ समी ① में रखने पर



$$y^2 = 4a \times 4a$$

$$y^2 = (4a)^2$$

$$\boxed{y = 4a}$$

intersection Point $(4a, 4a)$

Area (A) = Area of omABO − Area of onABO

$$A = \int_0^{4a} y_1\,dx - \int_0^{4a} y_2\,dx$$

$$A = \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4a} \left(\frac{x^2}{4a}\right) dx$$

$$A = 2\sqrt{a}\int_0^{4a} x^{1/2}\,dx - \frac{1}{4a}\int_0^{4a} x^2 \cdot dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$$

$$= 2\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[(4a)^{3/2} - 0\right] - \frac{1}{12a}\left[(4a)^3 - 0\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left[(2^{\cancel{2}})^{3/\cancel{2}} \cdot a^{3/2}\right] - \frac{1}{\underset{3}{\cancel{12}}a}\left[\overset{16}{\cancel{64}}a^3\right]$$

$$= \frac{32}{3}a^{\frac{1}{2}}\left[a^{3/2}\right] - \frac{16}{3}a^2 = \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$$ वर्गइकाई

Ans