NEW

Semester - II

MATHEMATICS–II

UNIT - I
Determinants and Matrices

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule.
Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)

(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)

(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

3. आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)
6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)
7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)
8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना (To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

V. Imp

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

शर्तें (Condition) :- (i) पहले matrix के column की सं० = दूसरे matrix के Row की सं०

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

④ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

इनमें से किसके लिए AB Possible है ?

सभी के लिए A·B Possible. ✓

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

A·B Possible नहीं है।

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ क्या AB और B·A दोनों Possible?

AB Possible है।

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ & $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

B·A· Possible नहीं है।

नियम (Rule) :- दो matrix का गुणा **Row by Column** करते हैं।

अर्थात् पहले matrix के Row का गुणा दूसरे matrix के column के साथ करते हैं।

जैसे- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ & $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times1 & 1\times2+2\times0 \\ 3\times5+4\times1 & 3\times2+4\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 6 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Q. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{\underline{2}\times2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times\underline{3}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 3+16 & 6+20 & 9+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

Q.5:- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ दिखाइये कि $AB \neq BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$ Proved!

Q.6:- A^2 का मान निकालिये, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+8+9 & 2+6+3 & 3+4+12 \\ 4+12+6 & 8+9+2 & 12+6+8 \\ 3+4+12 & 6+3+4 & 9+2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix} \text{ Ans}$$

Q.7:- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि, $AB = BA.$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta & \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

$AB = BA$, Proved!

Q.8:- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध करो $A^2 - 5A + 7I = 0$ जबकि I एक इकाई आव्यूह, आर्डर 2×2 की है।

$A^2 = A \times A$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Q.9:- $A^2 - 4A - 5I$ का मान निकालिये,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ तथा } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

स्वयं पढ़े

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

(आव्यूह)

आव्यूह m x n संख्याओं की एक लम्ब सारणी होती है जिसमें m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं। m तथा n का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

A matrix m x n is a perpendicular table of numbers with m rows and n columns. m and n need not be equal.

(सारणिक)

जबकि सारणिक n x n संख्याओं की लम्ब सारणी है इसमें पंक्तियों तथा स्तम्भों का बराबर होना आवश्यक है।

Whereas the determinant is a perpendicular table of n x n numbers, in this it is necessary that the rows and columns be equal.

आव्यूह का वर्गाकार होना आवश्यक नहीं है |
The matrix need not be square.

आव्यूह में अवयवों की संख्या m x n होती है।
The number of elements in a matrix is m x n.

आव्यूह के लिये निम्न ब्रेकेटों का प्रयोग करते हैं।
[]
The following brackets are used for matrices.
[]

जबकि सारणिक सदैव वर्गाकार होता है।
Whereas the determinant is always square.

जबकि सारणिक में अवयवों की संख्या n^2 होती हैं।
While the number of elements in the determinant is n^2.

जबकि सारणिक के लिये केवल दो समान्तर रेखाओं || का प्रयोग करते हैं।
Whereas for the determinant only two parallel lines || are used.