

NEW

Semester - II

MATHEMATICS -II

UNIT

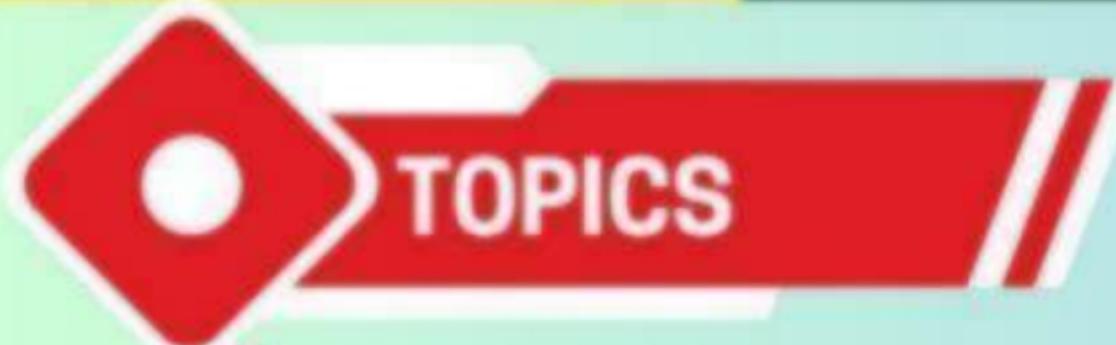
1

Determinants and Matrices (सारणिक तथा आव्यूह)

UNIT - I **Determinants and Matrices**

Elementary properties of determinants upto 3rd order, **consistency** of equations, **Crammer's rule**.

Algebra of matrices, **inverse** of a matrix, **matrix inverse method** to solve a system of linear equations in three variables.



TOPICS

- ✓ 1. Determinant (सारणिक)
- ✓ 2. Rows and columns of a determinants (सारणिक की पंक्तियां तथा स्तम्भ)
- ✓ 3. Order of a determinant (सारणिक का क्रम)
- ✓ 4. Value of Determinant (सारणिक का मान)
- ✓ 5. Minor (उपसारणिक या लघुघटक)
- ✓ 6. Co-factor (सहखण्ड)
- Imp ✓ 7. Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)
- Extra ✓ 8. Multiplication of two determinants (दो सारणिकों का गुणनफल)
- Imp ✓ 9. Crammer's rule (क्रैमर का नियम)
- Imp ✓ 10. Condition for Consistency (सुसंगत के प्रतिबन्ध)
- ✓ 11. Condition of Collinearity of three points (तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिवन्ध)

Qus:- Show that equations $4x + 6y = 14$ and $12x + 18y = 32$ are in constant.

दिखाए कि समीकरण असंगत हैं। (inconsistent)

$$4x + 6y = 14 \quad \text{--- } ①$$

$$12x + 18y = 32 \quad \text{--- } ②$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 72 - 72 = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 32 & 18 \end{vmatrix} = 252 - 192 = \underline{\underline{60}}$$

$\therefore D = 0 \neq D_1 \neq 0 \therefore$ इसका कोई हल नहीं होगा।

Qus:- Solve the following equations

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 3y + 5z = 7$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

(M.W.)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(10-9) - 1(20-21) + 1(12-14)$$

$$= 1(1) - 1(-1) + 1(-2)$$

$$= 1 + 1 - 2 = 0$$

R₁ के अनुदिश प्रसार (Expand Along R₁)

$$= 1(10-9) - 1(5-3) + 1(3-2)$$

$$= 1(1) - 1(2) + 1(1)$$

$$= 1 - 2 + 1$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(20-21) - 1(5-3) + 1(7-4)$$

$$= 1(-1) - 1(2) + 1(3)$$

$$= -1 - 2 + 3 = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1(14 - 12) - 1(7 - 4) + 1(3 - 2) \\ &= 1(2) - 1(3) + 1(1) \\ &= 2 - 3 + 1 \\ &= 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

\therefore इसके पात्री कोई हल नहीं होगा परं अनेक हल होगा
 (Either no solution or infinite solution)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \quad \text{--- ①} \\ x + 2y + 3z &= 4 \quad \text{--- ②} \\ x + 3y + 5z &= 7 \quad \text{--- ③} \end{aligned}$$

माना (Let,) $z = k$

$$x + y + k = 1 \quad \text{--- ①}$$

$$\underline{x + 2y + 3k = 4 \quad \text{--- ②}}$$

घटाने पर (Subtract)

$$-y - 2k = -3$$

$$-2k + 3 = y$$

$$y = 3 - 2k \quad \text{Put in Eq. ①}$$

$$x + (3 - 2k) + k = 1$$

$$x + 3 - k = 1$$

$$x = k - 2$$

x, y, z के मान समी^③ में,

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \\ (k-2) + 3(3-2k) + 5k &= \\ = k - 2 + 9 - 6k + 5k &= \\ = 6k + 7 - 6k &= \\ = \textcircled{7} &= R.H.S. \end{aligned}$$

Equation System having infinite solutions

(समीकरणों के अनन्त हल होते हैं।)

$$x = k-2, \quad y = 3-2k, \quad z = k$$

$$k = 1, 2, 3, 4, \dots \infty \text{ रखने पर}$$

$$k = 1 \text{ पर}$$

$$x = 1-2 = -1$$

$$y = 3-2 \times 1 = 1$$

$$z = 1$$

$$x = 2 \text{ पर}$$

$$x = 2-2 = 0$$

$$y = 3-2 \times 2 = -1$$

$$z = 2$$

इसी प्रकार अनन्त हल होते हैं।

SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS (समघात रैखिक समीकरणों के हल)

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = 0$$

(i) परि $\mathcal{D} \neq 0$ तो

इसका अद्वितीय हल (Unique Solution) होगा जिसे Trivial Solution (ट्रीवियल हल) कहते हैं।

$$\boxed{x=0} \quad \boxed{y=0} \quad \boxed{z=0}$$

(ii) यदि $D = 0$ हो

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

इस condition में पाते हुसका कोई solution नहीं होगा परंतु अनन्त हल होंगे। इसके लिए
$$z = k$$
 मानकर करेंगे।

Qus:- Solve the following homogeneous equations (समघात समीकरणों की हल कीजिए)

$$3x - 4y + 5z = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

$$2x + 3y + z = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+6) + 4(1+4) + 5(3-2)$$

$$= 3(7) + 4(5) + 5(1)$$

$$= 21 + 20 + 5$$

$$= \underline{\underline{46}} \neq 0$$

$\therefore D \neq 0$ तो

इसका Unique Solution होगा,

जिसे Trivial Solution कहते हैं।

$$\boxed{x=0} \quad \boxed{y=0} \quad \boxed{z=0} \quad \underline{\text{Ans}}$$

Qus:- Solve the following homogeneous equations (निम्न समसात समीकरणों की हल कीजिए)

$$3x + y + z = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x - 4y + 3z = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$2x + 5y - 2z = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश वृत्ताच

$$= 3(8-15) - 1(-2-6) + 1(5+8)$$

$$= 3(-7) - 1(-8) + 1(13)$$

$$= -21 + 8 + 13 = -21 + 21 = 0$$

$$\therefore \mathcal{D} = 0$$

$$\text{अतः } \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = 0$$

इसका प्राप्ति कीई हल नहीं होगा परं किर
अनन्त हल होंगे। (No Solution or infinite solution)

माना $[z = k]$

$$3x + y + k = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x - 4y + 3k = 0 \quad \text{--- (2)}$$

समी (1) - 3 × समी (2)

$$3x + y + k = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x - 12y + 9k = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$13y - 8k = 0$$

$$y = \frac{8k}{13}$$

Put in (1)

$$3x + \frac{8k}{13} + k = 0$$

$$3x + \frac{8k + 13k}{13} = 0$$

$$3x + \frac{21k}{13} = 0$$

$$x = -\frac{7k}{13}$$

$x = -\frac{7k}{13}, y = \frac{8k}{13} \text{ & } z = k$ सभी (3) से रखनेपर

$$\text{L.H.S.} = 2\left(-\frac{7k}{13}\right) + 5\left(\frac{8k}{13}\right) - 2(k)$$

$$= -\frac{14k}{13} + \frac{40k}{13} - \frac{2k}{1}$$

$$= \frac{-14k + 40k - 26k}{13}$$

$$= -\frac{40k + 40k}{13} = 0 = \text{R.H.S.}$$

अवलम्बन (infinite solution) होगी।

$$\boxed{x = \frac{-7k}{13}}, \boxed{y = \frac{8k}{13}}, \boxed{z = k}$$

$k = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ रखने पर

$$k=1 \text{ पर}, \quad k=2 \text{ पर},$$

$$x = \frac{-7}{13}$$

$$x = \frac{-14}{13}$$

$$y = \frac{8}{13}$$

$$y = \frac{16}{13}$$

$$z = 1$$

$$z = 2$$

इसी प्रकार अनन्त हल ~~होते हैं~~।