Elementi di Probabilità

Eventi casuali

- Esperimento: operazione effettuata in condizioni di controllo
  - es: lancio di una moneta
- Evento casuale: evento il cui verificarsi non è prevedibile in maniera deterministica
  - es: risultato del lancio di una moneta
- Casi possibili: insieme dei risultati di un esperimento
  - es: testa o croce
- Casi favorevoli: sottoinsieme dei risultati che interessano

Eventi casuali

- Si supponga
  - che tutti i casi possibili siano ugualmente possibili, ovvero non vi siano motivi per ritenere che alcuni si presentino più facilmente di altri
  - che tutti i casi possibili siano mutuamente esclusivi, ovvero che il presentarsi di uno di essi implica che nessun altro si presenta contemporaneamente

Probabilità

- Probabilità (teorica o a priori)
  - rapporto fra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{tot}}$$

- Frequenza (sperimentale)
  - ripetendo N volte un esperimento, rapporto fra il numero di volte in cui i casi favorevoli si sono manifestati e il numero totale di prove

$$f = \frac{N_A}{N_{tot}}$$

Probabilità

- Ad esempio: un dado ha 6 facce → lanciando un dado può uscire una delle 6 facce → i casi possibili sono 6
- Se esce un "2" → 1 solo caso favorevole
- Probabilità a priori che esca un "2"

$$P(2) = \frac{n_2}{n_6} = \frac{1}{6} \simeq 0.167$$

- Si supponga di aver lanciato 500 volte un dado, e che per 86 volte sia uscito un "2" → frequenza sperimen-tale

$$f = \frac{N_2}{N_6} = \frac{86}{500} = 0.172$$

Probabilità

- Per definizione

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

  – se $P(A) = 0 \Rightarrow$ l'evento è impossibile (nessun caso possibile è favorevole al suo verificarsi)

  – se $P(A) = 1 \Rightarrow$ l'evento è certo (si verifica in ogni caso)

- Analogamente

$$0 \leq f \leq 1$$

  – se $f = 0 \Rightarrow$ l'evento non si è mai verificato

  – se $f = 1 \Rightarrow$ l'evento si è sempre verificato

Probabilità e frequenza

- Al crescere del numero di prove N si verifica che la frequenza sperimentale f si avvicina alla probabilità teorica P
- Legge dei grandi numeri:
  - al crescere del numero di prove, la frequenza sperimentale tende (*) alla probabilità teorica

$$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad f_A \to P(A)$$

    - es: lanciando moltissime volte un dado, la frequenza con cui esce il "2" si avvicina sempre più a 1/6

(*) "tendere" qui non è usato nel senso rigoroso dell'Analisi matematica, ma solo in senso generico di "avvicinarsi sempre più"

Probabilità

- Se n_A è il numero di casi favorevoli all'evento A → n_{tot} - n_A è il numero di casi sfavorevoli all'evento A (cioè i casi in cui l'evento A ***non*** si verifica)
- Se $P(A) = n_A/n_{tot}$ è la probabilità che si verifichi A → la probabilità che non si verifichi l'evento A è

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{n_{tot}-n_A}{n_{tot}}=1-P\left(A\right)$$

  - quindi $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow$ è certo che l'evento A o si verifica o non si verifica

Frequenza

- Analogamente, se N_A è il numero di volte in cui si è verificato l'evento A → N_{tot} - N_A è il numero di volte in cui non si è verificato l'evento A
- La frequenza con cui non si è presentato l'evento A è

$$f_{\bar{A}} = \frac{N_{tot} - N_A}{N_{tot}} = 1 - f_A$$

  - e quindi $f_A + f_{\bar{A}} = 1$ ⇒ durante le N prove l'evento A o si è verificato o non si è verificato

Eventi

- Eventi indipendenti
  - se l’accadere di uno non cambia la probabilità che accada l’altro
- Eventi mutuamente esclusivi
  - se l’accadere di uno esclude che accada l’altro

Probabilità composta

- Dati due eventi mutuamente esclusivi A, con n_A casi favorevoli, e B, con n_B casi favorevoli
- Probabilità che si verifichi A **oppure** B

$$P(A\ o\ B) = \frac{n_A + n_B}{n_{tot}} = P(A) + P(B)$$

  - es: lanciando un dado, probabilità che esca un “3” o un “4”

$$P(3\ o\ 4) = P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- In generale, dati k eventi esclusivi, probabilità che si verifichi uno di essi

$$P_{tot} = P_1 + P_2 + \ldots + P_k$$

Probabilità composta

- Dati due eventi indipendenti A, con n_A casi favorevoli, e B, con n_B casi favorevoli
- Probabilità che si verifichino A **e** B

$$P(A\,e\,B)=\frac{n_A\,n_B}{n_{tot}\,n_{tot}}=P(A)\,P(B)$$

  - es: lanciando due dadi, probabilità che esca un "1" col primo e un "6" col secondo

$$P(1\,e\,6)=P(1)\,P(6)=\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

- In generale, dati k eventi indipendenti, probabilità che si verifichino tutti

$$P_{tot}=P_1\,P_2\ldots P_k$$

Distribuzione di probabilità

- Variabile casuale (o aleatoria)
  - misura numerica degli esiti di un fenomeno casuale
    - » es: numero di volte in cui esce “testa” lanciando 10 volte una moneta
- Distribuzione di probabilità
  - modello matematico che associa i valori di una variabile casuale alle probabilità che tali valori siano osservati

Distribuzioni discrete

- Variabile casuale **discreta**
  - assume un numero finito (o una infinità numerabile) di valori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
    - » es: numero di volte in cui esce un “5” lanciando *n* volte un dado
- Funzione di probabilità
  - distribuzione di probabilità per una variabile discreta
  - ad ogni valore x_i della variabile casuale associa la probabilità $P(x_i)$ che la variabile assuma tale valore

$$\forall\, x_i \quad 0 \le P(x_i) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

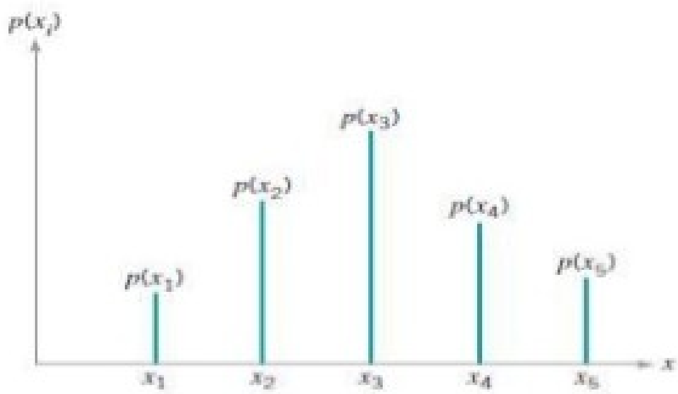
Distribuzioni continue

- Variabile casuale **continua**
  - assume qualunque valore in un intervallo [a, b] (eventualmente infinito)
    - » es: l'altezza di una persona in una popolazione
- Funzione densità di probabilità
  - distribuzione di probabilità per una variabile continua
  - ad ogni valore x della variabile casuale, la probabilità che essa assuma un valore fra x e x + dx è data da $p(x)$ dx

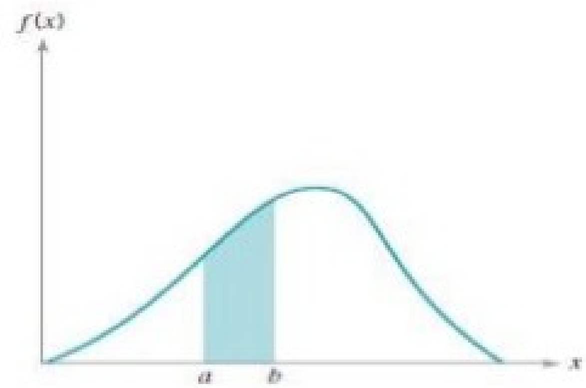
$$\forall [c,d] \in [a,b] \quad 0 \leq \int_c^d p(x)\, dx \leq 1$$

$$\int_a^b p(x)\, dx = 1$$

Distribuzioni di probabilità



Discreta



Continua

Probabilità

- Variabile discreta: probabilità di ottenere un certo valore x_i

$$x_i P(x_i)$$

- Variabile continua: probabilità di ottenere un valore compreso fra x e x + dx

$$x\, p(x)\, d\, x$$

Valore atteso

- Valore atteso
  - valor medio delle probabilità di ottenere un certo valore della variabile casuale, ovvero media pesata delle probabilità

$$\hat{x}=E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$ per una distribuzione discreta

$$\hat{x}=E(x)=\int_a^b x\, p(x)\, dx$$ per una distribuzione continua

» per una distribuzione continua $\hat{x} \in [a, b]$ sempre, per una distribuzione discreta può essere che $\hat{x} \notin \{x_i\}$

Varianza

- Varianza
  - varianza delle probabilità di ottenere un certo valore della variabile casuale

$$\widehat{s^2} = E(x - \hat{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})^2 P(x_i)$$ per una distribuzione discreta

$$\widehat{s^2} = E(x - \hat{x}) = \int_a^b (x - \hat{x})^2 p(x)\, dx$$ per una distribuzione continua

  - si dimostra facilmente che

$$\widehat{s^2} = E(x - \hat{x}) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Funzione di ripartizione

- Funzione di ripartizione
  - probabilità cumulativa che la variabile x assuma un valore minore di o uguale un dato valore x_k

$$F(x_k)=P(x\le x_k)=\sum_{i=1}^{k}P(x_i)\quad 1\le k\le n$$

per una distribuzione discreta

$$F(x_k)=P(x\le x_k)=\int_a^{x_k}p(x)\,dx\quad a\le x_k\le b$$

per una distribuzione continua

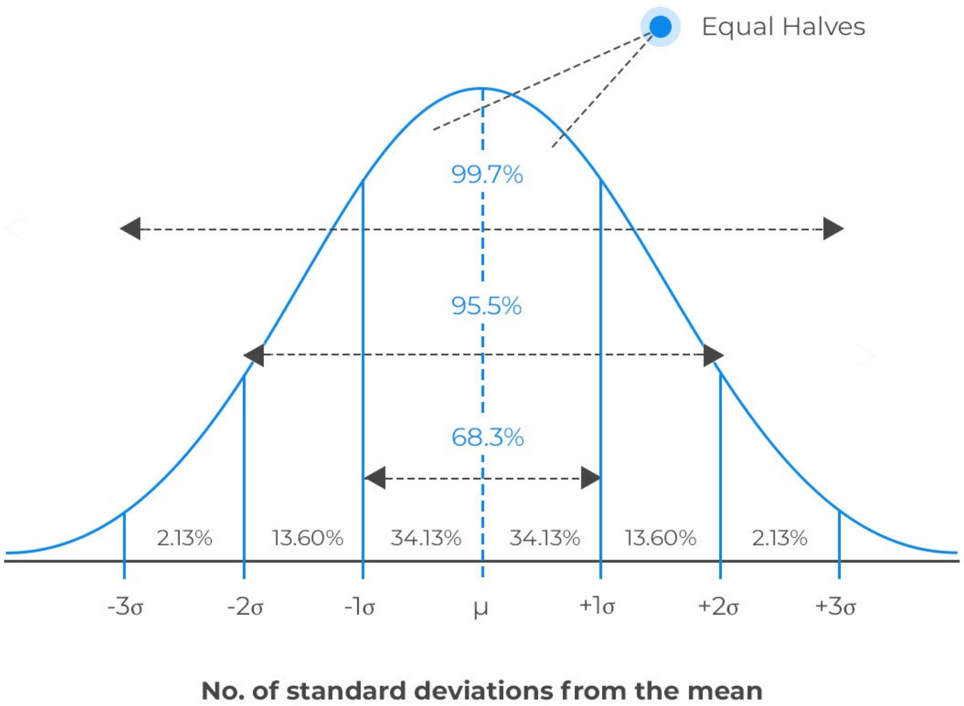
  - probabilità che x stia fra x_i e $x_j > x_i$

$$P(x_i\le x\le x_j)=F(x_j)-F(x_i)$$

Distribuzione normale

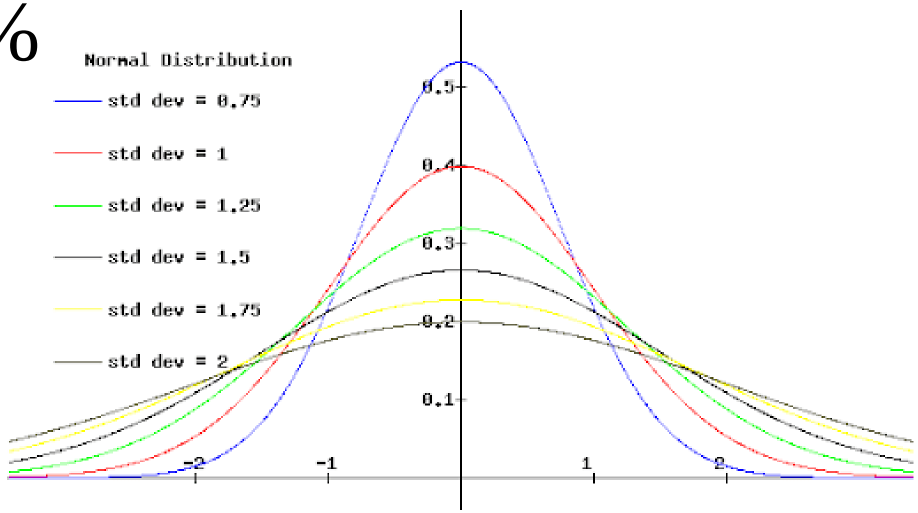
- Distribuzione normale (o di Gauss)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Distribuzione normale

- Definita in $-\infty \leq x \leq \infty$
- Valor medio: μ , deviazione standard: σ
- Simmetrica intorno a μ $\rightarrow$ media ≡ mediana ≡ moda
- $P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma) = 68.3\%$
- $P(\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma) = 95.5\%$
- $P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) = 99.7\%$



Distribuzione normale

- E' di capitale importanza
  - descrive la distribuzione degli errori casuali in molti tipi di misure
  - anche se i singoli errori non seguono questa distribuzione, le medie di gruppi di errori sono distribuiti approssimativamente secondo la distribuzione di Gauss purché siano molto numerosi (teorema del limite centrale)
    - » più in generale, la distribuzione della somma (e quindi della media) di N variabili aleatorie è approssimativamente normale se N è sufficientemente grande
    - » quindi la distribuzione di alcuni parametri di un campione statistico può essere nota anche se non è nota la distribuzione della popolazione