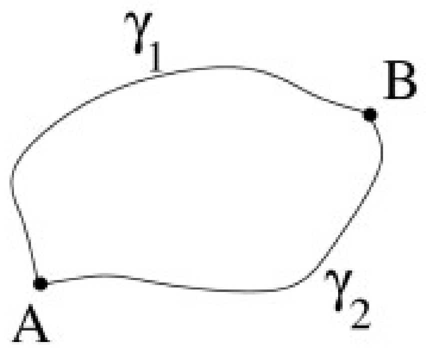
Forze conservative

Lavoro lungo cammini diversi

- Se $\boldsymbol{F}$ qualsiasi → L dipende dal cammino
  - $\gamma_1 \neq \gamma_2 \rightarrow L_1 \neq L_2$



$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s} \neq \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s}$$

- Esistono $\boldsymbol{F}$ tali che L **non** dipende dal cammino ma solo da A e B
  - $\gamma_1 \neq \gamma_2 \rightarrow L_1 = L_2$

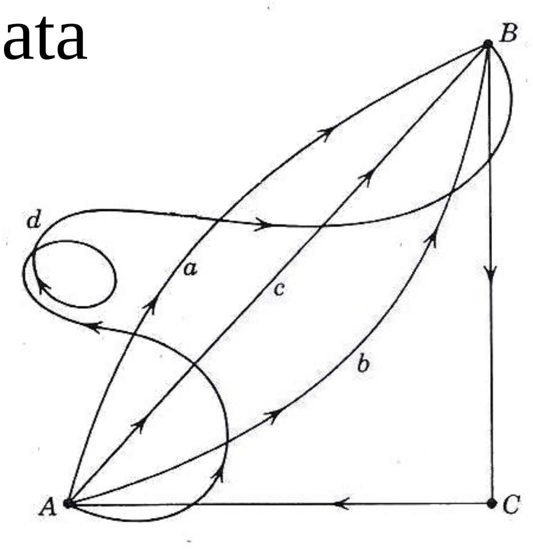
$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s}$$

Forze conservative

- Se L non dipende **mai** da γ ma **solo** da A e B

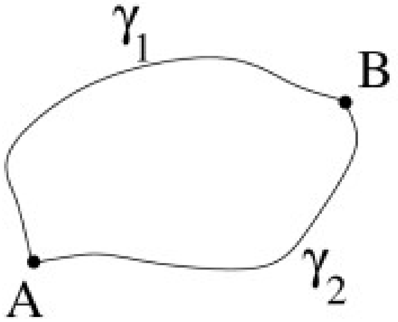
Forza conservativa

  - per qualsiasi γ comunque complicata



Forze conservative

- Dati γ_1 e γ_2 e una ***F*** conservativa



$$\int_{A\,(\gamma_1)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A\,(\gamma_2)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \quad \Rightarrow \quad \int_{A\,(\gamma_1)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} - \int_{A\,(\gamma_2)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

ma $$\int_{A\,(\gamma_2)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{B\,(\gamma_2)}^{A} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\int_{A\,(\gamma_1)}^{B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{B\,(\gamma_2)}^{A} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0}$$

- se ***F*** è *conservativa* il lavoro lungo un cammino chiuso è sempre nullo !

Forze conservative

- Se il lavoro L è indipendente dal percorso γ, si può dimostrare che esiste una funzione U tale che

$$L = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = U(B) - U(A)$$

  – perchè L dipende solo dai punti iniziale A e finale B

- La funzione U è detta **potenziale** della forza conservativa $\boldsymbol{F}$

> Il potenziale si può definire
> solo
> per una *forza conservativa* !

Forze conservative

- Spesso però si preferisce

$$L=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=V(A)-V(B)$$

  – cioè differenza fra il punto iniziale e quello finale

- Basta porre $V = -U$
- La funzione V è detta **energia potenziale** della forza conservativa $\boldsymbol{F}$

Anche l'energia potenziale si può definire solo per una *forza conservativa* !

Energia potenziale

- Nel SI: grandezza derivata
- [V] = Joule

Energia potenziale

- Energia potenziale nel punto B

$$V(B) = V(A) - \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

quindi $V(B)$ è nota *a meno di una costante*

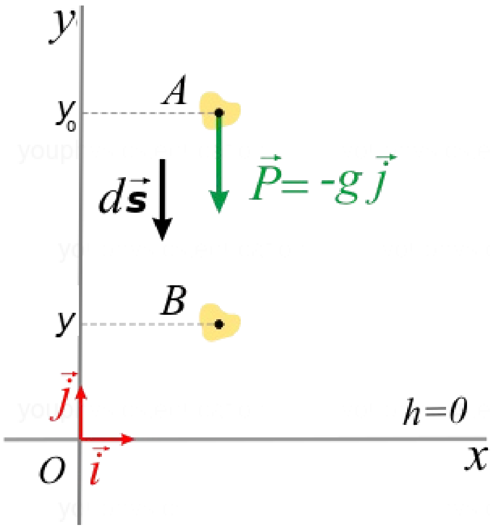
- perchè $L = \Delta V$: si conosce **solo** la variazione di energia potenziale, non il suo valore !

- Ma $V(A)$ arbitraria → $V(A) = 0$

$$V(B) = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Forza peso

- Se $\boldsymbol{F}$ = cost $\Rightarrow \exists\ V$



- Energia potenziale

$$V(y)=V(y_0)-\int_{y_0}^{y}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=$$

$$=V(y_0)+\int_{y_0}^{y}P\,d\,y=V(y_0)+m\,g(y-y_0)$$

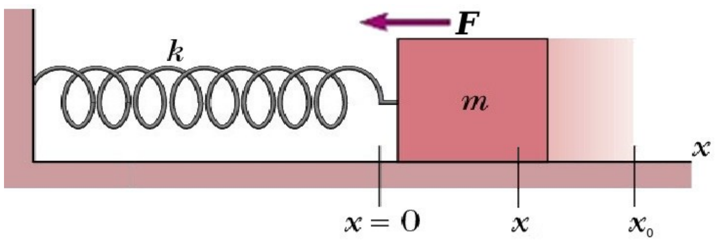
- Per comodità $V(0)$ = 0

$$V(0)=0=V(y_0)-m\,g\,y_0 \;\Rightarrow\; V(y_0)=m\,g\,y_0$$

$$\boxed{V(y)=m\,g\,y}$$

Forza elastica

- Anche la forza elastica ammette potenziale



- Energia potenziale

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s} =$$

$$= V(x_0) - \int_{x_0}^{x} (-k\,x)\,d\,x = V(x_0) + \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2)$$

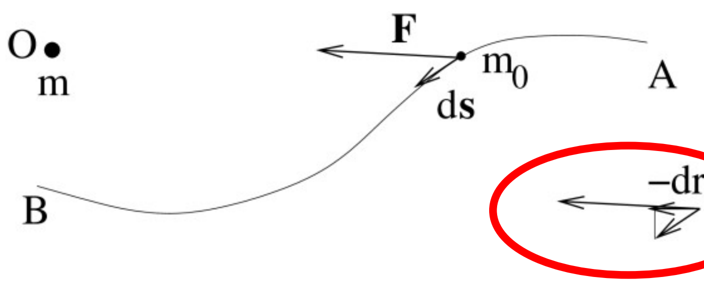
- Per comodità $V(0) = 0$

$$V(0) = 0 = V(x_0) - \frac{1}{2} k\,x_0^2 \;\Rightarrow\; V(x_0) = \frac{1}{2} k\,x_0^2$$

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2} k\,x^2}$$

Forza gravitazionale

- Forza centrale → esiste il potenziale



$$V(B)=V(A)-\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-F\,dr$$

$$V(B)=V(A)+\int_A^B F\,dr=V(A)+\int_{r_0}^{r} G\frac{mm_0}{r^2}dr$$

$\int 1/r^2\, dr = - 1/r$

$$V(r)=V(r_0)+G\,mm_0\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$$

$$r\rightarrow\infty \;\Rightarrow\; V(r)=0 \qquad V(r_0)+G\,mm_0\frac{1}{r_0}=0 \qquad V(r_0)=-G\,m\,m_0\frac{1}{r_0}$$

$$\boxed{V(r)=-G\,m\,m_0\frac{1}{r}}$$

Lavoro e energia

- In generale lavoro *L* di una forza ***F*** tra A e B

$$L=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}m\,v_B^2-\frac{1}{2}m\,v_A^2=K_f-K_i$$

- Se ***F*** conservativa

$$L=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=V(A)-V(B)=V_i-V_f$$

$$K_f-K_i=V_i-V_f$$

Energia meccanica

$$K_f - K_i = V_i - V_f \quad \longrightarrow \quad K_i + V_i = K_f + V_f$$

$$\boxed{E = K + V} \quad \longleftarrow \quad \text{Energia meccanica}$$

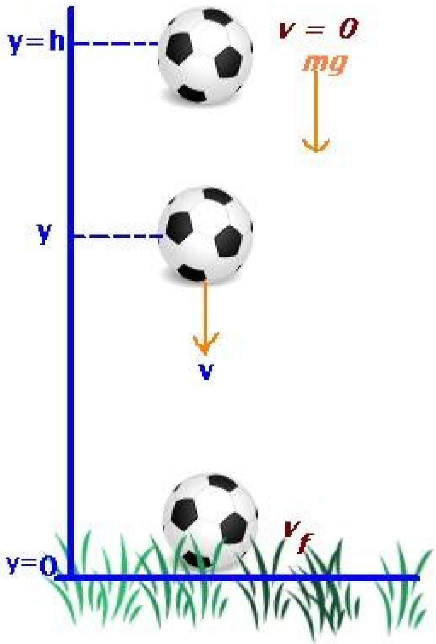
- Conservazione dell'**energia meccanica**

$$\boldsymbol{F} \text{ conservativa} \Rightarrow E = \text{cost}$$

  - $L > 0 \rightarrow K$ aumenta, V diminuisce, E costante
  - $L < 0 \rightarrow K$ diminuisce, V aumenta, E costante

Esempio: forza peso

- Caduta libera



– alla partenza (y = h)

$$V_i = m g h \qquad K_i = 0 \qquad E_i = K_i + V_i = m g h$$

– ad una quota intermedia y

$$v = \sqrt{2 a s} = \sqrt{2 g (h - y)}$$

$$V = m g y \qquad K = \frac{1}{2} m v^2 = m g (h - y)$$

$$E = K + V = m g h$$

– a terra (y = 0)

$$v = \sqrt{2 a s} = \sqrt{2 g h} \quad \Rightarrow \quad V_f = 0 \qquad K_f = \frac{1}{2} m v^2 = m g h \qquad E_f = K_f + V_f = m g h$$

Esempio: forza peso

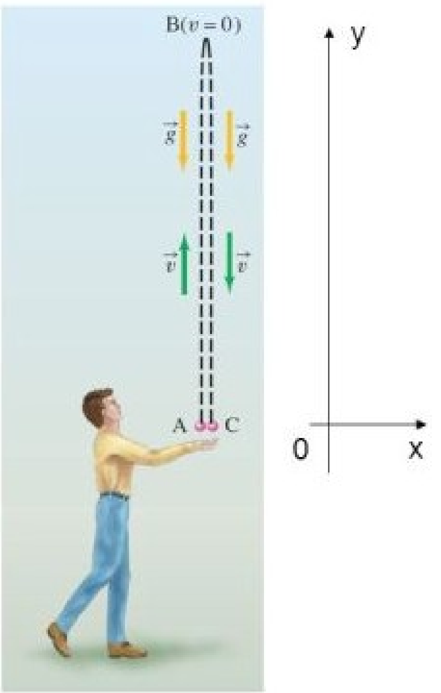
- Corpo lanciato verso l'alto
  - ad ogni istante

$$E = K + V = \frac{1}{2} m v^2 + m g y = cost$$

  - a $y = 0$ è $v = v_0$ quindi

$$E_i = K_i + V_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

  - al crescere di $y \rightarrow v$ diminuisce
  - h_{max} quando $v = 0 \rightarrow K = 0 \rightarrow V(h_{max}) = E_i$



$$m g h_{max} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2 g}$$

dipende dal quadrato di v_0 !

non può salire più in alto di h_{max} perchè

$$y > y_{max} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 < 0$$

Esempio: forza peso

- Corpo lanciato verso l'alto
  - quando ricade è sempre

$$E = K + V = \frac{1}{2} m v^2 + m g y = cost$$

  - a $y = 0$ è di nuovo $V = 0 \rightarrow K = E_i$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v = v_0$$

ripassa da O con
la stessa velocità

Massa oscillante

- Massa *m* oscillante vincolata ad una molla di costante elastica *k*
  - ad ogni istante

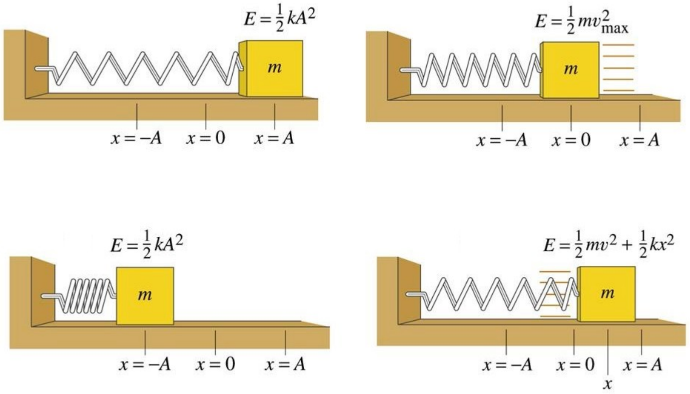
$$E = K + V = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = cost$$

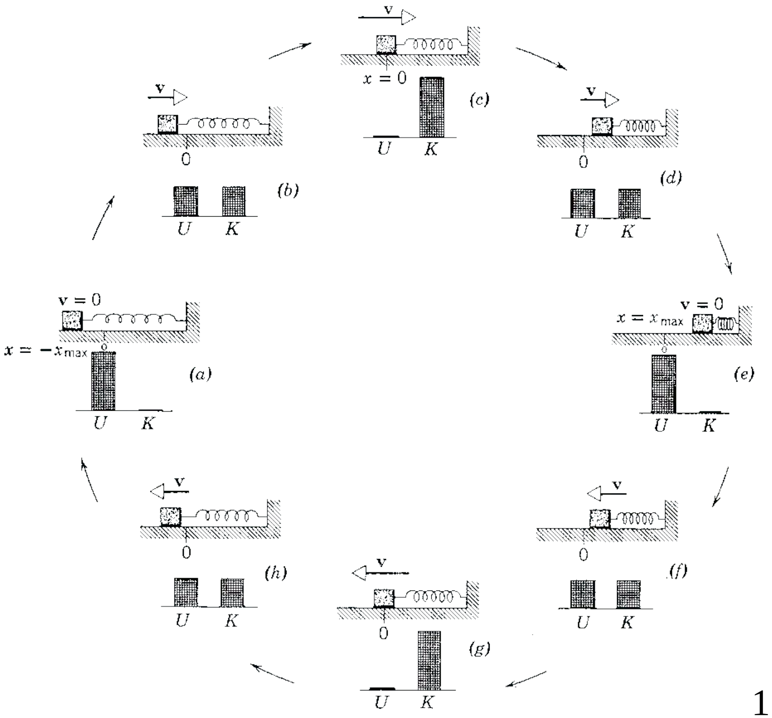
  - a $x = \pm A$

$$E = 0 + \frac{1}{2} k A^2$$

  - a $x = 0$

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 + 0$$





Velocità di fuga

- v_f tale che il corpo non ricade sulla Terra
  - $v_\infty = 0 \; (\rightarrow K = 0)$

$$r \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad V = 0 \quad \longrightarrow \quad E = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - G \frac{m M_T}{R_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}} = 1.12 \cdot 10^4 \, m/s = 11.2 \, km/s$$

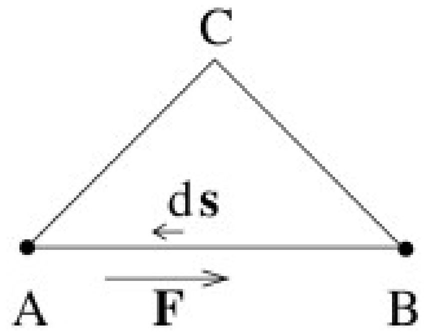
Conservazione dell’energia

- Conservazione dell’energia meccanica: teorema
- Varie forme di energia (termica, elettrica, chimica…)
- Principio di conservazione dell’**energia totale**

$$\boxed{E_{tot} = \sum E_i = cost}$$

Forze non conservative

- Es: forze di attrito
- L da A a B direttamente (AB = $2l$)



$$L_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int_0^{2l}\mu_d m g\, dl=-2\mu_d m g l$$

$$\left(L_{AB}=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{s}=F\,\Delta s=-2\mu_d m g l\right)$$

- L da A a B via C (AC = CB = $l\sqrt{2}$)

$$L_{ACB}=L_{AC}+L_{CB}=\int_A^C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}\int_C^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int_0^{\sqrt{2}l}\mu_d m g\, dl-\int_0^{\sqrt{2}l}\mu_d m g\, dl=-2\sqrt{2}\mu_d m g l$$

$$\left(L_{AC}=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{s}_{AC}=F\,\Delta s=-\sqrt{2}\mu_d m g l \qquad L_{CB}=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{s}_{CB}=F\,\Delta s=-\sqrt{2}\mu_d m g l\right)$$

- $L_{AB} \neq L_{AC} + L_{CB}$!