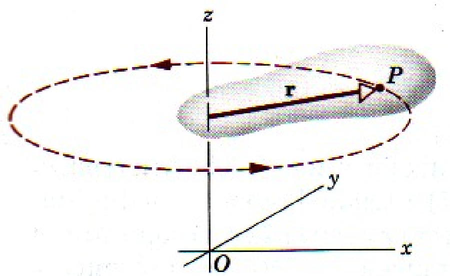
Meccanica rotazionale

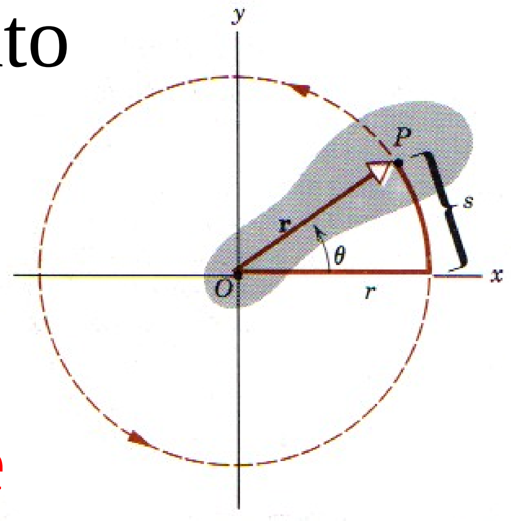
Moto rotatorio

- Finora abbiamo studiato solo il moto traslatorio di corpi rigidi
  - nel moto traslatorio *ogni particella subisce il medesimo spostamento di ogni altra in ogni intervallo di tempo*
- Vediamo ora il moto rotatorio di un corpo rigido
  - nel moto puramente rotatorio *tutte le particelle del corpo si muovono su circonferenze i cui centri giacciono su una retta, detta **asse di rotazione***
    - » di conseguenza nel caso di rotazione attorno ad un asse fisso, *tutte* le *particelle* di un corpo rigido hanno la *stessa velocità angolare* e la *stessa accelerazione angolare*



Moto circolare

- Si consideri una sezione di un corpo rigido ortogonale all'asse di rotazione ed un punto generico P
  - la rotazione è per convenzione positiva se è antioraria



- Ciascun punto si muove di moto circolare con velocità angolare ω e accelerazione angolare α
  - se α *costante*

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

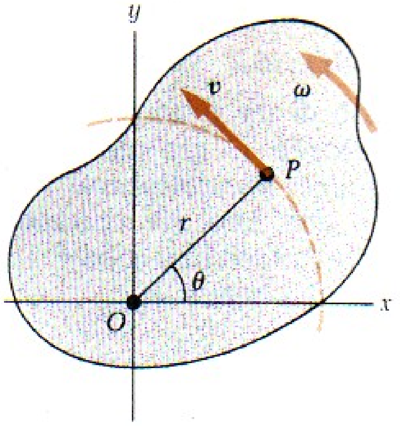
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Moto circolare

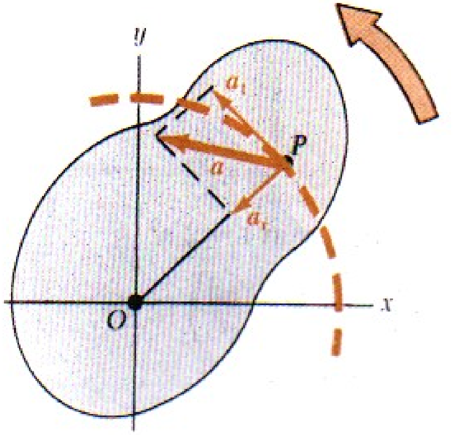
- Dato che $v = \omega r$

  ⇒ tutti i punti del corpo rigido hanno la ***stessa*** velocità angolare ma ***non*** la stessa velocità lineare



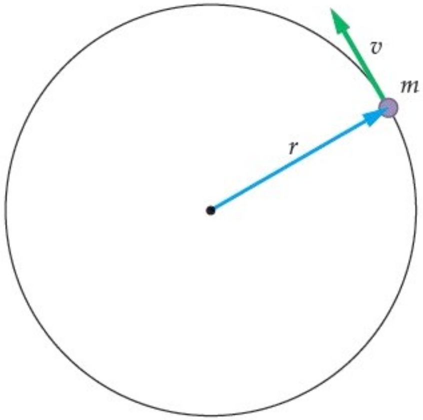
- L'accelerazione è $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c$, con moduli $a_t = \alpha r$ e $a_c = \omega^2 r$

  ⇒ tutti i punti del corpo rigido hanno la ***stessa*** accelerazione angolare ma ***non*** la stessa accelerazione lineare



Momento di inerzia

- Massa puntiforme *m* in rotazione intorno ad un punto O
- Energia cinetica



$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\omega r)^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

dove

$$\boxed{I=mr^2}$$

Momento di inerzia

per cui

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2$$

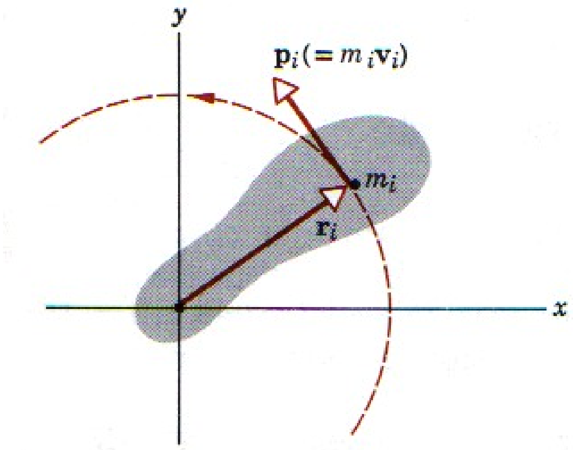
Momento di inerzia

- Sistema di più masse m_i in rotazione a distanza r_i da O con stessa ω

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I_{tot} = \sum_i m_i r_i^2$$

- Corpo esteso
  - si divide in masse infinitesime dm



$$I_{tot} = \int r^2 \, dm \qquad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Momento di inerzia

- Il momento di inerzia rappresenta nei moti rotazionali quello che la massa rappresenta nei moti traslazionali
- Usando la densità ρ si può riscrivere

$$I_{tot} = \int r^2 \, dm = \int r^2 \rho \, dV$$

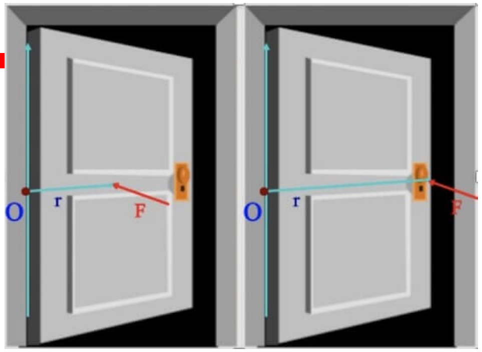
  - se il corpo è omogeneo ρ = cost $\Rightarrow$ $I_{tot} = \rho \int r^2 \, dV$
    - » dipende solo dalla forma
- In generale il calcolo del momento di inerzia di un corpo è molto difficile
  - però per corpi omogenei con particolari simmetrie può essere determinato

Momento di inerzia

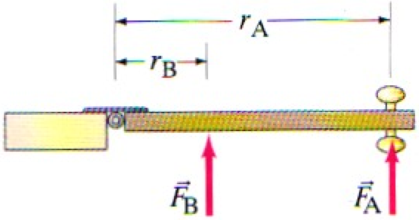
- Nel SI: grandezza derivata
  - $[I]$ = Kg m^2
- Notare l'analogia

Moto lineare	Moto circolare
m	I
v	ω
$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} I \omega^2$

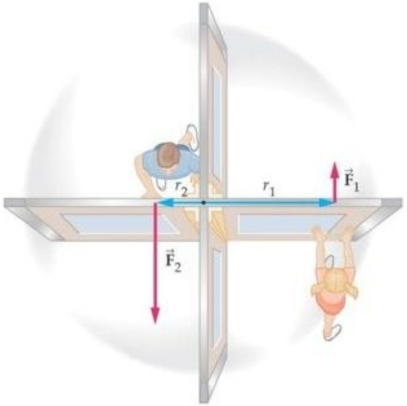
Effetto di una forza



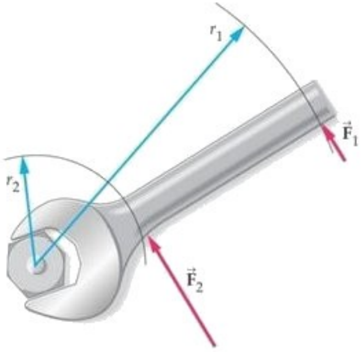
- Quando si vuole aprire una porta, si applica una forza F sulla maniglia



- Se però la stessa forza viene applicata in un punto più vicino al cardine della porta, si osserva che la forza da applicare per aprire la porta deve essere maggiore

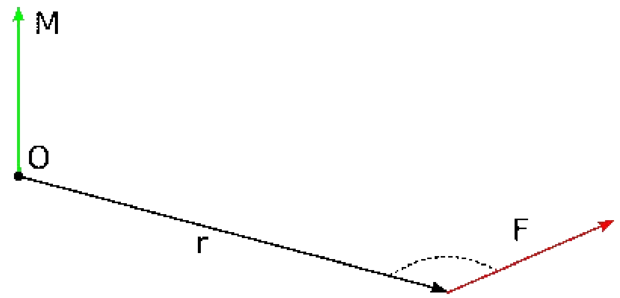


- Analogamente volendo aprire una porta girevole
- Se invece si vuole svitare un bullone, l'operazione è facilitata se si agisce all'estremo del manico della chiave inglese piuttosto che vicino al bullone



Momento

- Data una forza ***F*** e un punto O a distanza ***r***

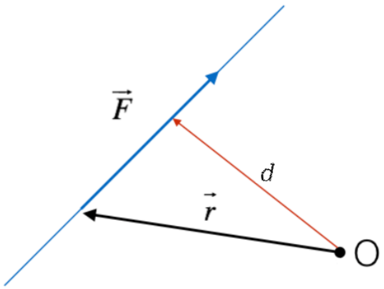


$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}}$$ **Momento della forza**

- grandezza vettoriale
- modulo

$$\tau = r\,F\sin\theta = F\,d$$

braccio della forza



Momento

- Nel SI: grandezza derivata
  - $[\tau]$ = N m
    - » da non confondere con il lavoro!

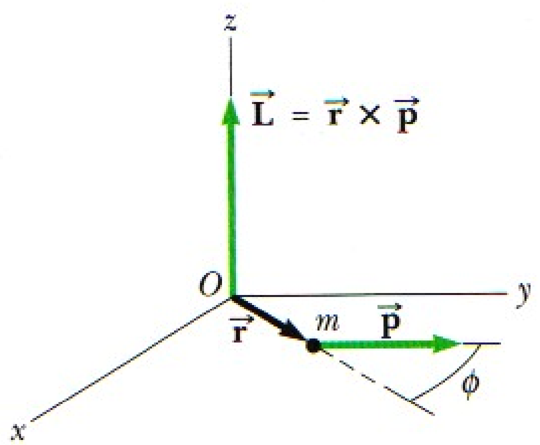
Equazione del moto

- A un corpo puntiforme di massa *m* si applichi una forza ***F***

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \wedge m\,\boldsymbol{a} = m\,r^2\,\boldsymbol{\alpha} = I\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = I\,\boldsymbol{\alpha}}$$



  - notare l'analogia $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$

- Equazione fondamentale della dinamica rotazionale

$$\boldsymbol{\tau} = I\,\boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \int \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \int \omega\, dt$$

Quantità di moto

- Dato $\boldsymbol{q} = m\,\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}$$

Momento della quantità di moto

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r} \wedge m\,\boldsymbol{v} = m\,r^2\,\boldsymbol{\omega} = I\,\boldsymbol{\omega}$$

  – analoga al moto lineare: $\boldsymbol{q} = m\,\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\omega}$

- Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}$$

analoga a $\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{F}$

Momento della quantità di moto

- Quindi

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\,\boldsymbol{M}}{d\,t}$$

- Se sistema isolato $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\,\boldsymbol{M}}{d\,t} = \mathbf{0}}$$

Se la forza esterna risultante agente su un sistema è nulla (sistema isolato), il momento della quantità di moto totale del sistema si conserva

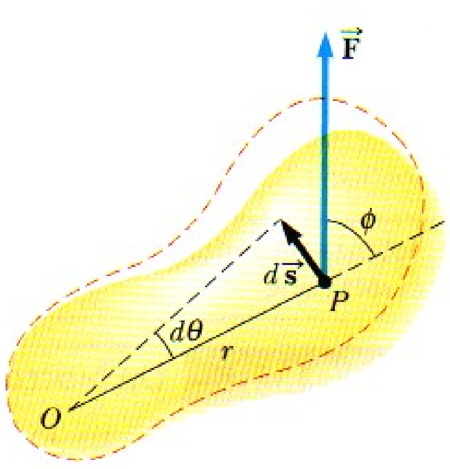
è l'analogo della conservazione della quantità di moto

Lavoro e energia cinetica

- Dato un corpo in rotazione sotto l'azione di una forza ***F***
  - lavoro infinitesimo

$$d\,L = \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s} = \left(F \sin\varphi\right) r\,d\,\theta$$

» ricordando che cos(90 – φ) = sinφ



- Ma

$$r\,F \sin\varphi = |\boldsymbol{\tau}|$$

$$d\,L = \tau\,d\,\theta$$

analoga a dL = F ds

Lavoro e energia cinetica

- Inoltre in modulo

$$\tau\, d\theta = I\,\alpha\, d\theta = I\,\frac{d\omega}{dt}\,d\theta = I\,\frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,d\theta = I\,\omega\, d\omega$$

e integrando

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\,\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\,\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_1^2$$

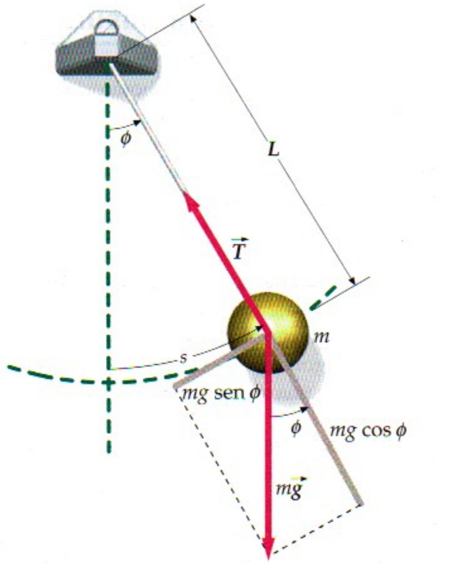
analoga a $L = ½\, m\, v_2^{\,2} – ½\, m\, v_1^{\,2}$

Moto lineare e moto rotatorio

Moto lineare	Moto rotatorio
m	I
v, a	ω, α
$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} I \omega^2$
$\boldsymbol{F} = m\, \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\, \boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{q} = m\, \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{M} = I\, \boldsymbol{\omega}$
$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{q}}{dt}$	$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}$

Esempio: pendolo semplice

- Massa puntiforme *m*, filo inestensibile lungo *L*
  - equazione fondamentale del moto rotatorio



$$\tau = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

con $I = m l^2$ e $\tau = |\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{l} \wedge m\,\boldsymbol{g}| = -mgl\sin\theta$

$$\Downarrow$$

$$m\,l^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\,l\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

stessa equazione
trovata in precedenza

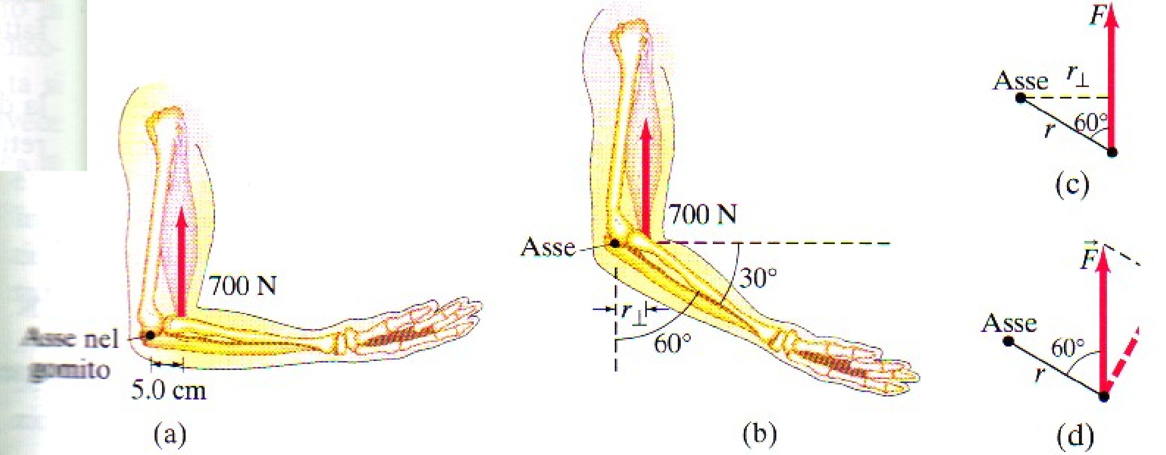
Esempio

ESEMPIO 8-6 **Momento torcente di un bicipite.** Il bicipite esercita una forza verticale sull'avambraccio, che viene mostrato piegato in figura 8-12a e b. Per ciascun caso mostrato, calcolate il momento torcente rispetto all'asse di rotazione che passa attraverso la giunzione articolare del gomito, assumendo che il muscolo sia attaccato a 5.0 cm dal gomito, come mostrato in figura.

APPROCCIO Le forze sono date e in (a) è dato anche il braccio della forza. In (b) dobbiamo tener conto dell'angolo per ottenere il braccio della forza.

SOLUZIONE (a) $F = 700$ N e $r_\perp = 0.050$ m, perciò

$$\tau = r_\perp F = (0.050\ \text{m})(700\ \text{N}) = 35\ \text{m} \cdot \text{N}.$$



(b) Poiché l'avambraccio è un certo angolo sotto l'orizzontale, il braccio della forza è minore che nella parte (a) (fig. 8-12c): $r_\perp = (0.050\ \text{m})(\text{sen}\,60°)$ dove $\theta = 60°$ è l'angolo fra $\vec{F}$ e r. F è ancora 700 N, perciò

$$\tau = (0.050\ \text{m})(0.866)(700\ \text{N}) = 30\ \text{m} \cdot \text{N}.$$

A questo angolo il braccio applica un momento torcente inferiore di quando è a 90°. Gli attrezzi con i pesi nelle palestre sono spesso progettati per tener conto di questa variazione in funzione dell'angolo.