Vettori

Scalari e vettori

- Alcune grandezze fisiche sono descritte completamente da un *numero* e dalla relativa unità di misura:

  sono chiamate *grandezze **scalari***

  – sono grandezze scalari ad esempio il tempo, la massa, la temperatura, la carica elettrica

- Altre quantità richiedono più elementi per essere completamente definite. Sono descritte da un *modulo*, una *direzione* e un *verso*:

  sono chiamate *grandezze **vettoriali***

  – sono grandezze vettoriali ad esempio la velocità, la forza, il campo elettrico

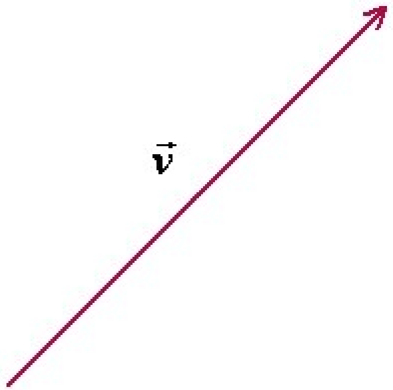
- Le grandezze scalari sono rappresentate da numeri, le grandezze vettoriali da vettori

Vettori

- Indicati con

$$\vec{v} \quad \vec{F} \quad \vec{E} \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{E}$$

- Rappresentazione grafica di una grandezza vettoriale: una *freccia* dove
  - la lunghezza è proporzionale al *modulo* della grandezza
  - la *direzione* e il *verso* rappresentano quelli della grandezza



Operazioni fra scalari

- Somma di due grandezze scalari omogenee: somma algebrica dei loro valori

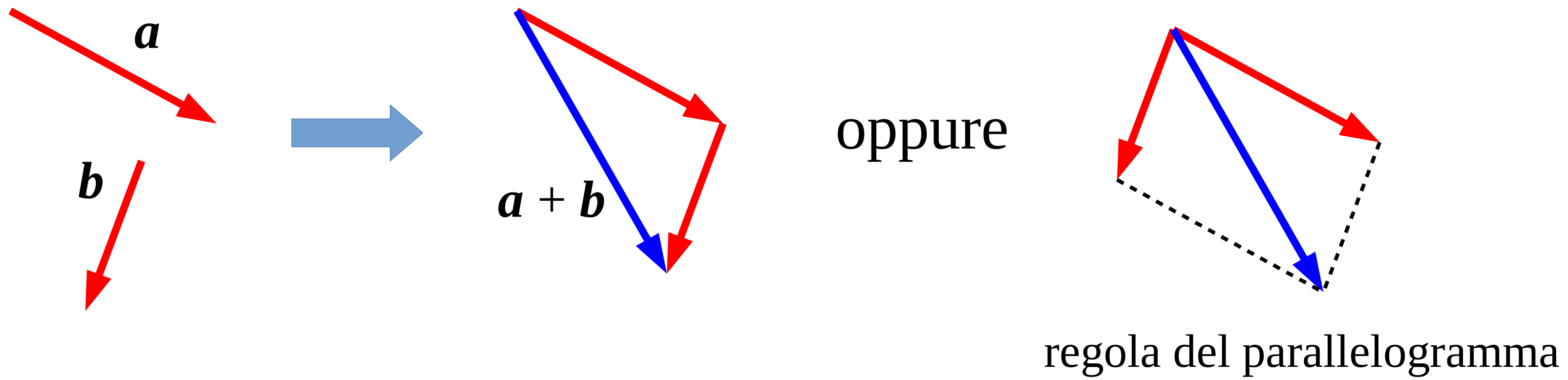
$$c = a + b$$

- Prodotto di due grandezze scalari: nuova grandezza scalare il cui valore è il prodotto dei valori delle due grandezze

$$c = a\,b$$

Somma di vettori

- Dati due vettori omogenei

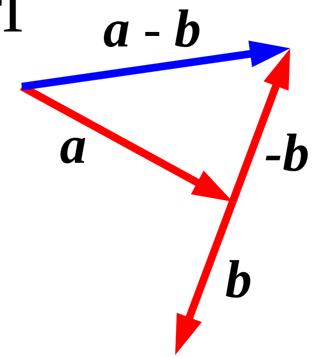


- Valgono
  - la proprietà commutativa $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
  - la proprietà associativa $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

Prodotto vettore per scalare

- Prodotto di un vettore per uno scalare → **nuovo** vettore
  - stessa direzione e stesso verso del vettore di partenza
  - modulo pari al prodotto algebrico del modulo del vettore di partenza per lo scalare: $b = s\,|\boldsymbol{a}|$
    - » quindi se lo scalare è negativo, il verso è opposto
- In particolare $-\boldsymbol{a}$ è un vettore che ha stessa direzione e modulo di $\boldsymbol{a}$ e verso opposto
  - si può così definire la differenza fra due vettori

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$



Prodotto di vettori

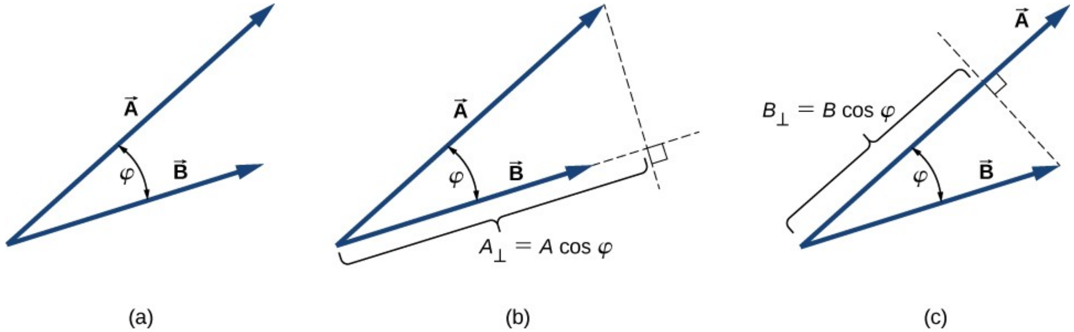
- Due tipi di prodotto
  - a seconda che il risultato sia uno scalare oppure un vettore

Prodotto scalare

- prodotto scalare (o prodotto interno)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\,b\cos\theta$$

  - è pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo θ compreso fra i due vettori
  - ovvero al prodotto del modulo di uno dei vettori per la proiezione del secondo vettore sul primo



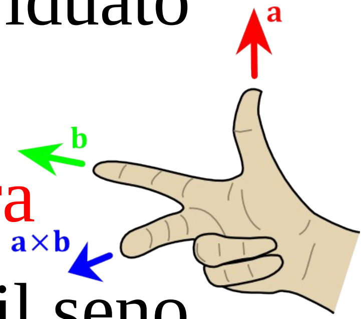
  - se $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$

Prodotto vettoriale

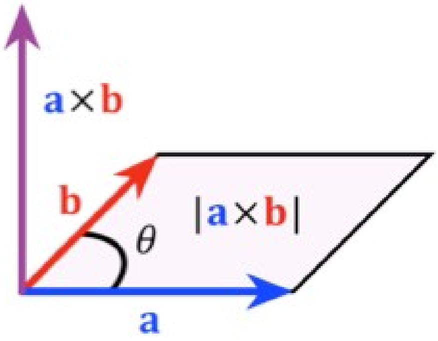
- prodotto vettoriale (o prodotto esterno)

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

  - la direzione di $\boldsymbol{c}$ è *perpendicolare* al piano individuato dai vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$
  - il verso di $\boldsymbol{c}$ è dato dalla regola della mano destra



  - il modulo di $\boldsymbol{c}$ è pari al prodotto dei moduli per il seno dell'angolo θ compreso fra i due vettori



$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = a\, b \sin\theta$$

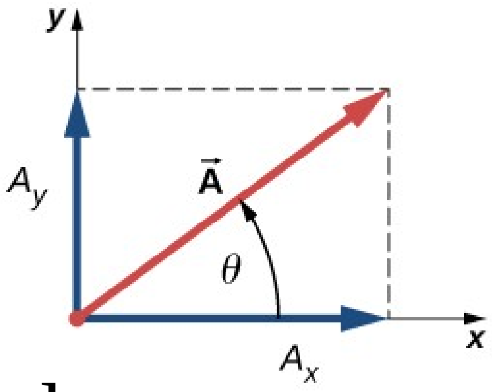
  - se $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Prodotto scalare e vettoriale

- Il prodotto scalare è
  - commutativo $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
  - distributivo rispetto alla somma $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$
- Il prodotto vettoriale è
  - **anti-**commutativo $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$
  - distributivo rispetto alla somma $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}$

Componenti di un vettore

- Un vettore nel piano può essere scomposto in componenti lungo *x* ed *y*



- Le componenti hanno modulo

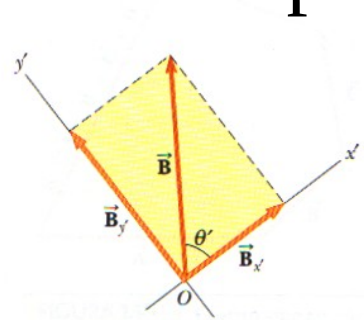
$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta$$

  - evidentemente $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y$
  - il modulo e la direzione di A sono dati da

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

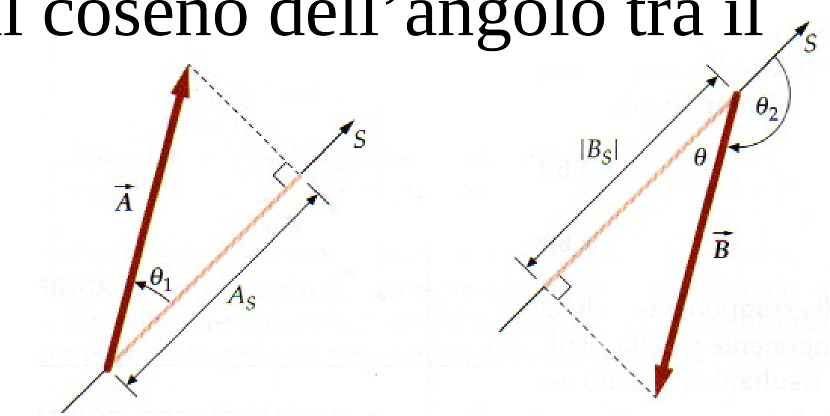
Componenti di un vettore

- Più in generale un vettore nel piano può essere scomposto lungo due componenti qualsiasi, ***anche non ortogonali***



  - se le direzioni coincidono con gli assi cartesiani, le componenti si dicono cartesiane
  - la componente di un vettore lungo una specifica direzione è pari al prodotto del vettore per il coseno dell'angolo tra il vettore e la direzione considerata

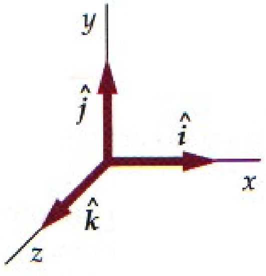
- In maniera analoga in 3 dimensioni



$A_S = A \cos\theta_1$ $B_S = B\cos\theta_2 = -B\cos\theta$

Versori

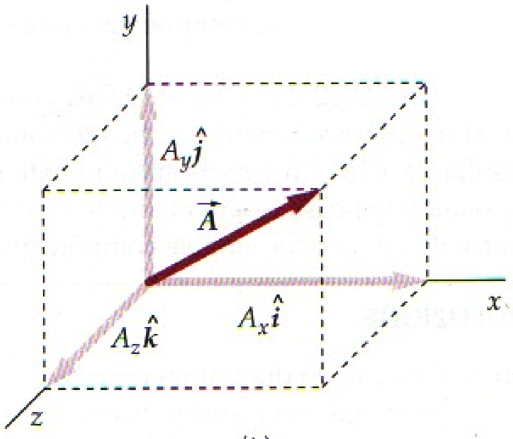
- Un versore è un vettore avente modulo unitario
- Solitamente si indicano con $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ i versori degli assi cartesiani ortogonali
- Un generico vettore può essere espresso per mezzo dei versori



(a)

$$\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{i}} + A_y \hat{\boldsymbol{j}} + A_z \hat{\boldsymbol{k}}$$

- E' immediato dimostrare



(b)

$$\hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{i}} \wedge \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{j}} \wedge \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{k}} \wedge \hat{\boldsymbol{i}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{i}} \wedge \hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}} \wedge \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}} \wedge \hat{\boldsymbol{k}} = 0$$

Versori

- E' facile dimostrare che dati due vettori

$$\boldsymbol{a}=a_x\hat{\boldsymbol{i}}+a_y\hat{\boldsymbol{j}}+a_z\hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b}=b_x\hat{\boldsymbol{i}}+b_y\hat{\boldsymbol{j}}+b_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

  – il loro prodotto scalare è dato da

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

  – le componenti del loro prodotto vettoriale $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ sono date da

$$c_x=a_y b_z-a_z b_y$$

$$c_y=a_z b_x-a_x b_z$$

$$c_z=a_x b_y-a_y b_x$$

Esempio

Esempi

1.1. I vettori di Fig. 1.1 hanno modulo A = 40 e B = 20. Trovare:
a) le componenti (A_x , A_y) e (B_x , B_y);
b) le componenti (C_x , C_y) del vettore somma **C = A + B**;
c) il modulo del vettore C;
d) la direzione del vettore C (angolo θ che esso forma con l'asse x).

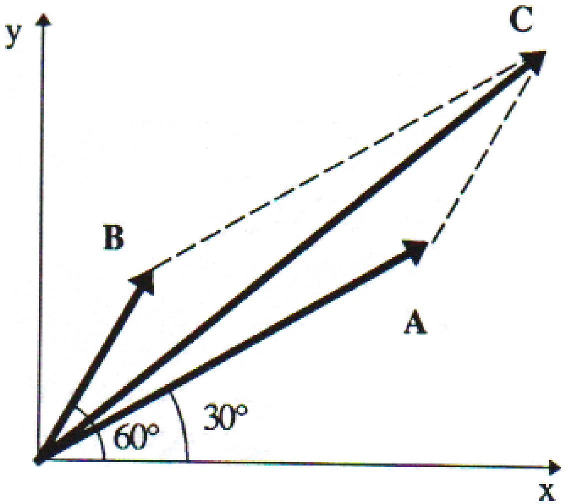


Fig. 1.1

Soluzione

*a) Componenti di **A**:* $A_x = A\cos 30° = 40 \times \cos 30° = 34.6$

$A_y = A\sin 30° = 40 \times \sin 30° = 20$

*Componenti di **B**:* $B_x = B\cos 60° = 20 \times \cos 60° = 10$

$B_y = B\sin 60° = 20 \times \sin 60° = 17.3$

*b) Componenti di **C**:* $C_x = A_x + B_x = 34.6 + 10 = 44.6$

$C_y = A_y + B_y = 20 + 17.3 = 37.3$

*c) Modulo di **C** :*

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{1989 + 1391} = 58$$

*d) Direzione di **C** :* $\theta = \arctan(C_y / C_x)$

$$\theta = \arctan(37.3 / 44.6) = 40°$$