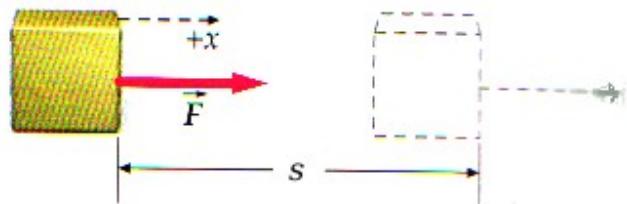


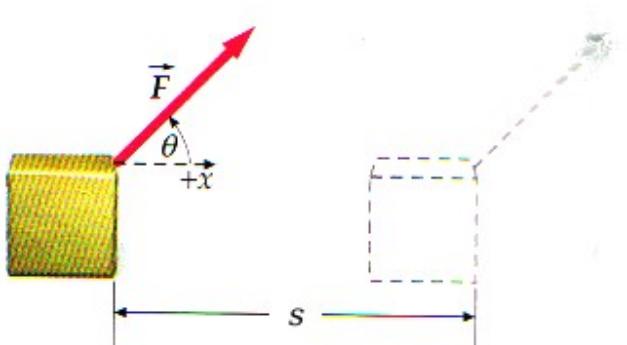
Lavoro e Energia Cinetica

Forza e spostamento



- F costante, s rettilineo, $F \parallel s$
- **Lavoro** di F lungo s

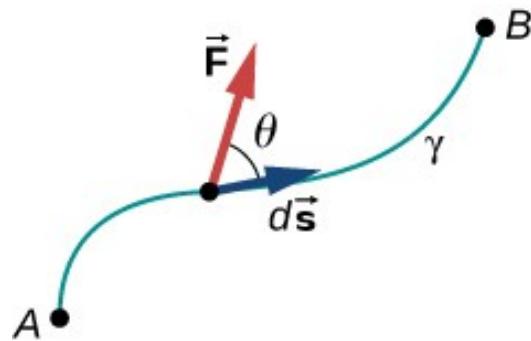
$$L = F s$$



- F costante, s rettilineo, $F \nparallel s$
- **Lavoro** di F lungo s

$$L = F \cdot s = F s \cos \theta$$

Lavoro



- F non costante, s non rettilineo
- Tratto *infinitesimo* $ds \Rightarrow$ lavoro infinitesimo

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

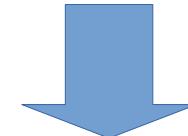
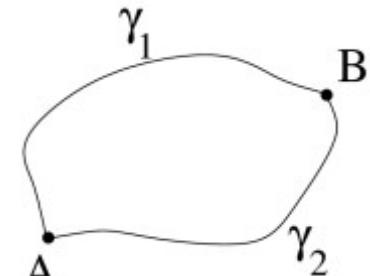
- Lavoro di F lungo s

dL lavoro infinitesimo, **non** differenziale di L ! ($\Rightarrow \delta L$)

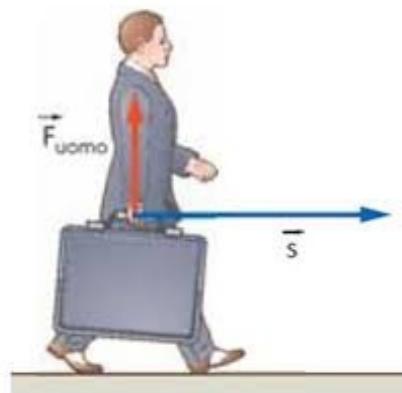
$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Lavoro

- L totale *dipende* dal **cammino**
 - $\gamma_1 \neq \gamma_2 \rightarrow L_1 \neq L_2$
- $L > 0 \rightarrow$ **lavoro motore**
- $L < 0 \rightarrow$ **lavoro resistente**
- $F \perp s \rightarrow L = 0$ ($\cos \theta = 0$)



$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$



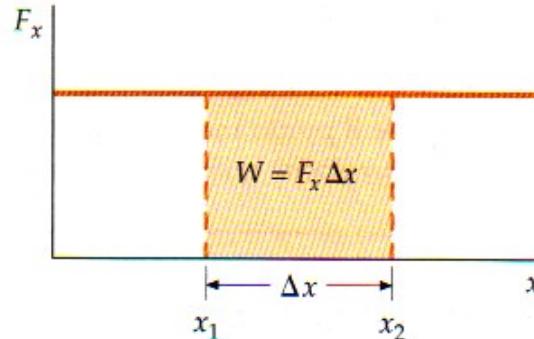
Lavoro

- Nel SI: grandezza **derivata**
- $[L] = \text{Joule}$
 - $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m}$

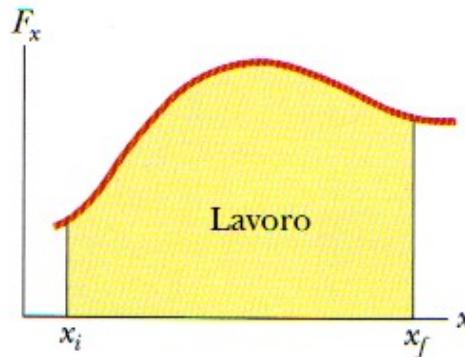
Lavoro

- Se su un corpo agisce una forza F , dalla definizione data si vede che il **lavoro** è rappresentato dall'**area** del grafico forza – spostamento

– es: forza costante



– es: forza non costante

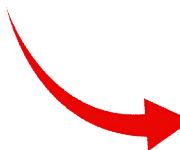


Potenza

- Se L in $\Delta t \Rightarrow$ potenza media $W_m = \frac{L}{\Delta t}$
- Potenza istantanea

$$W_i = \frac{dL}{dt}$$

- $dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$



$$W_i = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

- Nel SI: grandezza derivata
- $[W] = \text{Watt}$

- $1 \text{ W} = 1 \text{ J / s}$

Attenzione a non confondere
la **potenza** con **l'energia** !

Potenza

- Spesso si fa uso del **chilowatt-ora**, che è una unità di **energia** (e **non** è una unità del Sistema Internazionale)
 - infatti

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

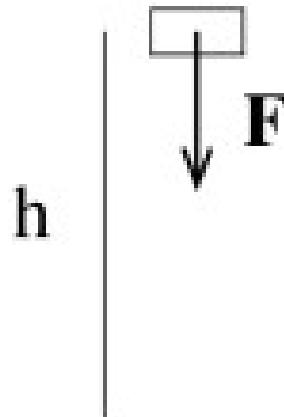
- A volte si usano i **cavalli** (*cavalli vapore* o *HP*) per esprimere la potenza
 - è una unità del sistema britannico (e **non** del SI)
 - » potenza per sollevare 75 Kg a 1 m/s

$$1 \text{ hp} \approx 735.5 \text{ W}$$

Lavoro della forza peso

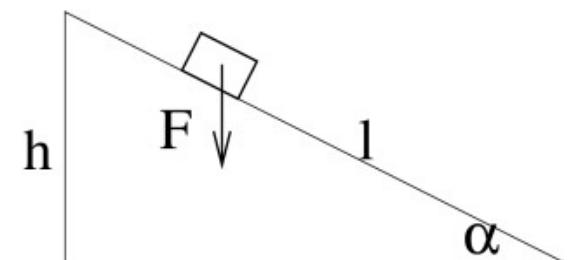
- Forza peso **verticale**

$$L = F \cdot s = F s = m g h$$



- Forza peso lungo un piano inclinato

$$L = F \cdot s = F s \cos \theta = m g l \sin \alpha = m g h$$

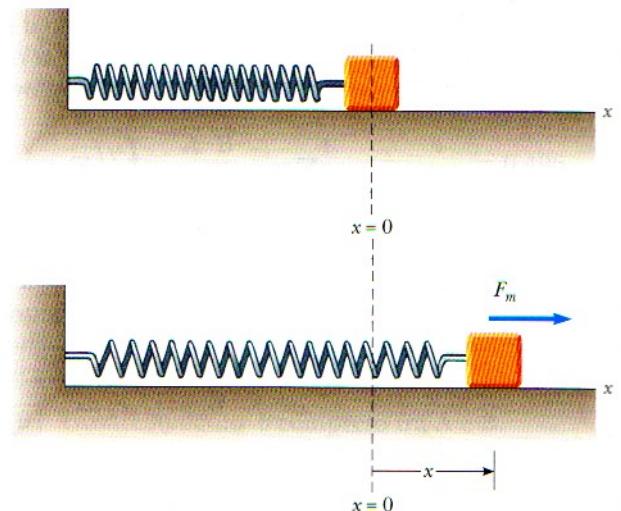


$$\theta = \pi/2 - \alpha$$
$$h = l \sin \theta$$

Lavoro della forza elastica

- Molla con costante elastica k

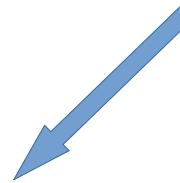
- si applica una forza F per allungarla di un tratto x_0



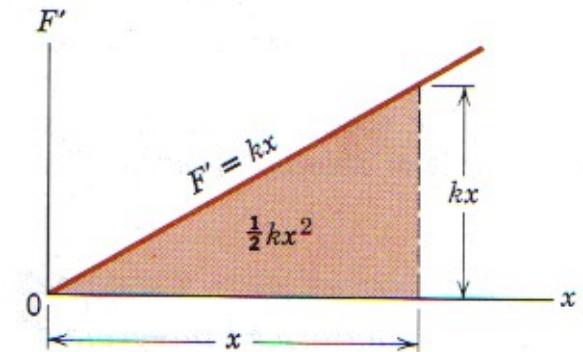
$$F = kx$$



$$dL = F \cdot dx = F dx = kx dx$$

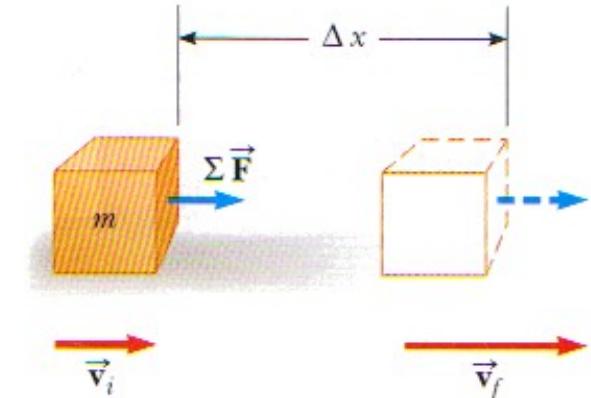


$$L = \int_0^{x_0} kx dx = k \int_0^{x_0} x dx = k \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{x_0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$



Lavoro

- Si consideri un **corpo** di massa m che si muove con velocità **iniziale** v_i
- Ad esso viene applicata una forza F per un **tratto** $\Delta x = x_f - x_i$ che accelera il corpo fino ad una velocità v_f
- Lavoro infinitesimo compiuto da F



$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F_x dx$$

↙ proiezione di \mathbf{F}
lungo $d\mathbf{x}$

↙ $F_x = m a_t$

Lavoro

- Lavoro **totale**

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} m a_t dx$$

ma

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

quindi

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_i}^{x_f} m a_t dx = \int_{x_i}^{x_f} m v \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_i}^{v_f} m v dv = \\ &= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \end{aligned}$$

Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$



Energia cinetica

- Teorema dell'**energia cinetica**

$$L = \Delta K$$

il **lavoro** di una forza è pari alla **variazione** dell'**energia cinetica**

- si può calcolare L dalla conoscenza di v_i e v_f
 - » senza il calcolo di $\int F \cdot ds$!!

Lavoro e energia

- Lavoro **motore**: $L > 0 \Rightarrow v_f > v_i$
- Lavoro **resistente**: $L < 0 \Rightarrow v_f < v_i$
- Nel SI: grandezza **derivata**
 - $[K] = \text{Joule}$

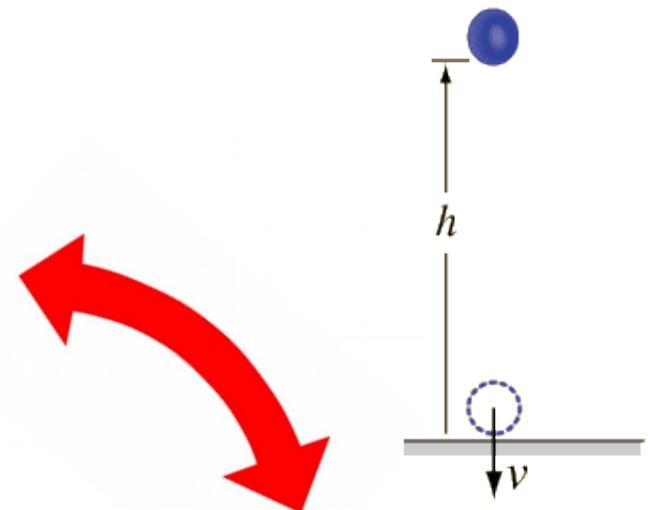
Lavoro e energia

- Energia \Leftrightarrow capacità di compiere un lavoro
- Corpo di massa m
 - F porta m da 0 a v $\rightarrow F$ compie lavoro L
 - il corpo possiede una energia cinetica K
 - ▶ può compiere un lavoro $L = K$ contro una forza resistente
 - ▶ oppure un lavoro $L' = K' < K$ e gli rimane $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ ($v_1 < v$)
 - se un'altra F' compie un lavoro L' \rightarrow ora $K' > K$

Esempio: forza peso

- Massa m che cade da ferma da una altezza h

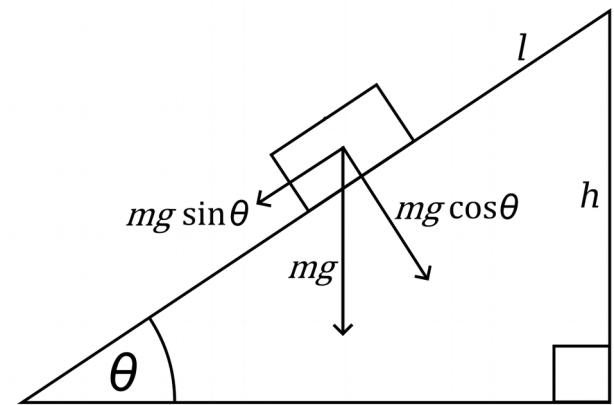
$$L_p = \int_h^0 F_p ds = \int_h^0 (-mg) ds = mg h$$



$$v_i = 0 \quad v_f = \sqrt{2gh} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \Delta K = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2 = mgh$$

Esempio: forza peso

- Piano inclinato



- lavoro della forza peso

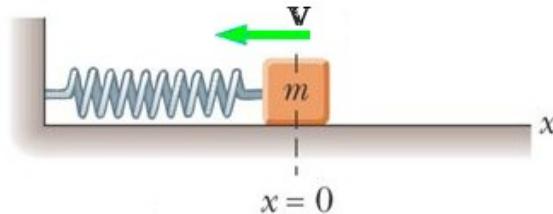
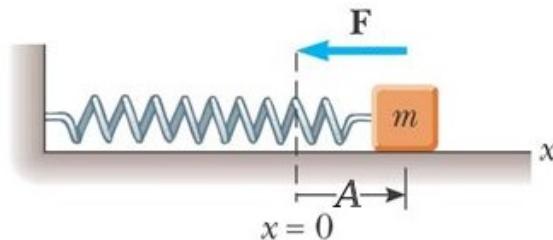
$$L = \int_0^l F \cdot ds = \int_0^l (mg \sin \theta) ds = mg l \sin \theta = mgh$$

- energia cinetica acquistata

$$a = g \sin \theta \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2(g \sin \theta)l} \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = mg l \sin \theta = mgh$$

Esempio: forza elastica

- Massa m che si muove dalla massima elongazione A a 0



$$L_m = \int_A^0 F dx = \int_A^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} k A^2$$

$$v = -A \omega \sin(\omega t) = -A \omega \sin \theta$$

$$v_i = 0 \quad v_f = -A \omega = -A \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (A \omega)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} = \frac{1}{2} k A^2$$

Esempio: variazione di K

- Ad es: quanto lavoro è necessario per accelerare un'automobile di massa $m = 1000 \text{ kg}$ da 20 m/s a 30 m/s ?

$$v_1 = 20 \text{ m/s} \quad v_2 = 30 \text{ m/s}$$

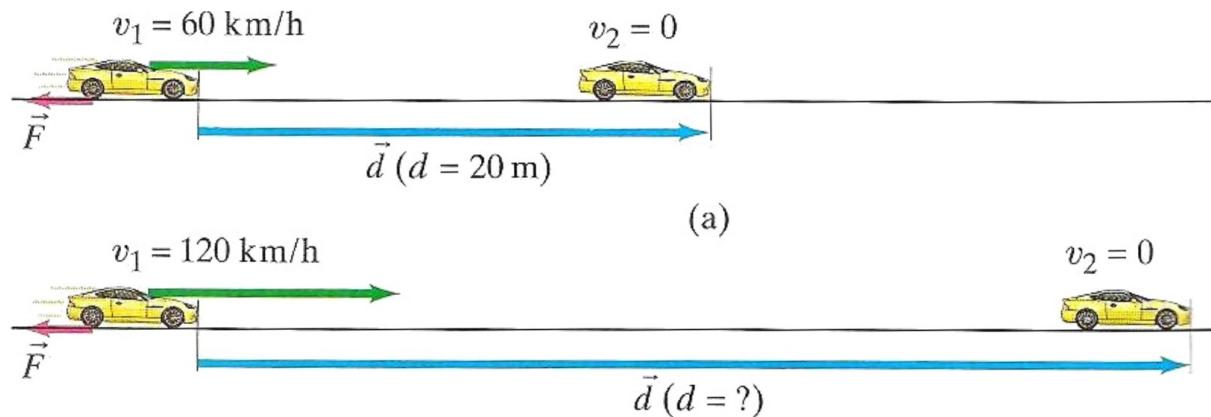


- il lavoro necessario è pari alla variazione dell'energia cinetica

$$L = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 30^2 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 20^2 = 2.5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Esempio: spazio di frenata

- L'automobile dell'esercizio precedente quando viaggia a 60 km/h è in grado di fermarsi in $d = 20$ m. Qual è la sua distanza di arresto quando viaggia a 120 km/h ?



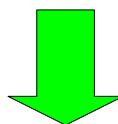
- si può assumere che la **forza frenante** sia *costante*
↳ lavoro per frenare l'automobile

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = -Fd$$

Esempio: spazio di frenata

- al termine della frenata $v_f = 0$, quindi

$$\Delta K = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2 = -\frac{1}{2}m v_i^2$$



$$-F d = -\frac{1}{2}m v_i^2 \quad \rightarrow \quad d \propto v_i^2$$

cioè che lo **spazio di frenata aumenta con il quadrato della velocità !**

Se la velocità raddoppia (da 60 km/h a 120 km/h) lo spazio di frenata diventa $2^2 = 4$ volte maggiore: $d = 80$ m !

Esempio: forza elastica

Esempio 6.5 Lavoro di una forza elastica

Un corpo di 4 kg su un piano privo di attrito è fissato a una molla orizzontale avente $k = 400 \text{ N/m}$. La molla è inizialmente compressa di 5,0 cm (fig. 6.14). Determinare (a) il lavoro compiuto sul corpo dalla molla, mentre il corpo torna alla posizione di equilibrio $x = x_2 = 0,0 \text{ cm}$, partendo dalla posizione $x = x_1 = -5,0 \text{ cm}$, e (b) la velocità del corpo in $x_2 = 0,0 \text{ cm}$.

IMPOSTAZIONE Disegna un grafico di F_x in funzione di x . Il lavoro compiuto sul corpo mentre si muove da x_1 a x_2 è pari all'area sottesa dalla funzione $F_x(x)$ in questo intervallo. Questa area, ombreggiata in figura 6.15, può essere calcolata eseguendo l'integrale della forza in dx . Il lavoro è poi uguale alla variazione di energia cinetica, che è data dall'energia cinetica finale, visto che quella iniziale è nulla. La velocità del corpo in $x = 0,0 \text{ cm}$ si ricava dalla sua energia cinetica finale.

SOLUZIONE

(a) Il lavoro W compiuto sul corpo dalla molla è l'integrale di $F_x dx$ da x_1 a x_2 :

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx \\ &= -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) \\ &= -\frac{1}{2}(400 \text{ N/m})[(0,000 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] \\ &= 0,50 \text{ J} \end{aligned}$$

(b) Applica il teorema del lavoro e dell'energia cinetica al corpo e ricava v_2 :

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \text{quindi} \\ v_2^2 &= v_1^2 + \frac{2W_{\text{tot}}}{m} = 0 + \frac{2(0,50 \text{ J})}{4,0 \text{ kg}} = 0,25 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ v_2 &= 0,50 \text{ m/s} \end{aligned}$$

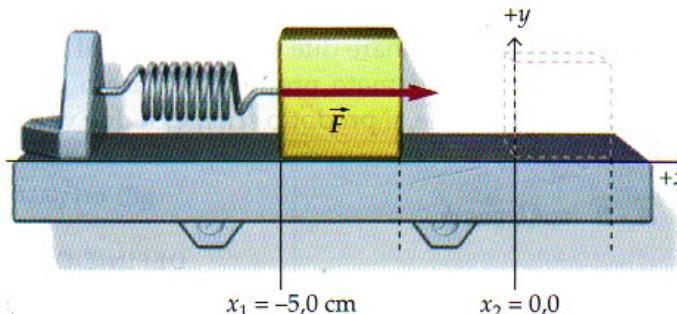


FIGURA 6.14

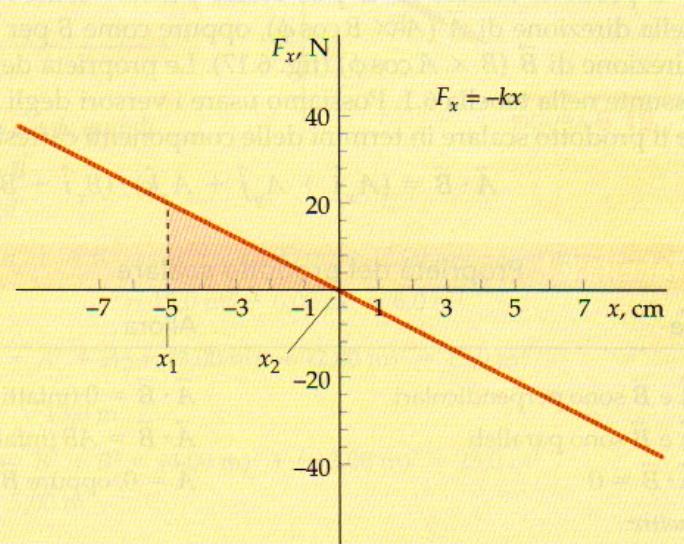


FIGURA 6.15

Esempio: potenza del cuore

- Dal **ventricolo sinistro** del cuore di un uomo escono circa 60 cm^3 di sangue durante ogni **sistole**, pari ad una massa di $m = 6 \times 10^{-2} \text{ kg}$, con una velocità $v = 0.2 \text{ m/s}$.
Calcolare la potenza (media) per far circolare il sangue, sapendo che la *frequenza cardiaca* è di circa 1 Hz.
 - Il lavoro fatto dal cuore è pari alla **variazione dell'energia cinetica** del sangue

$$L = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

- mentre la potenza media è pari a $W_m = \frac{L}{\Delta t}$
- assumendo che la velocità iniziale del sangue sia zero e ricordando che $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

$$W_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times 6 \cdot 10^{-2} \times (0.2)^2 = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$