Moti particolari

Studio di moti particolari

- Moto rettilineo uniforme
- Moto rettilineo uniformemente accelerato
- Caduta libera
- Moto verso l'alto
- Moto parabolico

Moto rettilineo uniforme

- Velocità costante ***v*** (vettore)

  ↳posizione ***r***

$$\boxed{\mathbf{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{v}\,dt'=\mathbf{v}(t-t_0)+\mathbf{r}_0}$$

- Moto unidimensionale lungo ***v***:
  - asse *x* lungo ***v*** → solo quantità scalari

$$v=cost \qquad\qquad x(t)=v(t-t_0)+x_0$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

- Accelerazione costante ***a*** (vettore)
  - ↳velocità ***v*** e posizione ***r*** (per semplicità $t_0 = 0$)

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \int_0^t \boldsymbol{a}\, dt' = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{v}_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}\, dt' = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

- Se $\boldsymbol{v}_0 \parallel \boldsymbol{a}$ (o $\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$)

  ↳moto unidimensionale (direzione di $\boldsymbol{v}$ costante)

  – asse x lungo $\boldsymbol{a}$ → solo quantità scalari

$$a = cost$$

$$v(t) = a\,t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

- Se $v_0 = 0$ (e $x_0 = 0$)
  - spazio percorso: $s = \frac{1}{2} a t^2$
  - tempo necessario: $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$
  - velocità raggiunta: $v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$

Caduta libera

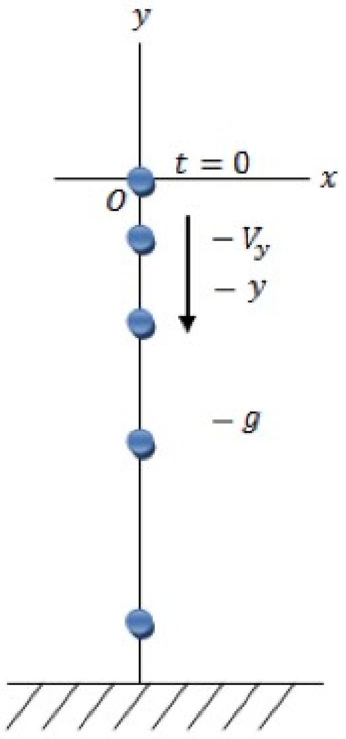
- Trascurando l'attrito con l'aria

un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso di moto rettilineo uniformemente accelerato

- Questa accelerazione viene indicata con g ed il suo valore è approssimativamente $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ alle nostre latitudini

Caduta libera

- Si consideri un sistema di riferimento con asse y verticale rivolto verso l'alto e origine nel punto di inizio del moto
- In questo sistema
  - l'accelerazione di gravità (costante) è negativa
  - il moto è descritto da



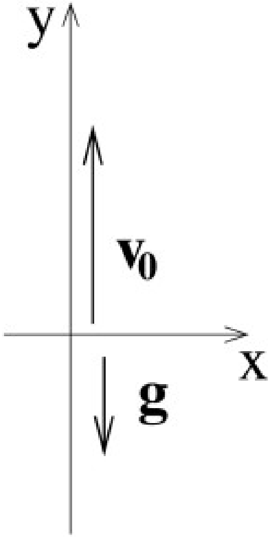
$$v_y = -g\,t$$

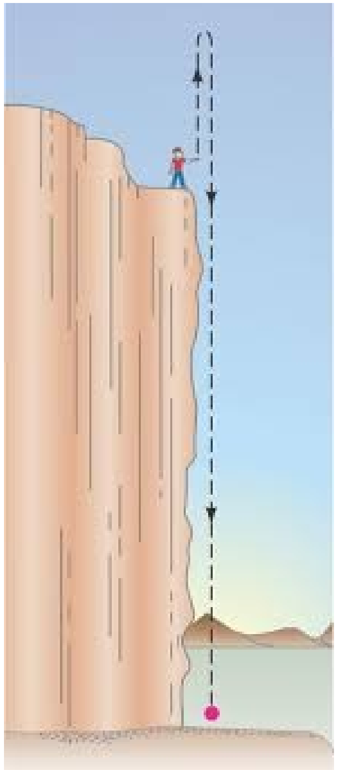
$$y = -\frac{1}{2} g\,t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2|y|}{g}} \qquad v_y^2 = -2\,g\,y$$

Moto verso l'alto

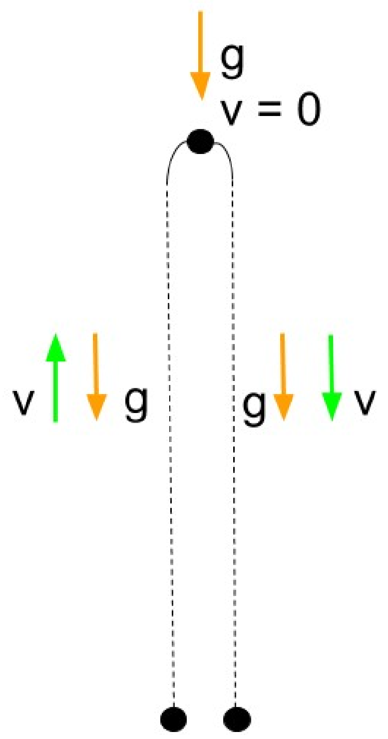
- Corpo lanciato verso l'alto
- Sistema di riferimento con asse y verticale rivolto verso l'alto e origine nel punto di lancio
  - a $t_0 = 0$ è $y_0 = 0$
  - $v_0 > 0$, $a = -g$ (moto *uniformemente decellerato*)





Moto verso l'alto

- Il corpo
  - sale di moto uniformemente decelerato
  - si arresta all'altezza massima
  - ricade di moto uniformemente accelerato
- Equazioni del moto



$$v = v_0 + a\,t = v_0 - g\,t$$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Moto verso l'alto

- Altezza massima
  - $h_{max} \to v = 0$

$$v_0 - g t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g}$$

$$\Downarrow$$

$$h_{max} = y(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

$$h_{max} \propto v_0^2$$

Moto verso l'alto

- Tempo per ritornare da h_{max} a y_0
  - $t_2 \rightarrow y = 0$

$$y(t_2)=0 \quad \Rightarrow \quad v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

due soluzioni

$t_2 = 0$

istante di partenza

$t_2 = \dfrac{2 v_0}{g}$

doppio di t_1

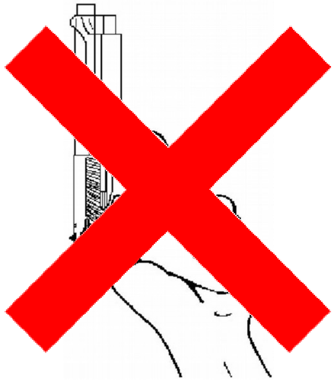
$\boxed{t_2 - t_1 = t_1 \ !}$

Moto verso l'alto

- Velocità quando il corpo ripassa da y_0
  - $t_2 \rightarrow v = ?$

$$v(t_2) = v_0 - g t_2 = -v_0$$

  - $v(t_2) = v_0$ ma $\boldsymbol{v}(t_2) \neq \boldsymbol{v}_0$!!



Composizione dei moti

- I moti studiati fino ad ora (moto in una dimensione) sono un caso particolare del problema più generale del *moto di un corpo nello spazio* (o nel piano).
- Punto soggetto a più moti → *sovrapposizione*

$$\forall t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t) + \ldots \boldsymbol{r}_n(t)$$

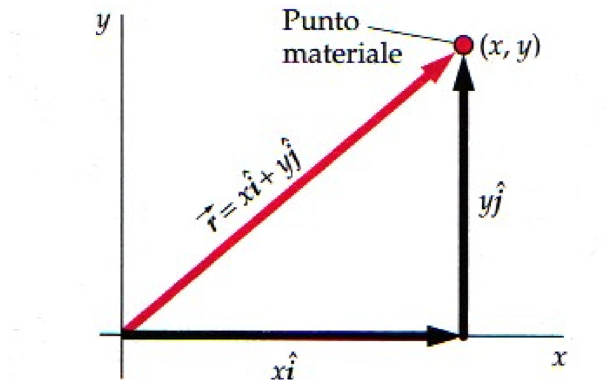
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_1(t) + \boldsymbol{v}_2(t) + \ldots \boldsymbol{v}_n(t)$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_1(t) + \boldsymbol{a}_2(t) + \ldots \boldsymbol{a}_n(t)$$

Composizione dei moti

- Ad esempio nel piano
  - vettore posizione $\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{i}} + y\,\hat{\boldsymbol{j}}$
  - vettore spostamento

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x\,\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta y\,\hat{\boldsymbol{j}}$$



  - vettore velocità istantanea

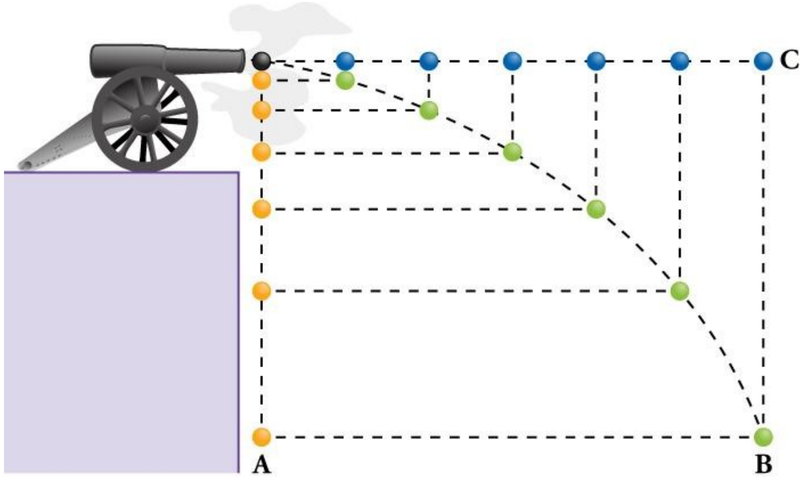
$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\boldsymbol{r}}{d\,t} = v_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

  - vettore accelerazione istantanea

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\,\boldsymbol{v}}{d\,t} = a_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

Lancio orizzontale

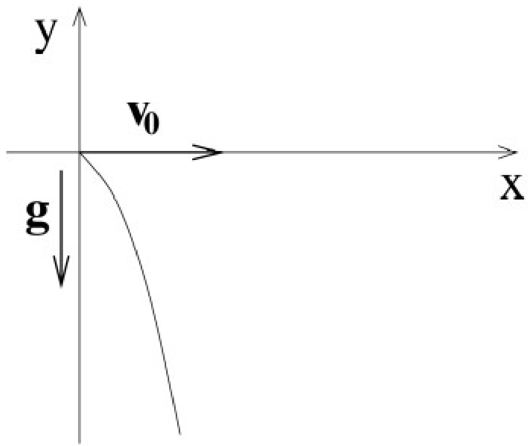
- Un corpo viene lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ orizzontalmente rispetto alla superficie terrestre



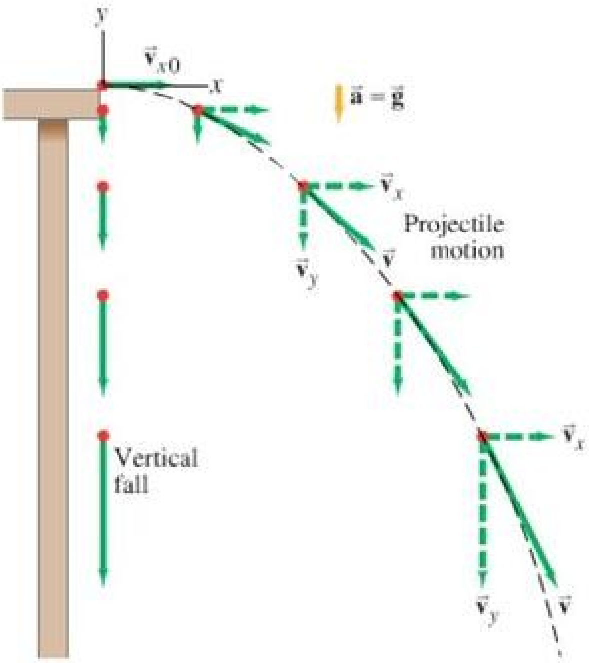
- g verticale verso il basso
- Due moti:
  - orizzontalmente: rettilineo uniforme
  - verticalmente: rettilineo uniformemente accelerato

Lancio orizzontale

- Sistema di riferimento
  - $x \parallel v_0$, y verticale $\rightarrow a = -g$
  - origine O nel punto di lancio
  - $t_0 = 0$



- Due moti:
  - asse x: rettilineo uniforme ($a_x = 0$)
  - asse y: rettilineo uniformemente accelerato ($a_y = -g$)



Lancio orizzontale

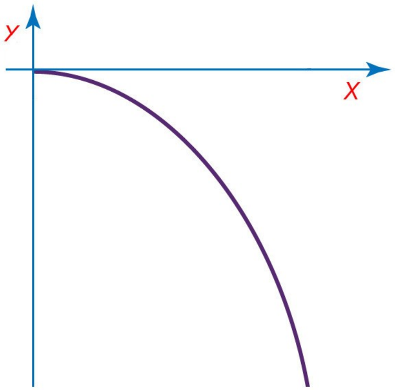
- Per cui

$$v_x = v_0 \qquad x = v_0 t$$

$$v_y = a t = -g t \qquad y = \frac{1}{2} a t^2 = -\frac{1}{2} g t^2$$

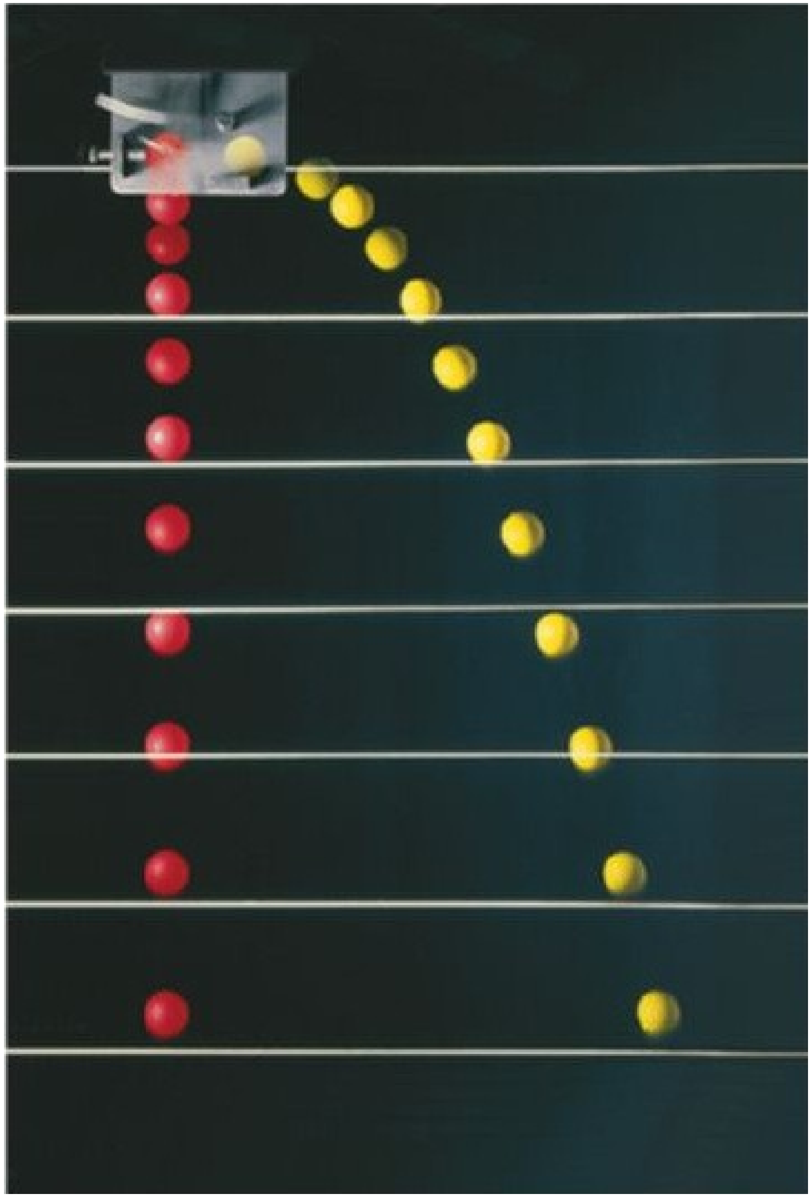
- Ricavando $t = x / v_0$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 = A x^2 \qquad A < 0$$



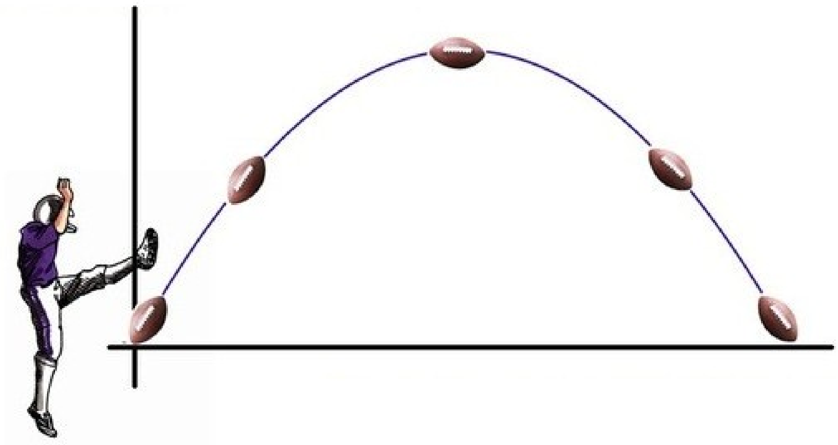
parabola con concavità verso il basso

Lancio orizzontale



Lancio obliquo

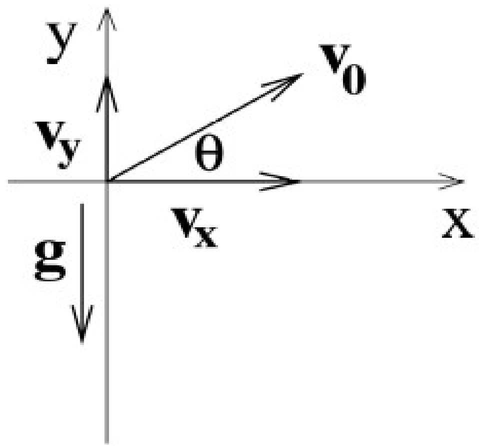
- Un corpo viene lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ ad un angolo θ rispetto alla superficie terrestre



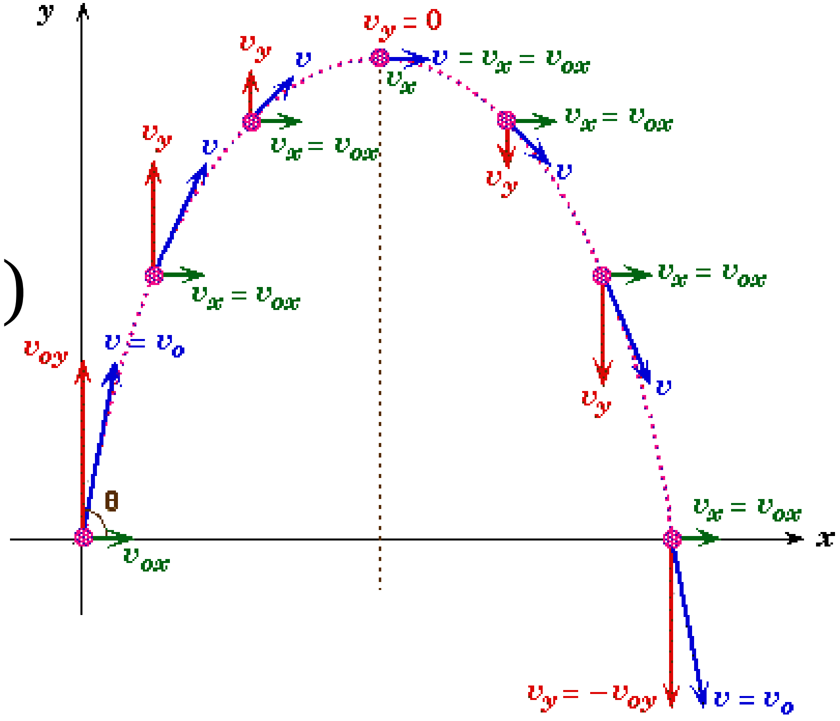
- g verticale verso il basso
- Due moti
  - orizzontalmente: rettilineo uniforme
  - verticalmente: rettilineo uniformemente decellerato e accelerato
    - » come il lancio verso l'alto

Lancio obliquo

- Sistema di riferimento
  - x orizzontale, y verticale → $a = -g$
  - origine O nel punto di lancio
  - $t_0 = 0$
  - θ angolo tra $\boldsymbol{v}_0$ e $\hat{\boldsymbol{i}}$



- Due moti:
  - asse x: rettilineo uniforme ($a_x = 0$)
  - asse y: rettilineo uniformemente accelerato ($a_y = -g$)



Lancio obliquo

- Per cui

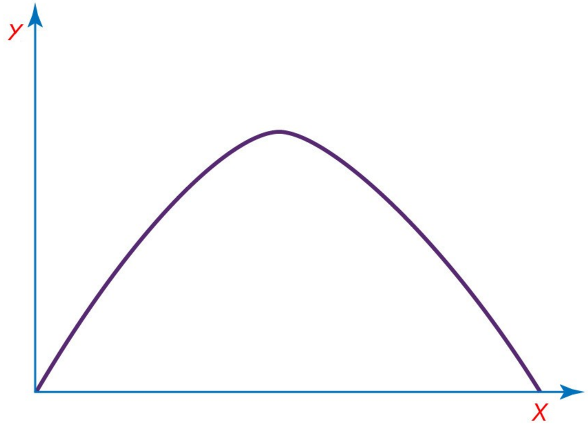
$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad x = (v_0 \cos\theta)\, t$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - g\,t \qquad y = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

- Ricavando $t = x / v_0 \cos\theta$

$$y = (\tan\theta)\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 \cos\theta)^2} x^2 = A\,x^2 + B\,x \qquad A < 0$$

parabola con concavità verso il basso



Moto parabolico

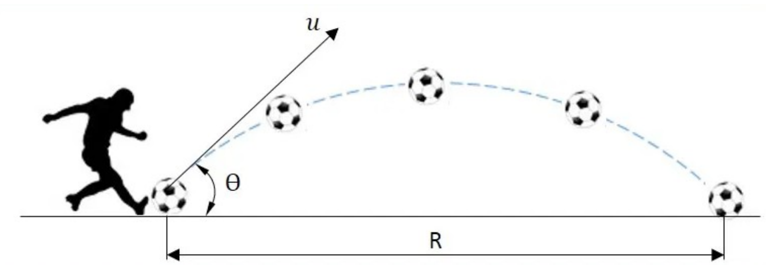
- Altezza massima h_{max}
  - come nel lancio verso l'alto

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{\left(v_0 \sin\theta\right)^2}{g}$$

Moto parabolico

- Gittata ← $y = 0$

$$(\tan\theta)x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}x^2 = 0$$



$$x = 0$$

$$x = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

  - gittata massima: $\sin 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 = 45°$
    - però se la quota iniziale non è uguale a quella finale (ad es. lancio del peso, del giavellotto, etc) l'angolo per avere la gittata massima non è più di $\pi/4$ ma inferiore