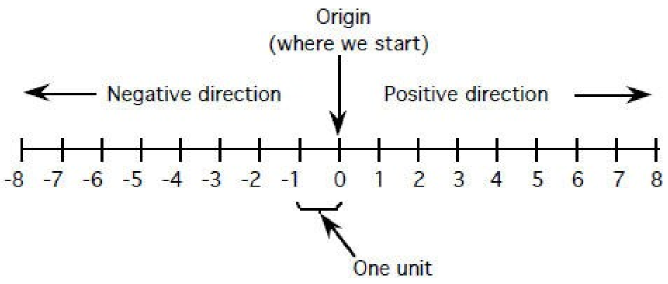
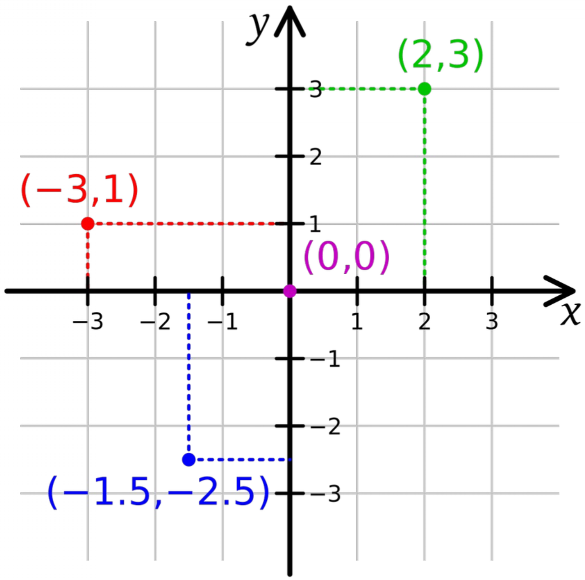
Richiami di Matematica

Coordinate cartesiane

- In una dimensione (retta)

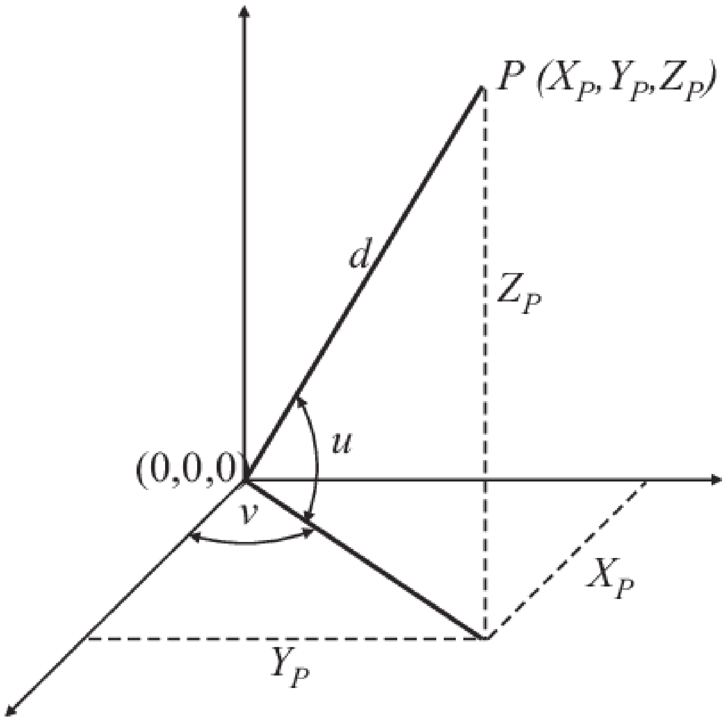


- In due dimensioni (piano)



Coordinate cartesiane

- In tre dimensioni (spazio)



Funzioni

- Relazione fra una o più variabili di ingresso che fornisce un valore in uscita

$$y=f\left(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n\right)$$

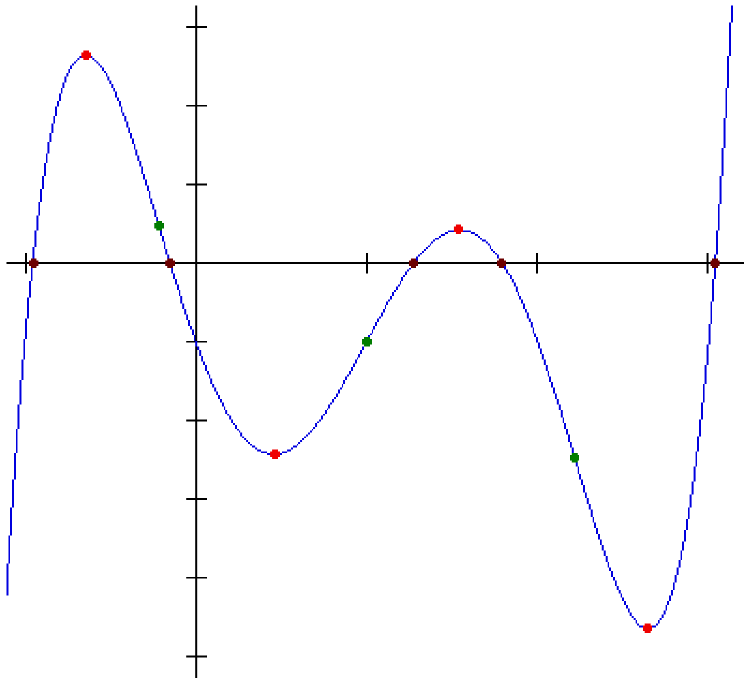
  - il valore fornito in uscita deve essere <u>unico</u> per un dato set di valori in ingresso
  - ma è possibile che set diversi di valori in ingresso diano lo stesso valore in uscita
- <u>Dominio</u>: insieme dei valori di ingresso per cui la funzione è definita (e quindi esiste un valore in uscita)
- Caso più semplice: funzione di una sola variabile

$$y=f\left(x\right)$$

Grafico di funzione

- Grafico: rappresentazione sul piano cartesiano dell'insieme dei punti

$$P\left(x, f\left(x\right)\right)$$

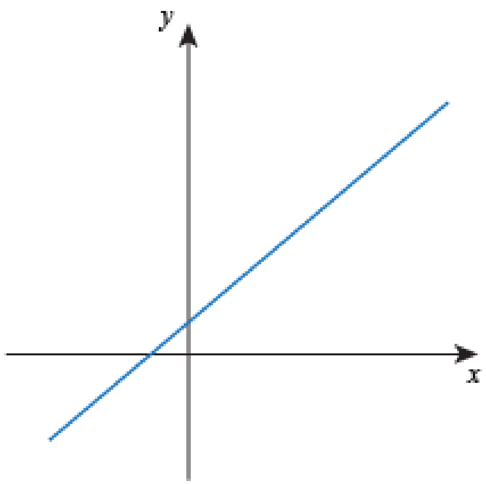


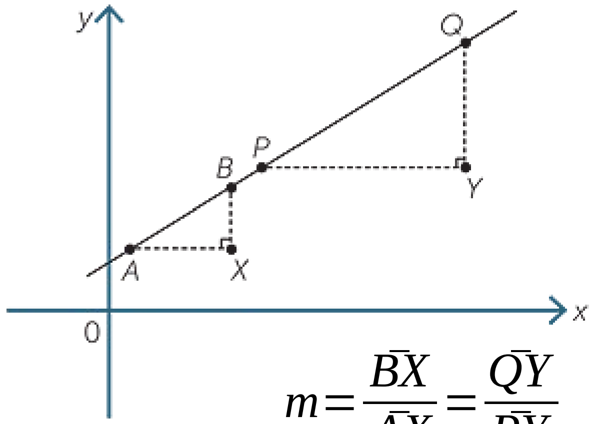
Funzioni notevoli

- Retta

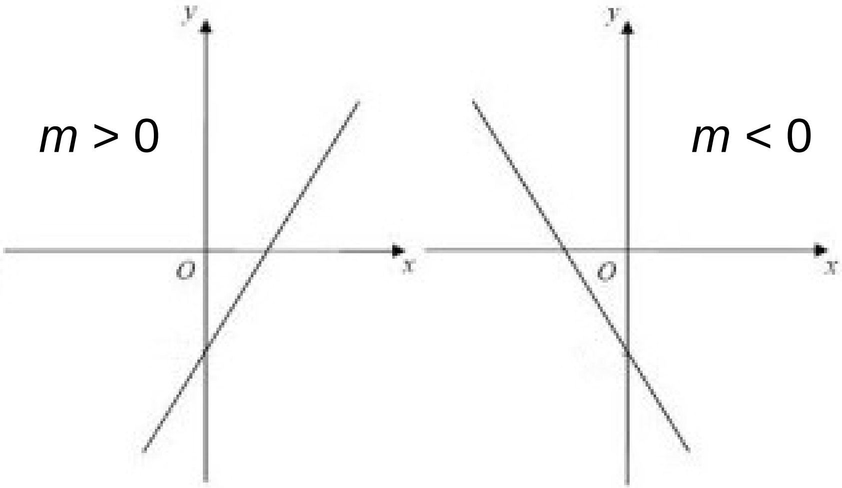
$$y = m x + n$$

coefficiente angolare





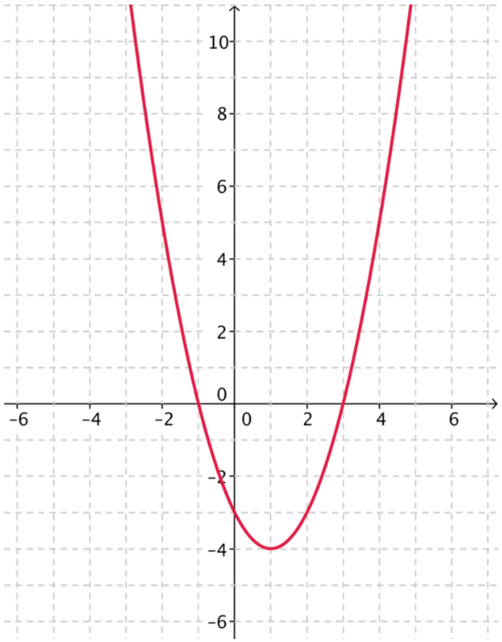
$$m=\frac{\overline{BX}}{\overline{AX}}=\frac{\overline{QY}}{\overline{PY}}$$

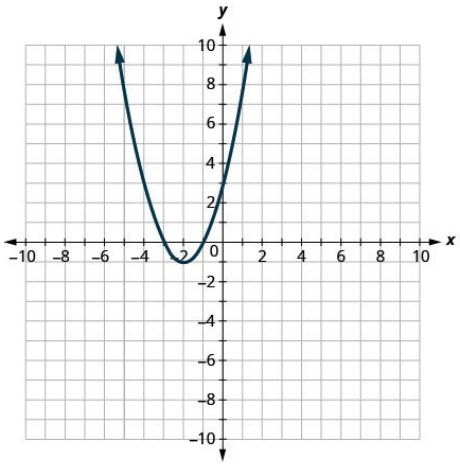


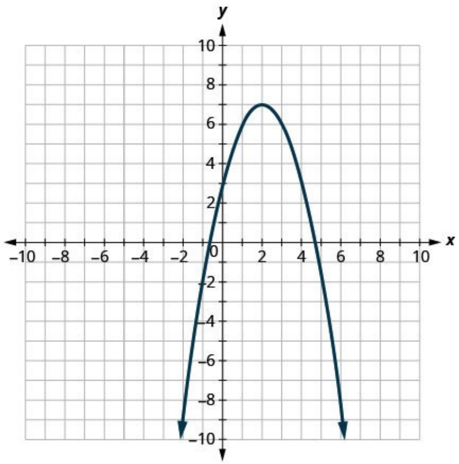
Funzioni notevoli

- Parabola

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$





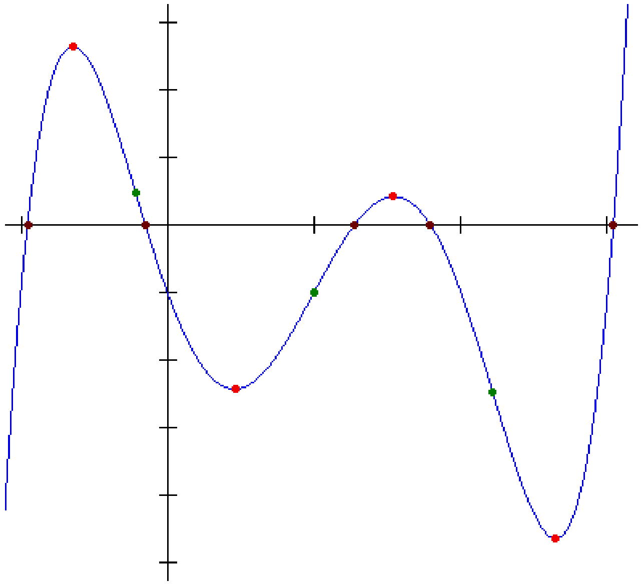


$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$

Funzioni notevoli

- Polinomio

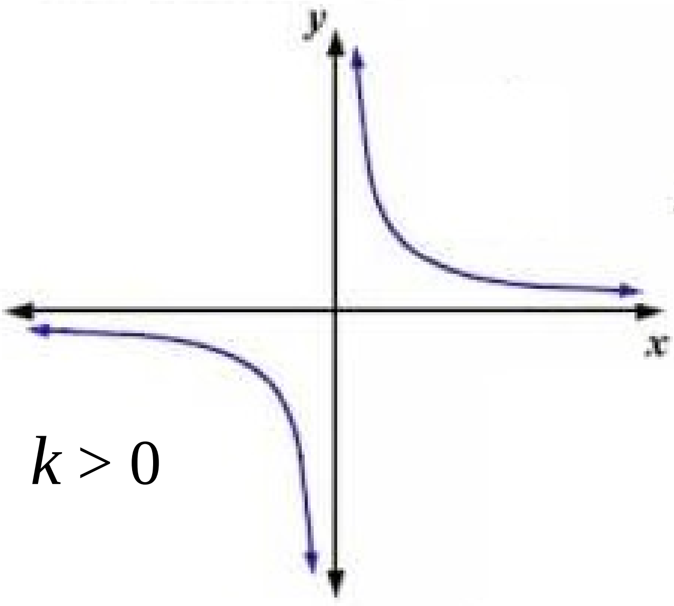
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

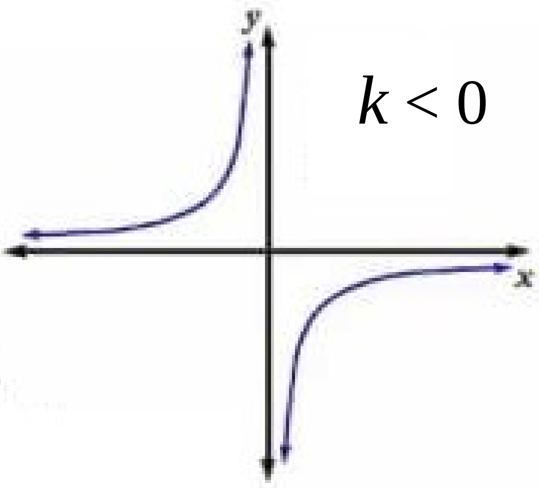


Funzioni notevoli

- Iperbole

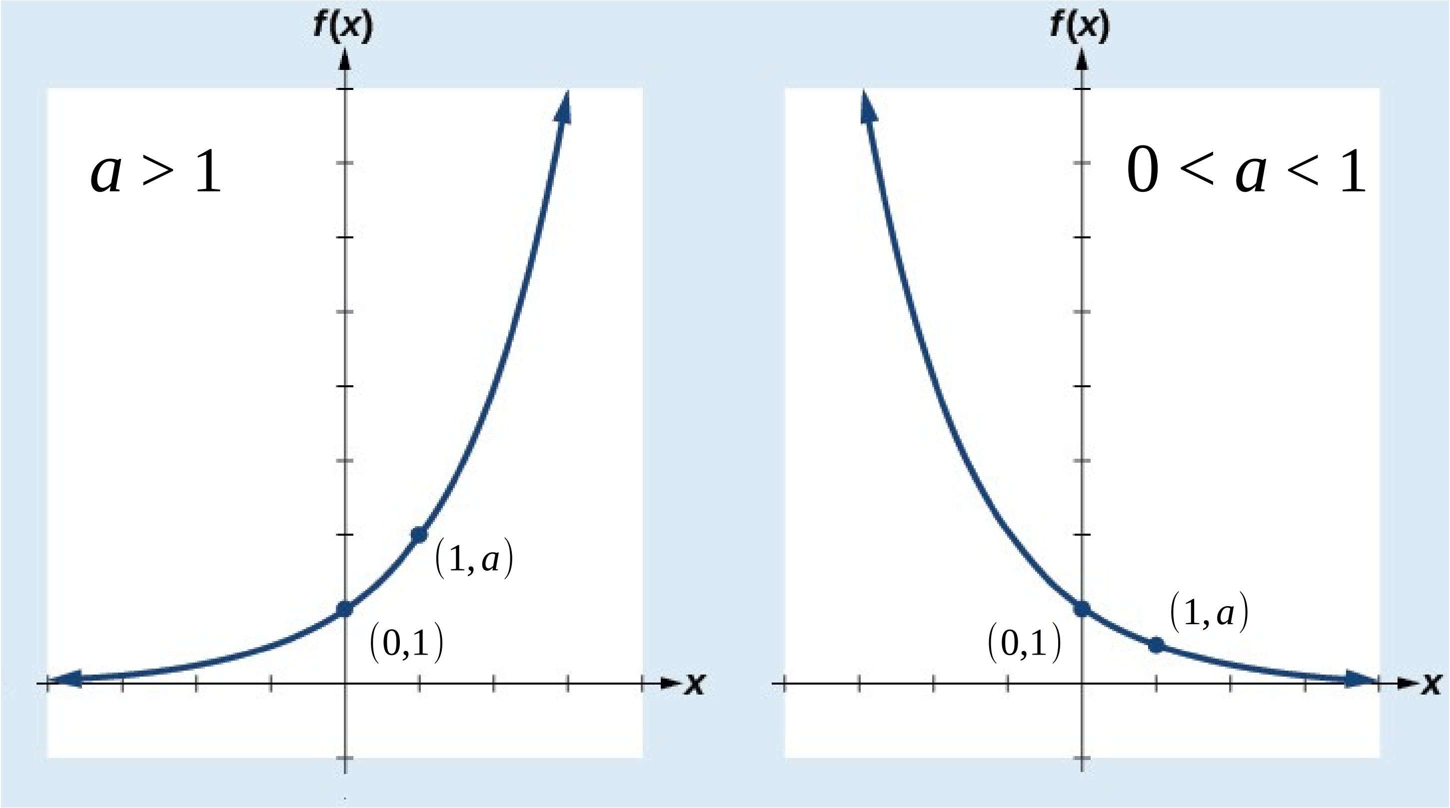
$$y = \frac{k}{x} \iff xy = k$$





Funzioni notevoli

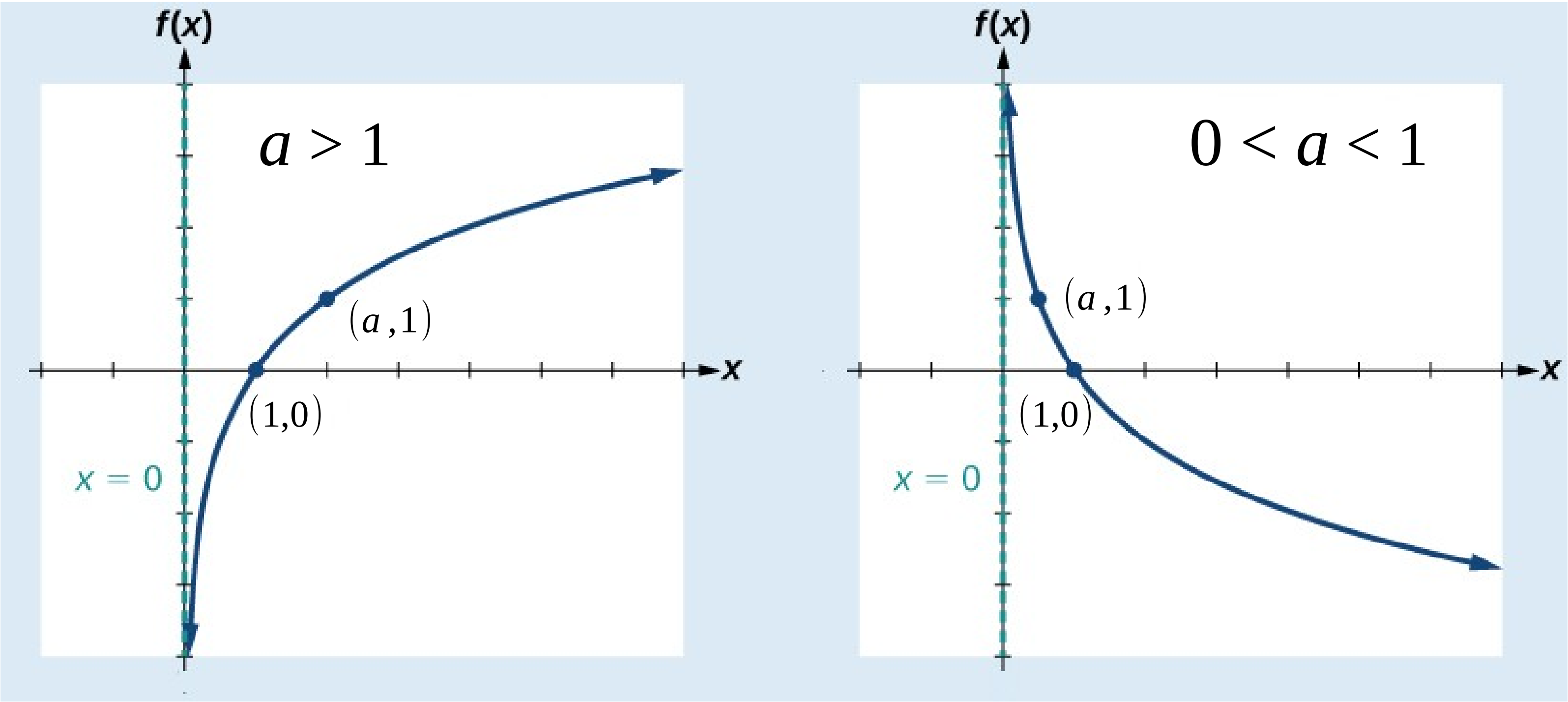
- Esponenziale $y = a^x \quad a > 0\,, a \neq 1$



$$\forall\, a: \quad x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad , \quad x = 1 \Rightarrow y = a$$

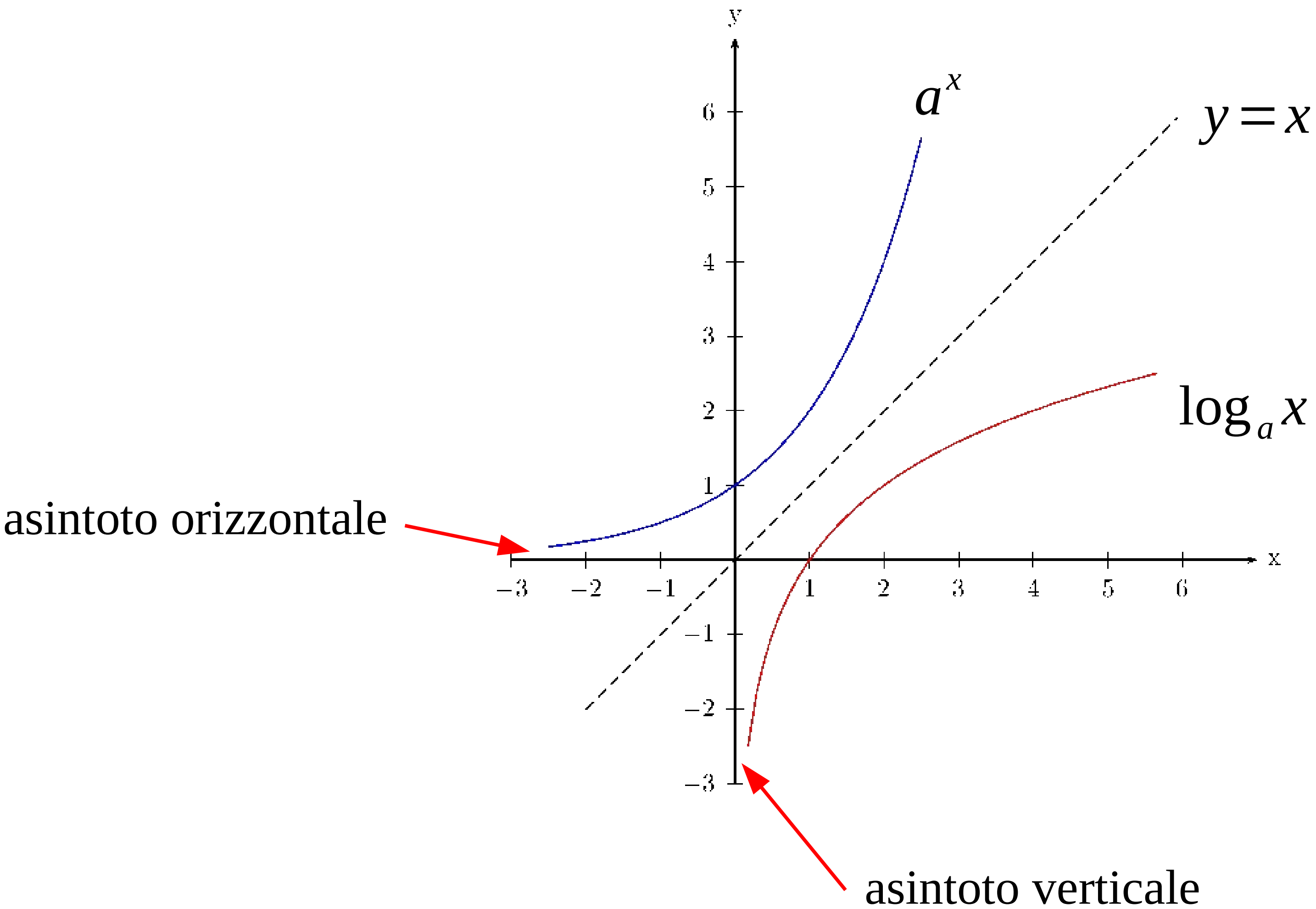
Funzioni notevoli

- Logaritmo $y = \log_a x \qquad a > 0, a \neq 1$
  - operazione inversa dell'esponenziale
  - solo $x > 0$!!



$$\forall a: \quad x=1 \Rightarrow y=0 \quad , \quad x=a \Rightarrow y=1$$

Funzioni notevoli



asintoto: retta cui la curva si avvicina senza mai toccarla

Funzioni notevoli

- Caso particolare

$$a = e \quad \left(= 2.718281828459045\ldots \right)$$

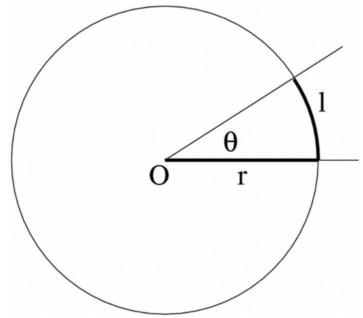
numero di Nepero

$$y = e^x \qquad y = \ln x$$

logaritmo naturale

Elementi di trigonometria

- Radiante



$$\theta = \frac{l}{r}$$

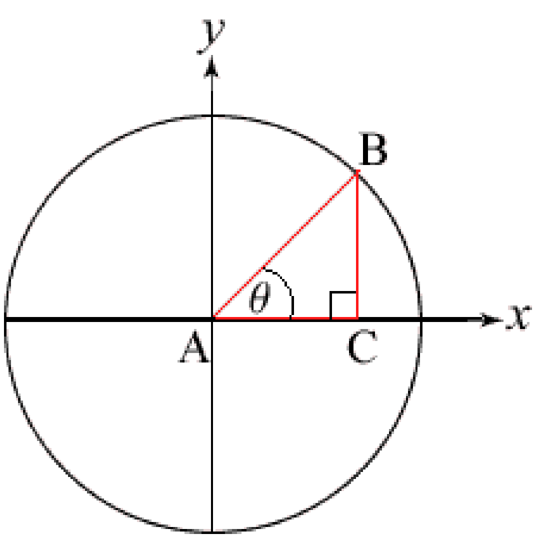
Unità di misura:

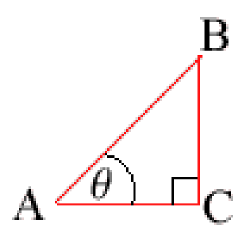
$$l = r \rightarrow \theta = 1\, rad\, (\simeq 57^\circ 18')$$

Angolo giro:

$$l = 2\pi r \rightarrow \theta = 2\pi\, rad$$

- Funzioni trigonometriche





$$\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

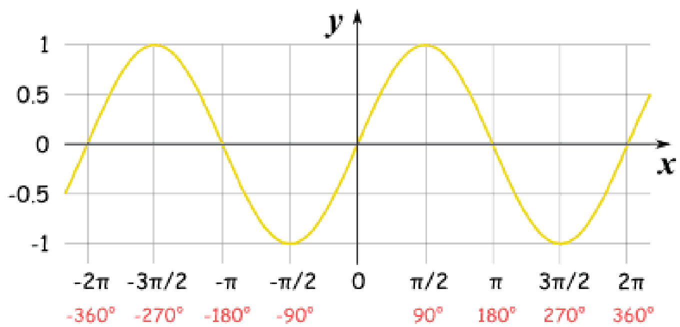
$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

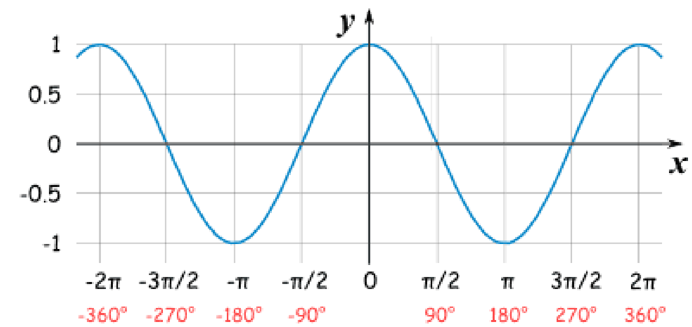
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

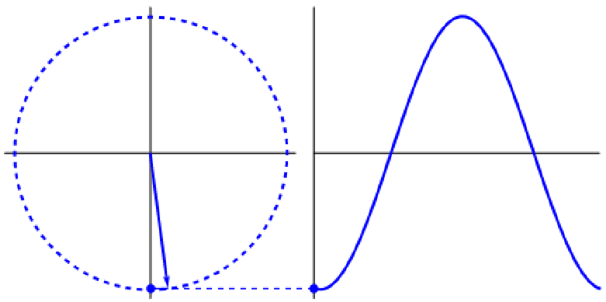
Funzioni trigonometriche

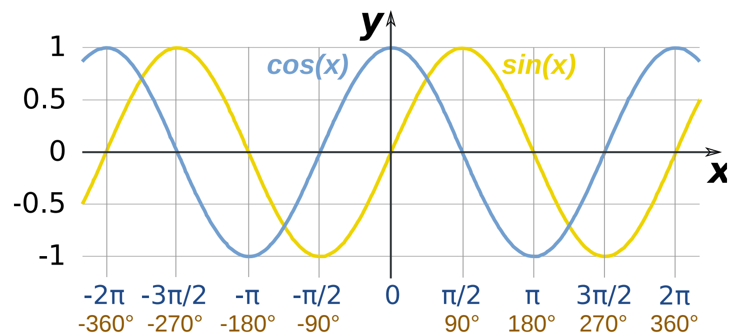
$y = \sin x$

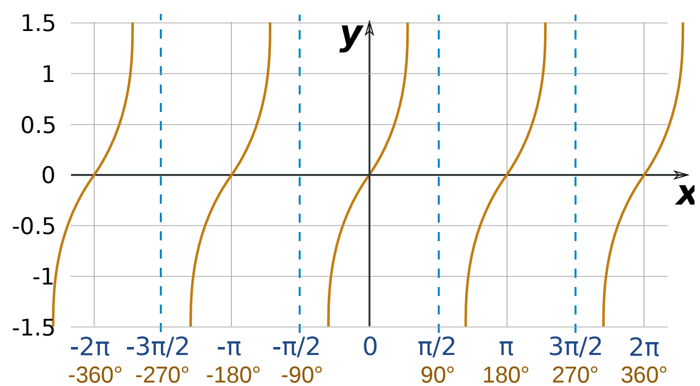


$y = \cos x$





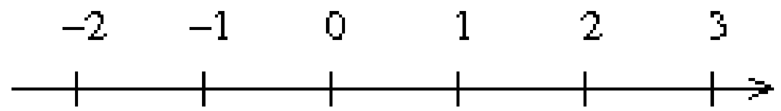




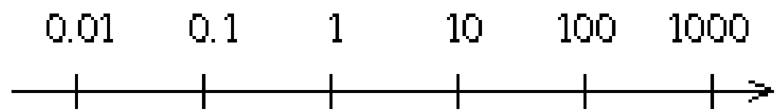
$y = \tan x$

Scale lineare e logaritmica

- Scala lineare
  - segmenti uguali → incrementi numerici uguali

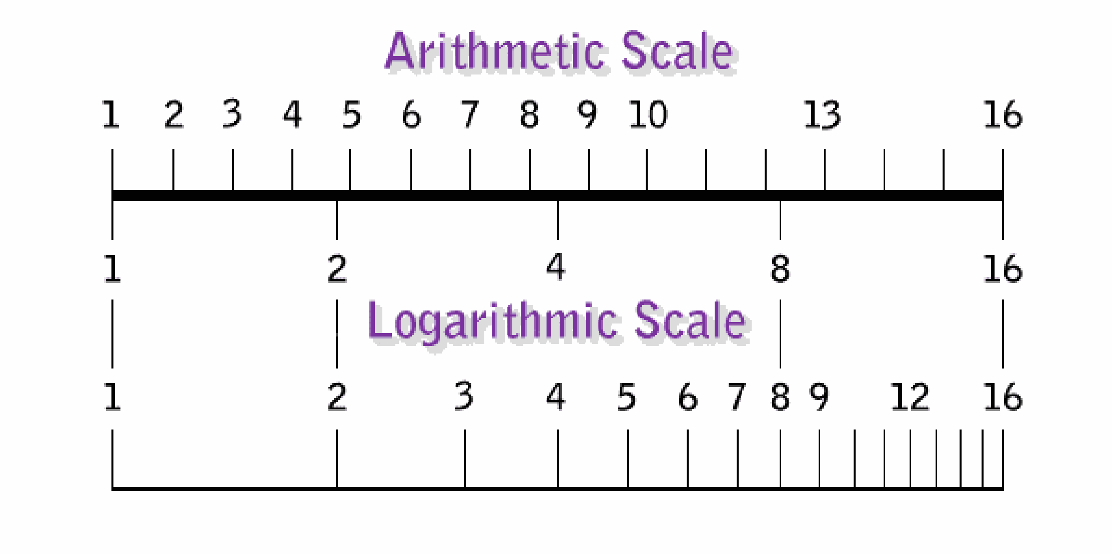


- Scala logaritmica
  - segmenti uguali → rapporti numerici uguali
    - » lo spostamento di una unità moltiplica il valore per la base (solitamente 10)



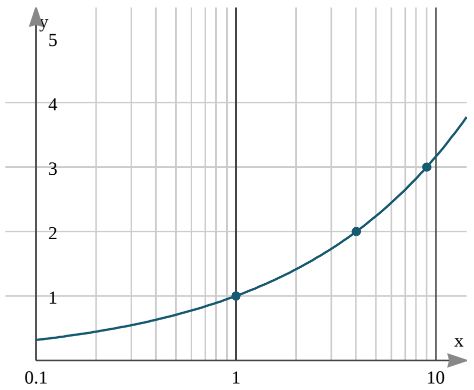
Scala logaritmica

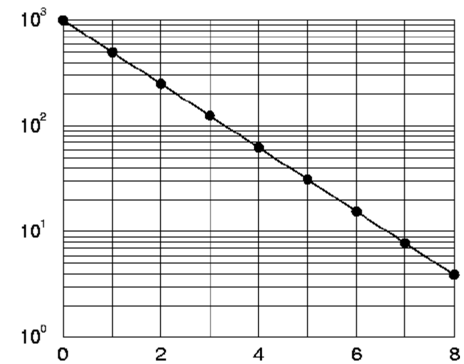
- Utile per rappresentare valori che si estendono su molte decadi
  - invece di x si rappresenta $\log_{10} x$
  - mette in evidenza i rapporti fra i valori più che i valori assoluti
  - ma tutti i valori da rappresentare devono essere > 0



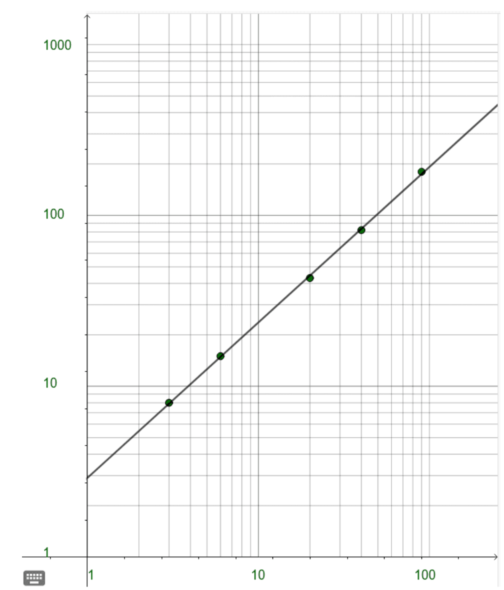
Scala logaritmica

- Grafico semi-logaritmico
  - uno solo dei due assi è logaritmico, l'altro è lineare





- Grafico logaritmico (o log-log)
  - entrambi gli assi sono logaritmici



Scala logaritmica

- Data la funzione

$$y = k\,a^x$$

presi i logaritmi di entrambi i membri

$$\log_{10} y = \log_{10}\left(k\,a^x\right) = \log_{10} k + x \log_{10} a$$

e posto $Y = \log_{10} y$, $m = \log_{10} a$ e $n = \log_{10} k$, si ha

$$\boxed{Y = m\,x + n}$$

quindi su un grafico semi-logaritmico (lineare in *x*) una funzione esponenziale è rappresentata da una retta

Scala logaritmica

- Data la funzione

$$y = k\,x^b$$

presi i logaritmi di entrambi i membri

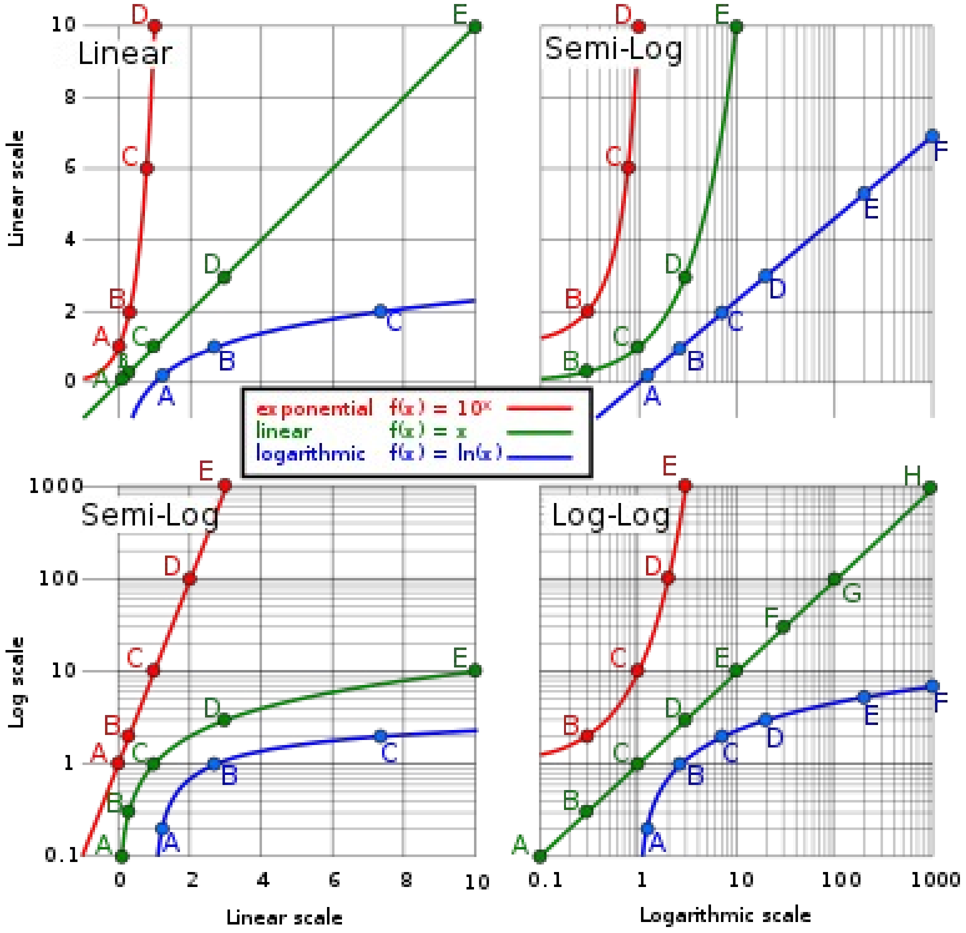
$$\log_{10} y = \log_{10}\left(k\,x^b\right) = \log_{10} k + b\,\log_{10} x$$

e posto $Y = \log_{10} y$, $X = \log_{10} x$ e $n = \log_{10} k$, si ha

$$\boxed{Y = b\,X + n}$$

quindi su un grafico logaritmico una funzione potenza è rappresentata da una retta

Grafici logaritmici

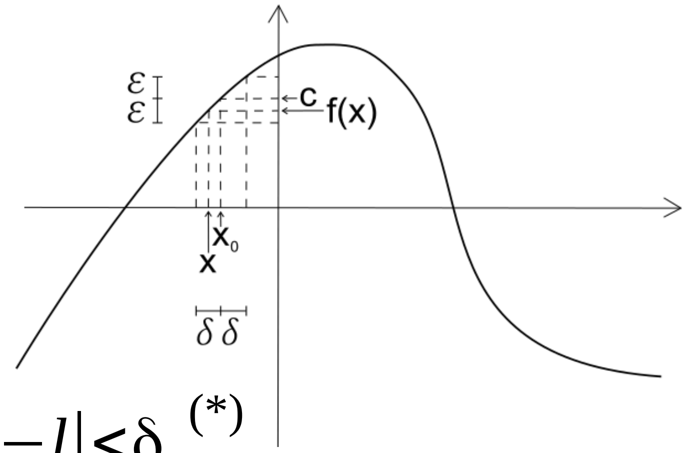


Limite

- Data una funzione $f(x)$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se



$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; \forall x, |x - x_0| < \epsilon \rightarrow |f(x) - l| < \delta$$ (*)

- Se $\exists f(x_0) \wedge f(x_0) = l \rightarrow$ la funzione si dice **continua** in x_0

(*) questa definizione può essere estesa al caso in cui x_0 e/o $l \rightarrow \infty$

Derivata

- Data una funzione $f(x)$ continua in $[a,b]$ e x, $x_0 \in [a,b]$
  - rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

  - derivata (**se** esiste)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

  - è il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(x_0\ ,\ f(x_0))$

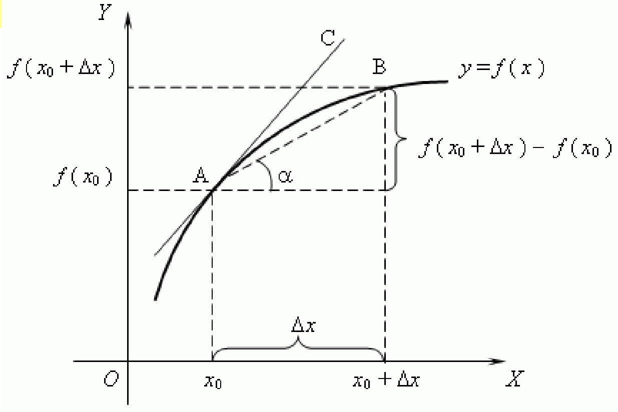


Fig. 1

Derivata

- Alcune derivate notevoli

$$f(x)=c \qquad \frac{df}{dx}=0 \qquad f(x)=\sin x \qquad \frac{df}{dx}=\cos x$$

$$f(x)=x^n \qquad \frac{df}{dx}=n\,x^{n-1} \qquad f(x)=\cos x \qquad \frac{df}{dx}=-\sin x$$

$$f(x)=a^x \qquad \frac{df}{dx}=a^x \ln a \qquad f(x)=\tan x \qquad \frac{df}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x)=e^x \qquad \frac{df}{dx}=e^x \qquad f(x)=\arcsin x \qquad \frac{df}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\ln x \qquad \frac{df}{dx}=\frac{1}{x} \qquad f(x)=g(h(x)) \qquad \frac{df}{dx}=\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}$$

Integrale indefinito

- Data $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad / \qquad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

- *F(x)* *primitiva* di *f(x)*
  - definita a meno di una costante

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \left(\frac{dc}{dx} = 0\right)$$

Integrale indefinito

- Alcuni integrali notevoli

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \tan(x)\, dx = \ln|\cos(x)| + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + c$$

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + c$$

Integrale definito

- Data $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Geometricamente