# Sistemi a molti corpi

# Corpi estesi

- Corpo puntiforme
  - astrazione
  - caratteristiche del moto e sue cause
- Corpo esteso (o insieme di punti materiali)
  - reali
  - in teoria: moto di ciascun singolo punto
  - in pratica: soluzioni numeriche

# Densità

- Per i corpi estesi è utile introdurre la densità
  - densità media

$$\rho_m = \frac{M}{V}$$

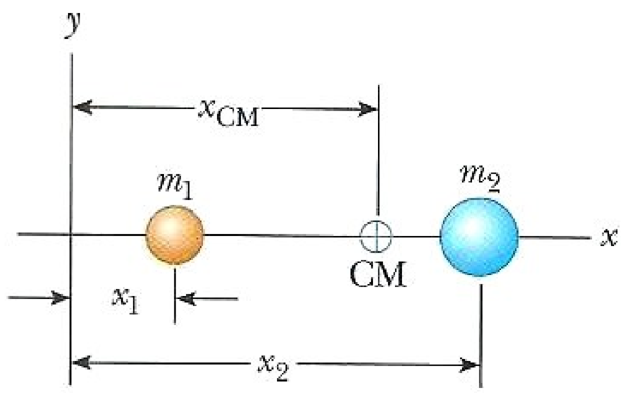
  - densità (locale o puntuale)

$$\rho = \frac{d\,m}{d\,V}$$

- Nel SI: grandezza derivata
  - $[\rho] = kg / m^3$

# Centro di massa

- Due masse puntiformi




$$x_{CM}=\frac{m_1 x_1+m_2 x_2}{m_1+m_2}$$

Centro di massa (baricentro)

  - per *N* masse

$$x_{CM}=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

$x_i$ posizione di $m_i$
$M$ massa totale

# Centro di massa

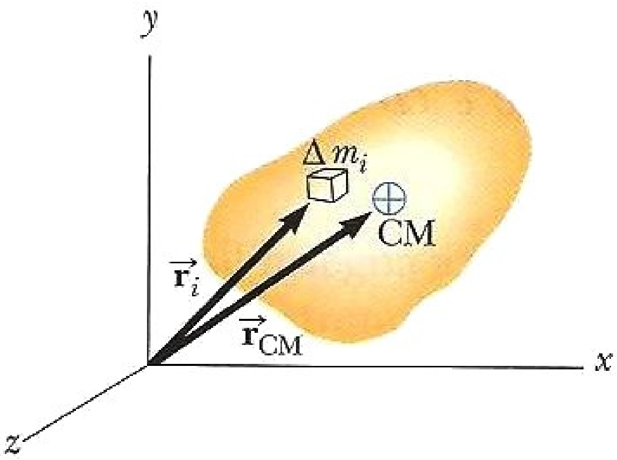
- Nello spazio: $x \rightarrow \boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

$\boldsymbol{r}_i$ posizione di $m_i$
$M$ massa totale

- Se corpo esteso: porzioni infinitesime d$m$

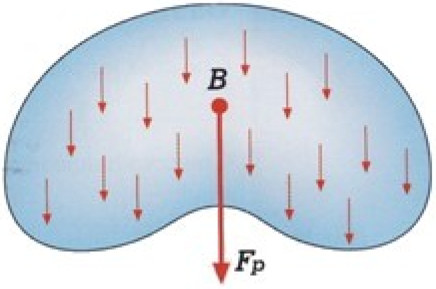
$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\int \boldsymbol{r}\, d\,m}{\int d\,m} = \frac{\int \boldsymbol{r}\, d\,m}{M}$$



# Centro di gravità

- Forza peso applicata ad ogni punto ≡ $M\,g$ applicata al centro di gravità
- Se il corpo è piccolo → $g$ costante

  centro di gravità = centro di massa



# Moto di un corpo esteso

- Dato che i corpi reali non sono puntiformi, il loro moto è più complicato di quanto visto
- In generale il moto di un corpo reale è dato da un moto traslatorio più un moto rotatorio
  - a seconda di dove si applica una forza esterna
  - solo in casi particolari è solo traslatorio o solo rotatorio

# Velocità del centro di massa

- Dati *n* corpi

$$\boldsymbol{v}_{CM}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{CM}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i$$

$$\boxed{\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\sum_i \boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{q}_{tot}=M\boldsymbol{v}_{CM}}$$

la quantità di moto totale è pari alla massa totale per la velocità del CM come se tutta la massa fosse *concentrata in un punto*

# Accelerazione del centro di massa

- Dati $n$ corpi

$$\boldsymbol{a}_{CM}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_{CM}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i$$

ma

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_{i,inter}+\boldsymbol{F}_{i,exter}$$

$$\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i=\sum_i \boldsymbol{F}_i=\sum_i \boldsymbol{F}_{i,inter}+\sum_i \boldsymbol{F}_{i,exter}$$

per il III Principio della Dinamica

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{i,inter}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_i \boldsymbol{F}_{i,exter}=\boldsymbol{F}_{ext\,tot}=M\,\boldsymbol{a}_{CM}}$$

la risultante delle forze esterne è pari alla massa totale per la accelerazione del CM come se tutta la massa fosse *concentrata in un punto*

# Quantità di moto del centro di massa

- Se la massa del sistema è costante

$$M\,\boldsymbol{a}_{CM} = M\,\frac{d\,\boldsymbol{v}_{CM}}{d\,t} = \frac{d\,M\,\boldsymbol{v}_{CM}}{d\,t} = \frac{d\,\boldsymbol{q}_{tot}}{d\,t}$$

quindi

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{i\,,\,exter} = \boldsymbol{F}_{ext\,tot} = \frac{d\,\boldsymbol{q}_{tot}}{d\,t}$$

generalizzazione di quanto visto per il punto materiale

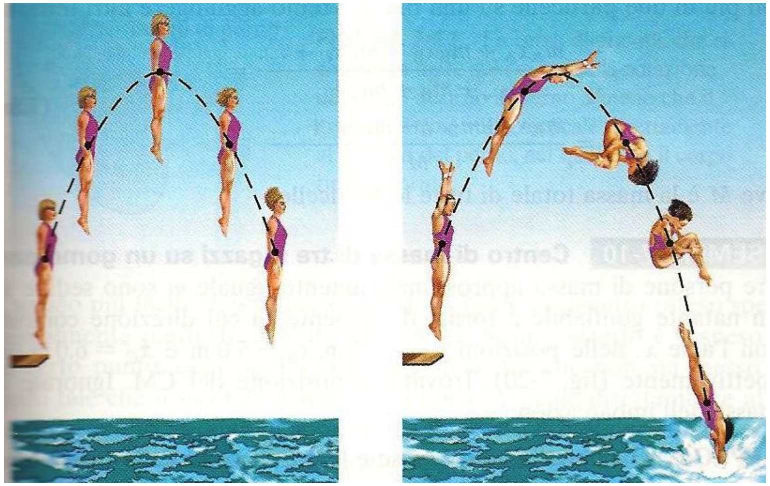
- Se il sistema è isolato → $\boldsymbol{F}_{ext\ tot} = \mathbf{0}$

$$\frac{d\,\boldsymbol{q}_{tot}}{d\,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q}_{tot} = cost$$

la quantità di moto totale si conserva

# Moto del centro di massa

- Il centro di massa di un corpo si muove come si muoverebbe una *particella puntiforme* soggetta alla stessa forza risultante
- E' una giustificazione della approssimazione di punto materiale
  - se si ignorano i moti interni, un corpo esteso si muove come il suo centro di massa nel quale si consideri concentrata tutta la massa



# Energia cinetica del centro di massa

- Dati *n* corpi

$$K_{tot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

ma $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{v}_{i,rel}$

$$K_{tot} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,rel}^2$$

l'energia cinetica totale è pari all'energia cinetica del CM, come se tutta la massa fosse *concentrata in un punto*, **più** un termine aggiuntivo che esprime l'energia cinetica delle singole particelle nel sistema

nel caso particolare in cui i singoli corpi sono fermi nel sistema di riferimento del CM (cioè se l'insieme di corpi si muove *solo* di moto traslatorio *senza* moto relativo fra di loro) allora $v_{i,rel} = 0\ \forall$i e $K_{tot} = K_{CM}$