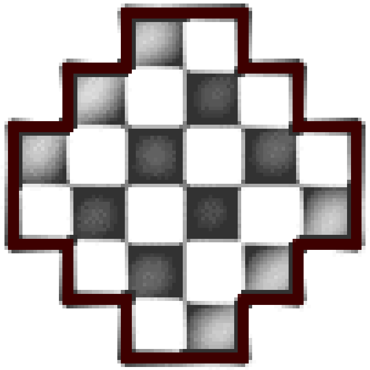
Tout sur le diamant aztèque

Projet personnel de Licence 3 Mathématiques
Année 2017/2018

Mathis Cordier
mathis.cordier@etud.univ-angers.fr

Léonore Chaves
leonore.chaves@etud.univ-angers.fr



Mattia Cafasso
mattia.cafasso@univ-angers.fr

Sommaire :

Introduction ____________________ p. 2

Enoncé ____________________ p. 3

Première Preuve :

Algorithme du touillage de domino ____________________ p. 3

Choix et complexité ____________________ p. 7

Seconde Preuve :

Matrice de Hankel et nombres de Schröder ____________________ p. 8

Lemme de Lindström-Gessel-Viennot ____________________ p. 9

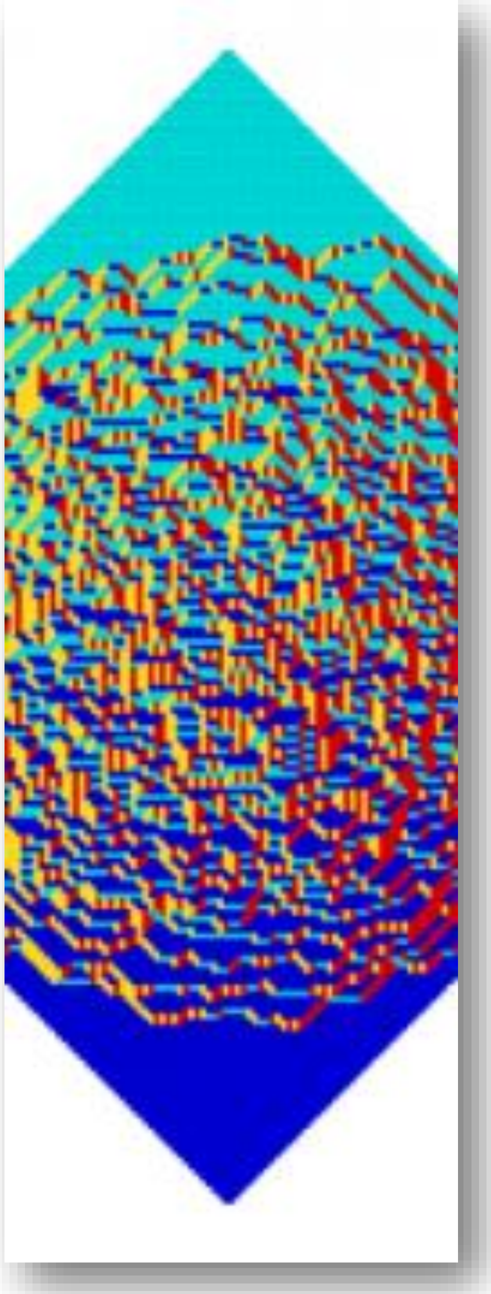
Bijection avec les chemins ____________________ p. 10

Phénomène macroscopique :

Cercle arctique ____________________ p. 12

Probabilités et phénomène de bord____________________ p. 13

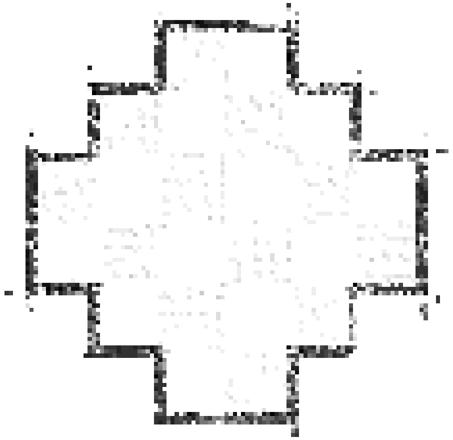
Références ____________________ p. 16



La figure nommée « Diamant Aztèque » sur laquelle se base notre étude est une figure a priori très simple par sa géométrie. Au fil du temps, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur l'intérêt mathématique de cette figure. En effet, ils se sont demandés comment paver une telle forme avec de simples dominos de taille 2×1.

En 1992, les mathématiciens Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen et James Propp ont réussi à formuler et prouver un théorème capable de dénombrer les différents pavages possibles d'un diamant aztèque quel que soit son ordre. Mais au-delà de l'intérêt du dénombrement et ce qui fait la particularité de cette figure se présente lorsque l'ordre devient très grand. Il apparaît alors le phénomène de cercle arctique.

Notre projet s'articulera donc autour de deux problématiques.
Premièrement, nous allons chercher à comprendre les manières de dénombrer les pavages et démontrer le théorème du diamant aztèque puis dans un second temps nous mettrons en lumière le phénomène de cercle arctique et nous l'expliquerons.



ÉNONCÉ : Diamant aztèque

Il y a $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ possibilités de paver un diamant aztèque d'ordre n avec des dominos 2×1

Quelques conventions :

On notera toujours l'ordre du diamant par la lettre n.
De même, on appellera $AZ(n)$ le nombre de pavages possibles à l'ordre n.

1. PREMIERE PREUVE

Au lieu de tirer au hasard un pavage parmi tous ceux existants d'ordre n, on va chercher un algorithme qui donne un diamant d'ordre n à partir d'un diamant d'ordre $n-1$

Touillage de domino

Pavage : Les règles

- Les dominos doivent remplir toute la figure
- Ils ne doivent jamais se chevaucher
- Il existe 4 types de dominos différents car on tient compte de leur orientation, on a donc :

On associe donc une couleur spécifique pour chaque orientation des dominos.

L'algorithme de touillage de domino permet d'augmenter l'ordre des diamants par des itérations. Il est composé de 3 procédures que l'on pourrait appeler l'extraction, la permutation et la création. Ces 3 procédures sont effectuées sur chaque cellule active.
D'autres procédés du touillage existent, celui que nous avons choisi utilisant les cellules actives n'en est qu'un parmi d'autres. On pourrait notamment ne pas s'intéresser aux cellules actives et ne regarder que les dominos en les déplaçant selon leur orientation à chaque itération.

Définition : Cellule active

Une cellule est une région carrée de taille 2×2 inclue dans le diamant. Pour qu'elle soit active, il faut jeter un coup d'œil à sa composition :

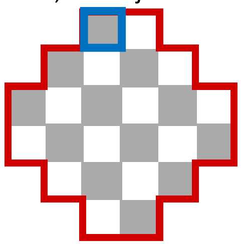


Figure 1 : Identification de l'indicateur

Une fois avoir coloré le diamant à la manière d'un échiquier, on regarde la couleur du carreau le plus haut à gauche, ici gris, que l'on appellera indicateur. De cette manière, si l'ordre est impair ce carreau sera gris, s'il est pair il sera blanc.
Une fois celui-ci identifié, les cellules actives sont celles dont le carreau en haut à gauche est de la couleur de l'indicateur.
En fait, une cellule est dite active si elle est de la même forme que les cellules du bord.

On relève donc maintenant toutes les cellules qui répondent à ce critère.

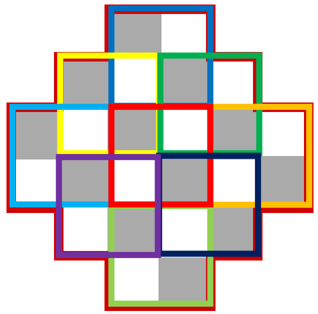
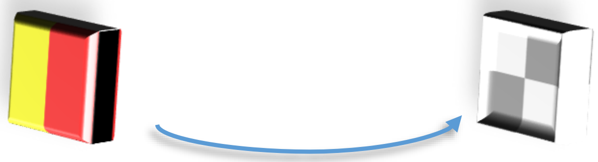


Figure 2 : Cellules actives d'un diamant d'ordre 3

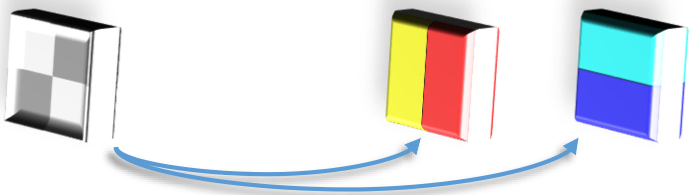
Les procédures

- **EXTRACTION** : Si la cellule est composée de 2 dominos entiers, on les retire



- **PERMUTATION** : Si la cellule est composée d'un domino entier uniquement, on décale le domino d'un cran dans la direction de son orientation

- **CREATION** : Si la cellule ne contient aucun domino entier, on est dans la situation d'un black bloc, on place alors 2 dominos, soient horizontaux soient verticaux



On remarque que les seuls « choix » à faire se font au niveau de la création. C'est donc le seul procédé des 3 qui fait apparaître des différences dans les pavages lors de l'itération. De plus, la procédure de création suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Lorsque l'on fait une itération, on ne fait qu'une et une seule de ces 3 procédures pour chaque cellule active. Sinon cela donnerait un cycle sans fin.
C'est le chevauchement des cellules actives qui fait fonctionner l'algorithme. Pourtant, les procédures se font sur chaque cellule indépendamment des autres. Un théorème à venir nous garantira que les dominos ne se chevaucheront pas après passage dans l'algorithme.

Propriétés :

- Il y a n^2 cellules actives dans un diamant d'ordre n
- Il y a $2n(n+1)$ carreaux dans un diamant d'ordre n
- Il y a $n(n+1)$ dominos dans un diamant d'ordre n

Preuve :

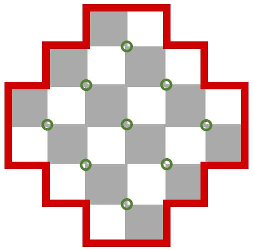


Figure 3: Centre des cellules actives

On regarde le centre de chaque cellule active, cela revient à compter le nombre de points d'une grille $n \times n$, soit n^2 points.

Pour le nombre de carreaux, il suffit de compter ce côté :  (où le nombre de carreaux est égal à $\sum_{k=1}^{n=3} k$) et multiplier par 4 par réflexion. On a donc
$\#\{Carreaux\ \text{à}\ l'ordre\ n\} = 4\sum_{k=1}^{n} k = 4\frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1)$
Or un domino est formé de 2 carreaux alors $\#\{Dominos\ \text{à}\ l'ordre\ n\} = n(n+1)$

Définition : Black/White bloc

Un Black (resp. White) bloc est une cellule active qui contient deux dominos entiers (resp. qui ne contient aucun domino entier).
C'est donc une cellule sur laquelle on effectuera une procédure d'extraction (resp. de création).

Nous admettrons la proposition suivante :

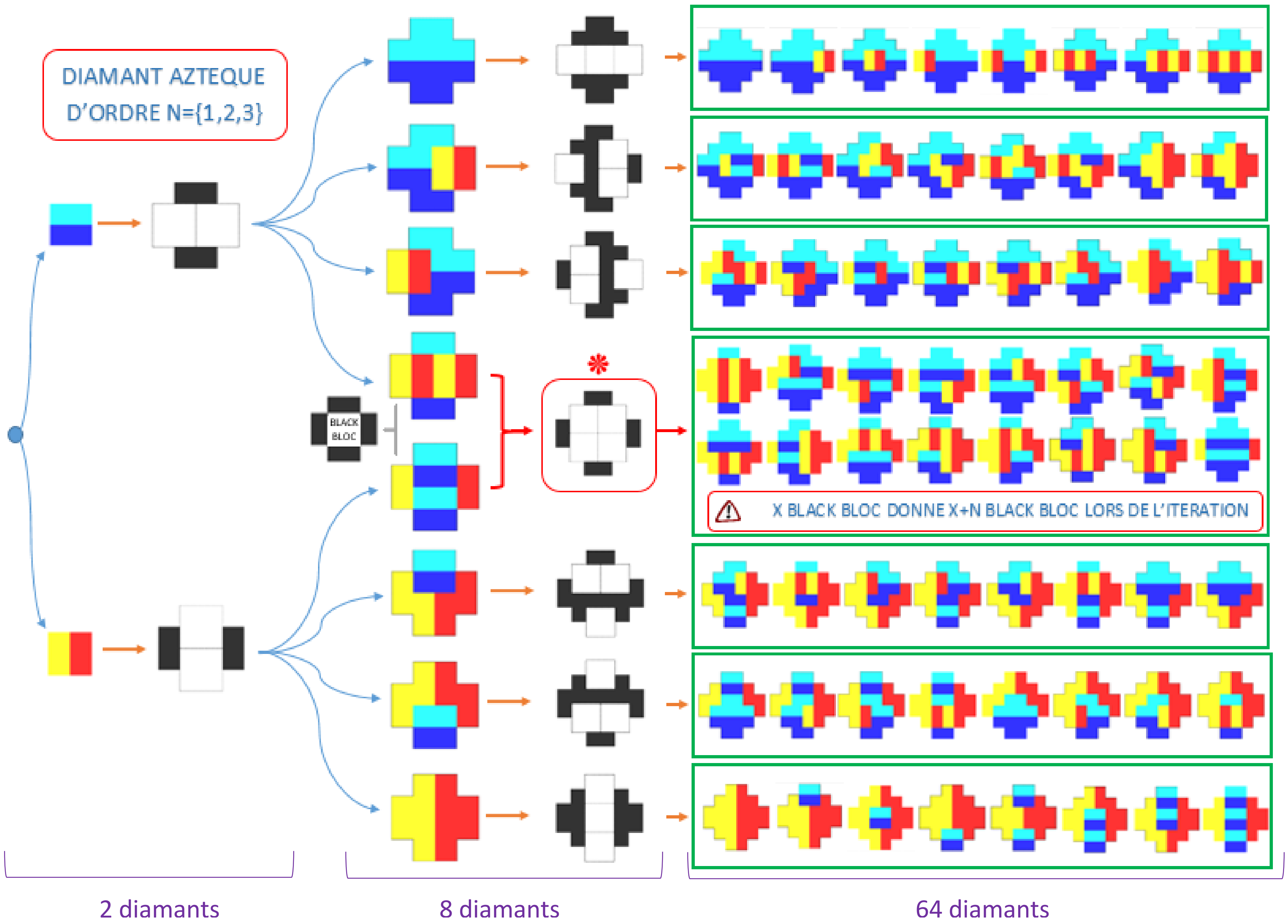
Théorème :

L'algorithme du touillage de domino implique que le pavage créé répond aux critères suivants :

- Les dominos ne se chevauchent pas
- Aucun domino n'a une partie en dehors du diamant
- Les dominos couvrent toute la surface du diamant

Alors, le diamant est entièrement rempli de dominos entiers.

Dans la page suivante nous présentons un aperçu des premières itérations


DIAMANT AZTEQUE
D'ORDRE N={1,2,3}
BLACK
BLOC
X BLACK BLOC DONNE X+N BLACK BLOC LORS DE L'ITERATION
2 diamants
8 diamants
64 diamants

EXPLICATIONS

Lors de l'itération, on remarque le cas simple sur les 3 premières et les 3 dernières lignes et un cas plus complexe qui reviendra en fait souvent lors des futures itérations. On veut montrer que la preuve qui suivra marche bien que ce phénomène persiste.

Dans ce dernier cas, on peut facilement montrer que chaque diamant d'ordre 3 à la même probabilité d'être tiré que dans le cas simple car 2 chemins amènent à donner les 16 mêmes diamants, ce qui en terme de probabilité équivaut à ce que chacun en amène 8 comme sur les autres lignes.
On a alors un tirage équiprobable entre tous les diamants alors les phénomènes que nous verrons ne dépendent pas de l'algorithme utilisé.

<u>Du touillage au dénombrement</u>

Le cas remarqué dans la figure ci-dessus se reproduira de plus en plus quand l'ordre du diamant augmentera. Or on remarque que lorsqu'on a affaire à ce phénomène nous avons 2 chemins qui amènent tous les deux à 2 fois plus de diamants de l'ordre suivant. De plus, les diamants venant du chemin 1 sont les même que ceux venant du chemin 2.

On note K le nombre de Black bloc et on a le système suivant :

SYSTEME CLASSIQUE

DIAMANT → N WHITE BLOC → X DIAMANTS

SYSTEME AVEC BB :

DIAMANT 1
DIAMANT 2
...
DIAMANT K
→ N+K WHITE BLOC → KX DIAMANTS

Soient N l'ordre du diamant, K le nombre de Black blocs à l'ordre N et L le nombre de Black blocs à l'ordre N-1, on a :

N = K - L

Alors une récurrence sur N restera vraie pour tout ordre malgré ce phénomène.
Or nous remarquons que dans le cas général nous avons toujours N White blocs à l'ordre N. De plus, un White bloc correspond à une procédure de création et celle-ci suit une loi de Bernoulli où $p = \frac{1}{2}$, nous avons en effet 2 possibilités ayant la même probabilité. A chaque création, il y a donc 2 possibilités de diamant et nous faisons n créations à l'ordre n. Nous remarquons donc que $AZ(n) = 2^n\, AZ(n-1)$ et nous cherchons à trouver une formule générale de $AZ(n)$ par récurrence.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $\begin{cases} AZ(1) = 2 \\ AZ(n) = 2^n \, AZ(n-1) \end{cases}$

<u>Hypothèse de récurrence :</u> P_n : $AZ(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Initialisation : $2^{\frac{1(1+1)}{2}} = 2 = AZ(1)$

Hérédité : On suppose que P_n est vraie jusqu'au rang $n-1$ et montrons qu'elle est vraie au rang n
On sait que $AZ(n) = 2^n AZ(n-1)$

Donc $AZ(n) = 2^n AZ(n-1) = 2^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n+\frac{n(n-1)}{n}}$

$$= 2^{\frac{2n+n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Alors $\boxed{AZ(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ pour tout $n \geq 1$

2. SECONDE PREUVE

Nous commencerons par introduire les définitions essentielles à la compréhension des preuves et des propositions. Nous montrerons également une propriété des petits et grands nombres de Schröder qui sera essentielle à la preuve.

Définition : Matrice de Hankel

On appelle matrice de Hankel les matrices $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de la forme,

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & & \\ a_3 & a_4 & a_5 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & & & & a_{2n-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \in \mathbb{R},$$

C'est-à-dire, $m_{i,j} = m_{i+1,j-1}$, pour $i \in [\![1,n-1]\!],\ j \in [\![2,n]\!]$

Définition : Nombres de Catalan – Mots/Chemins de Dyck

Soit $D_n = \{\,1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots\}$ représentant l'ensemble des nombres de Catalan que l'on associe aux nombres de mots de Dyck de taille n.

Ces nombres représentent le nombre de chemins possibles dans une grille pour aller de $(-n, 0)$ à $(n, 0)$ tels que :

i) Le chemin D ne peut pas passer en-dessous de l'axe des abscisses

ii) Seuls les déplacements :

- Sud-Est (1,-1)
- Nord-Est (1,1)

sont autorisés

Définition : Nombres de Schröder

Soit $H_n = \{\,1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, \dots\}$

Et $G_n = \{\,1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, \dots\}$ qui représentent respectivement l'ensemble des grands et des petits nombres de Schröder.

Ces nombres représentent le nombre de chemins possibles dans une grille pour aller de $(-n, 0)$ à $(n, 0)$ tels que :

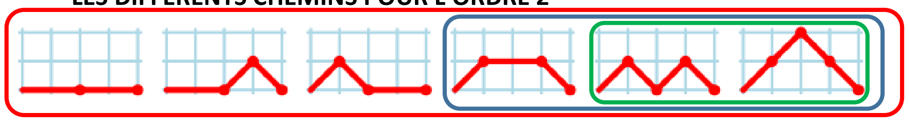
i) Le chemin ne peut pas passer en-dessous de l'axe des abscisses pour H et le chemin ne peut pas non plus faire de pas Est sur l'axe des abscisses pour G

ii) Seuls les déplacements :

- Pas Est (2,0)
- Sud-Est (1,-1)
- Nord-Est (1,1)

sont autorisés

LES DIFFERENTS CHEMINS POUR L'ORDRE 2



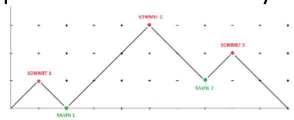
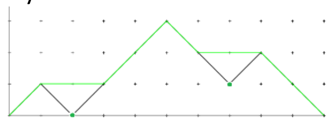
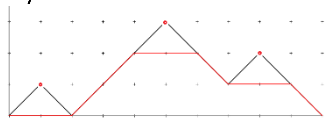
SCHRÖDER GRANDS SCHÖDER PETITS DYCK

Proposition : Petits et grands nombres de Schröder

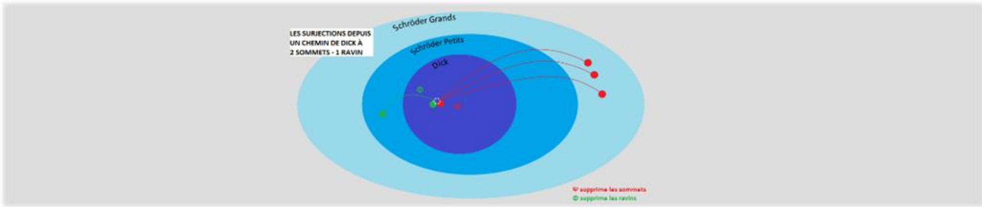
Pour tout $n \geq 1, H_n = 2 \times G_n$

Preuve :

On voit tout de suite que les chemins de Dyck sont des petits chemins de Schröder qui sont eux-mêmes de grands chemins de Schröder, on peut noter $D \subset G \subset H$.

On cherche à créer des chemins de Schröder à partir d'un chemin de Dyck	Soit $\Phi :\ \mathrm{D} \to G$ qui supprime les ravins des chemins de Dyck	Soit $\Psi :\ \mathrm{D} \to H$ qui supprime les sommets des chemins de Dyck
		

Il est évident que Ψ et Φ sont surjectives, c'est-à-dire que $Im(\Phi) = \mathrm{G}$ et $Im(\Psi) = \mathrm{H}$



De plus, on note $s = \#\{Sommets\}$ et $r = \#\{Ravins\}$

On voit également que lorsqu'on supprime chaque sommet ou chaque ravin, on crée deux chemins, le nouveau et l'original, celui de Dyck qui est également un chemin de Schröder.

Ainsi, on retrouve ce phénomène de choix et à partir d'un chemin de Dyck on a :

$$\begin{cases} 2^r \ petits\ chemins\ de\ Schröder \\ 2^s\ grands\ chemins\ de\ Schröder \end{cases}, \text{ or il est évident que } s = r + 1$$

Donc $2^s = 2^{r+1} = 2 \times 2^r$ et de par la surjectivité des applications,

On a bien pour tout $n \geq 1, H_n = 2 \times G_n$ ■

Quelques notations :

On note $H_n = \{\,x_0,\ x_1, x_2, \dots\}$ et $dH_n = \left\{\,|x_1|, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}, \dots\right\}$

formés des déterminants successifs des matrices de Hankel ayant pour coefficients les grands nombres de Schröder et de la même manière dG_n pour les petits.

On a donc $dH_n = \left\{\, det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & & \\ x_3 & x_4 & x_5 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_n & & & & x_{2n-1} \end{bmatrix} \mid x_i \in H_n, i \in [\![1{,}2n-1]\!]\,\right\}$

Propostition : Bijection entre dH_n et AZ_n
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $dH_n = AZ_n$

Pour démontrer cette proposition nous allons avoir besoin de l'outil suivant :

Lemme : Lemme de Lindström-Gessel-Viennot
Soit $M \in M_{n \times n}$ où les m_{ij} de M désignent le nombre de chemins possibles allant de A_i à B_j, Alors $detM = \sum_{(P_1,\dots,P_n):A\to B} sgn(\sigma(P)) \prod_{i=1}^{n} \omega(P_i)$

Remarque : Ici, tous les poids sont égaux à 1 donc $\prod_{i=1}^{n} \omega(P_i) = 1$,
Alors $detM = \sum_{(P_1,\dots,P_n):A\to B} sgn\big(\sigma(P)\big)$
$= \#\{\text{"chemins sans intersection reliant les } A_i \text{ aux } B_i\text{"}\}$

De plus, $sgn(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$ où $inv(\sigma) = \#\{\,(\sigma(i), \sigma(j))\,|\, i < j \ et \ \sigma(i) > \sigma(j)\,\}$, c'est-à-dire le nombre d'inversions de σ.
Ex : Soit $\sigma = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,4\,3\,1}$
Les inversions de σ sont $\{1{,}4\}, \{2{,}3\}, \{2{,}4\}$ et $\{3{,}4\}$, alors $inv(\sigma) = 4$

Notation : $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations d'indice n

Preuve :
Soit $M \in M_{n\times n}$, $\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{inv(\sigma)} (\prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)})$ (Formule de Leibniz)
Où m_{ij} correspond au nombre de chemins possibles allant de A_i à B_j

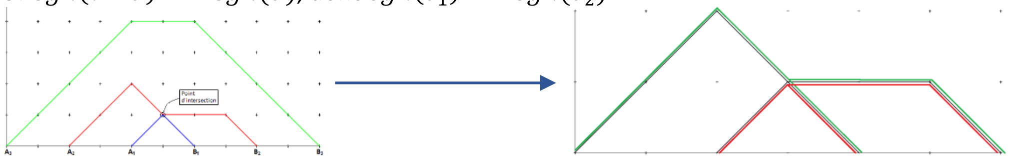
Ex : $det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$

Idée : Si je compte N, tous les chemins qui vont de $\begin{cases} A_1 \to B_{\sigma(1)} \\ A_2 \to B_{\sigma(2)} \\ \quad \vdots \\ A_n \to B_{\sigma(n)} \end{cases}$, en comptant les intersections et en prenant en compte le signe de σ

$N = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{inv(\sigma)} m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{3,\sigma(3)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{inv(\sigma)} (\prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)})$
$= \det(M)$

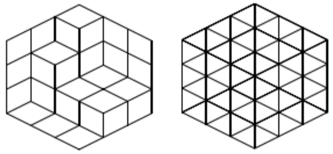
Il reste à montrer que la somme de tous les chemins qui se croisent est égale à 0.
Or si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ où $\alpha_i \in [\![1,n]\!], i \in [\![1,n]\!]$ tous distincts
On aura pour tout i et pour tout α_i, un $\sigma_1 : i \longmapsto \alpha_i$ et un $\sigma_2 : i \longmapsto \alpha_j$
Soit τ une transposition telle que $\tau : \alpha_i \longmapsto \alpha_j$, on a alors $\tau \circ \sigma_1 = \sigma_2$

Or $sgn(\tau \circ \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} -sgn(\sigma)$, donc $sgn(\sigma_1) = -sgn(\sigma_2)$

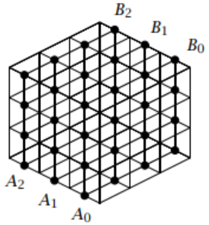


Graphiquement, sur point d'intersection, le chemin se scinde en deux et l'initial comptera 1 et le nouveau comptera -1.
Donc lors du passage à la somme, tous les chemins ayant des intersections s'annulent. ■

Pour illustrer le lemme de Gessel-Viennot sur un exemple plus simple, prenons le pavage d'un hexagone pavé de losanges :



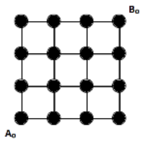
Grâce à la grille, on définit les points mettant en place les chemins possibles :



Pour appliquer le lemme il nous suffit donc de compter le nombre de chemins entre chaque A_i et B_j, on se munit donc de la matrice suivante :

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{array}{c} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{array} \end{array}$$

En regardant bien, il est en fait simple de compter le nombre de chemins reliant les A_i aux B_j.
Par exemple, pour aller de A_0 à B_0, on a :



Ainsi pour aller de A_i à B_j, on suit les chemins d'une grille $\begin{cases} 3 \times 3 & si \ i = j \\ 2 \times 4 & si \ |i-j| = 1 \\ 1 \times 5 & si \ |i-j| = 2 \end{cases}$

On a donc $M = \begin{bmatrix} \binom{6}{3} & \binom{6}{2} & \binom{6}{1} \\ \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{2} \\ \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 15 & 20 & 15 \\ 6 & 15 & 20 \end{bmatrix} = 980$

En admettant et en utilisant la formule de MacMahon pour cette figure,
$h(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2n+i}{n}}{\binom{n+i}{n}}$, on a bien $h(3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{7}{3}\binom{8}{3}}{\binom{3}{3}\binom{4}{3}\binom{5}{3}} = 980$
On remarque d'ailleurs que ${}^{T}M$ est une matrice de Hankel et on sait que $\det(M) = \det({}^{T}M)$

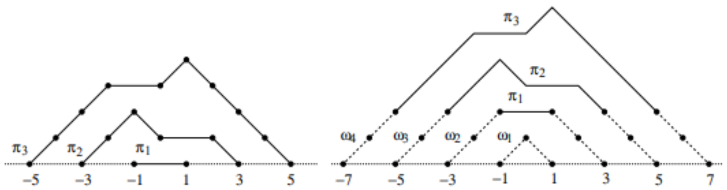
Revenons maintenant à la proposition de la bijection.
Soit Π_n (respectivement Ω_n) le n-uplet $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ correspondant aux grands chemins de Schröder (respectivement les petits chemins de Schröder) satisfaisants les conditions suivantes :

A. Les chemins π_i vont de $(-2i+1, 0)$ à $(2i-1, 0)$ pour $1 \le i \le n$
B. Pas d'intersection entre les π_i et les π_j avec $i \ne j$

Les déplacements se font de trois manières :

- $U : (1,1)$
- $D : (1,-1)$
- $L : (2,0)$

Il y a une bijection Φ immédiate entre Π_{n-1} et Ω_n pour $n \ge 2$ telle que :
$\Phi : \Pi_{n-1} \to \Omega_n,\ (\pi_1, \dots, \pi_{n-1}) \mapsto (\omega_1, \dots, \omega_n)$ où $\omega_1 = UD$ et $\omega_i = UU\pi_{i-1}DD$ pour $2 \le i \le n$



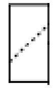
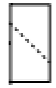
Alors, pour $n \ge 2$, on a $|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$

Proposition : Pour $n \ge 1$, on a

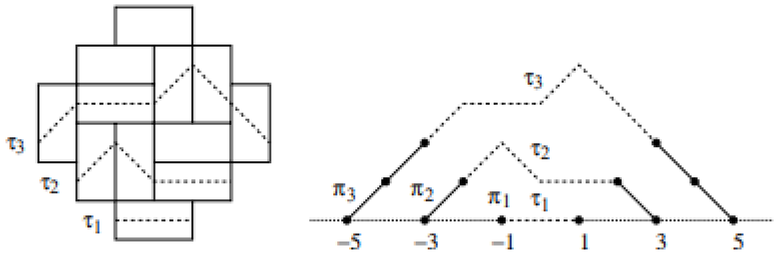
i. $|\Pi_n| = \mathrm{d}H_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
ii. $|\Omega_n| = \mathrm{d}G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Preuve :
Par le lemme de Gessel-Viennot, on a $|\Pi_n| = \mathrm{d}H_n$ et $|\Omega_n| = \mathrm{d}G_n$
Or $H_n = 2G_n$ donc $|\Pi_n| = dH_n = 2^n dG_n = 2^n |\Omega_n| = 2^n |\Pi_{n-1}|$
Et $|\Pi_1| = 2$ alors $\begin{cases} |\Pi_n| = 2^n |\Pi_{n-1}| \\ |\Pi_1| = 2 \end{cases}$, cela revient à faire la récurrence précédente
donc $|\Pi_n| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et alors $|\Omega_n| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Preuve finale :
Soit T un pavage de $AZ(n)$ centré en $(0,0)$, on associe à T un n-uplet $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ de chemins sans intersections.
Pour $1 \le i \le n$, on définie une chemin τ_i allant de $\left(-i, -n+i-\frac{1}{2}\right)$ à $\left(i, -n+i-\frac{1}{2}\right)$
Chaque pas se fait de la manière suivante :

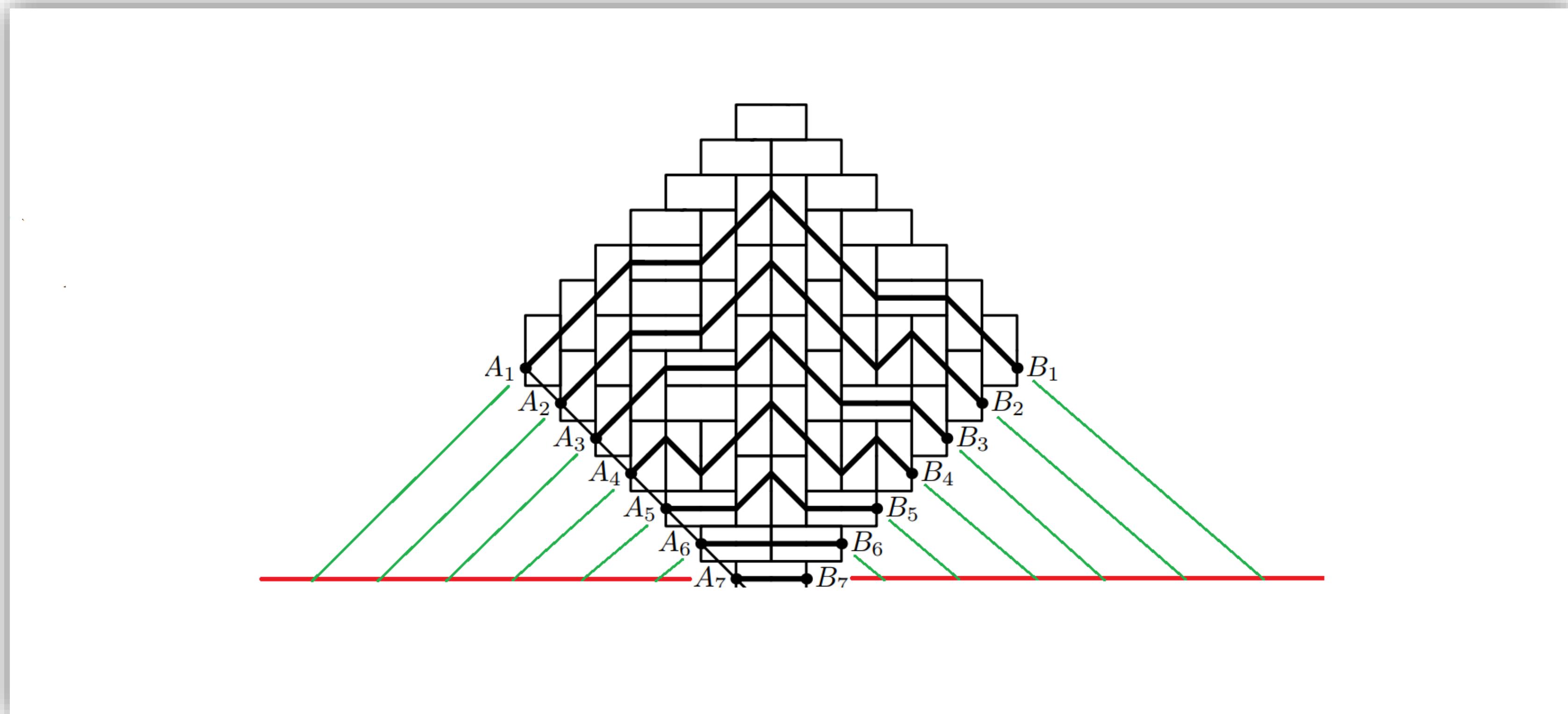
 Cela revient à faire un L
 Cela revient à faire un U
 Cela revient à faire un D

Le pas est toujours symétrique par rapport au centre du domino.
Pour chaque pavage il y a un unique n-uplet $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ de chemins.
De plus, pour tout i et pour tout j, τ_i et τ_j ne s'intersectent pas.
A l'inverse, chaque n-uplet de chemins correspond à un unique pavage T.
Notons, que les dominos qui ne sont pas dans les chemins sont tous horizontaux.
Pour établir une relation Ψ, pour $1 \le i \le n$, on forme un grand chemin de Schröder π_i à partir de τ_i, on relie les τ_i à l'axe des abscisses.
Ainsi, on fait $i-1$ U attaché au début de τ_i et $i-1$ D attaché à la fin de τ_i.



On définie $\Psi(T) = (\pi_1, \dots, \pi_n)$
On peut vérifier que le n-uplet $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ de grands chemins de Schröder satisait les conditions originales A. et B., par conséquent $\Psi(T) \in \Pi_n$
Pour trouver Ψ^{-1} on peut récupérer un n-uplet $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ de chemins sans intersections qui correspond à un unique pavage de $AZ(n)$ depuis chaque n-uplet $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ satisfaisant A. et B. par la procédure inverse.
Par exemple, sur la figure ci-dessus, à gauche on trouve le pavage T de $AZ(3)$ et le triplet (τ_1, τ_2, τ_3) et à droite le triplet $\Psi(T) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \Pi_3$.

On a donc établi la bijection entre dH_n et $AZ(n)$. ∎

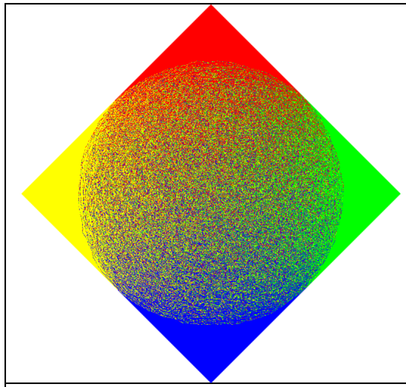


3. PHENOMENE MACROSCOPIQUE

On sait déjà que le nombre de pavages possibles augmente extrêmement vite avec la taille du diamant :

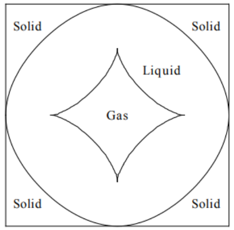
Taille 4	$2^{10} = 1024$
Taille 100	$2^{5050} =$ 15902964999040573742561668264460032939197749696494543467923652093938663865140647 63920187941921354925746370810627084487979370767355709334533042904244143418158885 92633005714707932776162660906509920006616654116549983575371723067143639772106866 99601893320735631863890134728131578154332989073349840221464172827918739618824237 75778542104213862089031077785555143866356577492120083511026419571730471106482560 28789296028562968688326266812800666447260645666165190286506792199970363686660653 21242836216327552826764706577802623947880985123917759508714311540915842814269981 37396494873038709079869903603562447014080248853887569376975276923293939494599760 32801149332609960278374819902298310106590926600457341682957186754557188552733588 09850010338842483720514541897115844064422951459300388876735513215600760752703198 34725870136348884223985977122965129561822556568431259649296802299713721360564124 22893107173560332081706813734330821417251482777670048115061889383965755775776765 96973322765312238014447390881593743187817630638571691939566296297640293501661635 08706432744821182534472156982922112502360281722995070907936834964101609823464865 81012266937762249283507918305835887950386168354098876167306942241406455715816956 61998937968743188115281529946619551633772129730307307624245701651071013151755088 36207715198864283258651598406855988055957560495690209589679776828160891517784644 81563037481885989757914202083912976055240076054549057293581532713801486386372680 842041928795585249467088316478042719840125811375149806021087040615406834102042624

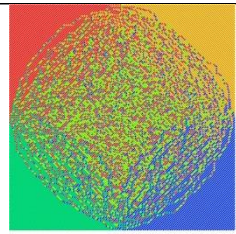
L'énumération des diamants est irréalisable

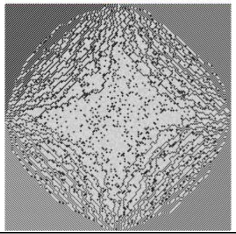


Quand l'ordre du diamant devient très grand, on voit très facilement ce phénomène de cercle arctique

Quand on a un système pondéré et plus général, on voit se former un deuxième phénomène encore plus intriguant :







<u>Théorème du cercle arctique :</u> **W.Jockusch, J.Propp, P.Schor, 1995**

Pour tout $\varepsilon > 0$, en dehors du cercle inscrit magnifié $(1+\varepsilon)$ fois, la probabilité que tous les dominos soient orientés de manière déterministe tend vers 1 : verticalement dans les coins gauche et droit, horizontalement dans les coin haut et bas.

Si l'on tire au hasard un des pavages possibles d'un diamant de taille assez grande on verra apparaître avec une probabilité proche de 1, le fameux cercle arctique. A l'extérieur du cercle inscrit, dans chaque coin du diamant les dominos sont tous gelés dans le même sens alors qu'à l'intérieur du cercle inscrit le désordre règne.

Dans la page suivante nous regarderons les probabilités associées aux faits que les 4 coins soient occupés par un domino entier. On dira que les dominos extérieurs sont fixés.

Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ la suite associée à la probabilité que les dominos extérieurs soient fixés. Etudions l'évolution de cette probabilité au cours des itérations.

1		0 sur 2 0%	$\rightarrow p_1 = 0$
2		2 sur 8 25%	$\rightarrow p_2 = \frac{1}{4}$
3		36 sur 64 56,25%	$\rightarrow p_3 = \frac{9}{16}$
4		784 sur 1024 76,56%	$\rightarrow p_4 = \frac{49}{64}$

On sait que dès l'ordre 1, au minimum 2 dominos sont fixés sur l'extérieur et que par construction en récurrence, si x_{n_0} dominos sont fixés sur l'extérieur à un certain rang n_0 alors $\forall n \geq n_0, x_n \geq x_{n_0}$ où x_n est le nombre de dominos fixés à l'extérieur à l'ordre n.

Pour tout $n \geq 1$, on note $(a_n), (b_n)$ *et* (c_n) les suites respectivement associées au nombre de diamants où 2, 3 et 4 dominos sont fixés sur l'extérieur, c'est-à-dire que le centre des dominos se situe en $(0, n-\frac{1}{2})$, $(0, -n+\frac{1}{2})$, $(n-\frac{1}{2}, 0)$ ou $(-n+\frac{1}{2}, 0)$.

On a donc $p_n = \frac{c_n}{AZ(n)}$

Par cette analyse de construction, on remarque que :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 0 \text{ et} \\ c_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_{n+1} = 2^{n+1}\dfrac{a_n}{4} \\ b_{n+1} = 2^{n+1}\left(\dfrac{a_n}{2} + \dfrac{b_n}{2}\right) \\ c_{n+1} = 2^{n+1}\left(c_n + \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{a_n}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 2^{n-1}a_n & (i) \\ b_{n+1} = 2^n(a_n + b_n) & (ii) \\ c_{n+1} = 2^{n+1}\left(c_n + \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{a_n}{4}\right) & (iii) \end{cases}$$

On veut trouver (c_n) en fonction de n en trouvant (a_n) puis (b_n) en fonction de n :

On connait le premier terme de la suite $a_1 = 2$

$$a_n = 2^{n-2}a_{n-1} = 2^{n-2}2^{n-3}a_{n-2} = \cdots = \prod_{k=1}^{n-2} 2^k \times a_1 = 2^{\sum_{k=1}^{n-2} k} \times 2$$

$$\boxed{a_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}}$$

On remplace maintenant a_n par sa valeur en fonction de n dans (ii) :

$$\begin{cases} b_{n+1} = 2^n\left(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1} + b_n\right) \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

<u>Hypothèse de récurrence :</u> P_n : $\quad b_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2}(2^{n-1} - 1)$

Initialisation : $2^{\frac{(1-1)(1-2)}{2}+2}(2^{1-1} - 1) = 0 = b_1$

Hérédité : On suppose que P_n est vraie jusqu'au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

On sait que $b_{n+1} = 2^n\left(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1} + b_n\right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n\left(2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1} + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2}(2^{n-1} - 1)\right) \\ &= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n+1} + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n+2}(2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{\frac{n^2-n+4}{2}} + 2^{\frac{n^2+n+4}{2}} - 2^{\frac{n^2-n+6}{2}} \\ &= 2^{\frac{n^2-n+4}{2}}(1 + 2^n - 2) \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}+2}(2^n - 1) \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour tout $n \geq 1$, on a bien $\boxed{b_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2}(2^{n-1} - 1)}$

On remplace maintenant a_n et b_n par leur valeur en fonction de n dans (iii)

Donc $\begin{cases} c_{n+1} = 2^{n+1}c_n + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n} + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n+2}(2^{n-1} - 1) \\ c_1 = 0 \end{cases}$

On peut simplifier l'équation par $c_{n+1} = 2^{n+1}c_n + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{n+1} - 3)$

<u>Hypothèse de récurrence :</u> P_n : $\quad c_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}(2^{n-1} - 1)^2$

Initialisation : $2^{\frac{(1-1)(1-2)}{2}+1}(2^{1-1} - 1)^2 = 0 = c_1$

Hérédité : On suppose que P_n est vraie jusqu'au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

On sait que $c_{n+1} = 2^{n+1}c_n + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{n+1} - 3)$

$$\begin{aligned} &= 2^{n+1} \times 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}(2^{n-1} - 1)^2 + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{n+1} - 3) \\ &= 4 \times 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{n-1} - 1)^2 + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{n+1} - 3) \\ &= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}(2^{2n} - 2^{n+2} + 2^{n+1} + 1) \\ &= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n}[(2^{2n} - 2^{n+1} + 1) - 2^{n+2} + 2^{n+2}] \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n - 1)^2 \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour tout $n \geq 1$, on a bien $\boxed{c_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}(2^{n-1} - 1)^2}$

Ainsi, on a $p_n = \dfrac{2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}\left(2^{n-1}-1\right)^2}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \dfrac{\left(2^{n-1}-1\right)^2}{2^{2(n-1)}} = \left(\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2$

On se propose d'étudier la suite p_n associée à la probabilité que les 4 dominos extérieurs soient fixés. Les suites pa_n et pb_n mentionnées plus tard sont les suites associées aux probabilités que respectivement 2 et 3 dominos soient fixés à l'ordre n.

$$p_{n+1} = \left(1^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1^{n-1} + \frac{1^{n-2}}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2$

Etudions la convergence de (u_n) :

$p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $\frac{1}{2} < 1$

Cherchons la vitesse de convergence de (p_n) :

$$\left|\frac{p_{n+1}-l}{p_n-l}\right| = \left|\frac{p_{n+1}-1}{p_n-1}\right| = \left|\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 - 1^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 - 1^2}\right|$$
$$= \left|\frac{\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}\right| = \frac{1}{2} \times \frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (2^{n+1}-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^n (2^{n+1}-2)} = \frac{1}{2} \times \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Donc (p_n) a une convergence géométrique de rapport $\frac{1}{2}$

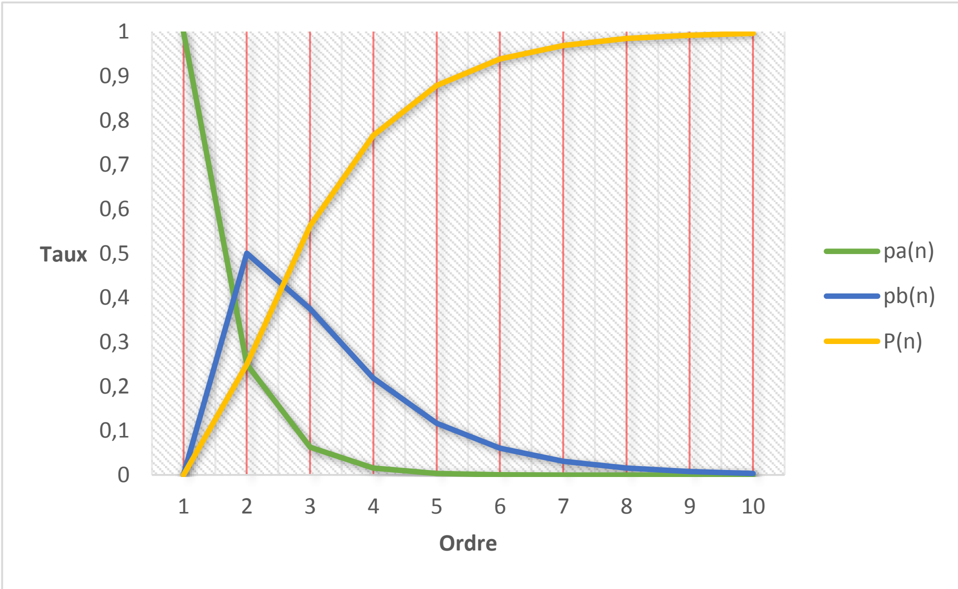
On cherche à partir de quel ordre on sera sûrs à 95% que tous les dominos soient fixés à l'extérieur :

$$p_n = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{p_n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \sqrt{p_n}$$
$$\Leftrightarrow n - 1 = \frac{\ln(1-\sqrt{p_n})}{\ln(0.5)} \Leftrightarrow n = 1 - \frac{\ln(1-\sqrt{p_n})}{\ln(2)}$$

Si $p_n = 0.95$ on a :

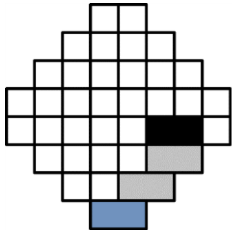
$1 - \frac{\ln(1-\sqrt{0.95})}{\ln(2)} \approx 6.304$ alors $p_n \geq 0.95 \Leftrightarrow n \geq 7$

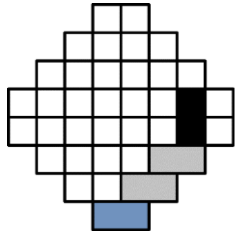
On peut dresser le graphe suivant les évolutions des 3 suites pa_n, pb_n et p_n :



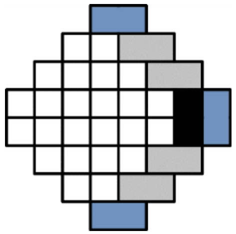
Tout l'intérêt de paver cette figure réside en ses indentations. En effet, les escaliers peuvent répercuter un type de domino de la manière suivante :

Dans chaque figure, si le domino noir est présent il impose que les gris soient présents aussi. De cette manière, il existe beaucoup de dominos qui impliquent que les deux cases du bas soient occupées par un domino horizontal. Et tout cela est évidemment également valable pour les deux cases à gauche, en haut et à droite. Ici, pour un diamant d'ordre 4, il existe 19 diamants qui impliquent que les deux cases du bas soient occupées par un domino horizontal.





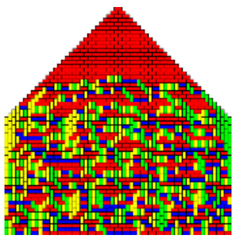
De plus lorsque le domino noir de la seconde figure est fixé, il impose que 3 coins soient fixés :

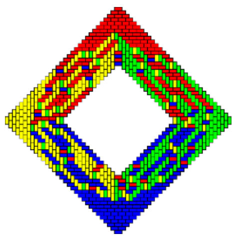


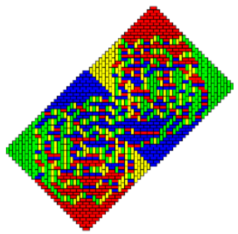
Le phénomène du cercle arctique est propre au diamant aztèque, un pavage typique du carré ne contient pas de zone gelée. En effet, ce phénomène est induit totalement par les indentations. D'autres figures pavées de la même manière présentent également des phénomènes macroscopiques aussi dû à l'indentation.

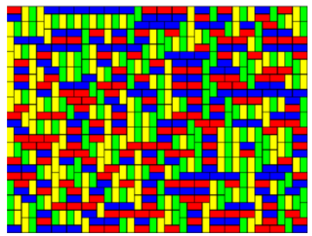
Le phénomène du cercle arctique dans le pavage aléatoire du diamant aztèque présente un intérêt très particulier : dans ce modèle, les effets de bords se propagent à une grande distance de la frontière du domaine et sont donc visibles à l'échelle macroscopique.

Nous pouvons paver n'importe quelle figure tant que les règles sont cohérentes pour les itérations. Le diamant aztèque est intéressant car c'est surement la figure la plus simple faisant apparaître ces phénomènes. On peut notamment paver les figures suivantes :









Références

Sources

A course in enumeration , Martin Aigner

CNRS : Pavage aléatoire par touillage de dominos, Elise Janvresse & Thierry de la Rue

Discover Aztec Diamond, Antoine Doeraene

Random Matrices & Determinantal Processes, Kurt Johansson

A simple proof of the Aztec Diamond Theorem, Sen-Peng Eu & Tung-Shan Fu

LaBRI, Frédéric Bosio & Marc Van Leeuwen

Math France, Le groupe symétrique, Jean-Louis Rouget

LMRS, Le phénomène du cercle arctique

Pavage diamant, Pierre Audibert

Youtube :
- Le diamant aztèque, Sylvie Corteel
- Le théorème du cercle arctique, Victor Kleptsyn

Logiciels

Microsoft Office

Python, interface Spyder avec Anaconda

Paint