

SORBONNE UNIVERSITÉ

RAPPORT DE STAGE EN LABORATOIRE

Modélisation de la génération laser d'ultrasons dans une plaque viscoélastique

Etudiants :
Antonin Maillard - 280709867
Camille Gianforcaro - 28712526

Tuteur :
M. Tony Valier-Brasier

8 janvier 2023

Sommaire

1	Modélisation Mathématique de la génération laser d’ultrasons dans un demi-espace solide isotrope	2
1.1	Expressions préliminaires	2
1.2	Résolution mathématique du problème	2
1.3	Adaptation de la solution au problème réel	6
2	Vérification du modèle	7
3	Étude du modèle de Kelvin-Voigt	8
3.1	Étude de l’atténuation des ondes	9
3.2	Étude de la vitesse des ondes	9
4	Conclusion	12
5	Compétences	12

Résumé

L'objectif de notre stage était de modéliser numériquement la génération laser d'ultrasons dans une plaque viscoélastique. Pour ce faire, nous avons dans un premier temps étudié les modèles mathématiques régissant le comportement des ondes longitudinales et de Rayleigh dans un demi-espace solide isotrope. Cela nous a permis d'établir les équations principales que nous appliqueront numériquement et sur lesquelles nous nous baserons afin de modéliser les variations comportementales des ondes lorsque la viscosité entre en jeu.

Dans un second temps nous avons vérifié le modèle mathématique codé en Python en comparant les résultats obtenus expérimentalement avec les valeurs théoriques connues. Après la validation de ce modèle nous avons pu nous pencher sur le cœur de notre sujet de stage. En effet, nous nous sommes intéressé au premier modèle mathématique modélisant simplement mais de manière fidèle à la réalité le comportement des ondes dans un matériau viscoélastique. Ce modèle est celui de Kelvin-Voigt où le premier coefficient de Lamé et le module de cisaillement prennent la forme suivante : $C(\omega) = C_0 - (i\omega\eta)$.

A l'aide de ce modèle nous avons pu mesurer différents comportements des ondes longitudinales et de Rayleigh en fonction de variations de la viscosité η . En effet, en étudiant les variations de vitesse des deux ondes en fonction de η et le taux d'atténuation nous avons pu déterminer quels sont les coefficients intervenant majoritairement dans la modification du comportement des ondes générées par un laser d'ultrasons au contact d'une plaque viscoélastique.

Cependant, il est nécessaire de garder en tête que le modèle de Kelvin-Voigt est simple et peut s'avérer limité dans certaines situations impactant le matériau. Malgré la prédominance du module de cisaillement dans la modification du comportement il peut exister d'autres facteurs importants.

Abstract

The goal of our internship was to numerically model the laser generation of ultrasound in a viscoelastic plate. In order to do this, we first studied the mathematical models governing the behavior of longitudinal and Rayleigh waves in an isotropic solid half-space. This allowed us to establish the main equations that we will apply numerically and on which we will base ourselves in order to model the behavioral variations of the waves when the viscosity comes into play.

In a second time we verified the mathematical model coded in Python by comparing the results obtained experimentally with the known theoretical values. After the validation of this model, we could focus on the heart of our internship subject. Indeed, we were interested in the first mathematical model that simply models the behavior of waves in a viscoelastic material. This model is the Kelvin-Voigt model where the first Lamé coefficient and the shear modulus take the following form:
 $C(\omega) = C_0 - (i\omega\eta)$.

Using this model we were able to measure different behaviors of the longitudinal and Rayleigh waves according to variations of the viscosity η . Indeed, by studying the velocity variations of the two waves as a function of η and the attenuation rate we were able to determine which are the coefficients intervening mainly in the modification of the behavior of the waves generated by a laser of ultrasounds in contact with a viscoelastic plate.

However, it is necessary to keep in mind that the Kelvin-Voigt model is simple and may be limited in some situations impacting the material. Despite the predominance of the shear modulus in the modification of the behavior there may be other important factors.

Introduction

Lors de ce stage nous allons modéliser le comportement des ondes au sein d'un matériau viscoélastique. Il est important de définir ce que représente une onde : c'est la propagation d'une perturbation dans un milieu produisant sur son passage une variation réversible des propriétés du matériau. On comprend alors que ces ondes sont dépendantes des propriétés du matériau dans lequel elles se propagent. L'exemple le plus connu est sans doute celui des ondes sonores. En effet, on connaît la vitesse de propagation du son dans l'air qui est d'environ $344m/s$. Mais on sait aussi que cette même onde atteint une vitesse de propagation bien plus élevée de $1500m/s$ dans l'eau.

Ici, il est assez simple de comprendre la propagation de l'onde sonore dans un fluide tel que l'air mais il peut paraître moins intuitif de comprendre qu'il existe un très grand nombre d'ondes différentes qui se propagent dans les solides tels que les murs d'une maison. Nous sommes en mesure de modéliser et étudier les comportements de celles-ci dans les solides isotropes dont les propriétés ne changent pas ou très lentement. Cependant, cela devient plus compliqué et requiert plusieurs modèles différents lorsque l'on veut modéliser et étudier la propagation de ces mêmes ondes dans des matériaux dont les propriétés varient dans le temps à plusieurs échelles de temps. Ces matériaux sont appelés viscoélastiques et sont ceux-là sur lesquels nous allons nous pencher au cours de ce stage.

Remerciements

Nous aimerions remercier notre tuteur durant ce stage M. Tony Valier-Brasier, qui nous a fait découvrir et qui nous a expliqué ce sujet complexe mais enrichissant. Nous lui sommes aussi reconnaissant pour sa patience et d'avoir pris de son temps pour répondre à nos questions.

1 Modélisation Mathématique de la génération laser d'ultrasons dans un demi-espace solide isotrope

On s'intéresse à la génération laser d'ondes élastiques dans un demi-espace isotrope caractérisé par la masse volumique ρ et les coefficients de Lamé λ et μ . La source laser est une ligne orientée selon l'axe (O, \underline{e}_y) permettant, d'une part, de supposer une invariance du problème selon la coordonnée y et, d'autre part, que la composante u_y du déplacement soit nulle. Cette ligne source, appliquée au point O , crée une force tangentielle orientée dans la direction \underline{e}_x avec une amplitude $F(t)$.

Pour modéliser la génération laser d'ultrasons dans un demi-espace solide isotrope nous nous appuyons sur deux équations.

1.1 Expressions préliminaires

La première est l'équation de d'Alembert¹, que nous écriront de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi_L - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\phi_T - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec ϕ_L et ϕ_T les potentiels.

L'autre équation que nous allons utiliser pour cette modélisation est la décomposition de Helmholtz² :

$$\underline{u} = \underline{grad}(\phi_L) + \underline{rot}(\phi_T \underline{e}_y) \quad (2)$$

On utilisera aussi la double transformée de Fourier (dans le temps et dans l'espace) :

$$\tilde{f}(k_x, z, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, z, t) e^{-i(\omega t - k_x x)} dx dt \quad (3)$$

et son inverse :

$$f(x, z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x \quad (4)$$

1.2 Résolution mathématique du problème

On commence par chercher les équations de propagation dont sont solutions les potentiels ϕ_L et ϕ_T dans le domaine de Fourier.

On définit alors $\tilde{\phi}_M$ un potentiel solution de l'équation de d'Alembert et sa transformée de Fourier $\tilde{\phi}_M$. On a donc :

$$\phi_M = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_M(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x \quad (5)$$

¹Onde élastique dans les solides 1, Daniel Royer et Tony Valier-Brasier

²Onde élastique dans les solides 1, Daniel Royer et Tony Valier-Brasier

On remplace alors ϕ_M dans l'équation (1) :

$$\Delta\phi_M - \frac{1}{c_M^2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

$$\implies \frac{\partial^2 \phi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_M}{\partial z^2} - \frac{1}{c_M^2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

On déduit des équations (5) et (6) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_M(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_M(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x \right. \\ \left. - \frac{1}{c_M^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_M(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x \right] = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Les dérivées étant par rapport à x , z et t , elles sont commutatives par rapport aux intégrales qui elle sont par rapport à ω et k_x , on peut donc écrire :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\tilde{\phi}_M e^{i(\omega t - k_x x)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\tilde{\phi}_M e^{i(\omega t - k_x x)} \right) - \frac{1}{c_M^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\tilde{\phi}_M e^{i(\omega t - k_x x)} \right) \right] d\omega dk_x = 0 \quad (9)$$

Or $\tilde{\phi}_M$ ne dépend ni de x ni de t . On a alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\tilde{\phi}_M e^{i(\omega t - k_x x)} \right) = \tilde{\phi}_M (-ik_x)^2 e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (10)$$

$$= -\tilde{\phi}_M k_x^2 e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (11)$$

et :

$$-\frac{1}{c_M^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\tilde{\phi}_M e^{i(\omega t - k_x x)} \right) = -\frac{1}{c_M^2} \tilde{\phi}_M (i\omega)^2 e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (12)$$

$$= \tilde{\phi}_M \frac{\omega^2}{c_M^2} e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (13)$$

On obtient donc :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\tilde{\phi}_M \right) + \left(\frac{\omega^2}{c_M^2} - k_x^2 \right) \tilde{\phi}_M \right] e^{i(\omega t - k_x x)} d\omega dk_x = 0 \quad (14)$$

On peut alors simplifier l'équation et grâce à la relation $k_M = \frac{\omega}{c_M}$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_M}{\partial z^2} + (k_M^2 - k_x^2) \tilde{\phi}_M = 0 \quad (15)$$

on à alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial z^2} + (k_L^2 - k_x^2) \tilde{\phi}_L = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial z^2} + (k_T^2 - k_x^2) \tilde{\phi}_T = 0 \end{cases} \quad (16)$$

et avec :

$$\begin{cases} k_{Lz}^2 = k_L^2 - k_x^2 \\ k_{Tz}^2 = k_T^2 - k_x^2 \end{cases} \quad (17)$$

On obtient finalement les équations de de propagation dont sont solutions les potentiels ϕ_L et ϕ_T dans le domaine de Fourier :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial z^2} + k_{Lz}^2 \tilde{\phi}_L = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial z^2} + k_{Tz}^2 \tilde{\phi}_T = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Nous avons donc obtenu deux équations différentielles ordinaires d'ordre 2 que nous résolvons. L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + k_{Mz}^2 = 0 \quad (19)$$

et son discriminant :

$$\Delta = -4k_{Mz}^2 = (2ik_{Mz})^2 \quad (20)$$

on a donc :

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{2ik_{Mz}}{2} = \pm ik_{Mz} \quad (21)$$

et donc :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_L = \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} + \hat{\psi}_L e^{ik_{Lz}z} \\ \tilde{\phi}_T = \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} + \hat{\psi}_T e^{ik_{Tz}z} \end{cases} \quad (22)$$

Avec $\hat{\phi}_L$ et $\hat{\phi}_T$ des constantes. Le milieu étant semi-infini, les solutions $e^{ik_{Lz}z}$ ne sont pas retenues car elles correspondent à des ondes régressives. On impose donc $\hat{\psi}_L = 0$ et $\hat{\psi}_T = 0$.

On cherche ensuite à calculer les contraintes $\tilde{\sigma}_{xz}$ et $\tilde{\sigma}_{zz}$ en $z = 0$ et dans le domaine de Fourier grâce à la relation suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{zz} = \lambda 2 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad (23)$$

En passant dans le domaine de Fourier on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial z^2} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz} = \lambda 2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad (24)$$

Or une dérivée par rapport à x dans le domaine réel devient un produit par $-ik_x$ dans le domaine de Fourier :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = -\mu \left(2ik_x \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial z} + k_x^2 \tilde{\phi}_T + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_T}{\partial z^2} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz} = -\lambda k_x^2 \tilde{\phi}_L + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_L}{\partial z^2} - 2i\mu k_x \frac{\partial \tilde{\phi}_T}{\partial z} \end{cases} \quad (25)$$

On remplace ensuite $\tilde{\phi}_L$ et $\tilde{\phi}_T$ par les expressions (22) :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = -\mu \left(2ik_x \frac{\partial \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z}}{\partial z} + k_x^2 \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z}}{\partial z^2} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz} = -\lambda k_x^2 \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z}}{\partial z^2} - 2i\mu k_x \frac{\partial \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z}}{\partial z} \end{cases} \quad (26)$$

Or :

$$\frac{\partial \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z}}{\partial z} = -\hat{\phi}_L ik_{Lz} e^{-ik_{Lz}z} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z}}{\partial z} = -\hat{\phi}_T ik_{Tz} e^{-ik_{Tz}z} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z}}{\partial z^2} = -\hat{\phi}_T k_{Tz}^2 e^{-ik_{Tz}z} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z}}{\partial z^2} = -\hat{\phi}_L k_{Lz}^2 e^{-ik_{Lz}z} \quad (30)$$

donc :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = -\mu \left(-2ik_x \hat{\phi}_L ik_{Lz} e^{-ik_{Lz}z} + k_x^2 \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} - \hat{\phi}_T k_{Tz}^2 e^{-ik_{Tz}z} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz} = -\lambda k_x^2 \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} - (\lambda + 2\mu) \hat{\phi}_L k_{Lz}^2 e^{-ik_{Lz}z} + 2i\mu k_x \hat{\phi}_T ik_{Tz} e^{-ik_{Tz}z} \end{cases} \quad (31)$$

et quand on se place en $z = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = -\mu \left(2k_x k_{Lz} \hat{\phi}_L + k_x^2 \hat{\phi}_T - k_{Tz}^2 \hat{\phi}_T \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz} = -[\lambda k_x^2 + (\lambda + 2\mu) k_{Lz}^2] \hat{\phi}_L - 2\mu k_x k_{Tz} \hat{\phi}_T \end{cases} \quad (32)$$

On sait que le laser appliqué en 0 crée une force tangentielle orientée dans la direction e_x avec une amplitude $F(t)$. On a alors $\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{F}$. On sait aussi qu'il y a une invariance du problème en coordonnées y et que la composante u_y du déplacement est nulle donc : $\sigma_{zz} = 0$ On à finalement :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz} = -\mu \left(2k_x k_{Lz} \hat{\phi}_L + k_x^2 \hat{\phi}_T - k_{Tz}^2 \hat{\phi}_T \right) = \tilde{F} \\ \tilde{\sigma}_{zz} = -[\lambda k_x^2 + (\lambda + 2\mu) k_{Lz}^2] \hat{\phi}_L - 2\mu k_x k_{Tz} \hat{\phi}_T = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\mu k_x k_{Lz} \hat{\phi}_L + \mu(k_x^2 - k_{Tz}^2) \hat{\phi}_T = -\tilde{F} \quad (A) \\ \hat{\phi}_T = -\frac{(\lambda + 2\mu) k_{Lz}^2 + \lambda k_x^2}{2\mu k_x k_{Tz}} \hat{\phi}_L \quad (B) \end{cases} \quad (34)$$

On remplace les $\hat{\phi}_T$ de (A) par l'équation (B)

$$\begin{cases} \hat{\phi}_L \left[2\mu k_x k_{Lz} - \mu(k_x^2 - k_{Tz}^2) \frac{(\lambda + 2\mu)k_{Lz}^2 + \lambda k_x^2}{2\mu k_x k_{Tz}} \hat{\phi}_L \right] = -\tilde{F} \\ \hat{\phi}_T = -\frac{(\lambda + 2\mu)k_{Lz}^2 + \lambda k_x^2}{2\mu k_x k_{Tz}} \hat{\phi}_L \end{cases} \quad (35)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\phi}_L = \frac{-2\mu k_x k_{Tz} \tilde{F}}{4\mu k_x^2 k_{Tz} k_{Lz} - (k_x^2 - k_{Tz}^2) [(\lambda + 2\mu)k_{Lz}^2 + \lambda k_x^2]} \\ \hat{\phi}_T = -\frac{(\lambda + 2\mu)k_{Lz}^2 + \lambda k_x^2}{2\mu k_x k_{Tz}} \hat{\phi}_L \end{cases} \quad (36)$$

1.3 Adaptation de la solution au problème réel

Dans le domaine temporel les composantes du déplacement s'écrivent :

$$\underline{u} = \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \underline{u}_x + \frac{\partial \phi_L}{\partial y} \underline{u}_y + \frac{\partial \phi_L}{\partial z} \underline{u}_z + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Or le problème étant plan la composante \underline{e}_y est nulle donc :

$$\underline{u} = \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \underline{u}_x + \frac{\partial \phi_L}{\partial z} \underline{u}_z - \frac{\partial \phi_T}{\partial x} \underline{u}_x + \frac{\partial \phi_T}{\partial z} \underline{u}_z \quad (38)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi_L}{\partial x} - \frac{\partial \phi_T}{\partial z} \\ u_z = \frac{\partial \phi_L}{\partial z} + \frac{\partial \phi_T}{\partial x} \end{cases} \quad (39)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_x = \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\phi}_T}{\partial z} \\ \tilde{u}_z = \frac{\partial \tilde{\phi}_L}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\phi}_T}{\partial x} \end{cases} \quad (40)$$

Grâce aux équations (22) on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} \\ \tilde{u}_z = \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} \end{cases} \quad (41)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_x = -ik_x \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} + ik_{Tz} \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} \\ \tilde{u}_z = -ik_{Lz} \hat{\phi}_L e^{-ik_{Lz}z} - ik_x \hat{\phi}_T e^{-ik_{Tz}z} \end{cases} \quad (42)$$

Il suffit ensuite de faire la double transformée de Fourier inverse (une opération faite par un programme) pour obtenir les valeurs de déplacement de l'onde à l'instant t et donc avoir la modélisation de la génération laser d'ultrasons dans un demi-espace solide isotrope.

2 Vérification du modèle

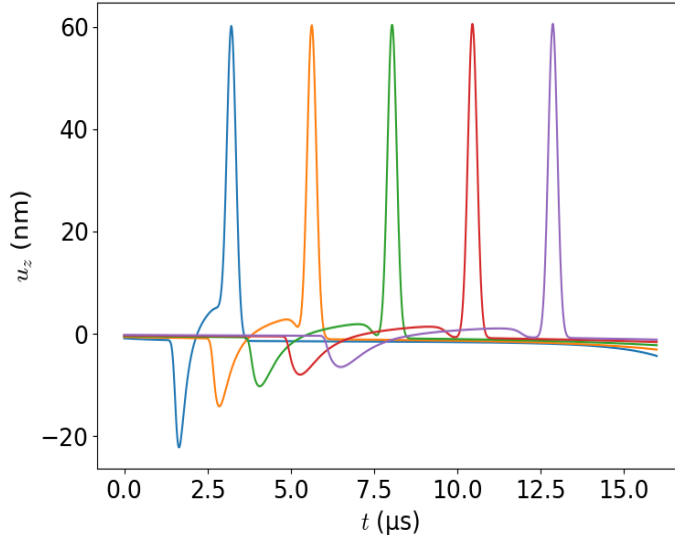


Figure 1: Déplacement de l'onde (u_z) dans le milieu en fonction du temps pour un matériau solide isotrope

Les différentes courbes que nous observons sur ce graphique correspondent à différentes positions sur le solide où l'on étudie l'onde qui se propage grâce à un capteur. Par exemple, le premier capteur capte à 10mm de l'épicentre où le laser rentre en contact avec le solide.

Une méthode simple pour vérifier notre modélisation de la génération laser d'ultrasons dans un demi-espace solide isotrope est de comparer les vitesses des ondes de Rayleigh et des ondes longitudinales.

La valeur théorique de la vitesse de l'onde longitudinale V_L s'obtient simplement grâce à la formule suivante³ :

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (43)$$

Avec λ et μ les coefficients de Lamé du matériau et ρ sa masse volumique. La vitesse théorique de l'onde de Rayleigh V_R est donnée par :

$$V_R \approx \frac{0,718 - \kappa^2}{0,75 - \kappa^2} V_T \quad (44)$$

avec $\kappa = \frac{V_T}{V_L}$ et $V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Nous avons donc rajouté à notre programme un calcul des vitesses théoriques grâce aux formules détaillées si-dessus et un calcul des vitesses expérimentales qui s'appuie sur la formule de base de la vitesse ($v = \text{distance}/\text{temps}$). Pour ce faire, il suffit de

³Onde élastique dans les solides 1, Daniel Royer et Tony Valier-Brasier

mesurer le temps que met le maximum ou le minimum de l'onde pour passer du premier capteur au dernier. Enfin, nous comparons ces deux vitesses :

	Onde longitudinale	Onde de Rayleigh
Vitesse théorique (m/s)	6610.878	3118.177
Vitesse expérimentale (m/s)	5859.375	3099.174
Pourcentage d'erreur	11.368%	0.609%

L'erreur de la vitesse de l'onde de Rayleigh est inférieure à 2% et celle de la vitesse longitudinale à 20% ce qui est parfaitement acceptable pour notre modélisation.

3 Étude du modèle de Kelvin-Voigt

Afin d'introduire la viscoélasticité à notre modèle, c'est à dire la variation des coefficients de lamé en fonction du temps, nous utilisons le modèle de Kelvin-Voigt ⁴suivant :

$$C(\omega) = C_0 - (i\omega\eta) \quad (45)$$

Où C correspond aux coefficients de Lamé pour un matériau viscoélastique isotrope (C_λ et C_μ). Ainsi, C_0 est le coefficient à l'instant $t = 0$ (λ ou μ), ω la pulsation de l'onde dans le domaine complexe et η le coefficient de viscoélasticité qui peut être différent pour chacun des coefficients de Lamé. Cette modélisation correspond d'un point de vue phénoménologique à un ressort de raideur C_0 mis en parallèle à un amortisseur de coefficient d'amortissement η . Cette modélisation est valable pour des valeurs de $\omega\eta$ petites devant C_0 , c'est dire pour les fréquences entre la dizaine de kHz et la dizaine de MHz pour les matériaux métalliques et les alliages et inférieure au Mhz pour les matériaux moins rigides, tels que les plastiques ou certains polymères. En rajoutant la formule de Kelvin-Voigt à notre programme on obtient ce graphique :

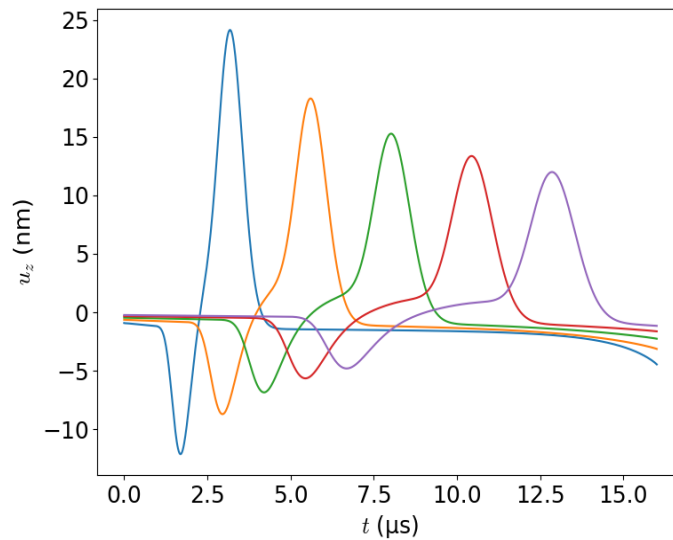


Figure 2: Déplacement de l'onde (U_z) dans le milieu en fonction du temps pour un matériau viscoélastique isotrope (ici $\eta = 1$ pour C_λ et C_μ)

⁴Onde élastique dans les solides 1, Daniel Royer et Tony Valier-Brasier

3.1 Étude de l'atténuation des ondes

On remarque que la viscoélasticité a créé une atténuation de l'amplitude des ondes que l'on peut calculer grâce à la formule :

$$\frac{u_2}{u_1} = e^{-\alpha(x_2-x_1)} \quad (46)$$

où on note u_1 et u_2 les maxima de deux ondes de Rayleigh mesurés aux points x_1 et x_2 et α l'atténuation. Pour 5 capteurs, on mesure entre le premier maxima et le deuxième maxima de l'onde de Rayleigh une atténuation de 0.046% et entre le premier et le dernier maxima 0.029% d'atténuation. Pour l'onde longitudinale l'atténuation entre le premier et le deuxième maxima est de 0.056% et entre le premier et le dernier de 0.039%

3.2 Étude de la vitesse des ondes

Nous avons ensuite cherché à observer la variation de la vitesse des ondes au cours du temps. Les coefficients de Lamé pour un matériau viscoélastique étant fonction du temps (ω), cela revient à étudier la variation de la vitesse en fonction de leur variation. Pour ce faire nous avons mesuré la vitesse des ondes entre le maxima enregistré par le premier capteur et celui enregistré par tous les autres capteurs. Par exemple on mesure la vitesse de l'onde longitudinale entre l'abscisse du maxima du premier capteur et celui du second capteur puis entre le premier capteur et le troisième et ainsi de suite, ce qui augmente à chaque fois la distance entre les deux capteurs, cette distance sera notre abscisse. Pour améliorer la compréhension et la précision du graphique nous avons ici 100 capteurs :

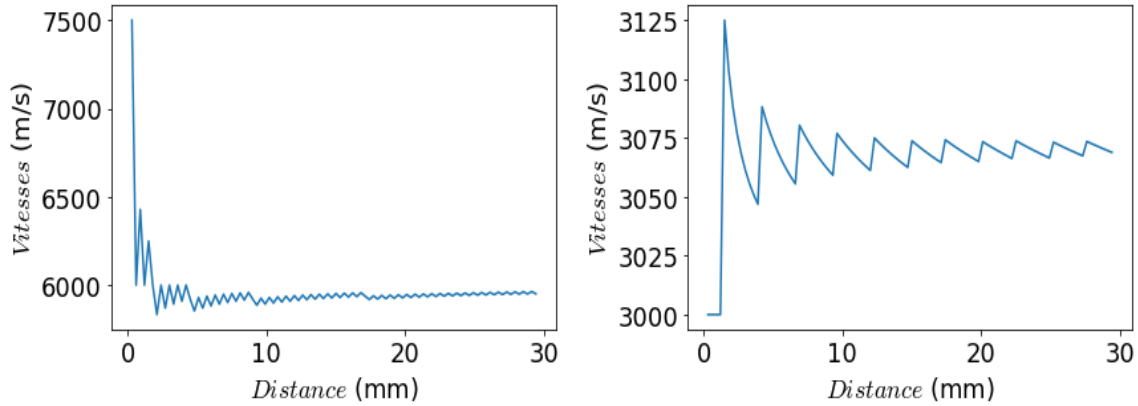


Figure 3: (à gauche) Vitesse longitudinale - (à droite) Vitesse de Rayleigh en fonction du delta de position entre les capteurs (ici $\eta = 1$ pour C_λ et C_μ)

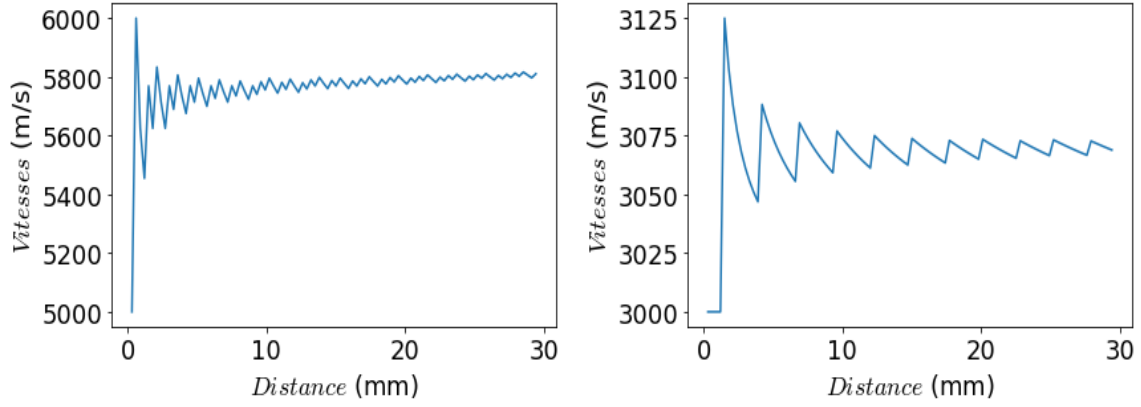


Figure 4: (à gauche) Vitesse longitudinale - (à droite) Vitesse de Rayleigh en fonction du delta de position entre les capteurs (ici $\eta = 10$ pour C_λ et $\eta = 1$ C_μ)

On peut conclure de ces graphiques que la vitesse des ondes reste constante au cours du temps bien que les coefficients de Lamé changent. Des imprécisions de l'ordre de 3% au début des courbes surviennent mais peuvent être négligées. Cette conclusion nous permet de simplifier ensuite nos mesures puisque nous n'en n'avons plus qu'une seule à faire. De préférence entre les maxima enregistrés par le premier et le dernier capteur qui donnent une meilleure précision.

Nous étudions maintenant le comportement de la vitesse des ondes longitudinales et de Rayleigh en fonction des variations des coefficients de viscosité. Nous ferons varier différemment les coefficients afin d'étudier trois types de comportements différents de matériaux. Tout d'abord, nous étudierons les variations de vitesses des ondes de Rayleigh et longitudinale lorsque les coefficients de viscosité varient en même temps et de même amplitude. Ensuite nous ferons varier seulement le coefficient qui entre dans la formule du coefficient de Lamé λ puis seulement celui qui entre dans celle du coefficient de Lamé μ .

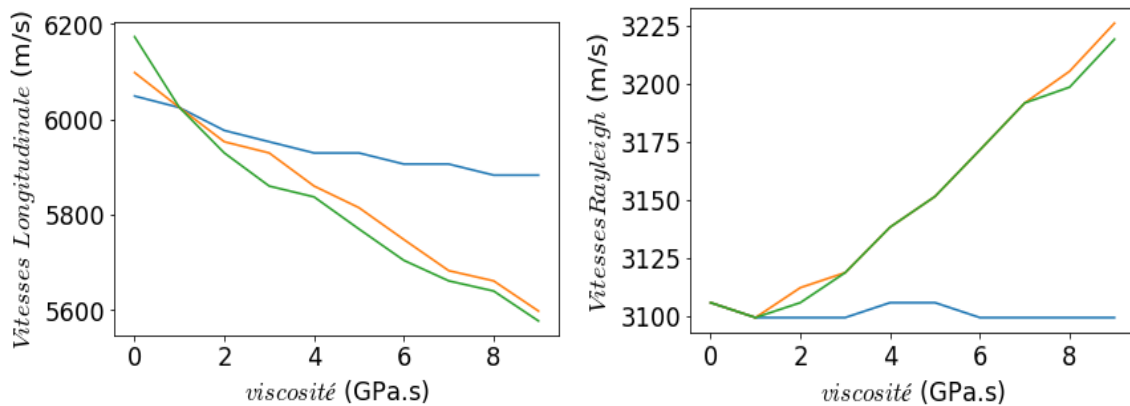


Figure 5: (à gauche) Vitesse longitudinale - (à droite) Vitesse de Rayleigh en fonction des valeurs des coefficients de viscosité

- En bleu : seulement le coefficient de viscosité dans λ varie;
- En orange : seulement le coefficient de viscosité dans μ varie;

- En vert : les deux coefficients de viscosité varient en même temps de même amplitude.

A l'aide de ces courbes on peut remarquer que le module de cisaillement μ est celui qui fait le plus varier la vitesse des ondes longitudinales et de Rayleigh. Aussi, la vitesse de cette dernière n'est que très faiblement impactée par les variations du premier coefficient de Lamé λ . De manière général on peut observer que l'augmentation des coefficients de viscosité ralentit l'onde longitudinale et accélère l'onde de Rayleigh.

4 Conclusion

En appliquant le modèle mathématique de la génération laser d’ultrasons dans un demi-espace solide isotrope et en y ajoutant la modélisation de la viscoélasticité de Kelvin-Voigt nous avons réussi à créer une modélisation de la génération laser d’ultrasons dans une plaque viscoélastique. Nous avons ainsi pu observer l’impact de la viscoélasticité sur l’onde. En effet, en plus de créer une atténuation de l’onde elle impact directement la vitesse de propagation de l’onde. Ce comportement est modifié majoritairement par le module de cisaillement μ .

Pour approfondir notre stage nous pourrions utiliser une autre modélisation de la viscosité plus complexe qui est celle de Maxwell :

$$C(\omega) = C_1(\omega) - iC_2(\omega) \text{ avec } \begin{cases} C_1(\omega) = C_0 + C_\infty \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \\ C_2(\omega) = C_\infty \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \end{cases} \quad (47)$$

où C_∞ est un module d’élasticité indépendant de la fréquence et τ un temps de relaxation. D’un point de vue phénoménologique ce modèle correspond à un ressort mis en série avec un amortisseur. Celui-ci aurait pu être intéressant à intégrer et à comparer.

5 Compétences

Ce stage nous a permis d’approfondir notre compréhension de la propagation des ondes dans les solides et notamment de nous introduire à la notion de viscoélasticité. Il nous a aussi permis de développer notre connaissance de Python (et par extension de numpy) et de certains outils mathématiques comme la double transformée de Fourier et son inverse. Aussi, nous avons dû faire preuve d’adaptabilité ainsi que d’autonomie car ce stage était théoriquement exigeant et requiert des compétences pratiques que nous avons développées tout au long du stage. Nous avons aussi dû faire preuve de polyvalence et de résilience face aux nombreuses problématiques et nombreux obstacles sur lesquels nous avons buté. L’adaptabilité, l’autonomie, la polyvalence et la résilience sont des compétences très valorisantes qui nous permettront d’aborder nos prochaines expériences professionnelles et universitaires sereinement et avec confiance.

Bibliographie

- [1] TD0 Master1 SPI.
- [2] Julien Higuët, Tony Valier-Brasier, Thomas Dehoux, and Bertrand Audoin. Beam distortion detection and deflectometry measurements of gigahertz surface acoustic waves. *Review of Scientific Instruments*, 82(11):114905, November 2011.
- [3] Mathieu PERTON. *Ultrasons rayonnés par une source laser ponctuelle dans des milieux isotropes transverses et application à la mesure du tenseur d'élasticité de cylindres et de couches minces*. Mécanique, UNIVERSITÉ BORDEAUX I.
- [4] Daniel Royer and Tony Valier-Brasier. *Ondes élastiques dans les solides*. Collection Ondes. ISTE éditions, London, 2021.