数值计算方法

第二章 计算函数零点的迭代法

内容

本章讨论非线性方程的求根问题

$$x=?$$

$$f(x) = 0$$

2.1 不动点迭代法及其收敛性

1. 不动点

设非线性方程 $f(x) = 0$ (2.1-1)

通过构造等价不动点规则： $x = \Phi(x)$ (2.1-2)

则有迭代格式：$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$，k = 0，1，2，…

若Φ连续，且迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛到x^*，则两边取极限得

$$x^* = \Phi(x^*),$$

即x^*满足(2.1-2)，称x^*为$\Phi(x)$的不动点。

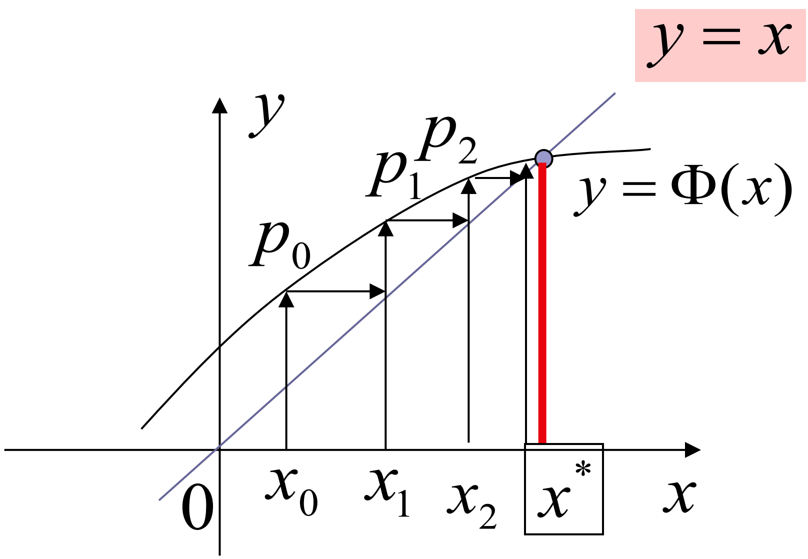
如果x^*还满足(2.1-1)，则x^*为f的零点。

注:

(1) 求零根：点f(x)=0的根⇔求不动点 $\begin{cases} y = x \\ y = \Phi(x) \end{cases}$ 的解

(2) $\Phi(.)$称为迭代函数，$\{x^{(k)}\}$称为迭代序列

(3) 不同方法构造迭代函数，得不同的迭代序列

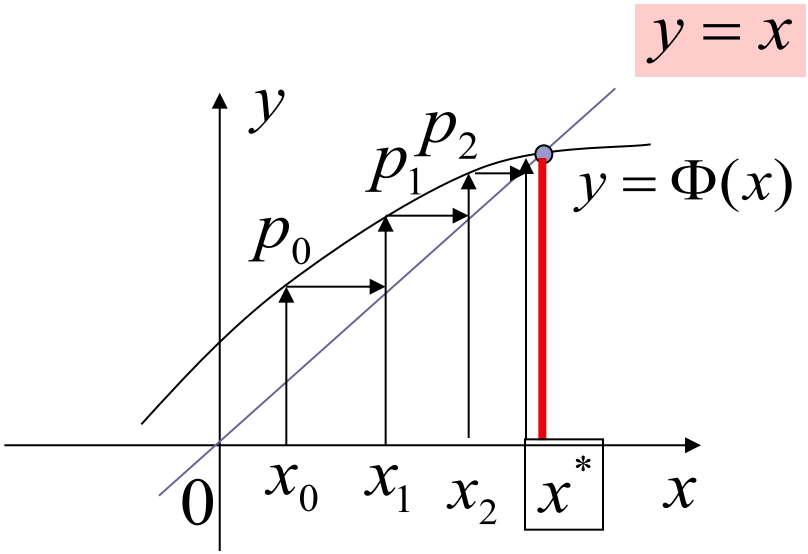


2．迭代法的基本问题

(1) 如何构造适当的迭代函数$\Phi(.)$使迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛

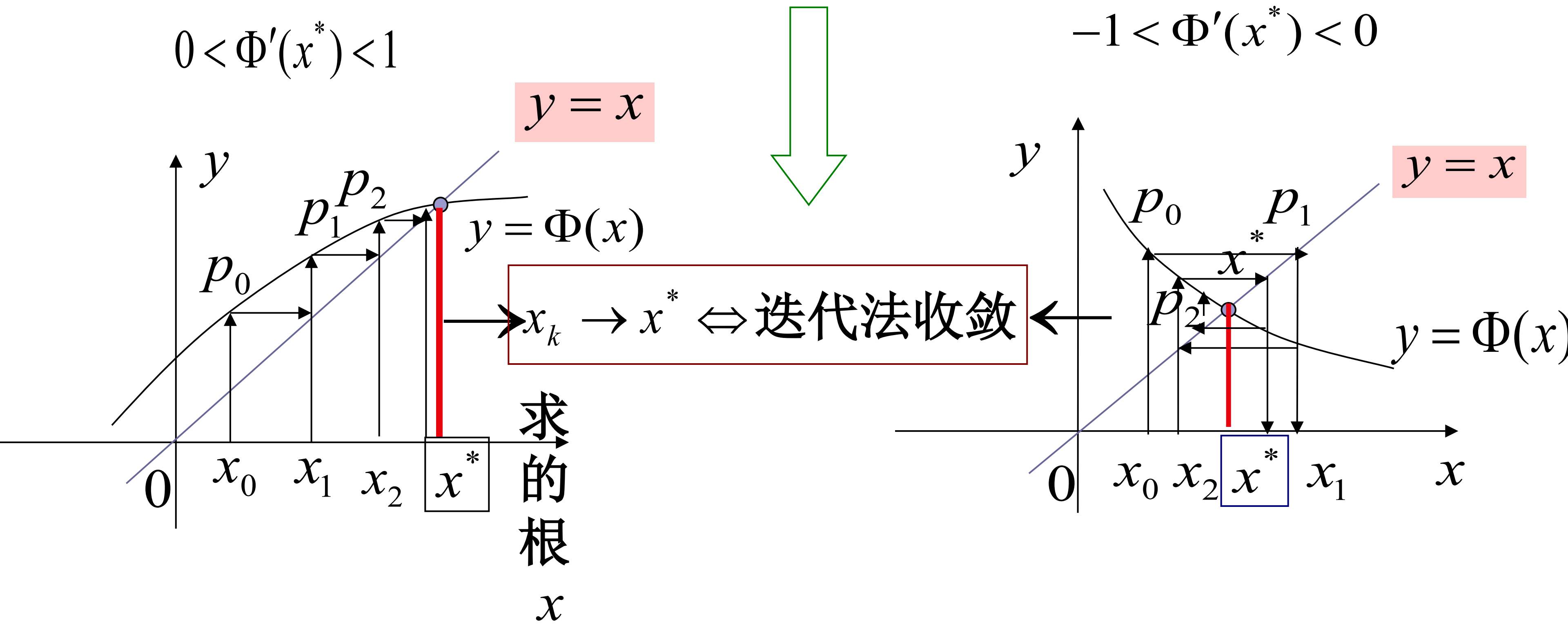
(2) 收敛的速度和误差

(3) 如何加速



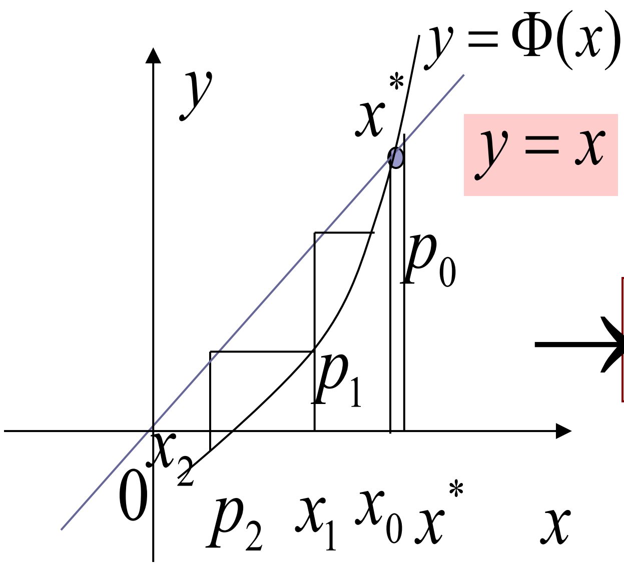
几何意义

从点 $p_0(x_0,g(x_0))$出发, 作平行于x轴 的直线交y=x于点$(\Phi(x_0),\Phi(x_0))$, 过该点作平行于y 轴的直线交 $y=\Phi(x)$于点$p_1(\Phi(x_0),\Phi(\Phi(x_0)))$,即$p_1(x_1,\Phi(x_1))$.依次进行下去得到$\{x_k\}$, 且 $x_{k+1}=\Phi(x_k)$.



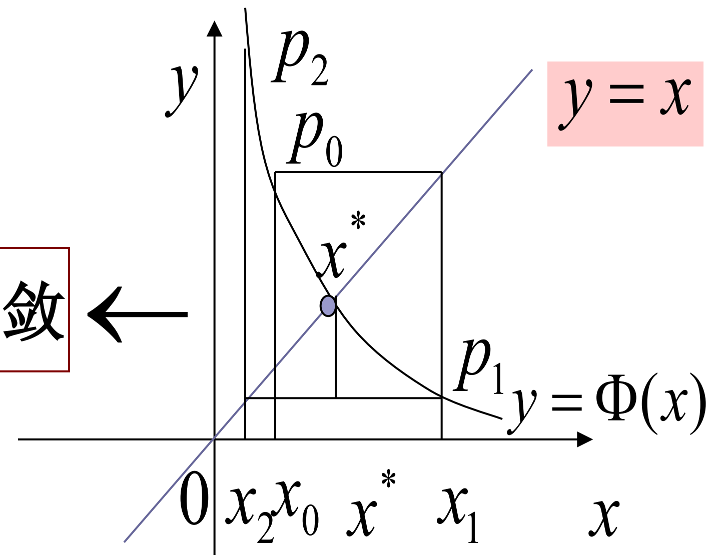
迭代法不收敛的情况

$\Phi'(x^*) > 1$



$\rightarrow$ 迭代法不收敛 $\leftarrow$

$\Phi'(x^*) < -1$



2.1.1 解一元方程的迭代法

1. 根的隔离

设一元方程$f(x) = 0$，f 连续，其实根可能有很多，需将各根隔离，即f在某区间$[a，b]$内有且仅有一根。

方法：设$f \in C[a，b]$，$f(a)f(b) < 0$，且f在$[a，b]$上单调，则f在$[a，b]$内有且仅有一根。

波尔查诺二分法

二分法定理： 设 $f \in C(a,b)$ 且存在着 $r \in [a,b]$ 满足 $f(r)=0$。如果 $f(a)$和$f(b)$ 的符号相反，且 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ 表示

$$a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le r \le \ldots \le b_n \le b_1 \le \ldots \le b_0$$

和 $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$或$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ 中的二分法生成的中点序列，则 $|r - C_n| \le \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ 其中 $n = 0,1,\cdots$

这样的序列 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛到零点 $x = r$即可表示为

$$\lim_{n->\infty} C_n = r$$

例：二分法（函数版）bisect.m

```
function [c,err,yc]=bisect(f,a,b,delta)
ya=feval(f,a); yb=feval(f,b);
if ya*yb>0
  reutrn;
end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log2;
for k=1:max1
   c=(a+b)/2; %中点
   yc=feval(f,c);
   if yc==0
      a=c; b=c;
   elseif yb*yc>0
       b=c; yb=yc;
  else
    a=c;ya=yc;
   end
   if b-a<delta
      break;
  end
   c=(a+b)/2;
   err=abs(b-a);
   yc=feval(f,c);
 end
```

```
a=0,b=2;
delta=1e-6;
f=@(x) x.*sin(x)-1;
[c,err,yc]=bisect(f,a,b,delta)
```

```
>>C=1.1142
err=9.5367e-007
yc=8.1923e-008
```

例：二分法（脚本文件版）

```
a=0,b=2, delta=1e-6;
ya=feval(@f,a)
yb=feval(@f,b)
if ya*yb>0
  break;
end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta)))/log(2);
for k=1:max1
  c=(a+b)/2;%中点
  yc=feval(@f,c);
  if yc==0
    a=c; b=c;
  elseif yb*yc>0
     b=c; yb=yc;
   else
   a=c;ya=yc;
  end
  if b-a<delta
    break;
   end
  c=(a+b)/2;
  err=abs(b-a);
  yc=feval(@f,c);
end
```

```
>>c=11142
err=1.9e-6
yc=7.4416e-007
```

```
function y=f(x)
y=x.*sin(x)-1;
```

2. 迭代序列的收敛性

因为可以有多种迭代函数，所产生的迭代序列$\{x^{(k)}\}$有可能：

(1) 收敛快

(2) 收敛慢

(3) 不收敛

例1 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$，求f在$x = 1.5$附近的根，初值取$x(0) = 1.5$。

%取 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$ —— 收敛

```
k=1, x0=1.5
x1=(1+x0)^(1/3)
  while abs(x1-x0)>0.00001
  k=k+1, x0=x1;
  x1=(1+x0)^(1/3)
end
```

k = 7

x1 =1.3247

%取$\varphi(x) = x^3 - 1$ —— 不收敛

```
k=1， x0=1.5
x1=x0^3-1
while abs(x1-x0)>0.00001 && k<5
   k=k+1， x0=x1;
   x1=x0^3-1
End
```

》k = 5

x1 = 3.2886e+029

定理2.1-1

(1) 设$\varphi(x) \in C[a, b]$，且对于任意$x \in [a, b]$有$\varphi(x) \in [a, b]$，则φ在$[a, b]$上必有不动点。

(2) 进一步，若$\varphi(x) \in C^1[a, b]$，且存在$L < 1$，使对于任意的$x \in [a, b]$有

$$|\varphi'(x)| \le L < 1 \tag{2.1-4}$$

则对于任意的$x^{(0)} \in [a, b]$，$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$收敛于唯一不动点$x^* \in [a, b]$。且有

$$\begin{aligned} \left|x^{(k)} - x^*\right| &\le \frac{L}{1-L}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \\ \left|x^{(k)} - x^*\right| &\le \frac{L^k}{1-L}\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| \end{aligned} \tag{2.1-5}$$

*证明：(1) 若$\varphi(a)=a$或$\varphi(b)=b$，则结论显然成立

现设$a<\varphi(a)$，$\varphi(b)<b$，令$\psi(x)=\varphi(x)-x$，则

$\psi(x)\in C[a，b]$，且

$\psi(a)=\varphi(a)-a>0$，$\psi(b)=\varphi(b)-b<0$，

由二分法可得存在$x^*\in[a，b]$，使$\psi(x^*)=0$，即

$\varphi(x^*)-x^*=0\Rightarrow\varphi(x^*)=x^*$

(2) 设$\varphi(x)\in C^1[a，b]$，且满足(2.1-4)，

若有$x_1{}^*$，$x_2{}^*\in[a，b]$，$x_1{}^*\neq x_2{}^*$，$\varphi(x_i{}^*)=x_i{}^*$ $i=1，2$

由均值定理，

$$|x_1{}^*-x_2{}^*|=|\varphi(x_1{}^*)-\varphi(x_2{}^*)|$$

$$=|\varphi'(\xi)|\,|x_1{}^*-x_2{}^*|\le L|x_1{}^*-x_2{}^*|<|x_1{}^*-x_2{}^*|$$

矛盾，所以不动点唯一。

*由

$$|x^{(k)} - x^*| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)| \le L|x^{(k-1)} - x^*|$$

$$\le \ldots \le L^k|x^{(0)} - x^*|$$

及$0 < L < 1$知

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - x^*| = 0$$

即$x^{(k)}$收敛于x^*。

并且由 $|x^{(k)} - x^*| \le L|x^{(k-1)} - x^*|$ 得

$$|x^{(k)} - x^*| \le L|x^{(k-1)} - x^{(k)} + x^{(k)} - x^*|$$

$$\le L|x^{(k-1)} - x^{(k)}| + L|x^{(k)} - x^*|$$

从而有

$$\left|x^{(k)} - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right|$$

*又因

$|x^{(k)}-x^{(k-1)}| = |\varphi(x^{(k-1)})-\varphi(x^{(k-2)})| \le L|x^{(k-1)}-x^{(k-2)}| \le \dots$

$\le L^{k-1}|x^{(1)}-x^{(0)}|$，代入上式的右边，即得

$$\left|x^{(k)}-x^{*}\right| \le \frac{L^{k}}{1-L}\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|$$

注：(1) 若L ≈ 1，则收敛很慢，须考虑加速问题

(2) (2.1-5)中第一式$\left|x^{(k)}-x^{*}\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right|$**为后验公式—迭代停止准则;**

第二式 $\left|x^{(k)}-x^{*}\right| \le \frac{L^{k}}{1-L}\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|$ **为先验公式—预测迭代次数;**

(3) 定理是以[*a*，*b*]中任一点作初值，迭代都收敛，称为全局收敛。

（此要求较难满足，故考虑在x^*的某一邻域内—局部收敛性）

定理2.1-2 设x^*为φ的不动点，φ'在x^*的某邻域内连续，

且$|\varphi'(x^*)|<1$，则存在$\delta>0$，只要$x^{(0)}\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，

就有迭代法$x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})$收敛。

证明：$\because|\varphi'(x^*)|<1$，及$\varphi'(x)$在邻域$U(x^*)$内连续，

$\therefore$存在$\delta>0$，使$[x^*-\delta, x^*+\delta]\subset U(x^*)$，

且$\forall x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$有$|\varphi'(x)|\le q<1$

$\Rightarrow \forall x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi)|\,|x-x^*|\le q|x-x^*|<\delta,$$

即$\varphi(x)\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，由定理2.1-1知，

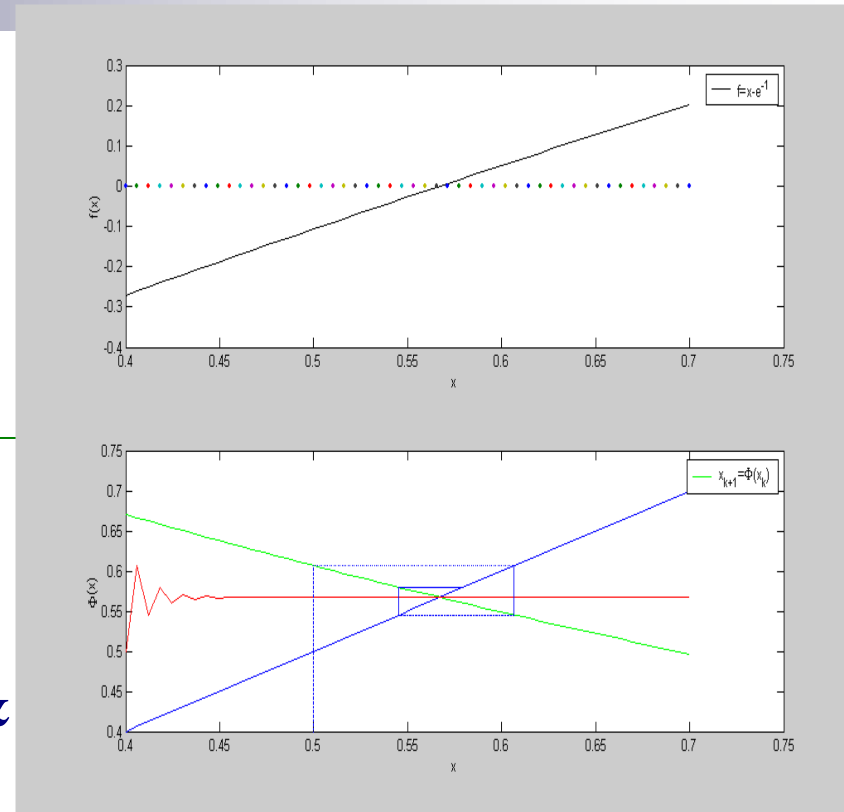
任意$x^{(0)}\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，迭代法$x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})$收敛。

注：只要$x^{(0)}$充分接近x^*，且$|\varphi'(x^{(0)})|$ 明显小于1，则$\{x^{(k)}\}$收敛于x^*。

例2 求方程$x = e^{-x}$在0.5附近的根。

由于$|\varphi'(0.5)| = e^{-0.5} \approx 0.61$明显小于1，故收敛

解：Matlab代码如下




```
k=1, x0=0.5
x1=exp(-x0)
while  abs(x1-x0)>1e-5  && k<25
    k=k+1, x0=x1;
    x1=exp(-x0)
end
```

》k = 18

x1 = 0.5671

预测迭代次数 $\left|x^{(k)} - x^*\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right|$

```
L=abs(-exp(-x0));% g'(x0)
K=floor(log(((1-L)*1e-5)/delta)/log(L))
>>K=20
```

3. 收敛阶

定义2.1-1 设$x^{(k)} \to x^*$，记$e_k = x^{(k)} - x^*$

若存在$p \geq 1$，及$c \neq 0$，使

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

则称$\{x^{(k)}\}$是p阶收敛的，或称收敛阶为p

（p越高收敛越快）

注：

(1) $p = 1$，$0 < c < 1$，称为线性收敛；

(2) $p > 1$，称超线性收敛

(3) $p = 2$，称二次收敛

因为$|x^{(k+1)}-x^*|=|\varphi(x^{(k)})-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi)|\,|x^{(k)}-x^*|$，

其中ξ在$x^{(k)}$和x^*之间。

则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=|\varphi'(x^*)|$$

所以若$\varphi'(x^*)\neq 0$，则为线性收敛

想得到更高阶的收敛性，须$\varphi'(x^*)=0$，通常可考虑泰勒展式。

定理2.1-3 设x^*为φ的不动点，正整数$p \geq 2$，若$\varphi^{(p)}$在x^*的某邻域内连续，且满足

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(x^*) = 0, & k = 1,2,\ldots,p-1 \\ \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

则$\{x^{(k)}\}$ p阶局部收敛。

证明：$\because \varphi'(x^*) = 0(<1)$，$\therefore x^{(k)}$局部收敛。

设$\varphi(x)$在x^*处展开为

$$\varphi(x^{(k)}) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x^{(k)} - x^*) + \frac{\varphi''(x^*)}{2!}(x^{(k)} - x^*)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x^{(k)} - x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x^{(k)} - x^*)^p$$

由(2.1-6)知，

$$x^{(k+1)} - x^* = \varphi(x^{(k)}) - \varphi(x^*) = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x^{(k)} - x^*)^p$$

所以

$$\frac{x^{(k+1)} - x^*}{(x^{(k)} - x^*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} \to \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0$$

即$\{x^{(k)}\}$ p阶局部收敛。

2.2 Newton迭代法及其变形

2.2.1 一元非线性方程

$$f(x) = 0$$

1. 牛顿迭代方法

线性化： 设$f(x)$在点$x^{(k)}$处可微，则展开式

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x^{(k)})^2$$

用线性部分近似表示

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

即考虑方程 $f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$

若$f'(x^{(k)}) \neq 0$，则有

$$x = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

令：

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}} \quad k = 0，1，2，\ldots \qquad (2.2\text{-}4)$$

称为Newton迭代公式，其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2.2\text{-}5)$$

2. 收敛性

(1) 若x^*是$f(x)$的单重根：

$$f(x^*)=0，f'(x^*)\neq 0$$

因为

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0$$

而

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

一般不为0，所以，Newton法是局部二阶收敛的 ——由定理2.1-3

例3 用Newton法求非线性方程$f(x) = xe^x - 1 = 0$在(0，1)内的根，取$x^{(0)} = 0.5$。

解：因为$f'(x) = (1 + x)e^x$，故其Newton迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} e^{x^{(k)}} - 1}{(1 + x^{(k)}) e^{x^{(k)}}}\text{，}k = 0\text{，}1\text{，}2\text{，}\ldots$$

从$x^{(0)} = 0.5$出发，计算结果:>>k=3, x1=0.5671。

```
k=0,x0=0.5
x1=x0-(x0*exp(x0)-1)/((1+x0)*exp(x0))%
while abs(x1-x0)>0.00001 & k<10
    k=k+1, x0=x1;
    x1=x0-(x0*exp(x0)-1)/((1+x0)*exp(x0))
end
```

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

(2) 若x^*是$f(x)$的重根，即有$f(x) = (x - x^*)^m g(x)$，

其中$g(x^*) \neq 0$，$m \geq 2$

因为$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x)$

记$x = x^* + h$，则

$$\varphi(x^* + h) = (x^* + h) - \frac{h^m g(x^* + h)}{mh^{m-1} g(x^* + h) + h^m g'(x^* + h)}$$

$$= \varphi(x^*) + h - \frac{hg(x^* + h)}{mg(x^* + h) + hg'(x^* + h)}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x^* + h) - \varphi(x^*)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 - \frac{g(x^* + h)}{mg(x^* + h) + hg'(x^* + h)}) = 1 - \frac{1}{m}$$

当$m \geq 2$时，$\varphi'(x^*) \neq 0$，且$|\varphi'(x^*)| < 1$，所以Newton迭代法一阶收敛。

(3) 若 (2)的改进中取

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

易知有φ '(x^*) =0所以，若事先知道x^*的重数，则可改迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad \textbf{(2.2-6)}$$

此时，迭代序列$\{x^{(k)}\}$是二阶收敛的。

或令

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

则x^*是u的单重零点，应用Newton法于$u(x)$，有

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{[f'(x^{(k)})]^2 - f(x^{(k)})f''(x^{(k)})} \qquad \textbf{(2.2-7)}$$

迭代序列也是二阶收敛的

例4 $\sqrt{2}$ **是方程$x^4-4x^2+4=0$的二重根**

(1) 采用Newton法

$$\varphi(x)=x-\frac{x^4-4x^2+4}{4x^3-8x}=x-\frac{(x^2-2)^2}{4x(x^2-2)}=x-\frac{x^2-2}{4x}$$

即

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{(x^{(k)})^2-2}{4x^{(k)}}$$

```
k=0,x0=1.5
x1=x0-(x0^2-2)/(4*x0)
while abs(x1-x0)>0.00001 & k<10
   k=k+1, x0=x1;
   x1=x0-(x0^2-2)/(4*x0)
end
```

注：>>k=10

>>x1=1.41425799103092

例2 $\sqrt{2}$ 是方程$x^4-4x^2+4=0$的二重根

(2) 采用(2.2-6)

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{(x^{(k)})^2-2}{2x^{(k)}}$$

```
k=0,x0=1.5
x1=x0-(x0^2-2)/(2*x0)
while abs(x1-x0)>0.00001 & k<10
   k=k+1, x0=x1;
   x1=x0-(x0^2-2)/(2*x0)
end
```

迭代2次

(3) 采用(2.2-7)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{[f'(x^{(k)})]^2 - f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$$

$$u(x) = \frac{x^2 - 2}{4x} \qquad u'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2 + 2}{x^2}\right)$$

即

$$\frac{u(x)}{u'(x)} = \frac{(x^2 - 2)x^2}{x(x^2 + 2)} = \frac{x(x^2 - 2)}{x^2 + 2}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}[(x^{(k)})^2 - 2]}{[x^{(k)}]^2 + 2}$$

```
k=0,x0=1.5
x1=x0-x0*(x0^2-2)/(x0^2+2)
while abs(x1-x0)>0.00001 & k<10
   k=k+1, x0=x1;
   x1=x0-x0*(x0^2-2)/(x0^2+2)
end
```

```
>>k=2
x1=1.41421356237150
```

- 思考：
- 1.如果不知道非线性方程的具体形式，只有一组 $\{x_i\}$及对应的函数值，如何构造迭代过程？
- 2.如何求函数的极值？

Secant 方法

我们可以近似计算 $f'(x_n)$，

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) f(x_n) / (f(x_n) - f(x_{n-1})) = 0$$

Newton 方法和 Secant 方法的比较

- Newton 方法是一点方法，即只需要已知 $f(x_n)$ 和 $f'(x_n)$
- Secant 是两点方法，好处是不必已知 $f'(x_n)$。

Extremes of a function

找极值问题转化为找零根问题

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx} = 0,$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = -f_k / f_k',$$

$$\Delta x_k = -(x_k - x_{k-1}) f_k / (f_k - f_{k-1}).$$

小结

1.理解简单迭代法的思想方法，几何意义，不动点定理。
2. 掌握简单迭代法的收敛(局部)定理（定理证明，会判断简单迭代法是否收敛）。

作业：P36#1, 4
P44＃11
P59#1