

# 数值计算

## 第三章 线性方程组的数值解法

# 第三章 线性方程组的数值解法

## § 3.0 引言

## § 3.1 Gauss消去法

## § 3.2 矩阵分解在解线性方程组中的作用

## § 3.3 线性方程组迭代解法

## § 3.0 引言

在自然科学和工程技术中很多问题的解决常常归结为解线性代数方程组。

例如电学中的网络问题，用最小二乘法求实验数据的曲线拟合问题，解非线性方程组问题，用差分法或者有限元方法解常微分方程、偏微分方程边值问题等都导致求解线性代数方程组。

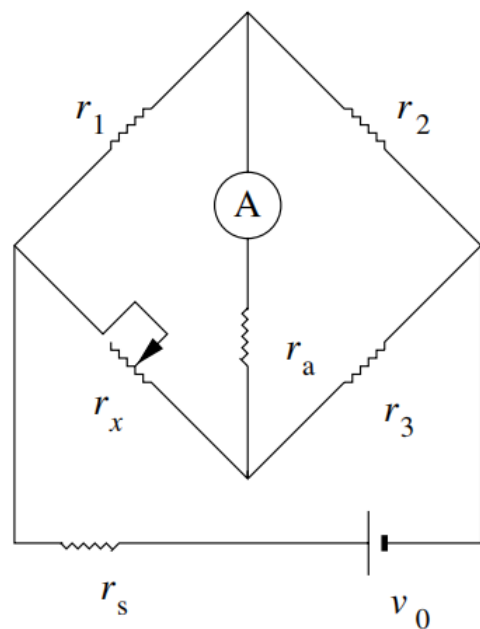
而这些方程组的系数矩阵大致分为两种，一种是低阶稠密矩阵(例如，阶数大约为 $\leq 150$ )，另一种是大型稀疏矩阵(即矩阵阶数高且零元素较多)。

## § 3.0 引言

设有线性方程组  $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 为非奇异阵, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

关于线性方程组的数值解法一般有两类：直接法与迭代法。



**Fig. 5.1** The unbalanced Wheatstone bridge with all the resistors indicated.

$$\begin{aligned} r_s i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 &= v_0, \\ -r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a) i_2 - r_a i_3 &= 0, \\ -r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 + r_a) i_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{v},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_s & r_1 & r_2 \\ -r_x & r_1 + r_x + r_a & -r_a \\ -r_3 & -r_a & r_2 + r_3 + r_a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 1. 直接法

就是经过有限步算术运算，可求得方程组精确解的方法(若计算过程中没有舍入误差)。

但实际计算中由于舍入误差的存在和影响，这种方法也只能求得线性方程组的近似解。

本章将阐述这类算法中最基本的高斯消去法及其某些变形。

这类方法是解低阶稠密矩阵方程组的有效方法，近十几年来直接法在求解具有较大型稀疏矩阵方程组方面取得了较大进展。

## 2. 迭代法

迭代法是用某种极限过程去逐步逼近线性方程组精确解的方法。

迭代法具有需要计算机的存贮单元较少、程序设计简单、原始系数矩阵在计算过程中始终不变等优点，但存在收敛性及收敛速度问题。

迭代法是解大型稀疏矩阵方程组(尤其是由微分方程离散后得到的大型方程组)的重要方法。

## 向量和矩阵简介

定义：如果  $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{M \times N}$ ， $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{N \times P}$ ，则矩阵乘积  $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{M \times P}$ ，其中  $c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}$

定义：非奇异矩阵的逆：

存在  $N \times N$  矩阵  $\mathbf{B}$ ，满足  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ，称  $N \times N$  矩阵  $\mathbf{A}$  是非奇异的，或可逆的。 $\text{inv}(\mathbf{A})$

行列式： $\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^N a_{ij} A_{ij}$



定理： 设 $A$ 是 $N \times N$ 方阵， 下列命题等价：

- (1) 给定任意  $N \times 1$  矩阵 $B$ ， 线性方程组 $AX=B$ 有唯一解；
- (2) 矩阵 $A$ 是非奇异的；
- (3) 方程组 $AX=0$ 有唯一解 $X=0$ ；
- (4)  $\det(A) \neq 0$ ；

$$AX=B \rightarrow X=A^{-1} B$$

## § 3.1 Gauss消去法

高斯（Gauss）消去法是解线性方程组最常用的方法之一。

它的基本思想是通过逐步消元（行的初等变换），把方程组化为系数矩阵为三角形矩阵的同解方程组，然后用回代法解此三角形方程组（简单形式）得原方程组的解。

定理：（初等变换） 下面三种变换可使一个线性方程组变换成另一个等价的线性方程组：

- （1）交换变换；
- （2）比例变换；
- （3）置换变换；

## § 3.1 Gauss消去法

例:

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

下面讨论一般的解 $n$ 阶方程组的高斯消去法。

# 1. 消元

将原方程组记为  $A^{(1)}x = b^{(1)}$ ,

其中  $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = (a_{ij})$ ,  $b^{(1)} = b$

(1) 第一次消元。

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right] = [A^{(2)} | b^{(2)}]$$

$$\text{其中} \left. \begin{array}{l} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)} \quad j = 2, 3, \dots, n \quad \text{— 减去第1行的 } \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \text{ 倍} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)} \quad \text{— 减去 } b_1^{(1)} \text{ 的 } \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \text{ 倍} \end{array} \right\} i = 2, 3, \dots, n$$

注：若  $a_{11}^{(1)} = 0$ ，则在第1列中至少有一个元素不为0，  
可交换行后再消元

## (2) 第 $k$ 次消元。

$$[A^{(k)} \mid b^{(k)}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & b_{k+1}^{(k+1)} \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{array} \right] = [A^{(k+1)} \mid b^{(k+1)}]$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} & j = k+1, k+2, \dots, n & \quad \text{—减去第}k\text{行的} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \text{倍} \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} & & \quad \text{—减去} b_k^{(k)} \text{的} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \text{倍} \end{aligned} \right\} \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

注：为减少计算量，令  $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ ，

则

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} & j = k+1, k+2, \dots, n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

(3) 当  $k = n - 1$  时得

$$[A^{(n)} | b^{(n)}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right]$$

完成第  $n - 1$  次消元后得到与原方程组等价的三角形方程组

$$A^{(n)} x = b^{(n)}$$

注：当  $\det(A) \neq 0$  时，显然有  $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), 称为主元素。

## 2. 回代

求解三角形方程组  $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$ ，得到求解公式

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases}$$

注：求解过程称为回代过程。

### 3. Gauss消去法的计算量

以乘除法的次数为主

(1) 消元过程:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{ij}^{(k)} & j = k+1, k+2, \dots, n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

第 $k$ 步时  $(n-k) + (n-k)(n-k+1) = (n-k)(n-k+2)$

共有

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$$



### 3. Gauss消去法的计算量

(2) 回代过程:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases}$$

求 $x_i$ 中, 乘 $n-i$ 次, 除1次, 共 $n-i+1$ 次 ( $i = 1, \dots, n-1$ )  
共有

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) = \sum_{i=1}^n (n-i+1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

### 3. Gauss消去法的计算量

(3) 总次数为

$$MD = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3} = O(n^3)$$

注：当 $n = 20$ 时约为2670次，

Cramer 线性方程组  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 。

$\mathbf{A}$ 有逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ ， 则  $|\mathbf{A}| \neq 0$  ，  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ 。

## 4. 说明

- (1) 若消元过程中出现 $a_{kk}^{(k)} = 0$ ，则无法继续
- (2) 若 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ ，但较小，则小主元做除数将产生大误差
- (3) 通常第 $k$ 步选择

$$c_k = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

——第 $k$ 列主对角元以下元素绝对值最大者作主元（该行与第 $k$ 行对调），称为列主元消去法。

## 例1 用舍入三位有效数字求解线性方程组

$$\begin{cases} 0.0300x_1 + 58.9x_2 = 59.2 \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0 \end{cases}$$

(准确解是 $x_1 = 10.0$ ,  $x_2 = 1.00$ )

解: 1) 不选主元的Gauss消去法计算结果:

$x_1 = -10.0$ ,  $x_2 = 1.01$ , 此解错误;

2) 按列选主元的Gauss消去法计算结果:

$x_1 = 10.0$ ,  $x_2 = 1.00$ .

$X=A \setminus b$

### (5) 行标度化（按比例偏序选主元）

如用每行元素的最大模除该行各元素，使它们的模都不大于1，这叫行标度化，其目的是要找到真正的主元。

消元过程仍是对原方程组进行的，只不过在Gauss列主元消去法的算法中，按列选主元 $c_k$ 时，应修改为

$$c_k = \max_{k \leq i \leq n} \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{s_i^{(k)}}$$

其中  $s_i^{(k)} = \max_{k \leq j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$ ,  $i = k, k+1, \dots, n$ .

## 5. 算法设计

### 上三角变换和回代过程

```
function X = uptrbk(A,B)
```

```
[N N]=size(A); X=zeros(N,1); C=zeros(1,N+1); Aug=[A B];
```

```
for p=1:N-1
```

```
    [Y,j]=max(abs(Aug(p:N,p))); C=Aug(p,:); Aug(p,:)=Aug(j+p-1,:);
```

```
    Aug(j+p-1,:)=C;
```

```
    if Aug(p,p)==0
```

```
        'A was singular. No unique solution', break; end
```

```
    for k=p+1:N
```

```
        m=Aug(k,p)/Aug(p,p);Aug(k,p:N+1)=Aug(k,p:N+1)-m*Aug(p,p:N+1); end
```

```
end
```

```
X=backsub(Aug(1:N,1:N),Aug(1:N,N+1));
```



```
function X=backsub(A,B) %回代函数
```

```
n=length(B);
```

```
X=zeros(n,1);
```

```
X(n)=B(n)/A(n,n);
```

```
for k=n-1:-1:1
```

```
    X(k)=(B(k)-A(k,k+1:n)*X(k+1:n))/A(k,k);
```

```
end
```

# 示例

## (1) 高斯消去法

```
a=[5 -1 -1 -1 -4;  
   -1 10 -1 -1 12;  
   -1 -1 5 -1 8;  
   -1 -1 -1 10 34];  
x=[0;0;0;0]  
n=4  
for k=1:n-1  
    for i=k+1:n  
        a(i,:)=a(i,:)-a(k,:)*a(i,k)/a(k,k)  
    end  
end  
for j=n:-1:1  
    x(j)=(a(j,n+1)-a(j,j+1:n)*x(j+1:n))/a(j,j)  
end
```

未选主元（主元需不为零）



## (2) 列主元素消去法

```
a=[-0.04 0.04 0.12 3;0.56 -1.56 0.32 1;-0.24 1.24 -0.28 0];  
x=[0;0;0]; n=3;  
for k=1:n-1  
    [c, i]=max(abs(a(k:n, k)));  
    q=i+k-1;  
    if q~=k  
        m=a(q, :); a(q, :)=a(k, :); a(k, :)=m  
    end  
    for i=k+1:n  
        a(i, :)=a(i, :)-a(k, :)*a(i, k)/a(k, k)  
    end  
end  
  
for j=n:-1:1  
    x(j)=(a(j, n+1)-a(j, j+1:n)*x(j+1:n))/a(j, j)  
end
```

## § 3.2 矩阵分解在解线性方程组中的作用

### 1. 原理

$$\text{若 } A = LU, \text{ 则 } Ax = b \Leftrightarrow L Ux = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

若其中  $L$ 、 $U$  为三角形矩阵，则方程组易解

定义：

(1) 称  $L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}$  为单位下三角阵

(2) 设  $L$  为单位下三角阵， $U$  为上三角阵，若  $A = LU$ ，则称  $A$  可三角 ( $LU$ ) 分解，并称  $A = LU$  为  $A$  的三角分解 (Doolittle 分解)

例：LU分解

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

将单位矩阵放在A的左边来构造矩阵L

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

定义：置换矩阵P

每一行和每一列只有一个元素为1，其余为0的矩阵；

PA为新矩阵，其行将 A中的行按 $\text{row}_{k1}A$ 、 $\text{row}_{k2}A$ 、 $\dots$ 、 $\text{row}_{kN}A$ 调整顺序后形成。

例：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

定理：如果**A**是非奇异矩阵，则存在一个置换矩阵，使得**PA**存在三角分解：

$$PA=LU$$

定理：非直接分解**PA=LU**，三角分解求**AX=B**的解；

(1)构造**L,U,P**;

(2)计算列向量**PB**;

(3)前向替换法对方程组**LY=PB**，求解**Y**;

(4)用回代法对方程组**UX=Y**，求解**X**

例：  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ;

$[L \ U \ P] = \text{lu}(A)$ ; %LU分解 LU.m

$B1 = P * B$ ;

$N = \text{size}(A, 1)$ ;

$Y = \text{zeros}(N, 1)$ ;  $Y(1) = B1(1)$ ;

for  $k = 2 : N$     %前向替换

$Y(k) = B1(k) - L(k, 1 : k-1) * Y(1 : k-1)$ ;

end

$X = \text{backsub}(U, Y)$     %回代

## § 3.4 线性方程组迭代解法

### 1. 基本思想

若方程组  $Ax = b$  可写成等价形式

$$x = Bx + g, \quad (2.4-1)$$

则给定一个初始向量  $x^{(0)}$ ，可以得到迭代公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.4-2)$$

若上式确定的向量序列  $\{x^{(k)}\}$  收敛于  $x$ ，则  $x$  显然是 (2.4-1) 的解，从而为方程组  $Ax = b$  的解。

形如 (2.4-2) 的逐次逼近的方法称为简单迭代法， $B$  称为该迭代法的迭代矩阵。

## 2.雅可比迭代

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases}$$

迭代过程：

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4} \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8} \\ z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5} \end{cases}$$



%雅可比迭代

jacobi.m

A=[4 -1 1;4 -8 1;-2 1 5];

B=[7;-21;15];

P=[1;2;2];

初始猜测

max1=20;

delta=1e-9;

[X k]=jacobi(A,B,P,delta, max1)

### 3.高斯-赛德尔迭代

计算 $y_{k+1}$ 时，用 $x_{k+1}$ 替换 $x_k$ 等，

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4} \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{8} \\ z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5} \end{cases}$$

可使迭代加快

# 线性方程组 $AX=B$

雅可比迭代:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{jj-1}x_{j-1}^{(k)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(k)} - \cdots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}}$$

高斯-赛德尔迭代:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{jj-1}x_{j-1}^{(k+1)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(k)} - \cdots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}}$$

定义：设有  $N \times N$  矩阵  $\mathbf{A}$ ，如果

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}|$$

其中  $k=1,2,\dots,N$ ;

则称  $\mathbf{A}$  具有严格对角优势。

定理：设矩阵 $A$ 具有严格对角优势，则 $AX=B$ 有唯一解 $X=P$ ；利用迭代（雅可比）可产生以向量序列 $\{P_k\}$ ，对于任意初始向量 $P_0$ ，向量序列都将收敛到 $P$ 。

高斯-赛德尔迭代也有同样结果。

收敛判据：欧氏范数、L1范数

## 补充 向量的范数与矩阵的范数

在线性方程组的数值解法中，经常需要分析解向量的误差，需要比较误差向量的“大小”或“长度”。那么怎样定义向量的长度呢？

我们在初等数学里知道，定义向量的长度，实际上就是对每一个向量按一定的法则规定一个非负实数与之对应，这一思想推广到维线性空间里，就是向量的范数或模。

用 $R^n$ 表示 $n$ 维实向量空间，用 $C^n$ 表示 $n$ 维复向量空间，首先将向量长度概念推广到 $R^n$  (或 $C^n$ ) 中。

# 1. 向量的范数

向量的范数可以看作是描述向量“大小”的一种度量.

范数的最简单的例子, 是绝对值函数:  $|x| = \sqrt{x^2}$

有三个熟知的性质:

$$(1) x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0 \quad |x| = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0$$

$$(2) |ax| = |a| \cdot |x| \quad a \text{ 为常数}$$

$$(3) |x + y| \leq |x| + |y|$$

# 1. 向量的范数

范数的另一个简单例子是三维欧氏空间的长度

设  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ，则  $x$  的欧氏范数定义为：

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

欧氏范数也满足三个条件：  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $a$  为常数

(1)  $\|x\| \geq 0$ ，且  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2)  $\|ax\| = |a| \|x\|$

(3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

前两个条件显然，第三个条件在几何上解释为三角形一边的长度不大于其它两边长度之和。因此，称为三角不等式。



## 向量范数的一般概念:

**定义1:** 设 $V$ 是数域 $F$ 上的向量空间, 对 $V$ 中任一向量 $\alpha$ , 都有唯一实数 $\|\alpha\|$ 与之对应, 满足如下三个条件:

1) 正定性:  $\|\alpha\| \geq 0$ , 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

2) 齐次性:  $\|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|$ , 这里 $k \in F$

3) 三角不等式:  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

则称 $\|\alpha\|$ 为 $\alpha$ 的范数。定义了范数的向量空间称为赋范向量空间。

简单性质:

(1)  $x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$  —— 单位向量

(2)  $\|x\| = \|-x\|$

(3)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  —— 当 $x \rightarrow y$ 时,  $\|x\| \rightarrow \|y\|$

$C^n$ 上的常见范数有:

1) 1-范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2) 2-范数

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{称为欧氏范数}$$

3)  $\infty$ -范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

不难验证, 上述三种范数都满足定义的条件。

注: 上述形式的统一:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

## **NORM** Matrix or vector norm.

For matrices...

**NORM(X)** is the largest singular value of **X**,  $\max(\text{svd}(\mathbf{X}))$ .

**NORM(X,2)** is the same as **NORM(X)**.

**NORM(X,1)** is the 1-norm of **X**, the largest column sum,  
 $= \max(\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{X})))$ .

**NORM(X,inf)** is the infinity norm of **X**, the largest row sum,  
 $= \max(\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{X}')))$ .

**NORM(X,'fro')** is the Frobenius norm,  $\sqrt{\text{sum}(\text{diag}(\mathbf{X}' * \mathbf{X}))}$ .

**NORM(X,P)** is available for matrix **X** only if **P** is 1, 2, inf or 'fro'.

For vectors...

**NORM(V,P)** =  $\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{V}).^P)^{(1/P)}$ .

**NORM(V)** = **norm(V,2)**.

**NORM(V,inf)** =  $\max(\text{abs}(\mathbf{V}))$ .

**NORM(V,-inf)** =  $\min(\text{abs}(\mathbf{V}))$ .

## 2. 矩阵的范数

**定义3** 若矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 的某个非负实值函数 $N(A) = \|A\|$ , 满足条件

1) 正定性:  $\|A\| \geq 0$ , 且 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) 齐次性:  $\|kA\| = |k| \|A\| \quad k \in R$

3) 三角不等式:  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$


4) 相容性:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

则称 $N(A)$ 是 $R^{n \times n}$ 上的一个矩阵范数(或模)。

如由 $R^{n \times n}$ 上2-范数可以得到 $R^{n \times n}$ 中矩阵的一种范数

$$F(A) = \|A\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

称为 $A$ 的Frobenius范数。 $\|A\|_F$ 显然满足正定性、齐次性及三角不等式。



讨论思考：能不能用牛顿迭代法  
求解线性方程组，如何构造迭  
代过程？



作业：

3.4.5 P98#14

3.5.7 P108#3 (LU分解)

3.6.4 P117#4