第九章 微分方程求解

常微分方程基本概念

- 什么是常微分方程?
  - 天体运动的轨迹、机器人控制、化学反应过程的描述和控制、以及电路瞬态过程分析
  - 要求解随时间变化的物理量, 即未知函数$y(t)$
  - 未知函数及其各阶导函数满足特定方程(物理规律)
  - 未知函数是单变量函数, 这种方程被称为常微分方程（ordinary differential equation, ODE）
- 本章内容
  - 常微分方程初值问题
  - 简单的数值解法与有关概念
  - Runge-Kutta方法；多步法

常微分方程基本概念

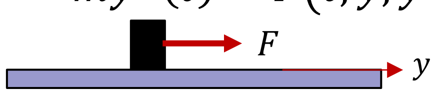
- 常微分方程: $g\left(t, y, y', \cdots, y^{(k)}\right) = 0$　　函数$y(t)$简写为y, …
- k阶常微分方程: 方程中含未知函数的最高阶导数为$y^{(k)}$
- 显式常微分方程: $y^{(k)} = f\left(t, y, y', \cdots, y^{(k-1)}\right)$
- 通过变量代换, 得到一阶常微分方程组

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= y(t), \\
u_2(t) &= y'(t), \\
&\cdots, \\
u_k(t) &= y^{(k-1)}(t)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
u_1' &= u_2 \\
u_2' &= u_3 \\
&\cdots \\
u_k' &= f(t, u_1, u_2, \cdots, u_k)
\end{aligned}
$$

- 只需考虑一阶常微分方程/方程组$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$
- 例(牛顿第二定律): $F = ma$,

假设在一维空间中　$my''(t) = F\left(t, y, y'(t)\right)$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
u_1' &= u_2 \\
u_2' &= \frac{1}{m} F(t, u_1, u_2)
\end{aligned}
$$



常微分方程基本概念

- 例: 解常微分方程$y' = y$ $\ln(y) = t + c$
- 解: 采用分离变量法, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$
- 两边积分, 得到原方程的解为$y(t) = c \cdot e^t$, c为任意常数
- 仅根据常微分方程无法得到唯一的解
- 还需在一些自变量点上给出未知函数的值

- 对1阶ODE: 给出$t = t_0$时的函数值$y(t_0) = y_0$

  初值问题: $\begin{cases} y' = f(t, y), & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

- 一般，从t_0时刻的初始状态y_0开始，常微分方程决定了$y(t)$在$t > t_0$时的变化规律, 即可确定常微分方程的唯一解

常微分方程基本概念

- 方程的分类 $y' = f(t,y)$
  - 线性常微分方程: $f(t,y) = a(t)y + b(t)$, f是y的线性函数
  - 线性齐次常微分方程, 线性齐次常系数微分方程 如$y' = \lambda y$
- ODE初值问题的敏感性

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

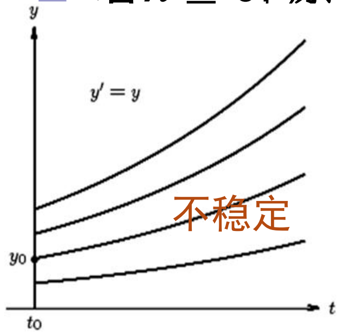
  - 考虑初值发生扰动对解的影响
  - 问题的解是一个函数, 主要关心$t \to \infty$时$y(t)$受影响情况 (由于历史原因)
  - 定义：ODE初值问题的稳定性
  - 若$t \to \infty$时$y(t)$的偏差被控制在有界范围内,**稳定**(stable)
  - 若$t \to \infty$时$y(t)$的偏差发散为无穷大, **不稳定** (unstable)
  - 若$t \to \infty$时$y(t)$的偏差趋于零, **渐进稳定**(asymptotically stable)

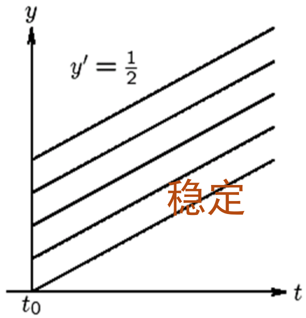
解实际问题应考虑其稳定性!

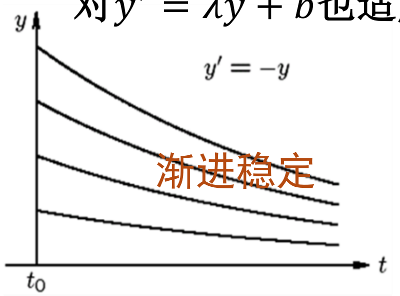
常微分方程基本概念

- 例8.2: “模型问题”的稳定性 $\begin{cases} y' = \lambda y, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
  - 准确解为： $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$
  - 扰动后初值 $y_0 + \delta$, 解为 $\hat{y}(t) = (y_0 + \delta) e^{\lambda(t-t_0)}$
  - $\Delta y(t) = \hat{y}(t) - y(t) = \delta e^{\lambda(t-t_0)}$ 稳定性取决于 λ 的值
  - 若 $\lambda \le 0$, 原问题稳定; 若 $\lambda > 0$, 原问题不稳定

对 $y' = \lambda y + b$ 也适用







Practice

- 将$y'' = 2y + V(t)$写为一阶常微分方程组？其初值问题是什么？

- 一个ODE初值问题是渐进稳定的含义是什么？

✓ 含义是若初值有微小偏差，当t趋近于无穷大时，解出来的函数值的偏差趋于零

初值问题数值解法

- 大多数情况下(尤其是方程组), $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ 无解析解
- 数值解法: 得到一系列离散自变量点上的解函数近似值, 也称为“**离散变量法**”
- “步进式”的计算过程 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots$
  $y_0, \quad y_1, \quad \cdots \quad y_n, \quad y_{n+1}, \cdots$
- 相邻自变量点的间距: $h_n = t_{n+1} - t_n$, 称为**步长(可取很定的*h*)**
- 利用近似解满足的方程 $y_{n+1} = G(\cancel{y_{n+1}}, y_n, \cancel{y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}})$ 得到递推计算公式
- 若$k = 0$, 为**单步法** 否则为**多步法**
- 若函数G与y_{n+1}无关, 为**显格式方法**, 计算较简单
- 若G与y_{n+1}有关, 为**隐格式方法**

y_n与$y(t_n)$的区别?

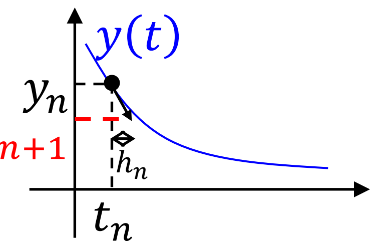
欧拉法

求解$y' = f(t,y)$

- 是<u>显式单步</u>法: $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$，$n = 0,1,2,\cdots$
- 推导1: 数值微分的向前差分公式

$$y'(t_n) = f\big(t_n, y(t_n)\big) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h_n}$$

换成函数近似值y_{n+1}, y_n



“左矩形”求积公式

- 推导2: 数值积分

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \boxed{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(s, y(s)\big)ds} \approx h_n f\big(t_n, y(t_n)\big)$$

- 例

$$\begin{cases} y' = t - y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

步长h=0.1, 和0.05

步长小的更准

h=0.1			h=0.05			
t_n	y_n	$y(t_n)$	t_n	y_n	t_n	y_n
0.1	1.000000	1.004837	0.05	1.000000	0.3	1.035092
0.2	1.010000	1.018731	0.1	1.002500	0.35	1.048337
0.3	1.029000	1.040818	0.15	1.007375	0.4	1.063420
0.4	1.056100	1.070320	0.2	1.014506	0.45	1.080249
0.5	**1.090490**	**1.106531**	0.25	1.023781	0.5	**<u>1.098737</u>**

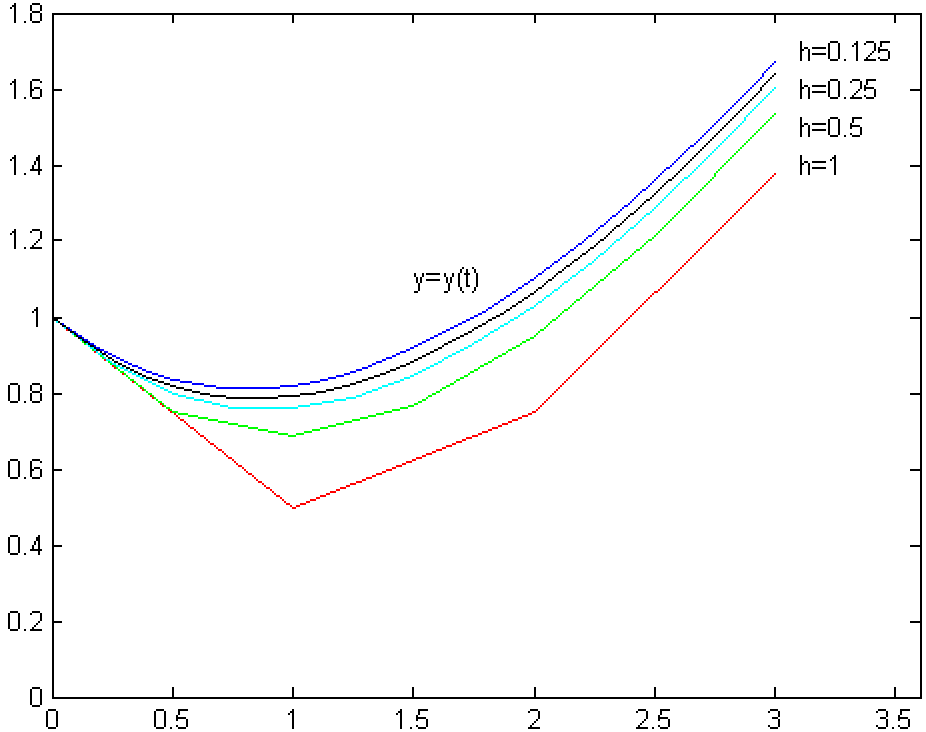
准确解$y(t) = t + e^{-t}$，$y(0.5) \approx 1.1065$

用欧拉方法求解[0,3]上的初值问题：

$$y' = (t-y)/2, \quad y(0)=1$$

exm3.m

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$



h	M	FGE
1.0000	3.0000	0.2944
0.5000	6.0000	0.1355
0.2500	12.0000	0.0651
0.1250	24.0000	0.0320
0.0625	48.0000	0.0158
0.0313	96.0000	0.0079
0.0156	192.0000	0.0039

数值解法的稳定性

- **ODE**初值问题数值解法的稳定性: 解函数近似值y_n存在误差, 在后续递推计算过程中, 它会如何传播?
- 定义**8.2**: 若在节点t_n上的函数近似值有扰动δ_n, 由它引起的后续节点t_m上的误差δ_m满足$|\delta_m| \le |\delta_n|$, 则该方法**稳定**
- 仅考虑截断误差　　以欧拉法为例, 针对模型问题$y' = \lambda y$
- 计算公式为$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$
- y_n上的扰动δ_n引起y_{n+1}的误差: $\delta_{n+1} = (1 + h\lambda)\delta_n$
- 要保证欧拉法稳定 $\Longleftrightarrow$ $|1 + h\lambda| \le 1$

若λ为实数则$\lambda<0$, 且$h \le \frac{-2}{\lambda}$

- 为了保证数值解法的稳定性步长**h**不能太大

数值解法的稳定性

- **例8.5:** 用欧拉法求解$\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 步长h=0.025, 求$y(0.15)$
- **解:** $y_{n+1} = y_n + h(-100y_n) = -1.5y_n$

计算结果如下表:

t_n	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
y_n	1	-1.5	2.25	-3.375	5.0625	-7.59375	11.3906
$y(t_n)$	1	0.082085	0.006738	0.000553	4.54×10^{-5}	3.73×10^{-6}	3.06×10^{-7}

- 准确解为$y(t) = e^{-100t}$
- 从结果看, 欧拉法的误差越来越大, 上下波动
- 要保证欧拉法稳定, 应使$h \le \frac{-2}{\lambda} = 0.02$ 这里设的h太大!

Practice

- 什么是ode初值问题的数值计算的显格式方法和隐格式方法？

✓ 若计算公式$y_{n+1} = G(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})$中，G函数显含$y_{n+1}$则为隐格式，若不含有$y_{n+1}$则为显格式

- 对$y' = \lambda y$，欧拉法的计算公式是什么？

✓ $y_{n+1} = y_n + h_n \lambda y_n$

数值解法的局部截断误差

- **定义 8.3**: 求解初值问题的数值解法 $y_{n+1} = G(y_{n+1}, y_n, \dots, y_{n-k})$，在**假设** $\boldsymbol{y_{n-i} = y(t_{n-i})}$, $(0 \le i \le k)$ 的前提下，$l_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$ 称为该方法的**局部截断误差**
- 局部截断误差反映了一步计算产生的误差，一般仅能研究局部截断误差
- 例：欧拉法的局部截断误差

$$l_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf\big(t_n, y(t_n)\big)$$

  - 对模型问题 $y' = \lambda y$ $\quad l_{n+1} = y(t_n)\left[e^{h\lambda} - 1 - h\lambda\right] = \boldsymbol{O(h^2)}$
  - 对一般的 $y' = f(t, y)$, 有同样的结论 $l_{n+1} = O(h^2)$

数值解法的局部截断误差

- 定义8.4:若某种解法的局部截断误差$l_{n+1}=O(h^{p+1})$,则称该方法具有p阶准确度
- 实际关心整体误差$e_n=y_n-y(t_n)$. 在适当条件下,若局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则整体误差$e_n=O(h^p)$

欧拉法有1阶准确度

我们讨论的所有方法都至少有1阶准确度

数值解法的收敛性:随着h→0,误差→0

向后欧拉法与休恩（梯形）法

- 从数值积分的角度推导 要求解$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \boxed{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(s, y(s)\big)ds}$$

$h_n f\big(t_{n+1}, y(t_{n+1})\big)$ 右矩形

$\frac{1}{2}h_n[f(t_n,y(t_n))+f(t_{n+1},y(t_{n+1}))]$ 梯形

- 向后欧拉法: $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$
- 休恩法: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h_n[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$
- 两者均为单步、***<u>隐格式方法</u>***, 每步计算要求解(非线性)方程

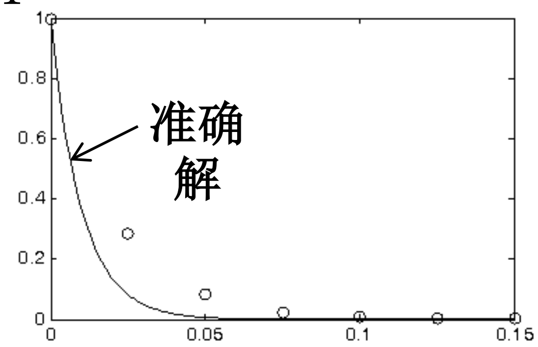
$\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 步长h=0.025, 求$y(0.15)$

- 例:用向后欧拉法求解

t_n	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
y_n	1	0.285714	0.0816327	0.023323	0.006663	0.001904	0.000544
$y(t_n)$	1	0.082085	0.006738	0.000553	4.54×10^{-5}	3.73×10^{-6}	3.06×10^{-7}

向后欧拉法与休恩法

- 例:用向后欧拉法求解 $\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 步长h=0.025, 求$y(0.15)$
- 随n增大, 误差趋于0
- 比欧拉法效果好得多
- 向后欧拉法的稳定性
  - 模型问题$y'=\lambda y$($\mathrm{Re}(\lambda)\le 0$)



$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \dfrac{1}{1-h\lambda} y_n$

设y_n存在扰动δ_n, 引起y_{n+1}的误差为

$\delta_{n+1} = \dfrac{1}{1-h\lambda}\delta_n$ ➡ 稳定的条件是: $\left|\dfrac{1}{1-h\lambda}\right| \le 1$

即$|h\lambda-1|\ge 1$　　对任意的h都满足

无条件稳定(unconditionally stable)!

绝对稳定(A-stable)

向后欧拉法与休恩法

- 对一般的方程$y' = f(t,y)$, 类似地分析知, 只要初值问题本身是稳定的, 向后欧拉法也是无条件稳定的
- 向后欧拉法的准确度
  - 考虑一般的方程$y' = f(t,y)$

$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_n+1) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= hf\big(t_{n+1}, y(t_{n+1})\big) + O(h^2) - hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= hf_y'(t_{n+1}, \xi)[y(t_{n+1}) - y_{n+1}] + O(h^2) \\
&= hf_y'(t_{n+1}, \xi) \cdot l_{n+1} + O(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ l_{n+1} = \frac{1}{1 - hf_y'(t_{n+1}, \xi)} O(h^2) = O(h^2)
$$
具有1阶准确度!

向后欧拉法与休恩法

- **休恩法的稳定性**
  - 模型问题$y'=\lambda y$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1}) \implies y_{n+1}=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}y_n$$

稳定的条件是: $\left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right| \le 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(h\lambda)\le 0$ 无条件稳定!

- **梯形法的准确度** $l_{n+1}=O(h^3)$ 具有2阶准确度　（被积函数用线性插值）
- **小结**
  - 无条件稳定或稳定区域大的方法, 在步长h较大时它仍能保证计算的稳定性
  - 准确度阶数越高,计算误差随步长减小而减小的速度越快

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}(f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1))$$

用欧拉方法近似式子右边中的

$$y(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

得到休恩方法

$$y_1 = y(t_0) + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0)))$$

一般步骤

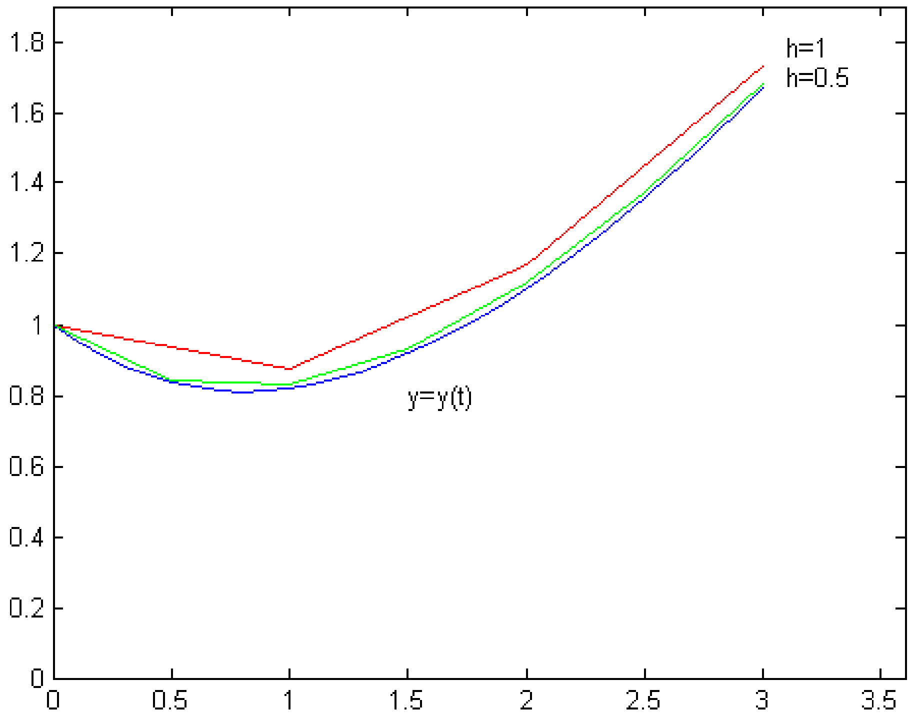
$$p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad t_{k+1} = t_k + h$$ 微分预报子

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1}))$$ 积分校正子

得到逼近 $y = y(t)$ 的一系列点

休恩方法求解

$$y' = (t - y)/2, \quad y(0) = 1$$



h	M	FGE
[1.0,	3.0,	0.063031]
[0.5,	6.0,	0.012730]
[0.25,	12.0,	0.002878]
[0.125,	24.0,	0.000685]
[0.0625,	48.0,	0.000167]
[0.03125,	96.0,	0.000041]
[0.015625,	192.0,	0.000010]

4.泰勒级数法

[泰勒定理]： 设$y(t)\in C^{N+1}[t_0,b]$， 且 $y(t)$ 在 $t=t_k\in[t_0,b]$ 处有N次泰勒级数展开：

$$y(t_k+h)=y(t_k)+hT_N(t_k,y(t_k))+O(h^{N+1})$$

其中

$$T_N(t_k,y(t_k))=\sum_{j=1}^{N}\frac{y^{(j)}(t_k)}{j!}h^{j-1}$$

$y^{(j)}(t)=f^{(j-1)}(t,y(t))$ 是函数 f 关于 t 的$j-1$次全导数

$$y^{(N)}(t)=P^{(N-1)}f(t,y(t)) \qquad P=\left(\frac{\partial}{\partial t}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

- 区间$[t_0, t_M]$上初值问题的近似解可由各子区间$[t_k, t_{k+1}]$应用而得到

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2 h^2}{2!} + \cdots + \frac{d_N h^N}{N!}$$

在各步$k = 0, \cdots, M-1$，有$d_j = y^{(j)}(t_k) \qquad j = 1, \cdots, N$

■ [N次泰勒方法的精度]

设$y(t)$是初值问题的解，如果$y(t)\in C^{N+1}[t_0,b]$，而$\{(t_k,y_k)\}_{k=0}^{M}$为N次泰勒方法产生的近似序列则

$$|e_k|=|y(t_k)-y_k|=O(h^N)$$

$$|\varepsilon_{k+1}|=|y(t_{k+1})-y_k-hT_N(t_k,y_k)|=O(h^{N+1})$$

最终全局误差

$$E(y(b),h)=|y(b)-y_M|=O(h^N)$$

泰勒方法求解初值问题

$$y' = (t-y)/2, \quad y(0) = 1$$

取四次泰勒方法，有

$$y' = (t-y)/2$$

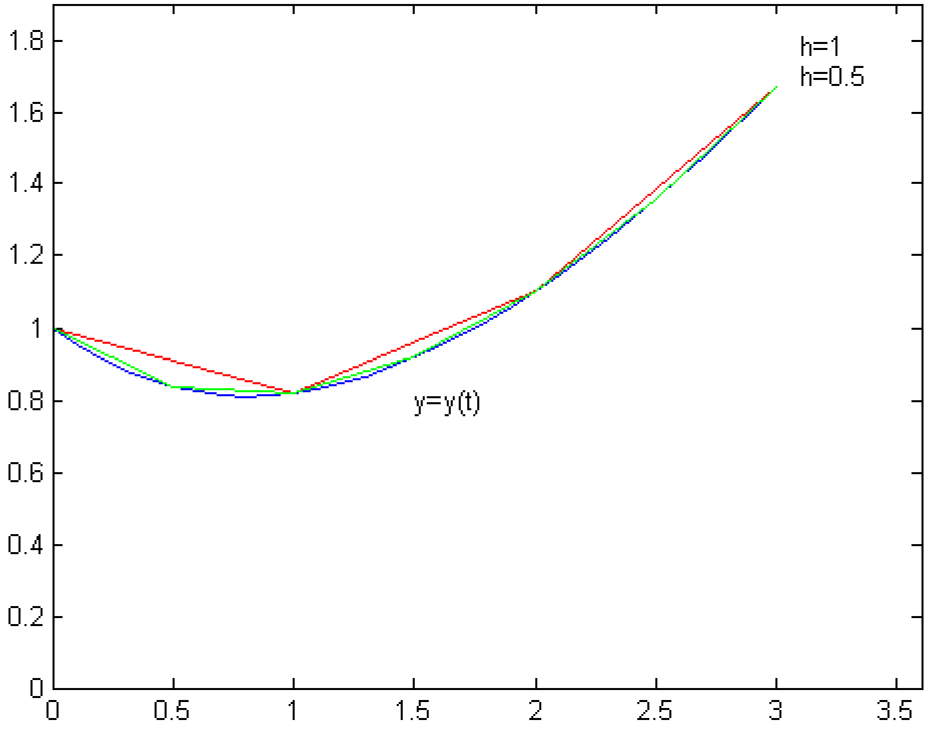
$$y^{(2)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t-y}{2}\right) = \frac{2-t+y}{4}$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2-t+y}{4}\right) = \frac{-2+t-y}{8}$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{-2+t-y}{8}\right) = \frac{2-t+y}{16}$$

构造4阶导数表

df=@(t,y) [(t-y)/2 (2-t+y)/4 (-2+t-y)/8 (2-t+y)/16];



exm5

h	M	FGE
[1.0,	3.0,	0.0007955]
[0.5,	6.0,	0.0000402]
[0.25,	12.0,	0.0000022]
[0.125,	24.0,	0.0000001]

5.龙格-库塔(Runge-Kutta)方法

泰勒方法的优点是最终全局误差阶为 $O(h^N)$

缺点：需要先确定N，并计算高阶导数。

4阶龙格-库塔方法(RK4)模拟4阶泰勒方法精度：

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4$$

其中

$$k_1 = hf(t_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(t_k + a_1 h, y_k + b_1 k_1)$$

$$k_3 = hf(t_k + a_2 h, y_k + b_2 k_1 + b_3 k_2)$$

$$k_4 = hf(t_k + a_3 h, y_k + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3)$$

- 比较4阶泰勒级数方法得到的系数，并令

$$a_1=1/2, b_2=0$$

有

$$a_1=1/2,\ a_2=1/2,\ a_3=1,$$

$$b_1=1/2,\ b_2=0,\ b_3=1/2,\ b_4=0,\ b_5=0,\ b_6=1$$

$$w_1=1/6,\ w_2=1/3,\ w_3=1/3,\ w_4=1/6$$

得到从初始点 (t_0, y_0) 开始，由 $y_{k+1}=y_k+\frac{h(f_1+2f_2+2f_3+f_4)}{6}$

生成序列，其中 $f_1=f(t_k, y_k)$

$$f_2=f(t_k+\tfrac{h}{2}, y_k+\tfrac{h}{2}f_1)$$

$$f_3=f(t_k+\tfrac{h}{2}, y_k+\tfrac{h}{2}f_2)$$

$$f_4=f(t_k+h, y_k+hf_3)$$

- [龙格-库塔方法的精度]
- 设 $y(t)$ 是是初值问题的解，如果 $y(t) \in C^5[t_0, b]$ 且 $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^{M}$ 为4阶龙格-库塔方法产生的近似序列，则

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h^4)$$

$$|\varepsilon_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - hT_N(t_k, y_k)| = O(h^5)$$

- 最终全局误差

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^4)$$

■$N=2$的龙格-库塔（RK2）方法

对$y(t+h)$ 用2阶泰勒级数展开：

$$y(t+h)=y(t)+hy'(t)+\tfrac{1}{2}h^2y''(t)+C_Th^3+\cdots$$

其中

$$y''(t)=f_t(t,y)+f_y(t,y)y'=f_t(t,y)+f_y(t,y)f(t,y)$$

从而

$$y(t+h)=y(t)+hf(t,y)+\tfrac{1}{2}h^2f_t(t,y)+\tfrac{1}{2}h^2f_y(t,y)f(t,y)+C_Th^3+\cdots$$

- 由函数的线性组合逼近

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1$$

- 其中

$$f_0 = f(t, y)$$

$$f_1 = f(t+Ph, y+Qhf_0)$$

对f_1，用双独立变量的泰勒多项式逼近

$$f_1 = f(t,y) + Phf_t(t,y) + Qhf_y f(t,y) + C_P h^2$$

利用 $(P_2(t,y) = f(a,b) + f_t(a,b)(t-a) + f_y(y-b) + \cdots)$

- 得到RK2

$$y(t+h) = y(t) + (A+B)hf(t,y) + BPh^2 f_t(t,y)$$

$$+ BQh^2 f_y(t,y) f(t,y) + BC_P h^3$$

比较系数，有

$$A+B=1,\ \ BP=\tfrac{1}{2},\ \ BQ=\tfrac{1}{2}$$

选取 $A=\tfrac{1}{2},\ \ B=\tfrac{1}{2},\ P=1,\ \ Q=1$

[休恩方法]

$$y(t+h)=y(t)+\tfrac{h}{2}(f(t,y)+f(t+h,y+hf(t,y)))$$

选取 $A=0,\ \ B=1,\ P=\tfrac{1}{2},\ \ Q=\tfrac{1}{2}$

[改进的欧拉-柯西方法]

$$y(t+h)=y(t)+hf(t+\tfrac{h}{2},y+\tfrac{h}{2}f(t,y))$$

Runge-Kutta方法

下面给出两种常见的 3 阶 R-K 公：一种是

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\
k_1 = f(t_n, y_n) \\
k_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 = f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2)
\end{cases}, \tag{8.36}
$$

它被称为 3 阶 Kutta 公式；另一种是 Ralston 公式[18]：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \\
k_1 = f(t_n, y_n) \\
k_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 = f\left(t_n + \dfrac{3h}{4}, y_n + \dfrac{3h}{4}k_2\right)
\end{cases}。 \tag{8.37}
$$

龙格-库塔-费尔伯格(RKF45)方法（不作推导）

自动改变步长，每步取6个值：

$$k_1 = hf(t_k, y_k)$$

$$k_2 = hf\left(t_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{k_1}{4}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_k + \frac{3h}{8}, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_k + \frac{12h}{13}, y_k + \frac{1923}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

- 用4阶龙格-库塔方法求近似解

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{25}{216}k_1 + \tfrac{1408}{2565}k_3 + \tfrac{2197}{4101}k_4 - \tfrac{1}{5}k_5$$

用5阶龙格-库塔方法得更好的解

$$z_{k+1} = y_k + \tfrac{16}{135}k_1 + \tfrac{6656}{1825}k_3 + \tfrac{28561}{56430}k_4 - \tfrac{9}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6$$

最佳步长 sh

标量

$$s = \left(\frac{\mathrm{tol}\times \mathrm{h}}{2\left|z_{k+1} - y_{k+1}\right|}\right)^{1/4} \approx 0.84\left(\frac{\mathrm{tol}\times \mathrm{h}}{\left|z_{k+1} - y_{k+1}\right|}\right)^{1/4}$$

Tol为指定的误差控制容差

- 例.区间[0,1.4]上的初值问题

$y' = 1 + y^2 \quad y(0)=0$

RKF45： tol= 2×10^{-5} ，

自动改变步长，10步

FGE= 6.2741*10-04

t_k	y_k
0	0
0.1272727	0.1279644
0.3818181	0.4015230
0.6363636	0.7389110
0.8909090	1.2369304
1.0181818	1.6215642
1.1454545	2.2076309
1.2090909	2.6431869
1.2727272	3.2551861
1.3045454	3.6669442
1.3363636	4.1875201
1.3522727	4.5034758
1.3681818	4.8682042
1.3840909	5.2941765
1.4000000	5.7985111

RK4

- FGE= 0.0059089，固定步长， 14步

t_k	y_k
0	0
0.1000000	0.1003345
0.2000000	0.2027098
0.3000000	0.3093360
0.4000000	0.4227929
0.5000000	0.5463023
0.6000000	0.6841367
0.7000000	0.8422885
0.8000000	1.0296390
0.9000000	1.2601587
1.0000000	1.5574064
1.1000000	1.9647465
1.2000000	2.5720717
1.3000000	3.6015634
1.4000000	5.7919748

讨论：

- 如何利用Runge-Kutta方法求解高阶常微分方程

作业

P328 9.2.3 #1

P334 9.3.2 #3

P339 9.4.1 #2

P349 9.5.5 #4

多步法

- 一般解法: $y_{n+1}=G(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k})$　　解$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
  若k为正整数，这就是多步法
- 线性多步法 (线性m步法) $$y_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_{n+1-i}+h\sum_{i=0}^{m}\beta_i f(t_{n+1-i}, y_{n+1-i})$$
  固定步长h
- 若$\beta_0 \neq 0$，为隐格式法，否则为显格式法
- 通过尽可能高阶准确度的要求，来确定参数α_i和β_i

多步法

- 常用的多步法公式
  - Adams公式 $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{m} \beta_i f(t_{n+1-i}, y_{n+1-i})$
  - 已满足$y(t) = 1$时对应的l_{n+1}=0, 至少有0阶准确度
  - Adams显格式公式: 参数β_i满足线性方程组的系数矩阵为
  - Adams隐格式公式，也可类似求系数

  - **Th8.4**: m步Adams公式, 若是隐格式,
    可达到m+1阶准确度; 若是显格式,
    可达m阶准确度

多步法

- Adams公式 $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{m}\beta_i f(t_{n+1-i}, y_{n+1-i})$
  - 几种显式公式

阶数	β_1	β_2	β_3	β_4	稳定阈值	误差常数
1	1				-2	1/2
2	3/2	-1/2			-1	5/12
3	23/12	-16/12	5/12		-6/11	3/8
4	55/24	-59/24	37/24	-9/24	-3/10	251/720

欧拉法

对模型问题分析稳定性, 得

  - 几种隐式公式

阶数	β_0	β_1	β_2	β_3	稳定阈值	误差常数
1	1				-∞	-1/2
2	1/2	1/2			-∞	-1/12
3	5/12	8/12	-1/12		-6	-1/24
4	9/24	19/24	-5/24	1/24	-3	-19/720

向后欧拉法

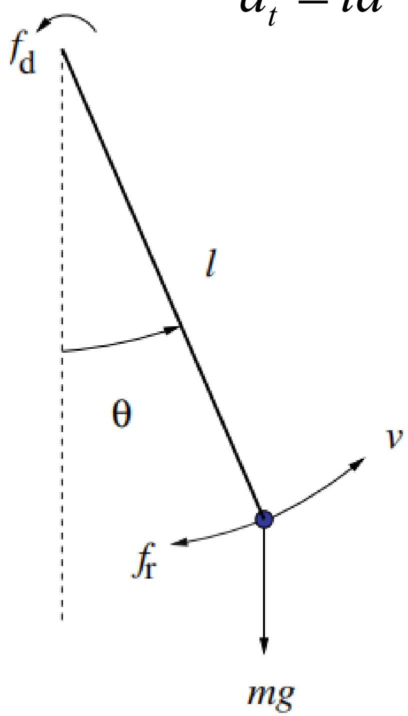
梯形法

并非无条件稳定!

课程设计 1.驱动摆（二选一）

$$ma_t = f_g + f_d + f_r,$$

$$a_t = ld^2\theta/dt^2, \qquad f_g = -mg\sin\theta, \qquad f_d = f_0\cos\omega_0 t, \qquad f_r = -kv.$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = b\cos\omega_0 t$$

$$q = k/m, \qquad b = f_0/ml.$$

课程设计要求

- 1.实现Euler方法, Heun方法, 3阶和4阶Runge-Kutta方法、2阶显格式Adams方法、四阶显格式和隐格式方法。

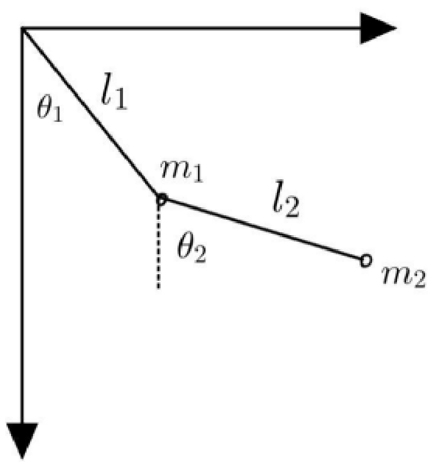
- 2.对给定的参数，分析不同的数值方法的误差随着步长h、时间t的变化规律

- 3.选择一种高精度方法，分析 $\theta(t)$ 和 $\omega(t)=d\theta(t)/dt$ 随参数ω_0, q,b的变化规律

- 4.课程设计报告要求汉字字数3000以上

课程设计 2.复合双摆（二选一）

$$L = T - V,$$



$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 - l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

动力学过程由拉格朗日方程给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

课程设计要求

- **1.**实现**Euler**方法, **Heun**方法, **3**阶和**4**阶**Runge-Kutta**方法、 **2**阶显格式**Adams**方法、四阶显格式和隐格式方法。

- **2.**对给定的参数，分析不同的数值方法的误差随着步长h、时间t的变化规律

- **3.**选择一种高精度方法，分析双摆轨迹随初始条件θ_{10}和θ_{20}的变化规律，及随参数l_1, l_2, m_1, m_2的变化规律。

- **4.**课程设计报告要求汉字字数**3000**以上

课程设计报告

- 1.问题描述
- 2.程序实现及其说明
- 3.结果与讨论
  - 3.1 误差分析
  - 3.2 方程的解随参数的变化规律
- 4.总结

6.边值和本征值问题

典型的边值问题由二阶微分方程给出

$$u'' = f(u, u', x)$$

例如：弦振动方程

$$u''(x) = -k^2 u(x)$$

不失一般性，设边界在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处。

边界条件有四类

（1） $u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1$

（2） $u(0) = u_0 \quad u'(1) = v_1$

（3） $u'(0) = v_0 \quad u(1) = u_1$

（4） $u'(0) = v_0 \quad u'(1) = v_1$

边值问题比初值问题难，因为我们不能简单用‘迭代’方法求解。

‘迭代’需要已知 $u(0)$ 和 $u'(0)$。

本征值问题比边值问题还难，需要求解带特殊参数的微分方程

$$u'' = f(u, u', x, \lambda)$$

这里 λ 在边界条件确定时，只能取特殊值方程才有解。例如，量子力学的本征方程，给出量子化的物理量。

The Shooting Method

对第（1）类边值问题，

1） 设 $u(0)=u_0 \qquad u'(0)=\delta$

然后用初值问题中的迭代方法求解方程。当然，得到的结果 $u_\delta(1)$ 一般和给定的边值 $u(1)=u_1$ 不一致。

2） 改变 δ，求 $f(\delta)=u_\delta(1)-u_1=0$ 的根

例子：求解方程 $u''(x)=-\frac{\pi^2}{4}[u(x)+1]$，其中边界条件 $u(0)=1,\ u(1)=1$。上式的精确解为 $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+2\sin\frac{\pi x}{2}-1$，与数值结果比较。

boundary.m