



# 第九章 微分方程求解

# 常微分方程基本概念

## ■ 什么是常微分方程？

- 天体运动的轨迹、机器人控制、化学反应过程的描述和控制、以及电路瞬态过程分析
- 要求解随时间变化的物理量, 即未知函数 $y(t)$
- 未知函数及其各阶导函数满足特定方程(物理规律)
- 未知函数是单变量函数, 这种方程被称为常微分方程 (ordinary differential equation, ODE)

## ■ 本章内容

- 常微分方程初值问题
- 简单的数值解法与有关概念
- Runge-Kutta方法; 多步法

# 常微分方程基本概念

■ 常微分方程:  $g(t, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$     函数  $y(t)$  简写为  $y, \dots$

■ k阶常微分方程: 方程中含未知函数的最高阶导数为  $y^{(k)}$

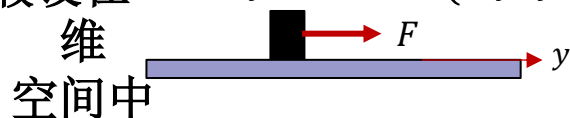
■ 显式常微分方程:  $y^{(k)} = f(t, y, y', \dots, y^{(k-1)})$

■ 通过变量代换, 得到一阶常微分方程组

$$\begin{array}{ll} u_1(t) = y(t), & u'_1 = u_2 \\ u_2(t) = y'(t), & u'_2 = u_3 \\ \dots, & \dots \\ u_k(t) = y^{(k-1)}(t) & u'_k = f(t, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{array} \quad \Rightarrow$$

■ 只需考虑一阶常微分方程/方程组  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$

■ 例(牛顿第二定律):  $F = ma$ ,  $\quad \quad \quad \xrightarrow{\quad} \quad \quad \quad \begin{array}{l} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = \frac{1}{m}F(t, u_1, u_2) \end{array}$   
假设在一  $my''(t) = F(t, y, y'(t))$



# 常微分方程基本概念

- 例: 解常微分方程  $y' = y$
- 解: 采用分离变量法,  $\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dt$   $\ln(y) = t + c$
- 两边积分, 得到原方程的解为  $y(t) = c \cdot e^t$ ,  $c$  为任意常数
- 仅根据常微分方程无法得到唯一的解
- 还需在一些自变量点上给出未知函数的值
- 对1阶ODE: 给出  $t = t_0$  时的函数值  $y(t_0) = y_0$   
初值问题: 
$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
- 一般, 从  $t_0$  时刻的初始状态  $y_0$  开始, 常微分方程决定了  $y(t)$  在  $t > t_0$  时的变化规律, 即可确定常微分方程的唯一解

# 常微分方程基本概念

## ■ 方程的分类 $y' = f(t, y)$

- 线性常微分方程:  $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ ,  $f$  是  $y$  的线性函数
- 线性齐次常微分方程, 线性齐次常系数微分方程 如  $y' = \lambda y$

## ■ ODE初值问题的敏感性

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

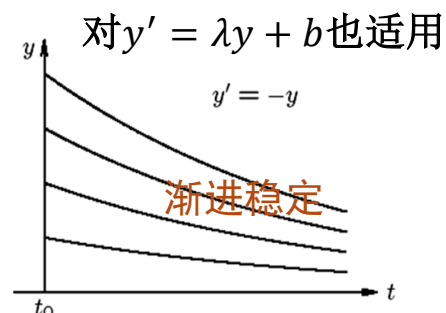
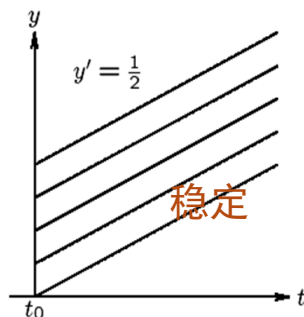
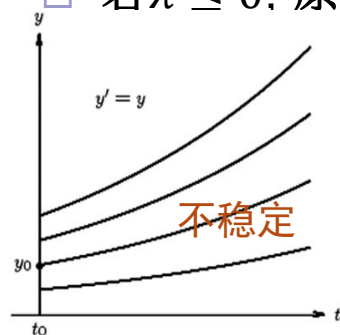
- 考虑初值发生扰动对解的影响
- 问题的解是一个函数, 主要关心  $t \rightarrow \infty$  时  $y(t)$  受影响情况 (由于历史原因)
- 定义: ODE初值问题的稳定性
- 若  $t \rightarrow \infty$  时  $y(t)$  的偏差被控制在有界范围内, **稳定(stable)**
- 若  $t \rightarrow \infty$  时  $y(t)$  的偏差发散为无穷大, **不稳定(unstable)**
- 若  $t \rightarrow \infty$  时  $y(t)$  的偏差趋于零, **渐进稳定(asymptotically stable)**

解实际问题应考虑其稳定性!

# 常微分方程基本概念

■ **例8.2:** “模型问题”的稳定性  $\begin{cases} y' = \lambda y, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

- 准确解为:  $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$
- 扰动后初值  $y_0 + \delta$ , 解为  $\hat{y}(t) = (y_0 + \delta) e^{\lambda(t-t_0)}$
- $\Delta y(t) = \hat{y}(t) - y(t) = \delta e^{\lambda(t-t_0)}$  稳定性取决于  $\lambda$  的值
- 若  $\lambda \leq 0$ , 原问题稳定; 若  $\lambda > 0$ , 原问题不稳定



对  $y' = \lambda y + b$  也适用

# Practice

- 将 $y'' = 2y + V(t)$ 写为一阶常微分方程组？其初值问题是什么？
- 一个ODE初值问题是渐进稳定的含义是什么？
  - ✓ 含义是若初值有微小偏差，当 $t$ 趋近于无穷大时，解出来的函数值的偏差趋于零

# 初值问题数值解法

- 大多数情况下(尤其是方程组),  $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  无解析解
- 数值解法: 得到一系列离散自变量点上的解函数近似值, 也称为“离散变量法”
- “步进式”的计算过程  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$   
 $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots$
- 相邻自变量点的间距:  $h_n = t_{n+1} - t_n$ , 称为步长(可取很定的 $h$ )
- 利用近似解满足的方程  $y_{n+1} = G(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})$   
 得到递推计算公式
- 若  $k = 0$ , 为单步法 否则为多步法
- 若函数  $G$  与  $y_{n+1}$  无关, 为显格式方法 计算较简单
- 若  $G$  与  $y_{n+1}$  有关, 为隐格式方法

$y_n$  与  
 $y(t_n)$   
 的区别?



# 欧拉法

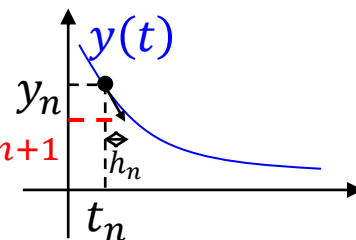
求解  $y' = f(t, y)$

- 是显式单步法:  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

- **推导1**: 数值微分的向前差分公式

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h_n}$$

换成函数近似  
值  $y_{n+1}, y_n$



“左矩形”求积公式

- **推导2**: 数值积分

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \approx h_n f(t_n, y(t_n))$$

- **例**

$$\begin{cases} y' = t - y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

步长  $h=0.1$ , 和  $0.05$

步长小的更准

h=0.1			h=0.05			
$t_n$	$y_n$	$y(t_n)$	$t_n$	$y_n$	$t_n$	$y_n$
0.1	1.000000	1.004837	0.05	1.000000	0.3	1.035092
0.2	1.010000	1.018731	0.1	1.002500	0.35	1.048337
0.3	1.029000	1.040818	0.15	1.007375	0.4	1.063420
0.4	1.056100	1.070320	0.2	1.014506	0.45	1.080249
0.5	1.090490	1.106531	0.25	1.023781	0.5	1.098737

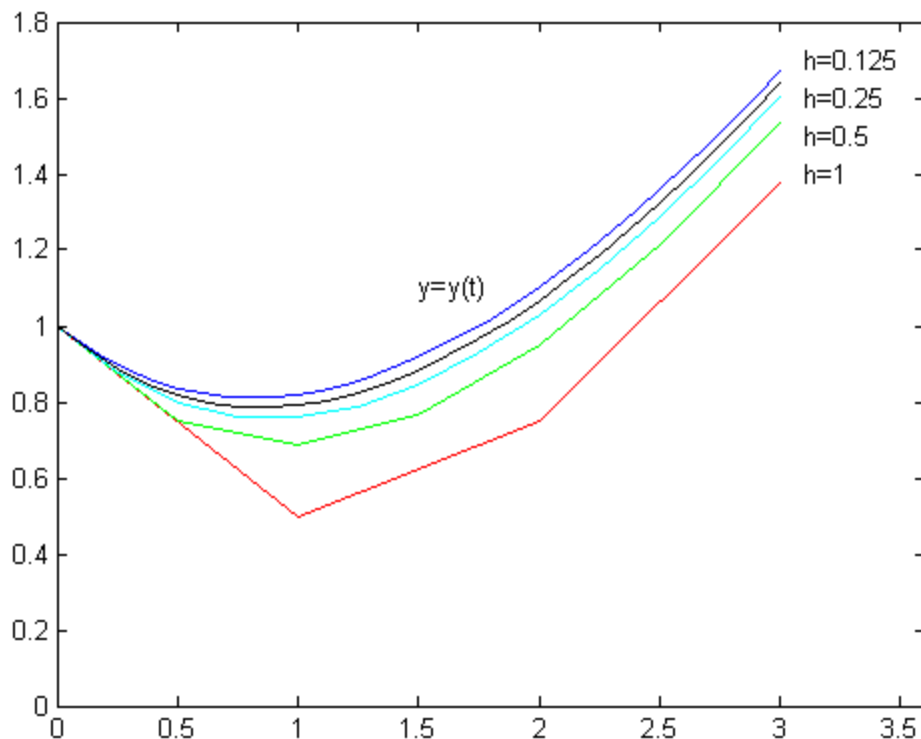
准确解  $y(t) = t + e^{-t}$ ,  $y(0.5) \approx 1.1065$

用欧拉方法求解[0,3]上的初值问题:

$$y' = (t - y) / 2, \quad y(0) = 1$$

exm3.m

精确解  $y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$



$h$	$M$	FGE
1.0000	3.0000	0.2944
0.5000	6.0000	0.1355
0.2500	12.0000	0.0651
0.1250	24.0000	0.0320
0.0625	48.0000	0.0158
0.0313	96.0000	0.0079
0.0156	192.0000	0.0039

# 数值解法的稳定性

- **ODE**初值问题数值解法的**稳定性**: 解函数近似值 $y_n$ 存在误差, 在后续递推计算过程中, 它会如何传播?
- **定义8.2**: 若在节点 $t_n$ 上的函数近似值有扰动 $\delta_n$ , **由它引起**的后续节点 $t_m$ 上的误差 $\delta_m$ 满足 $|\delta_m| \leq |\delta_n|$ , 则该方法**稳定**
- 仅考虑**截断误差** 以欧拉法为例, 针对模型问题 $y' = \lambda y$
- 计算公式为 $y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$
- $y_n$ 上的扰动 $\delta_n$ 引起 $y_{n+1}$ 的误差:  $\delta_{n+1} = (1 + h\lambda)\delta_n$
- 要保证欧拉法稳定  $\longleftrightarrow |1 + h\lambda| \leq 1$

若 $\lambda$ 为实数则 $\lambda < 0$ , 且 $h \leq \frac{-2}{\lambda}$

- 为了保证数值解法的稳定性步长**h**不能太大

# 数值解法的稳定性

- **例8.5:** 用欧拉法求解  $\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}$  步长  $h=0.025$ , 求  $y(0.15)$

- 解:  $y_{n+1} = y_n + h(-100y_n) = -1.5y_n$

计算结果如下表:

$t_n$	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
$y_n$	1	-1.5	2.25	-3.375	5.0625	-7.59375	11.3906
$y(t_n)$	1	0.082085	0.006738	0.000553	$4.54 \times 10^{-5}$	$3.73 \times 10^{-6}$	$3.06 \times 10^{-7}$

- 准确解为  $y(t) = e^{-100t}$
- 从结果看, 欧拉法的误差越来越大, 上下波动
- 要保证欧拉法稳定, 应使  $h \leq \frac{-2}{\lambda} = 0.02$  这里设的  $h$  太大!

# Practice

- 什么是ode初值问题的数值计算的显格式方法和隐格式方法?
  - ✓ 若计算公式 $y_{n+1} = G(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})$ 中，G函数显含 $y_{n+1}$ 则为隐格式，若不含有 $y_{n+1}$ 则为显格式
- 对 $y' = \lambda y$ ，欧拉法的计算公式是什么?
  - ✓  $y_{n+1} = y_n + h_n \lambda y_n$

# 数值解法的局部截断误差

- **定义 8.3:** 求解初值问题的数值解法  $y_{n+1} = G(y_{n+1}, y_n, \dots, y_{n-k})$ , 在假设  $y_{n-i} = y(t_{n-i})$ ,  $(0 \leq i \leq k)$  的前提下,  $l_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$  称为该方法的局部截断误差

- 局部截断误差反映了一步计算产生的误差, 一般仅能研究局部截断误差

- **例:** 欧拉法的局部截断误差

$$l_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$$

- 对模型问题  $y' = \lambda y$   $l_{n+1} = y(t_n)[e^{h\lambda} - 1 - h\lambda] = O(h^2)$
- 对一般的  $y' = f(t, y)$ , 有同样的结论  $l_{n+1} = O(h^2)$

# 数值解法的局部截断误差

- **定义8.4**:若某种解法的局部截断误差 $l_{n+1} = O(h^{p+1})$ , 则称该方法具有**p阶准确度**
- 实际关心整体误差 $e_n = y_n - y(t_n)$ . 在适当条件下, 若局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ , 则整体误差 $e_n = O(h^p)$   
欧拉法有**1阶准确度**

我们讨论的所有方法都至少有1阶准确度

数值解法的**收敛性**: 随着 $h \rightarrow 0$ , 误差 $\rightarrow 0$

# 向后欧拉法与休恩（梯形）法

- 从数值积分的角度推导 要求解  $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$   

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds}_{\frac{1}{2} h_n [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]} \quad \begin{matrix} \text{右矩形} \\ \text{梯形} \end{matrix}$$

- 向后欧拉法:  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$

- 休恩法:  $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h_n [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$

- 两者均为单步、**隐格式方法**, 每步计算要求解(非线性)方程

$$\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{步长 } h=0.025, \text{ 求 } y(0.15)$$

- 例: 用向后欧拉法求解

$t_n$	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15
$y_n$	1	0.285714	0.0816327	0.023323	0.006663	0.001904	0.000544
$y(t_n)$	1	0.082085	0.006738	0.000553	$4.54 \times 10^{-5}$	$3.73 \times 10^{-6}$	$3.06 \times 10^{-7}$



# 向后欧拉法与休恩法

- 例:用向后欧拉法求解  $\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}$  步长 $h=0.025$ , 求 $y(0.15)$
- 随 $n$ 增大, 误差趋于0
- 比欧拉法效果好得多
- 向后欧拉法的稳定性

□ 模型问题 $y' = \lambda y$  ( $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ )

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n$$

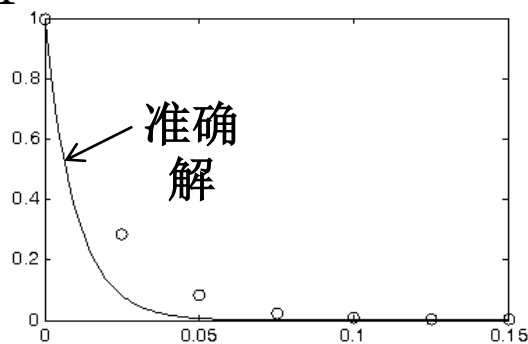
设 $y_n$ 存在扰动 $\delta_n$ , 引起 $y_{n+1}$ 的误差为

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} \delta_n \longrightarrow \text{稳定的条件是: } \left| \frac{1}{1-h\lambda} \right| \leq 1$$

即 $|h\lambda - 1| \geq 1$  对任意的 $h$ 都满足

无条件稳定(unconditionally stable)!

绝对稳定(A-stable)



# 向后欧拉法与休恩法

- 对一般的方程  $y' = f(t, y)$ , 类似地分析知, 只要初值问题本身是稳定的, 向后欧拉法也是**无条件稳定的**

- 向后欧拉法的**准确度**

□ 考虑一般的方程  $y' = f(t, y)$

$$\begin{aligned} l_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + O(h^2) - hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= hf'_y(t_{n+1}, \xi)[y(t_{n+1}) - y_{n+1}] + O(h^2) \\ &= hf'_y(t_{n+1}, \xi) \cdot l_{n+1} + O(h^2) \end{aligned}$$

→ 
$$l_{n+1} = \frac{1}{1 - hf'_y(t_{n+1}, \xi)} O(h^2) = O(h^2) \text{ 具有1阶准确度!}$$

# 向后欧拉法与休恩法

## ■ 休恩法的稳定性

□ 模型问题  $y' = \lambda y$


$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2} (y_n + y_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1} = \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda} y_n$$

稳定的条件是:  $\left| \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda} \right| \leq 1 \iff \text{Re}(h\lambda) \leq 0$  无条件稳定!

■ 梯形法的准确度  $l_{n+1} = O(h^3)$  具有2阶准确度 (被积函数用线性插值)

## ■ 小结

- 无条件稳定或稳定区域大的方法, 在步长h较大时它仍能保证计算的稳定性
- 准确度阶数越高, 计算误差随步长减小而减小的速度越快


$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}(f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1)))$$

用欧拉方法近似式子右边中的

$$y(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

得到休恩方法

$$y_1 = y(t_0) + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0)))$$

一般步骤

$$p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad t_{k+1} = t_k + h$$

微分预报子

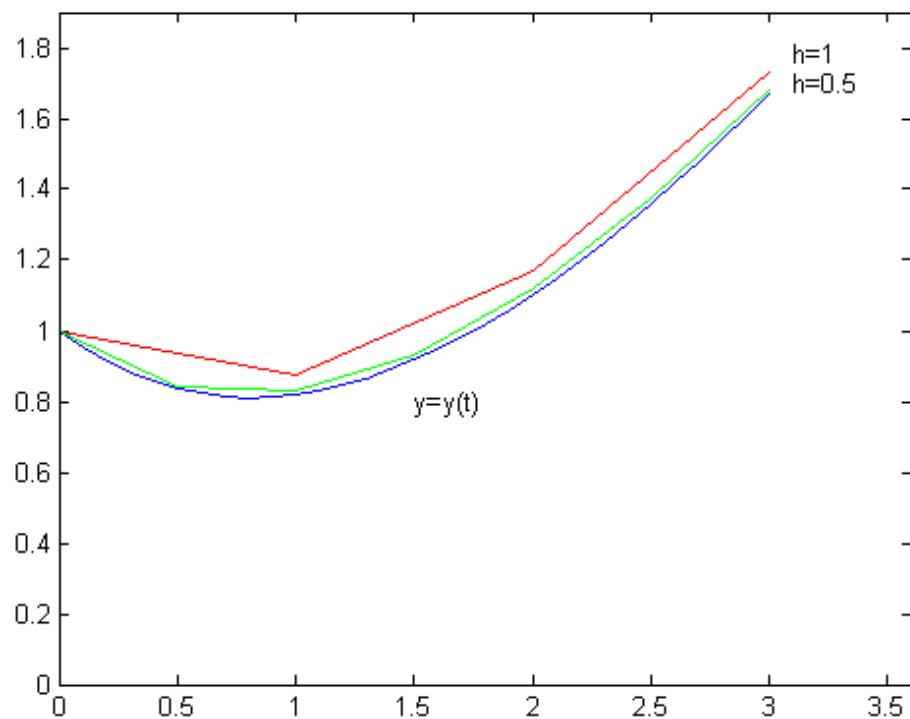
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1}))$$

积分校正子

得到逼近  $y = y(t)$  的一系列点

# 休恩方法求解

$$y' = (t - y) / 2, \quad y(0) = 1$$



$h$	$M$	FGE
[ 1.0,	3.0,	0.063031]
[ 0.5,	6.0,	0.012730]
[ 0.25,	12.0,	0.002878]
[ 0.125,	24.0,	0.000685]
[ 0.0625,	48.0,	0.000167]
[ 0.03125,	96.0,	0.000041]
[ 0.015625,	192.0,	0.000010]

## 4. 泰勒级数法

[泰勒定理]: 设  $y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$ , 且  $y(t)$  在  $t = t_k \in [t_0, b]$  处有  $N$  次泰勒级数展开:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_N(t_k, y(t_k)) + O(h^{N+1})$$

其中

$$T_N(t_k, y(t_k)) = \sum_{j=1}^N \frac{y^{(j)}(t_k)}{j!} h^{j-1}$$

$y^{(j)}(t) = f^{(j-1)}(t, y(t))$  是函数  $f$  关于  $t$  的  $j-1$  次全导数

$$y^{(N)}(t) = P^{(N-1)} f(t, y(t)) \quad P = \left( \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

- 区间 $[t_0, t_M]$ 上初值问题的近似解可由各子区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 应用而得到

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2 h^2}{2!} + \cdots + \frac{d_N h^N}{N!}$$

在各步 $k = 0, \cdots, M-1$  , 有 $d_j = y^{(j)}(t_k)$       $j = 1, \cdots, N$

## ■ [ $N$ 次泰勒方法的精度]

设  $y(t)$  是初值问题的解, 如果  $y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$ ,  
而  $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^M$  为  $N$  次泰勒方法产生的近似序列  
则

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h^N)$$

$$|\varepsilon_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - hT_N(t_k, y_k)| = O(h^{N+1})$$

最终全局误差

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^N)$$



## 泰勒方法求解初值问题

$$y' = (t - y) / 2, \quad y(0) = 1$$

取四次泰勒方法，有

$$y' = (t - y) / 2$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{t - y}{2} \right) = \frac{2 - t + y}{4}$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2 - t + y}{4} \right) = \frac{-2 + t - y}{8}$$

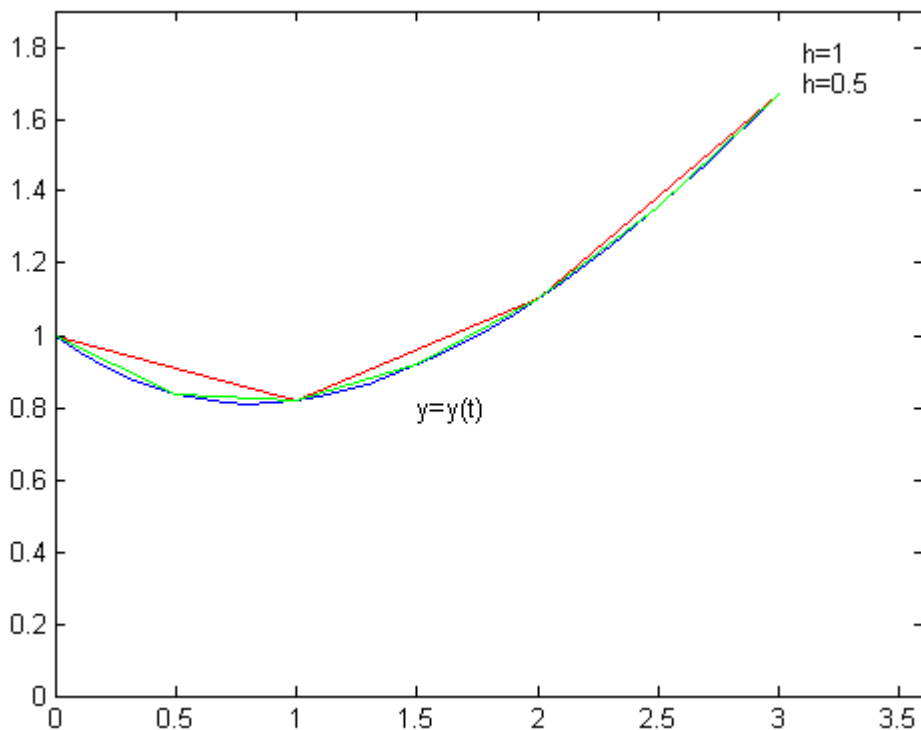
$$y^{(4)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{-2 + t - y}{8} \right) = \frac{2 - t + y}{16}$$

## 构造4阶导数表

$df=@(t,y) [(t-y)/2 \ (2-t+y)/4 \ (-2+t-y)/8 \ (2-t+y)/16];$

exm5

$h$	$M$	FGE
[ 1.0,	3.0,	0.0007955]
[ 0.5,	6.0,	0.0000402]
[ 0.25,	12.0,	0.0000022]
[ 0.125,	24.0,	0.0000001]



## ■ 5. 龙格-库塔(Runge-Kutta)方法

泰勒方法的优点是最终全局误差阶为  $O(h^N)$

缺点：需要先确定 $N$ ，并计算高阶导数。

4阶龙格-库塔方法(RK4)模拟4阶泰勒方法精度：

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4$$

其中

$$k_1 = hf(t_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(t_k + a_1 h, y_k + b_1 k_1)$$

$$k_3 = hf(t_k + a_2 h, y_k + b_2 k_1 + b_3 k_2)$$

$$k_4 = hf(t_k + a_3 h, y_k + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3)$$

- 比较4阶泰勒级数方法得到的系数，并令

$$a_1 = 1/2, b_2 = 0$$

有

$$a_1 = 1/2, a_2 = 1/2, a_3 = 1,$$

$$b_1 = 1/2, b_2 = 0, b_3 = 1/2, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 1$$

$$w_1 = 1/6, w_2 = 1/3, w_3 = 1/3, w_4 = 1/6$$

得到从初始点  $(t_0, y_0)$  开始，由  $y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6}$

生成序列，其中  $f_1 = f(t_k, y_k)$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_2\right)$$

$$f_4 = f(t_k + h, y_k + hf_3)$$

## ■ [龙格-库塔方法的精度]

- 设  $y(t)$  是初值问题的解，如果  $y(t) \in C^5[t_0, b]$  且  $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^M$  为4阶龙格-库塔方法产生的近似序列，则

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h^4)$$

$$|\varepsilon_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - hT_N(t_k, y_k)| = O(h^5)$$

## ■ 最终全局误差

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^4)$$

## ■ $N=2$ 的龙格-库塔（RK2）方法

对  $y(t+h)$  用 2 阶泰勒级数展开：

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2 y''(t) + C_T h^3 + \dots$$

其中

$$y''(t) = f_t(t, y) + f_y(t, y)y' = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)$$

从而

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y) + \frac{1}{2}h^2 f_t(t, y) + \frac{1}{2}h^2 f_y(t, y)f(t, y) + C_T h^3 + \dots$$

## ■ 由函数的线性组合逼近

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1$$

## ■ 其中

$$f_0 = f(t, y)$$

$$f_1 = f(t + Ph, y + Qhf_0)$$

对  $f_1$  , 用双独立变量的泰勒多项式逼近

$$f_1 = f(t, y) + Phf_t(t, y) + Qhf_y f(t, y) + C_P h^2$$

利用  $(P_2(t, y) = f(a, b) + f_t(a, b)(t - a) + f_y(y - b) + \dots)$

## ■ 得到RK2

$$\begin{aligned} y(t+h) = & y(t) + (A+B)hf(t, y) + BPh^2 f_t(t, y) \\ & + BQh^2 f_y(t, y)f(t, y) + BC_P h^3 \end{aligned}$$

比较系数，有

$$A + B = 1, \quad BP = \frac{1}{2}, \quad BQ = \frac{1}{2}$$

选取  $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, P = 1, Q = 1$

[休恩方法]

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}(f(t, y) + f(t+h, y + hf(t, y)))$$

选取  $A = 0, B = 1, P = \frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2}$

[改进的欧拉-柯西方法]

$$y(t+h) = y(t) + hf(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$$



# Runge-Kutta方法

下面给出两种常见的 3 阶 R-K 公：一种是

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}, \quad (8.36)$$

它被称为 3 阶 Kutta 公式；另一种是 Ralston 公式<sup>[18]</sup>：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right) \end{cases}. \quad (8.37)$$

## ■ 龙格-库塔-费尔伯格(RKF45)方法（不作推导）

自动改变步长，每步取6个值：

$$k_1 = hf(t_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(t_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{k_1}{4})$$

$$k_3 = hf(t_k + \frac{3h}{8}, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(t_k + \frac{12h}{13}, y_k + \frac{1923}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

## ■ 用4阶龙格-库塔方法求近似解

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4101} k_4 - \frac{1}{5} k_5$$

用5阶龙格-库塔方法得更好的解

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{1825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6$$

最佳步长 $sh$

标量

$$s = \left( \frac{\text{tol} \times h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4} \approx 0.84 \left( \frac{\text{tol} \times h}{|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4}$$

Tol为指定的误差控制容差

■ 例.区间[0,1.4]上的初值问题

$$y' = 1 + y^2 \quad y(0)=0$$

**RKF45:**  $\text{tol}=2 \times 10^{-5}$ ,  
自动改变步长, 10步

$$\text{FGE} = 6.2741 \times 10^{-4}$$

$t_k$	$y_k$
0	0
0.1272727	0.1279644
0.3818181	0.4015230
0.6363636	0.7389110
0.8909090	1.2369304
1.0181818	1.6215642
1.1454545	2.2076309
1.2090909	2.6431869
1.2727272	3.2551861
1.3045454	3.6669442
1.3363636	4.1875201
1.3522727	4.5034758
1.3681818	4.8682042
1.3840909	5.2941765
1.4000000	5.7985111

RK4

- FGE= 0.0059089,  
固定步长, 14步

$t_k$	$y_k$
0	0
0.1000000	0.1003345
0.2000000	0.2027098
0.3000000	0.3093360
0.4000000	0.4227929
0.5000000	0.5463023
0.6000000	0.6841367
0.7000000	0.8422885
0.8000000	1.0296390
0.9000000	1.2601587
1.0000000	1.5574064
1.1000000	1.9647465
1.2000000	2.5720717
1.3000000	3.6015634
1.4000000	5.7919748



讨论：

- 如何利用Runge-Kutta方法求解高阶常微分方程



## 作业

P328 9.2.3 #1

P334 9.3.2 #3

P339 9.4.1 #2

P349 9.5.5 #4