第七章 数值积分

- 积分简介
- 组合梯形公式和辛普森公式
- 递归公式和龙贝格积分
- 自适应积分

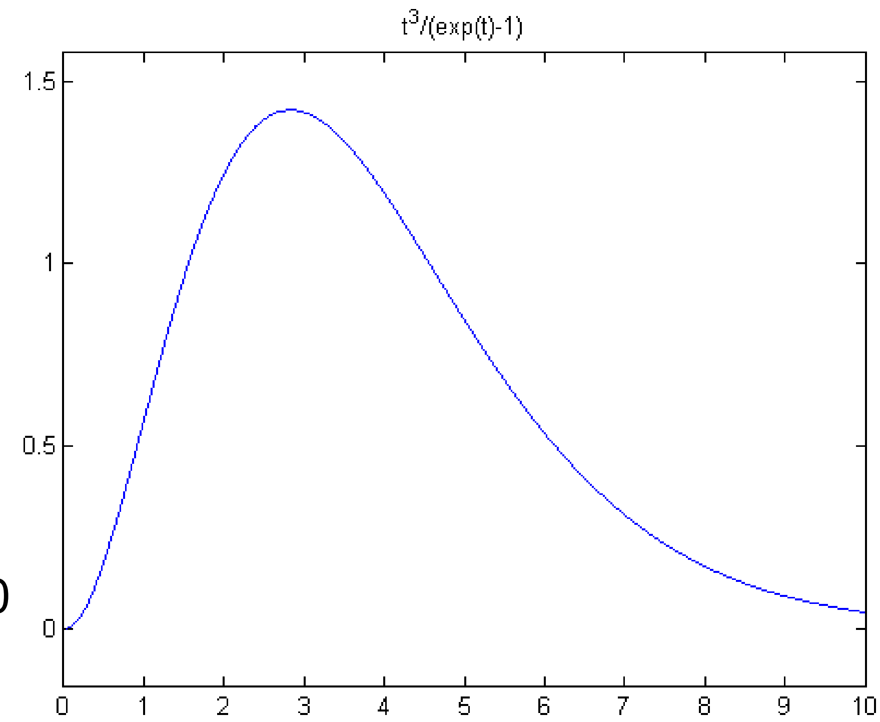
- 数值积分可用于计算无法解析求解的定积分的近似解

exm_1.m

$$\Phi(x)=\int_0^x \frac{t^3}{e^t-1}dt$$

```
f=@(t) t.^3./(exp(t)-1);
S=quad(f,a,b,tol);
```

x	$\Phi(x)$
1.000000000000000	0.224805190000000
2.000000000000000	1.176342600000000
3.000000000000000	2.552218450000000
4.000000000000000	3.877054170000000
5.000000000000000	4.899892160000000
6.000000000000000	5.585855380000000
7.000000000000000	6.003168960000000
8.000000000000000	6.239623800000000
9.000000000000000	6.366573900000000
10.000000000000000	6.431921900000000



1.积分简介

- 定义：设 $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_M = b$，称形如：

$$Q[f] = \sum_{k=0}^{M} w_k f(x_k)$$

且具有性质

$$\int_a^b f(x)dx = Q[f] + E[f]$$

的公式为数值积分或面积公式，$E[f]$称为截断误差，$\{x_k\}_{k=0}^{M}$为节点，$\{w_k\}_{k=0}^{M}$称为权。

- 定义：面积公式的精度为 $\boldsymbol{n}$，使得当次数 $i \le n$ 的多项式 $P_i(x)$，都满足 $E[P_i]=0$，对某些次数为 $\boldsymbol{n}+1$的多项式，有 $E[P_{n+1}]\neq 0$ 。

  截断误差的一般形式为

$$E[f]=Kf^{(n+1)}(c)$$

$\boldsymbol{n}$ 为精度

- 基于多项式插值做面积公式推导，过 $M+1$ 个等距点 $\{x_k, f(x_k)\}_{k=0}^{M}$ ，存在唯一的次数小于等于 M 的多项式 $P_M(x)$ ；用多项式来近似 $[a,b]$ 区间上的函数 $f(x)$，$P_M(x)$ 的积分近似 $f(x)$ 的积分。
- 取 $x_0 = a, x_M = b$，得到闭型牛顿-科特斯公式

闭型牛顿-科特斯公式

设等距节点 $x_k = x_0 + hk$，$f_k = f(x_k)$， 得到前4个闭型牛顿-科特斯公式面积公式：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad \text{（梯形公式）}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{（辛普森公式）}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \text{（辛普森}\frac{3}{8}\text{公式）}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \qquad \text{（布尔公式）}$$

$$h = (b-a)/n$$

牛顿-科特斯公式精度

设 $f(x)$ 充分可微，则

- 梯形公式精度为 $n=1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(c)$$

- 辛普森公式精度为 $n=3$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

- 辛普森 $\frac{3}{8}$ 公式精度为 $n=3$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(c)$$

- 布尔公式精度为 $n=5$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(c)$$

- 证明简述：
- 由拉格朗日多项式逼近函数

$$f(x) \approx P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} f_k L_{M,k}(x)$$

可得到

$$\int_{x_0}^{x_M} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_M} P_M(x)dx = \sum_{k=0}^{M}\left(\int_{x_0}^{x_M} L_{M,k}(x)dx\right)f_k = \sum_{k=0}^{M} w_k f_k$$

计算权w_k时，利用变量替换 $x = x_0 + ht \quad dx = hdt$

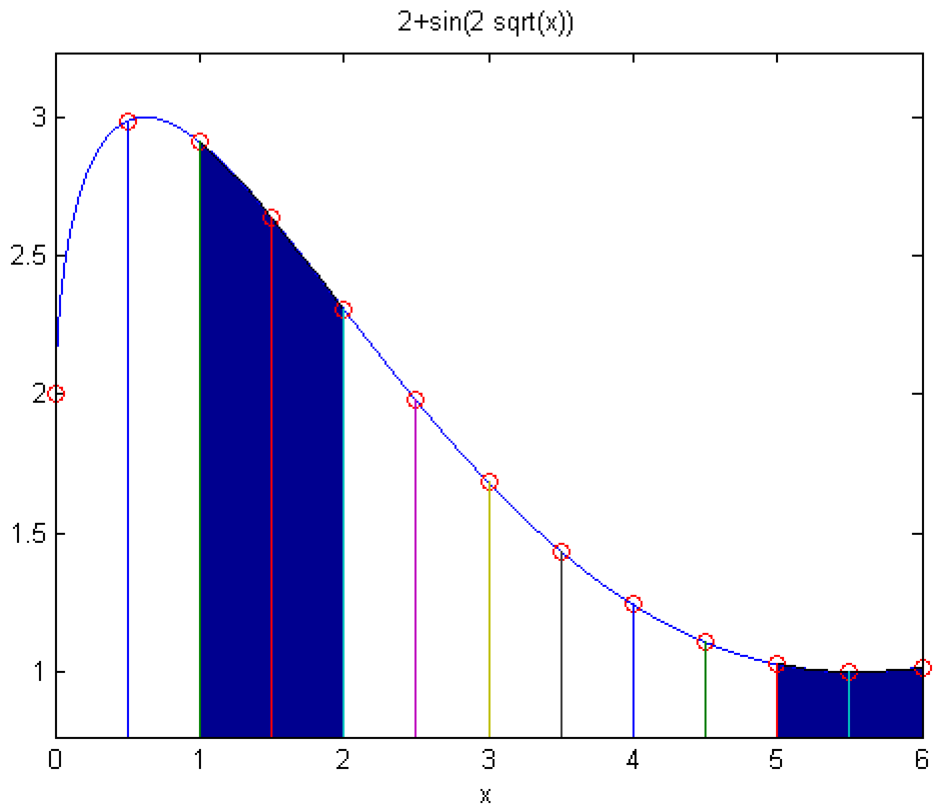
再利用等距节点条件 $x_k = x_0 + hk$，对多项式进行积分可得结果。

- 例：考虑函数 $f(x)=1+e^{-x}\sin(4x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分。 exm_2.m
- 梯形公式，$h=1$，$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0)+f(1)) \quad =0.86079$
- 辛普森公式，$h=\frac{1}{2}$，
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/2}{3}(f(0)+4f(\tfrac{1}{2})+f(1)) \quad =1.32128$$
- 辛普森 $\frac{3}{8}$ 公式，$h=\frac{1}{3}$
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3\ (1/3)}{8}(f(0)+3f(\tfrac{1}{3})+3f(\tfrac{2}{3})+f(1)) \quad =1.31440$$
- 布尔公式，$h=\frac{1}{4}$
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2\ (1/4)}{45}(7f(0)+32f(\tfrac{1}{4})+12f(\tfrac{2}{4})+32f(\tfrac{3}{4})+7f(1)) \quad =1.30859$$
- 准确值： $\int_0^1 f(x)dx = 1.3082506046426$

2.组合梯形公式和辛普森公式

- 曲线 $y=f(x)$ 的面积可用区间 $\{[x_k, x_{k+1}]\}$ 上的一系列梯形面积来近似。

$$f(x)=2+\sin(2\sqrt{x})$$



[1，6]，h=0.5

组合梯形：T=8.193854565

精确值：Int_f=8.183479207

组合辛普森 S=8.183015494

exm_3.m

- 组合梯形公式
- 设等距节点 $[x_k, x_{k+1}], k=0,\cdots,M$，将区间$[a,b]$划分为宽度为 $h=(b-a)/M$的M 个子区间 $x_k=a+kh$，则组合梯形公式为：

$$T(f,h)=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)=\frac{h}{2}(f_0+f_M)+h\sum_{k=1}^{M-1}f(x_k)$$

- 证明：在每个子区间 $[x_{k-1}, x_k], k=1,\cdots,M$应用梯形公式，并利用区间积分的可加性，得

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{M}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{M}\frac{h}{2}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)$$

- 组合辛普森公式
- 设 $x_k = a + kh$，$k = 0,\cdots,2M$，将区间$[a,b]$划分为$2M$个宽度为$h = (b-a)/2M$的等距子区间$[x_k, x_{k+1}]$，则组合辛普森公式为：

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

$$= \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(f,h)$$

- 误差分析（利用拉格朗日多项式及误差界）
- 组合梯形公式的误差项为：

$$E_T(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12}=O(h^2)$$

- 组合辛普森公式的误差项为：

$$E_S(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(4)}(c)h^4}{180}=O(h^4)$$

- 例：对函数 $f(x)=1/x$，在区间$[2,7]$，分别使 $E_T(f,h)$ 、$E_S(f,h)$ 小于 5×10^{-9}，计算M和步长h
- 组合梯形公式： $E_T(f,h)=\dfrac{-(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12}$

$$\left|f^{(2)}(c)\right|\le\left|f^{(2)}(2)\right|=\left|2/2^3\right|=\tfrac{1}{4}$$

$$\left|E_T(f,h)\right|=\frac{\left|-(b-a)f^{(2)}(c)h^2\right|}{12}\le\frac{5h^2}{48}$$

- $h=(b-a)/M=5/M,$

$$M\ge 22821.77\sim 22822$$

$$h=5/M=0.000219086846$$

- 组合辛普森：

$$E_S(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(4)}(c)h^4}{180}=O(h^4)$$

$$\left|f^{(4)}(c)\right|\le\left|f^{(4)}(2)\right|=\left|24/2^5\right|=\tfrac{3}{4}$$

$$\left|E_S(f,h)\right|=\frac{\left|-(b-a)f^{(4)}(c)h^4\right|}{180}\le\frac{h^4}{48}$$

$$h=(b-a)/2M=5/2M$$

$$M\ge 112.95\sim 113$$

exm_4.m

$$h=5/2M=0.02212389381$$

3.递归公式及龙贝格积分

- 用梯形公式的线性组合计算辛普森逼近;
- [连续梯形公式] 设 $J \geq 1$，点$\{x_k = a + kh\}$，将$[a,b]$划分为$2^J = 2M$个宽度为$(b-a)/2^J$的子区间，梯形公式 $T(f,h)$、$T(f,2h)$满足关系:

$$T(f,h)=\frac{T(f,2h)}{2}+h\sum_{k=1}^{M}f(x_{2k-1})$$

证明：

- 记 $T(0)=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))$，即步长为 $h=(b-a)$ 的梯形公式；
- $T(J)=T(f,h)$为步长$h=(b-a)/2^J$ 的梯形公式；$J\geq 1$
- 对偶节点 $x_0,x_2,\cdots,x_{2M}$，使用步长为 $2h$的组合梯形公式，有

$$T(J-1)=\frac{2h}{2}(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M})$$

- 对全部节点 $x_0,x_1,\cdots,x_{2M}$，使用步长为 h 的组合梯形公式，有

$$T(J)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\cdots+2f_{2M-1}+f_{2M})$$

- 将下标中奇数项和偶数项分开，得到

$$T(J)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\cdots+2f_{2M-1}+f_{2M})$$

$$=\frac{h}{2}(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M})+h\sum_{k=1}^{M}f_{2k-1}$$

并由

$$T(J-1)=\frac{2h}{2}(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M})$$

可得到

$$T(J)=\frac{T(J-1)}{2}+h\sum_{k=1}^{M}f(x_{2k-1})$$

- 而 $T(J)=T(f,h)$ ， $T(J-1)=T(f,2h)$

- 例.函数$f(x)=1/x$， 区间[1, 5]。

$$h=(b-a)=4 \qquad T(0)=\frac{4}{2}(f(1)+f(5))$$

$$J=1 \quad h=(b-a)/2=2 \qquad T(1)=\frac{T(0)}{2}+2(f(3))$$

$$J=2 \quad h=(b-a)/2^2=1 \qquad T(2)=\frac{T(1)}{2}+1(f(2)+f(4))$$

$$J=3 \quad h=(b-a)/2^3=1/2$$

$$T(3)=\frac{T(2)}{2}+\tfrac{1}{2}(f(1.5)+f(2.5)+f(3.5)+f(4.5))$$

注意： $f_0=f(1)$

- 梯形公式与辛普森公式之间关系：

[递归辛普森公式]：记步长 $h=(b-a)/2^J, 2^J=2M$ 的辛普森公式为 $S(J)=S(f,h)$

$$S(f,h)=\frac{h}{3}(f(a)+f(b))+\frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1}f(x_{2k})+\frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M}f(x_{2k-1})$$

- 则有

$$S(J)=\frac{4T(J)-T(J-1)}{3}$$

$$J=1,2,\ldots$$

- 证明：步长为 h 的梯形公式为

$$T(J)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\cdots+2f_{2M-1}+f_{2M})$$

步长为$2h$的梯形公式为

$$T(J-1)=\frac{2h}{2}(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M})$$

$$\begin{aligned}4T(J)-T(J-1)&=2h(f_0+2f_1+\cdots+2f_{2M-1}+f_{2M})\\&\quad-\frac{2h}{2}(f_0+2f_2+\cdots+2f_{2M-2}+f_{2M})\\&=h(f_0+4f_1+2f_2\cdots+4f_{2M-1}+f_{2M})\\&=h(f_0+f_{2M})+2h\sum_{k=1}^{M-1}f_{2k}+4h\sum_{k=1}^{M}f_{2k-1}\end{aligned}$$

- 比较可得

$$S(J)=\frac{4T(J)-T(J-1)}{3}$$

- 组合布尔公式
- 区间$[a,b]$，宽度$h=(b-a)/4M$的4个等距子区间上，各自应用布尔公式，得到组合布尔公式：

$$B(f,h)=\frac{2h}{45}\sum_{k=1}^{M}(7f_{4k-4}+32f_{4k-3}+12f_{4k-2}+32f_{4k-1}+7f_{4k})$$

- 递归布尔公式：
- $B(J)$为区间$[a,b]$上$2^J, J\geq 2$个子区间的布尔公式，与辛普森公式关系为

$$B(J)=\frac{16S(J)-S(J-1)}{15}, J=2,3,\cdots$$

- 龙贝格积分
- 组合公式及其误差项

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,h) + O(h^2) \qquad \text{（组合梯形公式）}$$

$$\int_a^b f(x)dx = S(f,h) + O(h^4) \qquad \text{（组合辛普森公式）}$$

$$\int_a^b f(x)dx = B(f,h) + O(h^6) \qquad \text{（组合布尔公式）}$$

- 推广：设用步长 h 和 $2h$ 得到逼近公式的两个结果，则两个结果的代数运算得到改进，误差项的阶由 $O(h^{2N})$ 提高到 $O(h^{2N+2})$，该过程称为龙贝格积分。

- [龙贝格积分的理查森改进]:
- 给定 Q的两个逼近$R(2h,K-1)$和$R(h,K-1)$
- 满足

$$Q=R(h,K-1)+c_1h^{2K}+c_2h^{2K+2}+\cdots$$

$$Q=R(2h,K-1)+c_1 4^K h^{2K}+c_2 4^{K+1} h^{2K+2}+\cdots$$

- 其改进的逼近形式为

$$Q=\frac{4^K R(h,K-1)-R(2h,K-1)}{4^K-1}+O(h^{2K+2})$$

- 一般公式
- 定义$[a,b]$上$f(x)$的面积公式序列

$$\left\{R(J,K): J \geq K\right\}_{J=0}^{\infty}$$

为:

$$R(J,0)=T(J), J \geq 0, \quad \text{连续梯形公式}$$

$$R(J,1)=S(J), J \geq 1, \quad \text{连续辛普森公式}$$

$$R(J,2)=B(J), J \geq 2, \quad \text{连续布尔公式}$$

- 则有一般形式:

$$R(J,K)=\frac{4^{K} R(J,K-1)-R(J-1,K-1)}{4^{K}-1}, \quad J \geq K$$

- [龙贝格积分精度]：设 $f \in C^{2K+2}[a,b]$，则龙贝格逼近的截断误差由公式

$$\int_a^b f(x)dx = R(J,K) + b_K h^{2K+2} f^{(2K+2)}(c_{J,K})$$

$$= R(J,K) + O(h^{2K+2})$$

给出，其中 $h=(b-a)/2^J$， $c_{J,K} \in [a,b]$

4.自适应积分

- 采用变步长方法，基础是辛普森公式；

$$S(a_k,b_k)=\frac{h}{3}(f(a_k)+4f(c_k)+f(b_k))$$

其中 $c_k=(a_k+b_k)/2$

- 如果 $f\in C^4[a_k,b_k]$，则存在一个 $d_1\in[a_k,b_k]$

使得

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S(a_k,b_k)-h^5\frac{f^{(4)}(d_1)}{90}$$

- 区间细分：
区间$[a_k,b_k]$划分为相等的两个子区间$[a_{k1},b_{k1}]$
$[a_{k2},b_{k2}]$，分别用辛普森公式，得到：

$$
\begin{aligned}
S(a_{k1},b_{k1})+S(a_{k2},b_{k2}) &= \frac{h}{6}(f(a_{k1})+4f(c_{k1})+f(b_{k1})) \\
&+\frac{h}{6}(f(a_{k2})+4f(c_{k2})+f(b_{k2}))
\end{aligned}
$$

- 其中c_{k1}是$[a_{k1},b_{k1}]$中点，c_{k2}是$[a_{k2},b_{k2}]$中点。
如果$f\in C^4[a_k,b_k]$，存在$d_2\in[a_k,b_k]$，

$$
\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S(a_{k1},b_{k1})+S(a_{k2},b_{k2})-\frac{h^5}{16}\frac{f^{(4)}(d_2)}{90}
$$

- 设$f^{(4)}(d_1) \approx f^{(4)}(d_2)$，有

$$-h^5 \frac{f^{(4)}(d_2)}{90} \approx \frac{16}{15}(S(a_{k1},b_{k1})+S(a_{k2},b_{k2})-S(a_k,b_k))$$

- 得到误差估计:

$$\left|\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx - S(a_{k1},b_{k1}) - S(a_{k2},b_{k2})\right|$$

$$\approx \frac{1}{15}\left|S(a_{k1},b_{k1})+S(a_{k2},b_{k2})-S(a_k,b_k)\right|$$

考虑到 $f^{(4)}(d_1) \approx f^{(4)}(d_2)$

将系数放大到 $\frac{1}{10}$

- 精度测试：
- 设对区间$[a_k, b_k]$，指定容差$\varepsilon_k > 0$
- 如果 $$\frac{1}{10}\left|S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - S(a_k, b_k)\right| < \varepsilon_k$$

则可推断 $$\left|\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx - S(a_{k1}, b_{k1}) - S(a_{k2}, b_{k2})\right| < \varepsilon_k$$

取 $$S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) = \frac{h}{6}(f(a_{k1}) + 4f(c_{k1}) + f(b_{k1})) + \frac{h}{6}(f(a_{k2}) + 4f(c_{k2}) + f(b_{k2}))$$

逼近 $$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \approx S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2})$$

- （算法略）
- 通过不断的将区间细分，并作精度测试，并在细分的区间上误差衰减，算法将在有限步后停止。

思考题：

- 1.如果已知的数据点是偶数个，如何构造simpson算法。
- 2.如果已知的数据点之间步长不均匀。

- 作业：
- P252 #6 7.1.1
- P260 #2 #9 7.2.2

- P271 #1 (a) (c) 7.3.2