

浙江工业大学

48 学时线性代数期末试卷

答案及评分标准

(2020 ~ 2021 第一学期)

任课教师 _____ 学院班级: _____ 选课班中编号: _____

学号: _____ 姓名: _____ 得分: _____

题号	一	二	三	四
得分				

一. 填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分

1. $f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数是 -3.

2. 设 A 为三阶方阵, 且 $\det(A) = 3$, 则 $\det(A^{-1} - \text{adj}A) = \underline{-8/3}$.

3. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in R^3$, 且 $\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 0 & 4 \\ y & z & 6 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\beta = \underline{9}$, $|\alpha\beta^T| = \underline{0}$.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(AB)^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. 向量空间 $W = \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)^T \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$ 的维数为 2.

6. 写出与向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交的所有向量: $k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in R^3$, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \text{ 则线性方程组 } Ax = \beta \text{ 的解集为 } k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. 设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $\lambda = \underline{1}$, $x = \underline{-2}$.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 16 分)

本题得分	
------	--

1. 设 A, B 均是 n 阶矩阵, 且 $AB = I, BC = 2I$, 则 $(A - C)^2 B = (\quad A \quad)$.

(A) A (B) C (C) $2A$ (D) $2C$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则(B).

(A) $B = EAF$ (B) $B = FAE$ (C) $B = EFA$ (D) $B = AFE$

3. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = O$, I 是 n 阶单位阵, 则(D).

(A) $|I - A| \neq 0$, 但 $|I + A| = 0$ (B) $|I - A| = 0$, 但 $|I + A| \neq 0$

(C) $|I - A| = 0$, 且 $|I + A| = 0$ (D) $|I - A| \neq 0$, 且 $|I + A| \neq 0$

4. 设 n 维非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性相关, 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则线性方程组

$$AX = \beta \text{ 的解的情况为 } (\quad C \quad)$$

(A) 必有无穷多解 (B) 必有唯一解

(C) 不一定有解 (D) 以上都不对

5. 设矩阵 A 的行最简形为 U , 则以下命题错误的是 (B).

(A) A 和 U 的行空间相同 (B) A 和 U 的列空间相同

(C) A 和 U 的零空间相同 (D) A 和 U 的秩相同

6. 设 B 为 n 阶矩阵, I 是 n 阶单位阵, 那么 $\begin{pmatrix} O & I \\ I & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是(D).

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{B} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

7. 设矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 的长度等于(B).

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

8. 设 \mathbf{A} 为 n 阶正交矩阵, 则以下命题错误的是(D).

- (A) \mathbf{A} 的行向量两两正交 (B) \mathbf{A}^T 也为正交阵
(C) \mathbf{A} 的列向量两两正交 (D) \mathbf{A} 的行列式必为 1

三、计算题 (共 45 分)

1	2	3	4	5	本题总得分

1. (9 分) 设线性变换 $L: R^3 \rightarrow R^3$ 定义为: $L(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_3, x_2 + x_3)^T$,

- 1) 求 L 在有序基 $[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 下的表示矩阵 \mathbf{A} ;
2) 求从标准基 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 到有序基 $[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 的转移矩阵 \mathbf{S} ;
3) 向量 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, 求 $L(\mathbf{v})$ 在有序基 $[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 下的坐标.

1)

$$L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

.....4 分

2) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \mathbf{S}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$3) \quad L(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ 故坐标为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

2. (8 分) 设 $AX = 2B + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 计算矩阵 X .

$$(A - I)X = 2B \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$X = (A - I)^{-1} 2B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -10 \\ 10 & 10 & 12 \\ -8 & -6 & -10 \end{pmatrix} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$3. \quad (8 \text{ 分}) \text{ 已知 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ 选取其中}$$

若干向量构成空间 $V = \text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 的一组基, 并求其余向量在这组基下的坐标.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 11 & -11 & 2 & 37 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -42 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -38 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.....6 分

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是所求的一个极大无关组,

且有 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4, \alpha_5 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4$

.....8 分

4. (10 分) 试问当 a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} 3ax_1 + (2a+1)x_2 + (a+1)x_3 = a \\ (4a-1)x_1 + 3ax_2 + 2ax_3 = 1 \\ (2a-1)x_1 + (2a+1)x_2 + (a+1)x_3 = a+1 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解? 并在其有无穷多解时求出所有解.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a & 2a+1 & a+1 \\ 4a-1 & 3a & 2a \\ 2a-1 & 2a+1 & a+1 \end{vmatrix} = -a(a+1)(a-1),$$

.....2 分

当 $a \neq 0, a \neq \pm 1$ 时, 原方程组有唯一解.

.....4 分

$$\text{当 } a=0, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{原方程组有无穷多组解, } \mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.....6 分

$$\text{当 } a=1, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

原方程组有无穷多组解, $\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 8 分

当 $a = -1, \tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2, R(\tilde{A}) = 3$

原方程组无解.10 分

5. (10 分) (1) 已知三阶矩阵 A 的每一行的 3 个元素之和都为 a , 求出矩阵 A

的属于特征值 a 的一个特征向量;

(2) 对于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 D , 使 $Q^T B Q = D$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 分

(2) 令 $|B - \lambda E| = (5 - \lambda)(2 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$, 得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$;

.....4 分

B 的属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交化, 得 $p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化, 得 $q_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

.....8 分

B 的属于 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化, 得 $q_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

取 $Q=(q_1, q_2, q_3)$, 则 $Q^T B Q = D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$10 分

四、证明题（共 9 分）

1	2	本题总得分

1. （5 分）已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量

$\beta_1 = \alpha_1 + k\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + k\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + k\alpha_1$ ，证明：当实数 $k \neq -1$ 时， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

证明：由已知， $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & & k \\ k & 1 & \\ & k & 1 \end{vmatrix} = 1 + k^3 \neq 0$,3 分

故 $\text{rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.5 分

2. （4 分）设 n 阶方阵 A, B 满足 $A+B=AB$ 且 A 为对称阵，证明矩阵 B 也为对称阵.

证明：由已知， $(A-I)(B-I)=I$ ，得 $B=(A-I)^{-1}+I$,2 分

故 $B^T = ((A-I)^{-1})^T + I^T = ((A-I)^T)^{-1} + I = (A-I)^{-1} + I = B$4 分