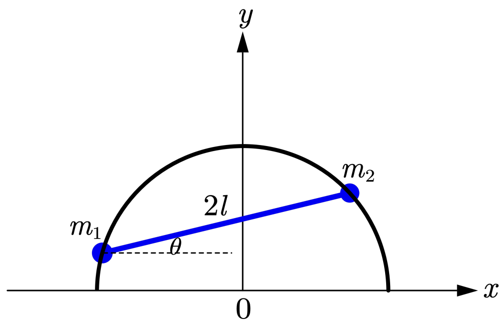
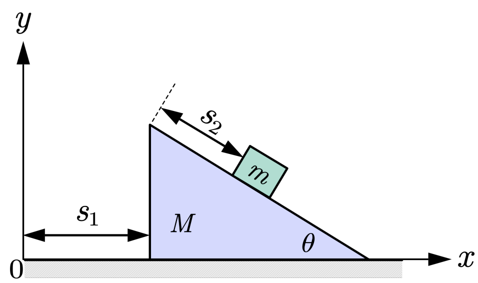
《分析力学》期中考试(2025)

每题5分，共20分。

1. 光滑钢丝弯成半径为R的半圆并竖直放置。钢丝上穿着两个质点，质量分别为m_1和m_2，两质点由长度为2ℓ的不可伸长的轻绳连起来。请用虚功原理求平衡时绳子与水平面夹角θ。



2. 如图所示，质量为m的滑块放置在质量为M的光滑斜面体上。斜面体倾角为θ, 放置在光滑水平地面上。
(1) 以(s_1, s_2)为广义坐标，建立系统的拉氏量及运动方程。
(2) 求斜面体的加速度。

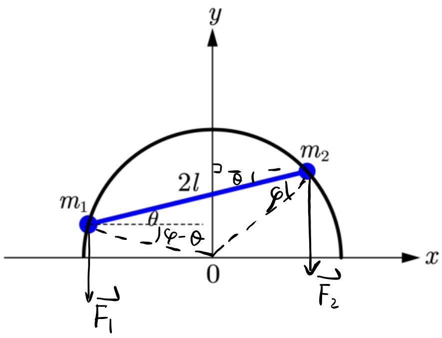


3. 已知泛函
$$J[x(t)] = \int_0^\pi (2x\sin t - \dot{x}^2)dt$$
设端点条件为$x(0) = x(\pi) = 0$。
(1) 试求使泛函J取极值的路径$x(t)$。
(2) 上述求出的$x(t)$是否使J取极小值？

4. 在笛卡尔坐标下, 万有引力势下的两体问题的等效单体拉氏量为
$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
其中$k > 0$。
(1) 证明：考虑以下无穷小变换
$$\delta x = -\epsilon y, \quad \delta y = \epsilon x.$$
其中ϵ为无穷小变换参数。证明L在此变换下不变并利用诺特定理写出对应的守恒量。
(2) 变换到极坐标
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$
将拉氏量用(r, θ)表示出来，从中可看出其中一个广义坐标为循环坐标。证明此循环坐标的共轭动量即为上述守恒量，并解释此守恒量的物理意义。

期中考试参考答案

1. 光滑钢丝弯成半径为R的半圆并竖直放置。钢丝上穿着两个质点，质量分别为m_1和m_2，两质点由长度为2ℓ的不可伸长的轻绳连起来。请用虚功原理求平衡时绳子与水平面夹角θ。



解：两质点位矢：

$$\vec{r_1} = -R\cos(\varphi-\theta)\,\vec{e_x} + R\sin(\varphi-\theta)\,\vec{e_y}$$

$$\vec{r_2} = R\cos(\varphi+\theta)\,\vec{e_x} + R\sin(\varphi+\theta)\,\vec{e_y}$$

虚位移：

$$\delta\vec{r_1} = -R\sin(\varphi-\theta)\,\delta\theta\,\vec{e_x} - R\cos(\varphi-\theta)\,\delta\theta\,\vec{e_y}$$

$$\delta\vec{r_2} = -R\sin(\varphi+\theta)\,\delta\theta\,\vec{e_x} + R\cos(\varphi+\theta)\,\delta\theta\,\vec{e_y}$$

主动力：

$$\vec{F_1} = -m_1 g\,\vec{e_y}\,,\quad \vec{F_2} = -m_2 g\,\vec{e_y}$$

虚功原理：

$$\vec{F_1}\cdot\delta\vec{r_1} + \vec{F_2}\cdot\delta\vec{r_2} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 g R\cos(\varphi-\theta) - m_2 g R\cos(\varphi+\theta) = 0$$

$$\Rightarrow m_1\cos(\varphi-\theta) - m_2\cos(\varphi+\theta) = 0$$

$$\Rightarrow m_1(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) - m_2(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow (m_1-m_2)\cos\varphi\cos\theta + (m_1+m_2)\sin\varphi\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\cot\varphi$$

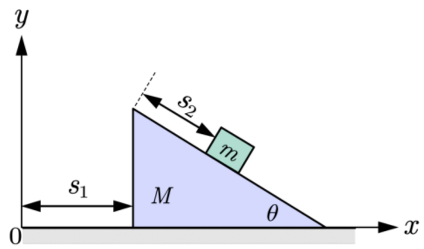
由几何关系：$\cos\varphi = \dfrac{\ell}{R} \Rightarrow \cot\varphi = \dfrac{\ell/R}{\sqrt{1-\ell^2/R^2}}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}}$$

2. 如图所示，质量为m的滑块放置在质量为M的光滑斜面体上。斜面体倾角为θ, 放置在光滑水平地面上。

(1) 以(s_1, s_2)为广义坐标，建立系统的拉氏量及运动方程。

(2) 求斜面体的加速度。



解：(1) 假设斜面顶端高度为 h

滑块位矢：

$$\vec{r}_m = (s_1 + s_2\cos\theta)\vec{e_x} + (h - s_2\sin\theta)\vec{e_y}$$

滑块速度：

$$\dot{\vec{r}}_m = (\dot{s}_1 + \dot{s}_2\cos\theta)\vec{e_x} - \dot{s}_2\sin\theta\,\vec{e_y}$$

滑块动能：

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_m^{\,2} = \frac{1}{2}m\left[(\dot{s}_1 + \dot{s}_2\cos\theta)^2 + (\dot{s}_2\sin\theta)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + 2\dot{s}_1\dot{s}_2\cos\theta\right)$$

斜面体动能

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{s}_1^2$$

总动能

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}_2^2 + m\dot{s}_1\dot{s}_2\cos\theta$$

总的重力势能（以地面为零点）　斜面体重力势能，为常数

$$V = mg(h - s_2\sin\theta) + V_M$$

拉氏量

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}_2^2 + m\dot{s}_1\dot{s}_2\cos\theta - mg(h - s_2\sin\theta) - V_M$$

运动方程：

① s_1 的方程：

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} = (m+M)\dot{s}_1 + m\dot{s}_2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)\ddot{s}_1 + m\ddot{s}_2\cos\theta = 0$$

② s_2的方程：

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = mg\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} = m\dot{s}_2 + m\dot{s}_1\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{s}_2 + \ddot{s}_1\cos\theta - g\sin\theta = 0$$

(2) 由①②可得

$$(m+M)\ddot{s}_1 + m\cos\theta(g\sin\theta - \ddot{s}_1\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{s}_1 = -\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

3. 已知泛函

$$J[x(t)] = \int_0^\pi (2x\sin t - \dot{x}^2)dt$$

设端点条件为$x(0) = x(\pi) = 0$。

(1) 试求使泛函J取极值的路径$x(t)$。

(2) 上述求出的$x(t)$是否使J取极小值？

解：(1) 欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin t, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}$$

$$\Rightarrow 2\sin t + 2\ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = \sin t + at + b, \quad (a, b\text{为积分常数})$$

由端点条件：$x(0) = x(\pi) = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

因此，极值路径为

$$x(t) = \sin t$$

(2) 考虑极值路径的变分

$$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$$

则泛函值变化

$$\begin{aligned}
\delta J &\equiv J[x(t)+\delta x(t)] - J[x(t)] \\
&= \int_0^\pi \left[2(x+\delta x)\sin t - (\dot{x}+\delta\dot{x})^2\right]dt - \int_0^\pi (2x\sin t - \dot{x}^2)dt \\
&= \int_0^\pi \left[2\delta x\sin t - 2\dot{x}\,\delta\dot{x} - (\delta\dot{x})^2\right]dt
\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\pi}\left[2\delta x\sin t-\frac{d}{dt}(2\dot{x}\delta x)+2\ddot{x}\delta x-(\delta\dot{x})^2\right]dt$$

$$=\cancelto{0}{-2\dot{x}\delta x\Big|_0^{\pi}}-\int_0^{\pi}(\delta\dot{x})^2dt\ \leq 0$$

因此，极值路径使 J 取极大值.

4. 在笛卡尔坐标下, 万有引力势下的两体问题的等效单体拉氏量为

$$L=\frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

其中$k>0$。

(1) 证明：考虑以下无穷小变换

$$\delta x=-\epsilon y,\quad \delta y=\epsilon x.$$

其中ϵ为无穷小变换参数。证明L在此变换下不变并利用诺特定理写出对应的守恒量。

(2) 变换到极坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

将拉氏量用(r,θ)表示出来，从中可看出其中一个广义坐标为循环坐标。证明此循环坐标的共轭动量即为上述守恒量，并解释此守恒量的物理意义。

(1) 证明：

$$\delta L=\mu(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y})-\frac{k}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\delta x+y\delta y)$$

$$=\mu(-\epsilon\dot{x}\dot{y}+\epsilon\dot{x}\dot{y})-\frac{k}{(x^2+y^2)^{3/2}}(-\epsilon xy+\epsilon xy)$$

$$=0$$

$\Rightarrow L$ 不变

由Noether定理知其对应的守恒量为

$$C=\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta x+\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\delta y\right]$$

$$=\mu(x\dot{y}-y\dot{x})$$

(2) 极坐标(r,θ)下，

$$L=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}$$

可见 θ 为循环坐标，其共轭动量为

$$p_\theta\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\mu r^2\dot{\theta}=\mu(x\dot{y}-y\dot{x})=(\vec{r}\times\vec{p})_z$$

即 p_θ 为上述守恒量，此守恒量为 z 方向上的角动量.