浙江工业大学2020 / 2021 (二) 期末试卷

《线性代数》 2021.06

姓名______________学号______________专业班级______________

题序	一	二	三	四	五	总评
计分						

一、填空题（每空3分，共18分）

1、若行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&x&-3\\3&-1&3\end{vmatrix}=0$，则 $x=$ __-1__. $D=2(3x-3)+(3+9)=0 \Rightarrow x=-1$

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$，则 $|\operatorname{adj}A-(2A)^{-1}|=$ __$\frac{1}{8}$__.

$\det(A)=1$ $\operatorname{adj}A=A^{-1}$ $\therefore |A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}|=|\frac{1}{2}A^{-1}|=(\frac{1}{2})^3\frac{1}{|A|}=\frac{1}{8}$

3、取 $\mathbf{u}_1=(2,1)^T,\mathbf{u}_2=(3,1)^T$ 作为向量空间 R^2 的一组基，则向量 $\mathbf{v}=(6,8)^T$ 在有序基 $[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]$ 下的坐标是 __$(18,-10)^T$__. $V=(u_1\ u_2)C$，$C=(u_1\ u_2)^{-1}V$

令 $\left[\begin{matrix}2&3\\1&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}6\\8\end{matrix}\right]\to\left[\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}18\\-10\end{matrix}\right]$

5、设向量 $\alpha=(1,1,-1,1)^T,\beta=(1,4,2,2)^T$，则 α 与 β 的夹角为 __$\frac{\pi}{3}$__. $\cos\theta=\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\frac{1+4-2+2}{2\times 5}=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$

6、设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&-2&-4\\1&1&x\\1&-1&0\end{bmatrix}$ 与对角阵 $\begin{bmatrix}\lambda&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$ 相似，则 $\lambda=$ __1__，$x=$ __-2__.

迹相同，则 $4+1+0=\lambda+2+2$ $\therefore\lambda=1$ 特征值相同 $\Rightarrow -4(-1)-x(-4+2)=\lambda\cdot2\cdot2=4 \Rightarrow x=-2$

二、判断题（每题2分，共10分）

1、（ ✓ ）若方阵 A 与 B 满足 $AB=A+B$，那么 $A-I$ 及 $B-I$ 均非奇异。

1. $(A-I)(B-I)=AB-(A+B)+I=I$ $\therefore |A-I||B-I|=|I|=1$ $\therefore |A-I|\neq0$ $|B-I|\neq0$ $\therefore A-I$ 非奇异 $B-I$ 非奇异.

2、（ ✗ ）如果 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$，则 $\operatorname{rank}(A^2)=\operatorname{rank}(B^2)$. 反例：幂零矩阵.

3、（ ✗ ）设 R^3 的子空间 $S=\{(s-t,t-u,u-s)^T|s,t,u\in R\}$，则 $\dim S=3$.

4、（ ✓ ）设 A 为 3×3 矩阵，若 $A-2I,2A+I$ 及 A 均为奇异矩阵，则 A 一定相似于一个对角矩阵.

5、（ ✓ ）如果 A 是非奇异矩阵，则 A^2 与 A 有相同的行空间、列空间及零空间.

3. $\begin{bmatrix}s-t\\t-u\\u-s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\\u\end{bmatrix}$ $\therefore S=\operatorname{span}\{a_1\ a_2\ a_3\}=\operatorname{span}\{a_1\ a_2\}$ $\therefore \dim S=2$. $\forall s,t,u\in R$.

$\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

4. $A-2I$ 奇异 $\Leftrightarrow$ 0是 $A-2I$ 特征值 $\Leftrightarrow$ 2是 A 的特征值. 同理可知 $-\frac{1}{2}$ 及0也是 A 的特征值. 3阶矩阵 A 有3个不同特征值 $\Rightarrow A$ 可对角化.

5. $A\cdot A=AA$ 初等行(列)变换不改变行(列)空间. A^2 非奇异. $A^2x=0$ 只有零解. $N(A^2)=\{0\}$.

三、选择题（每题3分，共21分）

1、设 A 为 $n\times n$ 对称矩阵，B 为任意 $n\times n$ 矩阵，则下列矩阵（ B ）可能不是对称矩阵.

A、$BA+AB^T$ B、$BA-AB^T$ C、$B(A+I)B^T$ D、$A-BB^T$

$(BA-AB^T)^T=AB^T-BA^T=AB^T-BA$ ✗ 反对称.

$(BA+AB^T)^T=A^TB^T+BA^T=AB^T+BA$ ✓ $(B(A+I)B^T)^T=B(A^T+I^T)B^T=B(A+I)B^T$ ✓ $(A-BB^T)^T=A^T-(BB^T)^T=A-BB^T$ ✓

2、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\3&-1&4\\2&6&k\end{bmatrix}$，如果 $\operatorname{rank}(A)<3$，则 $k=$ __D__.

$\det(A)=2(24-k)-(3k-8)+3(18+2)=0 \Rightarrow k=4$

A、1 B、2 C、3 D、4

3、设 $A=\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\1&2&0&1\\1&3&1&2\end{bmatrix}$，则下列矩阵（ A ）与 A 行等价.

$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (A)

A、$\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ B、$\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\1&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ C、$\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ D、$\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

4、设 A 与 B 为 $n\times n$ 矩阵，如果 A 非奇异，则下列结论错误的是（ D ）.

A、$\det(AB)=\det(BA)$. $=|A||B|$ B、如果 $AB=O$，则 $B=O$. A 可逆 $\therefore B=A^{-1}O=O$.

C、AB 与 BA 相似. $A^{-1}(AB)A=BA$ D、如果 $AB=B$，则 $A=I$. $AB-B=0$ $(A-I)B=0$ 若 $B=0$，则 $A-I$ 任意.

5、设 $A=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$，其中 $\mathbf{x}_i\in\mathbf{R}^3(i=1,2,3,4)$. 若 $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_4=\mathbf{b}$，则非线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解的个数为（ C ）.

$A\in R^{3\times4}\Rightarrow Ax=0$ 存在自由变量. $Ax=b$ 有解

A、0 B、1 C、∞ D、1或∞

6、设矩阵 A 的行最简形为 U，则以下命题错误的是（ D ）.

A、A 与 U 有相同的零空间 B、A 与 U 有相同的行空间

C、A 与 U 有相同的秩 D、A 与 U 有相同的特征值

初等行变换是可逆操作/同解变换 初等行变换不改变秩 只有相似才有相同特征值.

7、设矩阵 A 满足 $A^2+3A=4I$，则下列为奇异矩阵的是（ B ）.

A、$\operatorname{adj}(A)$ B、$\operatorname{adj}(A-I)$ C、$\operatorname{adj}(A+I)$ D、$\operatorname{adj}(A+2I)$

$A^2+3A-4I=0$ $(A+4I)(A-I)=0$. 则 $A+aI$ 可逆，当 $a\neq4$ 且 $a\neq-1$ 时 于是 $\operatorname{adj}(A+aI)$ 可逆，$a\neq4$ 且 $a\neq-1$

四、计算题（共35分）

1、（5分）设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 线性无关，若 $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$，$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_3$，$\mathbf{v}_3=k\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3$ 也线性无关，求参数 k 的取值范围.

$v_1v_2v_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow (v_1\ v_2\ v_3)c=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow (u_1\ u_2\ u_3)\begin{bmatrix}1&1&k\\-1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}c=0$ 只有零解

由 $u_1u_2u_3$ 线性无关

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&k\\-1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}c=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&k\\-1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ 可逆

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&1&k\\-1&0&1\\1&-1&2\end{vmatrix}\neq0$. i.e., $k\neq-4$.

2、（10分）设$\mathbf{R}^3$中向量 $\mathbf{u}_1=(1,1,1)^T$, $\mathbf{u}_2=(1,2,2)^T$, $\mathbf{u}_3=(2,3,4)^T$, $\mathbf{v}_1=(4,0,0)^T$, $\mathbf{v}_2=(0,1,1)^T$, $\mathbf{v}_3=(0,1,2)^T$.

（1）求$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$到$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$的转移矩阵.

（2）设 $\mathbf{R}^3$ 上的线性算子 L 相应于基$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$的表示矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\\2&6&1\end{bmatrix}$，求 L 相应于基$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$的表示矩阵.

1) $(u_1\ u_2\ u_3)=(v_1\ v_2\ v_3)S$. (*)

$S=(v_1\ v_2\ v_3)^{-1}(u_1\ u_2\ u_3)$

令 $\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&1&1&2\\0&1&1&1&2&3\\0&1&2&1&2&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac14&\frac14&\frac12\\0&1&1&1&2&3\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac14&\frac14&\frac12\\0&1&0&1&2&2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$ $\therefore S=\begin{bmatrix}\frac14&\frac14&\frac12\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

2) $(L(u_1)\ L(u_2)\ L(u_3))=(u_1\ u_2\ u_3)A$. 设$L$相应于$\{v_1\ v_2\ v_3\}$的表示矩阵是$B$，则$(L(v_1)\ L(v_2)\ L(v_3))=(v_1\ v_2\ v_3)B$.

由(*)，$(L(u_1)\ L(u_2)\ L(u_3))=(L(v_1)\ L(v_2)\ L(v_3))S$

$=(v_1\ v_2\ v_3)BS$

$=(u_1\ u_2\ u_3)S^{-1}BS$.

$\therefore A=S^{-1}BS$

$\therefore B=SAS^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&\frac14&\frac12\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\\2&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-1&-2\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&\frac34&-3\\48&-1&-14\\-8&4&-3\end{bmatrix}$

令 $\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac14&\frac14&\frac12&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&4&0&0\\0&1&0&-4&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-1&-2\\0&1&0&-4&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$

$\therefore S^{-1}=\begin{bmatrix}8&-1&-2\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3、（10分）考虑非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2a+1\\2x_1-ax_2+x_3=3a\\x_1+x_2-ax_3=a-1\end{cases}$.

（1）λ 取何值时，上述方程组有无穷多解;

（2）求线性方程组的所有解.

解: 令 $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-a&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=a^2-1-(-2a-1)-(2+a)=a^2+a-2=0$.

即 $(a-1)(a+2)=0$.

$\therefore$ 当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，方程有唯一解. $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2a+1\\2&-a&1&3a\\1&1&-a&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2a+1\\0&-a-2&3&-a-2\\0&0&1-a&-a-2\end{array}\right]\xrightarrow[1-a\neq0]{-a-2\neq0}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2a+1\\0&1&\frac{3}{-a-2}&1\\0&0&1&\frac{-a-2}{1-a}\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2a+1\\0&1&0&\frac{-a-2}{1-a}\\0&0&1&\frac{-a-2}{1-a}\end{array}\right]$

当 $a=1$ 时，$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\2&-1&1&3\\1&1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\2&-1&1&3\\0&0&0&-3\end{array}\right]$ 无解.

$\therefore\begin{bmatrix}2a+1\\\frac{-a-2}{1-a}\\\frac{-a-2}{1-a}\end{bmatrix}$

当 $a=-2$ 时，$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-3\\2&2&1&-6\\1&1&2&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-3\\0&0&3&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

令 $x_2=t$，$\{(-3-t,t,0)^T\mid t\in R\}$

综上，(1). $\lambda=-2$ 时无穷多解.

(2). $\begin{cases}\lambda=-2\text{ 时}，(-3-t,t,0)^T, t\in R.\\\lambda\neq-2\text{ 且 }\lambda\neq1\text{ 时}，\left(2a+1,\frac{-a-2}{1-a},\frac{-a-2}{1-a}\right)^T.\\\lambda=1\text{ 时}，无解\end{cases}$

4、（10分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\\alpha&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，$\lambda_1=\lambda_2=2$是$A$的二重特征值.

（1）证明 $\alpha=2$;

（2）求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $\Lambda=P^{-1}AP$.

1) $A-2I=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\\alpha&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&1\\\alpha&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2-\alpha&-2+\alpha\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\because A$有3个线性无关的特征向量. $\therefore A$可对角化

$\dim N(A-2I)=2$.

$\therefore 2-\alpha=-2+\alpha=0$ $\therefore\alpha=2$.

2) 由矩阵的迹 $1+4+5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3$ $\therefore\lambda_3=6$.

$A-\lambda_{1,2}I=A-2I=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $x_1=(-1,1,0)^T$ $x_2=(1,0,1)^T$

$A-\lambda_3I=A-6I=\begin{bmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&-3&-1\\-5&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-6&-4\\0&-6&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$x_3=(1,-2,3)^T$

令 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$ $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$

$\Lambda=P^{-1}AP$

五、证明题（每题8分，共16分）

1、设 $A\in R^{m\times n}, B\in R^{n\times m}$, $\text{rank}(A)=n$, 证明: $\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$.

证明: $n=rank(A)\le\min\{m,n\}$ $\therefore m\ge n$.

Case 1, $m=n$ 则A非奇异矩阵. $AB=A(b_1\ b_2\cdots b_m)=(Ab_1\ Ab_2\cdots Ab_m)$ $rank(AB)\le rank(B)=r$

设 $rank(B)=r$. 且 $b_1\ b_2\cdots b_r$ 线性无关. 则 $Ab_1, Ab_2\cdots Ab_r$ 线性无关.

[证明: 设 $c_1Ab_1+c_2Ab_2+\cdots+c_rAb_r=0$. $\because A$非奇异

$\therefore c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_rb_r=0$. $b_1\cdots b_r$线性无关 $\therefore c_1=c_2=\cdots=c_r=0$.

$\therefore Ab_1, Ab_2\cdots Ab_r$ 线性无关]

$\because rank(AB)\le r$ 且 $Ab_1\cdots Ab_r$ 线性无关. $\therefore rank(AB)=r=rank(B)$.

Case 2. $m>n$. 设 $A=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\\a_{n+1}\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{bmatrix}$ 且$\{a_1,a_2\cdots a_n\}$线性无关组. 则 $AB=\begin{bmatrix}a_1B\\a_2B\\\vdots\\a_nB\\a_{n+1}B\\\vdots\\a_mB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B\\A_{21}B\end{bmatrix}$

由于$\{a_1\cdots a_m\}$可以由$\{a_1\cdots a_n\}$线性表示.

$\therefore\{a_1B\cdots a_mB\}$可以由$\{a_1B\cdots a_nB\}$线性表示.

$\therefore rank(AB)=\dim span\{a_1B\cdots a_mB\}=\dim span\{a_1B\cdots a_nB\}$

$=rank(A_{11}B)$

A_{11}方阵,可逆

$=rank(B)$

由Case 1.

□.

2、设λ_1, λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$分别是属于特征值$\lambda_1, \lambda_2$的特征向量. 令$\mathbf{v} = s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$, 其中$s^2 + t^2 \neq 0$. 证明: $\mathbf{v}$是A的特征向量的充要条件是$st = 0$.

充分性. 若v是A的特征值. 则 $Av = \lambda v$（λ是v对应的特征值）

即 $A(sx_1 + tx_2) = \lambda v$，左边 $= sAx_1 + tAx_2 = s\lambda_1 x_1 + t\lambda_2 x_2$

右边 $= \lambda(sx_1 + tx_2) = s\lambda x_1 + t\lambda x_2$.

$\because \begin{cases} s\lambda_1 = s\lambda \\ t\lambda_2 = t\lambda \end{cases}$ $\therefore st\lambda_1 = st\lambda = st\lambda_2$

$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2)st = 0$.

又$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$ $\therefore \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. $\therefore st = 0$.

必要性. 若$st = 0$. 则 $s = 0$ 或$t = 0$.

若$s = 0$. $v = tx_2$. $Av = A(tx_2) = tAx_2 = t\lambda_2 x_2 = \lambda_2(tx_2)$ $\therefore$ v是属于特征值λ_2的特征向量.

若$t = 0$, $v = sx_1$, $Av = A(sx_1) = sAx_1 = s\lambda_1 x_1 = \lambda_1(sx_1)$ $\therefore$ v是属于特征值λ_1的特征向量.

第2题. 设$A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $\mathrm{rank}(A) = n$.

证明: $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B)$.

证明: 设$\mathrm{rank}(B) = r$, $B = (b_1\ b_2 \cdots b_m)$.

其中$\{b_1 b_2 \cdots b_r\}$线性无关.

则 $AB = (Ab_1\ Ab_2 \cdots\ Ab_m)$, 其中$Ab_1 \cdots Ab_r$ 线性无关.

设$c_1 Ab_1 + c_2 Ab_2 + \cdots + c_r Ab_r = 0$.

即 $A(b_1 \cdots b_r)c = 0$

$\because$ A列满秩.

$\therefore (b_1 \cdots b_r)c = 0$.

又$\because b_1 \cdots b_r$线性无关

$\therefore c = 0$.

$\therefore Ab_1 \cdots Ab_r$线性无关.

$\mathrm{rank}(AB) \le \underset{r}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{rank}(B)}}$. 而AB有r个线性无关的列向量. $\therefore \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B) = r$. □.