浙 江 工 业 大 学

线 性 代 数 期 末 试 卷

（2017～ 2018 第二学期）

任课教师：______________学院班级：______________选课班中编号：______

学号：__________________　　姓名：________________得分：____________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分	

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩 $R(A)$ 为____3_____.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求 $A^{2018}=\underline{\begin{pmatrix}1&2018\\0&1\end{pmatrix}}$.

3. 设向量 $\alpha=(-2,1,4,2)^T$，$\beta=(1,1,1,1)^T$，则向量 α 与 β 的夹角为 $\underline{\dfrac{\pi}{3}}$.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\3&5&0\end{pmatrix}$，则 $\left|A^{-1}\right|=$______-1______，$(A^*)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&-2&0\\-3&-5&0\end{pmatrix}}$.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3×5 的矩阵，若矩阵 AB 的秩 $R(AB)=2$，则矩阵 B 的秩 $R(B)$ 为____2______.

6. 若向量组 $\alpha_1=(1,4,2)^T,\alpha_2=(2,7,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,a)^T$ 线性相关，则 $a=$_____1______.

7. 设 η_1,η_2,η_3 是四元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解，且系数矩阵 A 的秩 $R(A)=3$，若 $\eta_1=(1,2,3,4)^T$，$2\eta_2-3\eta_3=(0,2,-1,-1)^T$，则方程组 $AX=\beta$ 的通解为

$\underline{X=(1,2,3,4)^T+k(1,4,2,3)^T,\ k\epsilon\mathrm{R}\qquad\qquad}$.

8. 若 3 阶方阵 A 与 B 相似，且方阵 A 的特征值为 1，2，3，则行列式 $|A| = \underline{\ \ 6\ \ \ }$，$|2B-E| = \underline{\ \ \ 15\ \ \ \ }$.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 若 D=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=2，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11}+a_{12} & a_{12}-3a_{11} \\ 2a_{21}+a_{22} & a_{22}-3a_{21} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$ (　B　).

   (A) -2　　(B) 10　　(C) 2　　(D) 8

2. 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，若矩阵 $AB=O$，且 $B\neq O$，则必有 (　C　).

   (A) $BA=O$　　(B) $|B|\neq 0$　　(C) $|A|=0$　　(D) $|A^*|\neq 0$

3. 设矩阵 A 为 3×5 的矩阵，若 $R(A)=3$，则以下命题正确的是 (　C　).

   (A) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解.

   (B) 齐次线性方程组 $A^TX=0$ 必有非零解.

   (C) 非齐次线性方程组 $AX=\beta_1$ 必有无穷多解.

   (D) 非齐次线性方程组 $A^TX=\beta_2$ 必有唯一解.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,6,a)^T$，$\alpha_2=(1,-1,2,b)^T$，$\alpha_3=(2,0,7,c)^T$，$\alpha_4=(0,0,0,d)^T$，其中 a, b, c, d 为任意实数，则 (　B　).

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关.

   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性无关.

5. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是(　C　).

   (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题（每题 **10** 分，共 **50** 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0\\1&0&3&0&0\\1&0&0&4&0\\1&0&0&0&5\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}&1&1&1&1\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{vmatrix}$

$=(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\times2\times3\times4\times5$

$=-34$

2. 已知 3 阶方阵 A 和 B 满足 $AB=2B+A$，且 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}$，求 B.

解：$B=(A-2E)^{-1}A$

法一 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$

$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&2&4\\-2&1&-4\\2&0&3\end{pmatrix}$.

法二 $(A-2E\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&2&2&1&2\\1&0&-2&1&2&-2\\0&-1&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&2&4\\0&1&0&-2&1&-4\\0&0&1&2&0&3\end{array}\right)$.

3. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\-9\end{pmatrix}$，求$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数和一组基,并求剩余向量在这组基下的坐标.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&4&-1\\1&3&1&4\\1&-5&6&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$,

所以$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数是 3 维，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组基,

α_4在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(2,1,-1)$.

4. 设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\\x_1+\lambda x_3=1\\(1+\lambda)x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=2\lambda-2\end{cases}$,

问λ取何值时，线性方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的通解.

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1-\lambda\\1&0&1\\1+\lambda&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)$

（1）当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq2$时，有唯一解.

（2）当λ=0时，$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&-2\end{array}\right)$

$R(A)\neq R(\overline{A})$，方程组无解.

（3）当λ=2时，$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\1&0&2&1\\3&1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

方程组有无穷多解.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\quad t\in R.$$

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&a\\0&0&3\end{pmatrix}$ 与对角矩阵 Λ 相似.

（1） 证明 $a=-3$；

（2） 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

解：因为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\3&-\lambda&a\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda+1)$

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-1$

（1） 证明： 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-3&a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&a+3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由 A 与对角矩阵相似可知 $R(A-3E)=1$，

所以必有 $a+3=0,$ 即 $a=-3$. 得证.

（2）当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，$(A-3E)X=0$ 的基础解系为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=-1$ 时，解齐次方程组 $(A+E)X=0$.

$$A+E=\begin{pmatrix}3&1&1\\3&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 得基础解系为 $p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$.

所以 $P=\begin{pmatrix}1&1&-\frac{1}{3}\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1	2	本题总得分

1. 已知n阶方阵A满足$A^2-5A-3E=O$，证明$A+E$可逆, 并求其逆矩阵.

证明：由$(A+E)\dfrac{A-6E}{-3}=E$

可得$A+E$可逆，

且$(A+E)^{-1}=\dfrac{6E-A}{3}$

2. 已知n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\beta_1$=$3\alpha_1+2\alpha_2$, β_2=$\alpha_2-\alpha_3$, β_3=$4\alpha_3-5\alpha_1$线性无关.

证明：由$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$,

且矩阵$\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$可逆得

$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.