浙江工业大学 2023/2024 学年

第　二　学期试卷

课程_____线性代数 A_____

题序	一	二	三	四	总评
计分					

一. 选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是非齐次线性方程组$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$的解向量，则以下选项中（ D ）也是$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$的解.

（A） $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　（B） $\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$

（C） $2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$　　（D）$2\alpha_1-6\alpha_2+5\alpha_3$

2. 以下矩阵不可对角化的是（ A ）.

（A）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&4&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}0&3&0\\5&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

3. 设向量$(4,\ 2,\ 3)^T$, $(2,\ 1,\ 1)^T$，$(6,\ a,\ 2)^T$ 线性相关，则$a=$（ C ）.

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

4. 已知3阶实对称矩阵A的特征值为-1，1，3，则矩阵A^2-A的特征值为（ B ）.

（A）-1，1，3　　（B） 0，2，6　　（C）2，0，3　　（D） -2，2，6

5. n阶实对称矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为正定矩阵的充分必要条件是（ B ）

（A）$|A|>0$　　（B） 存在n阶可逆矩阵C，使得$A=\mathrm{C}^TC$

（C）$a_{ii}>0\ (i=1,2,\dots,n)$　　（D） A的所有特征值大于等于 0

二．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{6}&\mathbf{8}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{5}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$, **adj** $\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$|\mathbf{adj}\ \boldsymbol{A}|$=__-27__.

2. $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}^{\mathbf{2024}}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}^{\mathbf{2024}}$ = $\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2026} & \mathbf{2027}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\end{pmatrix}}$.

3. 设方阵A满足$A^2-A=6I$，其中I为与A同阶的单位矩阵，则$(A-2I)^{-1}$=$\underline{\frac{A+I}{4}}$.

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 10 & -5 & 5\end{pmatrix}$，则$A^{24}=\underline{\ 2^{23}A\ }$.

5. 已知在 3 维向量空间上有线性变换$L\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\ x-3y+z\\ y+2z\end{pmatrix}$,则线性变换 L 在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$下对应的矩阵为：$\underline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}}$.

6. 设$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 5 & -3 & x-2\\ 1 & 4 & x & 9\\ 2 & x & 3 & 2\\ x & 8 & 2x & -27\end{vmatrix}$，则$f(x)$中$x^4$的系数为$\underline{\ 1\ }$，$x^3$的系数为$\underline{\ -4\ }$.

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+4x_3{}^2-2ax_1x_2$ 正定，则 $a\in$ $\underline{(-2,2)}$.

8. 设矩阵$\mathrm{A}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，若$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_4$，向量$\beta=\alpha_1+\alpha_3$，则方程组$\mathrm{AX}=\beta$的一个特解为：$\underline{\ (1,0,1,0)^T}$<u>（不唯一）</u>，所有解为:$\underline{(1,0,1,0)^T+k(1,-1,0,-1)^T}$.

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1. 行列式$D=|A|=\begin{vmatrix}1&2&-8&-3\\1&4&0&9\\0&1&3&2\\1&8&13&-27\end{vmatrix}$，令$A_{ij}$表示$A$的第i行第j列的元素对应的代数余子式, 计算$2A_{31}+8A_{32}+A_{33}+18A_{34}$.

解：$2A_{31}+8A_{32}+A_{33}+18A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&-8&-3\\1&4&0&9\\2&8&1&18\\1&8&13&-27\end{vmatrix}$ （5 分）

$$\overset{r_3-2r_2}{=}\begin{vmatrix}1&2&-8&-3\\1&4&0&9\\0&0&1&0\\1&8&13&-27\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&4&9\\1&8&-27\end{vmatrix}=-120$$ （10 分）

（如果计算 4 个代数余子式也可以，每个代数余子式 2 分，和式 2 分，算错一步扣 2 分）

2. 已知方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$, 问$a,b$为何值时, 方程组有唯一解, 无解, 无穷多解？有无穷多解时, 求出其所有解.

解: $\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$ （5 分）

当$a\neq 1$时，方程组有唯一解；（6 分）

当$a=1,b\neq -1$ 时，方程组无解；（7 分）

当$a=1,b=-1$ 时，方程组无穷多解，（8 分）

此时通解为$\begin{cases}x_1=x_3+x_4-1\\x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$. （10 分）

3. 设 3 阶矩阵A有 3 个特征值 1, 2, 3, 相应的特征向量为$(1,-1,0)^T,(-1,1,1)^T,(1,1,1)^T$, 求$A$.

解：令$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$， 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. （5 分）

$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, （7 分）从而 $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}$. （10 分）

4. 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+2\,x_2{}^2+2\,x_3{}^2+2x_1x_2+2bx_1x_3$， 其中$b>0$， 该二次型的矩阵$A$的特征值之和为 7，特征值之积为8.

(1) 求a,b的值；　　（2）用正交变换法将该二次型化为标准形.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}a&1&b\\1&2&0\\b&0&2\end{pmatrix}$（1 分）. 由$|A|=8$与$\mathrm{tr}(A)=7$得$\begin{cases}4a-2b^2-2=8\\a+2+2=7\end{cases}$（3 分），从而$\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$.（4 分）

(2) A的特征值为 1，2，4（6 分）.

分别求特征向量, 单位化后排成矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,（9 分）

$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.（10 分）

5. 在 4 维实线性空间R^4中， 求向量组$\alpha_1=(1,1,4,2)^T$，$\alpha_2=(-3,2,3,-11)^T$，$\alpha_3=(3,-1,0,10)^T$，$\alpha_4=(1,-1,-2,4)^T$生成的子空间的维数并从α_1，α_2，α_3，α_4中选取若干向量构成一组基.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-3&3&1\\1&2&-1&-1\\4&3&0&-2\\2&-11&10&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-3&3&1\\0&5&-4&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$（6 分）

从而维数=2，基可任选两个向量.（10 分）

（也可以先验证α_1，α_2线性无关，再把α_3，α_4用α_1，α_2线性表出，从而取α_1，α_2为一组基）

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 证明：如果向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则：

（1） 向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$线性无关；

（2） 向量组$\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\gamma_2=\alpha_2-\alpha_3$，$\gamma_3=\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

证明：(1) 令$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

则有 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)$

$=(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$

由α_1，α_2，α_3线性无关得：$k_1+k_3=k_1+k_2=k_2+\mathrm{k}_3=0.$

故$k_1=k_2=k_3=0 \implies \beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性无关. （3 分）

（2）易得 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$，从而相关. （5 分）

2. 设A是n阶方阵，$A^2=I$，证明：$\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$，其中$I$为$n$阶单位矩阵.

证明：$A^2=I\Rightarrow(I-A)(I+A)=0$ （1 分）

故 $I+A$的列是方程组$(I-A)X=0$的解

所以$rank(I+A)\le n-rank(I-A)$ （3 分）

又 $rank(I+A)+rank(I-A)\ge rank(I+A+I-A)=n,$

得$rank(A+I)+rank(A-I)=n.$ （5 分）