浙 江 工 业 大 学
48 学 时 线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2020 ～ 2021 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：____________________选课班中编号：______

学号：_____________________ 姓名： __________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数是________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $\det(\boldsymbol{A})=3$，则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1}-\mathrm{adj}\boldsymbol{A})=$______.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\in R^3$，且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 0 & 4 \\ y & z & 6 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$ ____________，

$\left|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right|=$_____.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=$ ______________.

5. 向量空间 $W=\left\{\left(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_1\right)^{\mathrm{T}}\middle|x_1,x_2,x_3\in R\right\}$ 的维数为______.

6. 写出与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交的所有向量：________.

7. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}\in R^3$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， 矩阵

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解集为______________.

8. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&-4\\1&1&x\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}\lambda&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda=$____，$x=$____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 16 分)

本题得分	

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{BC}=2\boldsymbol{I}$，则 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\right)^2\boldsymbol{B}=$ (　　　).

   (A) $\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{C}$　　(C) $2\boldsymbol{A}$　　(D) $2\boldsymbol{C}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&4\\3&2&4\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　　).

   (A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EAF}$　　(B) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{FAE}$　　(C) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EFA}$　　(D) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AFE}$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵，则(　　　).

   (A) $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，但 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$　　(B) $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，但 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

   (C) $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，且 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$　　(D) $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

4. 设 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组

   $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况为 (　　　)

   (A) 必有无穷多解　　(B) 必有唯一解

   (C) 不一定有解　　(D) 以上都不对

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{U}$，则以下命题错误的是 (　　　).

   (A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的行空间相同　　(B) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的列空间相同

   (C) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的零空间相同　　(D) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的秩相同

6. 设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵， $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵，那么 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵是(　　　).

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

7. 矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 的长度等于(　　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 3　　(D) $\frac{1}{3}$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，则以下命题错误的是(　　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量两两正交　　(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也为正交阵

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量两两正交　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的行列式必为 1

三、计算题（共 45 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 设线性变换 $L: R^3 \to R^3$ 定义为：$L(\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_3, x_2 + x_3)^{\mathrm{T}}$，

1） 求 L 在有序基 $[\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2） 求从标准基 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 到有序基 $[\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 的转移矩阵 $\boldsymbol{S}$；

3） 向量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$，求 $L(\boldsymbol{v})$ 在有序基 $[\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 下的坐标.

2. 设 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-1\\-4&-3&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$,计算矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\\9\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-7\\18\\2\\-8\end{pmatrix}$，选取其中若干向量构成空间 $V=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 的一组基，并求其余向量在这组基下的坐标.

4. 试问当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 3ax_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a \\ (4a-1)x_1+3ax_2+2ax_3=1 \\ (2a-1)x_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a+1 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在其有无穷多解时求出所有解.

5. （1）已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行的 3 个元素之和都为 a，求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 a 的一个特征向量；

（2）对于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$.

1	2	本题总得分

四、证明题（共 9 分）

1. （5 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：当实数 $k\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也为对称阵.