教师姓名________ 学号________ 姓名________ 班级________ 学院________

浙江工业大学 2023/2024 学年

第 二 学期试卷

课程____线性代数 A____

题序	一	二	三	四	总评
计分					

一. 选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是非齐次线性方程组$AX=b$的解向量，则以下选项中（　　）也是$AX=b$的解.

（A） $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

（B） $\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$

（C） $2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

（D）$2\alpha_1-6\alpha_2+5\alpha_3$

2. 以下矩阵不可对角化的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&4&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}0&3&0\\5&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

3. 设向量$(4,\ 2,\ 3)^T$, $(2,\ 1,\ 1)^T$, $(6,\ a,\ 2)^T$ 线性相关，则$a=$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

4. 已知3阶实对称矩阵A的特征值为-1，1，3，则矩阵A^2-A的特征值为（　　）.

（A） -1，1，3　（B） 0，2，6　（C）2，0，3　（D） -2，2，6

5. n阶实对称矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为正定矩阵的充分必要条件是(　　)

（A）$|A|>0$　（B） 存在n阶可逆矩阵C，使得$A=C^TC$

（C）$a_{ii}>0\ (i=1,2,\dots,n)$　（D） A的所有特征值大于等于 0

二．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

1. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&6&8\\2&3&2&5\\0&0&3&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$，adj A是A的伴随矩阵，则$|\text{adj } A|$=________.

2. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2024}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2024}$ =____________. ____________________

3. 设方阵A满足$A^2-A=6I$，其中I为与A同阶的单位矩阵，则$(A-2I)^{-1}$=________.

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&-1&1\\10&-5&5\end{pmatrix}$，则$A^{24}=$ ____________.

5. 已知在 3 维向量空间上有线性变换$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-3y+z\\y+2z\end{pmatrix}$，则线性变换 L 在基$\alpha_1=$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下对应的矩阵为：____________________.

6. 设$f(x)=\begin{vmatrix}1&5&-3&x-2\\1&4&x&9\\2&x&3&2\\x&8&2x&-27\end{vmatrix}$，则$f(x)$中$x^4$的系数为________，$x^3$的系数为_______.

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-2ax_1x_2$ 正定，则 $a\in$________________.

8. 设矩阵$\mathrm{A}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，若$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_4$，向量

$\beta=\alpha_1+\alpha_3$，则方程组$\mathrm{AX}=\beta$的一个特解为：___________，所有解为:_______________.

学院________ 班级________ 姓名________ 学号________ 教师姓名________

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1. 行列式$D=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -8 & -3\\ 1 & 4 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 8 & 13 & -27\end{vmatrix}$，令$A_{ij}$表示$A$的第i行第j列的元素对应的代数余子式, 计算$2A_{31}+8A_{32}+A_{33}+18A_{34}$.

2. 已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$, 问$a,b$为何值时, 方程组有唯一解，无解，无穷多解？有无穷多解时，求出其所有解.

3. 设 3 阶矩阵A有 3 个特征值 1, 2, 3, 相应的特征向量为$(1,-1,0)^T,(-1,1,1)^T,(1,1,1)^T$, 求$A$.

4. 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+2\,x_2{}^2+2\,x_3{}^2+2x_1x_2+2bx_1x_3$，其中$b>0$，该二次型的矩阵$A$的特征值之和为 7，特征值之积为8.
（1）求a,b的值；（2）用正交变换法将该二次型化为标准形.

5. 在 4 维实线性空间R^4中，求向量组$\alpha_1=(1,1,4,2)^T$，$\alpha_2=(-3,2,3,-11)^T$，$\alpha_3=(3,-1,0,10)^T$, $\alpha_4=(1,-1,-2,4)^T$生成的子空间的维数并从α_1，α_2，α_3，α_4中选取若干向量构成一组基.

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 证明：如果向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则：

（1） 向量组$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$线性无关；

（2） 向量组$\gamma_1 = \alpha_1 - \alpha_2$，$\gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_3$，$\gamma_3 = \alpha_3 - \alpha_1$线性相关.

2. 设A是n阶方阵，$A^2 = I$，证明：$\mathrm{rank}(A+I) + \mathrm{rank}(A-I) = n$，其中$I$为$n$阶单位矩阵.