浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（2018～2019 第二学期）

任课教师：______________学院班级：______________选课班中编号：______

学号：__________________ 姓名：_________________得分：____________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 行列式$D=\begin{vmatrix}2&1&3&2\\3&0&4&1\\1&2&3&1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$，则其第一行元素的余子式之和$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=$__0______.

2. 设$\alpha=(1,\ -1,\ \ 2)^T$，$\beta=(-2,\ 1,\ 1)^T$，则$(\alpha\beta^T)^{2019}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\2&-1&-1\\-4&2&2\end{pmatrix}$.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-3&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$，$|(A^*)^{-1}|=$__1/4________.

4. 设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_3-\alpha_1$，则向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性__相_______关.

5. 已知4×3矩阵 A 的秩为 2，则齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系所包含向量个数为__1__ ，若非齐次线性方程组$Ax=b$有 3 个解向量ξ_1,ξ_2,ξ_3，其中$\xi_1+\xi_2=(2,4,6)^T$，$\xi_2+\xi_3=(1,3,5)^T$,$Ax=b$的通解为$X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

其中，$t\in$ R.

，

6. 设向量$\alpha=(1,\ 1,\ 1,\ -4)^T$和$\beta=(-2,\ 1,\ 3,\ 2)^T$，则$\langle\alpha,\beta\rangle=$<u> -6   </u>.

7. 设 3 阶方阵A与 B 相似，并且$A-E$，$A+2E$，$A-3E$均不可逆，则$|A|=$<u>-6   </u>，$|B-2E|=$<u> 4   </u>.

二. 单项选择题(每小题 2 分，共 10 分)

本题得分	

1. 已知矩阵$A=(\alpha,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$，$B=(\beta,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$，其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ 均为 4 维列向量，且$|A|=4$，$|B|=-2$，则 $|A+B|=$ (　D　).

   (A) 2　　(B) 4　　(C) 8　　(D) 16

2. 设 A,B 均为 n 阶矩阵， $AB=O$，且$B\neq O$，则必有(　A　).

   (A) $|A^*|=0$　　(B) $|B|\neq 0$

   (C) $|A|\neq 0$　　(D) $(A+B)^2=A^2+B^2$

3. n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分条件是(　D　).

   (A) A^2 与 B^2 相似　　(B) A 与 B 有相同的特征值

   (C) A 与 B 有相同的特征向量　　(D) A 与 B 和同一个对角阵相似

4. 设$A=\begin{pmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵 A^*的秩为 1，则$a=$ (　B　).

   (A) 1　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) 3　　(D) -1

5. 设 A 为 3 阶矩阵，$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$为可逆矩阵，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$ (　B　).

   (A) $\alpha_1+\alpha_2$　　(B) $\alpha_2+2\alpha_3$　　(C) $\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2$

三、计算题（每题 10 分，共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}$.

解. 法一：$D=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\0&\frac{13}{4}&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\0&\frac{13}{4}&3&0\\0&0&\frac{40}{13}&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\0&\frac{13}{4}&3&0\\0&0&\frac{40}{13}&3\\0&0&0&\frac{121}{40}\end{vmatrix}=121$

法二： $D=4\times\begin{vmatrix}4&3&0\\1&4&3\\0&1&4\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}1&3&0\\0&4&3\\0&1&4\end{vmatrix}$

$=160-39$

$=121$

2. 已知 3 阶方阵A和B满足$AB=-3B+2A$，且$A=\begin{pmatrix}-1&4&1\\2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$B$.

解. 因为$AB=-3B+2A$，

所以 $B=2(A+3E)^{-1}A$.

法一：由计算可得$(A+3E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&2&0\\0&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\times\begin{pmatrix}-4&7&1\\4&-4&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}$，

因此 $B=\begin{pmatrix}6&-7&-1\\-4&6&1\\2&-2&0\end{pmatrix}$

法二: $(A+3E|2A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&1&-2&8&2\\2&2&0&4&-2&0\\0&2&4&0&4&2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&-7&-1\\0&1&0&-4&6&1\\0&0&1&2&-2&0\end{array}\right)$

因此 $B=\begin{pmatrix}6&-7&-1\\-4&6&1\\2&-2&0\end{pmatrix}$

3. 已 知 向 量 组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\1\\3\\-5\end{pmatrix}$ ， 求

$span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的维数和一组基,并求剩余向量在这组基下的坐标.

解. 因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\1&1&0&1\\0&1&2&3\\1&-1&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以$span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的维数为 3，它的一组基为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

α_4在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为(-2, 3, 0).

4. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=3\\ \lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases}$，

问λ取什么值时，上述方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的通解。

解. 因为 $\begin{vmatrix}1&\lambda&1\\\lambda&1&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

所以 (1) 当$\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，方程组有唯一解.

(2) 当$\lambda=1$ 时，$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&1&0\\1&1&1&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

方程组无解.

(3) 当$\lambda=-2$ 时，$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\-2&1&1&0\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

方程组有无穷多解 $X=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $t\in R$.

5. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&a\\0&1&2\end{pmatrix}$的一个特征向量为 $p=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

（1） 证明 $a=3$.

（2） 求出矩阵A的特征值和特征向量，并讨论矩阵A是否可以相似对角化.

若可以，求出相似变换矩阵P，以及相似对角阵$\Lambda=P^{-1}AP$；若不可以，说明理由.

解. （1）设$\mathrm{Ap}=\lambda\mathrm{p}$，由条件可得

$$\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&a\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \text{则有}\begin{cases}4-a=\lambda\\1-2=-\lambda\end{cases}$$

解得 $\lambda=1, a=3$. 得证.

（2）$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-5)$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$时， $A-E=\begin{pmatrix}0&5&5\\0&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

则$(A-E)X=0$的一个基础解系为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,

对应的特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2$，其中 k_1,k_2 不同时为零.

当 $\lambda_3=5$时， $A-5E=\begin{pmatrix}-4&5&5\\0&-1&3\\0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$,

则$(A-5E)X=0$的一个基础解系为 $p_3=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$,

对应的特征向量为 k_3p_3，其中 k_3 不为零

可对角化，$P=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&-1&3\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

1	2	本题总得分

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 已知n阶方阵A满足$2A^2+A-E=O$，证明$A+2E$可逆, 并求其逆矩阵.

证明. 由条件可得 $2A^2+A-E=(A+2E)(2A-3E)+5E=0$,

即 $(A+2E)\frac{(2A-3E)}{-5}=E$.

因此 $A+2E$可逆, 且 $(A+2E)^{-1}=\frac{2A-3E}{-5}$.

2. 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，证明：$A$ 的秩 $\mathrm{R}(A)=2$

证明. 因为 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 与由 3 个特征值构成的对角矩阵Λ相似，且至多只有一个零特征值, 则有$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(\Lambda)\geq 2$.

又因为$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$, 所以 3 阶矩阵 A 关于列向量线性相关，所以 $\mathrm{R}(A)<3$.

因此 $\mathrm{R}(A)=2$.