Time$_domaine_a$pproache

Siva Chanemougam

January 2021

1 Introduction

Nous allons dans ce document apporter une explication à l'étude menée par H. Garnier, P.C. Young traitant la thématique suivante : "Time-domain approaches to continuous-time model identification of dynamical systems from sampled data". Le papier de recherche traite dans les grande ligne le sujet des fonctions continues et discrètes dans un système dynamique a partir d'un échantillon de données.

Je vais dans un premier temps vous expliquer ce qu'est un système dynamique. Un système dynamique est un système classique qui évolue dans le temps de façon à la fois : Causale (son avenir dépend uniquement de son passé ou du présent) et déterministe (qu'une condition initiale donnée à un instant t va correspondre à chaque instant ultérieur avec un seul état futur possible).

Cette évolution qui est déterministe peut être modélisé de deux façons :
- Une évolution qui est continue dans le temps, incarnée par une équation différentielle ordinaire. Il s'agit du modèle qui représente le plus fidèlement possible la réalité.
- Une évolution discontinue (discrète) dans le temps. Le modèle discret est beaucoup plus simple à décrire d'un point de vue mathématique, même s'il est moins réaliste par rapport à notre monde. Les résultats des modèles discrets sont souvent généralisés aux évolutions dynamiques continues.

De nombreux systèmes que l'on étudie dans la science, la physique, chimie, biologie, l'économie etc... sont en approximation des systèmes déterministes.

Lors des études les chercheurs aiment discrétiser un problème afin de simplifier les calculs, car cela revient à résoudre des systèmes d'équations.
Cependant résoudre un problème en modèle continue revient à résoudre n équations différentielles à n inconnus ce qui est plus compliqué. L'avantage des équations différentielles, c'est que nous savons leur donner une interprétation (un sens physique) !

En pratique lorsque nous avons une entrée, nous souhaitons trouver le système qui permet de trouver le signal de sortie θ (qui représente les coefficients A,B du système qui permet de relier la sortie à l'entrée). La recherche initialement c'est concentré uniquement sur l'identification de ces systèmes d'équations de modèles continus. Avec l'arrivée des ordinateurs de plus en plus puissants, nous nous sommes d'avantages concentrés sur l'identification de modèles discrets, car d'un point de vu mathématique c'est beaucoup plus simple. Les chercheurs se sont donc de moins en moins intéressés aux modèles continus et sont moins informés, qu'il est possible de retrouver un modèle continue à partir d'un modèle discret. Pour identifier le modèle continu, associé à un modèle discret (ce sera le cas de l'étude), il y a plusieurs approches : - Indirecte : le modèle discret est identifié à partir de notre data set discret et ensuite convertie en un modèle continu. Nous avons plusieurs équations à plusieurs inconnus, nous souhaiterons trouver la valeur des inconnus et ensuite déterminer la fonction qui passe en ces points. - Direct : identifier directement le modèle continue à partir du modèle discret. Cette méthode est beaucoup plus compliquée.

2 Formulation du problème

Nous prenons en entrée la fonction u(t) et en sortie une fonction y(t) qui réponds à l'équation différentielle suivante :

$$x^n(t) + a_1x^{n-1}(t) + ... + a_nx^0(t) = b_0u^m(t) + b_1u^{m-1}(t) + ... + b_mu^0(t)$$

Avec comme intervalle :$u(t), t_1 < t < t_N$, et condition initial : $u(tk); x(tk)$
La fonction d'entrée est représentée par u(t) et la sortie par x(t) qui ne considères pas le bruit. Cette équation différentielle sera simplifiée par la notation suivante : $x(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t)$
Avec :
$B(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_m$
$A(p) = p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n$
Dans notre notation, A et B sont des opérateurs, par exemple, B est l'opérateur qui multiplie par b$_0 etquidérivelafonctionmfoisetc.$

Nous allons introduire la notion de bruit qui jusque là a été volontairement négligé:
$y(tk) = x(tk) + v(tk)$
Voici notre problème réécrit avec la notion de bruit :
$Z^N = u(tk); y(tk)_{k=1}^N$
A travers cette notation, nous sommes passé d'un mode continu à un mode discret (tk). Ce qui nous permet de passer d'une résolution d'une équation différentielle d'ordre n (complexe à résoudre) à une résolution de n équations à n inconnus.

3 l'identification des méthodes

L'équation différentielle (1) est très complexe à résoudre, car elle comprend plusieurs dérivées. C'est pour cette raison que nous discrétisons le problème, et ainsi, grâce à différentes méthodes nous pouvons résoudre le problème. Dans ce papier deux méthodes directes sont étudiées : SVF (State variable filter) et la Stochastique méthode. Ces deux méthodes font partie d'un autre groupe de méthode appeler "Basic Instrumental Variable methods".

3.1 A) La méthode traditionnel SVF

Dans cette méthode ont part du principe que les conditions initiales (CI) de l'équation différentielle sont connues. Comme la (CI) est connu, on sait estimer les dérivés en certains points ($t_1 \grave{a} t_N$). On ne connaît cependant pas A et B (qui sont calculables de $A_1 a A_n$ et $B_1 a B_n$ car nous connaisons les conditions initiales).
On pose :
$A(p)x(t) = B(p)u(t)$
La méthode SVF implique l'introduction d'un filtre déjà définit:
$A(p)F(x)x(t) = B(p)F(p)u(t)$
Avec : $F(p) = \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{(p+n)^n}$ F(p) est un opérateur, qu'on applique à la fonction x(t) et sera donc la dérivé n$^i \grave{e} medex(t)$.
$Nousavonsensuite$F$_i$ qui est un set de filtres :
$F_i(p) = \frac{p^i}{E(p)} = \frac{p^i}{(p+n)^n}$
Avec F_i(p) pour i = 0,1,...,n. Nous avons donc n filtres. F_i est certe un filtre mais c'est également un opérateur.
Lorsque nous appliquons ce filtre à notre équation différentielle du début, nous obtenons : $F_n(p) + a_1 F_{n-1}(p) + ... + a_n F_0(p)x(t) = b_0 F_m(p) + ... + b_m F_0(p)u(t)$

Cette manipulation va introduire la notion de produit de convolution . Le produit de convolution se définit de la façon suivante : Lorsqu'il y a un signal en entrée qui subit un filtre, alors le signal de sortie est le produit de convolution des deux signaux. Voici la formule du produit de convolution entre deux signaux $f_i(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t-u)x(u)$ du

Voici ce que nous obtenons :
$x_f^n(t) + a_1 x_f^{n-1}(t) + ... + a_n x_f^0(t) = b_0 u_f^m(t) + ... + b_m u_f^0(t)$
On peut remarquer que lorsqu'on applique un opérateur à une fonction, cela revient à faire les produits de convolution de la fonction avec l'opérateur.

Nous allons maintenant inclure la notion de bruit x(t) = y(t) - bruit.
Nous allons nous placer sur le point (tk) et ainsi discrétiser le modèle. Après avoir effectué les produits de concolution, les sommes et isoler le "y", nous obtenons l'équation suivante : $y_f^n(tk) = \phi_f^T(tk)\theta + \varepsilon(tk)$
On note ici que nous avons une équation de la forme $y = ax + b$, c'est donc la courbe qui va passer par les différents points.
$\phi_f^T(tk) = \left[-y_f^{n-1}(tk)... - y_f^0(tk)u_f^m(tk)...u_f^0(tk)\right]$

$\theta == \left[a_1...a_n b_0 b_m)^T\right]$

Toute équation peut être écriet sous forme matricielle, nous utilisons donc

cette notation pour simplifier notre expression.
$\phi_f^T(tk)$ représente l'ensemble des éléments en entrée et en sortie.
θ représente les coefficients qui résolvent l'équation. Nous ne connaissons pas ces coefficients pour le moment. En discrétisant, nous sommes passé d'une équation différentielle à une équation linéaire permettant d'estimer les coefficients $A_1, A_n B_0, B_n$.

Nous souhaitons donc isoler le θ, pour cela, nous allons multiplier par $\phi_f(tk)$ de chaque côté de notre équation, car nous souhaitons avoir une matrice carrée. Nous obtenons donc l'expression suivante : $\hat{\theta}_N^{LS} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \phi_f(tk) y_f^n(tk)}{\left[\sum_{k=1}^{N} \phi_f(tk)\phi_f^T(tk)\right]}$

On remarque que l'équation (9) est sous la forme de $y = ax + b$, c'est donc notre courbe ! Grâce à la méthode des moindres carrées linéaires, nous pouvons trouver la droite qui passe par l'ensemble des points. Ceci revient à estimer la valeur de θ qui va répondre à ce problème de façon optimale.

Ensuite on applique la méthode 'Instrumental Variable' (IV). Dans cette méthode, le bruit $\varepsilon(tk)$ à une moyenne de 0. C'est ce qu'on appele un bruit blanc. Nous allons donc ne pas prendre en considération le bruit.
Réécrivons donc l'équation sans le bruit :
$\hat{\phi}_f^T(tk) = \left[-\hat{x}_f^{n-1}(tk)... - \hat{x}_f^0(tk)u_f^m(tk)...u_f^0(tk)\right]$
$\hat{\phi}$ représente les valeurs de x estimer avec les nouveaux coefficients $\hat{\theta}$(LS) mais sans le bruit, auquel on applique un filtre. $\hat{x}_f(tk) = F(p)\hat{x}(tk)$ $\hat{x}$ représente le signal de sortie sans bruit, recalculé avec les nouveaux coefficients de A et B au point (tk) grâce à la méthode des moindres carrés. Nous obtenons alors :
$\hat{x}(tk) = \frac{B(p,\hat{\theta}_N^{LS})}{A(p,\hat{\theta}_N^{LS})}$
Nous avons ici une nouvelle définition de ϕ incarné par $\hat{\phi}$, où $\hat{\phi}$ est la valeur de x, estimer avec de nouveaux coefficients sans le bruit

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \left[\sum_{k=1}^{N} \phi_f(tk) y_f^n(tk)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \phi_f(tk)\phi_f^T(tk)$$

Remarque :
Nous avons ici une matrice inversée, ce qui prouve bien que la matrice est inversable, nous avons donc bien n équation a n inconnues.

Le résultat trouvé à l'aide de la IV méthode est vrai à du bruit près en un point tk ou on peut estimer y et u.
Il faut souligner que la SVF méthode fonctionne car nous connaissons les conditions initiales (CI) de l'équation différentiel ! Selon les CI, le résultat peut changer. L'écart entre le résultat réel et notre solution est incarné par cette notion de bruit additif.

Ensuite tous les calculs de la méthode SVF ont été faite avec le Filtre $Fi(p) = \frac{p_i}{p+\lambda}$.
Selon le a choisi, les valeurs propres des matrices peuvent être annulées et ainsi

ne plus être en mesure d'inverser les matrices.
Concernant l'échantillonnage (discrétisation), la fréquence d'échantillonnage doit être très court, afin que la distance entre deux points soit très proche.

3.2 A) La méthode stochastique

Dans cette méthode, le bruit sera discrétisé et prise en compte dès le début, contrairement à la méthode SVF où nous avons fais nos équations sans le bruit et nous l'avons introduit après, sans vraiment l'estimer. Cette méthode est une dérivé de la SVF. On commence par poser l'erreur :
$\varepsilon(t) = y(t) - \frac{B(p)}{A(p)}$
$\frac{1}{A(p)}$ est mis en facteur. On obtient donc : $\varepsilon(t) = \frac{1)}{A(p)}(A(p)y(t) - B(p)u(t))$
De cette façon nous déterminons l'opérateur Filtre $F = \frac{1)}{A(p)}(A(p)y(t)$
On applique ensuite l'opérateur F à y(t) et u(t), nous obtenons :
$\varepsilon(t) = A(p)y_f(t) - B(p)u_f(t)$
En appliquant l'opérateur A(p) à y_f nous obtenons la ligne suivante :
$\varepsilon(t) = y_f^n(t) + a_{n-1}y_f^{n-1}(t) + ... + a_0 y_f^0(t) - b_m u_f^m(t) - ... - b_0 u_f^0(t)$
Avec :
$y_f^{(}i)(t) = f_{_{i(t)*y(t)}}$, i) 0,...,n
$u_f^{(}i)(t) = f_{_{i(t)*u(t)}}$, i) 0,...,m
Les calculs sont très similaires qu'avec la 1er méthode.
De la même façon on introduit $F_i(t) = \frac{p^i}{A(p)}$

On peut maintenant prendre la valeur de nos y_f dans les différents points t(k), et nous retrouvons l'équation de la première méthode SVF :
$y_f^n(tk) = \phi_f^T(tk)\theta + \varepsilon(tk)$
Ou nous avons $\phi_f^T(tk)$ et θ qui définit de la même façon que la la 1er méthode. Nous sommes donc passé sur un modèle discret.

Nous sommes retombés sur une équation de ce type, car nous avons assumé que le bruit v(t) est un bruit blanc, ainsi, on a pu poser $v(t) = \varepsilon(t)$. Grâce a cette supposition, cela permet d'arrivée à cette équation simplifier et nous permet ainsi de retrouver l'équation de la méthode 1.

Seulement nous avons deux problèmes, on ne connaît pas les coefficients A(p), et le bruit n'est pas un bruit blanc (donc n'a pas les propriétés que nous avons assumées).

Malgré tout nous avons une solution à ces problèmes. Premièrement, on peut retrouver les valeurs de A(p) en calculant ses valeurs en fonction de θ pour chaque valeur de t(k). Deuxièmement, concernant le bruit blanc utilisé dans la solution obtenue qui est quasi-optimal (afin de simplifier les calculs), nous devons appliquer cette solution avec notre bruit réel (coloré). Le résultat ne sera pas quasi optimal en termes statistiques, mais le modèle sera raisonnablement acceptable.