

Aufgabe 1)

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 8 > 7 \\ 9 > 6 \\ 7 > 6 \end{matrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) 1) $\begin{pmatrix} 2,25 \\ -0,333 \\ 4,571 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1,44 \\ -1,02 \\ 3,667 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2,21 \\ -0,652 \\ 4,378 \end{pmatrix}$

$$c) \|X^1 - \bar{X}\| \leq \frac{\|B\|^3}{1 - \|B\|} \cdot \|X^1 - X^0\|$$

$$B = -D^{-1}(L+R)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,625 & -0,25 \\ -0,556 & 0 & -0,111 \\ -0,571 & -0,286 & 0 \end{pmatrix} = \|B\|_{\infty} = 0,875$$

$$\frac{(0,875)^3}{1 - 0,875} \cdot \|X^1 - X^0\|$$

$$X^1 - X^0 = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -0,333 \\ 4,571 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1,25 \\ 0,667 \\ 1,571 \end{matrix} \quad \|- \| \Rightarrow 1,571$$

$$= \underline{8,4195}$$

c) q-posterior:

$$x^3 = \begin{pmatrix} 2,21 \\ -0,652 \\ 4,378 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,44 \\ -1,202 \\ 3,667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,77 \\ 0,55 \\ 0,711 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,77$$

$$\|B\| = 0,875$$

$$\frac{0,875}{1-0,875} \cdot 0,77 = \underline{\underline{5,39}}$$

d)

$$\bar{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$10^{-4} \leq \frac{(0,875)^x}{1-0,875} \cdot 1,571$$

$$\log \left(\frac{10^{-4} \cdot (1-0,875)}{1,571} \right) \leq \log(0,875) \cdot x$$

$$\frac{\log \left(\frac{10^{-4} \cdot (1-0,875)}{1,571} \right)}{\log(0,875)} \leq x$$

$$\frac{-5,0993}{-0,05800} = \underline{\underline{87,9189 \approx 88}}$$

~~$$x^3 = \begin{pmatrix} 2,21 \\ -0,652 \\ 4,378 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,44 \\ -1,202 \\ 3,667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,77 \\ 0,55 \\ 0,711 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,77$$~~

53

$$e) x^3 = \begin{pmatrix} 2,21 & -1,44 \\ -0,652 & +1,202 \\ 4,378 & -3,667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,77 \\ 0,55 \\ 0,711 \end{pmatrix} \rightarrow 0,77$$

$$\log\left(\frac{10^{-4} \cdot (1-0,875)}{0,77}\right) \leq \log(0,875) \cdot n$$

$$\frac{-4,7896}{-0,0580} \leq n \Rightarrow 82,579 \approx \underline{\underline{83}}$$

Aufgabe 2)

$$X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} \cdot R x^{(k)} + (D+L)^{-1} \cdot b$$

$$D+L = \begin{pmatrix} 0,125 & 0 & 0 \\ -0,069 & 0,111 & 0 \\ -0,052 & -0,032 & 0,143 \end{pmatrix}$$

$$b) X_1: \begin{pmatrix} 2,25 \\ -1,028 \\ 3,865 \end{pmatrix} \quad X_2: \begin{pmatrix} 2,051 \\ -1,013 \\ 3,975 \end{pmatrix} \quad X_3: \begin{pmatrix} 2,015 \\ -1,005 \\ 3,993 \end{pmatrix}$$

$$B = -(D+L)^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & -0,625 & -0,25 \\ 0 & 0,347 & 0,028 \\ 0 & 0,258 & 0,135 \end{pmatrix} \quad B_{\max} \Rightarrow 0,875$$

$$\begin{pmatrix} 0,125 & 0 & 0 \\ -0,069 & 0,111 & 0 \\ -0,052 & -0,032 & 0,143 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,01 \\ 0,00 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$a\text{-posteriori} = \|X^n - \bar{X}\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \cdot \|X^n - X^{n-1}\|$$

$$\frac{0,875}{1-0,875} \cdot 0,018 = \underline{\underline{0,126}}$$

$$\begin{pmatrix} 2,015 & -2,051 \\ -1,005 & +1,013 \\ 3,993 & -3,975 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,008 \\ 0,018 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,018$$