Übungsserie 9

Abgabe: gemäss Angabe Dozent

Scannen Sie ihre manuelle Lösungen für die Aufgabe 1 in die Datei *Name_S9_Aufg1.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrer Python-Funktion *Name_S9_Aufg2.py* und dem Skript *Name_S9_Aufg3.py* in einer ZIP-Datei *Name_S9.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 45 Min.):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition von $\boldsymbol{A}$ bzgl. der $\infty-$Norm. Sie dürfen $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit Python berechnen.

b) Für $\varepsilon > 0$ sei die fehlerbehaftete rechte Seite

$$\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie gross darf ε maximal sein, wenn die Abschätzung des relativen Fehlers $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ der Lösung $\tilde{x}$ mit Hilfe der Kondition aus Aufgabe a) höchstens 1% sein darf?

c) Welcher relative Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ ergibt sich für die Lösung $\tilde{x}$ mit der fehlerbehafteten rechten Seite aus Aufgabe b) und dem dort berechneten maximalen ε tatsächlich?

d) Gehen Sie nun davon aus, dass nun zusätzlich noch jede Komponente von $\boldsymbol{A}$ um bis $1e-7$ gestört sein kann. Wiederholen Sie mit dieser zusätzlichen Information die Berechnung aus b).

Aufgabe 2 (ca. 45 Min.):

Schreiben Sie ein Funktion $[x, \widetilde{x}, dx_{max}, dx_{obs}]$ = `Name_S9_Aufg2`$[A, \widetilde{A}, b, \widetilde{b}]$:

- Input: Matrix A und Vektor b des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, sowie die gestörte Matrix $\widetilde{A}$ und Vektor $\widetilde{b}$ des gestörten Gleichungssystems $\tilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$.
- Output: Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und Lösung $\widetilde{x}$ des gestörten Gleichungssystems $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$. Ausserdem die obere Schranke des relativen Fehlers dx_{max} von x gemäss Skript, also $dx_{max} = \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\cdot\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}\right)$ in der Unendlich-Norm, und der tatsächliche relative Fehler $dx_{obs} = \frac{\|x-\widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Falls die Bedingung $\mathrm{cond}(A) \cdot \frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} < 1$ für die Berechnung von dx_{max} nicht erfüllt ist, soll für dx_{max} der Wert 'NaN' (Not a Number) ausgegeben werden.
- Überprüfen Sie mit Ihrer Funktion für sich die Resultate von Aufgabe 3 der Serie 8.

Tipp: Sie dürfen Python-Funktionen und Operatoren verwenden, z.B. `np.linalg.solve()` für die Lösung der linearen Gleichungssysteme oder die Funktionen `np.linalg.cond(A,np.inf)` resp. `np.linalg.norm(b,np.inf)` für die Berechnung der Kondition resp. der Norm (für Details siehe die Beschreibung dieser Funktionen im Numpy-Manual).

Aufgabe 3 (ca. 30 Minuten):

Testen Sie, inwiefern dx_{max} aus Aufgabe 2 eine realistische obere Schranke für dx_{obs} ist. Schreiben Sie dazu ein Skript `Name_S9_Aufg3.py` und gehen Sie folgendermassen vor:

- Defnieren Sie eine for-Schleife mit 1000 Iterationen. Erzeugen Sie für jede Iteration mittels der Python-Funktion `np.random.rand()` eine zufällige 100×100 Matrix $\boldsymbol{A}$ und einen zufälligen $100\times$ Vektor $\boldsymbol{b}$ (lesen Sie die Eigenschaften von `rand()` nach). Erzeugen Sie zusätzlich für jede Iteration eine gestörte Matrix $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \mathrm{rand}(100, 100)/10^5$ und einen gestörten Vektor $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \mathrm{rand}(100, 1)/10^5$
- Berechnen Sie für jede Iteration mit Ihrer Funktion aus Aufgabe 2 dx_{max}und dx_{obs}. Schreiben Sie dx_{max}, dx_{obs} sowie das Verhältnis dx_{max}/dx_{obs}in Vektoren und stellen Sie diese mit `plt.semilogy()` grafisch dar.
- Schreiben Sie Ihren Kommentar, ob dx_{max} in dieser Versuchsanordnung eine realistische obere Schranke für dx_{obs} ist, in Ihr Skript.