Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten):

Lösen Sie die algebraische Gleichung

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution und zeichnen Sie die Lösungen in der Gaussschen Zahlenebene ein.

$z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \qquad z^2 = u$

$\rightarrow \quad u^2 + 4u + 16 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$$

$$u_1 = -2 - 2i\sqrt{3} \qquad = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

$$u_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \qquad = \frac{-4 \pm 4i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -2 \pm 2i\sqrt{3}$$

$z_1^2 = -2 - 2i\sqrt{3} \qquad z_2^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

$z_1 = \sqrt{-2 - 2i\sqrt{3}} \qquad z_2 = \sqrt{-2 + 2i\sqrt{3}}$

$= \underline{\underline{2e^{-i\pi/3}}} \qquad = \underline{\underline{2e^{i\pi/3}}}$

$r = \underline{\underline{2}} \qquad \varphi_1 = \underline{\underline{-\frac{\pi}{3}}} \qquad \varphi_2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$

$x_1 = r \cdot \cos(\varphi_1) = 1 \qquad y_1 = r \cdot \sin(\varphi_1) = -\sqrt{3} = -1{,}732051$

$x_2 = r \cdot \cos(\varphi_2) = 1 \qquad y_2 = r \cdot \sin(\varphi_2) = \sqrt{3} = 1{,}732051$