Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 2.2 & 3.6 \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 1.2 & 2.0 & 5.8 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie manuell die LR-Zerlegung von A. Verwenden Sie dafür den Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Berücksichtigen Sie dabei, dass Sie nun auch die Permutionsmatrix P berechnen müssen, so dass $LR = PA$ gilt (siehe Skript). Dieses Verfahren ist auch als Spalten- bzw. Kolonnenmaximumstrategie bekannt.

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 2{,}2 & 3{,}6 \\ 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 1{,}2 & 2{,}0 & 5{,}8 \end{pmatrix}} \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ \lambda = 0{,}6 \\ \lambda = 0{,}4 \end{array} \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 1{,}2 & 2{,}0 & 5{,}8 \\ 0{,}8 & 2{,}2 & 3{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0 & 0 & 3{,}0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) manuell die Lösung von $Ax = b$.

$$Ly = P \cdot b$$

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}0 \\ 4{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}4 \\ 4{,}0 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot y = P \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \underline{\underline{1{,}0}} \\ y_2 &= 2{,}4 - 0{,}4 \cdot 1{,}0 = \underline{\underline{2{,}0}} \\ y_3 &= 4{,}0 - (0{,}2 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 1) = \underline{\underline{3{,}0}} \end{aligned}$$

$$Rx = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0 & 0 & 3{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 3{,}0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (1 - (3 \cdot 0 + 4 \cdot 1)) / 2 = \underline{\underline{-1{,}5}} \\ x_2 &= \underline{\underline{0}} \\ x_3 &= \underline{\underline{1{,}0}} \end{aligned}$$

c) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem Resultat der Python-Funktion *scipy.linalg.lu()*. Importieren Sie dafür die Python Library Scipy. Was stellen Sie bzgl. Vergleich der Resultate L, R, P fest?