Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das obige System bzgl. dem Jacobi-Verfahren konvergiert.

Diagonaldominanz

Zeilenweise:

$8 > 5 + 2$ ✓

$9 > 5 + 1$ ✓

$7 > 4 + 2$ ✓

bezüglich Zeilensummenkriterium Verfahren konvergiert.

b) Berechnen Sie auf vier Stellen nach dem Komma die Näherung $x^{(3)}$ mit dem Jacobi-Verfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie alle benötigten Matrizen sowie die verwendete Iterationsgleichung explizit auf. Die Iterationen selber führen Sie aber natürlich mit Python durch.

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R)\,x^{(k)} + D^{-1}b$$

$A = L + D + R$ $\quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 2{,}2098 \\ -0{,}6521 \\ 4{,}7755 \end{pmatrix}$$

c) Wie gross ist gemäss der a-posteriori Abschätzung der absolute Fehler von $x^{(3)}$?

$$B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}625 & -0{,}25 \\ -0{,}555 & 0 & -0{,}111 \\ -0{,}571 & -0{,}285 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| x^{(n)} - \tilde{x} \| = \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \| x^{(n)} - x^{(n-1)} \|$$

absoluter Fehler = $\underline{\underline{5{,}3854}}$

d) Schätzen Sie a-priori die Anzahl Iterationsschritte ab, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Kompnente maximal um 10^{-4} von der exakten Lösung $x = (2, -1, 4)^T$ abweicht.

$$n = \frac{\log\left(\frac{10^{-4}\cdot(1-\|B\|)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}\right)}{\log(\|B\|)} = \underline{\underline{88}}$$

e) Wiviele Iterationsschritte würden Sie a-priori benötigen, wenn Sie als Startvektor nicht $x^{(0)}$ sondern $x^{(2)}$ aus b) verwenden würden?

$$n = \frac{\log\left(\frac{10^{-4}\cdot(1-\|B\|)}{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|}\right)}{\log(\|B\|)} = \underline{\underline{83}}$$