

3a)

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$$

max abs. Fehler: $\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty$
 $\|b - \tilde{b}\|_\infty = 100$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.25 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max \{1.4, 1.2, 1.1\} = 1.4$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq 1.4 \cdot 100 \cdot 1000 = \underline{\underline{140'000}}$$

max rel. Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}(A)_\infty \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

$$\|b\|_\infty = \max \{5720, 3300, 836\} = 5720$$

$$\|A\|_\infty = \max \{60, 33, 7\} = 60$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 60 \cdot 1.4 \cdot 5720 = \underline{\underline{146.35\%}}$$

Die Verzerrungen in der Lösung sind im Allgemeinen nicht dramatisch, was darauf hindeutet, dass das Problem relativ gut konditioniert ist.

b) $A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$

rel. Fehler: $\text{cond}(A)_\infty \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} < 1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 20.1 & 30.1 & 10.1 \\ 10.1 & 17.1 & 6.1 \\ 2.1 & 3.1 & 2.1 \end{pmatrix}$$

$$\|A - \tilde{A}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max \{0.3, 0.3, 0.3\} = 0.3$$

$$\|A\|_\infty = \max \{60, 33, 7\} = 60$$

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = 84$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{84}{1 - 0.42} \cdot \left(\frac{0.3}{0.6} + \frac{100}{5720} \right) = \underline{\underline{74.946}}$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 199 & 299 & 99 \\ 99 & 169 & 59 \\ 19 & 29 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$$

Lösung des alten Gleichungssystems:

`[[22.]`

`[88.]`

`[264.]]`

Lösung des neuen Gleichungssystems:

`[[7.383]`

`[58.766]`

`[395.5532]]`

relative error by python : 0.4855930763768662

Der rel. Fehler ist grösser als vorher ausgerechnet.