3a) S1

$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 0836 \end{pmatrix}$ $\|b\|_\infty = 5720$

$\|A\| = \max(\cancel{32, 50, 18}) = \cancel{50}$ $\{60, 33, 7\} = \max \underline{60}$ $\|b - \tilde{b}\| \leq 0{,}1_{\min} \Rightarrow \underline{100}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}75 & 0{,}25 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \max \cancel{\{0{,}7, 1{,}25, 1{,}75\}} = \cancel{1{,}75}$ $(1{,}4, 1{,}2, 1{,}1)$ $\underline{1{,}4}$

<u>absoluter Fehler</u>

$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty \leq$ $1{,}4 \cdot 100 = \underline{140K}$

$\mathrm{Cond}(A) = 60 \cdot 1{,}4 = 84$

<u>relativer Fehler</u>

$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 84 \cdot \frac{100}{5720} = 1{,}4685$

Bezgl. Cond:

Eher schlecht konditioniert, da der Wert relativ hoch ist
Gut konditionierte Zahlen liegen nahe bei 1

$\mathrm{Cond}(A) \cdot \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\| \approx 84$

$84 > 1$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 0836 \end{pmatrix}$$

Wenn, $\| b - \tilde{b} \| = 100 \qquad \| b \| \Rightarrow 5720$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 20{,}1 & 30{,}1 & 10{,}1 \\ 10{,}1 & 17{,}1 & 6{,}1 \\ 2{,}1 & 3{,}1 & 2{,}1 \end{pmatrix} \qquad \| A - \tilde{A} \| \rightarrow \left\| \begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix} \right\| \Rightarrow \max \underline{0{,}3}$$

$\| A \| \cancel{\Rightarrow_{max} 53{,}32,\ 50{,}125 \Rightarrow 50}\ (60,\ 33{,}7) \Rightarrow 60$

$Cond(A)_\infty = \cancel{62{,}5}\ 84$ (von Aufgabe 3a)

if: $cond(A) \cdot \frac{\| A - \tilde{A} \|}{\| A \|} < 1 = 84 \cdot \frac{0{,}3}{60} \Rightarrow 0{,}42 < 1$

then

$$\frac{\| x - \tilde{x} \|}{\| x \|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{\| A - \tilde{A} \|}{\| A \|}} \cdot \left(\frac{\| A - \tilde{A} \|}{\| A \|} + \frac{\| b - \tilde{b} \|}{\| b \|} \right)$$

$$\frac{\| x - \tilde{x} \|}{x} \leq \frac{84}{1 - 0{,}42} \times \left(\frac{0{,}3}{0{,}6} + \frac{100}{5720} \right)$$

$$144{,}8276 \times 0{,}5175 = \underline{\underline{74{,}9483}}$$

Der maximale relative Fehler beträgt ca, 74.9483

3c) $A = \begin{pmatrix} 20'000 & 30'000 & 10'000 \\ 10'000 & 17'000 & 6'000 \\ 2'000 & 3'000 & 2'000 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5'720'000 \\ 3'300'000 \\ 0'836'000 \end{pmatrix}$

-100 Impfdosen

+0'100'000 YG

$A = \begin{pmatrix} 19'900 & 29'900 & 9900 \\ 9900 & 16'900 & 5900 \\ 1900 & 2'900 & 1'900 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5'820'000 \\ 3'400'000 \\ 0'936'000 \end{pmatrix}$

Relativerfehler

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} = \|x-\tilde{x}\| \Rightarrow \frac{\left\|\begin{matrix}-14,617 \\ -29,234 \\ 131,5532\end{matrix}\right\|}{\|x\|} = \cancel{\frac{175,4042}{374}}$$

~~131,5532~~ $\frac{175,4042}{374} = \underline{\underline{0,469}}$

$x_1 = x_{\tilde{c},1}/x_{c,1} = 4,383/22 = 3358\%$

$x_2 = 66,78\%$

$x_3 = 149,831\%$

Der Wert von b ist deutlich grösser als der berechnete Wert von Aufgabe c.

Sivashan

```
❮ sivashan on Sunday at 11:20 AM  main ≡ ?1 1  0.07s MEM: 18.8% (9/31GB)
❯ { home ⇄ Documents ⇄ H_HM_M_1 ⇄ SE08 ⇄ Sivashan } python3 calculator_aufgabe3c.py

OLD A :
 [[20000 30000 10000]
 [10000 17000  6000]
 [ 2000  3000  2000]]

OLD B :
 [[5720000]
 [3300000]
 [ 836000]]

NEW A :
 [[19900 29900  9900]
 [ 9900 16900  5900]
 [ 1900  2900  1900]]

NEW b :
 [[5820000]
 [3400000]
 [ 936000]]


--------------------------------



Lösung des exakten Gleichungssystems:
 [[ 22.]
 [ 88.]
 [264.]]

Lösung des gestörten Gleichungssystems:
 [[  7.383 ]
 [ 58.766 ]
 [395.5532]]
relative error by python :  0.4855930763768666

❮ sivashan on Sunday at 11:24 AM  main ≡ ?1 1  0.069s MEM: 18.77% (9/31GB)
❯ { home ⇄ Documents ⇄ H_HM_M_1 ⇄ SE08 ⇄ Sivashan }
```