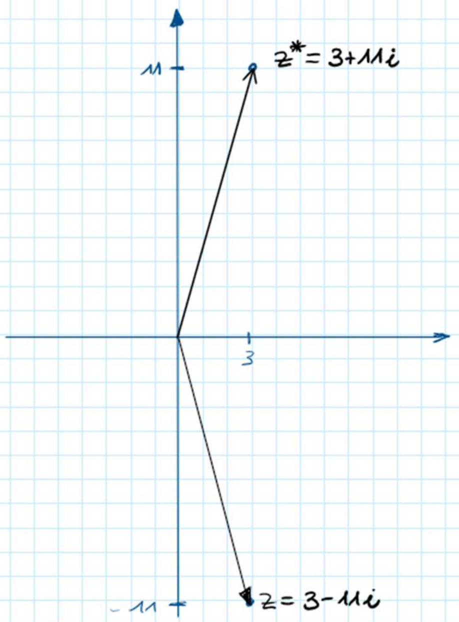
Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-11)^2} = \sqrt{130}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -1{,}3045443 \text{ rad}$$

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \underline{\underline{e^{i \cdot -1{,}3045} \cdot 11{,}402}}$$

$$z = re^{i\varphi} = \underline{\underline{e^{-i \cdot 1{,}3045} \cdot 11{,}402}}$$

$$z^* = r \cdot e^{-i\varphi} = \underline{\underline{e^{+i \cdot 1{,}3045} \cdot 11{,}402}}$$

$$z^* = r \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi) = \underline{\underline{e^{+i \cdot 1{,}3045} \cdot 11{,}402}}$$

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = \boxed{4[\cos(-40^\circ) + i \cdot \sin(-40^\circ)]} + \boxed{2e^{i\,30^\circ}} \boxed{-3 + 1.5i}$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

$$z_3 = -3 + 1{,}5\,i$$

$$r_2 = 2 \qquad \varphi_2 = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \cos(30^\circ) = \sqrt{3} = 1{,}732051$$

$$y = r \cdot \sin\varphi = 2 \cdot \sin(30^\circ) = 1$$

$$z_2 = \sqrt{3} + 1 \cdot i$$

$$r_1 = 4 \qquad \varphi_1 = -40^\circ \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos(-40^\circ) = 3{,}0642$$

$$y = r \cdot \sin\varphi = 4 \cdot \sin(-40^\circ) = -2{,}57115$$

$$z_1 = 3{,}0642 - 2{,}57115 \cdot i$$

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = 3{,}0642 - 2{,}57115i + \sqrt{3} + i - 3 + 1{,}5i$$

$$= \underline{\underline{1{,}79623 \quad -0{,}07115\,i}}$$

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{\cancel{\sqrt{5}} \cdot e^{i \cdot 0{,}464}}{\cancel{\sqrt{5}} \cdot e^{-i \cdot 1{,}107}} = \underline{\underline{e^{i \cdot 1{,}5708}}}$$

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}464$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 - (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) = -1{,}107$$

$z_3 = 4(\cos 30° + i \sin 30) = 4 \cdot e^{i \pi/6}$

$z = e^{i \cdot 1{,}5708} + 2e^{-i \pi/3} + 4e^{i \pi/6} = \underline{\underline{4{,}641\, e^{i \cdot 0{,}277}}}$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\, i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

$(1-\sqrt{2}i)^3 = (1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$

$x = 1 \qquad r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

$y = -\sqrt{2} \qquad \varphi = \arccos(x/r) = 0{,}955$

$(\sqrt{3}\, e^{i \cdot 0{,}955})^3 = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot 2{,}866}}}$