Aufgabe 1 (ca. 45 Min.):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition von $\boldsymbol{A}$ bzgl. der ∞−Norm. Sie dürfen $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit Python berechnen.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20'000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -10'000 \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_\infty(A) = \| A \|_\infty \cdot \| A^{-1} \|_\infty = 3 \cdot 20'001 = \underline{\underline{60'003}}$$

b) Für $\varepsilon > 0$ sei die fehlerbehaftete rechte Seite

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie gross darf ε maximal sein, wenn die Abschätzung des relativen Fehlers $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ der Lösung $\tilde{x}$ mit Hilfe der Kondition aus Aufgabe a) höchstens 1% sein darf?

$$\underbrace{\frac{\| \tilde{x} - x \|_\infty}{\| x \|_\infty}}_{=0{,}01} \leq \text{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\| \tilde{b} - b \|_\infty}{\| b \|_\infty}$$

$$0{,}01 \leq \text{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{1}$$

$$0{,}01 \leq 60'003 \cdot \frac{\varepsilon}{1}$$

$$\varepsilon \geq \underline{\underline{1{,}67 \cdot 10^{-7}}}$$

c) Welcher relative Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ ergibt sich für die Lösung $\tilde{x}$ mit der fehlerbehafteten rechten Seite aus Aufgabe b) und dem dort berechneten maximalen ε tatsächlich?

$$A \cdot x = b \qquad\qquad A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} -0{,}99666 \\ 1 \\ 0{,}99833 \end{pmatrix}$$

$$\text{Relativer Fehler} = \frac{\| \tilde{x} - x \|_\infty}{\| x \|_\infty} = \frac{\begin{pmatrix} -0{,}99666 \\ 1 \\ 0{,}99833 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} = \frac{0{,}00334}{1} = \underline{\underline{0{,}00334}}$$

d) Gehen Sie nun davon aus, dass nun zusätzlich noch jede Komponente von $\boldsymbol{A}$ um bis $1e-7$ gestört sein kann. Wiederholen Sie mit dieser zusätzlichen Information die Berechnung aus b).

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \geq \frac{\text{cond}_\infty(A)}{1-\text{cond}_\infty(A)\cdot\frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}\right)$$

$$0{,}01 \geq \frac{\text{cond}_\infty(A)}{1-\text{cond}_\infty(A)\cdot\frac{3\cdot 10^{-7}}{3}} \cdot \left(\frac{3\cdot 10^{-7}}{3} + \frac{\varepsilon}{1}\right)$$

$$\varepsilon \geq \underline{\underline{6{,}566\cdot 10^{-8}}}$$