

Rechnerarithmetik

Maschinendarstellbare Zahlen M zur Basis B :

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 0.m_1m_2m_3 \dots m_n \cdot B^{\pm e_1e_2 \dots e_l}\} \cup \{0\}$$

Dabei gilt $m_1 \neq 0$, $m_i, e_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ für $i \neq 0$ und $B \in \mathbb{N}$ ($B > 1$)

Der **Wert** $\hat{\omega}$ einer solchen Zahl ist definiert als

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i B^{\hat{e}-i}, \quad \hat{e} = \sum_{l=1}^l e_l B^{l-i}$$

x wird als n -stellige Gleitpunktzahl zur Basis B bezeichnet.

Beispiel: $0.\underbrace{3211}_{n=4} \cdot \underbrace{4^{12}}_{l=2}$

1. $\hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$
2. $\hat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$

Gleitpunktzahlen

- Single Precision (32 Bit) $V = 1 \text{ Bit}$ $E = 8 \text{ Bit}$ $M = 23 \text{ Bit}$
- Double Precision (64 Bit) $V = 1 \text{ Bit}$ $E = 11 \text{ Bit}$ $M = 52 \text{ Bit}$

Bei allgemeiner Basis B gilt (**Maschinengenauigkeit** = ϵ_{ps})

$$\epsilon_{ps} := \frac{B}{2} \cdot B^{-n}, \quad \epsilon_{ps_{10}} := 5 \cdot 10^{-n}$$

Sie bezeichnet den maximalen relativen Fehler, der durch Rundungen entstehen kann.

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq 5 \cdot 10^{-n} \quad (\text{da } x \geq 10^{e-1})$$

Approximations- und Rundungsfehler

Die Maschinenzahlen sind nicht gleichmässig verteilt. Bei jedem Rechner gibt es eine grösste (x_{max}) und kleinste (x_{min}) positive Maschinenzahl.

- $x_{max} = B^{e_{max}} - B^{e_{max}-n} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{max}}$
- $x_{min} = B^{e_{min}-1}$

Definition

Gegeben sei eine Näherung \tilde{x} zu einem exakten Wert x

- Absoluter Fehler $|\tilde{x} - x|$
- Relativer Fehler $\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$ bzw. $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$ ($x \neq 0$)

Fehlerfortpflanzung bei Funktionsauswertungen / Konditionierung

Näherung für den *absoluten* und *relativen* Fehler bei Funktionsauswertungen

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx \underbrace{|f'(x)| \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{absoluter Fehler von } x}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx \underbrace{\frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}}_{\text{Konditionszahl } K} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

Den Faktor K nennt man *Konditionszahl*.

$$K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

Relative Fehlervergrösserung von x , bei einer Funktionsauswertung von $f(x)$.

- Gut konditionierte Probleme Konditionszahl ist klein (≤ 1)
- Schlecht konditionierte Probleme Konditionszahl ist gross (> 1)

Nullstellenprobleme

Eine Gleichung der Form $F(x) = x$ heisst **Fixpunktgleichung**.

- Ihre Lösungen \bar{x} , für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist, heissen **Fixpunkte**.

Fixpunktiteration

Gegeben sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mit $x_0 \in [a, b]$. Die rekursive Folge

$$x_{n+1} \equiv F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Heisst Fixpunktiteration von F zum Startwert x_0 .

Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung F' und $\bar{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von F . Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$

- $|F'(\bar{x})| < 1$ x_n konvergiert gegen \bar{x} , falls x_0 nahe genug bei \bar{x} liegt *anziehend*
- $|F'(\bar{x})| > 1$ x_n konvergiert für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$ *abstossend*

Banachscher Fixpunktsatz

Sei $F: [a, b] \rightarrow [a, b]$ und es existiere eine Konstante α , wobei gilt

- α ($0 < \alpha < 1$): *Lipschitz-Konstante*
- $\forall_{x,y} (x, y \in [a, b])$

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|} \leq \alpha$$

Dann gilt

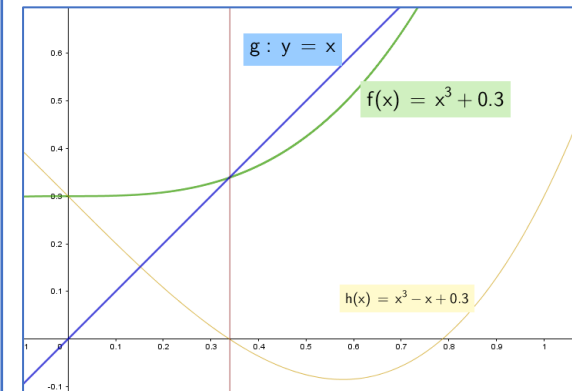
- F hat genau einen Fixpunkt \bar{x} in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert gegen \bar{x} für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$
- Es gelten die Fehlerabschätzungen
 - $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$ a-priori Abschätzung
 - $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$ a-posteriori Abschätzung

Berechne die Nullstellen von $p(x) = x^3 - x + 0.3$

Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$$

$F(x_n)$ steigt stetig an



$F: I \rightarrow I$ gilt wenn...

$$F(a) > a, \quad F(b) < b$$

Alpha bestimmen / überprüfen

$$\alpha = \max_{x \in I} |F'(x)| \leq 1$$

Anzahl Iterationen n berechnen

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\text{tol} \cdot (1 - \alpha)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln \alpha}$$

Newton-Verfahren

Sukzessive Approximation der Funktionskurve $y = f(x)$ durch Tangenten, deren Schnittpunkt mit der x-Achse problemlos berechnet werden kann.

Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

- Startwert x_0 geeignet wählen (nahe bei ξ)
- Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

(x_0, x_1, x_2, \dots) ist sicher gegeben, wenn im Intervall $[a, b]$, in dem alle Näherungswerte (und die Nullstellen selbst) liegen sollen, die Bedingung

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Erfüllt ist (hinreichende Konvergenzbedingung).

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt in jedem Schritt $f'(x_n)$ auszurechnen, kann man immer wieder $f'(x_0)$ verwenden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Sekantenverfahren

Der Schnittpunkt von Sekanten durch jeweils zwei Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ mit der x-Achse, wird berechnet.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Konvergenzgeschwindigkeit

Sei (x_n) eine gegen \bar{x} konvergierende Folge. Dann hat das Verfahren die **Konvergenzordnung** $q \geq 1$ wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

Für alle n .

- $q = 1$ lineare Konvergenz verlangt man noch $c < 1$.
- $q = 2$ quadratische Konvergenz

Fehlerabschätzung

Nullstellensatz von Bolzano

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$. Dann muss f in $[a, b]$ eine Nullstelle besitzen.

Sei x_n also ein iterativ bestimmter Näherungswert einer exakten Nullstelle ξ der stetigen Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und es gelte für ein vorgegebene Fehlerschranke / Fehlertolerant $\epsilon > 0$

$$f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$$

Dann muss gemäss dem Nullstellensatz im offenen Intervall $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$ eine Nullstelle ξ liegen und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| < \epsilon$$

Lineare Gleichungssysteme – Gauss-Algorithmus

Gauss-Algorithmus für ein Gleichungssystem $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Umformung des Gleichungssystems $Ax = b$, in ein äquivalentes Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$, so dass die Matrix \tilde{A} als **obere Dreiecksmatrix** vorliegt.

- $z_j := z_j - \lambda z_i \quad i < j \ (\lambda \in \mathbb{R}), z_i$ ist die i -te Zeile des Gleichungssystems
- $z_i \rightarrow z_j$ Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile im System

Rekursive Vorschrift für ein Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}, \dots, x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \dots - a_{1n} \cdot x_n}{a_{11}}$$
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Fehlerfortpflanzung und Pivotisierung

Für $i = 1, \dots, n$:

Erzeuge Nullen unterhalb des Diagonalelements in der i -ten Spalte

- Suche das betragsgrösste Element unterhalb der Diagonalen in der i -ten Spalte:
Wähle k so, dass $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
 $\begin{cases} \text{falls } a_{ki} = 0: & A \text{ ist nicht regulär; stop;} \\ \text{falls } a_{ki} \neq 0: & z_k \leftrightarrow z_i \end{cases}$
- Eliminationsschritt:
Für $j = i + 1, \dots, n$ eliminiere das Element a_{ji} durch

$$z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \cdot z_i$$

Determinante

Gegeben sei eine Matrix A , woraus die obere Dreiecksmatrix \tilde{A} entsteht.

- \tilde{a}_{ii} : Diagonalelemente von \tilde{A}
- l : Anzahl Zeilenvertauschungen

$$\det(A) = (-1)^l \cdot \det(\tilde{A}) = (-1)^l \cdot \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ii}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3) \cdot (2) \cdot (2) = 12$$

Lineare Gleichungssysteme – LR-Zerlegung

Das ursprüngliche Gleichungssystem $Ax = b$ lautet mit der LR-Zerlegung

$$LRx = b \Leftrightarrow Ly = b \text{ und } Rx = y$$

Für eine $n \times n$ Matrix A , gibt es $n \times n$ Matrizen L und R mit den Eigenschaften

- L ist eine *normierte untere Dreiecksmatrix* mit $l_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, n$)
- R ist eine *obere Dreiecksmatrix* mit $r_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$)
- $A = L \cdot R$ ist die LR-Zerlegung von A .

Zerlegung mit Zeilenvertauschung

P_K erhält man aus der Einheitsmatrix I_n durch Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile.

Zeilen-Vertauschungen werden durch $P_1 \dots P_n$ ausgedrückt.

$$P = \prod_{i=1}^n P_{n-i+1}$$

Mit dieser Permutationsmatrix erhält man dann als *RL – Zerlegung*

$$PA = LR$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lässt sich schreiben als $PAx = Pb$ bzw. $LRx = Pb$ und in den zwei Schritten lösen

$$Ly = Pb \rightarrow y = \dots,$$

$$Rx = y \rightarrow x = \dots$$

Vertauschung der 1. Und 3. Zeile bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I^* \cdot A = P_1 \cdot A = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = LR$$

$$i = 1, j = 2 \rightarrow z_2 = z_2 - \underbrace{\frac{1}{(-1)}}_{l_{21}} \cdot z_1 \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1-1 & -3+1 & -2+1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, j = 3 \rightarrow z_3 = z_3 - \underbrace{\frac{5}{(-1)}}_{l_{31}} \cdot z_1 \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5-5 & 1+5 & 4+5 \end{pmatrix}$$

$$i = 2, j = 3 \rightarrow z_3 \equiv z_3 - \underbrace{\frac{6}{(-2)}}_{l_{32}} \cdot z_2 \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0+0 & 6-6 & 9-3 \end{pmatrix}$$

$$R = A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in L

$$l_{21} = \frac{1}{-1} = -1, \quad l_{31} = \frac{5}{-1} = -5, \quad l_{32} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme – QR-Zerlegung

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst orthogonal, wenn $Q^T \cdot Q = I_n$ ist. Dabei ist I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine *QR-Zerlegung* von A ist eine Darstellung von A als Produkt einer orthogonalen $n \times n$ Matrix Q und einer rechtsoberen $n \times n$ Dreiecksmatrix R

$$A = QR$$

Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$$

Die orthogonale $n \times n$ Matrix heisst **Householder-Matrix**.

$$H := I_n - 2uu^T, \quad |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = 1$$

Householder-Matrix zum Vektor u

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H = I_n - 2\tilde{u}\tilde{u}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} - 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Algorithmus zur QR-Zerlegung

$$R := A, \quad Q := I_n$$

Für $i = 1, \dots, n - 1$:

erzeuge Nullen in R in der i -ten Spalte unterhalb der Diagonalen

1. H_i mit $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$ berechnen
2. H_i mit I_{i-1} Block links oben erweitern $\rightarrow Q_i$
3. $R := Q_i \cdot R$
4. $Q := Q \cdot Q_i^T$

Ablauf

$$H_1 \cdot A_1 = H_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{A_1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $v_1 := a_1 + \text{sign}(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
2. $u_1 := \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1$
3. $H_1 := I_n - 2u_1u_1^T = Q_1$

$$H_2 \cdot A_2 = H_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & H_2 \\ 0 & H_2 & H_2 \end{pmatrix}$$

$$Q := Q_1^T \cdot Q_2^T, \quad R := \underbrace{Q_2 \cdot Q_1}_{Q^{-1}} \cdot A$$

Lineare Gleichungssysteme – Fehlerberechnung

Eine Abbildung $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Vektornorm**, wenn die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sind:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Dreiecksungleichung"

Für Vektoren $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gibt es die folgenden **Vektornormen**

- 1-Norm Summennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- 2-Norm Euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- ∞ -Norm Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

Für eine $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es die folgenden **Matrixnormen**

- 1-Norm Spaltensummennorm $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- 2-Norm Spektralnrm $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
- ∞ -Norm Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Abschätzung für Fehlerhafte Matrizen

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm, $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Falls

$$\text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < 1$$

Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right)$$

Abschätzung für Fehlerhafte Vektoren

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Dann gilt für den absoluten und den relativen Fehler in x :

- $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$
- $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$, falls $\|b\| \neq 0$

Die Zahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ nennt man Konditionszahl der Matrix A

- $\text{cond}(A)$ gross \rightarrow schlechte Konditionierung

Untersuchen Sie die Fehlerfortpflanzung im linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Für den Fall, dass die rechte Seite von \tilde{b} in jeder Komponente um maximal 0.1 von b abweicht.

$$\|\tilde{b} - b\|_\infty \leq 0.1, \quad \|A\|_\infty = \max\{2 + 4, 4 + 8.1\} = 12.1$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 40.5 & -20 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 60.5$$

$$\text{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 12.1 \cdot 60.5 = 732.05$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 60.5 \cdot 0.1 = \underbrace{6.05}_{\text{absoluter Fehler}}$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}(A)_\infty \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 732 \cdot \frac{0.1}{1.5} = \underbrace{48.8}_{\text{relativer Fehler}}$$

Lineare Gleichungssysteme – Fehlerberechnung und Aufwandschätzung

Aufwandschätzung

Die Anzahl Gleitkommaoperationen werden in Abhängigkeit von n bestimmt.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \text{ und } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \quad n = \text{Dimension}$$

Ein Algorithmus hat die Ordnung $O(n^q)$, wenn $q > 0$ die minimale Zahl ist, für die es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass der Algorithmus für alle $n \in \mathbb{N}$ weniger als

Beispiel

Wie viele Gleitkommaoperationen benötigt das Rückwärtseinsetzen gemäss Gauss?

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Multiplikation und Division

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Addition und Subtraktion

$$0 + 1 + 2 + \dots + n-1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1+1) \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Summe beider Operationstypen

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2$$

Lineare Gleichungssysteme – Iterative Verfahren

Iterative Verfahren sind effizienter, jedoch kann man keine genauen Lösungen erwarten. Ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$ berechnet man mittels einer Rechenvorschrift $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ iterativ eine Folge von Vektoren

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

Jacobi-Verfahren / Jacobi-Verfahren und **Gauss-Seidel-Verfahren**

Zu lösen sei $Ax = b$. Die Matrix $A = (a_{ij})$ sei zerlegt in der Form $A = L + D + R =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{=:L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:R}$$

Beispiel mit *Jacobi*

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8} \left(19 - \sum_{j=1, j \neq 1}^3 a_{1j} \cdot x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{8} (19 - (5 \cdot -1 + 2 \cdot 3)) = \frac{18}{8}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{9} \left(5 - \sum_{j=1, j \neq 2}^3 a_{2j} \cdot x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{9} (5 - (5 \cdot 1 + 1 \cdot 3)) = -\frac{1}{3}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{7} \left(34 - \sum_{j=1, j \neq 3}^3 a_{3j} \cdot x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{7} (34 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -1)) = \frac{32}{7}$$

Fixpunktiteration gemäss *Jacobi* (*Gesamtschritt-Verfahren*):

$$Dx^{(k+1)} = -(L + R)x^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Implementation / Allgemeine Form gemäss *Jacobi*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Fixpunktiteration gemäss *Gauss-Seidel* (*Einzelschritt-Verfahren*):

$$(D + L)x^{(k+1)} = -Rx^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} \cdot Rx^{(k)} + (D + L)^{-1} \cdot b$$

Implementation / Allgemeine Form gemäss *Gauss-Seidel*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Lineare Gleichungssysteme – Iterative Verfahren

<p>Gegeben sei eine Fixpunktiteration</p> $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c =: F(x^{(n)})$	<p>Für das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) gilt $B = -D^{-1}(L + R)$</p> <p>Für das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) gilt $B = -(D + L)^{-1}R$</p>
<p>Und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sei bezüglich der Norm $\ \cdot\$ anziehender Fixpunkt. Dann konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen \bar{x} und es gelten die Abschätzungen</p> <ul style="list-style-type: none"> $\ x^{(n)} - \bar{x}\ \leq \frac{\ B\ ^n}{1 - \ B\ } \cdot \ x^{(1)} - x^{(0)}\$ <i>a-priori Abschätzung</i> $\ x^{(n)} - \bar{x}\ \leq \frac{\ B\ }{1 - \ B\ } \cdot \ x^{(n)} - x^{(n-1)}\$ <i>a-posteriori Abschätzung</i> 	<p>Wobei B eine $n \times n$ Matrix ist und $c \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\ \cdot\$ eine der eingeführten Normen und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ erfülle $\bar{x} = B\bar{x} + c = F(\bar{x})$. Dann heisst</p> <ul style="list-style-type: none"> \bar{x} anziehender Fixpunkt, falls $\ B\ < 1$ \bar{x} abstossender Fixpunkt, falls $\ B\ > 1$
<p>A ist eine diagonaldominante Matrix, falls eines der beiden folgenden Kriterien gilt</p> <ul style="list-style-type: none"> für alle $i = 1, \dots, n$: $a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ (Zeilensummenkriterium) für alle $j = 1, \dots, n$: $a_{jj} > \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{ij}$ (Spaltensummenkriterium) <p><u>Beispiel</u></p> $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \rightarrow \begin{cases} i = 1 \rightarrow 4 > 2 \\ i = 2 \rightarrow 5 > 3 \\ i = 3 \rightarrow 5 > 3 \end{cases}$ <p>Fall A diagonaldominant ist, konvergiert das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) und auch das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) für $Ax = b$.</p> <p>Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Konvergenz ist</p> $\text{Spektralradius } \rho(B) < 1$	

Lineare Gleichungssysteme - Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} erweitert die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} , so dass nun also auch Gleichungen der folgenden Art lösbar werden

$$x^2 + 1 = 0$$

Dafür wird die imaginäre Einheit i mit der folgenden Eigenschaft eingeführt.

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) zweier Zahlen x und y .

$$z = x + iy$$

Die imaginäre Einheit i ist definiert durch

$$i^2 = -1$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die reellen Bestandteile x und y von z werden als Real- und Imaginärteil bezeichnet

- **Realteil** von z $Re(z) = x$
- **Imaginärteil** von z $Im(z) = y$

Die zu z konjugierte komplexe Zahl ist definiert als $z^* = x - iy$. Dies entspricht der an der x - Achse gespiegelten Zahl.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$. Dies entspricht der Länge des Zeigers.

Darstellungsformen

- Normalform $z = x + iy$
- Trigonometrische Form $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$
- Exponentialform $z = r e^{i\varphi}$

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

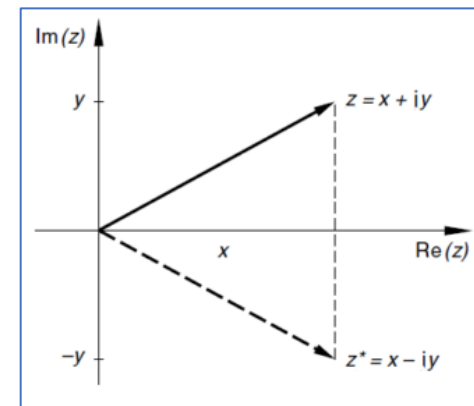
Beispiel

$$z = 3 - 11i$$

$$3 = r \cdot \cos \varphi, \quad 11 = r \cdot \sin \varphi, \quad r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$$

$$\arcsin\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \varphi = 1.3$$

$$z = \cos(1.3) + i \cdot \sin(1.3), \quad z = \sqrt{130} \cdot e^{i \cdot 1.3}$$



Lineare Gleichungssysteme - Komplexe Zahlen

Grundrechenarten

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

- Summation $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Subtraktion $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzieren und Radizieren

Die n -te Potenz einer komplexen Zahl lässt sich einfach berechnen, wenn diese in der trigonometrischen oder der Exponentialform vorliegt (Sei $n \in \mathbb{N}$):

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \rightarrow z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten und Variablen $a_i, z \in \mathbb{C}$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Besitzt in der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen genau n Lösungen

Wurzel einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl z wird als n -te Wurzel von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wenn

$$z^n = a \rightarrow z = \sqrt[n]{a}$$

Lösungen der algebraischen Gleichung $z^n = a$

$$z^n = a = r_0 e^{i\varphi} \quad (r_0 > 0; n = 2, 3, 4, \dots)$$

Besitzt in der Menge \mathbb{C} genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r (\cos \varphi_k + i \cdot \sin \varphi_k) = r e^{i\varphi_k}$$

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad (\text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{r_0}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks.

Lineare Gleichungssysteme – Eigenwerte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst **Eigenwert** von A , wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

x heisst dann **Eigenvektor** von A .

Eigenschaften von Eigenwerten

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

Die Eigenwerte einer Diagonal- oder einer Dreiecksmatrix sind deren Diagonalelemente.

Polynom und Spur

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Die Abbildung p ist definiert durch

$$p(\lambda) \rightarrow \det(A - \lambda I_n)$$

Ist ein Polynom vom Grad n und wird *charakteristisches Polynom* von A genannt. Die Eigenwerte von A sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit hat A also genau n Eigenwerte, von denen manche mehrfach vorliegen können.

Die Determinante der Matrix A ist gerade das Produkt ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A , d.h. gleich der *Spur* (tr) von A :

- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
- $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

Ist λ_i ein Eigenwert der regulären Matrix A , so ist der Kehrwert $\frac{1}{\lambda_i}$ ein Eigenwert der inversen Matrix A^{-1} .

Vielfachheit und Spektrum

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die *Vielfachheit*, mit der λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A auftritt, heisst *algebraische Vielfachheit* von λ .

Das *Spektrum* $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A .

Beispiel

Berechne *Spektrum*, *Determinante* und *Spur* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6$$

Spur

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

Spektrum

$$\sigma(A) = 3$$

Lineare Gleichungssysteme – Eigenvektoren

Eigenschaften von Eigenvektoren

Seien zwei Eigenvektoren x, y zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so ist $x + y$ und auch jedes Vielfach von x ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert λ :

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y)$$

$$A(\mu x) = \mu Ax = \mu \lambda x = \lambda \mu x$$

Eigenraum

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert λ zusammen mit dem Nullvektor 0 einen Unterraum von \mathbb{C}^n , den sogenannten *Eigenraum*.

Der Eigenraum des Eigenwertes λ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

Welches nur dann eine nicht-triviale Lösung aufweist, wenn $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

Die *Dimension* des Eigenraumes von λ wird die *geometrische Vielfachheit* von λ genannt. Sie berechnet sich als

$$n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$$

Und gibt die Anzahl der lin. Unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein. Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beispiel: Berechne Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 5 \cdot -1$$

$$p(\lambda) = -4 + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 = i^2$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Eigenvektor für $\lambda_1 = i$

$$\begin{pmatrix} 2 - i & 5 \\ -1 & -2 - i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 - i & 5 \\ 0 & -2 - i + \frac{5}{2 - i} \end{pmatrix}$$

$$-2 - i + \frac{5}{2 - i} = (2 - i)(-2 - i) + 5 = 1 + i^2 = 0$$

$$0 = (2 - i) \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_1 = -\frac{5x_2}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = -\frac{5 \cdot (2 + i)}{4 - i^2} = -\frac{10 + 5i}{5} = -2 - i$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \mid x = \mu \begin{pmatrix} -2 - i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ x \mid x = \mu \begin{pmatrix} -2 + i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Lineare Gleichungssysteme – Numerische Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und T eine reguläre Matrix mit ... so heissen B und A zueinander *ähnliche Matrizen*.

$$B = T^{-1}AT$$

Im Spezialfall, dass $B = D$ ein Diagonalmatrix ist, also ... nennt man A diagonalisierbar.

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenwerte und Eigenvektoren ähnlicher / diagonalisierbarer Matrizen

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zueinander ähnliche Matrizen. Dann gilt

1. A und B haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraische Vielfachheit
2. Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von B , dann ist Tx ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A .
3. Falls A diagonalisierbar ist
 - Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
 - Die linear unabhängigen Eigenvektoren von A stehen in den Spalten von T

Der **Spektralradius** $p(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$p(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem betragsmässig grössten Eigenwert λ_1 mit

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Vektoriteration / von-Mises-Iteration

So konvergieren für (fast) jeden Startvektor $v^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit Länge 1 die Folgen

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

Für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ_1 von A (also $v^{(k)} \rightarrow v$ und $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_1$)

QR-Verfahren

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A_0 := A, \quad P_0 := I_n$$

Für $i = 0, 1, 2, \dots$:

- $A_i := Q_i \cdot R_i$
 - $A_{i+1} := R_i \cdot Q_i$
 - $P_{i+1} := P_i \cdot Q_i$
- QR-Zerlegung von A_i