

Vorlesung Höhere Mathematik 1

Kapitel 1: Einführung

9. September 2024

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften



Aufbau der Vorlesung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Diese Vorlesung soll die Grundlagen der Numerik vermitteln.
- Darin enthalten ist die Programmierung einfacher Algorithmen. Die verwendete Programmiersprache ist Python.
- Der behandelte Unterrichtsstoff im Skript folgt vorwiegend den Büchern
 - 'Numerische Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung', Michael Knorrenschild, 5. Auflage, Carl-Hanser Verlag, 2013
 - 'Numerische Methoden', Huckle, Schneider, Springer, 2006
 - 'Numerik Algorithmen', G. Englen-Müllges, K. Niederdrenk, R. Wodicka, Springer, 10. Auflage, 2011
 - 'Numerical Methods for Engineers and Scientists', 3rd Edition, A. Gilat, V. Subramaniam, Wiley, 2014
- Der im Skript behandelte Stoff wird geprüft.

Übungen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- In den Übungen wird jeweils eine Übungsserie verteilt.
- Sie haben eine Woche Zeit, diese Serie in Zweiterteams (allenfalls Dreierteams, falls vom Dozenten akzeptiert) zu lösen und abzugeben.
- Eine Stichprobe von drei abgegebenen Serien pro Team wird durch die Dozierenden detailliert bewertet.
- Die aus den Serien gebildete Note fließt zu 20% in die Modulnote ein.

Übungen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Jede abgegebene Serie erhält 1 Punkt, sofern ein ernsthafter Lösungsversuch vorliegt (liegt im Ermessen der Dozierenden).
- Dieser Punkt wird vergeben unabhängig davon, ob die Serie anschliessend noch detailliert korrigiert wird oder nicht.
- Für jede der korrigierten Serien werden durch die Dozierenden zusätzlich die folgenden Bewertungen vergeben:
 - Sehr gut (+3 Punkte)
 - Gut (+2 Punkte)
 - Genügend (+1 Punkt)
 - Ungenügend (+0 Punkte)
- Bei 11 Serien ist das Punktemaximum also $11 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 20$ Punkte, welches mit einer 6 bewertet wird.
- Bei Ausfällen von Serien (z.B. durch Feiertage) wird das Punktemaximum entsprechend reduziert.

Semesterendprüfung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Die Semesterendprüfung dauert 120 Minuten.
- Sie fließt zu 80% in die Modulnote ein.

Gliederung des Kapitels 1

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

1 Aufbau der Vorlesung

2 Was ist Numerische Mathematik?

3 Historische Entwicklung

4 Typische Fragestellungen

Lernziele

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Sie kennen die Definition der Numerischen Mathematik sowie die wichtigsten Anknüpfungspunkte zur Informatik.
- Sie kennen den geschichtlichen Hintergrund der Entwicklung der Numerischen Mathematik.
- Sie kennen einige der typischen Fragestellungen der Numerischen Mathematik.

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Die numerische Mathematik (kurz Numerik), beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme.
- Hauptanwendung ist die Berechnung von Lösungen mit Hilfe von Computern.
- Im Gegensatz zur analytischen Rechnung will man bei der Numerik keine geschlossenen Formeln oder algebraische Ausdrücke erhalten, sondern numerische Resultate.
- Unter einem Algorithmus verstehen wir dabei “eine endliche Menge genau beschriebener Anweisungen (arithmetische und logische Operationen und Ausführungshinweise), die in einer bestimmten Reihenfolge auszuführen sind, um mit Hilfe der eingegebenen Daten die gesuchten Ausgabedaten zu ermitteln” (gemäss [6])

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Interesse an solchen Algorithmen besteht meist aus einem der folgenden Gründe:
 - ① Es gibt zu dem Problem keine explizite Lösungsdarstellung (so zum Beispiel bei den Navier-Stokes-Gleichungen oder dem Dreikörperproblem) oder
 - ② die Lösungsdarstellung existiert, ist jedoch nicht geeignet, um die Lösung schnell zu berechnen oder liegt in einer Form vor, in der Rechenfehler sich stark bemerkbar machen (zum Beispiel bei vielen Potenzreihen).

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Unterschieden werden zwei Typen von Verfahren:
 - ➊ Direkte Verfahren, die nach endlicher Zeit bei unendlicher Rechnergenauigkeit die exakte Lösung eines Problems liefern.
 - ➋ Näherungsverfahren, die (meist iterativ) mit einer begrenzten Zahl von Rechenschritten eine Approximation der exakten Lösung liefern.

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Die Verbindung der Numerik mit der Informatik ist offensichtlich, ist doch die effiziente Berechnung numerischer Algorithmen ohne Computer meist nicht möglich.
- Umgekehrt kommt man bei der täglichen Arbeit mit dem Computer zwingend auf direkte oder indirekte Art mit Grundverfahren der Numerik in Berührung, z.B.:
 - Zahldarstellung und -arithmetik
 - Implementierung mathematischer Funktionen
 - Computergraphik (Darstellung von Objekten)
 - Bildverarbeitung (Kompression, Analyse, Bearbeitung)
 - Neuronale Netze (Lernverfahren)
 - Information Retrieval (Vektorraummodell)
 - Chip Design (Algebraische Differentialgleichungen)
 - Stochastische Automaten und Markov-Ketten (Prozessverwaltung, Warteschlangen)

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Die Numerische Mathematik erscheint manchmal als eine nicht sehr übersichtliche Sammlung von Rezepten für eine Vielzahl von numerischen Problemen.
- Dies ist irreführend. Definiert man die Informatik wie im englischen Sprachgebrauch als die “Wissenschaft vom Computer” (Computer Science), so ist die Numerische Mathematik in natürlicher Weise darin enthalten (vgl. [7]).
- Dies äusserst sich z.B. im wichtigen Bereich des Wissenschaftlichen Rechnens (Scientific Computing), in dem Numeriker und Informatiker zusammen mit Wissenschaftlern daran arbeiten, komplexe Anwendungsprobleme verschiedener Wissenschaftsgebiete fachübergreifend zu lösen (typisches Beispiel ist die Meteorologie mit Wetter- und Klimamodellen sowie den entsprechenden Vorhersagen).

Was ist Numerische Mathematik?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Die Numeriker beschäftigen sich dabei mit der Entwicklung effizienter Algorithmen und Methoden, die das mathematische Problem möglichst gut diskret approximieren. Die Informatiker sind zuständig für die effiziente Implementierung (bzgl. Rechenzeit, Speicherverwaltung, Cache, Parallelisierung etc., vgl. [7]).
- Allerdings verschwimmen die Grenzen zwischen den Disziplinen in diesem Bereich, d.h. Numeriker und Informatiker benötigen ein umfangreiches Wissen der jeweils anderen Disziplin.

Historische Entwicklung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Die Anfänge der (numerischen) Mathematik reichen zurück bis zu den frühen Hochkulturen.
- Das erste logisch aufgebaute Zahlensystem, ein Additionssystem, dürfte auf die Ägypter zurückgehen (ca. 3000 v. Chr.).
- Die Babylonier kannten zu Beginn des 2. Jahrtausends vor Christus bereits ein Zahlensystem mit der Basis 60. Eine Näherung der Quadratwurzel $\sqrt{2}$ aus dieser Zeit ist in der folgenden Abbildung dargestellt: ¹

¹"Ybc7289-bw". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg>

Historische Entwicklung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

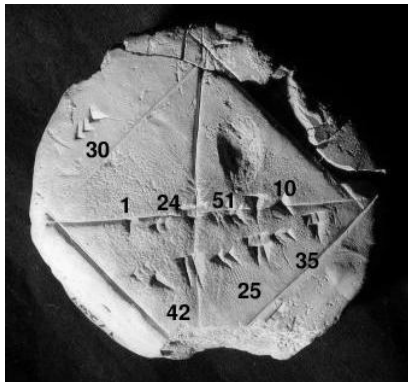


Abbildung: Babylonische Tontafel YBC 7289 von ca. 1800-1600 v.Chr.
Die Näherung von $\sqrt{2}$ ist in der Diagonale eines Quadrates dargestellt
mit den Symbolen für $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$

Historische Entwicklung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

**Historische
Entwicklung**

Typische
Fragestellun-
gen

- Lesen Sie für weitere Informationen das Kap. 1.2 im Skript.

Historische Entwicklung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

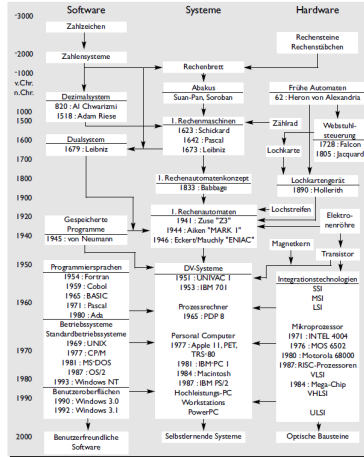


Abbildung: Zur geschichtlichen Entwicklung des Computers

Typische Fragestellungen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Im Folgenden betrachten wir einige typische Fragestellungen, die in den Vorlesungen Höhere Mathematik 1 und 2 behandelt werden.

- Wie wirkt sich die Beschränkung der Anzahl Bits für Zahlenformate auf Rechenergebnisse aus?
- Betrachten wir z.B. die IEEE-Formate »Single Precision« oder »Double Precision«:

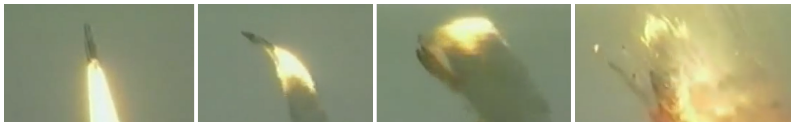
single: (32 bit)

```
V EEEEEEEE MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM
0 1          8 9                               31
```

double: (64 bit)

```
V EEEEEEEEEEE MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM
0 1           11 12                                     63
```

- Durch die Abbildung von reellen Zahlen auf maschinen darstellbare Zahlen (mit einer begrenzten Anzahl Bits) können erhebliche Rechenungenauigkeiten entstehen, unter Umständen mit katastrophalen Folgen wie bei der Explosion der Ariane 5 Rakete am 4. Juni 1996.



(siehe https://youtu.be/gp_D8r-2hwk)

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suche $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.
- Für die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ sind die Nullstellen bekannt:

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}.$$

- Aber wie bestimmt man Nullstellen von komplizierteren Funktionen wie $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ oder $f(x) = \exp(x) - \sin(x)$?

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

HM 1,
Kapitel 1

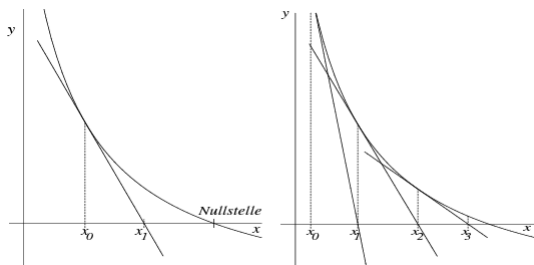
Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Beispiel: Iteratives Tangenten Verfahren nach Newton (aus Knorrenschild).



Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Die Funktion $f(x)$ kann in der Umgebung von x_0 durch ihre Tangente angenähert werden: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Der Schnittpunkt x_1 der Tangenten mit der x -Achse ist eine erste Näherung für die Nullstelle, dort gilt $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ und daraus ergibt sich $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
- Durch wiederholen des Verfahrens erhält man nach n Schritten die Iterationsformel

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Beispiel: $A(n, n)$ sei eine Matrix reeller Zahlen und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.
- Gesucht ist der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$.
- Dieses Problem kann gemäss der linearen Algebra gelöst werden (sofern $\det(A) \neq 0$) mit $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, doch ist diese Lösung so nicht effizient berechenbar.
- Wir werden für die Berechnung von \vec{x} effizientere numerische Verfahren kennen lernen.

Lösung von nicht linearen Gleichungssystemen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Dies ist im Prinzip eine Erweiterung des Nullstellenproblems in einer Dimension auf weitere Dimensionen. Zu lösen ist zum Beispiel das Problem:

$$f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 8x_2^3 + 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Am Term x_2^3 sieht man, dass das System nicht linear ist.
- Das vorher vorgestellte Newton Verfahren lässt sich auf diese Fragestellung erweitern und für die Lösung solcher Systeme verwenden.

Interpolation

HM 1,
Kapitel 1

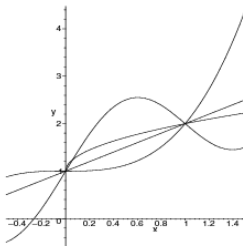
Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

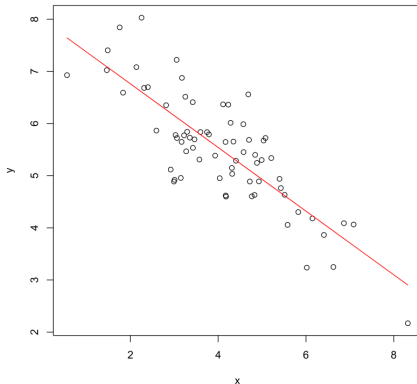
- Beim typischen Interpolationsproblem sind n diskrete Wertepaare (x_i, y_i) gegeben und gesucht ist eine stetige Funktion f mit der Eigenschaft $f(x_i) = y_i$ für alle x_i .
- Beispiel: Es soll eine interpolierende Funktion für die beiden Werte $(0,1)$ und $(1,2)$ gefunden werden.
 - Eine mögliche Lösung ist $f(x) = x + 1$, aber auch $f(x) = \sqrt{x} + 1$ oder $f(x) = \sin(\pi x) + x + 1$ kommen in Frage.
 - Tatsächlich lösen unendlich viele Funktionen dieses Problem.



Lineare und nicht-lineare Ausgleichrechnung

HM 1,
Kapitel 1

- Häufig sind n Wertepaare (x_i, y_i) das Resultat von Messungen und deshalb mit gewissen Unsicherheiten behaftet, welche sich z.B. als Streuung manifestieren können.



Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

Lineare und nicht-lineare Ausgleichrechnung

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Dann empfiehlt es sich, nicht eine Funktion zu suchen, die exakt durch die Wertepaare geht (wie bei der Interpolation in 5.), sondern möglichst 'nah' an alle beobachteten Werte rankommt. Offenbar gibt es einen Trend, welcher sich als Gerade $f(x)$ mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnen lässt, so dass der Fehler $\sum (y_i - f(x_i))^2$ minimal wird (lineare Regression).

Numerische Integration

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

- Gegeben ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Näherungswert des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- Beispiel: Mittelpunkts- oder Trapezregel.

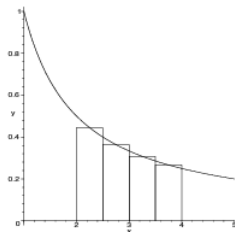


Bild 7.4 Summierte Mittelpunktsregel für $\int_2^5 x^{-2} dx$ und $n = 4$

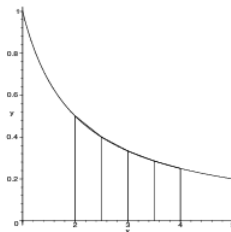


Bild 7.5 Summierte Trapezregel für $\int_2^5 x^{-2} dx$ und $n = 4$

Differentialgleichungen

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellungen

- Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ein Intervall $[a, b]$ und ein Anfangswert y_0 .
- Gesucht ist eine Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

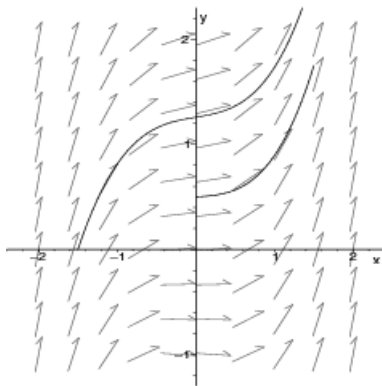
für alle $t \in [a, b]$ und $y(a) = y_0$.

- Das Anfangswertproblem besteht also darin, eine Lösung y der gewöhnlichen Differentialgleichung zu finden, die an der Stelle $t = a$ den vorgegebenen Wert y_0 annimmt.

Differentialgleichungen

HM 1,
Kapitel 1

- Die Lösungen lassen sich anhand sogenannter Richtungsfelder veranschaulichen (aus [1]).



Fragen?

HM 1,
Kapitel 1

Aufbau der
Vorlesung

Was ist
Numerische
Mathematik?

Historische
Entwicklung

Typische
Fragestellun-
gen

