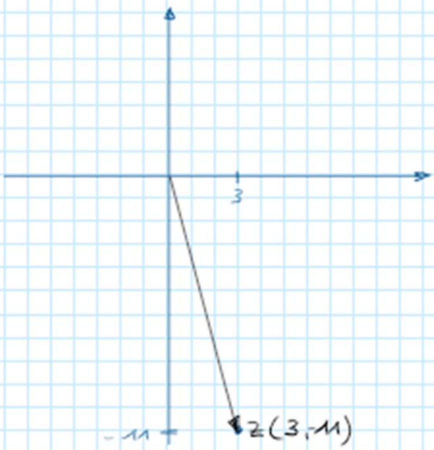
Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-11)^2} = \sqrt{130}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{R}\right) = 1{,}3045443 \text{ rad}$$

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = \underline{\underline{e^{i\cdot 1{,}3045}\cdot 11{,}402}}$$

$$z = re^{i\varphi} = \underline{\underline{e^{i\cdot 1{,}3045}\cdot 11{,}402}}$$

$$z^* = r\cdot e^{-i\varphi} = \underline{\underline{e^{-i\cdot 1{,}3045}\cdot 11{,}402}}$$

$$z^* = r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi) = \underline{\underline{e^{-i\cdot 1{,}3045}\cdot 11{,}402}}$$

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = \boxed{4[\cos(-40°) + i\cdot\sin(-40°)]} + \boxed{2e^{i\,30°}} \boxed{-3 + 1.5i}$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

$z_3 = -3 + 1{,}5\,i$

$r_2 = 2 \qquad \varphi_2 = 30° \quad \Rightarrow \quad x = r\cdot\cos\varphi = 2\cdot\cos(30°) = \sqrt{3} = 1{,}732051$

$y = r\cdot\sin\varphi = 2\cdot\sin(30°) = 1$

$z_2 = \sqrt{3} + 1\cdot i$

$r_1 = 4 \qquad \varphi_1 = -40° \quad \Rightarrow \quad x = r\cdot\cos\varphi = 4\cdot\cos(-40) = 3{,}0642$

$y = r\cdot\sin\varphi = 4\cdot\sin(-40°) = -2{,}57115$

$z_1 = 3{,}0642 - 2{,}57115\cdot i$

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = 3{,}0642 - 2{,}57115i + \sqrt{3} + i - 3 + 1{,}5i$$

$$= \underline{\underline{1{,}79623 \quad -0{,}07115\,i}}$$

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30° + i\cdot\sin 30°)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^*\cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{\cancel{\sqrt{5}}\cdot e^{i\cdot 0{,}464}}{\cancel{\sqrt{5}}\cdot e^{-i\cdot 1{,}107}} = \underline{\underline{e^{i\cdot 1{,}5708}}}$$

$r_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}464$

$r_2 = \sqrt{1^2 - (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) = -1{,}107$

$$z_3 = 4(\cos 30° + i\sin 30) = 4\cdot e^{i\,\pi/6}$$

$$z = e^{i\cdot 1{,}5708} + 2e^{-i\,\pi/3} + 4e^{i\,\pi/6} = \underline{4{,}641\,e^{i\cdot 0{,}277}}$$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\, i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

$(1-\sqrt{2}i)^3 = (1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$

$x = 1 \qquad r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

$y = -\sqrt{2} \qquad \varphi = \arccos(x/r) = 0{,}955$

$(\sqrt{3}\, e^{i \cdot 0{,}955})^3 = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot 2{,}866}}}$