

Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten):

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie manuell die QR-Zerlegung der Matrix A unter Angabe der wichtigsten Zwischenschritte (dabei auftretende Matrix-Multiplikationen etc. führen Sie aber natürlich mit Python durch)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{30} \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{30})^2 + (-5)^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{30} \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,769 \\ -0,594 \\ 0,237 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot u_1 \cdot u_1^T = \begin{pmatrix} -0,183 & 0,913 & -0,365 \\ 0,913 & 0,295 & 0,282 \\ -0,365 & 0,282 & 0,887 \end{pmatrix} =: Q_1$$

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} -5,477 & 4,382 & -0,730 \\ 0 & -0,926 & 3,879 \\ 0 & 0,871 & 1,848 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0,926 & 3,879 \\ 0,871 & 1,848 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} -0,926 \\ 0,871 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,926 & 3,879 & 548,27 \\ 0,871 & 1,848 & 180,69 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = a_1 + \text{sign}(\tilde{a}_{11}) \cdot \tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} -0,926 \\ 0,871 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \sqrt{(-0,926)^2 + (0,871)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,268 \\ 0,971 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{|v_2|} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -0,919 \\ 0,333 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = I_2 - 2u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} -0,685 & 0,723 \\ 0,723 & 0,630 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & \\ 0 & & \end{pmatrix} =: Q_2$$

$$Q_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1,345 & -1,359 \\ 0 & 4,078 \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 \cdot Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,635 & 0,723 \\ 0 & 0,723 & 0,630 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,183 & 0,913 & -0,365 \\ 0,913 & 0,295 & 0,282 \\ -0,365 & 0,282 & 0,887 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,478 & 4,383 & -0,731 \\ 0 & 1,346 & -1,360 \\ 0 & 0 & 4,080 \end{pmatrix}$$

b) Benutzen Sie die Matrizen Q und R , um die Lösung x zu berechnen.

$$R \cdot x = Q^T \cdot b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1^T \cdot Q_2^T = \begin{pmatrix} -0,183 & 0,913 & -0,365 \\ 0,913 & 0,295 & 0,282 \\ -0,365 & 0,282 & 0,887 \end{pmatrix}$$

`np.set_printoptions(suppress=True)`

`np.set_printoptions(precision=8)`