# Serie 7

Donnerstag, 24. Oktober 2024 14:22

**Aufgabe 1 (45 Minuten):**

Eine Regierung benötigt Impfstoff für die Bevölkerung, spezifisch für die drei Altersgruppen: Erwachsene (E), Teenager (T) und Kleinkinder (K). Da die Zeit drängt, wird bei drei Herstellern geordert, welche den Impfstoff in unterschiedlich grossen Produktionseinheiten liefern. Eine Produktionseinheit beinhaltet dabei die folgende Anzahl Impfdosen für die drei Altersgruppen:

- bei Hersteller A: 20'000 E, 10'000 T, 2'000 K
- bei Hersteller B: 30'000 E, 17'000 T, 3'000 K
- bei Hersteller C: 10'000 E, 6'000 T, 2'000 K

Die Bevölkerung setzt sich folgendermassen zusammen: 5.20 Mio. Erwachsene, 3.00 Mio Teenager, 0.76 Mio. Kleinkinder. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Wieviele Produktionseinheiten müssen bei jedem Hersteller bestellt werden, wenn genug Impfstoff für die gesamte Bevölkerung verfügbar sein soll? Es müssen alle drei Hersteller berücksichtigt werden und es darf keinen Überschuss geben. Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf und berechnen Sie die Lösung manuell mit dem Gauss-Algorithmus (ohne Pivotisierung). Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Ihrer Pathon-Funktion aus der letzten Serie.

$$\begin{array}{l|ccc|c} & & A & & B \\ \hline & 20'000 & 30'000 & 10'000 & 5'200'000 \\ \lambda_{21} = 1/2 & 10'000 & 17'000 & 6'000 & 3'000'000 \\ \lambda_{31} = 1/10 & 2'000 & 3'000 & 2'000 & 760'000 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 20'000 & 30'000 & 10'000 & 5'200'000 \\ 1/2 & 2'000 & 1'000 & 400'000 \\ 1/10 & 0 & 1'000 & 240'000 \end{array}$$

$x_1 = \underline{\underline{20}}$

$x_2 = \underline{\underline{80}}$

$x_3 = \underline{\underline{240}}$

Serie.

b) Geben Sie, basierend auf den unter a) durchgeführten Rechenschritten, die $LR$-Zerlegung von $A$ an.

$$\begin{array}{ccc|c} & A & & B \\ \hline 20'000 & 30'000 & 10'000 & 5'200'000 \\ 1/2 & 2'000 & 1'000 & 400'000 \\ 1/10 & 0 & 1'000 & 240'000 \end{array}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 20'000 & 30'000 & 10'000 \\ 10'000 & 17'000 & 6'000 \\ 2'000 & 3'000 & 2'000 \end{pmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{pmatrix} 20 \\ 80 \\ 240 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 5'200'000 \\ 3'000'000 \\ 760'000 \end{pmatrix}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 20'000 & 30'000 & 10'000 \\ 0 & 2'000 & 1'000 \\ 0 & 0 & 1'000 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Kurz vor Bestellungsaufgabe stellt sich heraus, dass die Bevölkerungszahlen auf überholten Daten basieren. Eine Neuschätzung ergibt: 5.720 Mio. Erwachsene, 3.300 Mio Teenager, und 0.836 Mio. Kleinkinder. Stellen Sie mit den unter b) berechneten Matrizen $L$ und $R$ zwei lineare Gleichungssysteme auf und berechnen Sie daraus für die neuen Bevölkerungszahlen manuell die benötigten Produktionseinheiten.

$$b = \begin{pmatrix} 5'720'000 \\ 3'300'000 \\ 836'000 \end{pmatrix} \qquad L \cdot y = P \cdot b \qquad y = L \cdot Pb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= 5'720'000 \\ 1/2\, y_1 + 1y_2 + 0y_3 &= 3'300'000 \\ 1/10\, y_1 + 0y_2 + 1y_3 &= 836'000 \end{aligned}$$

$y_1 = 5'720'000$

$y_2 = 3'300'000 - 2'860'000 = 440'000$

$y_3 = 836'000 - 572'000 = 264'000$

$R \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 20'000 & 30'000 & 10'000 \\ 0 & 2'000 & 1'000 \\ 0 & 0 & 1'000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 20'000x_1 + 30'000x_2 + 10'000x_3 &= 5'720'000 \\ 0x_1 + 2'000x_2 + 1'000x_3 &= 440'000 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1'000x_3 &= 264'000 \end{aligned}$$

$x_1 = (572 - 264 - 3 \cdot 88)/2 = \underline{\underline{22}}$

$x_2 = (440 - 264)/2 = \underline{\underline{88}}$

$x_3 = \underline{\underline{264}}$

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 2.2 & 3.6 \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 1.2 & 2.0 & 5.8 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie manuell die $LR$-Zerlegung von $A$. Verwenden Sie dafür den Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Berücksichtigen Sie dabei, dass Sie nun auch die Permutionsmatrix $P$ berechnen müssen, so dass $LR = PA$ gilt (siehe Skript). Dieses Verfahren ist auch als Spalten- bzw. Kolonnenmaximumstrategie bekannt.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 2{,}2 & 3{,}6 \\ 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 1{,}2 & 2{,}0 & 5{,}8 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ \lambda=0{,}6 \;\; 1{,}2 & 2{,}0 & 5{,}8 \\ \lambda=0{,}4 \;\; 0{,}8 & 2{,}2 & 3{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0{,}4 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 3{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 \\ 0 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 0 & 0 & 3{,}0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) manuell die Lösung von $Ax = b$.

$Ly = P \cdot b$

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}0 \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}4 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$Ly = P \cdot b$

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,0 \\ 4,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,4 \\ 4,0 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot y = P \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \underline{\underline{1,0}} \\ y_2 &= 2,4 - 0,4 \cdot 1,0 = \underline{\underline{2,0}} \\ y_3 &= 4,0 - (0,2 \cdot 2 + 0,6 \cdot 1) = \underline{\underline{3,0}} \end{aligned}$$

$$Rx = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 0 & 1,0 & 2,0 \\ 0 & 0 & 3,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (1 - (3 \cdot 0 + 4 \cdot 1))/2 = \underline{\underline{-1,5}} \\ x_2 &= \underline{\underline{0}} \\ x_3 &= \underline{\underline{1,0}} \end{aligned}$$

c) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem Resultat der Python-Funktion *scipy.linalg.lu()*. Importieren Sie dafür die Python Library Scipy. Was stellen Sie bzgl. Vergleich der Resultate $L$, $R$, $P$ fest?

numpy.polynomial ( )