二叉树

@M了个J

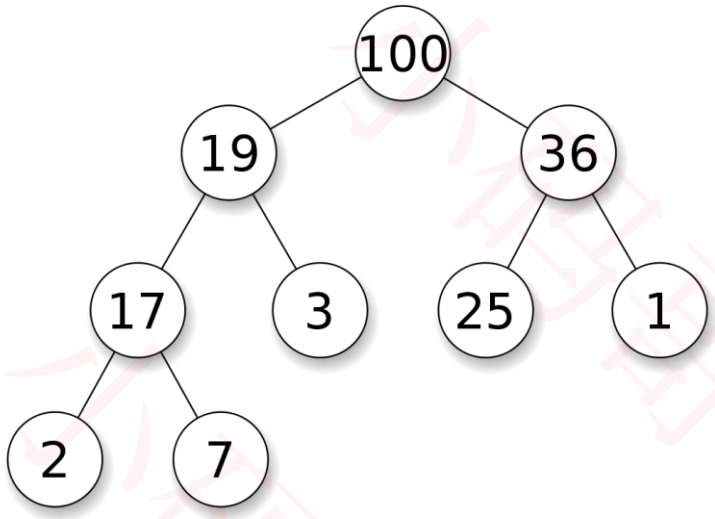
https://github.com/CoderMJLee

http://cnblogs.com/mjios

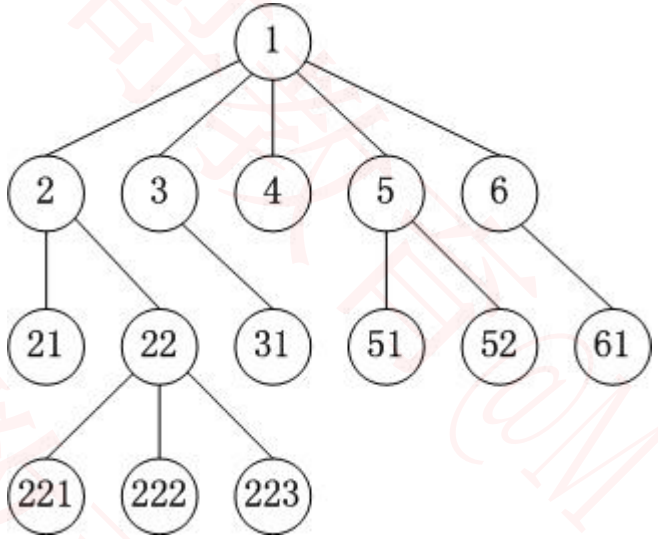
码拉松

小码哥教育 SEEMYGO

树形结构

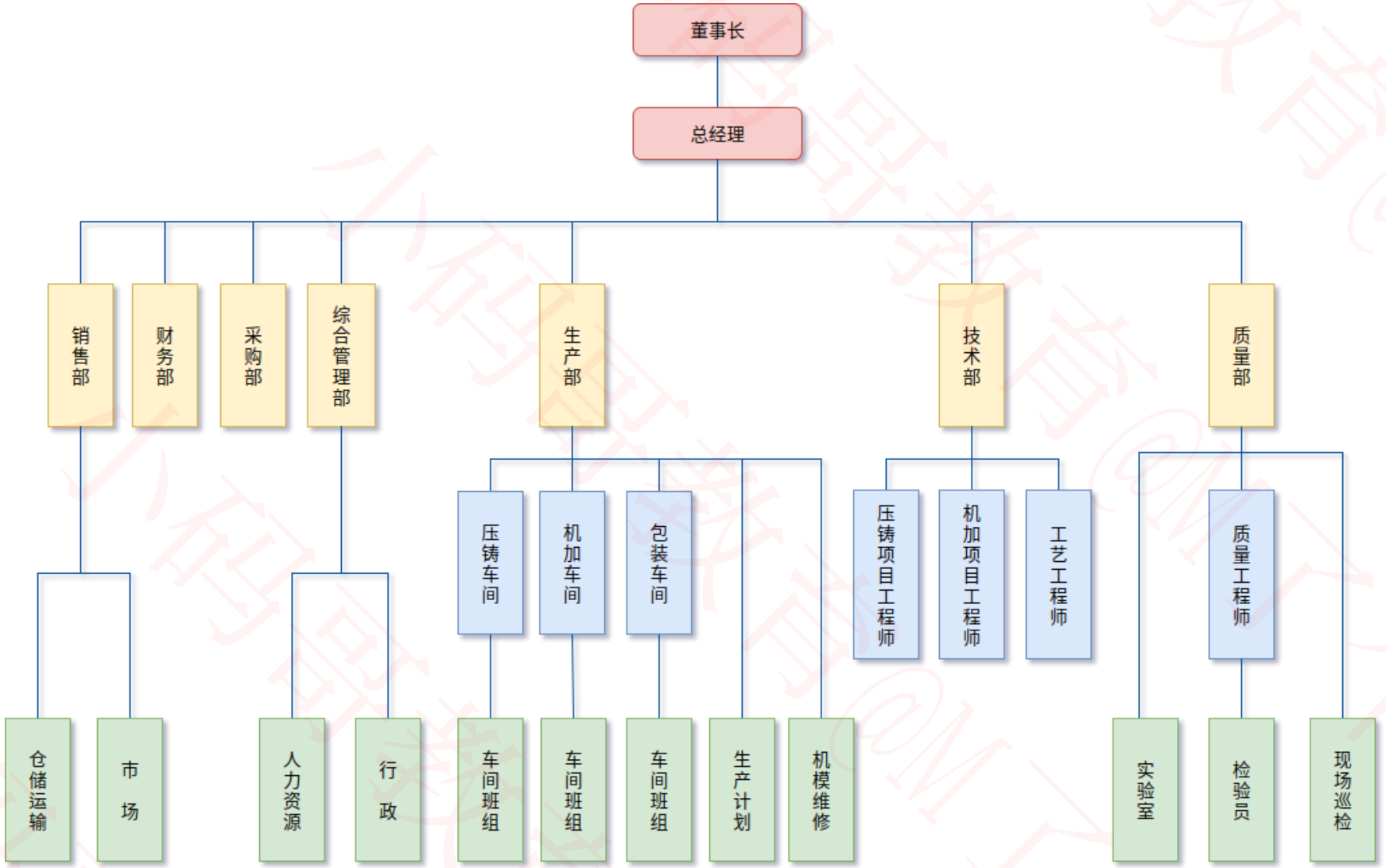


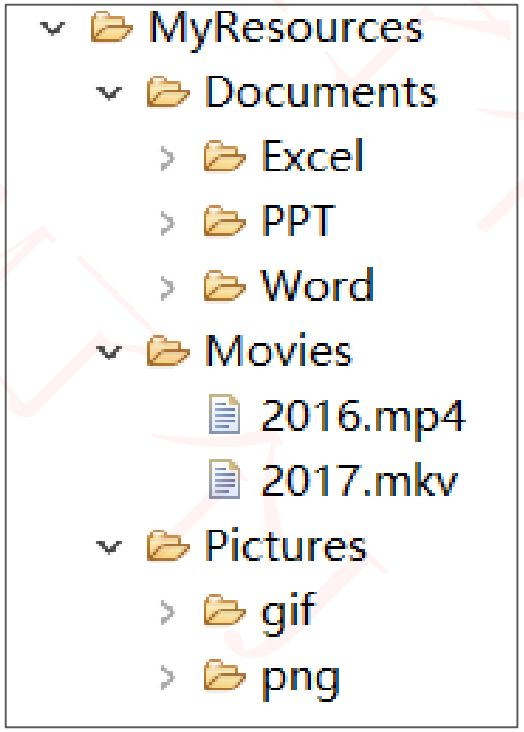
二叉树



多叉树

生活中的树形结构



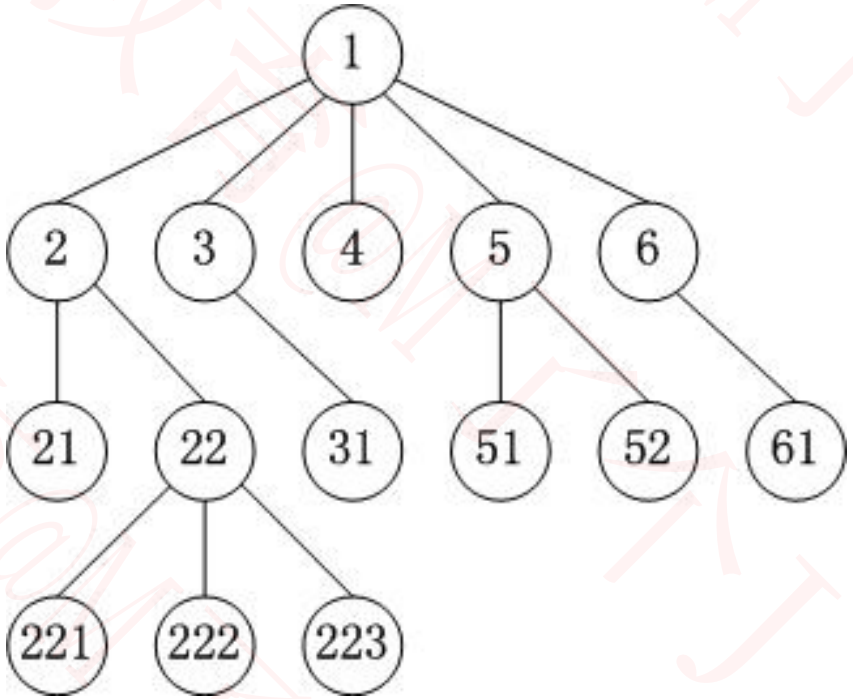


- 使用树形结构可以大大提高效率
- 树形结构是算法面试的重点

树（Tree）的基本概念

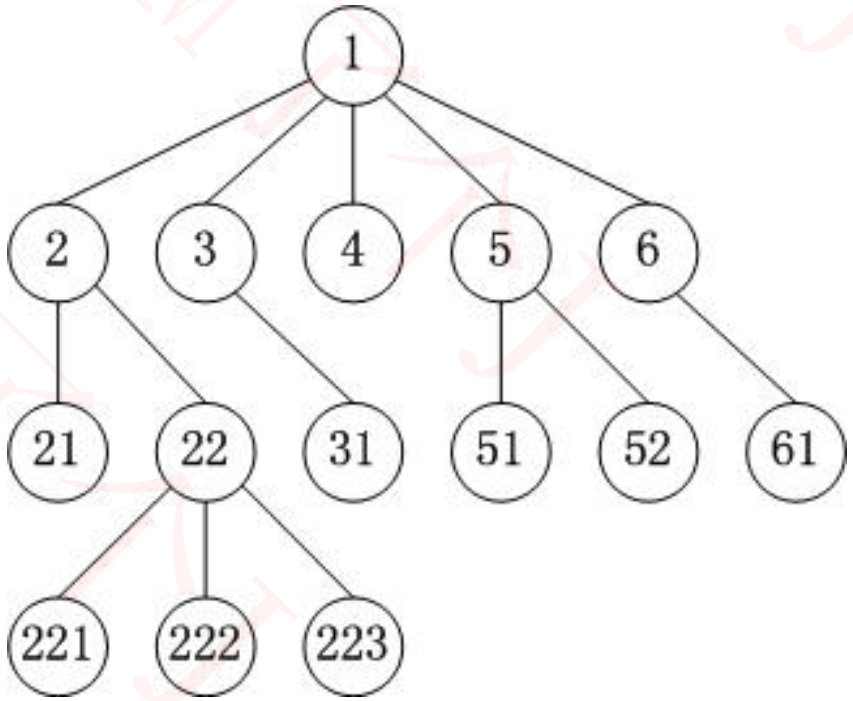
- 节点、根节点、父节点、子节点、兄弟节点
- 一棵树可以没有任何节点，称为空树
- 一棵树可以只有1个节点，也就是只有根节点
- 子树、左子树、右子树

- 节点的度（degree）：子树的个数
- 树的度：所有节点度中的最大值
- 叶子节点（leaf）：度为0的节点
- 非叶子节点：度不为0的节点



树（Tree）的基本概念

- 层数（level）：根节点在第1层，根节点的子节点在第2层，以此类推（有些教程也从第0层开始计算）
- 节点的深度（depth）：从根节点到当前节点的唯一路径上的节点总数
- 节点的高度（height）：从当前节点到最远叶子节点的路径上的节点总数
- 树的深度：所有节点深度中的最大值
- 树的高度：所有节点高度中的最大值
- 树的深度 等于 树的高度

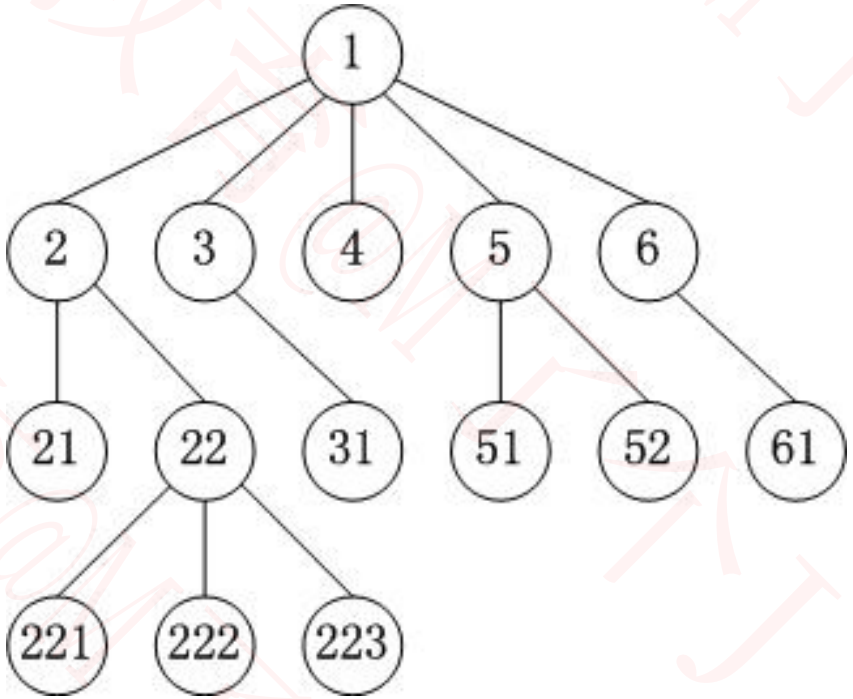


有序树、无序树、森林

- 有序树
  - 树中任意节点的子节点之间有顺序关系

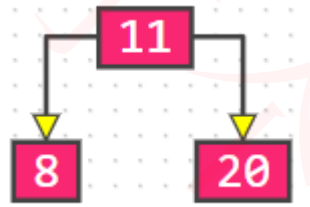
- 无序树
  - 树中任意节点的子节点之间没有顺序关系
  - 也称为“自由树”

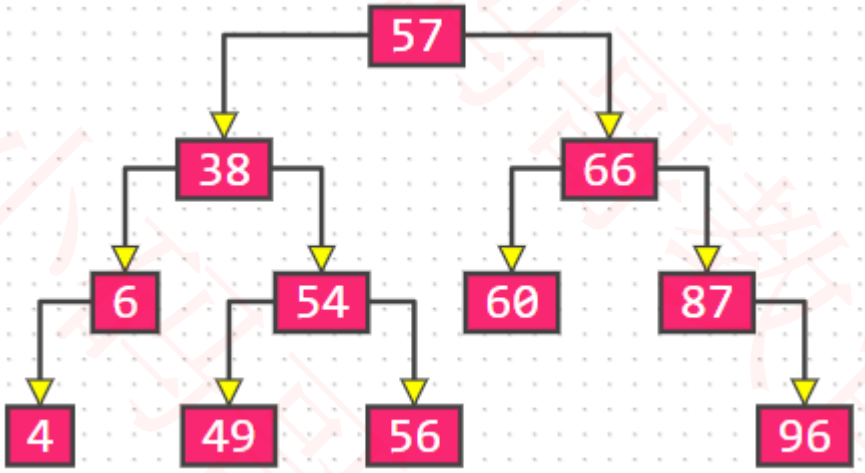
- 森林
  - 由m（m ≥ 0）棵互不相交的树组成的集合

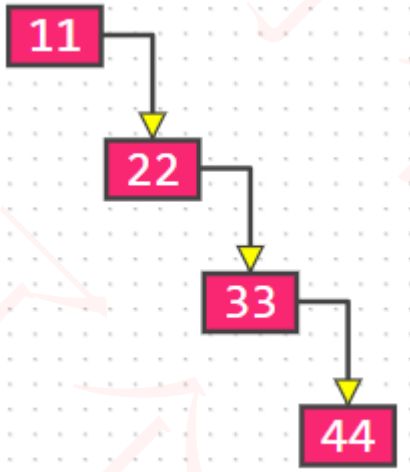


二叉树（Binary Tree）

- 二叉树的特点
  - 每个节点的度最大为2（最多拥有2棵子树）
  - 左子树和右子树是有顺序的
  - 即使某节点只有一棵子树，也要区分左右子树







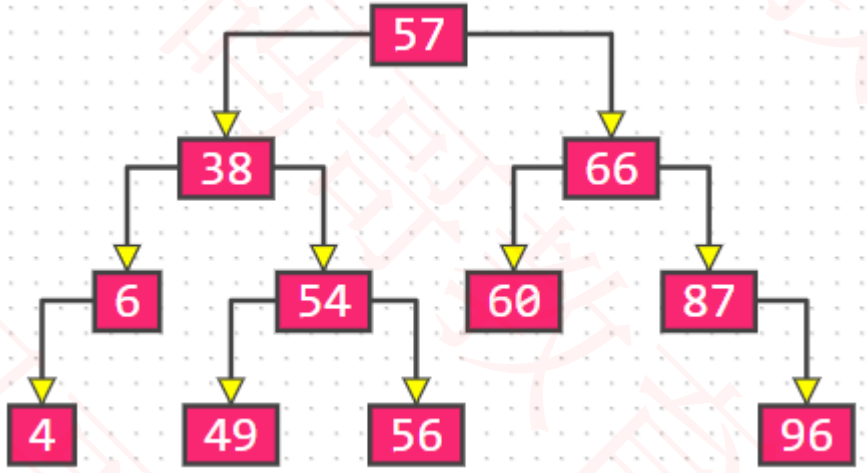
- 二叉树是有序树 or 无序树?
  - 有序树

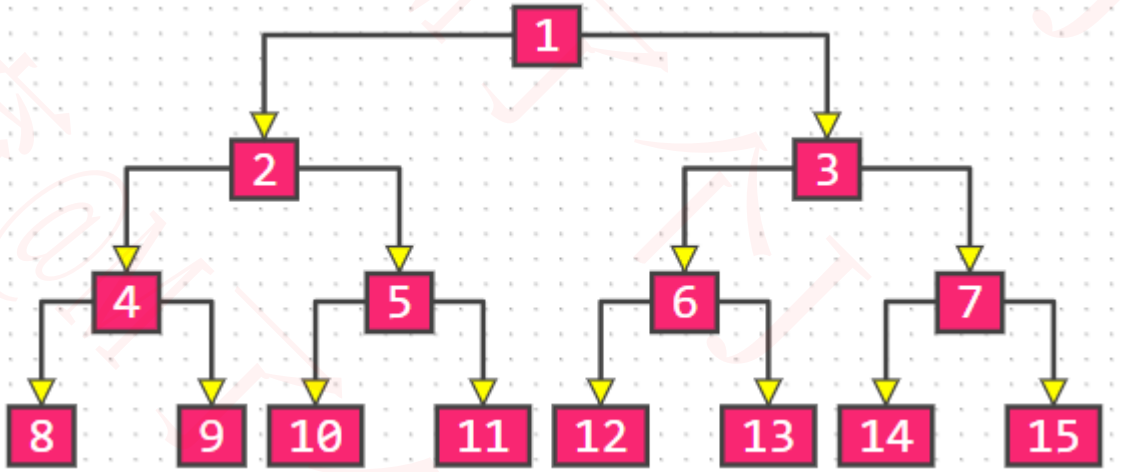
二叉树的性质

- 非空二叉树的第i层，最多有2^{i-1}个节点（$i \geq 1$）

- 在高度为h的二叉树上最多有$2^{h}-1$个结点（$h \geq 1$）

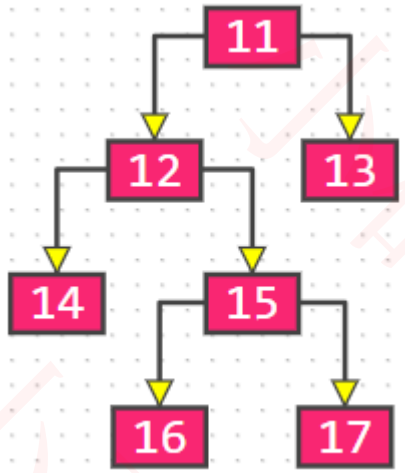
- 对于任何一棵非空二叉树,如果叶节点个数为n0，度为2的节点个数为n2，则有: n0 = n2 + 1
  - 假设度为1的节点个数为n1，那么二叉树的节点总数n = n0 + n1 + n2
  - 二叉树的边数T = n1 + 2 * n2 = n – 1 = n0 + n1 + n2 – 1
  - 因此n0 = n2 + 1



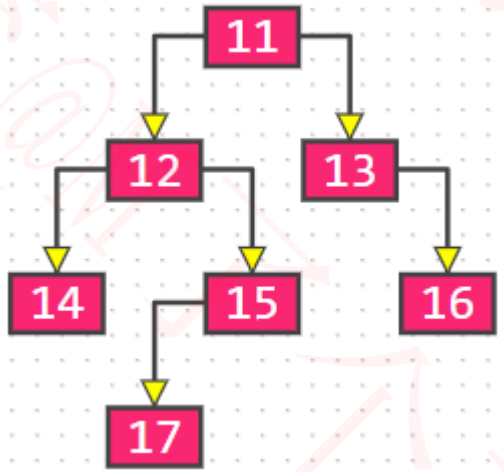


真二叉树（Proper Binary Tree）

- 真二叉树：所有非叶子节点的度都为2

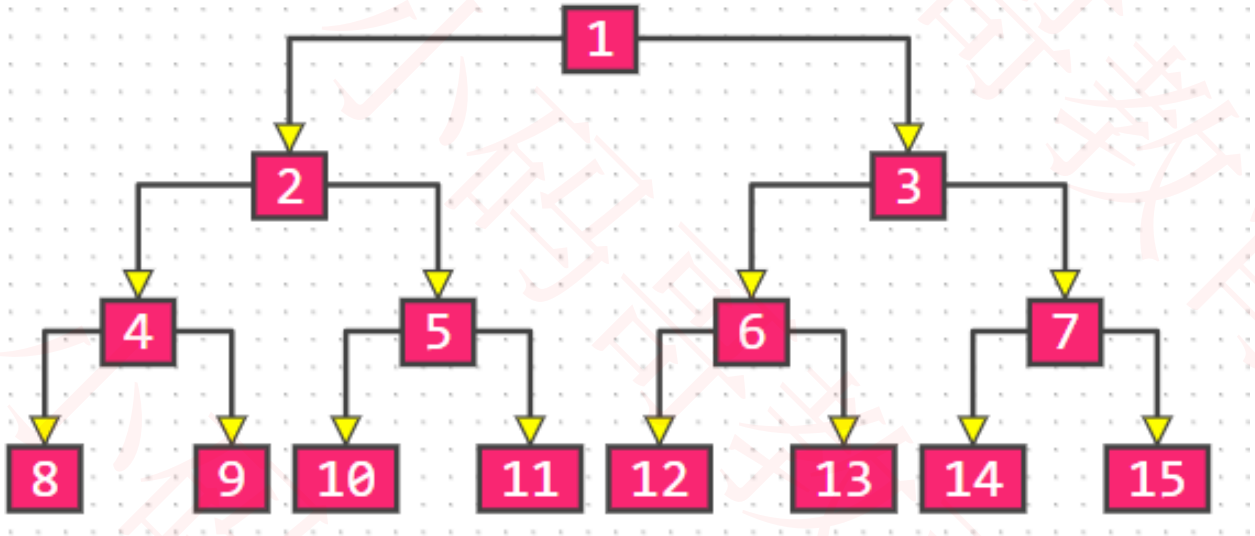


- 下图不是真二叉树



满二叉树（Full Binary Tree）

- 满二叉树：所有非叶子节点的度都为2，且所有的叶子节点都在最后一层



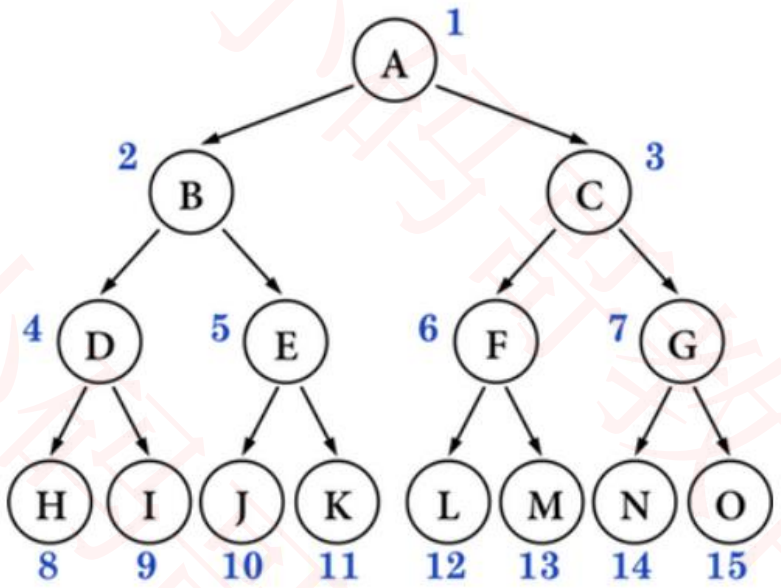
- 假设满二叉树的高度为h（$h \geq 1$），那么
  - 第i层的节点数量：2^{i-1}
  - 叶子节点数量：2^{h-1}
  - 总节点数量n
    - ✓ $n = 2^h - 1$ （$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1}$）
    - ✓ $h = \log_2(n+1)$

- 在同样高度的二叉树中，满二叉树的叶子节点数量最多、总节点数量最多
- 满二叉树一定是真二叉树，真二叉树不一定是满二叉树

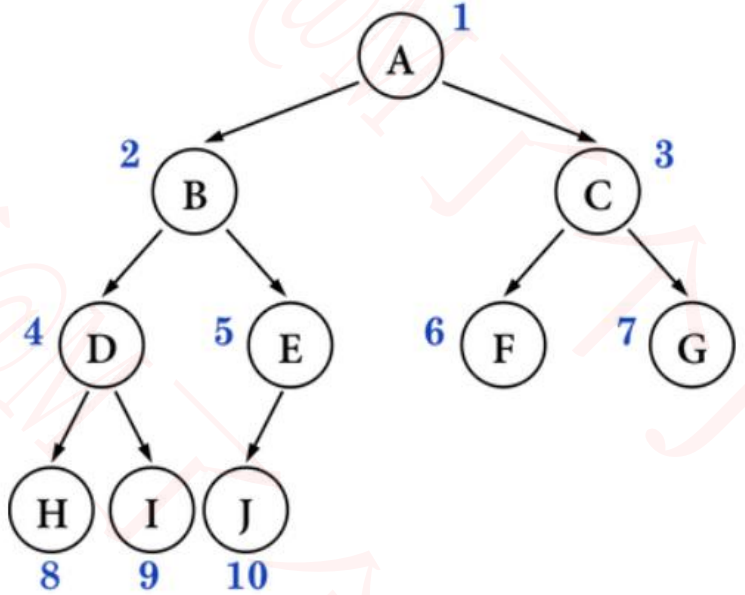
完全二叉树（Complete Binary Tree）

- 完全二叉树：高度为h、有n个结点的二叉树，从左至右、从上到下对节点进行编号，当其每一个结点都与高度为h的满二叉树中相同编号的结点一一对应时，称之为完全二叉树

满二叉树



完全二叉树

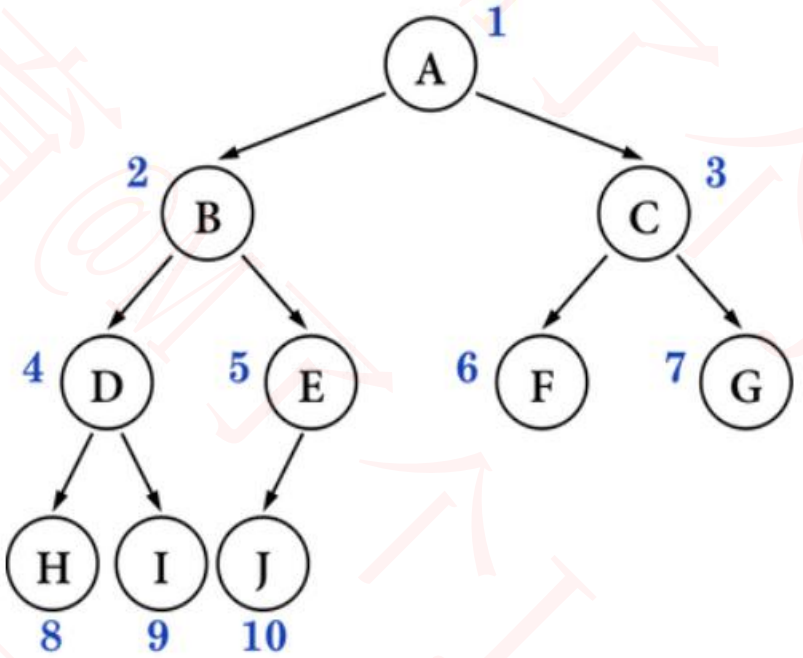


- 完全二叉树从根结点至倒数第二层是一棵满二叉树，最后一层的叶子结点都靠左对齐

- 满二叉树一定是完全二叉树，完全二叉树不一定是满二叉树

完全二叉树的性质

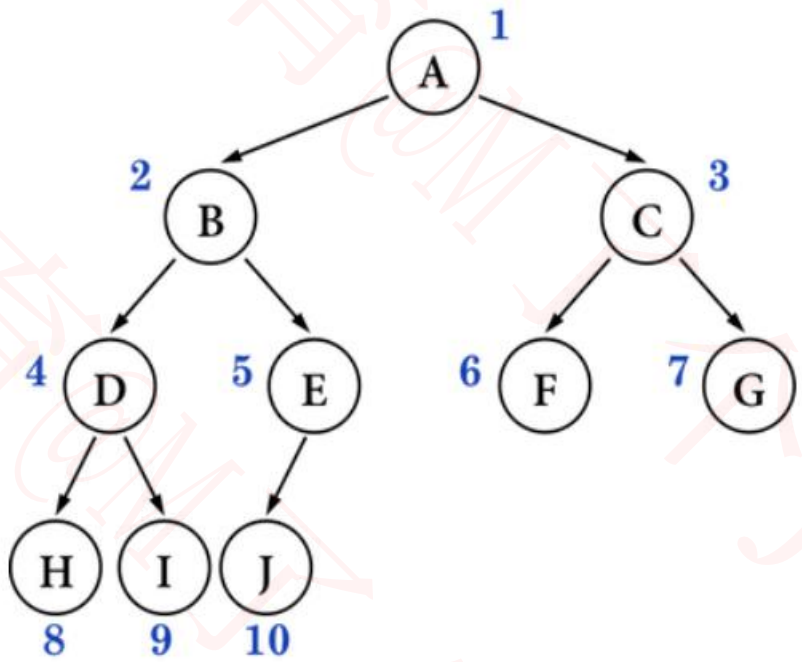
- 叶子节点只会出现在最下面2层
- 度为1的节点只有左子树
- 同样节点数量的二叉树，完全二叉树的高度最小
- 假设完全二叉树的高度为h（$h \geq 1$），那么
  - 至少有 2^{h-1} 个节点 （$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{h-2} + 1$)
  - 最多有 $2^h - 1$ 个节点（$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1}$，满二叉树)
  - 总节点数量为n
    - ✓ $h = floor(\log_2 n) + 1$
    - ✓ floor是向下取整，另外，ceiling是向上取整
      - ➢ $2^{h-1} \leq n < 2^h$
      - ➢ $h - 1 \leq \log_2 n < h$



完全二叉树

完全二叉树的性质

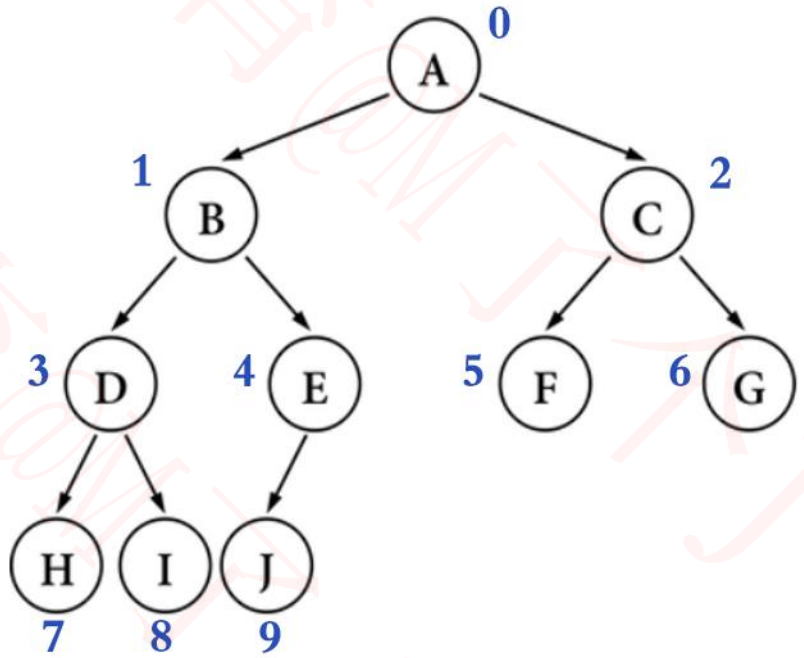
- 一棵有n个节点的完全二叉树（n > 0），从上到下、从左到右对节点从1开始进行编号，对任意第i个节点
  - 如果 i = 1，它是根节点
  - 如果 i > 1，它的父节点编号为 floor(i / 2)
  - 如果 2i ≤ n，它的左子节点编号为 2i
  - 如果 2i > n，它无左子节点
  - 如果 2i + 1 ≤ n，它的右子节点编号为 2i + 1
  - 如果 2i + 1 > n，它无右子节点



完全二叉树

完全二叉树的性质

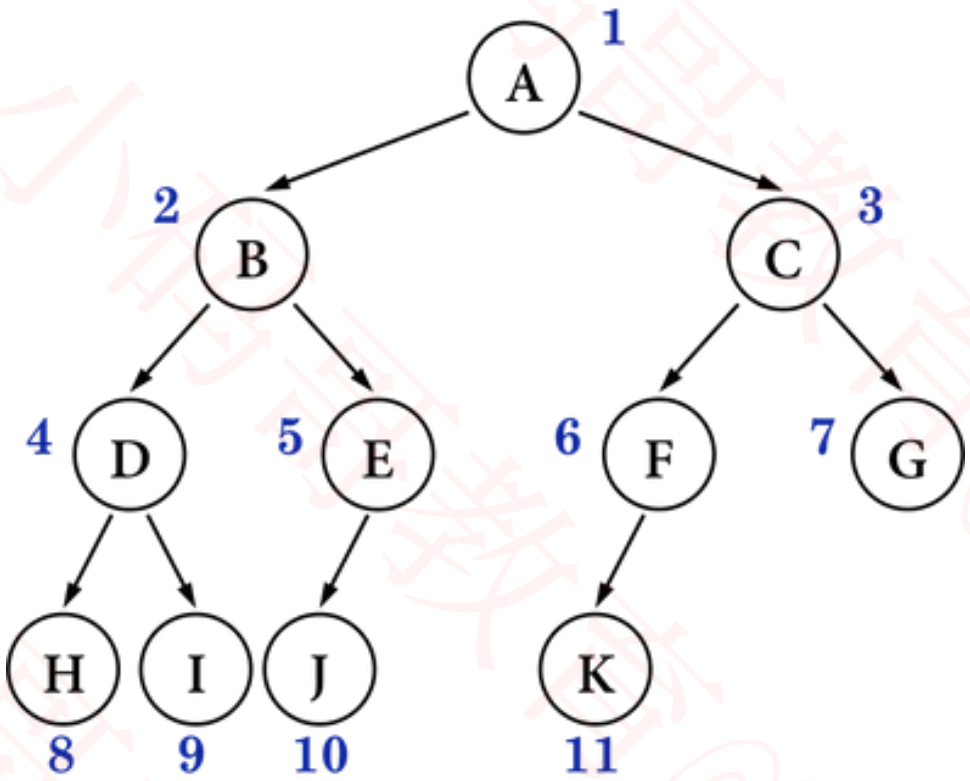
- 一棵有n个节点的完全二叉树（n > 0），从上到下、从左到右对节点从0开始进行编号，对任意第i个节点
  - 如果 i = 0， 它是根节点
  - 如果 i > 0， 它的父节点编号为 floor((i – 1) / 2)
  - 如果 2i + 1 ≤ n – 1， 它的左子节点编号为 2i + 1
  - 如果 2i + 1 > n – 1， 它无左子节点
  - 如果 2i + 2 ≤ n – 1， 它的右子节点编号为 2i + 2
  - 如果 2i + 2 > n – 1， 它无右子节点



完全二叉树

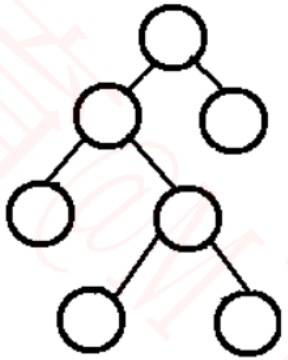
小码哥教育 SEEMYGO

下图不是完全二叉树



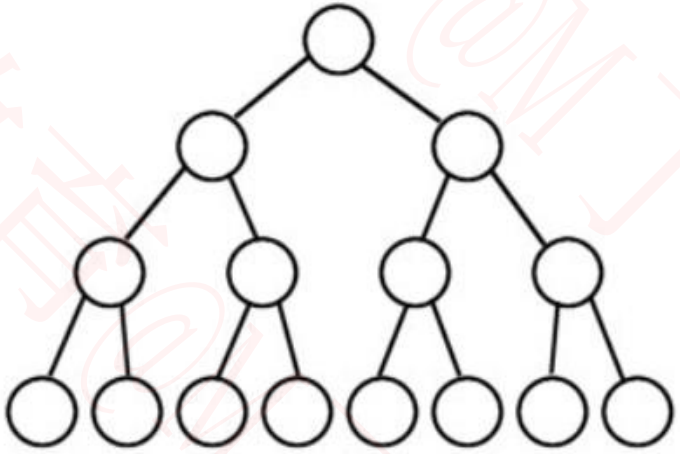
国外教材的说法

- Full Binary Tree：完满二叉树
  - 所有非叶子节点的度都为2
  - 就的国内说的“真二叉树”



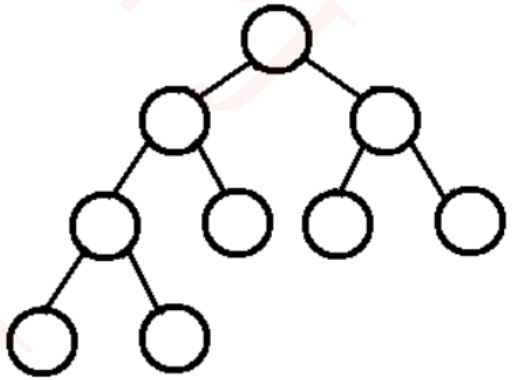
Full Binary Tree

- Perfect Binary Tree：完美二叉树
  - 所有非叶子节点的度都为2，且所有的叶子节点都在最后一层
  - 就是国内说的“满二叉树”



Perfect Binary Tree

- Complete Binary Tree：完全二叉树
  - 跟国内的定义一样



Complete Binary Tree

二叉树的遍历

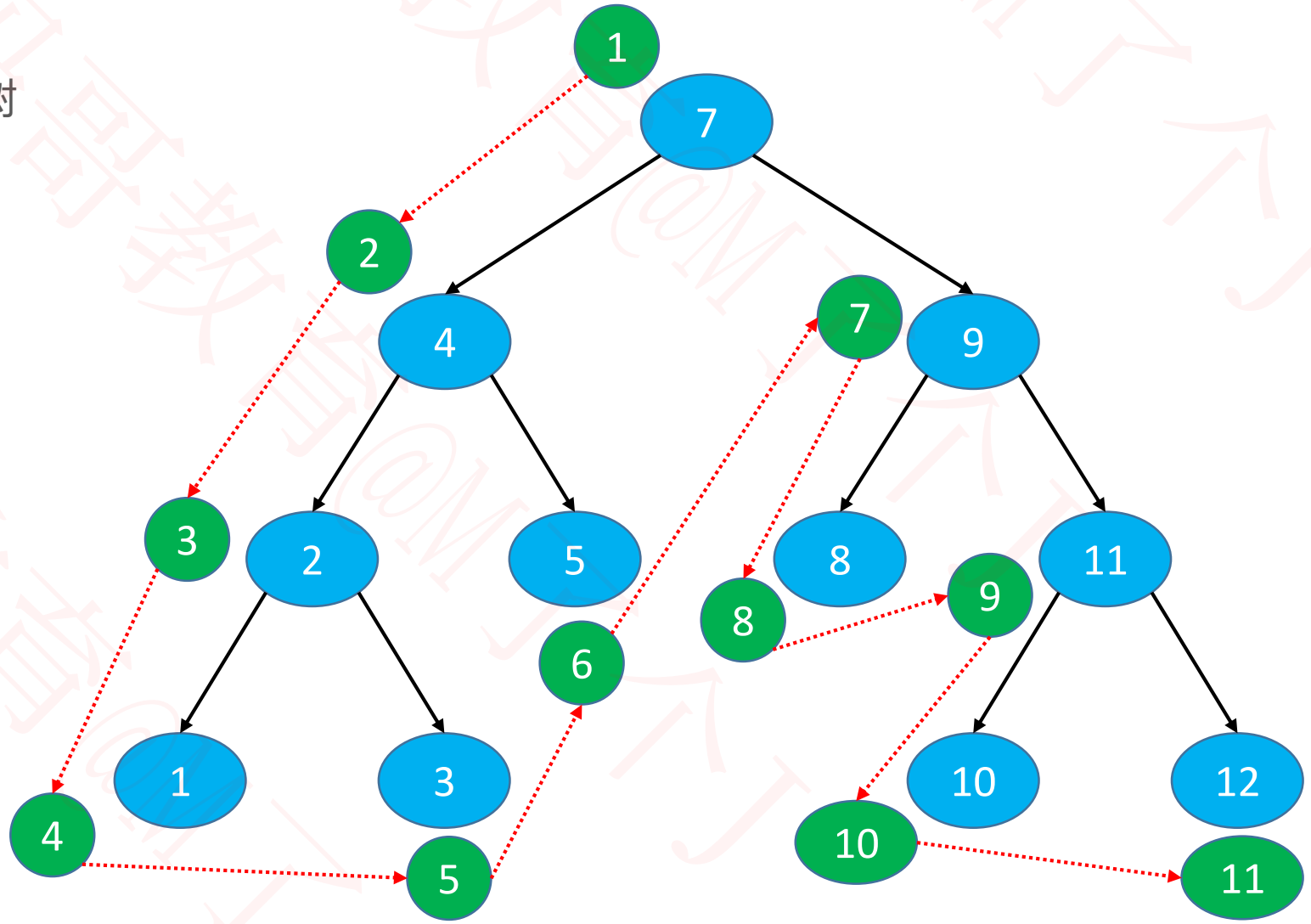
- 遍历是数据结构中的常见操作
  - 把所有元素都访问一遍

- 线性数据结构的遍历比较简单
  - 正序遍历
  - 逆序遍历

- 根据节点访问顺序的不同，二叉树的常见遍历方式有4种
  - 前序遍历（Preorder Traversal）
  - 中序遍历（Inorder Traversal）
  - 后序遍历（Postorder Traversal）
  - 层序遍历（Level Order Traversal）

前序遍历（Preorder Traversal）

- 访问顺序
  - 根节点、前序遍历左子树、前序遍历右子树
  - 7、4、2、1、3、5、9、8、11、10、12

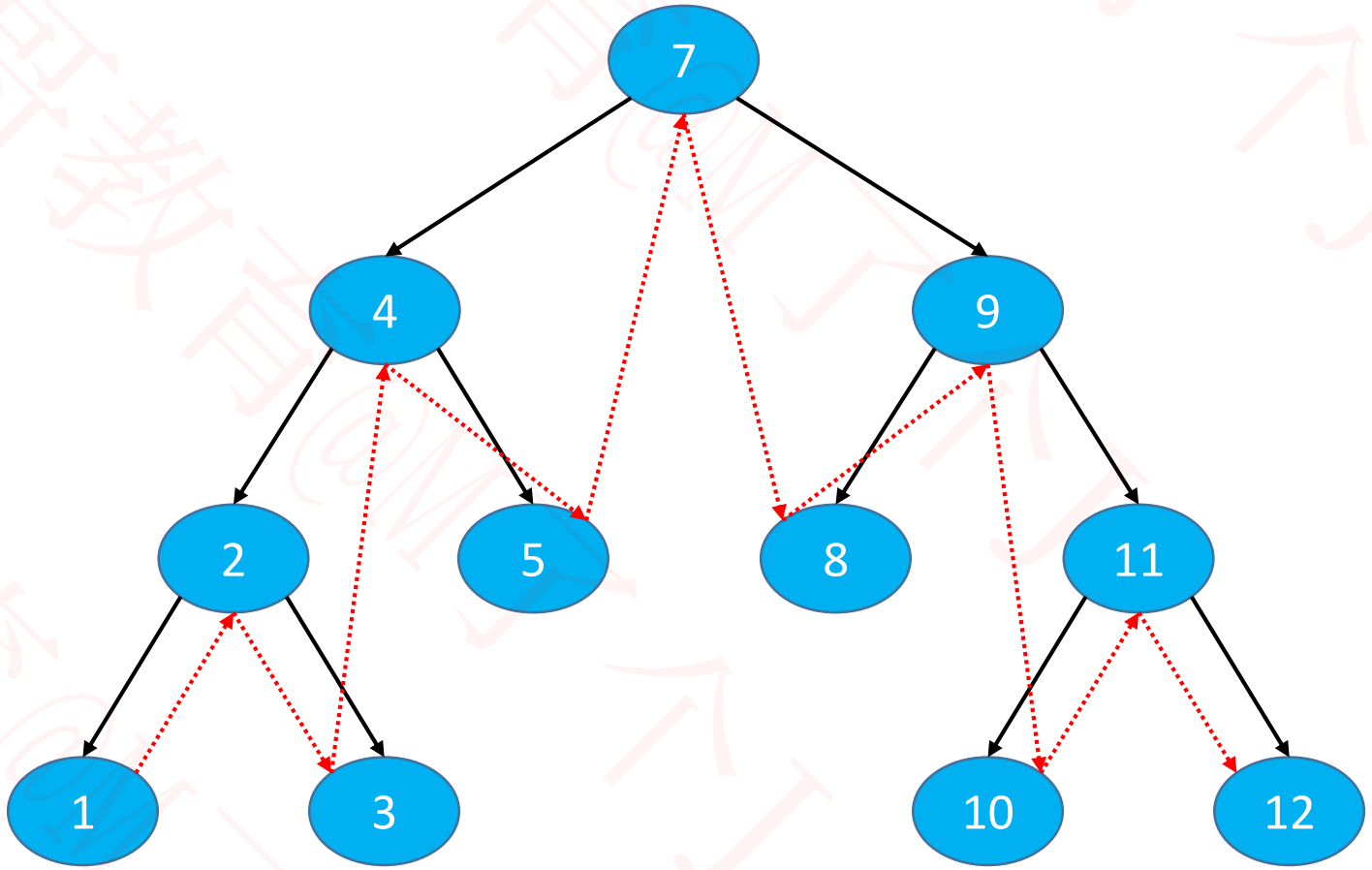


中序遍历（Inorder Traversal）

- 访问顺序
  - 中序遍历左子树、根节点、中序遍历右子树
  - 1、2、3、4、5、7、8、9、10、11、12

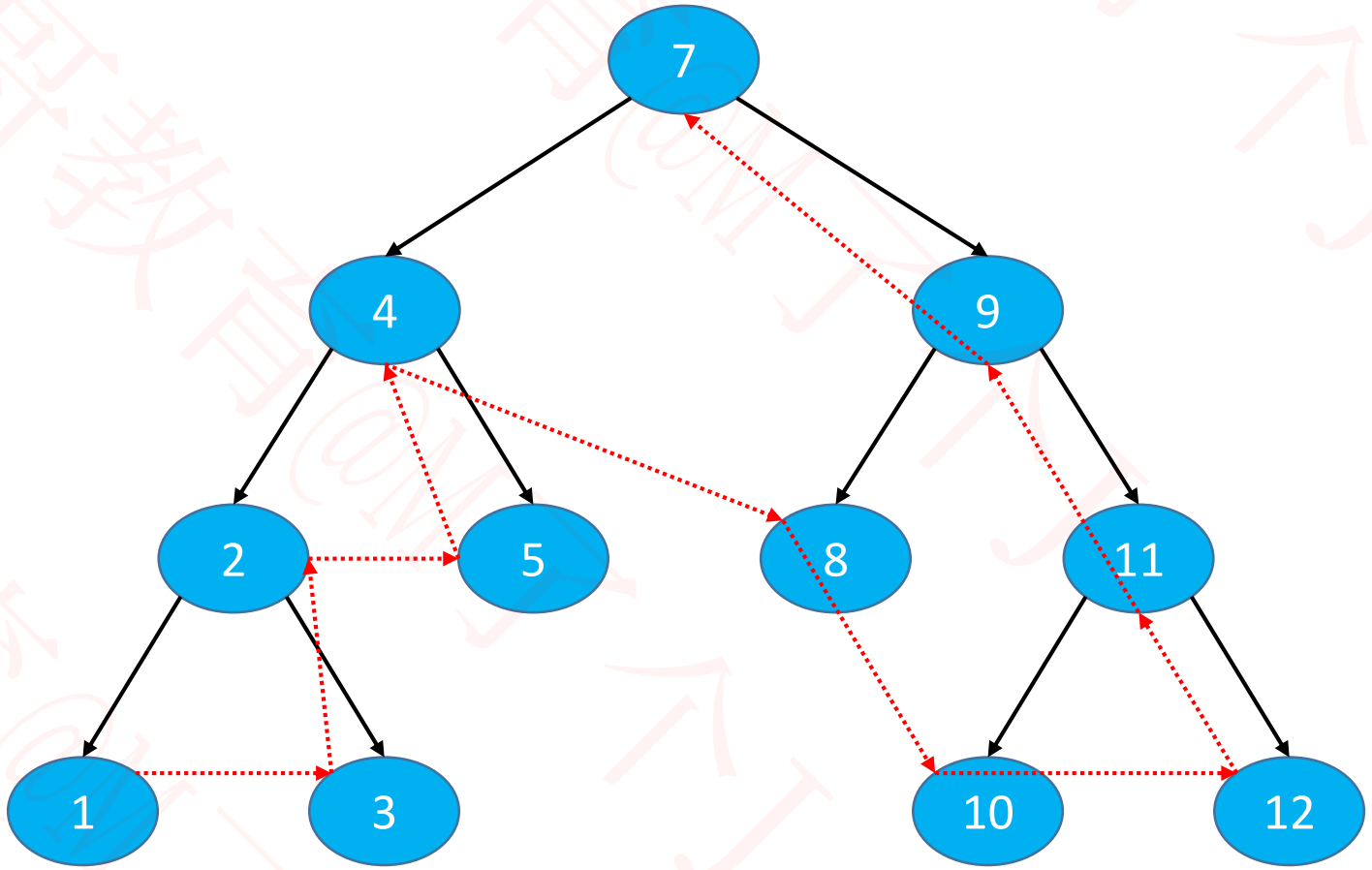
- 如果访问顺序是下面这样呢?
  - 中序遍历右子树、根节点、中序遍历左子树
  - 12、11、10、9、8 、7、5、4、3、2、1

- 二叉搜索树的中序遍历结果是升序或者降序的



后序遍历（Postorder Traversal）

- 访问顺序
  - 后序遍历左子树、后序遍历右子树、根节点
  - 1、3、2、5、4、8、10、12、11、9、7

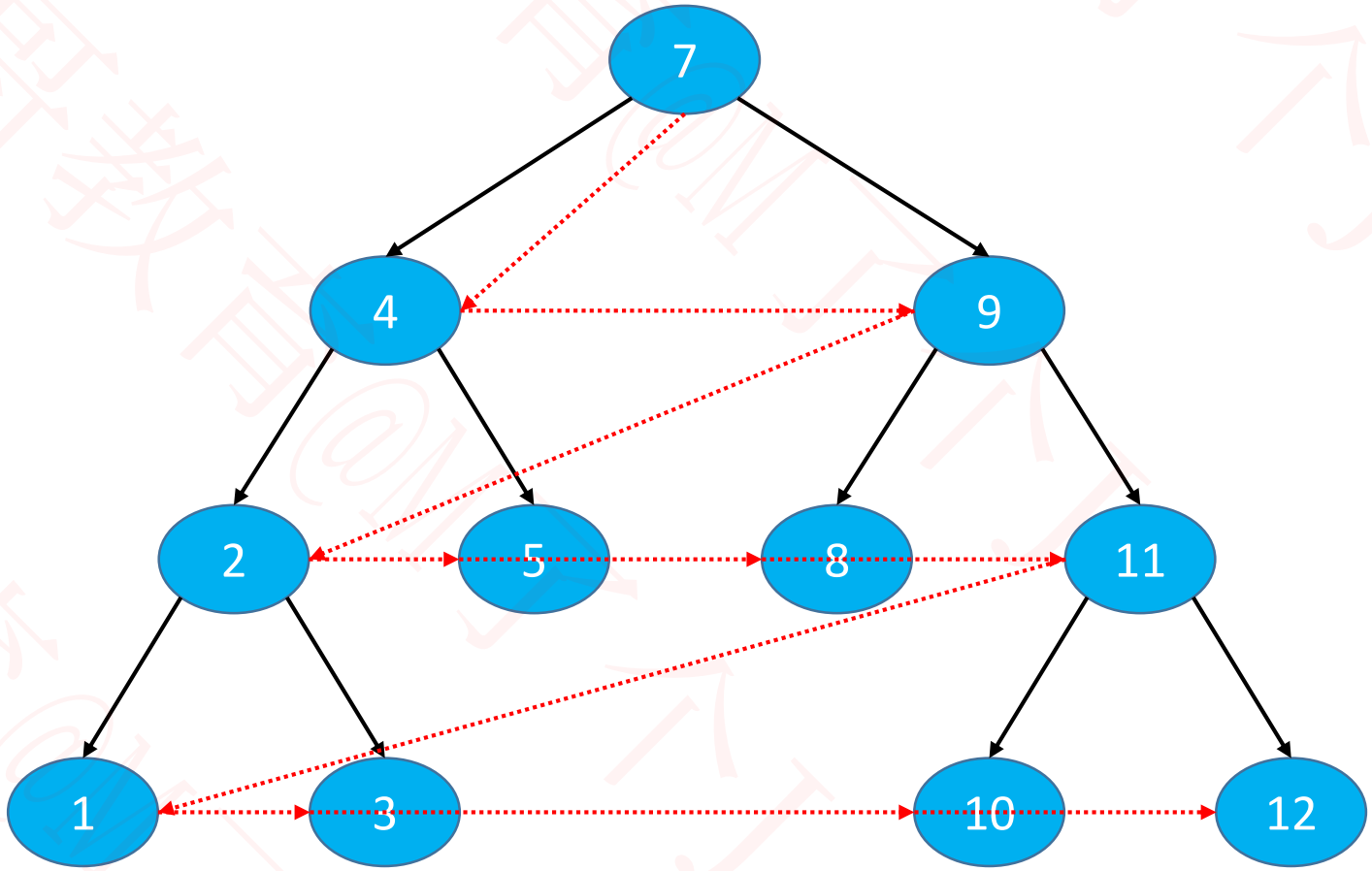


层序遍历（Level Order Traversal）

- 访问顺序
  - 从上到下、从左到右依次访问每一个节点
  - 7、4、9、2、5、8、11、1、3、10、12

- 实现思路：使用队列

1. 将根节点入队
2. 循环执行以下操作，直到队列为空
   - 将队头节点A出队，进行访问
   - 将A的左子节点入队
   - 将A的右子节点入队



小码哥教育 SEEMYGO

遍历的应用

- 前序遍历
  - 树状结构展示（注意左右子树的顺序）
- 中序遍历
  - 二叉搜索树的中序遍历按升序或者降序处理节点
- 后序遍历
  - 适用于一些先子后父的操作
- 层序遍历
  - 计算二叉树的高度
  - 判断一棵树是否为完全二叉树

根据遍历结果重构二叉树

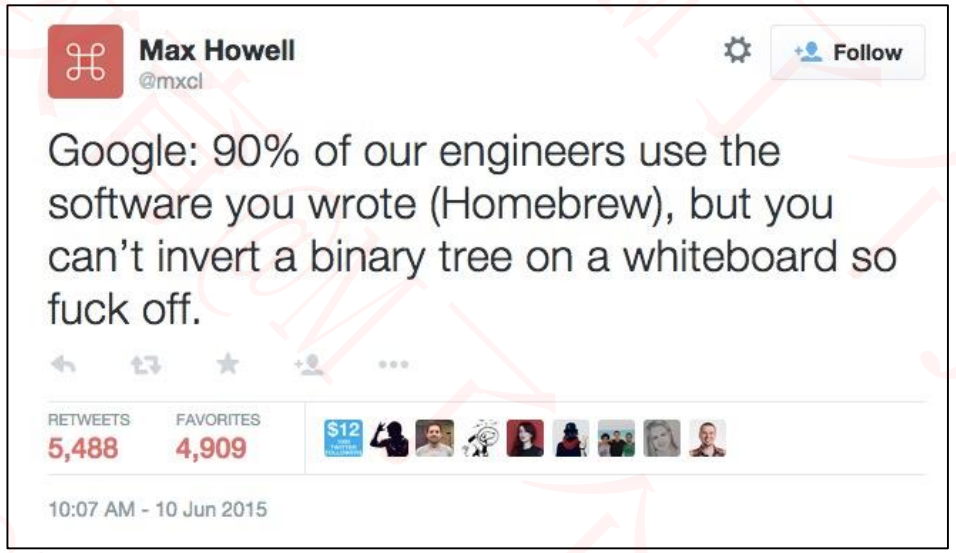
- 以下结果可以保证重构出唯一的一棵二叉树
  - 前序遍历 + 中序遍历
  - 中序遍历 + 后序遍历
  - 前序遍历 + 后序遍历
    - ✓ 如果它是一棵真二叉树（Proper Binary Tree），结果是唯一的
    - ✓ 不然结果不唯一

练习 - 翻转二叉树

- https://leetcode-cn.com/problems/invert-binary-tree/

输入：

输出：



- 请分别用递归、迭代（非递归）方式实现

小码哥教育 SEEMYGO

练习 – 计算二叉树的高度

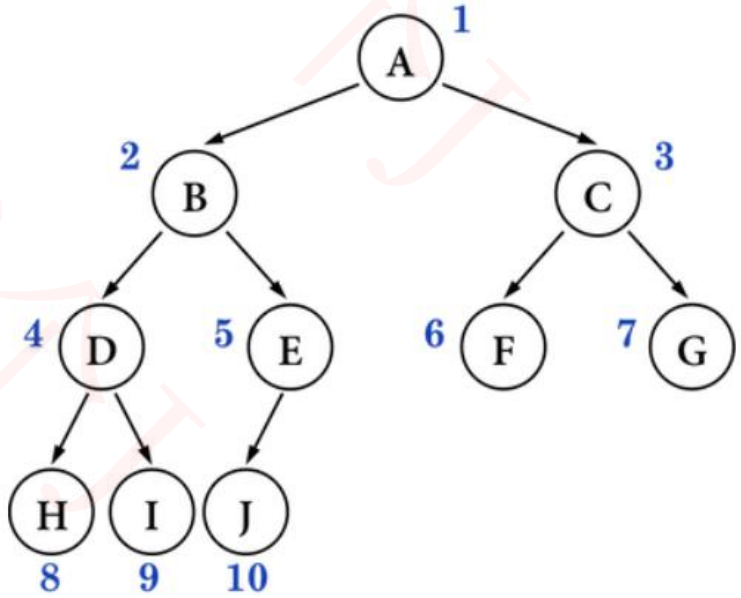
- 递归

- 迭代

练习 – 判断一棵树是否为完全二叉树

- 如果树为空，返回false

- 如果树不为空，开始层序遍历二叉树（用队列）
  - 如果node.left!=null && node.right!=null，将node.left、node.right按顺序入队
  - 如果node.left==null && node.right!=null，返回false
  - 如果node.left!=null && node.right==null 或者 node.left==null && node.right==null
    - ✓ 那么后面遍历的节点应该都为叶子节点，才是完全二叉树
    - ✓ 否则返回false
  - 遍历结束，返回true



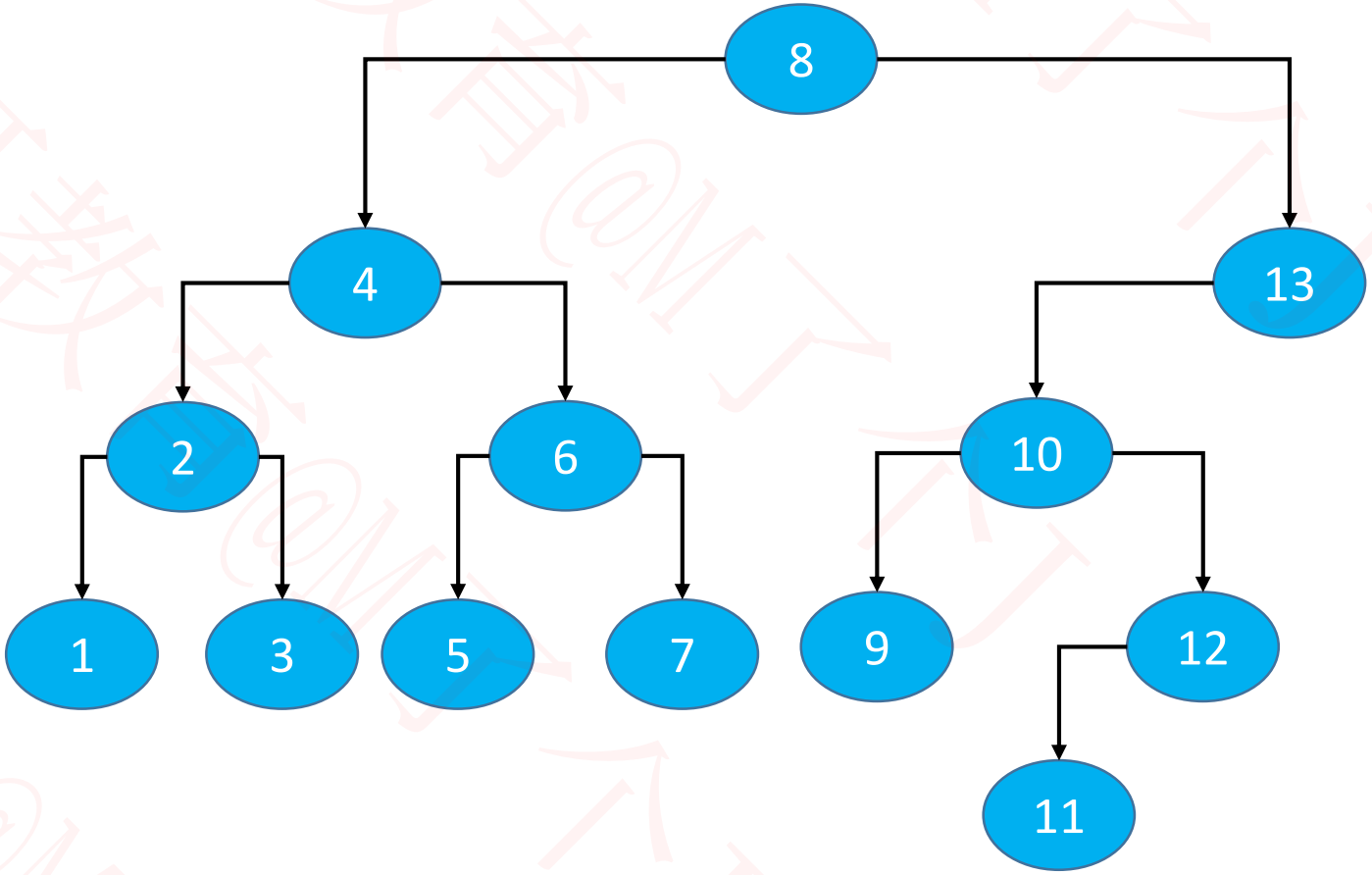
前驱节点（predecessor）

- 前驱节点：中序遍历时的前一个节点
  - 如果是二叉搜索树，前驱节点就是前一个比它小的节点

- `node.left != null`
  - 举例：6、13、8
  - `predecessor = node.left.right.right.right...`
  - ✓ 终止条件：`right`为`null`

- `node.left == null && node.parent != null`
  - 举例：7、11、9、1
  - `predecessor = node.parent.parent.parent...`
  - ✓ 终止条件：node在parent的右子树中

- `node.left == null && node.parent == null`
  - 那就没有前驱节点
  - 举例：没有左子树的根节点



1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13

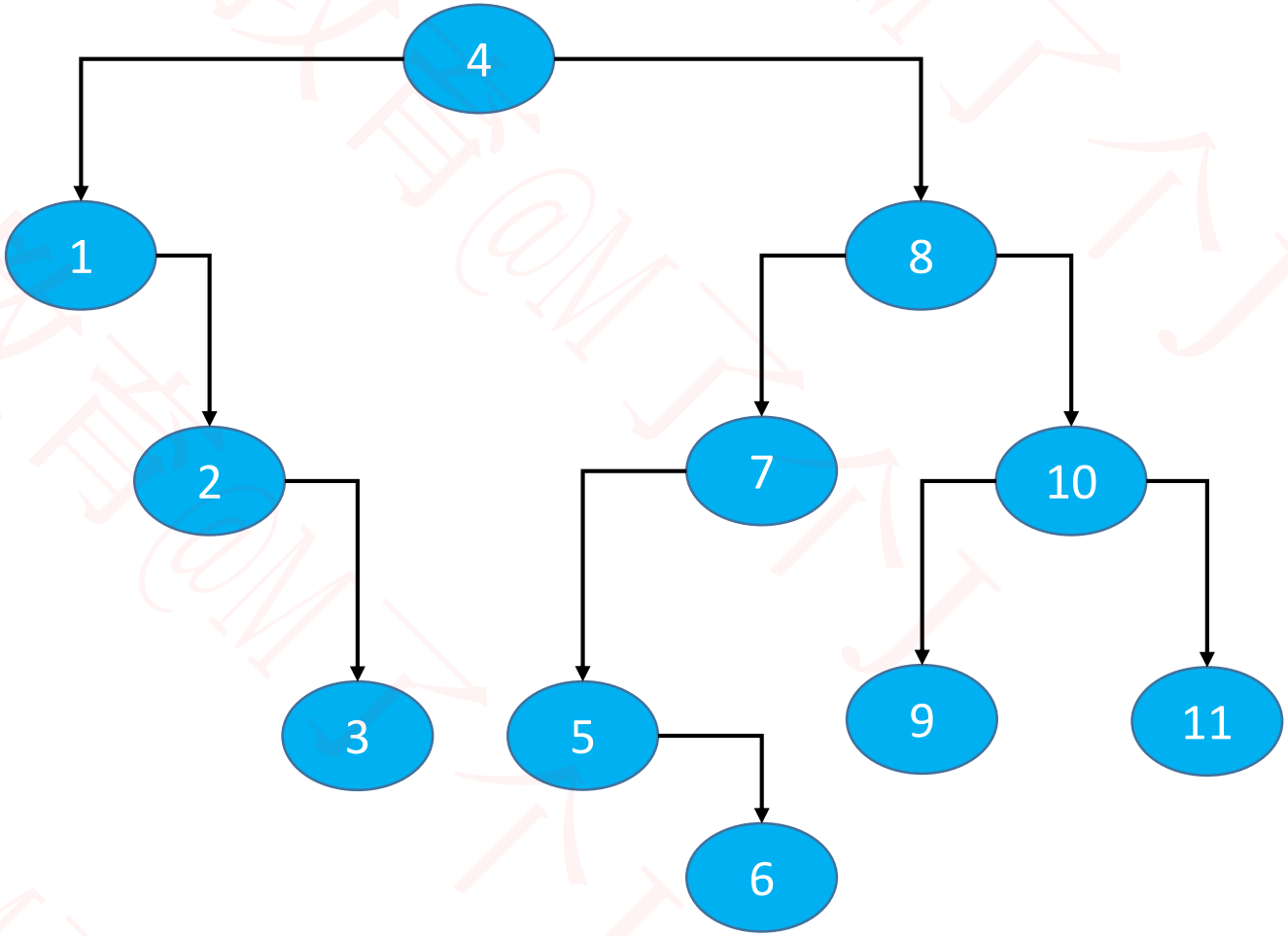
后继节点（successor）

- 后继节点：中序遍历时的后一个节点
  - 如果是二叉搜索树，后继节点就是后一个比它大的节点

- `node.right != null`
  - 举例：1、8、4
  - `successor = node.right.left.left.left...`
  - ✓ 终止条件：`left`为`null`

- `node.right == null && node.parent != null`
  - 举例：7、6、3、11
  - `successor = node.parent.parent.parent...`
  - ✓ 终止条件：node在parent的左子树中

- `node.right == null && node.parent == null`
  - 那就没有前驱节点
  - 举例：没有右子树的根节点



1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11

小码哥教育 SEEMYGO

思考

- 如果允许外界遍历二叉树的元素？二叉树该如何设计接口？

小码哥教育 SEEMYGO

作业

- 二叉树的前序遍历：https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-preorder-traversal/ （递归+迭代）
- 二叉树的中序遍历：https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-inorder-traversal/ （递归+迭代）
- 二叉树的后序遍历：https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-postorder-traversal/ （递归+迭代）
- 二叉树的层次遍历：https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-level-order-traversal/ （迭代）
- 二叉树的最大深度：https://leetcode-cn.com/problems/maximum-depth-of-binary-tree/ （递归+迭代）

小码哥教育 SEEMYGO

作业

- 二叉树的层次遍历II：https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-level-order-traversal-ii/
- 二叉树最大宽度：https://leetcode-cn.com/problems/maximum-width-of-binary-tree/
- N叉树的前序遍历：https://leetcode-cn.com/problems/n-ary-tree-preorder-traversal/
- N叉树的后序遍历：https://leetcode-cn.com/problems/n-ary-tree-postorder-traversal/
- N叉树的最大深度：https://leetcode-cn.com/problems/maximum-depth-of-n-ary-tree/

小码哥教育 SEEMYGO

作业

- 二叉树展开为链表
  - https://leetcode-cn.com/problems/flatten-binary-tree-to-linked-list/

- 从中序与后序遍历序列构造二叉树
  - https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-inorder-and-postorder-traversal/

- 从前序与中序遍历序列构造二叉树
  - https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-preorder-and-inorder-traversal/

- 根据前序和后序遍历构造二叉树
  - https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-preorder-and-postorder-traversal/

小码哥教育 SEEMYGO

作业

- 已知前序、中序遍历结果，求出后序遍历结果
- 已经中序、后序遍历结果，求出前序遍历结果
- 再思考一种二叉树的非递归前序遍历方法（要跟课堂上的不同实现）