Dipayan Chakraborty
Florent Foucaud
Malika More
Adrien Wohrer

Université Clermont Auvergne
Méthodes d'optimisation
BUT Info 2A
2023-2024

TD1 : Introduction à la Programmation Linéaire

Rappel de cours

Exemple de programme linéaire :

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 1 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

Vocabulaire :

- $x, y \to$ variables
- $\max 10x + 5y \to$ fonction objectif (peut être soit max, soit min)
- $1.5x - 2y \leq 1000 \to$ contrainte
- $x = 1, y = 0 \to$ solution (de valeur 10)

Le but est de trouver une solution optimale vérifiant les contraintes, si elle existe. Le mot *linéaire* vient du fait que les contraintes et la fonction objectif sont exprimées par une (in)équation linéaire, c'est à dire de type $ax + by = c$ ou $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$ où a, b, c sont des nombres.

Lorsqu'on a deux variables, on peut représenter une solution par un point du plan avec deux coordonnées (chaque coordonnée est la valeur de l'une des deux variables). Les contraintes peuvent être vues comme des droites qui partagent le plan en deux : d'un côté la contrainte est satisfaite, de l'autre elle n'est pas satisfaite. L'*espace de solutions* est l'ensemble des points qui correspondent à une solution du programme linéaire. Il est donc délimité par un ensemble de droites.

La fonction objectif est représentée par une infinité de droites de même pente ; chaque droite correspond à une valeur de la fonction objectif.

Il y a différentes cas de figure pour les programmes linéaires :

- L'espace de solutions est vide (aucune solution)
- L'espace de solutions est non-borné (il y a des solutions, mais pas de solution optimale)
- L'espace de solutions est borné (par un polytope – en 2D on l'appelle polygone), et
  - il y a une seule solution optimale dans un sommet (coin) du polytope (en 2D c'est un sommet du polygone)
  - il y a une infinité de solutions optimales sur une facette du polytope (en 2D, c'est une arête du polygone)

Exercice 1 (Production de vin)**.**

Dans une winery nord-américaine on produit trois sortes de vins français authentiques : Bordeaux sweet, Rhône regular et Saint-Pourçain extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous. [1]

	merlot (boisseaux)	cabernet-sauvignon (boisseaux)	sucre (livres)	main d'œuvre (heures)	profit (\$/gallon)
Bordeaux sweet	1	1	2	2	10
Rhône regular	2	0	1	3	12
Saint-Pourçain extra dry	0	2	0	1	20

La winery a un stock de 150 boisseaux de raisin merlot, 150 boisseaux de raisin cabernet-sauvignon, 80 livres de sucre et peut fournir 225 heures de travail. On veut déterminer les quantités des trois types de vin à produire afin de maximiser le profit.

Modéliser ce problème par un programme linéaire (définir les variables, la fonction objectif, les contraintes). *Il n'est pas demandé de le résoudre.*

Solution.

On définit une variable pour chaque type de vin (s, r, d), représentant chacune sa quantité en gallons.

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcrr} \text{maximiser} & 10s & + & 12r & + & 20d & & & \text{(fonction objectif : profit)} \\ \text{tel que} & s & + & 2r & & & \leq & 150 & \text{(merlot)} \\ & s & + & & & 2d & \leq & 150 & \text{(cabernet-sauvignon)} \\ & 2s & + & r & & & \leq & 80 & \text{(sucre)} \\ & 2s & + & 3r & + & d & \leq & 225 & \text{(main d'oeuvre)} \\ & s & & & & & \geq & 0 & \\ & & & r & & & \geq & 0 & \\ & & & & & d & \geq & 0 & \end{array}}$$

Exercice 2 (Cultiver son jardin)**.**

Josette cultive des courgettes et des navets et elle souhaite maximiser le poids total des légumes cultivés pour espérer gagner cette année le concours local des jardiniers amateurs. Pour cela, elle doit utiliser de l'engrais et des anti-parasites. Elle a droit à $8L$ d'engrais A, 7L d'engrais B, et 3L d'anti-parasites.

- Pour cultiver $1m^2$ de courgettes, il faut $2L$ d'engrais A et $1L$ d'engrais B.
- Pour cultiver $1m^2$ de navets, il faut $1L$ d'engrais A, $2L$ d'engrais B et $1L$ d'anti-parasites.

Par ailleurs, le rendement annuel des légumes est $4kg/m^2$ pour les courgettes et $5kg/m^2$ pour les navets.

(a) Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire (définir les variables, la fonction objectif, les contraintes).
(b) Représenter graphiquement l'espace de solutions.
(c) Trouver la solution optimale.

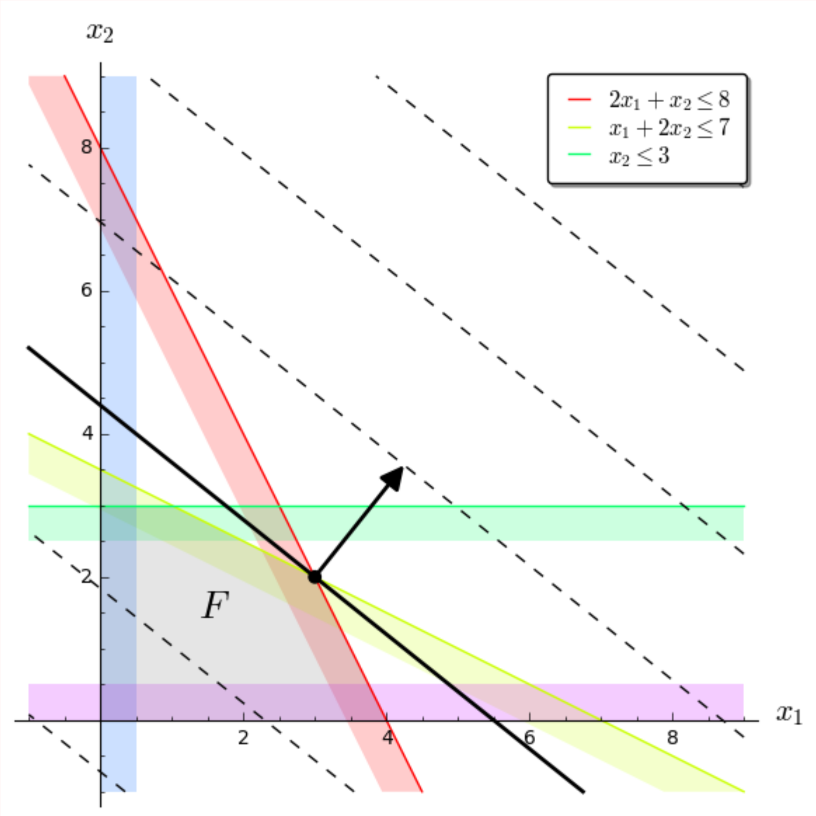
Solution.

(a) On définit une variable x_1 pour la surface cultivée de courgettes, et x_2 pour celle de navets.

1. Note culturelle inutile pour résoudre l'exercice : aux USA 1 boisseau (bushel) $\approx 35L$, 1 gallon $\approx 3.8L$, 1 livre (pound) $\approx 453g$).

maximiser	$4x_1$	$+$	$5x_2$				(fonction objectif : poids de la récolte)
tel que	$2x_1$	$+$	x_2	$\leq$	8		(engrais A)
	x_1	$+$	$2x_2$	$\leq$	7		(engrais B)
			x_2	$\leq$	3		(anti-parasite)
	x_1			$\geq$	0		
			x_2	$\geq$	0		

(b) On représente la droite $2x_1 + x_2 = 8$ qui symbolise la première contrainte. Quand $x_1 = 0$ on obtient $x_2 = 8$, donc elle passe par le point $(0, 8)$. Quand $x_2 = 0$ on obtient $x_1 = 4$ donc elle passe par $(4, 0)$ et on peut donc la tracer. De même, la deuxième contrainte est symbolisée par la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 7$ qui passe par $(0, 3.5)$ et $(7, 0)$. La troisième contrainte est symbolisée par la droite $x_2 = 3$ qui est une droite horizontale passant par tous les points $(p, 3)$ avec p quelconque.



(c) La zone nommée "F" représente l'espace de solutions, la droite noire représente une droite possible pour la fonction objectif. La solution optimale est $(x_1 = 3, x_2 = 2)$ et a valeur 22.

Exercice 3 (Quelques résolutions graphiques)**.**

Pour chacun des programmes linéaires suivants, représenter graphiquement l'espace de solutions. Est-il borné ? Y a-t-il une solution ? Si oui, trouver la ou les solutions optimales.

(a)

maximiser	$3x_1$	$+$	$2x_2$		
tel que	x_1	$-$	x_2	$\geq$	-2
	$2x_1$	$+$	x_2	$\leq$	8
	x_1	$+$	x_2	$\leq$	5
	x_1			$\geq$	0
			x_2	$\geq$	0

(b)

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser} & x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{tel que} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \geq & -2 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

(c)

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} \text{maximiser} & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \\ & & & x_2 & \geq & 1 \end{array}}$$

(d)

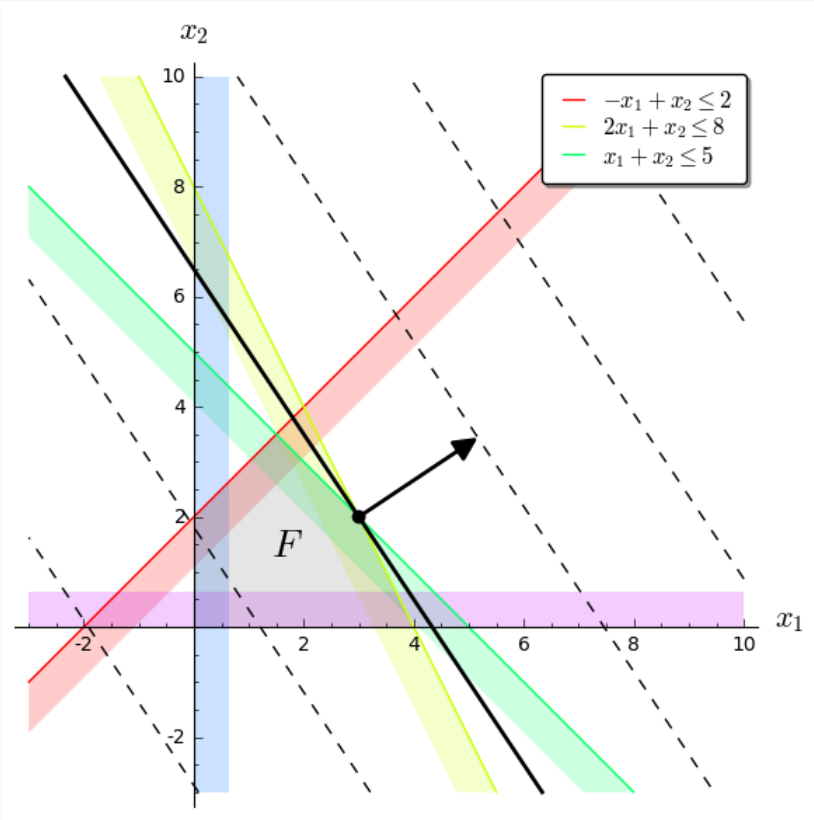
$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} \text{maximiser} & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \\ & & & x_2 & \geq & 1 \end{array}}$$

(e)

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

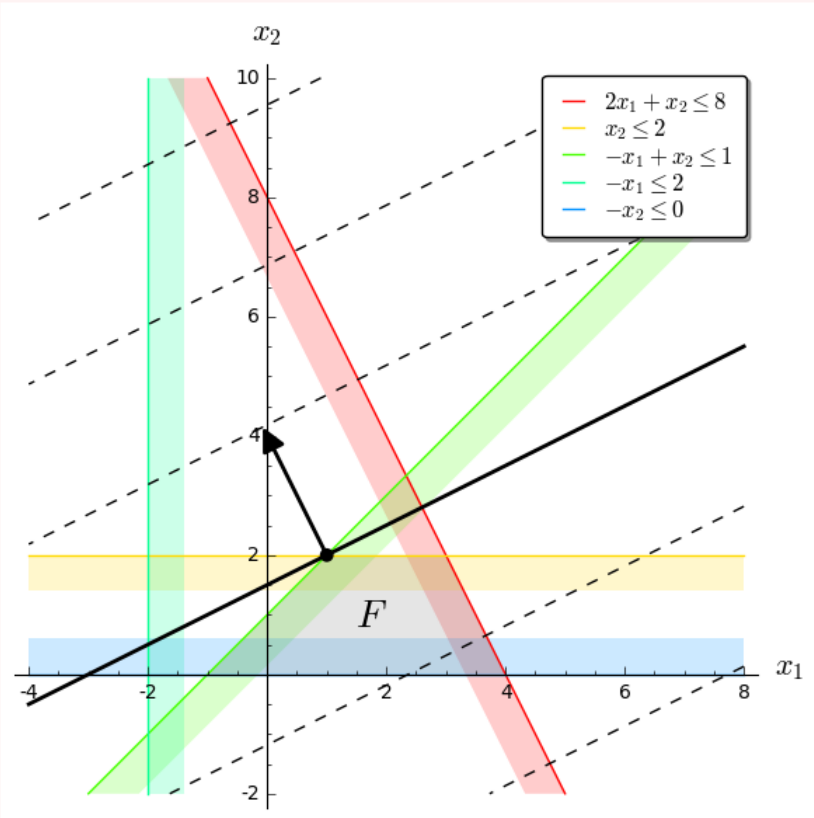
Solution.

(a) On représente la droite $x_1 - x_2 = -2$ qui symbolise la première contrainte. Quand $x_1 = 0$ on obtient $x_2 = 2$, donc elle passe par le point $(0, 2)$. Quand $x_2 = 0$ on obtient $x_1 = -2$ donc elle passe par $(-2, 0)$ et on peut donc la tracer. Attention, la zone autorisée par la contrainte est en bas à droite de cette droite (car elle est respectée lorsque x_1 est "grand" et x_2 est "petit" : en particulier le point $(0, 0)$ respecte la contrainte). De même, la deuxième contrainte est symbolisée par la droite d'équation $2x_1 + x_2 = 8$ qui passe par $(0, 8)$ et $(4, 0)$. La troisième contrainte est symbolisée par la droite d'équation $x_1 + x_2 = 5$ qui passe par $(0, 5)$ et $(5, 0)$. Pour ces deux contraintes, la zone admissible est en bas à gauche de ces droites.



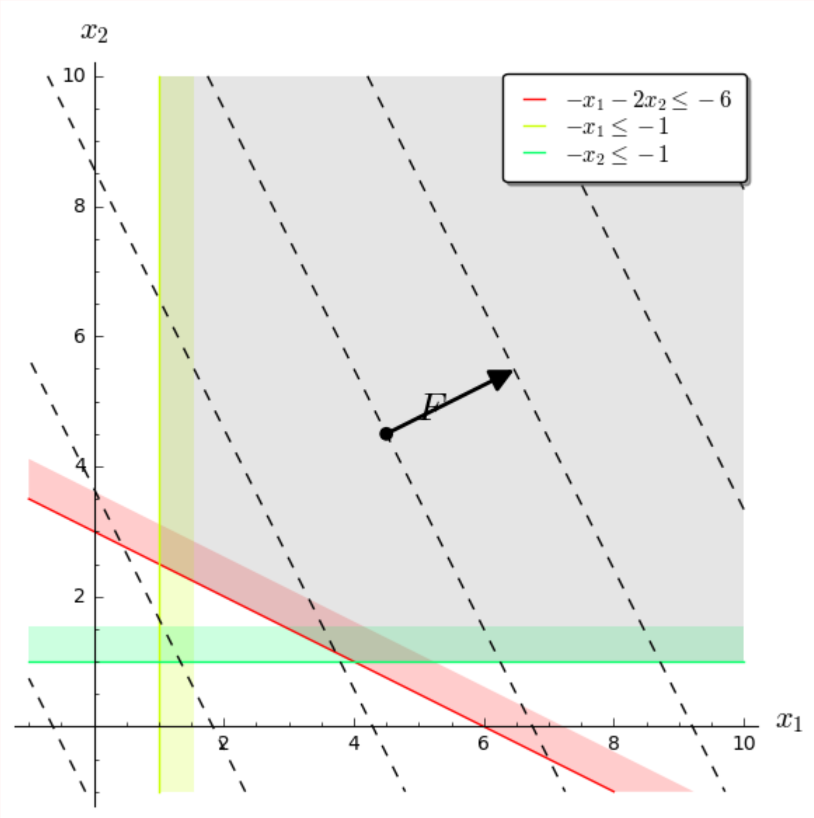
La zone nommée “F” représente l’espace de solutions, la droite noire représente une droite possible pour la fonction objectif, qu’on fait ”glisser” pour trouver la meilleure solution. Il y a une solution optimale unique : $(x_1 = 3, x_2 = 2)$ qui a valeur 13.

(b) Attention, ici on cherche à minimiser.



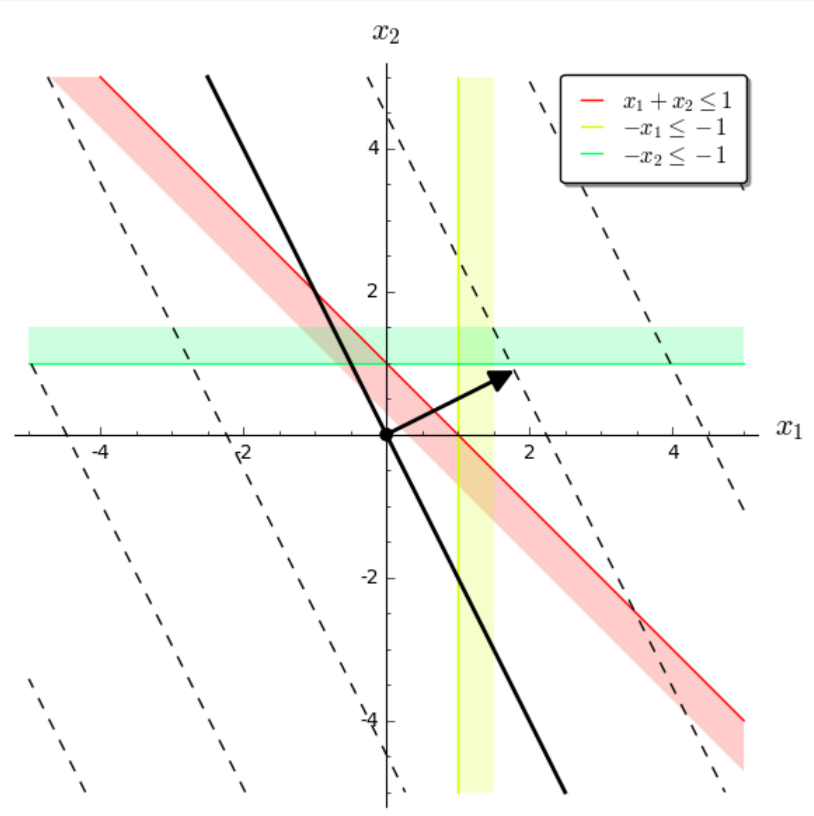
Il y a, ici aussi, une solution optimale unique : $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ qui a valeur -3.

(c)



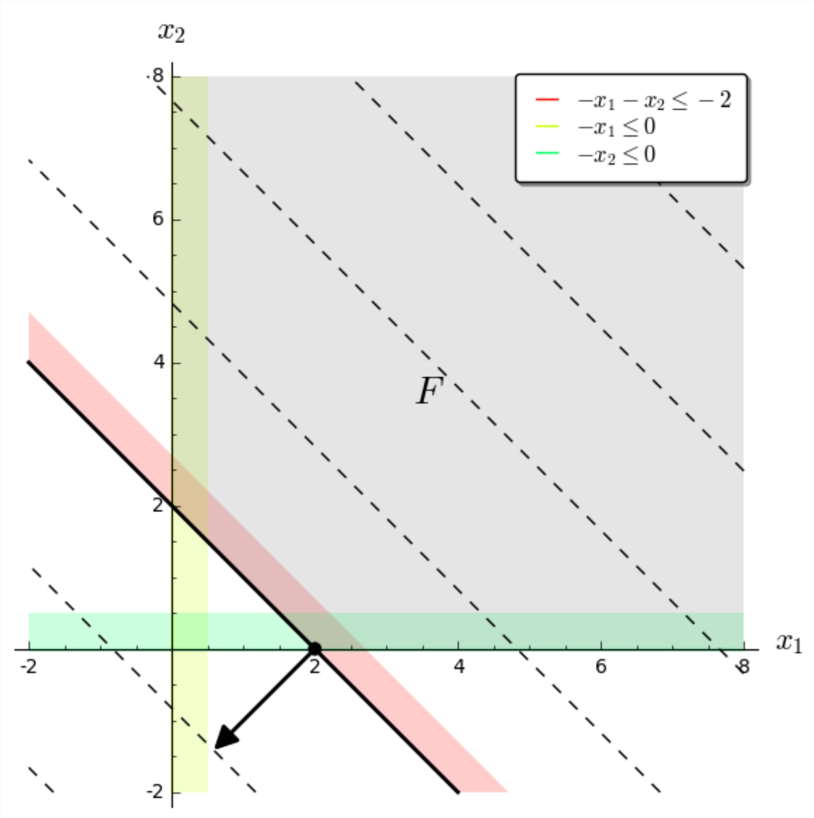
Le programme linéaire est *non-borné* : en effet, on a des solution aussi grandes qu'on veut (en faisant grandir x_1 et/ou x_2), avec la fonction objectif aussi grande qu'on veut. Il n'y a donc pas de solution optimale.

(d)



Le programme linéaire n'a aucune solution : en effet, la première contrainte est en conflit avec les deux suivantes et l'espace de solutions est vide.

(e) Attention, ici on cherche à minimiser.



Le programme linéaire a une infinité de solutions, ce sont toutes les solutions qui sont sur le segment qui va de $(2, 0)$ à $(0, 2)$. Tous les points de ce segment correspondent à une solution de valeur 2. Cela est dû au fait que la droite de la contrainte $x_1 + x_2 \geq 2$ a la même pente que l'infinité de droites représentant la fonction objectif.

Exercice 4 (Publicité)**.**

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4800€ pour le lancement de son nouveau produit. Sa campagne publicitaire utilisera à la fois des spots télévisés sur TV8 Clermont-Ferrand et des pages dans La Montagne. On pense que chaque minute de télévision va atteindre 100 000 nouveaux spectateurs et chaque page dans un journal va être lue par 80 000 nouveaux lecteurs. Une minute de télévision coûte 800€ et une page dans un journal 600€. La direction de l'entreprise souhaite diffuser au moins trois minutes de spot et une page de journal. Son objectif est de maximiser le nombre total de cibles (spectateurs et lecteurs).

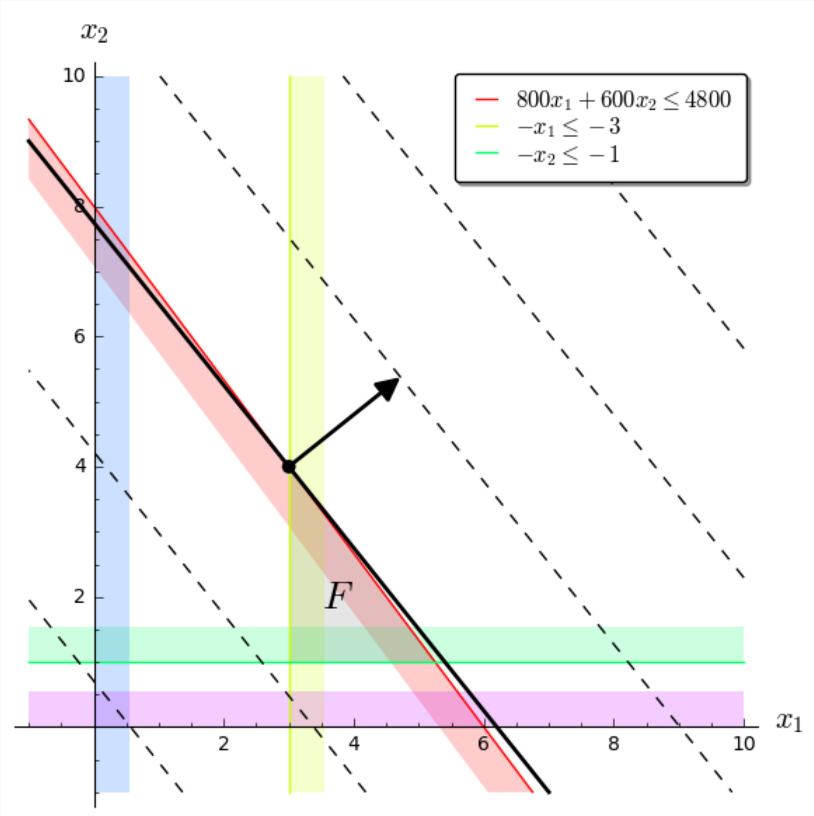
(a) Modéliser ce problème par un programme linéaire.
(b) Représenter l'espace des solutions réalisables.
(c) Quelle est la combinaison optimale si le budget est augmenté de 4800€ à 6000€ ?
(d) Quelle est la décision optimale s'il n'y a pas de contrainte de temps de télévision ?

Solution.

(a) On définit une variable x_1 pour les minutes de spot télévisé, et x_2 pour le nombre de pages de journal.

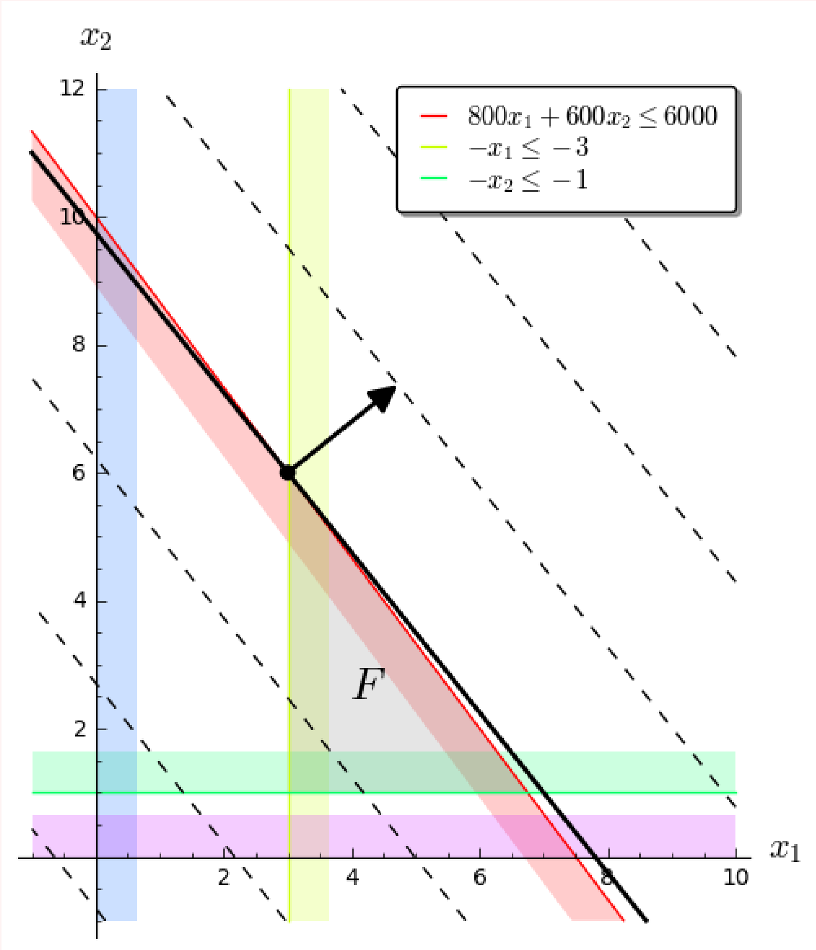
maximiser	$100000x_1$	$+$	$80000x_2$			(fonction objectif : personnes touchées)
tel que	$800x_1$	$+$	$600x_2$	$\leq$	4800	(dépenses)
	x_1			$\leq$	3	(durée minimale de spots TV)
			x_2	$\leq$	3	(nombre minimal de pages de journal)

(b)



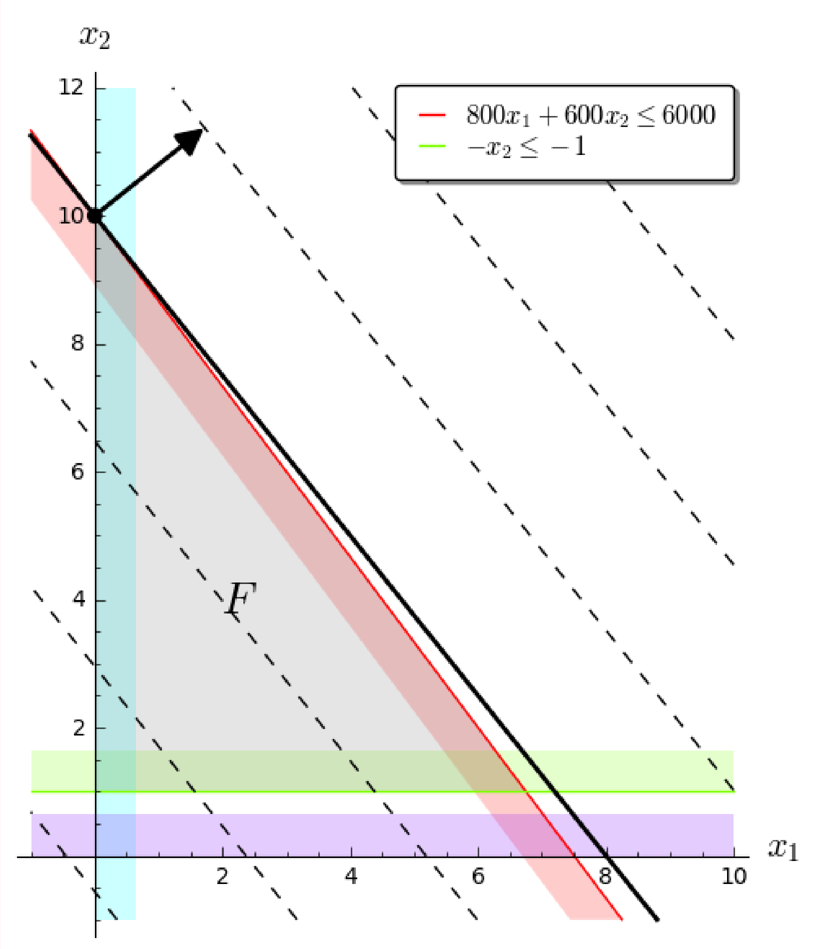
La zone nommée “F” représente l’espace de solutions, la droite noire représente une droite possible pour la fonction objectif. La solution optimale est $(x_1 = 3, x_2 = 4)$ et a valeur 620000.

(c)



La zone nommée “F” représente l’espace de solutions, la droite noire représente une droite possible pour la fonction objectif. La solution optimale est $(x_1 = 3, x_2 = 6)$ et a valeur 780000.

(d)



La zone nommée "F" représente l'espace de solutions, la droite noire représente une droite possible pour la fonction objectif. La solution optimale est $(x_1 = 0, x_2 = 10)$ et a valeur 800000.

Exercice 5 (Abstraction à deux variables)**.**

Considérons le programme linéaire suivant sur les variables x, y (où on remplace s et t par des nombres de notre choix) :

$$\boxed{\begin{array}{lccccc} \text{maximiser} & x & + & y & & \\ \text{tel que} & sx & + & ty & \leq & 1 \\ & x & & & \geq & 0 \\ & & & y & \geq & 0 \end{array}}$$

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres s et t pour que ce programme linéaire :

(a) ait au moins une solution.
(b) soit irréalisable (pas de solution).
(c) soit non-borné (une infinité de solutions, aucune n'est optimale).