Dipayan Chakraborty
Florent Foucaud
Malika More
Adrien Wohrer

Université Clermont Auvergne
Méthodes d'optimisation
BUT Info 2A
2023 - 2024

TD2 : Programmation linéaire en nombres entiers
Version avec Solution

Rappel de cours

Un *programme linéaire en nombres entiers (PLNE)* est un programme linéaire dont les variables doivent forcément prendre des valeurs entières. On peut ainsi modéliser des variables qui ne peuvent pas être divisées en fractions, comme des objets, des personnes, etc.

Exemple 1 (rappel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels) :

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\ \text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & x & & & \in & \mathbb{N} \\ & & & y & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Exemple 2 : Programme linéaire pour la *couverture par sommets* d'un réseau par des antennes radio. Le réseau est représenté par un graphe $G = (V, E)$. On cherche un ensemble de sommets tel que chaque arête du graphe doit avoir au moins une de ses extrémités dans l'ensemble choisi. On prend une variable x_v pour chaque sommet $v \in V$ de G, si $x_v = 1$ il est choisi, si $x_v = 0$ il n'est pas choisi. On représente le problème par le PLNE suivant :

$$\begin{array}{llccl} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v & & & \\ \text{tel que :} & \sum_{uv \in E} x_u + x_v & \geq & 1 & \forall v \in V \\ & x_v & \leq & 1 & \forall v \in V \\ & x_v & \geq & 0 & \forall v \in V \\ & x_v & \in & \mathbb{N} & \forall v \in V \end{array}$$

Méthode du branch and bound

Pour résoudre un PLNE, on peut d'abord résoudre le PL associé avec les méthodes habituelles. Si par chance on obtient une solution entière, on s'arrête. Sinon, on prend la solution optimale non-entière, et on considère une variable avec une valeur non-entière, par exemple $x = 2,5$.

On *branche* alors en créant deux nouveaux PL : un avec une nouvelle contrainte, $x \leq 2$ et un avec la contrainte $x \geq 3$. L'idée est de réduire l'espace des solutions en fonction de la valeur obtenue $x = 2,5$.

On continue jusqu'à avoir exploré tous les branchements : on arrête de brancher s'il n'y a pas de solution entière possible dans la branche, ou si on a trouvé une solution entière.

La solution optimale est alors la meilleure parmi toutes les solutions obtenues sur l'ensemble des branches.

Exercice 1 (Problème du sac à dos)**.**

Un randonneur veut remplir son sac à dos de capacité (poids maximal) $W = 22$ en maximisant l'utilité totale des objets qu'il emporte avec lui. Le nombre de certains objets est limité. Les objets à sa disposition sont :

	objet	utilité	poids	maximum autorisé
A	barres énergétiques	8	3	10
B	pull	12	4	2
C	carte	9	3	1
D	gourde	15	3	2
E	tente	26	13	1

(a) Donner une solution réalisable du problème (pas forcément optimale). Quelle est une solution optimale ? Que se passe-t-il si on ne limite pas le nombre d'objets de chaque type ?

(b) Proposer un programme linéaire en nombres entiers (PLNE) pour le modéliser (on ne demande pas de le résoudre).

(c) Le problème général dit du "sac à dos" (un grand classique dans le domaine de l'optimisation) est défini par un ensemble de n objets $\{O_1, \ldots, O_n\}$. Chaque objet O_i a une utilité u_i et un poids p_i, ainsi qu'un nombre maximum m_i. Le randonneur a un sac de capacité W, et on veut sélectionner un sous-ensemble d'objets à placer dans le sac de façon à maximiser l'utilité totale.

Modéliser le problème général du sac à dos par un PLNE (on ne demande pas de le résoudre).

Solution.

(a) Aucun objet, ou bien un pull et une carte, par exemple. Une solution optimale semble être de prendre 2 gourdes, 1 pull, 1 carte et 3 barres pour 22kg et une utilité de 75. Sans les limites on prendrait 7 gourdes pour un poids de 21kg et une utilité de 105 mais ce n'est pas très cohérent !

(b) On pose une variable pour chaque objet, représentant le nombre qu'on en a pris.

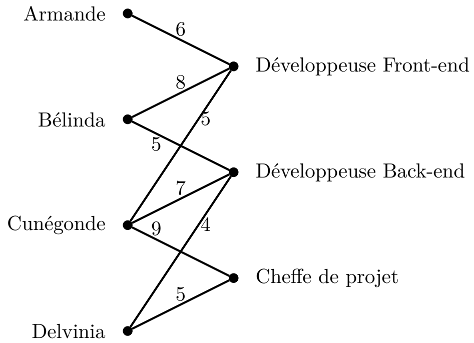
$$
\begin{array}{llcll}
\text{maximiser :} & 8a + 12b + 9c + 15d + 26e & & & \textit{utilité} \\
\text{tel que :} & 3a + 4b + 3c + 3d + 13e & \leq & 22 & \textit{contrainte de poids} \\
& a & \leq & 10 & \\
& \quad b & \leq & 2 & \\
& \qquad c & \leq & 1 & \\
& \qquad\quad d & \leq & 2 & \\
& \qquad\qquad e & \leq & 1 & \\
& a, b, c, d, e & \geq & 0 & \\
& a, b, c, d, e & \in & \mathbb{N} &
\end{array}
$$

(c) On pose une variable x_i pour chaque objet O_i.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{maximiser :} & \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \times u_i & & & \textit{utilité totale} \\
\text{tel que :} & \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \times p_i & \leq & W & \textit{contrainte de poids} \\
& x_i & \leq & m_i \ \forall i & \\
& x_i & \geq & 0 \quad \forall i & \\
& x_i & \in & \mathbb{N} \quad \forall i &
\end{array}
$$

Exercice 2 (Problème du couplage maximum dans un graphe)**.**

On se donne le graphe suivant, qui modélise un problème d'affectation (couplage) de candidates à des postes dans une entreprise. Une arête qui relie une candidate a et un poste x avec un poids p signifie que a est apte pour le poste x, avec l'aptitude p. Chaque candidate est affectée à au plus un poste, et chaque poste, à au plus une candidate. On cherche un couplage qui maximise la somme des aptitudes.



(a) Donner une solution réalisable du problème (essayer de trouver la meilleure possible).
(b) Proposer un PLNE pour le modéliser (on ne demande pas de le résoudre).
(c) Le problème général du couplage maximum (un autre problème classique) est défini pour un graphe $G = (V, E)$ avec pour chaque arête e de E, un poids $p(e)$. On cherche un ensemble C d'arêtes dont le poids total est le plus grand possible, tel qu'aucune paire d'arêtes sélectionnées dans C ne partage de sommet.

Modéliser le problème général du couplage maximum par un PLNE (on ne demande pas de le résoudre).

Solution.

(a) Par exemple Armande (6), Bélinda (5), Cunégonde (9) avec une aptitude totale de 20. Encore mieux : Bélinda (8), Cunégonde (9), Delvinia (4) pour 21. Par rapport à la première solution, on perd 1 sur le Backend, mais on gagne 2 sur le Frontend.

(b) On pose une variable pour chaque arête (on peut les appeler par exemple $a_6, b_8, b_5, c_5, c_7, c_9, d_4, d_5$), représentant si on l'a choisie dans la solution ou pas.

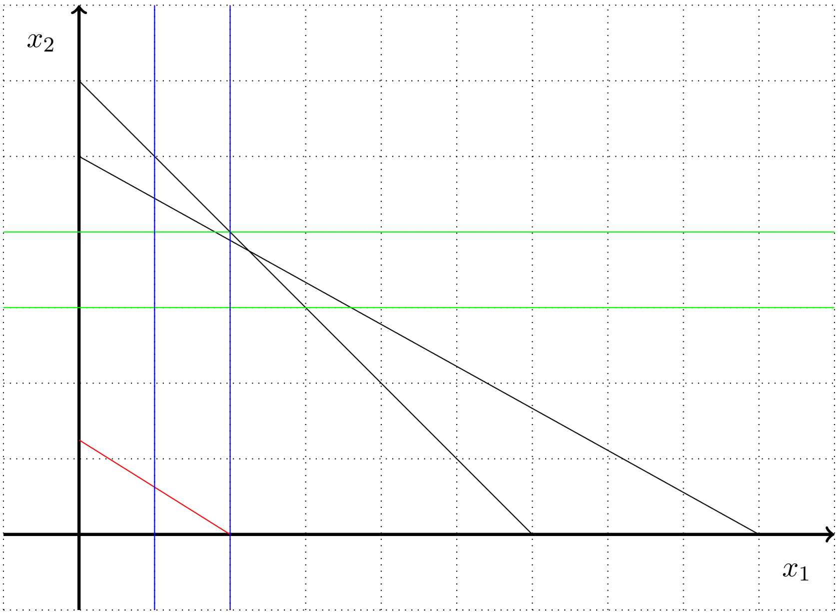
$$\begin{array}{llcll}
\text{maximiser :} & \multicolumn{4}{l}{6a_6 + 8b_8 + 5b_5 + 5c_5 + 7c_7 + 9c_9 + 4d_4 + 5d_5} \\
\text{tel que :} & b_8 + b_5 & \leq & 1 & \textit{sommet Bélinda} \\
 & c_5 + c_7 + c_9 & \leq & 1 & \textit{sommet Cunégonde} \\
 & d_4 + d_5 & \leq & 1 & \textit{sommet Delvinia} \\
 & a_6 + b_8 + c_5 & \leq & 1 & \textit{sommet Dév. FE} \\
 & b_5 + c_7 + d_4 & \leq & 1 & \textit{sommet Dév. BE} \\
 & c_9 + d_5 & \leq & 1 & \textit{sommet Cheffe de Projet} \\
 & a_6, b_8, b_5, c_5, c_7, c_9, d_4, d_5 & \leq & 1 & \\
 & a_6, b_8, b_5, c_5, c_7, c_9, d_4, d_5 & \geq & 0 & \\
 & a_6, b_8, b_5, c_5, c_7, c_9, d_4, d_5 & \in & \mathbb{N} &
\end{array}$$

(c) On écrit le PLNE suivant ($x_e = 1$ si l'arête e est sélectionnée, sinon $x_e = 0$) :

$$\begin{array}{llcll}
\text{maximiser :} & \sum_{e \in E} p_e x_e & & & \\
\text{tel que :} & \sum_{e = uv \in E} x_e & \leq & 1 & \forall v \in V \\
 & x_e & \leq & 1 & \forall e \in E \\
 & x_e & \geq & 0 & \forall e \in E \\
 & x_e & \in & \mathbb{N} & \forall e \in E
\end{array}$$

Exercice 3 (Algorithme de Branch and Bound)**.**
On considère le PLNE suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$$



1. Sachant que c'est un des sommets du polygone convexe des solutions réalisables, calculez la solution optimale du PL associé et la valeur correspondante de la fonction objectif. Sans aucun calcul supplémentaire, que pouvez-vous dire de la valeur optimale de la fonction objectif pour le PLNE ?

Solution.

$$\begin{array}{llll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Le polygone a quatre sommets :
- L'origine $(0; 0)$ qui donne $y = 0$.
- Les points sur les axes :
  - Pour la droite $x_1 + x_2 = 6$, ce sont les points $(6; 0)$ et $(0; 6)$.
  - Pour la droite $5x_1 + 9x_2 = 45$, ce sont les points $(9; 0)$ et $(0; 5)$.

  Parmi ces quatre points, les sommets du polygone sont $(6; 0)$, qui donne $y = 30$, et $(0; 5)$, qui donne $y = 40$.
- L'intersection des deux droites :
  $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ 5x_1 + 9x_2 = 45 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 6 - x_2 \\ 5(6 - x_2) + 9x_2 = 45 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 6 - x_2 \\ 4x_2 = 15 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{9}{4} = 2.25 \\ x_2 = \frac{15}{4} = 3.75 \end{array}\right.$
  qui donne $y = 5.\frac{9}{4} + 8.\frac{15}{4} = \frac{165}{4} = 41.25$

Le maximum de la fonction objectif sous les contraintes est donc $y = 41.25$, qui est atteint pour $x_1 = 2.25$ et $x_2 = 3.75$. Les valeurs x_1 et x_2 ne sont pas entières, donc ce n'est pas la solution optimale du PLNE, mais on peut dire que cette dernière est ≤ 41.25. Comme les coefficients de la fonction objectif sont entiers, on peut même dire qu'elle est ≤ 41.

2. Pour appliquer l'algorithme de Branch and Bound, on choisit d'abord de séparer selon les valeurs de x_2, autrement dit de considérer deux nouveaux PLNE en introduisant une nouvelle contrainte du type $x_2 \leq a$ et $x_2 \geq a + 1$, pour un certain a entier que vous devez déterminer.

(a) Écrivez les deux PL ainsi obtenus.

Solution.

On choisit une variable fractionnaire dans la solution continue précédente. Ici, on a le choix entre x_1 et x_2. Un critère couramment utilisé consiste à choisir la variable qui a la plus grande partie fractionnaire, ici x_2, de valeur 3.75 dans la solution optimale.
Dans le premier PL, on ajoute la contrainte $x_2 \leq 3$ et dans le second, $x_2 \geq 4$:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 3 \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 4 \end{array} \end{array}$$

(b) Résolvez les deux PL correspondants.

Solution.

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 3 \end{array} \end{array}$$

Les sommets du nouveau polygone sont :

- $(0; 0)$ correspond à $y = 0$
- $(6; 0)$ correspond à $y = 30$
- $(0; 3)$ correspond à $y = 24$
- $(3; 3)$ correspond à $y = 39$.

La solution optimale ici est $y = 39$, obtenu avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 3$. C'est une solution entière.

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 4 \end{array} \end{array}$$

Ici, le polygone se réduit à un triangle :

- $(0; 4)$, qui correspond à $y = 32$.
- $(0; 5)$, qui correspont à $y = 40$.
- $(1.8; 4)$, qui correspond à $y = 41$.

La solution optimale ici est $y = 41$, obtenu avec $x_1 = 1.8$ et $x_2 = 4$. Ce n'est pas une solution entière.

(c) Pour l'un des deux cas, il n'est pas nécessaire de poursuivre l'algorithme. Lequel et pourquoi ?

Solution.

C'est le premier cas, puisque la solution optimale est en nombres entiers.

(d) Dans l'autre cas, on sépare de nouveau en fonction des valeurs de x_1.

i. Écrivez les deux PL ainsi obtenus.

Solution.

Dans le premier PL, on ajoute la contrainte $x_1 \leq 1$ et dans le second, $x_1 \geq 2$:

$$\begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \geq & 2 \end{array}$$

ii. Résolvez les deux PL correspondants.

Solution.

$$\begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \end{array}$$

Les sommets du polygone sont :

- $(0;4)$, qui correspond à $y = 32$
- $(1;4)$, qui correspond à $y = 37$
- $(0;5)$, qui correspond à $y = 40$
- $(1;4.44)$ (en fait $x_2 = \frac{40}{9}$), qui correspond à $y \approx 40.56$

La solution optimale ici est $y = 40.56$, obtenu avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 4.44$. Ce n'est pas une solution entière.

$$\begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \geq & 2 \end{array}$$

Il n'y a aucune solution, car le point $(4;2)$ est au-dessus de la droite $5x_1 + 9x_2 = 45$.

iii. Pour l'un des deux cas, il n'est pas nécessaire de poursuivre l'algorithme. Lequel et pourquoi ?

Solution.

Le deuxième cas, puisque l'ensemble des solutions est vide.

iv. Dans l'autre cas, on sépare de nouveau en fonction des valeurs de x_2.

A. Écrivez les deux PLNE ainsi obtenus.

Solution.

$$\begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 4 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{llcl} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que :} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \\ & x_2 & \geq & 5 \end{array}$$

B. Résolvez les deux PL correspondants.

Solution.

Le premier PL se réécrit :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & = & 4 \\ x_1 & \leq & 1 \end{array} \end{array}$$

Dans ce cas, le polygone des solutions est simplement le segment $(0,4) - -(1,4)$.

- Pour $(0,4)$, on trouve $y = 32$
- Pour $(1,4)$, on trouve $y = 37$

La solution optimale est $y = 37$, obtenue pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$. C'est une solution en nombres entiers.

Le second PL se réécrit :

et
$$\begin{array}{ll} \text{maximiser :} & y = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{tel que :} & \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_2 & \geq & 5 \end{array} \end{array}$$

Le polygone des solutions réalisables est réduit à un point : $(0;5)$, qui correspond forcément à la solution optimale avec $y = 40$. C'est une solution en nombres entiers.

C. Dans les deux cas, il n'est pas nécessaire de poursuivre l'algorithme. Pourquoi ?

Solution.

On a des solutions en nombres entiers. En plus, pour le premier, on connaît déjà une meilleure solution entière ($y = 39$ avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 3$) que sa solution optimale ($y = 37$).

D. En déduire la solution optimale du PLNE de départ, et la valeur correspondante de la fonction objectif.

Solution.

L'algorithme est terminé puisqu'on a plus que des PL sans solutions ou des PL avec une solution optimale en nombres entiers, ou des PL dont la solution optimale, sans être forcément en nombres entiers est inférieure à une solution en nombres entiers déjà connue.

La solution optimale du PLNE est la meilleure des solutions optimales en nombres entiers des divers PL rencontrés. Ici c'est donc $x_1 = 0$ et $x_2 = 5$, qui correspond à $y = 40$.

Comme il n'y a pas beaucoup de solutions entières possibles, on peut le vérifier sur le schéma.

Exercice 4 (Voyageur de commerce)**.**

Dans le problème du voyageur de commerce (*Travelling Salesperson Problem*, TSP, en anglais), on a un ensemble de villes avec les distances qui les séparent. On veut parcourir toutes les villes et revenir au point de départ, en minimisant la distance totale parcourue. Par exemple, avec les villes suivantes :

	Clermont-Ferrand	Bordeaux	Toulouse	Lyon
Clermont-Ferrand	-	376	377	167
Bordeaux	376	-	244	556
Toulouse	377	244	-	538
Lyon	167	556	538	-

(a) Décrire une solution réalisable du problème (pas forcément optimale, mais essayez d'en trouver une pas trop mauvaise).

(b) Proposer un PLNE pour le modéliser, en s'inspirant de la modélisation du problème de plus court chemin, vue en cours.

(c) Dans le problème général, les villes sont indexées par des entiers : $v_1, \dots, v_n$ et la distance entre deux villes v_i et v_j est notée $d(i,j)$.

Proposer un PLNE pour modéliser la version générale du problème. *(Une difficulté quand il y a six villes ou plus, est de s'assurer que le parcours soit connexe : il faut éviter les fausses solutions qui sont l'union de plusieurs petits sous-parcours déconnectés. Pour cela on peut ajouter des contraintes de connexité, demandant à ce que chaque sous-ensemble de villes aie au moins une connexion vers le reste.)*

Solution.

(a) Par exemple : Clermont-Bordeaux-Toulouse-Lyon-Clermont (1325km).

(b) On prend une variable pour chaque trajet direct possible (il y en a 6) : x_{cb}, x_{cl}, x_{ct}, x_{bt}, x_{bl}, x_{lt}. Pour chaque ville, il faut s'asurer qu'on rentre et qu'on sort.

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & 376x_{cb} + 167x_{cl} + 377x_{ct} + 244x_{bt} + 556x_{bl} + 538x_{lt} \\ \text{tel que :} & \begin{array}{rcll} x_{cb} + x_{cl} + x_{ct} & = & 2 & \textit{Clermont} \\ x_{cb} + x_{bt} + x_{bl} & = & 2 & \textit{Bordeaux} \\ x_{lt} + x_{cl} + x_{bl} & = & 2 & \textit{Lyon} \\ x_{lt} + x_{ct} + x_{bt} & = & 2 & \textit{Toulouse} \\ x_{cb}, x_{cl}, x_{ct}, x_{bt}, x_{bl}, x_{lt} & \leq & 1 & \\ x_{cb}, x_{cl}, x_{ct}, x_{bt}, x_{bl}, x_{lt} & \geq & 0 & \\ x_{cb}, x_{cl}, x_{ct}, x_{bt}, x_{bl}, x_{lt} & \in & \mathbb{N} & \end{array} \end{array}$$

(c) On note x_{ij} ($i \neq j$) la variable qui correspond au trajet depuis la ville i vers la ville j. Ici, on distingue x_{ij} de x_{ji} (mais on aurait pu ne pas le faire, comme dans la solution de la question b).

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimiser :} & \sum_{i,j (i \neq j)} d(i,j) x_{ij} & & & \\ \text{tel que :} & \sum_{j : j \neq i} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \textit{(un seul trajet sortant pour la ville i)} \\ & \sum_{j : j \neq i} x_{ji} & = & 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \textit{(un seul trajet entrant pour la ville i)} \\ & \sum_{i,j \in Q (i \neq j)} x_{ij} & \leq & |Q| - 1 & \forall Q \subseteq \{1, \dots, n\}, \ |Q| \geq 2 \ \textit{(connexité)} \\ & x_{ij} & \leq & 1 & \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \ (i \neq j) \\ & x_{ij} & \geq & 0 & \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \ (i \neq j) \\ & x_{ij} & \in & \mathbb{N} & \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \ (i \neq j) \end{array}$$

Exercice 5 (Sudoku)**.**

Dans le jeu de Sudoku, on a une grille de taille 9×9 dont certaines cases sont pré-remplies. On veut remplir chaque case avec un chiffre de 1 à 9 de façon à ce que pour chaque ligne, chaque colonne, et chacun des 9 carrés de taille 3×3 contienne une et une seule fois chacun des chiffres de 1 à 9.

Modéliser ce jeu par un PLNE, en utilisant les variables x_{ijk} avec $1 \leq i, j, k \leq 9$ telles que $x_{ijk} = 1$ si le chiffre k est écrit dans la position i, j de la grille, et sinon, $x_{ijk} = 0$.

Solution.

Attention, ici on recherche simplement l'existence d'une solution, donc la fonction objectif n'est pas importante.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimiser :} & 1 & & & \\
\text{tel que :} & \displaystyle\sum_{1\leq k\leq 9} x_{ijk} & = & 1 & \forall i,j \in \{1,\dots,9\} \textit{ (une unique valeur dans chaque case)} \\
& \displaystyle\sum_{1\leq j\leq 9} x_{ijk} & = & 1 & \forall i,k \in \{1,\dots,9\} \textit{ (chaque ligne contient chaque chiffre)} \\
& \displaystyle\sum_{1\leq i\leq 9} x_{ijk} & = & 1 & \forall j,k \in \{1,\dots,9\} \textit{ (chaque colonne contient chaque chiffre)} \\
& \displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq 2} x_{(x+i)(y+j)k} & = & 1 & \forall x,y \in \{1,4,7\} \text{ et } k \in \{1,\dots,9\} \textit{ (chaque carré contient chaque chiffre)} \\
& x_{ijk} & = & 1 & \forall i,j,k \in \{1,\dots,9\} \text{ si la case } i,j \text{ est pré-remplie avec le chiffre } k \\
& x_{ijk} & \leq & 1 & \forall i,j,k \in \{1,\dots,9\} \\
& x_{ijk} & \geq & 0 & \forall i,j,k \in \{1,\dots,9\} \\
& x_{ijk} & \in & \mathbb{N} & \forall i,j,k \in \{1,\dots,9\}
\end{array}
$$