

به نام خدا

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها (۴۰۲۵۴)

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: مهدی صفرنژاد

تمرین سوم

انتشار: ۱۶ آبان ۱۴۰۰

درخت

سؤالات را با دقت بخوانید و روی همه آن‌ها وقت بگذارید. تمرین‌های تئوری تحویل گرفته نمی‌شوند اما از آن‌ها سؤالات کوییز مشخص می‌شود. بنابراین روی سؤالات به خوبی فکر کنید و در کلاس‌های حل تمرین مربوطه شرکت کنید.

سؤال ۱. به سؤالات زیر در رابطه با درخت Red-black پاسخ دهید:

آ. در چه شرایطی بهتر است از درخت Red-black به جای AVL استفاده کنیم؟

ب. ارتفاع سیاه (black height) را برای هر گره درونی در این نوع درخت تعریف کنید. نشان دهید در هر درخت Red-black با ریشه x حداقل $n = 2^{bh(x)} - 1$ گره داخلی وجود دارد ($bh(x)$ ارتفاع سیاه گره x است).

سؤال ۲. درخت دودویی جست‌وجو را طوری تغییر دهید تا بتوان k امین عدد را در $O(\log(n))$ بدست آورد. این تغییر بر روی کدام بخش از درخت (حافظه، زمان ساخت، ...) اعمال شده است؟ مرتبه تغییر را مشخص کنید.

سؤال ۳. در یک درخت دودویی، گره m از نوادگان گره n است هر گاه در نمایش X ، m پیش از n بیاید و در نمایش Y این ترتیب معکوس باشد. اگر X و Y بتوانند هر یک از اعضای مجموعه $\{pre, post, in\}$ باشند، تمامی حالت‌های ممکن برای ترکیب آن‌ها را بیابید.

سؤال ۴. امیر قرار است از پله‌های برج ایفل که تعدادشان n تا است بالا برود. هر کدام از پله‌ها ارتفاعی دارد و ارتفاع پله‌ها نیز متمایز است. امیر روی هر پله‌ای که قرار می‌گیرد به پایین نگاه میکند و جمع ارتفاع همه پله‌هایی که تا اینجا بالا آمده و ارتفاعشان از پله‌ای که رویش ایستاده کمتر است را محاسبه میکند. فرض کنید لیست همه پله‌ها را به ترتیب داریم. الگوریتمی از $O(n \log(n))$ ارائه دهید که مجموع همه اعداد نوشته شده توسط امیر را بدست آورد.

سؤال ۵. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد د.د.ج‌های مختلف، که میتوان با اعداد $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ساخت را بیابید. حال فرض کنید که یک د.د.ج ثابت داریم. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد دنباله‌های متفاوت از اعضای این درخت بیابید که در صورت درج آن‌ها به ترتیب، می‌توان این د.د.ج را به‌دست آورد.

سؤال ۶. یک د.د.ج با ارتفاع h در نظر بگیرید. نشان دهید با شروع از هر راس میتوان در $O(h+k)$ ، k عنصر بعدی آن را یافت.

سؤال ۷. آرایه‌ای شامل n عدد متمایز داریم. همچنین عدد k کوچک‌تر از n داده شده است. عددی را خوب می‌نامیم اگر از همه i اعداد سمت چپ خود، و از حداقل k عدد سمت راستش بزرگتر باشد. الگوریتمی از $O(n \log(n))$ ارائه دهید که تعداد اعداد خوب در این آرایه را بیابد.

سؤال ۸. می‌خواهیم عمل $Tree-Enumerate(x, a, b)$ را بر روی زیردرخت دودویی جست‌وجو به ریشه‌ی x بنویسیم به طوری که تمام کلیدهایی را پیدا کند که مقدار آن‌ها بین a و b است. یک الگوریتم کارا از $O(h+m)$ برای این کار ارائه دهید (h ارتفاع درخت و m تعداد جواب است).

سؤال ۹. داده‌ساختار «صف اولویت میانه» یا «*MeanPriorityQueue*» شامل n عنصر مجزاست و اعمال زیر، روی این داده‌ساختار قابل اجرا می‌باشند:

• درج یک عنصر، در بدترین حالت در $O(\lg n)$

• حذف / دریافت عنصر میانه، در بدترین حالت در $O(\lg n)$

با استفاده از هرم، این داده‌ساختار را طراحی کنید و نحوه‌ی انجام اعمال فوق را دقیقاً توضیح دهید و تحلیل نمایید.

سؤال ۱۰. فرض کنید H_1 و H_2 دو هرم بیشینه هستند که به صورت درختی (و نه با آرایه) پیاده‌سازی شده‌اند؛ بنابراین شما به ریشه‌ی هر هرم و به دو فرزند و پدر هر عنصر دسترسی دارید. الگوریتم $Merge-Heap(H_1, H_2)$ را به‌طور کامل بنویسید تا در زمان $O(\lg n)$ این دو هرم را در هم ادغام کنید و آن‌ها را به یک هرم جدید تبدیل نمایید. در صورت نیاز، در الگوریتم خود می‌توانید از اعمال تعریف شده بر روی هرم‌ها استفاده کنید. (توجه داشته باشید که ارتفاع درخت‌های H_1 و H_2 نیز از $O(\lg n)$ می‌باشد.)

سؤال ۱۱. فرض کنید که علاوه بر نشانگرهای فرزند، می‌خواهیم تعداد کل گره‌های زیردرخت یک ریشه خاص را با عنوان کلید نگهداری کنیم.

آ. تابع $BSTInsert$ را برای نگهداری صحیح کلیدها تغییر دهید. آیا زمان اجرا تغییر می‌کند؟

ب. با داشتن مقادیر کلید، شبه‌کدی برای تابع $BSTKeyLessThan(T, k)$ بنویسید که یک درخت T و یک عدد k را می‌گیرد و تعداد کلیدهای T را که کمتر از k هستند برمی‌گرداند. بدترین زمان اجرای این تابع چیست؟

سؤال ۱۲. به سوالات زیر درباره درخت ای‌وی‌ال و جستجوی دودویی پاسخ دهید.

آ. فرض کنید ۷ عنصر را در یک BST درج می‌کنید. ارتفاع‌های ممکن درخت پس از درج چیست؟ (در مورد ترتیب‌های مختلف درج عناصر فکر کنید).

ب. اگر ۷ عنصر را در درخت AVL قرار دهید، ارتفاع درخت چقدر خواهد بود؟

پ. با داشتن یک درخت جستجوی دودویی، توضیح دهید که چگونه می‌توانید آن را به یک درخت AVL با حداکثر زمان $O(n \log(n))$ تبدیل کنید. بهترین زمان اجرای الگوریتم چه خواهد بود؟

ت. آیا بین ارتفاع درخت AVL و حداقل یا حداکثر تعداد گره‌های آن رابطه وجود دارد؟

سؤال ۱۳. در این سوال، در مورد درخت جستجوی سه گانه (TST) صحبت خواهیم کرد. درخت‌های جستجوی سه گانه شبیه درخت‌های جستجوی دودویی هستند، اما به جای داشتن فقط ۲ نشانگر (چپ و راست)، ۳ اشاره گر (چپ، وسط و راست) دارند. درخت T یک درخت سه گانه است که در آن هر گره حاوی یک نقطه به شکل (x, y) برای $x, y \in \mathbb{Z}$ است. علاوه بر این، هیچ دو نقطه‌ای در T نمی‌تواند یک مقدار x یا یک مقدار y داشته باشند. ویژگی‌های زیر برای هر گره u با کلید (x, y) در هر TST برقرار است:

- هر نقطه (x_L, y_L) در زیردرخت سمت چپ u دارای $x_L < x$ و $y_L < y$ است.
 - هر نقطه (x_M, y_M) در زیردرخت وسط u دارای $x_M > x$ و $y_M < y$ است.
 - هر نقطه (x_R, y_R) در زیردرخت سمت راست u دارای $x_R > x$ و $y_R > y$ است.
- می‌توانید فرض کنید که برای هر گره v در درخت T ، تعداد گره‌هایی را که به زیردرخت v تعلق دارند، در زمان $O(1)$ محاسبه کنید.

آ. اثبات یا رد: برای هر مجموعه‌ای از n نقطه متمایز (که در آن هیچ دو نقطه با مختصات x یا مختصات y مشترک نیستند)، یک درخت جستجوی سه گانه T در این n نقطه با $h(T) = O(f(n))$ وجود دارد:

- وقتی $f(n) = n$

- وقتی $f(n) = \log n$

ب. فرض کنید به شما یک نقطه (x', y') و یک درخت جستجوی سه گانه T داده شده است که شامل n نقطه و ارتفاع h است. شما می‌خواهید تعیین کنید که آیا (x', y') در T موجود است یا خیر. یک الگوریتم کارآمد برای حل این سوال طراحی کنید، درستی الگوریتم را ثابت کنید و زمان اجرای آن را بر حسب n و همچنین بر حسب h تحلیل کنید.

پ. حال، فرض کنید با یک درخت جستجوی سه گانه T با n گره و ارتفاع h و یک نقطه (x', y') می‌خواهید تعداد نقاط (x, y) را در درخت تعیین کنید به طوری که $x' \leq x$ و $y' \leq y$.

یک الگوریتم بازگشتی ارائه دهید که با شروع از ریشه درخت، این نقاط را جستجو می‌کند. در هر مرحله بازگشتی در یک گره u از T ، الگوریتم شما در بدترین حالت به چند فرزند از u نیاز دارد؟

بدترین حالت زمان اجرا $U(h)$ الگوریتم خود را بر حسب h تحلیل کنید. بدترین حالت زمان اجرا بر حسب n چیست (زمانی که h بتواند دلخواه باشد)؟ اگر درخت کاملاً متوازن باشد و $h = \log_3 n$ ، زمان اجرا بر حسب n چقدر خواهد بود؟

موفق باشید