Kth-Smallest Element
Rank(K)

Part-11

Arash Vaezi

Max and Min

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

$$n - 1 + n - 2 = 2n - 3$$

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

$$n - 1 + n - 2 = 2n - 3$$

روش اول:

ایده: دو عنصر را اگر مقایسه کنیم عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست و عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست.

(a1,a2)-(a3,a4)-...-(an-1,an)

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	a2	a3	a4						an

$$n-1+n-2=2n-3$$

روش اول:

ایده اولیه: دو عنصر را اگر مقایسه کنیم عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست و عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست.

(a1,a2)-(a3,a4)-...-(an-1,an)

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

$$n-1+n-2=2n-3$$

روش اول:

ایده: دو عنصر را اگر مقایسه کنیم عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست و عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست.

(a1,a2)-(a3,a4)-...-(an-1,an)

ایده: بنابراین عناصر را به دسته‌های دوتایی تقسیم می‌کنیم و در هر دسته بزرگترین و کوچکترین عنصر را پیدا می‌کنیم. در دسته‌ی عناصر کوچک با $\frac{n}{2}-1$ مقایسه کوچکترین عنصر و در دسته‌ی عناصر بزرگتر با $\frac{n}{2}-1$ مقایسه بزرگترین عنصر را پیدا می‌کنیم.

تعدادمقایسه $\Rightarrow 3\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-2$

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

$$n-1+n-2=2n-3$$

روش اول:

ایده: دو عنصر را اگر مقایسه کنیم عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست و عنصر کوچکتر قطعا بزرگترین عنصر نیست.

(a1,a2)-(a3,a4)-...-(an-1,an)

ایده: بنابراین عناصر را به دسته‌های دوتایی تقسیم می‌کنیم و در هر دسته بزرگترین و کوچکترین عنصر را پیدا می‌کنیم. در دسته‌ی عناصر کوچک با $\frac{n}{2}-1$ مقایسه کوچکترین عنصر و در دسته‌ی عناصر بزرگتر با $\frac{n}{2}-1$ مقایسه بزرگترین عنصر را پیدا می‌کنیم.

$$\text{تعدادمقایسه} \Rightarrow 3\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-2$$

روش دوم:

ایده: بنابراین عناصر را به دو دسته تقسیم می‌کنیم و در هر دسته بزرگترین و کوچکترین عنصر را با $\frac{n}{2}-1$ مقایسه پیدا می‌کنیم.

a1... an/2 an/2+1 ... an

برای هر قسمت یک کوچکترین و یک بزرگترین عنصر بدست می‌آید, در بین این 4 عنصر با دو مقایسه کوچکترین و بزرگترین عنصر مشخص می‌شود. (به عنوان تمرین جواب این روش را بدست آورید, از طریق حدس و استقرا)

$$T(n)=T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)+T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+2$$

Max and Min

برای پیدا کردن کوچکترین (بزرگترین) عدد در یک آرایه به n-1 مقایسه احتیاج است.

اما چنانچه در نظر داشته باشیم که کوچکترین و بزرگترین عنصر را با هم محاسبه کنیم به چه تعداد مقایسه احتیاج خواهیم داشت؟

a1	**a2**	**a3**	**a4**						**an**

نگاهی دیگر به صورت بازگشتی:

(a1,...an-2)-(an-1,an)

$$T(n) = T(n-2) + 1 + 2$$

$$T(n) = T(n-2) + 3, \qquad T(1) = 0, T(2) = 1, T(3) = 3$$

$$=> T(n) = 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2$$

کمتر از $2 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil 3$ نمی‌توان کوچکترین و بزرگترین عنصر را محاسبه کرد.

Kth-smallest

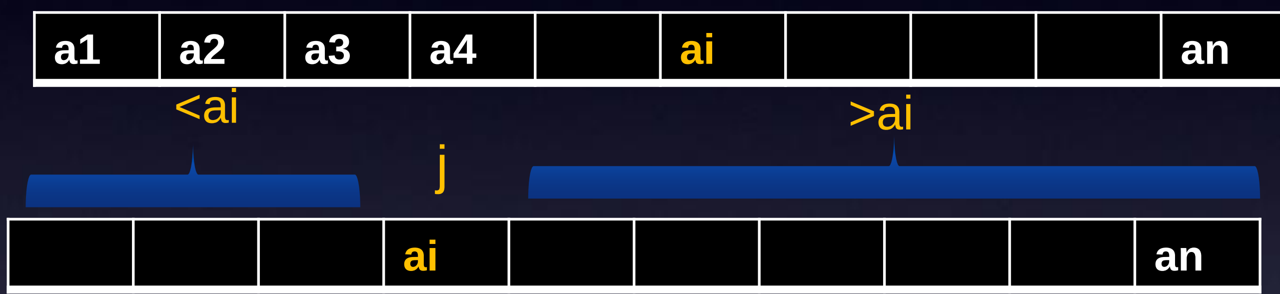
Kامین کوچکترین عنصر

Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش تصادفی

Random(1,n) یک عدد تصادفی به صورت uniform بین 1 و n به ما می‌دهد. آن عدد را i بنامید. اندیس iام آرایه را در نظر گرفته و همه‌ی عناصر کوچکتر از ai را به قبل از ai و عناصر بزرگتر از ai را به بعد از ai منتقل می‌کنیم. (می‌توانید آرایه کمکی در نظر بگیرید. اما با آرایه اولیه و یک حلقه for هم این کار ممکن است.)



حال برای پیدا کردن k امین کوچکترین عدد اگر k>j باشد کافیست به طور بازگشتی k-jامین عدد را در سمت راست عنصر jام جستجو کنیم و گرنه kامین عنصر را در قسمت چپ آرایه جستجو می‌کنیم و به عناصر بعد از j کاری نداریم.

اگر با خوش‌شانسی عدد انتخاب شده در تابع تصادفی هر دفعه عدد وسط باشد:

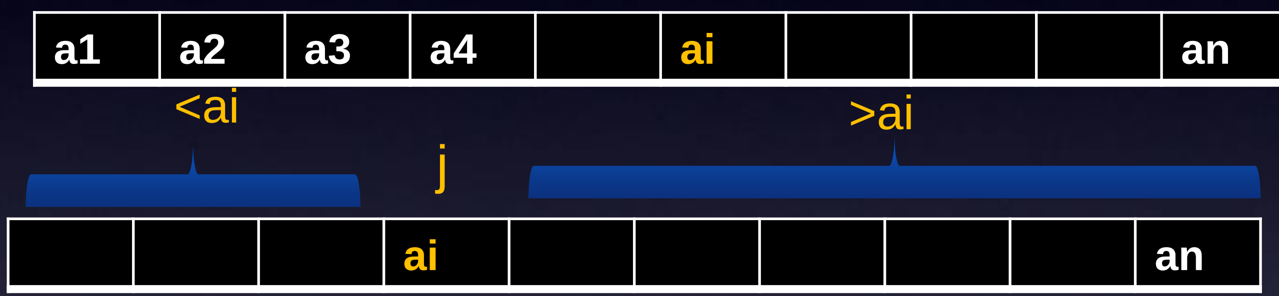
$$T(n) = O(n) + T\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots = O(n)$$

Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش تصادفی

Random(1,n) یک عدد تصادفی به صورت uniform بین 1 و n به ما می‌دهد. آن عدد را i بنامید. اندیس iام آرایه را در نظر گرفته و همه‌ی عناصر کوچکتر از ai را به قبل از ai و عناصر بزرگتر از ai را به بعد از ai منتقل می‌کنیم. (می‌توانید آرایه کمکی در نظر بگیرید. اما با آرایه اولیه و یک حلقه for هم این کار ممکن است.)



حال برای پیدا کردن k امین کوچکترین عدد اگر k>j باشد کافیست به طور بازگشتی k-jامین عدد را در سمت راست عنصر jام جستجو کنیم و گرنه kامین عنصر را در قسمت چپ آرایه جستجو می‌کنیم و به عناصر بعد از j کاری نداریم.

عددی که تابع تصادفی می‌دهد با احتمال 1/n عنصر اول است, اگر عنصر اول باشد رابطه بازگشتی برابر می‌شود با:

$$\max\big(T(1), T(n-1)\big) + O(n)$$

عددی که تابع تصادفی می‌دهد با احتمال 1/n عنصر دوم است, اگر عنصر دوم باشد رابطه بازگشتی برابر می‌شود با:

$$\max\big(T(2), T(n-2)\big) + O(n)$$

عددی که تابع تصادفی می‌دهد با احتمال 1/n عنصر kام است, اگر عنصر kام باشد رابطه بازگشتی برابر می‌شود با:

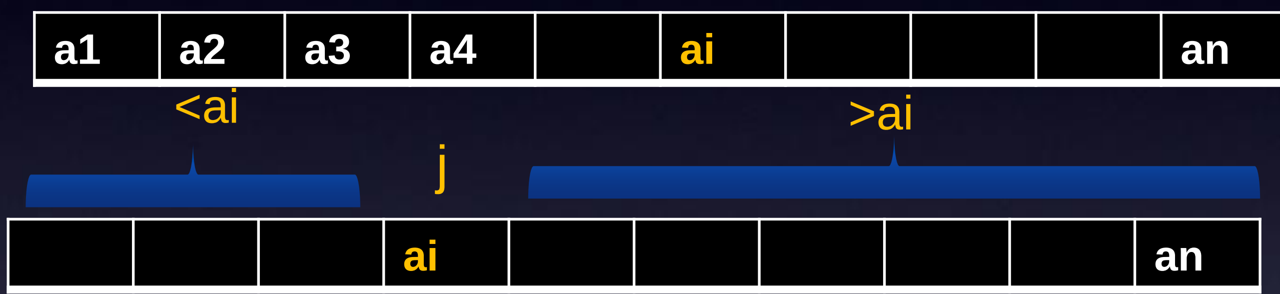
$$\max\big(T(k), T(n-k)\big) + O(n)$$

Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا کردن kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش تصادفی

Random(1,n) یک عدد تصادفی به صورت uniform بین 1 و n به ما می‌دهد. آن عدد را i بنامید. اندیس iام آرایه را در نظر گرفته و همه‌ی عناصر کوچکتر از ai را به قبل از ai و عناصر بزرگتر از ai را به بعد از ai منتقل می‌کنیم. (می‌توانید آرایه کمکی در نظر بگیرید. اما با آرایه اولیه و یک حلقه for هم این کار ممکن است.)



حال برای پیدا کردن k امین کوچکترین عدد اگر k>j باشد کافیست به طور بازگشتی k-jامین عدد را در سمت راست عنصر jام جستجو کنیم و گرنه kامین عنصر را در قسمت چپ آرایه جستجو می‌کنیم و به عناصر بعد از j کاری نداریم.

عددی که تابع تصادفی می‌دهد با احتمال 1/n عنصر اول است, اگر عنصر اول باشد رابطه بازگشتی برابر می‌شود با: $\max\big(T(1), T(n-1)\big) + O(n)$

عددی که تابع تصادفی می‌دهد با احتمال 1/n عنصر kام است, اگر عنصر kام باشد رابطه بازگشتی برابر می‌شود با: $\max\big(T(k), T(n-k)\big) + O(n)$

$$\mathrm{E}\big(T(n)\big) = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum \max\big(T(k), T(n-k)\big) + O(n)$$

محاسبه میانگین

با حدس و استقرا می‌توان نشان داد که حاصل از O(n) است.

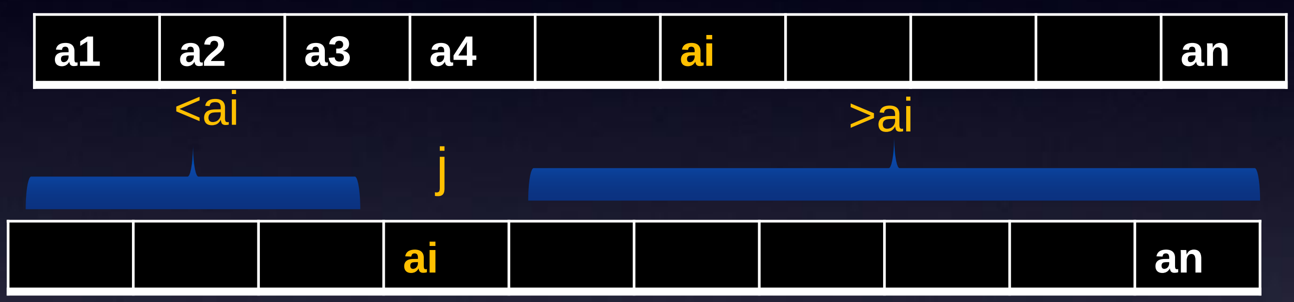
چرا از تابع تصادفی استفاده کردیم (ممکن سات با روال ثابت ورودی بدی داشته باشیم) و چه حالت‌هایی برای انتخاب تصادفی داریم؟!

Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش تصادفی

Random(1,n) یک عدد تصادفی به صورت uniform بین 1 و n به ما می‌دهد. آن عدد را i بنامید. اندیس iام آرایه را در نظر گرفته و همه‌ی عناصر کوچکتر از ai را به قبل از ai و عناصر بزرگتر از ai را به بعد از ai منتقل می‌کنیم. (می‌توانید آرایه کمکی در نظر بگیرید. اما با آرایه اولیه و یک حلقه for هم این کار ممکن است.)



حال برای پیدا کردن k امین کوچکترین عدد اگر k>j باشد کافیست به طور بازگشتی k-jامین عدد را در سمت راست عنصر jام جستجو کنیم و گرنه kامین عنصر را در قسمت چپ آرایه جستجو می‌کنیم و به عناصر بعد از j کاری نداریم.

با حدس و استقرا می‌توان نشان داد که حاصل از O(n) است.

$$\mathrm{E}(T(n)) = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum \max(T(k), T(n-k)) + O(n)$$

میانگین

❖ اگر میانه را در زمان خطی محاسبه کنیم kامین عنصر را هم می‌توان با همین روش فوق در زما نخطی بدست آورد.

اگر بتوان میانه را در زمان خطی بدست آورد. در زمان خطی اعداد را به دو طرف میانه می‌بریم و مسئله نصف می‌شود.

$$T(n) = O(n) + O(n) + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

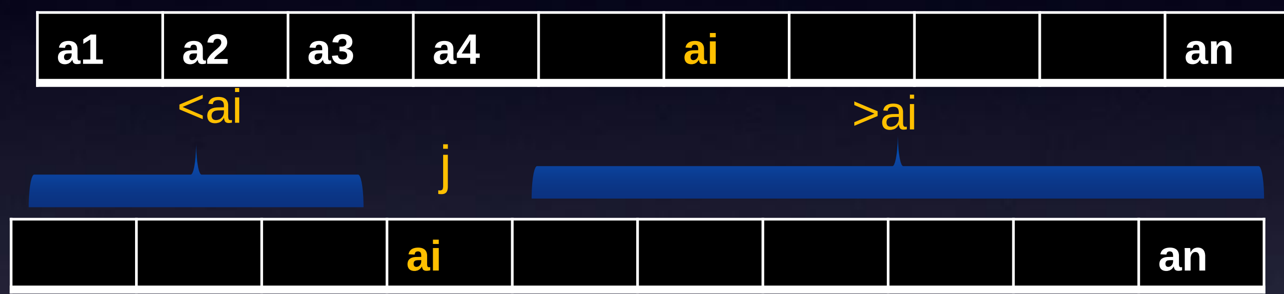
محاسبه kامین کوچکترین عنصر

Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش تصادفی

Random(1,n) یک عدد تصادفی به صورت uniform بین 1 و n به ما می‌دهد. آن عدد را i بنامید. اندیس iام آرایه را در نظر گرفته و همه‌ی عناصر کوچکتر از ai را به قبل از ai و عناصر بزرگتر از ai را به بعد از ai منتقل می‌کنیم. (می‌توانید آرایه کمکی در نظر بگیرید. اما با آرایه اولیه و یک حلقه for هم این کار ممکن است.)



❖ اگر میانه را در زمان خطی محاسبه کنیم kامین عنصر را هم می‌توان با همین روش فوق در زمان خطی بدست آورد.

اگر بتوان میانه را در زمان خطی بدست آورد. در زمان خطی اعداد را به دو طرف میانه می‌بریم و مسئله نصف می‌شود.

$T(n) = O(n) + O(n) + T(\frac{n}{2})$ محاسبه kامین کوچکترین عنصر

حال فرض کنید بجای میانه عددی با مرتبه بین n/3 و 2n/3 در زمان خطی انتخاب کنیم. حال رابطه بازگشتی فوق را در نظر بگیرید:

$$T(n) = O(n) + O(n) + T\left(\frac{2n}{3}\right) \Rightarrow n + \frac{2}{3}n + \frac{2^2}{3}\ n + \ \dots \Rightarrow O(n)$$

پس نیاز نیست که دنبال خود میانه باشیم. $\frac{(c-1)n}{c}$ (که c یک عدد ثابت است.)

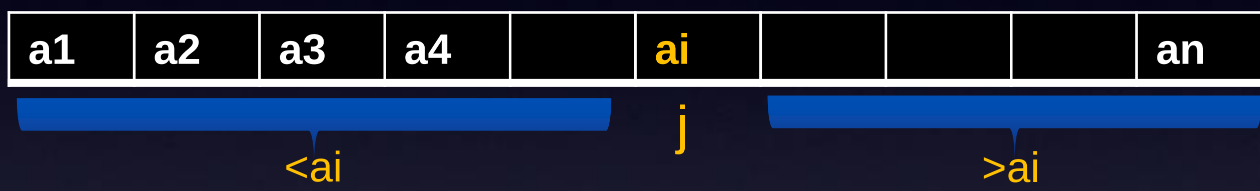
Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش قطعی

دنبال عنصری هستیم که دارای مرتبه‌ی مثلا از n/4 باشد تا 3n/4. فقط انتخاب این بازه تاثیر می‌گذارد روی ضریب ثابت n اما به هر حال تا زمانی که یک عدد ثابت باشد در پیچیدگی تاثیری ندارد. و پیچیدگی خطی است (O(n)).

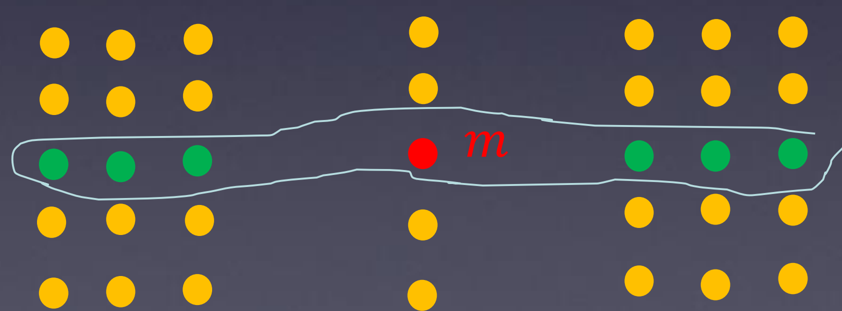
$\frac{(c-1)n}{c}$ (که c یک عدد ثابت است.)



می‌توان عدد را بهتر در نظر گرفت مثلا 1/5و 4n/5

ایده : اعداد رابه دسته‌های 5تایی تقسیم کن و 5تا 5تا مرتب کن و عنصر میانه را پیدا کن. از a1 تا a5 و بعد از a6 تا a10 و... برای یک پنج‌تایی مسلما هزینه‌ای ندارد و هزینه یک مقدار ثابت است. عنصر میانه همه‌ی میانه‌های دسته‌های 5تایی فوق را بدست بیاور. اسم این عنصر را m می‌گذاریم. همه‌ی میانه‌ها تقریبا 1/5هستند که m از 1/10 آنها کوچکتر است و از 1/10 آنها بزرگتر است. اگر میانه‌ی یک دسته 5تایی را در نظر بگیرید 2 عنصر در آن دسته از آن میانه کوچکتر هستند. پس در کل 3/10 عناصر آرایه از m بزرگتر هستند و همینطور 3/10 عناصر از m کوچکتر هستند. پس در واقع مرتبه‌یm در بازه‌ی زیر است:

$$\frac{3n}{10} \leq m \leq \frac{7n}{10}$$



Kامین کوچکترین عنصر

برای پیدا kامین کوچکترین عنصر یا عددی با مرتبه k دو روش تصادفی و قطعی ارائه می‌دهیم:

روش اول: روش قطعی

دنبال عنصری هستیم که دارای مرتبه‌ی مثلا از n/4 باشد تا 3n/4. فقط انتخاب این بازه تاثیر می‌گذارد روی ضریب ثابت n اما به هر حال تا زمانی که یک عدد ثابت باشد در پیچیدگی تاثیری ندارد. و پیچیدگی خطی است (O(n)).

$\frac{(c-1)n}{c}$ (که c یک عدد ثابت است.)

ایده : اعداد رابه دسته‌های 5تایی تقسیم کن و 5تا 5تا مرتب کن و عنصر میانه را پیدا کن. از a1 تا a5 و بعد از a6 تا a10 و... برای یک پنج‌تایی مسلما هزینه‌ای ندارد و هزینه یک مقدار ثابت است. عنصر میانه همه‌ی میانه‌های دسته‌های 5تایی فوق را بدست بیاور. اسم این عنصر را m می‌گذاریم. همه‌ی میانه‌ها تقریبا 1/5 هستند که m از 1/10 آنها کوچکتر است و از 1/10 آنها بزرگتر است. اگر میانه‌ی یک دسته 5تایی را در نظر بگیرید 2 عنصر در آن دسته از آن میانه کوچکتر هستند. پس در کل 3/10 عناصر آرایه از m بزرگتر هستند و همینطور 3/10 عناصر از m کوچکتر هستند. پس در واقع مرتبه‌ی m در بازه‌ی زیر است:

$$\frac{3n}{10} \le m \le \frac{7n}{10}$$

الگوریتم:

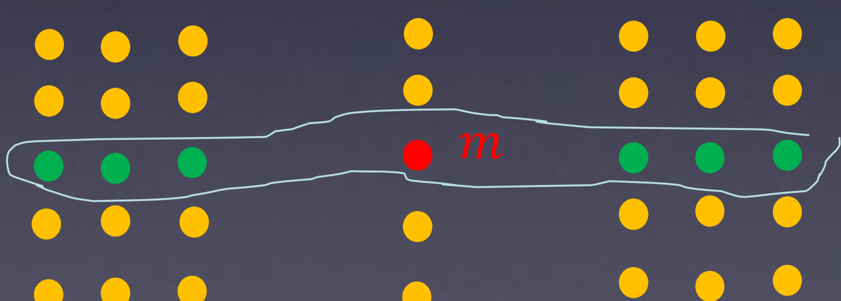
1- افزار به دسته‌های پنج‌تایی و مرتب کردن آنها => O(n)

2- عناصر میانه‌ی دسته‌ها را داخل یک آرایه جدید می‌ریزیم. و میانه‌ی آنها را محاسبه می‌کنیم. => *O(n)+O(n)=O(n)*

3- محاسبه m (میانه میانه‌ها) به طور بازگشتی (بین عناصر میانه) T(n/5)

4- تقسیم اعداد به اعداد کوچکتر از m و اعداد بزرگتر از m.

5- محاسبه به طور بازگشتی روی قسمت 3n/10 یا 7n/10 (که 7n/10 حالت بدتری است).



$$T(n) = O(n) + T\left(\frac{n}{5}\right) + O(n) + T\left(\frac{7n}{10}\right)$$

Discussion

- ؟