

به نام خدا

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها (۴۰۲۵۴)

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: دکتر مهدی صفرنژاد

تمرین اول

انتشار: ۱۷ اسفند ۱۴۰۰

مقدمه و تحلیل الگوریتم‌ها

سؤالات را با دقت بخوانید و روی همه آن‌ها وقت بگذارید. تمرین‌های تئوری تحویل گرفته نمی‌شوند اما از آن‌ها سؤالات کوییز مشخص می‌شود. بنابراین روی سؤالات به خوبی فکر کنید و در کلاس‌های حل تمرین مربوطه شرکت کنید.

سؤال ۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را با دلیل بیان کنید (همه توابع مثبت هستند).

همواره داریم:

آ.

$$f(n) + o(f(n)) = \theta(f(n))$$

ب.

$$f(n) = \theta(f(n/2))$$

پ.

$$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$$

ت.

$$\theta(f(n) + g(n)) = \max(f(n), g(n))$$

ث.

$$\nexists f(n), g(n); f(n) + g(n) \neq O(f(n)), f(n) + g(n) \neq O(g(n))$$

سؤال ۲. روابط بازگشتی زیر را از روش دلخواه حل کنید و جواب را بر حسب θ به دست آورید

آ.

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + (\log n)^2$$

ب.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + n$$

پ.

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

ت.

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{27}\right) + \sqrt[3]{n}$$

ث.

$$T(n) = \frac{2}{n}(T(0) + T(1) + \dots + T(n-1)) + c, T(0) = 0$$

ج.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

چ.

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + cn \quad c > 0, a \geq 1$$

سؤال ۳. زمان اجرای الگوریتم‌های زیر را در بدترین حالت بصورت θ به دست آورید.

ا. j=0

i=0

while i<n :

i+=j

j+=1

ب. i=3

if n==2 :

return True

if n==1 :

return False

if n%2==0:

return False

while $i \wedge 2 \leq n$:

if n%i == 0:

return False

else:

i+=2

return True

پ. i=0

while $i \geq 1$:

$j=i$

 while $j \leq n$:

$j = 2 * j$

$i=i//2$

ت. $c=0$

for i in range(1,n+1):

 for j in range(1,n):

$c += 1$

ث. $i=1$

while $i \leq n$:

$j=1$

 while $j \wedge 2 \leq i$:

$j += 1$

سؤال ۴. می‌خواهیم در رشته‌ای از حروف کوچک انگلیسی، بلندترین زیررشته‌ای که در آن هیچ دو حرفی تکرار نشده است را پیدا کنیم. شبه کدی بنویسید که این کار را در $O(n^2)$ انجام دهد. سپس شبه کدی بنویسید که این کار را در $O(n)$ انجام دهد.

سؤال ۵. آیا می‌توان گفت که ثابت c وجود دارد به صورتی که $[\log n]! = O(n^c)$

اکنون برای $[\log \log n]!$ چطور؟

سؤال ۶. آرایه A شامل n عدد داده شده است، در این آرایه، همه عناصر به غیر از ۵ عنصر در جای درست خود در حالت مرتب شده هستند. در واقع اگر A را مرتب کنیم، تنها در ۵ خانه با A قبل از مرتب شدن، تفاوت دارد و سایر عناصر در جای قبلی خود قرار می‌گیرند. الگوریتمی ارائه دهید که این آرایه را مرتب می‌کند. پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را تا حد ممکن بهینه کنید پس از هر بار بررسی!

سؤال ۷. آرایه n عنصری A را در نظر بگیرید که تمام عناصر آن اعدادی طبیعی و متمایز و به ترتیب صعودی هستند. الگوریتمی بهتر از جستجوی خطی ارائه دهید که تشخیص دهد آیا اندیسی مانند i وجود دارد که $A[i] = i$ باشد یا خیر؟

سؤال ۸. داده ساختاری طراحی کنید که بتواند اعمال $Push$ و Pop و $FindMin$ (یافتن و برگرداندن کوچکترین عنصر) را در $O(1)$ انجام دهد. سپس با فرض اینکه می‌دانیم نمی‌توان یک آرایه را در حالت کلی در بهتر از $O(n \log n)$ مرتب کرد، ثابت کنید اگر این داده ساختار بخواهد عمل $DeleteMin$ را هم پشتیبانی کند، نمی‌تواند آن را هم در مرتبه $O(1)$ انجام دهد.

سؤال ۹. داده ساختاری طراحی کنید که اعمال زیر را به صورت بهینه انجام دهد:

- آ. یک عدد را به انتهای لیست اضافه کند.
- ب. یک عدد را از انتهای لیست کم کند.
- پ. k عنصر انتهایی لیست را قرینه کند که k برای داده ساختار همیشه یک عدد ثابت است (در عمل نتیجه مثل این است که k عنصر را به ترتیب بخواند و روی هم بریزد، سپس آن‌ها را وارونه کند و سپس به لیست برگرداند).
- ت. عناصر را به ترتیبی که در لیست قرار دارند چاپ کند.

سؤال ۱۰. رشته ای به طول n از پرانتز باز و بسته داده شده است و می‌خواهیم بدانیم آیا رشته پرانتزها معتبر است یا نه؟

مثال ۱:

ورودی: $((()())$

خروجی: بله

مثال ۲:

ورودی: $(((((())$

خروجی: خیر

موفق باشید