به نام خدا

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها (۴۰۲۵۴)
دانشگاه صنعتی شریف
مدرس: دکتر مهدی صفرنژاد

تمرین پنجم
انتشار: ۹ خرداد ۱۴۰۱

الگوریتم‌های گراف

سؤال ۱. برای مسئله جستجوی مینیمم بازه‌ای با الگوریتم با پیش‌پردازش خطی و زمان پاسخگویی $O(1)$ نشان دهید چگونه پیدا کردن پاسخ پایین‌ترین جد مشترک در درخت کارتزین می‌تواند به پاسخ مینیمم بازه‌ای منجر شود. آیا برعکس این موضوع نیز برقربر است؟

سؤال ۲. تن‌تن، خبرنگار جوان، به یک کشور پر از تبهکار سفر کرده است. در این کشور، شهرها از طریق جاده‌هایی با مسافت مشخص به یکدیگر متصل هستند و زمانی که رفتن از یک شهر به شهر دیگر طول می‌کشد برابر با مسافت جاده‌ی بین دو شهر است. تن‌تن که در شهر s قرار دارد، مدارکی بر علیه تبهکاران این کشور پیدا کرده است و می‌خواهد آنها را به دست دادستانی کل در شهر g برساند.

در این کشور T تبهکار در T شهر مختلف قرار دارند و می‌خواهند پیش از رسیدن تن‌تن به دادستانی او را بربایند. همچنین این تبهکاران در C تا از شهرها خودروهایی دارند که می‌تواند مسافت بین دو شهر را در نصف زمان عادی طی کند و اگر تبهکاران به این شهرها برسند می‌توانند برای ادامه‌ی مسیر از این خودروها استفاده کنند. در صورتی که در زمان رسیدن تن‌تن به یک شهر، حداقل یکی از تبهکاران پیش از او به آن شهر رسیده باشد، تن‌تن ربوده می‌شود.

اگر تن‌تن می‌تواند مستقل از مسیری که توسط تبهکاران طی می‌شود از دست آنها فرار کند و در زمان متناهی به شهر g برسد، کمترین مدت زمانی که برای این کار نیاز دارد و مسیری که باید طی کند را پیدا کنید و در غیر این صورت بگویید چنین مسیری وجود ندارد و تن‌تن ربوده می‌شود.

سؤال ۳. مربع یک گراف جهتدار $G=(V,E)$ گراف $G^۲=(V,E^۲)$ است؛ به گونه‌ای که $(u,v)\in E^۲$ اگر و تنها اگر G مسیری به طول حداکثر ۲ بین u و v را شامل شود. الگوریتمی بیهنه برای محاسبه $G^۲$ از G هم برای ماتریس مجاورت و هم برای لیست مجاورت G ارائه دهید و زمان اجرای آن را تحلیل کنید.

سؤال ۴. گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. مجموعه SCC را مجموعه تمام مولفه‌های قویا همبند G تعریف می‌کنیم. حا گراف ساده‌ای را درنظر بگیرید که مجموعه رئوسش SCC باشد و بین دو رأس آن یک یال جهت‌دار وجود دارد،اگر و تنها اگر میان دو رأس موجود در این دو مولفه قویا همبند در گراف G یالی با جهت یکسان وجود داشته باشد. این گراف را گراف مولفه‌ای گراف G می‌نامیم.

الف) الگورتمی با پیچیدگی زمانی $O(|V|+|E|)$ ارائه دهید که گراف مولفه‌ای G محاسبه کند.

ب) گراف $G'=(V,E')$ را درنظر بگیرید که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

— مولفه‌های همبندی یکسانی با G دارد.

— گراف مولفه‌ای یکسانی با G دارد.

—E' تا حد امکان کوچک باشد.(مینیمال باشد.)

الگوریتمی بهینه ارائه دهید که G' را محاسبه کند.

سؤال ۵. در یک گراف جهت‌دار وزن‌دار $G = (V, E)$ برون‌مرکزی وزن‌دار $\epsilon(u)$ رأس $u \in V$ کوتاه‌ترین فاصله وزن‌دار تا دورترین رأس نسبت به آن است. به عبارتی $\epsilon(u) = \max\{\delta(u, v) | v \in V\}$. شعاع وزن‌دار $R(G)$ گراف وزن‌دار G، کوچک‌ترین برون‌مرکزی وزن‌دار تمام رأس‌های آن است. برای گراف G که دور جهت‌دار با وزن منفی ندارد،الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(|V|^۳)$ ارائه دهید که شعاع وزن‌دار آن را محاسبه کند.

سؤال ۶. کیمیا به همراه خود m کوئری دارد که هر کدام از آنها یک مقدار $a_i \in \mathbb{N}$ دارند. او از سجاد می‌خواهد که یک آرایه‌ی nتایی تهیه کند و تا جایی که می‌تواند، کوئریهای کیمیا را در آرایه‌اش جا دهد. کیمیا دو شرط هم برای جا دادن کوئریها در آرایه دارد. اول این که در هر خانه‌ی آرایه‌ی سجاد، حداکثر یک کوئری قرار بگیرد، و دوم آن که اگر کوئری i در خانه‌ی jام آرایه‌ی سجاد قرار گرفته، حتما $a_i < j$ باشد. به سجاد کمک کنید تا با الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n + m \log n)$ بیشترین تعداد کوئری را در آرایه‌اش جا دهد.

سؤال ۷. گراف جهت‌دار وزن‌دار $G = (V, E)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید این گراف همبندباشد. رأس مادر را رأسی می‌نامیم که از آن به تمام رأس‌های دیگر گراف راه باشد. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که در صورت وجود رأس مادر، یکی از آن‌ها را بیابد.

سؤال ۸. نشان دهید که با DFS می‌توان در گراف غیرجهت‌دار G تعداد مولفه‌های همبندی گراف یا k را به دست آورد و به هر رأس گراف G مانند v، عدد $v.cc$ را نسبت داد، به‌طوری‌که:

$$v.cc \in \mathbb{N}, ۱ \leq v.cc \leq k$$

$$v.cc = u.cc \iff u\ and\ v\ are\ in\ the\ same\ connected\ component$$

سؤال ۹. فرض کنید یال (u, v) کم‌ترین وزن را بین تمام یال‌های گراف وزن‌دار غیرجهت‌دار G دارد. ثابت که (u, v) در MST گراف G حضور دارد.

سؤال ۱۰. در گراف وزن‌دار جهت‌دار $G = (V, E)$ که دوری با وزن منفی ندارد، کوتاه‌ترین مسیر هر رأس $v \in V$ از رأس $source$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنید ماکسیمم طول این مسیرها را برابر m قرار می‌دهیم. الگوریتم بلمن‌ـ فورد را طوری تغییر دهید که تنها $m + ۱$بار iteration داشته باشد، حتی اگر مقدار m در ابتدا برای ما مشخص نباشد.

سؤال ۱۱. فرض کنید $G = (V, E, w)$ گرافی وزن‌دار و جهت‌دار است. فرض کنید $c : V \longrightarrow \{r, g, b\}$ یک تابع است که به هر رأس مانند v، رنگ قرمز، سبز یا آبی را نسبت می‌دهد، اگر c یک رنگ باشد، V_c و E_c را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- V_c مجموعه تمام رأس‌هایی است که رنگ c را دارند. یعنی $V_c = \{v \in V \mid c(v) = c\}$.
- E_c مجموعه یال‌هایی است که از رأس‌های V_c خارج می‌شوند. یعنی $E_c = \{(u, v) \in E \mid u \in V_c\}$.

فرض کنید گراف G و رنگ‌آمیزی c از خصوصیات زیر پیروی می‌کنند:

۱. تمام یال‌های گراف یا بین دو رأس هم‌رنگ‌اند یا رأسی قرمز را به رأسی سبز وصل می‌کنند، یا رأسی سبز را به رأسی آبی متصل می‌کنند.

۲. $|V_r| = |E_r| = O\left(|V|\right)$ و وزن همه یال‌های E_r برابر عدد طبیعی w_r است.

۳. $|V_g| = |E_g| = O\left(|V|^{۰/۹۹}\right)$ و وزن همه یال‌های E_g اعداد صحیح و نامنفی است.

۴. $|V_b| = |E_b| = O\left(\sqrt{|V|}\right)$ و وزن همه یال‌های E_b اعداد صحیح مثبت یا منفی است.

با داشتن گراف G، رنگ‌آمیزی c، رأس $s \in V_r$ و رأس $t \in V_b$، الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O\left(|V|\right)$ ارائه دهید که طول کوتاه‌ترین مسیر s به t را محاسبه کند.

سؤال ۱۲. قطر درخت $T = (V, E)$ را به‌صورت $max_{u,v \in V} \delta\left(u, v\right)$ تعریف می‌کنیم؛ یعنی ماکسیمم فاصله بین رأس‌های T. الگوریتمی بهینه، برای محاسبه قطر درخت T ارائه دهید و پیچیدگی زمانی آن را تحلیل کنید.

موفق باشید