

به نام خدا

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها (۴۰۲۵۴)

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: دکتر مهدی صفرنژاد

تمرین دوم

انتشار: ۱۶ فروردین ۱۴۰۱

مرتب‌سازی و داده‌ساختارهای پایه

سؤال ۱. نشان دهید $\ln k = \Theta(n)$ نتیجه می‌دهد که $k = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

سؤال ۲. آرایه $A[1 \dots n]$ و عدد طبیعی k به عنوان ورودی داده شده‌اند. الگوریتمی ارائه دهید که در $O(n)$ مینیمم هر k عدد متوالی در آرایه را بیابد. (خروجی این الگوریتم باید $n - k + 1$ عدد باشد).

سؤال ۳. نشان دهید $\ln k = \Theta(n)$ نتیجه می‌دهد که $k = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

سؤال ۴. برای استفاده از لیست پیوندی تک‌سویه، انتظار داریم در آن دور وجود نداشته باشد. اما ممکن است یک لیست پیوندی درست ایجاد نشده باشد و در آن دور وجود داشته باشد. می‌خواهیم پیش از شروع کار با یک لیست پیوندی، تشخیص دهیم که در آن دور وجود دارد یا خیر. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ و پیچیدگی حافظه $O(1)$ ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

سؤال ۵. فرض کنید یک آرایه از اعداد طبیعی در اختیار داریم که هر عنصر حداکثر k خانه با جایگاه درستش در نسخه مرتب شده این آرایه دارد.

الف) نشان دهید الگوریتم مرتب‌سازی درجی این آرایه را در زمان $O(nk)$ مرتب می‌کند.

ب) نشان دهید مرتب کردن این آرایه با هر روشی به $\Omega(n \lg k)$ مقایسه نیاز دارد.

ج) الگوریتمی از مرتبه زمانی $\Theta(n \lg k)$ ارائه دهید که این آرایه را مرتب کند.

سؤال ۶. می‌خواهیم یک آرایه پویا^۱ با استفاده از آرایه‌های عادی پیاده‌سازی کنیم.

برای این کار ابتدا یک آرایه با اندازه ۱ در نظر می‌گیریم که چیزی در آن نیست. بعد برای هر عملیات درج اگر آرایه فعلی جا داشت عنصر جدید را به انتهای آن اضافه می‌کنیم و اگر نداشت یک آرایه جدید با اندازه ۲ برابر آرایه قبلی می‌سازیم. تمام عناصر آرایه قبلی را به این آرایه منتقل می‌کنیم و عنصر جدید را به انتهای آن اضافه می‌کنیم. هزینه انتقال n عضو از آرایه‌ای به آرایه دیگر $O(n)$ است.

الف) فرض کنید برای عملیات حذف، عنصر آخر را از آرایه فعلی حذف می‌کنیم و بعد اگر تعداد عناصر باقیمانده کمتر مساوی نصف اندازه آرایه فعلی بود، یک آرایه با اندازه نصف آرایه فعلی می‌سازیم و همه عناصر باقیمانده را به آن منتقل می‌کنیم. نشان دهید هزینه سرشکن اعمال $O(1)$ نخواهد بود.

ب) حالا فرض کنید به جای اینکه وقتی تعداد عناصر باقیمانده به نصف اندازه آرایه رسید آرایه را نصف کنیم، وقتی این تعداد به $\frac{1}{4}$ رسید این کار را انجام دهیم. نشان دهید در این صورت هزینه سرشکن برای هر دنباله از اعمال درج و حذف $O(1)$ خواهد بود.

سؤال ۷. فرض کنید k لیست مرتب داریم که هر کدام دارای n عضو هستند. هدف این است که این لیست‌ها را به یک لیست مرتب ادغام کنیم.

الف) اگر ابتدا لیست اول و دوم را ادغام کنیم و سپس نتیجه حاصل را لیست سوم ادغام کنیم و الی آخر، آنگاه پیچیدگی زمان اجرای این الگوریتم برحسب k و n را بدست بیاورید.

ب) با استفاده از روش تقسیم و غلبه یک الگوریتم بهتر ارائه دهید و رابطه بازگشتی آن را نوشته و حل کنید.

سؤال ۸. الف) داده‌ساختار پشته را به گونه‌ای پیاده‌سازی کنید که هر کدام از اعمال GETMIN، POP، PUSH و GETMAX را در هر لحظه در $O(1)$ انجام دهد. تابع GETMIN عضو کمینه پشته و تابع GETMAX عضو بیشینه پشته را برمی‌گرداند.

ب) داده ساختار صف را طوری پیاده‌سازی کنید که هر یک از اعمال GETMIN، DEQUEUE، ENQUEUE و GETMAX را به طور سرشکن در $O(1)$ انجام دهد. تابع GETMIN عضو کمینه صف و تابع GETMAX عضو بیشینه صف را برمی‌گرداند.

سؤال ۹. یک پشته را به روش بازگشتی و بدون استفاده از داده‌ساختار دیگری مرتب کنید.

سؤال ۱۰. یک آرایه با n عضو داریم که اعضای آن k مقدار متفاوت دارند. الگوریتمی از $\Theta(k + n)$ برای مرتب‌سازی این آرایه ارائه دهید.

سؤال ۱۱. یک لیست پیوندی داریم. برای مرتب‌سازی این لیست از مرتب‌سازی سریع استفاده می‌کنید یا از مرتب‌سازی ادغامی؟ دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.

موفق باشید

^۱آرایه‌ای با قابلیت تغییر اندازه