# ICPC Problem Set

NTRLover

2023.12.11

# Chapter 1

# 解题报告

| Date | Problem ID | Title | Difficulty | Type | Person |
|---|---|---|---|---|---|
| 2022-12-20 | CF1763E | Node Pairs | 2200 | 图论、最优性构造 | zmy |
| 2023-12-11 | CF1904E | Tree Queries | unkown | 图论, 树论 | shaosy |

## 1.1 Codeforces

**[CF1763E] Node Pairs** [*zmy*]

**题目描述** 要求构造一个有向图，恰好有$p(1 \leq p \leq 2 \cdot 10^5)$ 个点对互相可达。在这个前提下，要求使用的顶点数尽可能少。顶点数相同时，要求单向可达的点对尽可能多

**题目分析** 每个有向图都可以被缩点成一个DAG，对于每个强连通分量内部肯定是两两可达的，且夸强连通分量的点对一定不是双向可达的。因此我们可以想到用DP 来计算需要的最小顶点数。再次之上，为了使得单向可达的点对尽可能多，我们的DAG 一定是一条链的形状，因此我们可以同时dp 单向可达的点对个数。

**[CF1904E] Tree Queries** [*shaosy*]

**题目描述** 给定一棵树, 多组询问. 每组询问指定一个询问点和一些删除点, 问将删除点删除后树中询问点可达的最远距离为多少

**题目分析** 离线处理. 首先, 询问某一点在书中可达最远距离等价于将该点视为树的根并询问树的深度. 考虑如何换根时更新树的深度. 考虑dfs序. 通过维护每个点的in和out时刻, 配合线段树, 可以用换根dp类似的思想来动态维护每个点当前的深度. 根通过边u-v从u换到v等价于, 给v的子树深度区间减1, 给其他节点深度加1. 然后讨论删除点. 删除点如果在原树中不是新的根节点(x) 的父节点,则可以视作将删除点的子树的深度区间减去正无穷. 而如果是, 则可以视作将除了删除点与点x相连的子树之外所有点的深度区间减去正无穷. 在这种更新下, 当前树的深度就是所有点深度的最大值.

# Chapter 2

# 解题方法

## 2.1 题目类型

### 2.1.1 最优解构造

### 2.1.2 存在解构造

### 2.1.3 k-th 解构造

## 2.2 通用构造思想

### 2.2.1 抽屉原理

### 2.2.2 随机构造

### 2.2.3 递归构造

### 2.2.4 分类构造

## 2.3 经典构造方法

### 2.3.1 图构造

1. 构造若干个强连通分量，这些强连通分量之间形成一条链
2. 构造环
3. 利用二分图匹配或者欧拉回路进行无向图边定向
4. 利用dfs 树，进行边匹配

**[CF1763E] Node Pairs** [$zmy$]

**题目描述** 要求构造一个有向图，恰好有$p(1 \leq p \leq 2 \cdot 10^5)$ 个点对互相可达。在这个前提下，要求使用的顶点数尽可能少。顶点数相同时，要求单向可达的点对尽可能多

**题目分析** 每个有向图都可以被缩点成一个DAG，对于每个强连通分量内部肯定是两两可达的，且夸强连通分量的点对一定不是双向可达的。因此我们可以想到用DP 来计算需要的最小顶点数。再次之上，为了使得单向可达的点对尽可能多，我们的DAG 一定是一条链的形状，因此我们可以同时dp 单向可达的点对个数。

**[ARC161D] Everywhere is Sparser than Whole (Construction)** [$zmy$]

**题目描述** 给定节点数$N$ 和图的密度$D$。定义密度为整个图的边数除以点数的结果。现在要求构造一个图，使得整个图的密度为$D$，且不存在一个子集的密度大于或者等于$D$

**题目分析** 我们考虑建立几个圈，当$D = 1$ 时，对于每个点$i$ 我们连一条$(i, i + 1)$。当$D = 2$ 时，在此基础上，对于每个点$i$，我们多连一条$(i, i + 2)$，以此类推。

**[ARC161F] Everywhere is Sparser than Whole (Judge)** [$zmy$]

**题目描述** 给定一个图保证整个图的密度恰好为$D$。现在问你能否找到一个真子集的引导子图，使得其密度大于等于$D$。

**题目分析** 假设这个子集为$S$，那么其补集$S'$ 连接的边的数量应该小于$D|S'|$。换句话说，如果不存在子集$S$ 的话，原图的所有子集$S'$ 的链接的边数都得大于等于$D|S'|$。这里我们可以使用Hall 定理。考虑构建二部图，左边是所有的边，右边是所有的点。左边每个点可以使用1 次，右边每个使用$D$ 次。用dinic 跑最大流，如果满流，则意味着存在完美匹配，根据Hall 定理可知前面描述的条件能够被满足。但即使满足了，还有一种情况是，存在一个真子集其密度为$D$。一个引理是，我们按照前面完美匹配的方案，对原图进行定向。原图存在一个真子集使其密度等于$D$，当且仅当定向后的有向图存在多个强连通分量。我们再跑一遍tarjan 即可。

**[UCUP Stage 0J] Perfect Matching** [$zmy$]

**题目描述** 给定一张包含$n$ 个顶点的无向图（$n$ 是偶数）以及$n$ 个整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$。对于任意满足$1 \leq i < j \leq n$ 的正整数$i$ 和$j$，若$|i`j| = |a_i`a_j|$（$|x|$ 表示$x$ 的绝对值）则在无向图中顶点$i$ 和顶点$j$ 之间连一条无向边。求一个完美匹配，或表明不存在完美匹配。$2 \leq n \leq 10^5$，保证所有测试数据中$n$ 之和不超过$10^6$.

**题目分析** 两个点可以相连，当且仅当$a_i + i = a_j + j$ 或者$a_i - i = a_j - j$。我们将所有可能的$a_i + i$ 和$a_i - i$ 建立点，$i$ 则视为链接这两个点的一条边。因此问题被转化成我们要将所有的边划分成若干条长度为2 的链。我们首先用并查集求出所有的连通分量。当且仅当某个连通分量里面边的数量为奇数时无解。否则，我们对这个连通分量进行dfs，自底向上贪心匹配。如果当前剩余连向孩子的边数为偶数，两两配对即可。若为奇数，将这条边和当前节点和它父亲连的那条边进行配对即可。

### 2.3.2 序列构造