ICPC Problem Set

NTRLover

2023.12.11

Chapter 1

解题报告

Date	Problem ID	Title	Difficulty	Type	Person
2022-12-20	CF1763E	Node Pairs	2200	图论、最优性构造	zmy
2023-12-11	CF1904E	Tree Queries	unkown	图论, 树论	shaosy
2023-12-14	CF1904F	Beautiful Tree	unkown	图论, 树论	shaosy
2023-12-14	CF1903F	Babysitting	2500	图论	shaosy
2023-12-22	CF1913E	Matrix Problem	unkown	图论	shaosy
2023-12-22	CF1905E	One-X	unkown	分治, 线段树	shaosy
2023-12-24	CF1909E	Multiple Lamps	unkown	暴力, 构造	shaosy
2023-12-25	CF1917E	Construct Matrix	unkown	背包, 构造	shaosy
2023-12-25	CF1917F	Construct Tree	unkown	背包, 构造	shaosy

1.1 Codeforces

[CF1763E] Node Pairs [*zmy*]

题目描述 要求构造一个有向图，恰好有 $p(1 \le p \le 2 \cdot 10^5)$ 个点对互相可达。在这个前提下，要求使用的顶点数尽可能少。顶点数相同时，要求单向可达的点对尽可能多

题目分析 每个有向图都可以被缩点成一个 DAG, 对于每个强连通分量内部肯定是两两可达的，且夸强连通分量的点对一定不是双向可达的。因此我们可以想到用 DP 来计算需要的最小顶点数。再次之上，为了使得单向可达的点对尽可能多，我们的 DAG 一定是一条链的形状，因此我们可以同时 dp 单向可达的点对个数。

[CF1904E] Tree Queries [*shaosy*]

题目描述 给定一棵树, 多组询问. 每组询问指定一个询问点和一些删除点, 问将删除点删除后树中询问点可达的最远距离为多少

题目分析 离线处理. 首先, 询问某一点在书中可达最远距离等价于将该点视为树的根并询问树的深度. 考虑如何换根时更新树的深度. 考虑 dfs 序. 通过维护每个点的 in 和 out 时刻, 配合线段树, 可以用换根 dp 类似的思想来动态维护每个点当前的深度. 根通过边 u-v 从 u 换到 v 等价于, 给 v 的子树深度区间减 1, 给其他节点深度加 1. 然后讨论删除点. 删除点如果在原树中不是新的根节点 (x) 的父节点, 则可以视作将删除点的子树的深度区间减去正无穷. 而如果是, 则可以视作将除了删除点与点 x 相连的子树之外所有点的深度区间减去正无穷. 在这种更新下, 当前树的深度就是所有点深度的最大值.

[CF1904F] Beautiful Tree [*shaosy*]

题目描述 给定一棵树和多组限制条件, 要求给树上每一个点赋值使得其成为一个 permutation 并满足所有限制条件. 每组限制条件形如 u-v-x, 要求使得在路径 u-v 上的点中 x 的值最大/最小

题目分析 考虑树链剖分 + 线段树优化建图. 这样, 每一段树上路径可以用不超过 $\log n$ 个线段, 每个线段又不超过 $\log n$ 个点表示. 建立两颗线段树, 分别表示区间最大的点/区间最小的虚拟点, 而后暴力连边. 暴力连边后跑一边拓扑排序即可. 若存在环, 则说明不存在可行解. 线段树优化建图中需要注意为了避免出现自环, 对路径 u-v 向路径 x 连边/或其反边连边时, 需要特判 x 是否在该路径中. 如果在该路径中必须裂成 u-x 和 x-v 两段 (不包括 x)

[CF1903F] Babysitting [*shaosy*]

题目描述 给定一个图, 选一些点形成一个点覆盖. 要求选的点之间相邻的差最小的最大.

题目分析 考虑二分答案后 2-SAT. 假设二分的答案为 dif. 答案形成点覆盖等价于对每一条边 u, v, 必然选择 u 和 v 中的一个. 相邻的差至少为 dif 等价于选择点 u, 则不可选择范围为 [u - dif + 1, u + dif - 1] 中的任意一个点. 这一性质满足 2-sat, 可以在其上用线段树优化建图的 trick 将点数压缩到 $O(n)$ 级别. 对线段树优化建图而言, 可以视作不选择 u 则必然不选择 u * 2 和 u * 2 + 1

[CF1913E] Matrix Problem [*shaosy*]

题目描述 给定一个矩阵, 每个矩阵的元素为 0 或 1. 要求修改尽可能少的元素, 使得每一行的和为 a[i], 每一列的和为 b[i]. $n \leq 50, m \leq 50$

题目分析 注意到数据范围很小, 考虑网络流. 如果对矩阵里每个元素建点, 则无法表示同一个点对行和列的贡献. 考虑将矩阵里的每一个点用边来表示, 即, 将 s 与行连边, 列与 t 连边, 点 $i-j$ 由边表示. 若该点本身为 0, 则将其代价设为 1, 表示若将该点选择 (流进该点) 需要付出一点代价, 反之则将其代价设为 0. 跑最小费用最大流, 则可得出一个新图, 该新图含义为, 满足题目要求, 且与原图最相似 (修改点数最少/尽可能使用原图的边) 的构造. 该最小费用最大流的流量即为新图的点数, 费用即为原图中删除 (修改) 的点数. 则总代价即为 $c + (f - (sum - c))$, 其中 sum 为原图中的点数.

[CF1905E] One-X [$shaosy$]

题目描述 给定一颗线段树. 对于其叶子的所有子集, 求其 LCA 的和, 数据范围 1e18. 具体的, build 的定义为 build(v,l,r), 令 $m = (l+r)/2$(向下取整), 将 v 和 2v 与 2v+1 连边, 后递归调用 build(2v,l,m) 和 build(2v+1,m+1,r)

题目分析 考虑单个点的可能贡献. 假设该点的左子树区间长度为 l, 右子树区间长度为 r, 显然有点 x 的贡献为 $x \times (2^l - 1) \times (2^r - 1)$. 考虑线段树的性质, 发现对相同层的 x, 其 l 和 r 必然为 $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{x}{2} \rceil$ 中的一个. 接下来考虑一个区间长度固定的子树答案. 这一部分可以由两个部分组成: 与 x 相关的 (k) 和与 x 无关的 (b). 其形式必定如 $k \times x + b$

考虑如何更新 k. 首先, k 必然包括 $(2^l - 1) \times (2^r - 1)$, 这是由 LCA 为点 x 的集合数量. 接下来考虑两颗子树 l 和 r. 首先, l 和 r 的差至多为 1, 假设 l 是较长者. 则 k_l 所能作出的贡献为 $2 * v + 1$, 而 k_r 所能作出的贡献为 $2 * v$. 于是, 将与 v 相关的部分纳入考虑, 无关部分交给 b, 即可得出 $k = 2k_l + 2k_r + (2^l - 1) \times (2^r - 1)$, $b = b_l + b_r + k_l$. 本质不同的 k, b 对不超过 $2 \log n$ 个. 可以通过记忆化所搜得到答案.

[CF1909E] Multiple Lamps [$shaosy$]

题目描述 给定 1 到 n 组灯 (一开始均为暗). 每个灯只能被按一次. 按第 i 个灯会切换所有的第 $k \times i$ 个灯. 有 m 组限定条件, 形如 u, v, 表示如果按灯 u 必定按灯 v(顺序无要求, 因为每个灯最多按一次). 求是否存在一组构造使得最后总共亮的灯的个数小于等于 $n/5$.

题目分析 首先, 考虑如果将所有的 i 都按一边. 在这种情况下, 只有所有的完全平方数的灯会亮. 在 $n \geq 20$ 的情况下满足提议. 故我们仅需要考虑 $n < 20$ 的情况.

在这种情况下, 最后亮的灯数必然小于等于 3. 假设最后亮的灯中最小一个为第 i 个, 则显然, 该灯必然是被按下的 (若 i 不是被按下的, 则存在另一个灯 $j < i$ 且 j 为 i 的因数被按下, 与 i 是最小的亮的灯矛盾). 那么可以消除灯 i 的影响然后递归. 最后只需要检查按下的灯是否满足条件限制即可.

[CF1917E] Construct Matrix [$shaosy$]

题目描述 构造一个 0/1 矩阵, 长和宽均为 n, 其中 n 为偶数, 使得总共有 k 个 1, 并且每一行的 XOR 和一样, 每一列的 XOR 和一样.

题目分析 显然, 因为 n 为偶数, 如果 k 为奇数则一定无解. 在 k 为偶数的情况下, 分类讨论. 发现 $n \times n$ 的矩阵能够被 2×2 的矩阵覆盖, 而 2×2 的矩阵如果全部为 0/1 则不会影响每一行/列的 XOR 和. 所以, 如果 $k \equiv 0 \pmod 4$, 则显然可以构造一组解. 接下来考虑 $k \equiv 2 \pmod 4$ 的情况.

通过手玩可以发现, 在 $k = 2$ 或 $k = n^2 - 2$ 的情况下, 除非 $n = 2$, 则一定无解. 考虑其他情况. 此时, 一定有 $k \geq 6$. 考虑 $k = 6$ 和 $k = n^2 - 6$ 情况下的特解, 可以发现两个如下的 4×4 的矩阵能够满足要求:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

那么, 我们只需要特判是否为 $k = n^2 - 6$, 随后问题就与 $k \equiv 0 \pmod 4$ 等价了.

[CF1917F] Construct Tree [$shaosy$]

题目描述 给定一组边 l(有边权), 构造一棵树使得树的直径为 d

题目分析 首先, 对 l 由大到小排序. 显然, 若有 $l_0 + l_1 > d$ 则无解. 若背包得出不存在一组子集和为 d, 也显然无解. 考虑背包存在子集 S 和为 d 的无解情况. 此时, 必然因为存在一条更长的直径大于 d. 假设已经构造出这棵树, 则最优构造情况下, 所有非直径边必然连与同一个点, 而该点最优情况下显然尽可能于直径中间. 那么, 假设该点到直径两端距离为 x, y, 若存在 $l \notin S$ 且 $l > \min(x, y)$ 时, 无解.

为了简化考虑, 可以分类讨论 l_0 是否在 S 中间. 若 l_0 在 S 中, 则显然有解, 因为可以将 l_0 置于直径的一端, 后将所有非 S 边均与 l_0 非叶子的点相连. 在 $l_0 + l_1 \leq d$ 的情况下, 始终符合题意.

若 $l_0 \notin S$, 我们可以仅考虑 l_0 是否满足 $l_0 > \min(x, y)$. 首先, 因为 $x + y = d$, 若 $l_0 > \frac{1}{2}d$, 则该等式始终无法满足. 我们可以假设 $l_0 \leq \frac{1}{2}d$. 接下来可以做一个背包, 令 $dp[i][j]$ 为是否能够构造一条链, 使得链可以分为长度为 i 和长度为 j 的两部分. 对于每个 $l[i]$, 分类讨论他应该在前半部分还是后半部分 dp[j + l[i]] |= dp[j], dp[j] |= (dp[j] « l[i]) 即可. 背包结束后, 仅需判断是否存在半边为 l_0 到 $k - l_0$ 之间的任意解即可.

1.2 POI

Step Traversing a Tree [$pufanyi$]

题目描述 给你一棵 n ($n \leq 5000$) 个点的树, 构造一个长度为 n 的 $permutation$, 使得 $\forall i, \operatorname{dist}\{p_i, p_{i+1}\} \leq 3$。

题目分析 f_u 从 u 开始，到 u 的一个叶子节点结束，遍历以 u 为根子的答案树;g_u 表示从 u 的一个叶子节点开始，到 u 结束遍历以 u 为根子树的答案。发现两者可以相互递归调用。

Chapter 2

解题方法

2.1 题目类型

2.1.1 最优解构造

2.1.2 存在解构造

2.1.3 k-th 解构造

2.2 通用构造思想

2.2.1 抽屉原理

2.2.2 随机构造

2.2.3 递归构造

2.2.4 分类构造

2.3 经典构造方法

2.3.1 图构造

1. 构造若干个强连通分量，这些强连通分量之间形成一条链
2. 构造环
3. 利用二分图匹配或者欧拉回路进行无向图边定向
4. 利用 dfs 树，进行边匹配

[CF1763E] Node Pairs [zmy]

题目描述 要求构造一个有向图，恰好有 $p(1 \leq p \leq 2 \cdot 10^5)$ 个点对互相可达。在这个前提下，要求使用的顶点数尽可能少。顶点数相同时，要求单向可达的点对尽可能多

题目分析 每个有向图都可以被缩点成一个 DAG，对于每个强连通分量内部肯定是两两可达的，且夸强连通分量的点对一定不是双向可达的。因此我们可以想到用 DP 来计算需要的最小顶点数。再次之上，为了使得单向可达的点对尽可能多，我们的 DAG 一定是一条链的形状，因此我们可以同时 dp 单向可达的点对个数。

[ARC161D] Everywhere is Sparser than Whole (Construction) [zmy]

题目描述 给定节点数 N 和图的密度 D。定义密度为整个图的边数除以点数的结果。现在要求构造一个图，使得整个图的密度为 D，且不存在一个子集的密度大于或者等于 D

题目分析 我们考虑建立几个圈，当 $D = 1$ 时，对于每个点 i 我们连一条 $(i, i+1)$。当 $D = 2$ 时，在此基础上，对于每个点 i，我们多连一条 $(i, i+2)$，以此类推。

[ARC161F] Everywhere is Sparser than Whole (Judge) [zmy]

题目描述 给定一个图保证整个图的密度恰好为 D。现在问你能否找到一个真子集的引导子图，使得其密度大于等于 D。

题目分析 假设这个子集为 S，那么其补集 S' 连接的边的数量应该小于 $D|S'|$。换句话说，如果不存在子集 S 的话，原图的所有子集 S' 的链接的边数都得大于等于 $D|S'|$。这里我们可以使用 Hall 定理。考虑构建二部图，左边是所有的边，右边是所有的点。左边每个点可以使用 1 次，右边每个使用 D 次。用 dinic 跑最大流，如果满流，则意味着存在完美匹配，根据 Hall 定理可知前面描述的条件能够被满足。但即使满足了，还有一种情况是，存在一个真子集其密度为 D。一个引理是，我们按照前面完美匹配的方案，对原图进行定向。原图存在一个真子集使其密度等于 D，当且仅当定向后的有向图存在多个强连通分量。我们再跑一遍 tarjan 即可。

[UCUP Stage 0J] Perfect Matching [zmy]

题目描述 给定一张包含 n 个顶点的无向图（n 是偶数）以及 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。对于任意满足 $1 \le i < j \le n$ 的正整数 i 和 j，若 $|i-j| = |a_i - a_j|$（$|x|$ 表示 x 的绝对值）则在无向图中顶点 i 和顶点 j 之间连一条无向边。求一个完美匹配，或表明不存在完美匹配。$2 \le n \le 10^5$，保证所有测试数据中 n 之和不超过 10^6.

题目分析 两个点可以相连，当且仅当 $a_i + i = a_j + j$ 或者 $a_i - i = a_j - j$。我们将所有可能的 $a_i + i$ 和 $a_i - i$ 建立点，i 则视为链接这两个点的一条边。因此问题被转化成我们要将所有的边划分成若干条长度为 2 的链。我们首先用并查集求出所有的连通分量。当且仅当某个连通分量里面边的数量为奇数时无解。否则，我们对这个连通分量进行 dfs，自底向上贪心匹配。如果当前剩余连向孩子的边数为偶数，两两配对即可。若为奇数，将这条边和当前节点和它父亲连的那条边进行配对即可。

2.3.2 序列构造