Lecture 5

赵思逸

2022 年 3 月 22 日

1 弗里德曼 (Friedmann) 方程

广义相对论给出爱因斯坦引力场方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

该公式左边是爱因斯坦张量 (Einstein tensor)，表示时空的几何性质，右边的 $T_{\mu\nu}$ 是能动量张量 (Energy-momentum tensor)，由密度 ρ、压强 P 决定，描述物质的分布。

由式 (??) 可以得到关于 $a(t)$ 的方程，即弗里德曼 (Friedmann) 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \tag{2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \tag{3}$$

其中 G 是牛顿引力常数，ρ 是宇宙中物质的密度，P 是宇宙中物质的压强。

由式 (??) 可推出哈勃参数的表达式 $H(a) = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho(a) - \frac{K}{a^2}}$

2 Friedmann 方程

引力场方程：物质分布决定时空几何。

我们考虑的物质是宇宙中的理想流体，用密度 ρ 和压强 P 描述，它们决定时空几何 $a(t)$ 和 K 如何演化，即 Friedmann 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \tag{4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \tag{5}$$

其中我们使用了自然单位制中的光速 $c = 1$，式 (??) 中的量纲在补齐 c 之后统一，$[P] = [\rho] \times [c^2]$ 。

下面我们考虑式 (??) 和式 (??) 的关系。对式 (??) 求时间导数

$$\frac{d(1)}{dt}: \qquad 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8}{3}\pi G(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \tag{6}$$

代入式 (??) 得到

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \tag{7}$$

式 (??) 就是能量守恒方程。在式 (??) 左右乘上 $a^3 V_{\rm com}$ 得到 $\frac{d}{dt}(V\rho) = -P\frac{dV}{dt}$ 就可以看出表示能量守恒。

3 宇宙中的物质

3.1 辐射 (Radiation)

辐射是指极端相对论性的物质，热运动的动能远远大于静质量，即 $m_0c^2 \ll k_BT$。例如光子（静质量为 0）、中微子（静质量很小）、高温电子气体（静质量 $0.5\mathrm{MeV} \ll k_BT$）。

量子统计给出辐射的状态方程为 $P = \frac{1}{3}\rho$。代入式 (??) 得到 $\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a}$，因此

$$\rho_R \propto a^{-4}. \tag{8}$$

从物理图像上可以理解为 $\rho_R = \frac{\Delta N\hbar\nu}{\Delta V} \propto a^{-4}$，因为 ΔN 不变，体积膨胀 $\Delta V \propto a^3$ 且波长被拉长 $\nu \propto a^{-1}$ 。

3.2 冷物质 (Matter)

冷物质是指非相对论性物质，热运动的动能相比静质量可以忽略，即 $m_0c^2 \gg k_BT$。例如冷重子物质、冷暗物质、低温电子气体（静质量 0.5MeV $\gg k_BT$）。

冷物质的状态方程为 $P=0$。代入式 (??) 得到 $\frac{d\rho}{\rho}=-3\frac{da}{a}$，因此

$$\rho_M \propto a^{-3}. \tag{9}$$

从物理图像上可以理解为 $\rho_M=\frac{m_0\Delta N}{\Delta V}\propto a^{-3}$，因为 ΔN 不变，体积膨胀 $\Delta V \propto a^3$ 。

3.3 真空能 (Vacuum energy)

真空能就是宇宙学常数，是暗能量的一种。

真空能密度不变 $\rho_\Lambda = const.$，膨胀时外界对内部做功，能量守恒 $\Delta E = -\rho_\Lambda \Delta V = P_\Lambda \Delta V$，即真空能的状态方程为 $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$。真空能具有负压 $P_\Lambda < 0$.

3.4 一般情况

一般情况下的状态方程写作 $P=w\rho$，将状态方程代入式 (??) 得到

$$\dot{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho \tag{10}$$

$$\rho \propto a^{-3-3w} \tag{11}$$

对于我们上面讨论过的三种物质

辐射	$\rho_R \propto a^{-4}$	$w=1/3$
冷物质	$\rho_M \propto a^{-3}$	$w=0$
真空能	$\rho_\Lambda = const.$	$w=-1$

4 宇宙的演化

考虑平坦宇宙 $K=0$，式 (??) 变成

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \propto \rho a^2 \tag{12}$$

- 辐射为主时，代入 $\rho_R \propto a^{-4}$，得到 $a \propto t^{1/2}$。$H = \frac{da/dt}{a} = \frac{1}{2t}$，宇宙的年龄 $t_0 = \frac{1}{2H_0}$，其中 $H_0^{-1} = 9.778h^{-1}\text{Gyr}$，可以作为对宇宙年龄的粗略估计（实际的宇宙年龄需要考虑 H_0^{-1} 前面的系数）。
- 冷物质为主时，代入 $\rho_M \propto a^{-3}$，得到 $a \propto t^{2/3}$，比辐射为主的宇宙膨胀快。宇宙的年龄 $t_0 = \frac{2}{3H_0}$。
- 真空能为主时，代入 $\rho_\Lambda = const.$，得到 $a \propto e^{Ht}$，随 e 指数加速膨胀。

考虑 $K \neq 0$，冷物质为主的宇宙。由 $\rho_M \propto a^{-3}$ 得到密度 $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$，下标 0 表示今天的量。式 (??) 变成

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 a_0^3/a \tag{13}$$

由此得到

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a} - K} \tag{14}$$

$$dt = \frac{da}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\frac{\rho_0 a_0^3}{a} - K}} \tag{15}$$

将 $H_0^2 + \frac{K}{a_0^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho_0$ 代入 式 (??)，得到

$$dt = \frac{da}{\sqrt{\left(H_0^2 + \frac{K}{a_0^2}\right)\frac{a_0^3}{a} - K}} = \frac{dx}{H_0}\sqrt{\frac{x}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2}(1-x)}} \tag{16}$$

其中 $x = a/a_0$，积分得到 t 与 a 的关系

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{a/a_0} \sqrt{\frac{x}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2}(1-x)}}dx \tag{17}$$

考虑 $K=+1$。定义 $\Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$ ，$K=+1$ 时，$\Omega_K<0$ 。令 $x=\frac{a}{a_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+|\Omega_K|}{|\Omega_K|}\right)(1-\cos\alpha)$，式 (??) 变成

$$dt=\frac{dx}{H_0}\sqrt{\frac{x}{1+|\Omega_K|\,(1-x)}}=\frac{1}{2H_0}\frac{(1+|\Omega_K|)}{|\Omega_K|^{3/2}}\sin\alpha d\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{18}$$

积分得到

$$t=\frac{1}{2H_0}\frac{(1+|\Omega_K|)}{|\Omega_K|^{3/2}}(\alpha-\sin\alpha) \tag{19}$$

定义宇宙的临界密度

$$\rho_{\text{crit}}\equiv\frac{3H_0^2}{8\pi G}\simeq 1.878\times10^{-29}h^2 \text{ g cm}^{-3} \tag{20}$$

它是今天平直宇宙所要求的物质密度。

为了满足式 (??)，

- 若 $\rho=\rho_{\text{crit}}$，则 $K=0$。
- 若 $\rho>\rho_{\text{crit}}$，则 $K=+1$。
- 若 $\rho<\rho_{\text{crit}}$，则 $K=-1$。

考虑最一般的情况

$$\begin{aligned}\rho(a) &= \rho_R(a)+\rho_M(a)+\rho_\Lambda(a) && (21)\\ &= \rho_{R,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}+\rho_{M,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}+\rho_{\Lambda,0} && (22)\end{aligned}$$

定义 Ω_i 是今天各物质成分在临界密度中的占比，$\Omega_R\equiv\frac{\rho_{R,0}}{\rho_{\text{crit}}}$, $\Omega_M\equiv\frac{\rho_{M,0}}{\rho_{\text{crit}}}$, $\Omega_\Lambda\equiv\frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{\text{crit}}}$。另外定义曲率“质量”密度 $\Omega_K\equiv-\frac{Kc^2}{a_0^2H_0^2}$ ，则式 (??) 变成

$$\frac{H^2}{H_0^2}=\Omega_R\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}+\Omega_M\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}+\Omega_\Lambda+\Omega_K\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \tag{23}$$

可以改写为 $H(a)=H_0E(a)$

$$E(a)=\sqrt{\Omega_R\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}+\Omega_M\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}+\Omega_\Lambda+\Omega_K\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}} \tag{24}$$

或 $H(z)=H_0E(z)$

$$E(z)=\sqrt{\Omega_R\left(1+z\right)^4+\Omega_M\left(1+z\right)^3+\Omega_\Lambda+\Omega_K\left(1+z\right)^2} \tag{25}$$

在今天，$z=0$, $a=a_0$, $H=H_0$, 有

$$\Omega_R+\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_K=1 \tag{26}$$

注意最后一项 Ω_K 并不是真实的物质，只是我们用曲率定义出来的量。它决定我们对尺度因子的选取，当 $\Omega_K\neq 0$ 时，$a_0=\frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_K|}}$，只有当 $\Omega_K=0$ 时，我们才能选取 $a_0=1$。

式 (??) 中，前三项才是宇宙中真实存在的物质，（见式 (??)）它们的总和不一定是 1。不过宇宙学观测得到的结果 $\Omega_K\approx 0$，可以认为我们的宇宙近似是平坦的。（即使不平坦，宇宙的曲率也非常小。暴涨理论会对这一现象给出解释。）即 $\rho_{\text{crit}}\simeq\rho_0$ ，所以 Ω_i 也可以近似表示今天各物质成分在宇宙密度中的占比。

小结：

$\rho_0>\rho_{\text{crit}}$	$\Omega>1$	$\Omega_K<0$	$K=+1$	正曲率，球面，有限无界
$\rho_0<\rho_{\text{crit}}$	$\Omega<1$	$\Omega_K>0$	$K=-1$	负曲率，超球面，无限无界
$\rho_0=\rho_{\text{crit}}$	$\Omega=1$	$\Omega_K=0$	$K=0$	平直，平直，无限无界

其中前两列是广义物质密度，第 3、4 列是曲率，第 5 列描述宇宙的时空几何。