Lecture2

2023 年 3 月 1 日

宇宙学基础

1 宇宙学原理

宇宙物质在空间分布上是均匀 (Homogeneous) 和各向同性的 (Isotropic)。

- Isotropic 推不出 Homogeneous。
- “哥白尼原理”：宇宙中不存在任何一个“特殊”的观测者。
- Isotropic 加上“哥白尼原理”可以得到 Homogeneous。因为对于宇宙中任意两点，我们都能找到一个观测者和两点等距。根据各向同性，可以推出这两点的物质密度相同。

1.1 检验物质分布的均匀性

在宇观尺度（尺度越大，均匀性越好），我们把宇宙平均密度表示为 $\bar{\rho}$，根据均匀性原理，包含在球体 R 内的平均质量 $M = \bar{\rho} \times \frac{4}{3}\pi R^3$。实际上，由于宇宙中物质密度分布存在涨落，实际球体 R 内的质量为 $M + \Delta M$ 。质量涨落的平均值 $\langle \Delta M \rangle = 0$，方均根 $\sqrt{\langle \Delta M \rangle^2} = \delta M$。定义 $\sigma(M) = \frac{\delta M}{M}$，当 $\sigma(M) > 1$，宇宙在对应的 R 尺度上是不均匀的。

观测发现 $\sigma_8 \equiv \sigma(R = 8h^{-1}\ \mathrm{Mpc}) \simeq 0.8$ ，说明 $8h^{-1}$ Mpc 大致是线性尺度与非线性尺度的分水岭。其中 $h \equiv H_0/(100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}) \simeq 0.7$，$H_0$ 是哈勃常数。$\sigma(M) = \sigma_8 \left(\frac{M}{M_8}\right)^{-(3+n)/6}$，其中 $n \simeq 0.97$，估算出 $\sigma(R = 100h^{-1}\ \mathrm{Mpc}) \simeq 0.005$，所以在 $R \geq 100h^{-1}$ Mpc 可以认为宇宙是均匀的。

1.2 检验物质分布各向同性

宇宙微波背景辐射（CMB）温度 $T(\hat{n}) = \bar{T} + \Delta T(\hat{n})$ ，其中 $\hat{n}$ 是某一方向的单位向量，$\bar{T}$ 是平均温度。根据定义，CMB 温度涨落的平均值 $\langle \Delta T(\hat{n}) \rangle = 0$ 。我们定义 $\delta T \equiv \sqrt{\langle \Delta T^2(\hat{n}) \rangle}$ ，测量到 CMB 的温度涨落 $\frac{\delta T}{T} \simeq 10^{-5}$ ，是对各向同性的足够好的检验。

2 哈勃定律 Hubble's Law

哈勃测量到遥远天体（不受引力束缚）的退行速度 $v = H_0 R$ ，其中 H_0 是哈勃常数。定义红移 $z = \frac{v}{c}$ ，其中 $v \ll c$ 。

哈勃定律并不代表我们是“特殊”的观测者，因为宇宙中其它位置的观测者一样会观测到哈勃定律。

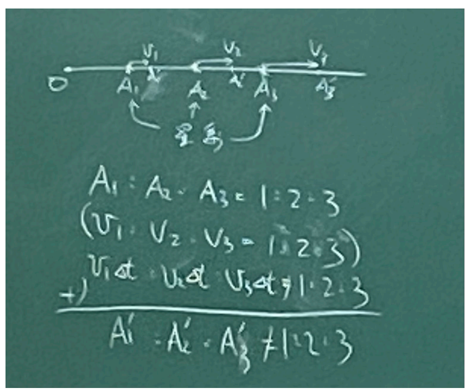

图 1: 其它位置的观测者一样会观测到哈勃定律

考虑到和宇宙学原理自洽，哈勃定律可以解释为宇宙（准确的来说是“时空”）在均匀膨胀。

2.1 尺度因子

对于给定观测者，某一遥远天体的位置随着时间变化 $\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0)\frac{a(t)}{a(t_0)}$，定义 $a(t)$ 为尺度因子，尺度因子刻画宇宙整体的膨胀，是时间的函数，与位置无关（符合宇宙学原理的“均匀性”）。t_0 时刻，物理长度 = 坐标长度。

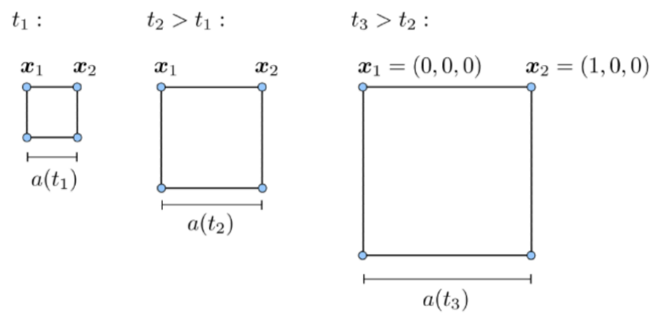

图 2: 尺度因子 $a(t)$，图源 Dodelson

2.2 哈勃参数

从宇宙膨胀可以推出哈勃定律。遥远天体的退行速度

$$\begin{aligned}\vec{v}(t)=\frac{d\vec{x}}{dt} &= x\left(t_0\right)\frac{1}{a\left(t_0\right)}da/dt \\ &= x\left(t_0\right)\frac{a(t)}{a\left(t_0\right)}\frac{da/dt}{a(t)}\end{aligned} \tag{1}$$

定义哈勃参数 $H(t)\equiv\frac{da/dt}{a}=\frac{\dot{a}}{a}$，可以得到哈勃定律 $\vec{V}(t)=\vec{x}(t)H(t)$，所以 H_0 就是今天的哈勃参数。

因为历史原因，$H_0=100h\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ ，$h\simeq 0.7$.

今天更精确的测量出现 Hubble tension 问题，CMB 的测量给出的结果是 0.67，SN Ia 的测量给出的结果是 0.74，对标准宇宙学模型 ΛCDM 提出了挑战。

2.3 讨论

根据 $z=\frac{v}{c}=c^{-1}H_0R$，当 $R>cH_0^{-1}$ 时，似乎有 $z>1$ 且 $v>c$ ⋯⋯

- 有没有红移大于 1 的天体？——有。
- 红移大于 1 的天体是否超过光速？
  - 相对论下的多普勒红移：当 $z\gg 1$，$v\to c$ 时，$z=\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}-1$

  - 但哈勃观测到的红移实际上并不能用多普勒红移解释。多普勒红移适用于平直时空，而哈勃定律是时空整体的膨胀。
  - 在宇宙学的尺度下，可测量量不是速度而是红移。$z = \frac{v}{c}$ 只适用于本地。在高红移处需要另外寻找红移和距离的关系 $z = z(R)$
  - 定义哈勃流 (Hubble flow) 的 "速度" $\vec{V}_H(t) = H(t)\vec{R}(t)$，它只是为了方便表达定义出的速度，而不是直接可测量的物理量。膨胀的宇宙是弯曲时空，而在弯曲时空里，只有本地惯性参考系里定义的速度才是可测量的物理量。相对地有 "本动速度"（天体相对于哈勃流的速度）$\vec{v}_{\mathrm{pec}}$，总体的速度为两者之和 $\vec{V} = H\vec{R} + \vec{v}_{\mathrm{pec}}$ ，可以大于光速，但这并不是物理上的速度。

- 红移大于 1 的天体会超出视界吗？——不会。应该使用 $z = z(R)$ 计算。