Lecture 7

赵思逸

2022 年 4 月 12 日

1 宇宙学常数和真空能

1.1 真空能视角

真空能 $P = -\rho$.

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = -\rho \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1}$$

得到真空能的能动量张量 $T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}$.

Einstein 场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}$. 其中 $R_{\mu\nu}$ 是 Ricci tensor, R 是 Ricci scalar, 二者都是 $g_{\mu\nu}$ 及其导数的函数。

$T_{\mu\nu}$ 是能动量张量，包括物质和辐射（下式第一项）和真空能（下式第二项）

$$T_{\mu\nu} = T^{(M)}_{\mu\nu} + T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = T^{(M)}_{\mu\nu} - \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \tag{2}$$

此时场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} = -8\pi G T^{(M)}_{\mu\nu} + 8\pi G \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \tag{3}$$

1.2 宇宙学常数视角

Einstein 场方程是由作用量导出的。作用量 S 为

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{4}$$

其中 $d^4x\sqrt{-g}$ 是 4 维协变的体积元，$\mathcal{L}$ 是拉氏量密度，要求

1. 是 4 维坐标变换下的不变量。

2. 包含度规的最高 2 阶导数。

只有 Ricci scalar 同时满足这两个条件，还有一个平凡 (trivial) 解——常数。把宇宙学常数加到作用量里：

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(R+\Lambda) \tag{5}$$

导出的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T^{(M)}_{\mu\nu} \tag{6}$$

与 式 (3) 相比，可得

$$\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda \tag{7}$$

真空能与宇宙学常数是等价的。只不过真空能的引入有一些量子场论中的动机，而宇宙学常数则来自对广义相对论的 Einstein 场方程理论上的推广。下面我们将混用“真空能”和“宇宙学常数”。

1.3 Einstein 静态宇宙模型

静态宇宙模型要求 a 为常数，$\dot{a} = \ddot{a} = 0$，带入弗里德曼方程得到

$$\rho + 3P = 0 \tag{8}$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \tag{9}$$

如果只有物质和辐射，$\rho + 3P > 0$，所以 Einstein 在 1917 年引入了宇宙学常数。以下推导使用真空能，且忽略辐射。

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_M + \rho_\Lambda \\ &P = P_M + P_\Lambda = -\rho_\Lambda \\ &\rho + 3P = 0 \\ &\Rightarrow \rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_M \end{aligned} \tag{10}$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G \rho a_E^2 = 8\pi G \rho_\Lambda a_E^2 > 0 \tag{11}$$

所以是正曲率，$K = +1$,

$$a_E = 1/\sqrt{8\pi G \rho_\Lambda} \tag{12}$$

但这个解不稳定。我们做微扰：

$$a = a_E + \delta a \tag{13}$$

$$\rho_M = 2\rho_\Lambda + \delta\rho \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

要总满足

$$1 = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \tag{16}$$

$$\delta a < 0 \Rightarrow \delta\rho > 0 \tag{17}$$

使得 $\dot{a} = 0$ 继续满足，但二阶导

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P) = -4\pi G\left(3\rho_\Lambda + \delta\rho - 3\rho_\Lambda\right) = -4\pi G\delta\rho < 0 \tag{18}$$

$\delta a < 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$，$\delta a > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$，即静态模型不稳定。

2 早期宇宙的历史

本章会讲 3 个重要的话题:

- CMB 微波背景辐射
- BBN 大爆炸核合成
- Inflation 暴涨宇宙

3 微波背景辐射

3.1 退耦 (decoupling)

自由质子和自由电子复合成中性氢原子, 放出光子 (大于等于 13.6 eV), 中性氢原子也可以吸收光子电离为自由的质子和电子。

随着宇宙膨胀, 光子能量降低, 复合率逐渐变得远大于电离率。具体地说，当 $k_B T = 0.3$ eV 时，复合率远大于电离率。

另一方面，当光子和电子的散射速率小于宇宙膨胀速率后，光子和电子退耦。

光子被电子散射的速率 $\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e v$, 其中 σ_T 是 Thomson 散射截面, n_e 是电子数密度，v 是电子运动速度。早期运动速度接近光速，$\Lambda_\gamma \simeq \sigma_T n_e c \propto a^{-3} \propto (T/T_{\gamma 0})^3$ 其中 $T_{\gamma 0}$ 是今天 CMB 的温度。

宇宙膨胀速率，在辐射占主导期，$H \propto a^{-2} \propto (T/T_{\gamma 0})^2$ 。早期散射速率远大于膨胀速率，能达到化学平衡。但散射速率降得更快，当散射速率小于宇宙膨胀速率，化学平衡被打破。

在化学平衡中的等离子体中，光子不断被散射，宇宙对光子是不透明的 (opaque)，化学平衡被打破时，光子不再发生散射，而是惯性运动，形成最后散射面。最后散射面由被我们观测到的 CMB 光子的最后一次散射位置组成，近似为一个二维球面。见图 (1)

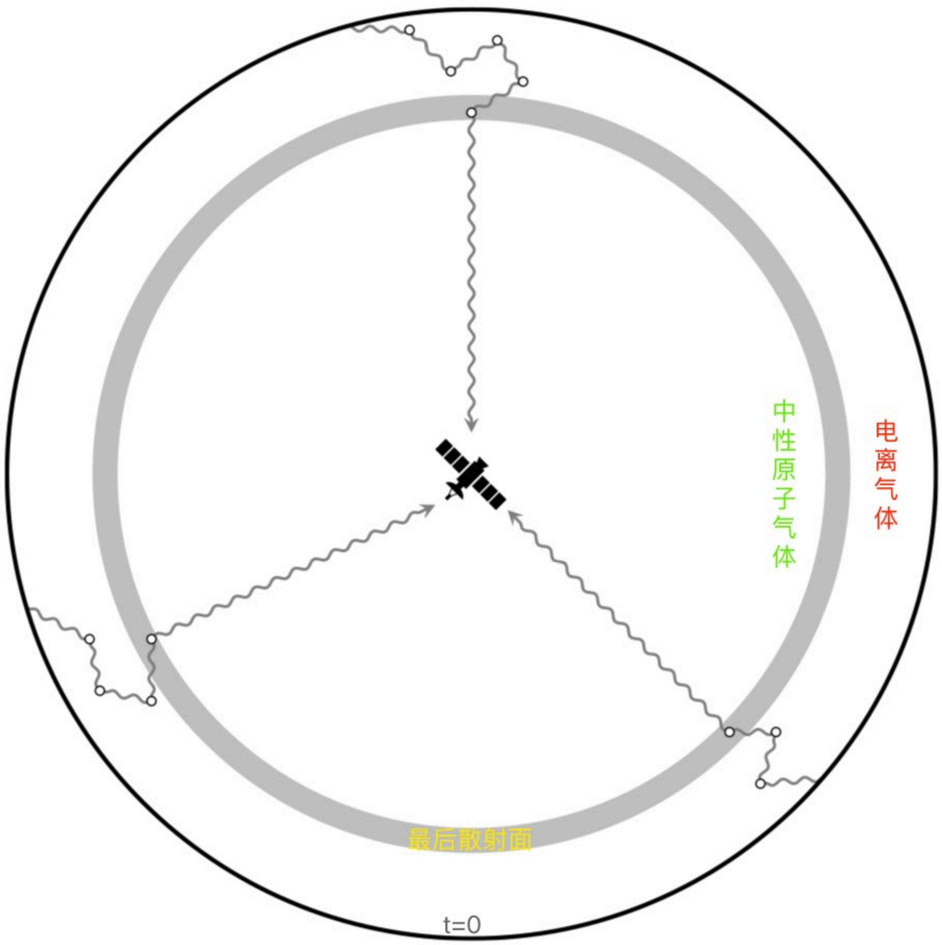

图 1: 图中灰色圆环为最后散射面，修改自 Daniel Baumann: Cosmology (2021)

3.2 CMB 的特征

- 各向同性：来自所有方向的 CMB 温度高度相同。
- 辐射场强度随频率的分布符合黑体辐射谱。（Planck 公式）
- 退耦能标约为 0.3eV，温度约为 3000K，红移约为 1100
- 温度涨落有偶极矩。（因为地球、太阳、银河系的运动。）
- 扣除偶极矩后，仍然存在微小的温度起伏，这就是后来宇宙密度起伏、形成星系等结构的种子/初始条件。

为什么 CMB 符合黑体谱?

在最后散射面 t_L，光子辐射谱满足 Planck 公式：

$$n_{T(t_L)}(\nu_L)d\nu_L = \frac{8\pi\nu_L^2 d\nu_L}{\exp\left(\frac{h_{\rm pl}\nu_L}{k_B T(t_L)}\right)-1} \tag{19}$$

在 $t > t_L$，光子频率由于宇宙学红移降低 $\nu = \nu_L \frac{a(t_L)}{a(t)}$，光子数密度 $n\,(\nu,t)\,d\nu \propto a^{-3}$ 即

$$n(\nu,t)d\nu = \left(\frac{a(t_L)}{a(t)}\right)^3 n_{T(t_L)}\,(\nu_L)\,d\nu_L \tag{20}$$

代入得

$$n(\nu,t)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h_{\rm pl}\nu}{k_B \frac{a(t_L)}{a(t)} T(t_L)}\right)-1} \tag{21}$$

仍然是黑体谱。此时光子不处于热平衡，不妨令 $T(t) = \frac{a(t_L)}{a(t)}T(t_L)$，即 $T \propto 1/a$.