

Lecture 12

2023 年 6 月 2 日

1 Dark Matter Perturbation

暗物质是不与光子发生相互作用的物质，目前尚不清楚它的本质，可能是某些未被发现的“新粒子”，在宇宙早期脱离热平衡遗留下来 (thermal relics)，也有模型不是热平衡遗留造成的。目前主要有以下几类暗物质模型：

- 冷暗物质 (cold dark matter, CDM): 粒子运动速度较低的暗物质模型。除了不和重子物质作用外，自身相互作用也很小。最有名的如 WIMP 微弱作用大质量粒子 (Weakly Interacting Massive Particals) .
- 热暗物质 (hot dark matter, HDM): 粒子热运动速度较大的暗物质模型。比如退耦后的中微子。
- 其它暗物质模型: Non-thermal relics, 不是脱离热平衡而来。比如轴子 axions, 磁单极子 monopoles, 宇宙弦 cosmic strings, 其中后两者都属于宇宙的拓扑缺陷 (topological defects)

目前宇宙学观测比较倾向冷暗物质，我们以下也用冷暗物质模型考虑暗物质涨落。

冷暗物质是无碰撞粒子，不能使用流体力学方程。

我们用到连续性方程

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0 \quad (1)$$

和金斯方程（类比流体力学的欧拉方程）

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\sigma^2}{a} \frac{\nabla \delta}{1 + \delta} \quad (2)$$

用 σ 替换了欧拉方程中的 c_s . 其中定义了速度色散 (velocity dispersion tensor) $\sigma_{ij} \equiv \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$ 在各向同性假设下 $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$, 加上均匀性假设 $\sigma = \langle v_i^2 \rangle^{1/2}$.

对比流体力学方程可得金斯尺度

$$\lambda_J^{\text{prop}} = a(t) \lambda_J^{\text{com}} = a(t) \frac{2\pi}{k_J} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} \quad (3)$$

$\lambda > \lambda_J$ 时, 涨落在引力作用下增长 (gravitational collapse). $\lambda < \lambda_J$ 时, 无碰撞的暗物质粒子会将涨落抹掉, 而不是以波的形式存在, 叫做 free streaming damping.

在辐射主导时期,

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d \delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G (\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r) \delta_{\vec{k}} \Rightarrow \delta_+ \propto 1 + \frac{3\bar{\rho}_m}{2\bar{\rho}_r} = 1 + \frac{3a}{2a_{\text{eq}}} \quad (4)$$

当 $a \ll a_{\text{eq}}$, $\delta_+ \propto 1$, 涨落停滞, 即使大于金斯尺度也不会增长 (Stagnation), 也称为 Meszaros 效应。

可见在辐射主导区, 各尺度的暗物质涨落都无法增长, 需要等到 t_{eq} 之后才能增长。

小尺度的结构先形成, 继而碰撞形成大尺度的结构, 这叫做 Bottom-up Scenario. 暗物质先形成非线性结构, 重子物质落入暗物质涨落形成的引力势阱中, 形成恒星与星系。

图 (1) 总结了暗物质涨落。

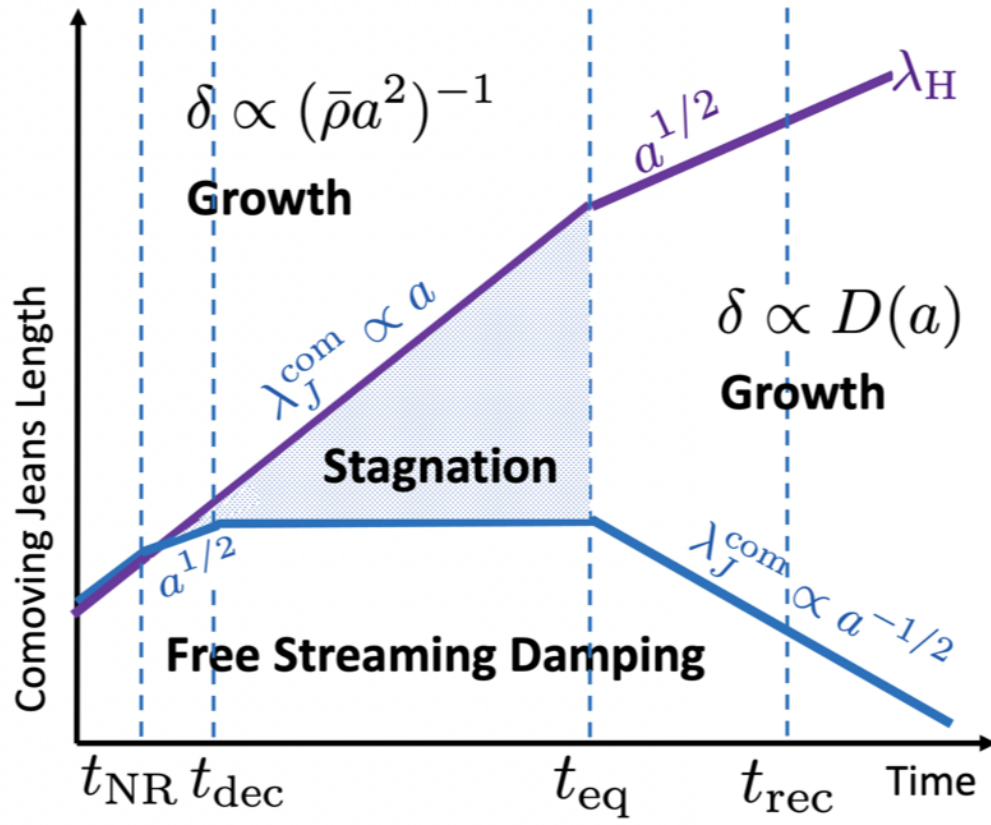


图 1: 冷暗物质模型给出的暗物质涨落

2 非线性结构

以上都是线性微扰理论，只适用于 $\delta \ll 1$ 的情况，在 recombination ($\delta \sim 10^{-5}$) 前后是适用的。而今天的星系都属于 $\delta \gg 1$ 的非线性结构，在本节中我们考虑非线性结构。

非线性结构不能用高斯场，不同模之间不独立，不能用简单的 growth rate 来表示涨落的增长。

处理非线性结构有以下几种方法：

- 最“精确”的方法是数值模拟，但是也受到算法的影响。
- 在 quasi-linear 区域可以用高阶的微扰论。
- Oversimplified analytical models 不准确，但可以给我们一些物理直觉。

我们的课程将介绍部分 Oversimplified analytical models.

2.1 Spherical Collapse (SC) model

我们考察均匀宇宙中的一个球状高密度区 $\delta > 0$. 简单起见，我们假设宇宙中只有物质，没有暗能量。

把这个球状高密度区分成一层层球壳，不失一般性，考察某个球壳上的一个质点，假设在某个初始时刻，该球形高密度区的半径是 r_i , overdensity 是 δ_i , 背景宇宙的平均密度是 $\bar{\rho}_i$. 牛顿万有引力定律告诉我们，只有内层的物质对外层有引力，且等效于内层的全部质量集中于球心。

$$M = M(r < r_i) = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i [1 + \delta_i] = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \bar{\rho}(t) [1 + \delta(t)] \quad (5)$$

质点只受万有引力，根据牛顿定律， $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$. 积分可以得到比能 (specific energy) $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r}$. 如果比能大于 0，该层球壳可以一直膨胀，如果比能小于 0，该层球壳就会在有限时间内坍缩。

如果比能 $E = 0$,

$$r(t) = (9GM/2)^{1/3} t^{2/3} \propto t^{2/3} \quad (6)$$

而宇宙膨胀速率 $D(a) = \dot{a}/a \propto t^{-2/3}$, 球状区域和宇宙同步膨胀, 涨落不增长 $\delta(t) = \delta_i$.

在初始时刻,

$$\begin{aligned} E_i &= K_i + W_i = \frac{1}{2}v_i^2 - \frac{GM}{r_i} = \frac{1}{2}(\dot{a}x_i + a\dot{x}_i)^2 - \frac{G}{r_i} \left[\frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i) \right] \\ &\approx \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 - \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 (1 + \delta_i) = K_i - K_i(1 + \delta_i) = -K_i \delta_i \end{aligned} \quad (7)$$

其中忽略了 $a\dot{x}_i$, 且用到了 $\frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 = \frac{G}{r_i} \times \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i$. (对平均密度的宇宙, 比能 $E = 0$)

若 $\delta_i > 0$, 则 $E_i < 0$, 对于只有物质没有暗能量的宇宙来说, 高密度区总是会坍缩。

球壳的运动方程可以用以下参数方程组表示

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad t = B(\theta - \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (8)$$

$$A = \frac{GM}{2|E|}, \quad B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} \quad (9)$$

$\theta = 0$ 时, $t = 0$, 球壳开始膨胀, 在 $\theta = \pi$ 时到达最大半径, 开始折回来 (turn around), 当 $\theta = 2\pi$ 前, 这团高密度球完成维里化, 完成引力坍缩。

$$t_{\text{collapse}} = 2t_{\text{ta}} \quad (10)$$

整个过程中能量守恒。

$$E_{\text{ta}} = -\frac{GM}{r_{\text{max}}} = -\frac{H_i^2 r_i^3}{2r_{\text{max}}} (1 + \delta_i) \quad (11)$$

$$E_i = -K_i \delta_i = -\frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 \delta_i \quad (12)$$

$$E_{\text{ta}} = E_i \quad \Rightarrow \quad \frac{r_{\text{max}}}{r_i} = \frac{1 + \delta_i}{\delta_i} \approx \delta_i^{-1} \quad (13)$$

最后一步假设了 $\delta_i \ll 1$.

式 (13) 说明球壳膨胀的最大半径只与初始的 overdensity 有关, 与球壳内包含的质量绝对值无关。

根据 式 (8) 可以推知 overdensity 的演化:

1. 球形区的密度

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3} (1 - \cos(\theta))^{-3} \quad (14)$$

2. 背景的密度

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{6\pi G B^2} (\theta - \sin \theta)^{-2} \quad (15)$$

3. 所以球形区的 overdensity 是

$$1 + \delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \quad (16)$$

初始条件, 即 $\theta \ll 1$ 时, 利用泰勒展开可以得到

$$\delta_i = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left(\frac{t_i}{t_{\text{ta}}} \right)^{2/3} \quad (17)$$

在线性理论中, 我们得到 $\delta_{\text{lin}} \propto D(a) \propto a \propto t^{2/3}$, 所以线性扰动随时间变化的关系为

$$\delta_{\text{lin}}(t) = \delta_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left(\frac{t}{t_{\text{ta}}} \right)^{2/3} \quad (18)$$

比较两种理论给出的 overdensity:

在 turn-around 时刻, $(t_{\text{ta}}, \theta = \pi)$:

- SC model: $1 + \delta(t_{\text{ta}}) = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55$
- Linear theory: $\delta_{\text{lin}}(t_{\text{ta}}) = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \approx 1.062$

在 collapse 时刻, $(t_{\text{coll}} = 2t_{\text{ta}}, \theta = 2\pi)$:

- SC model: $\delta(t_{\text{coll}}) = \infty$
- Linear theory: $\delta(t_{\text{coll}}) = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \approx 1.686$

定义 critical overdensity for collapse $\delta_c = 1.686$, 在考虑暗能量存在的情况下, δ_c 只有约 1% 的修正, 一般使用近似值 1.686. 当 $\delta_{\text{lin}} > \delta_c$, 该区域就会坍缩。最后会维里化, 形成 virialized dark matter halo.

维里化后,

$$2K_f + W_f = 0 \quad (19)$$

其中 f 代表 final, 最终状态。

总能量 $E_f = K_f + W_f = \frac{1}{2}W_f = -\frac{GM}{2r_{\text{vir}}}$. 而 turn-around 时, 全部能量来自势能 $E_{\text{ta}} = W_{\text{ta}} = -\frac{GM}{r_{\text{ta}}}$, 由能量守恒得到 $r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_{\text{ta}}$, 进而 $\rho_{\text{vir}} = 8\rho_{\text{ta}}$.

利用 $\bar{\rho} \propto a^{-3} \propto t^{-2}$ 和 $t_{\text{coll}} = 2t_{\text{ta}}$ 得到维里化的暗物质晕的平均 overdensity 是

$$1 + \Delta_{\text{vir}} \equiv 1 + \delta(t_{\text{coll}}) = \frac{\rho(t_{\text{coll}})}{\bar{\rho}(t_{\text{coll}})} = \frac{8\rho(t_{\text{ta}})}{\bar{\rho}(t_{\text{ta}})/4} \quad (20)$$

$$= 32[1 + \delta(t_{\text{ta}})] = 32 \times \frac{9\pi^2}{16} = 18\pi^2 \approx 178 \quad (21)$$

人们经常用这个判据来在 N-body simulation 中认证 dark matter halos.

线性微扰理论, SC model 以及维里化对暗物质晕形成的描述总结在图 (2) 中。

2.2 椭球坍缩

实际情况中往往是椭球坍缩而非完全对称的球坍缩。

椭球高密度区的坍缩 (Ellipsoidal Collapse) 与球形高密度区的区别在于三个旋转轴不对称。最短轴的方向会先坍缩, 由椭球变成饼 (sheet / pancake / Zel'dovich pancake), 可以用 Zel'dovich 近似解释。然后会沿着第二短轴坍缩, 变成线型 (filament), 最后剩下的一个轴坍缩, 形成球状的暗物质晕 (halo)。如图 (3) 所示。

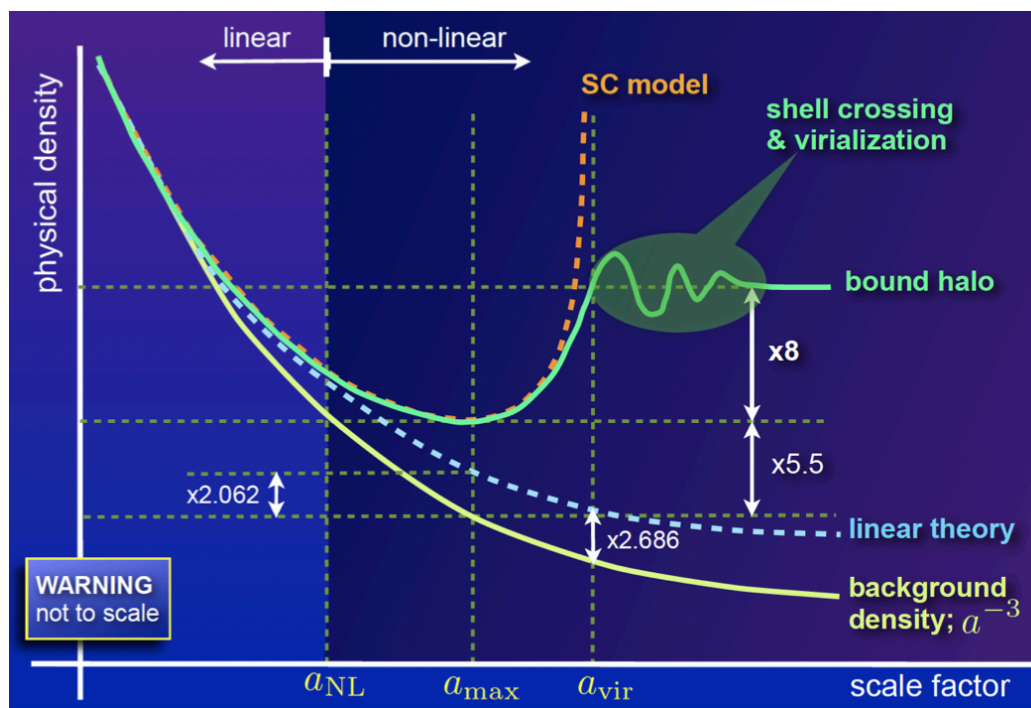


图 2: halo 的形成

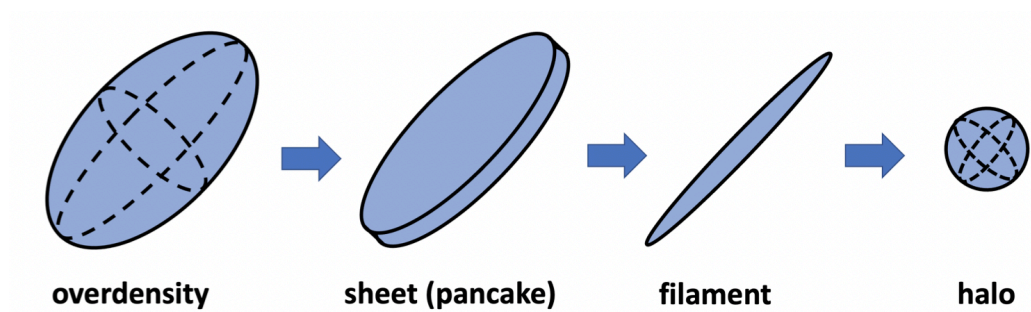


图 3: 椭球坍缩示意图

3 暗物质晕的结构

暗物质晕内部的密度并不是均匀的。我们可以用一些解析的模型来描述。

3.1 power-law density profile

最简单的是幂律谱模型 (power-law density profile)

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \quad (22)$$

在半径 r 内的质量

$$M(< r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\gamma}{3-\gamma} r^{3-\gamma} \quad (23)$$

当 $\gamma \leq 3$ 时, $\lim_{r \rightarrow \infty} M(< r) = \infty$, 总质量发散。

当 $\gamma \geq 3$ 时, $\lim_{r \rightarrow 0} M(> r) = \infty$, 质量在暗物质晕中心发散。

可见一个幂律谱无法描述暗物质晕的结构, 需要两个幂律谱拼起来, 即 double power-law profile.

3.2 double power-law profile

我们希望

$$\begin{cases} \rho \propto r^{-\gamma} & r \ll r_0 \\ \rho \propto r^{-\beta} & r \gg r_0 \end{cases} \quad (24)$$

数学上给出下式满足条件

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^\gamma [1 + (r/r_0)^\alpha]^{(\beta-\gamma)/\alpha}} \quad (25)$$

可以验证当 $r \ll r_0$ 时, $1 + (r/r_0)^\alpha \simeq 1$, 式 (25) 近似为 $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$. 当 $r \gg r_0$ 时, $1 + (r/r_0)^\alpha \simeq (r/r_0)^\alpha$, 式 (25) 近似为 $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta}$. 为了避免总质量发散或者中心质量发散, 要求 $\gamma < 3, \beta > 3$.

3.3 NFW profile

我们有了 double power-law profile , 但还不知道 α, β, γ 三个参数的取值。

N 体模拟给出的 NFW profile (由 Navarro, Frenk & White 发现) 是目前比较常用的一个好的近似模型。NFW profile 取 $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 1$, 其表达式为

$$\rho(r) = \rho_{\text{crit}} \frac{\delta_{\text{char}}}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (26)$$

如图 (4) 所示。

NFW profile 存在一个问题: Cusp-Core controversy. NFW profile 给出在靠近暗物质晕中心的区域, $\rho \propto r^{-1}$, 有一个高密度的“尖”, 即 cusp. 但观测更倾向于暗物质晕在中心区域密度不变, 即“核”的结构 (core), $\rho \propto r^0$. 这对冷暗物质理论提出了挑战。有人认为这说明冷暗物质模型不对, 他们提出了一些候选理论, 比如温暗物质 (warm dark matter), 温暗物质是运动速度比冷暗物质快的一类粒子, 这样它就会在暗物质晕形成时将中心密度较大区域的密度差异抹平。另一些人认为观测的是重子物质的分布, 有可能重子物质分布和暗物质分布并不相同, 重子物质在中心的分布是 Core, 而暗物质的分布是 Cusp.

4 暗物质晕的形成

暗物质晕的形成也是 bottom-up scenario. 暗物质晕由小质量的晕通过并合逐渐增大的过程叫做 Merger Tree. 如图 (5) 所示。

并合的过程也叫做 assembly history , assembly history 会影响暗物质晕的性质, 因此是目前重要的研究方向之一。

在暗物质晕的形成中, 我们关心不同质量的暗物质晕分别会形成多少。一个近似的方法是随机行走 (Random Walk) of dark matter halo statistics. 物质密度的空间分布是随机的, 当局部密度大于临界密度 δ_{crit} 时, 我们认为这里形成一个暗物质晕。如图 (6) 所示, 红色标出的区域是大小不同的

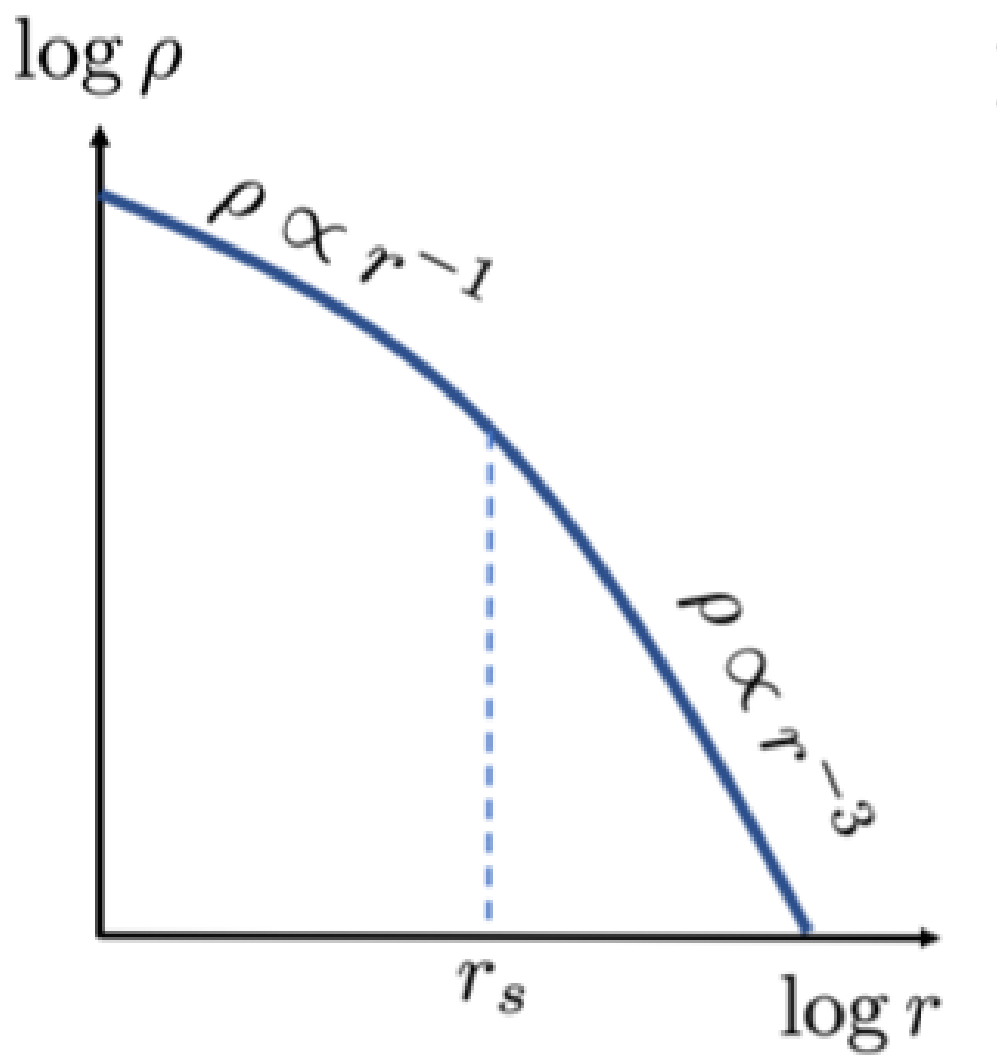


图 4: NFW profile 示意图

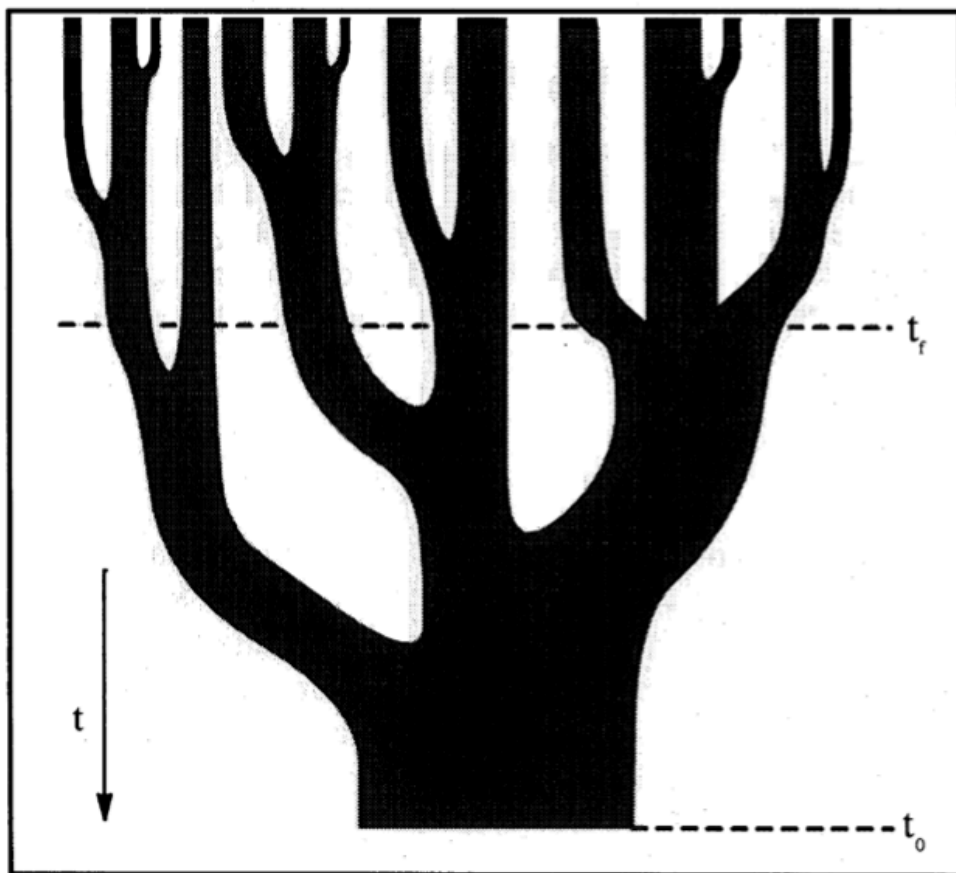


图 5: Meger Tree 示意图

暗物质晕。

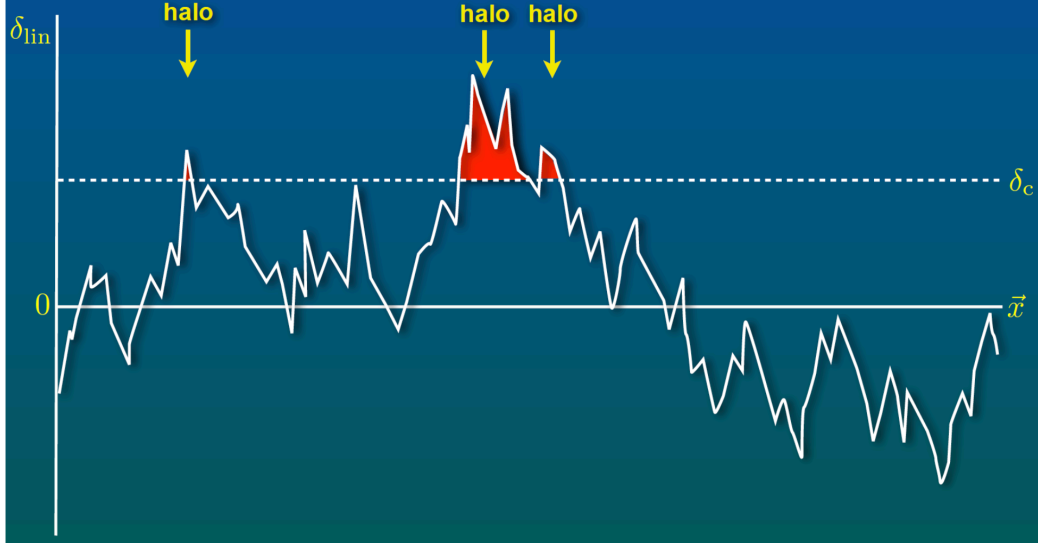


图 6: Random Walk 示意图

在半径 R 的范围内对密度涨落做平滑: $\delta_M = \delta(\vec{x}, R)$. 这个平滑尺度对应质量 $M = \bar{\rho} \times \frac{4}{3}\pi R^3$.

我们想计算的 halo mass function 是在一定质量范围内 (大于 M) halo 的数密度, 它等于在平滑尺度为 M 时的峰的数密度 $n(> M) = n_{\text{pk}}(\delta_M)$.

Press-Schechter 模型假设密度场是高斯分布

$$\mathcal{P}(\delta_M > \delta_c(t)) = F(> M, t) \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right] d\delta_M = \frac{1}{2} \text{erfc}\left[\frac{\delta_c}{2\sigma_M}\right] \quad (28)$$

其中 $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 是 error function.