Lecture 11

赵思逸

2022 年 5 月 17 日

本课程星系部分将讨论线性微扰理论、非线性结构的形成、暗物质晕结构、盘星系的形成、椭圆星系的形成。

1　线性微扰理论

本节考虑线性结构，即 $\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$.

我们将重子物质和光子辐射视为流体，考虑流体的演化方程。流体的主要性质有密度 $\rho(\vec{r}, t)$ 、速度 $\vec{u}(\vec{r}, t)$ 、压强 $P(\vec{r}, t)$ 。其中 $\vec{r}$ 是物理坐标系 (proper coordinates) 中的位置。

1.1　流体演化方程

流体满足以下三个方程：

连续性方程

连续性方程来自能量守恒，描述局域密度的变化。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0 \tag{1}$$

将括号中写开得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2}$$

定义拉格朗日导数

$$\frac{D}{Dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} \tag{3}$$

其中第一项 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}}$ 是欧拉导数 (Eulerian derivative)，第二项来自流体的运动 $\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right|_{t}$.

则连续性方程变成

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u} = 0 \tag{4}$$

欧拉方程

定义引力势 ϕ. 欧拉方程是

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\nabla_{\vec{r}} P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}} \phi \tag{5}$$

欧拉方程描述流体的运动，其中第一项由压强的梯度贡献，第二项由引力势贡献。

泊松方程

泊松方程描述引力势和密度的关系。

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{6}$$

现在我们有 $(\rho, u_i, u_j, u_k, P, \phi)$ 6 个未知量，5 个方程（其中欧拉方程是矢量方程，相当于三个分量各有一个方程），需要引入物态方程 $P = P(\rho)$ 后才能解。

1.2 共动坐标系下的方程

在膨胀宇宙中，为了方便计算，我们采取共动坐标系，记共动坐标为 $\vec{x}$，共动坐标系下的物理量与物理坐标系下的物理量有以下关系

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= a(t)\vec{x} && (7)\\
\vec{u} &= \dot{a}(t)\vec{x}+\vec{v} && (8)\\
\nabla_{\vec{r}}\big|_t &= \frac{1}{a(t)}\nabla_{\vec{x}} && (9)\\
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{x}}+\left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right|_{\vec{r}}\cdot\nabla_{\vec{x}}=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{x}}-\frac{\dot{a}}{a}\vec{x}\cdot\nabla_{\vec{x}} && (10)
\end{aligned}$$

其中 $\vec{v}\equiv a(t)\dot{\vec{x}}$ 是本动速度，以下我们省略下标 $\vec{x}$.

将密度改写成平均密度和涨落 (fluctuations) 的形式

$$\rho\left(\vec{x},t\right)=\bar{\rho}\left(t\right)\left[1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right] \tag{11}$$

其中 $\delta\left(\vec{x},t\right)$ 称为涨落或起伏 (fluctuations). 对于重子物质，有

$$\bar{\rho}\propto a^{-3} \tag{12}$$

将 式 (7) - (12) 代入式 (4) - (6)，得到：

连续性方程

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot\left[(1+\delta)\vec{v}\right]=0 \tag{13}$$

欧拉方程

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{\dot{a}}{a}\vec{v}+\frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{\nabla P}{a\bar{\rho}(1+\delta)}-\frac{\nabla\Phi}{a} \tag{14}$$

泊松方程

$$\nabla^2\Phi=4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \tag{15}$$

其中 $\Phi=\phi+\frac{a\ddot{a}\vec{x}^2}{2}$ 是修正引力势 (modified gravitational potential)。

改写到共动坐标系后我们还是有 6 个未知量 $(\rho,\vec{v},P,\Phi)$，5 个方程，需要引入物态方程 $P=P\left(\rho,T\right)$ 或 $P=P\left(\rho,S\right)$ 后才能解。

1.3 理想气体状态方程

我们考虑重子气体，单原子气体（比如原子氢、氦气体）的理想气体状态方程

$$P = nk_BT = \frac{\rho}{\mu m_p}k_BT \tag{16}$$

比内能

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{k_BT}{\mu m_p} \tag{17}$$

单原子气体 $\gamma = 5/3$, 所以 $\epsilon = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho}$.

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{2}{3}d\epsilon = \frac{2}{3}\left[TdS - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \tag{18}$$

化简得

$$\frac{dP}{P} = \frac{2\mu m_p}{3k_B}dS + \frac{5}{3}d\left(\ln\rho\right) \tag{19}$$

由此我们得到压强和密度、熵的关系

$$P\left(\rho, S\right) \propto \rho^{\frac{5}{3}}\exp\left(\frac{2\mu m_p}{3k_B}S\right) \tag{20}$$

1.4 线性微扰方程

由 式 (20) 我们得到欧拉方程右侧第一项中

$$\frac{\nabla P}{\bar\rho} = \frac{1}{\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S\nabla\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho\nabla S\right] = c_s^2\nabla\delta + \frac{2}{3}T\left(1+\delta\right)\nabla S \tag{21}$$

其中定义了声速 $c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S}$.

将 式 (21) 代入欧拉方程 式 (14) 得到

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla\Phi}{a} - \frac{c_s^2\nabla\delta}{a\left(1+\delta\right)} - \frac{2T}{3a}\nabla S \tag{22}$$

$\delta, \vec{v}, \Phi, \delta S, \delta T$ 都是小量，我们抛弃高阶项。则连续性方程和欧拉方程变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t}+\frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \qquad (23)\\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\frac{\dot{a}}{a} \vec{v} &= -\frac{\nabla \Phi}{a}-\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta-\frac{2 \bar{T}}{3 a} \nabla S \qquad (24)\end{aligned}$$

对 式 (23) 求时间偏导，将 式 (24) 和泊松方程 式 (15) 代入，得到非相对论流体的线性微扰方程

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}+2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t}=4 \pi G \bar{\rho} \delta+\frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta+\frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} \nabla^2 S \qquad (25)$$

右侧三项分别由引力、压强、熵贡献。左侧第二项是 Hubble drag, 正比于 $H(t)$, 将涨落的增长压低，相当于“摩擦力”。

1.5 涨落 (perturbations)

1.5.1 密度涨落

我们在前面使用了密度涨落 $\delta=\frac{\delta \rho}{\rho}=\frac{\rho-\bar{\rho}}{\bar{\rho}}$
将密度拆分为辐射和物质两部分

$$\bar{\rho} \delta=\rho-\bar{\rho}=\rho_r+\rho_m-\left(\bar{\rho}_r+\bar{\rho}_m\right)=\bar{\rho}_r \delta_r+\bar{\rho}_m \delta_m \qquad (26)$$

isocurvature perturbation 指 $\delta=0$, 此时 $\frac{\delta_r}{\delta_m}=-\frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r}=-\frac{a}{a_{\mathrm{eq}}}$，其中 a_{eq} 是辐射和物质密度相等的时期。

在宇宙早期，辐射占主导，即 $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_m$ ，此时 $\delta_r \sim 0$ ，称为 isothermal perturbation.

1.5.2 熵微扰 (entropy perturbation)

熵的涨落 (entropy perturbation) 定义为

$$\delta_S(\vec{x}, t)=\left[S(\vec{x}, t)-\bar{S}(t)\right] / \bar{S}(t) \qquad (27)$$

考虑熵密度

$$S = sV \propto \frac{s}{\rho_m} \propto \frac{T^3}{\rho_m} \propto \frac{\rho_r^{\frac{3}{4}}}{\rho_m} \tag{28}$$

所以

$$\delta_S = \frac{\delta S}{S} = \frac{1}{S}\left[\frac{\partial S}{\partial \rho_r}\delta\rho_r + \frac{\partial S}{\partial \rho_m}\delta\rho_m\right] = \frac{3}{4}\delta_r - \delta_m \tag{29}$$

若 $\delta S = 0$, 则 $\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m$, 称为 adiabatic perturbation, 也称为 isentropic perturbation.

以上两种都是初始条件下的微扰 (initial perturbation)。这两种微扰可以看作“正交的”，其它的微扰都可以写做这二者的线性组合。

1.6 傅立叶空间中的线性微扰论

为了便于计算空间偏导，我们考虑傅立叶空间中的微扰

$$\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{30}$$

$$\delta_S(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

在傅立叶空间中，线性微扰方程 式 (25) 中的 $\nabla \to i\vec{k}$, $\nabla^2 \to -k^2$, 对时间的偏导变为全导数。

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = \left[4\pi G\bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2}\right]\delta_{\vec{k}} - \frac{2}{3}\frac{\bar{T}}{a^2}k^2 S_{\vec{k}} \tag{33}$$

在不同的 k mode 下, $\delta_{\vec{k}}$ 和 $S_{\vec{k}}$ 是独立演化的。

1.7 重子物质涨落 (baryonic perturbation)

我们考虑初始条件是 adiabatic perturbation, 且宇宙绝热演化 (adiabatic evolution), 所以 $S_{\vec{k}} = 0$.

忽略宇宙膨胀，即 $\dot{a} = 0$, 则 式 (33) 可以化简为

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dt^2} = -\omega^2\delta_{\vec{k}} \tag{34}$$

其中 $\omega^2 \equiv \frac{k^2c_s^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho} = \frac{c_s^2}{a^2}\left(k^2 - k_{\mathrm{J}}^2\right)$.

我们定义了金斯模数

$$k_{\mathrm{J}} = \frac{2a}{c_s}\sqrt{\pi G\bar{\rho}} \tag{35}$$

金斯模数对应金斯长度 (Jeans length)

$$\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{comoving}} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{J}}} = \frac{c_s}{a}\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \tag{36}$$

$$\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{prop}} = a(t)\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{comoving}} = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \sim c_s t_{\mathrm{ff}} \tag{37}$$

即金斯长度大致是声波在引力场中一个自由落体时间 (free fall time, t_{ff}) 内经过的距离。

还可以定义金斯质量

$$M_{\mathrm{J}} = \bar{\rho} \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{prop}}}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\bar{\rho}\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{prop}3} \tag{38}$$

1.7.1 金斯判据

判断特定模式的涨落是否能增长使用金斯判据:

- 如果 $k > k_{\mathrm{J}}$, 则 $\omega^2 > 0$, 则 $\delta_{\vec{k}} \propto e^{\pm i\omega t}$, 表示涨落在振荡，即小尺度的模式不能增长。
- 如果 $k < k_{\mathrm{J}}$, 则 $\omega^2 < 0$, 记 $\omega = i\alpha$, 则 $\delta_{\vec{k}} \propto e^{\mp\alpha t}$, 取-是衰减 (decay mode)，可以忽略，取 + 是增长 (growing mode)，即大尺度的模式可以在引力的自不稳定性下增长。

1.7.2 金斯尺度的变化

在再复合之后，$P = \frac{k_B T}{\mu m_p}\rho$, 绝热指数 $\gamma = 5/3$, 所以 $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \left(\frac{5 k_B T}{3 \mu m_p}\right)^{1/2} \propto T^{1/2} \propto a^{-1}$. 这里由于宇宙膨胀，$T \propto a^{-2}$. 当 z=1100 时，$\lambda_{\mathrm{J}}^{\text{comoving}} \simeq 10^{-5} \left(\Omega_b h^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ Mpc. $M_{\mathrm{J}} \simeq 1.5 \times 10^5 \left(\Omega_b h^2\right)^{-\frac{1}{2}} M_{\odot}$, 约为球状星团的质量，所以再复合之后，比球状星团大的重子涨落都可以增长。

在再复合之前，$\rho = \rho_b + \rho_r$, $\rho_b \propto a^{-3}$, $\rho_r \propto a^{-4}$. $P = P_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$.

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{3\bar{\rho}_b(t)}{4\bar{\rho}_r(t)}\right]^{-1/2} \tag{39}$$

当 $t = t_{eq}$ 时，$M_{\mathrm{J}} \simeq 1.2 \times 10^{16} \left(\Omega_b h^2\right)^{-2} M_{\odot}$, 约为 supercluster 的质量，在再复合之前，绝热重子涨落要比 supercluster 大才能增长。

再复合之前，光子和重子散射，会把涨落抹平，称为 Silk Damping. 光子的自由程 $\lambda = (\sigma_T n_e)^{-1}$. 散射次数约为哈勃时间内光子走过的自由程个数 $N = \frac{ct}{\lambda}$. 光子在 3 个方向上随机游走，

$$\lambda_d = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda = \left(\frac{ct}{3\sigma_T n_e}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

光子会把这个范围内的涨落抹平。

总的来说，共动坐标下金斯长度随时间的变化如 图 (1) 所示。

- $t > t_{\text{rec}}$ 时，$\bar{\rho} \propto a^{-3}$, $c_s \propto a^{-1}$, $\lambda_{\mathrm{J}}^{\text{comoving}} \propto a^{-1/2}$.
- $t_{\text{eq}} < t < t_{\text{rec}}$ 时，$\bar{\rho} \propto a^{-3}$, $c_s \propto a^{-1/2}$, $\lambda_{\mathrm{J}}^{\text{comoving}} \propto a^0$, 但存在 Silk Damping.
- $t < t_{\text{eq}}$ 时，$\bar{\rho} \propto a^{-4}$, $c_s \propto a^0$, $\lambda_{\mathrm{J}}^{\text{comoving}} \propto a$.

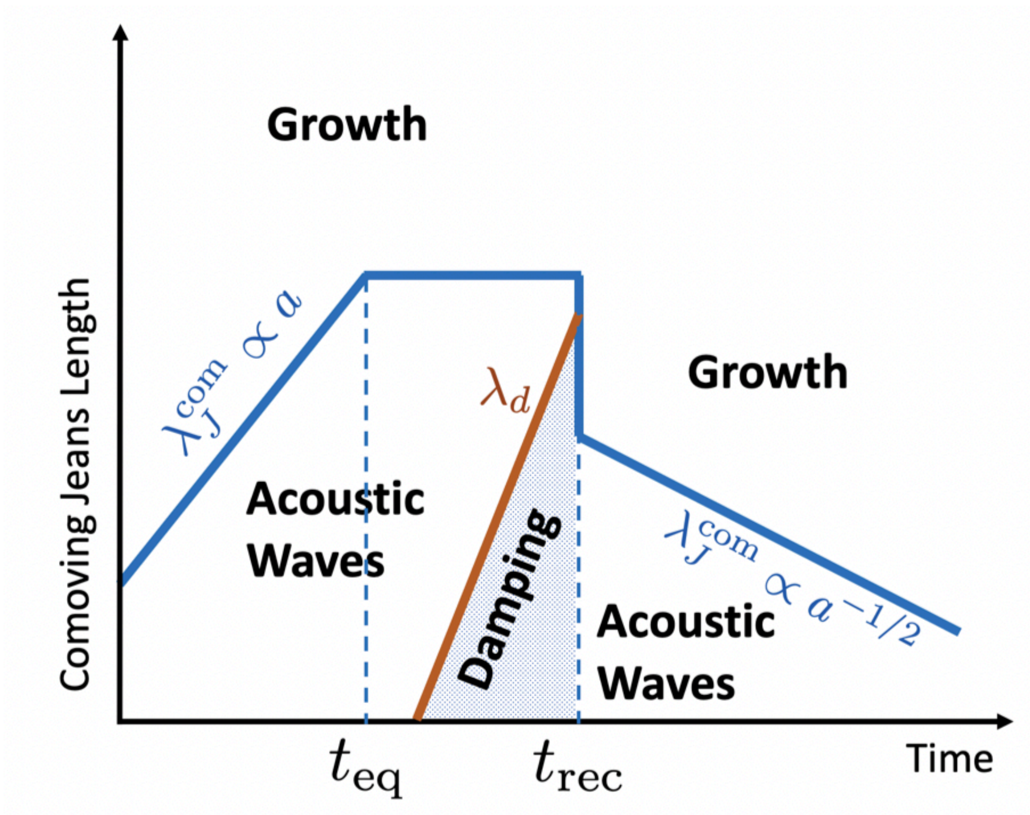

图 1: 共动坐标下金斯长度随时间的变化