

# Lecture 12

授课、校对：茅奕

记录：赵思逸

2022 年 5 月 24 日

## 1 线性微扰理论（续）

### 1.1 考虑宇宙膨胀

上节课我们在计算重子物质涨落时忽略宇宙膨胀，现在我们加上这个效应（Hubble drag, 下式左边第二项），完整的线性微扰方程为

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = \left[ 4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta_{\vec{k}} - \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} k^2 S_{\vec{k}} \quad (1)$$

我们忽略声速项  $\frac{k^2 c_s^2}{a^2} \delta_{\vec{k}}$ ，并且假设 isentropic perturbations，所以也忽略  $\frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} k^2 S_{\vec{k}}$ 。线性微扰方程变成

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} \delta_{\vec{k}} \quad (2)$$

在物质为主 ( $\Omega_M = 1$ ) 的宇宙里，其增长解由随时间  $\exp$  指数增长减为随时间幂次增长，即 式 (2) 的增长解为

$$\delta_+ \propto H(t) \int_0^t \frac{dt'}{a^2(t') H^2(t')} \propto H(z) \int_z^\infty \frac{1+z'}{E^3(z')} dz' \propto t^{2/3} \quad (3)$$

也就是说，Hubble drag 延缓了宇宙物质扰动的增长速度。

对于超视界的涨落 (Super-Horizon perturbation), 即  $\lambda > \lambda_H$ , 有  $\Phi_{\vec{k}} = \text{const.}$  所以

$$-k^2 \Phi_{\vec{k}} = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta_{\vec{k}} \Rightarrow \delta_{\vec{k}} \propto (\bar{\rho} a^2)^{-1} \quad (4)$$

$\delta_{\vec{k}}$  随着  $(\bar{\rho} a^2)^{-1}$  增长。

对于视界以内的涨落 (Sub-Horizon perturbation), 即  $\lambda < \lambda_H$ , 在辐射主导时期, 这些涨落会震荡。

在物质主导期 ( $\Omega_M \approx 1$ ),

$$\delta_+ \propto t^{2/3} \propto a = \frac{1}{1+z} \quad (5)$$

将  $\delta_{\vec{k}}$  的空间部分和时间部分分开:  $\delta_{\vec{k}}(t) = \delta_{\vec{k}}(t_0) D(t)$ , 其中定义了  $D(t)$  是线性增长率 (linear growth rate), 写做红移的函数为  $D(z) = g(z)/(1+z)$ . 此时

$$\delta_+ \propto D(t) \propto a = \frac{1}{1+z} \quad (6)$$

图 (1) 总结了考虑宇宙膨胀时的重子涨落情况。

因为 Silk damping 的存在, 到 recombination 时, 所有小尺度的重子涨落都被擦除, 结构形成只能是大尺度的涨落先涨起来, 然后再逐渐过渡到小尺度, 这叫做 Top-down Scenario. 但 Top-down Scenario 存在问题: 在 Top-down Scenario 中, 要形成今天的大尺度结构, 需要 recombination 时的物质涨落  $|\delta_m| > 10^{-3}$ . 而物质涨落和 CMB 涨落相联系  $\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4}|\delta_r| = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3}|\delta_m| \sim 10^{-3}$ . 早期 CMB 的测量就排除了 Top-down Scenario. 今天测量到 CMB 涨落约为  $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ .

可见仅有重子涨落无法解释现有的观测迹象, 需要另一种物质来提供涨落, 这就是暗物质。

## 1.2 Dark Matter Perturbation

暗物质是不与光子发生相互作用的物质, 目前尚不清楚它的本质, 可能是某些未被发现的“新粒子”, 在宇宙早期脱离热平衡遗留下来 (thermal

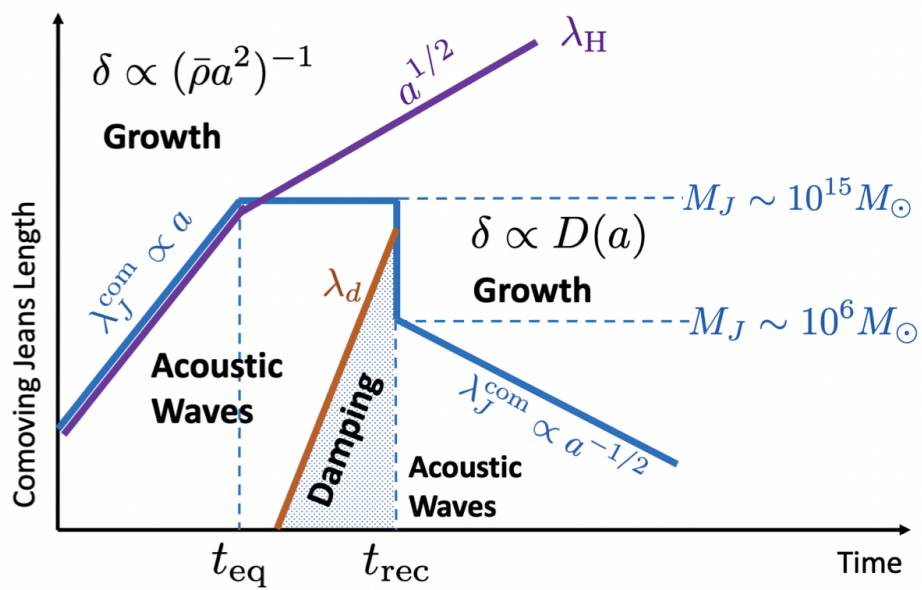


图 1: 考虑宇宙膨胀时的重子涨落

relics), 也有模型不是热平衡遗留造成的。目前主要有以下几类暗物质模型:

- 冷暗物质 (cold dark matter, CDM): 粒子运动速度较低的暗物质模型。除了不和重子物质作用外, 自身相互作用也很小。最有名的如 WIMP 微弱作用大质量粒子 (Weakly Interacting Massive Particals) .
- 热暗物质 (hot dark matter, HDM): 粒子热运动速度较大的暗物质模型。比如退耦后的中微子。
- 其它暗物质模型: Non-thermal relics, 不是脱离热平衡而来。比如轴子 axions, 磁单极子 monopoles, 宇宙弦 cosmic strings, 其中后两者都属于宇宙的拓扑缺陷 (topologicial defects)

目前宇宙学观测比较倾向冷暗物质, 我们以下也用冷暗物质模型考虑暗物质涨落。

冷暗物质是无碰撞粒子, 不能使用流体力学方程。

我们用到连续性方程

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0 \quad (7)$$

和金斯方程 (类比流体力学的欧拉方程)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\sigma^2}{a} \frac{\nabla \delta}{1 + \delta} \quad (8)$$

用  $\sigma$  替换了欧拉方程中的  $c_s$ . 其中定义了速度色散 (velocity dispersion tensor)  $\sigma_{ij} \equiv \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$  在各向同性假设下  $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$ , 加上均匀性假设  $\sigma = \langle v_i^2 \rangle^{1/2}$ .

对比流体力学方程可得金斯尺度

$$\lambda_J^{\text{prop}} = a(t) \lambda_J^{\text{com}} = a(t) \frac{2\pi}{k_J} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} \quad (9)$$

$\lambda > \lambda_J$  时, 涨落在引力作用下增长 (gravitational collapse).  $\lambda < \lambda_J$  时, 无碰撞的暗物质粒子会将涨落抹掉, 而不是以波的形式存在, 叫做 free streaming damping.

在辐射主导时期,

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G(\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r)\delta_{\vec{k}} \Rightarrow \delta_+ \propto 1 + \frac{3\bar{\rho}_m}{2\bar{\rho}_r} = 1 + \frac{3a}{2a_{\text{eq}}} \quad (10)$$

当  $a \ll a_{\text{eq}}$ ,  $\delta_+ \propto 1$ , 涨落停滞, 即使大于金斯尺度也不会增长 (Stagnation), 也称为 Meszaros 效应。

可见在辐射主导区, 各尺度的暗物质涨落都无法增长, 需要等到  $t_{\text{eq}}$  之后才能增长。

小尺度的结构先形成, 继而碰撞形成大尺度的结构, 这叫做 Bottom-up Scenario. 暗物质先形成非线性结构, 重子物质落入暗物质涨落形成的引力势阱中, 形成恒星与星系。

图 (2) 总结了暗物质涨落。

## 2 非线性结构

以上都是线性微扰理论, 只适用于  $\delta \ll 1$  的情况, 在 recombination ( $\delta \sim 10^{-5}$ ) 前后是适用的。而今天的星系都属于  $\delta \gg 1$  的非线性结构, 在本节中我们考虑非线性结构。

非线性结构不能用高斯场, 不同模之间不独立, 不能用简单的 growth rate 来表示涨落的生长。

处理非线性结构有以下几种方法:

- 最“精确”的方法是数值模拟, 但是也受到算法的影响。
- 在 quasi-linear 区域可以用高阶的微扰论。
- Oversimplified analytical models 不准确, 但可以给我们一些物理直觉。

我们的课程将介绍部分 Oversimplified analytical models.

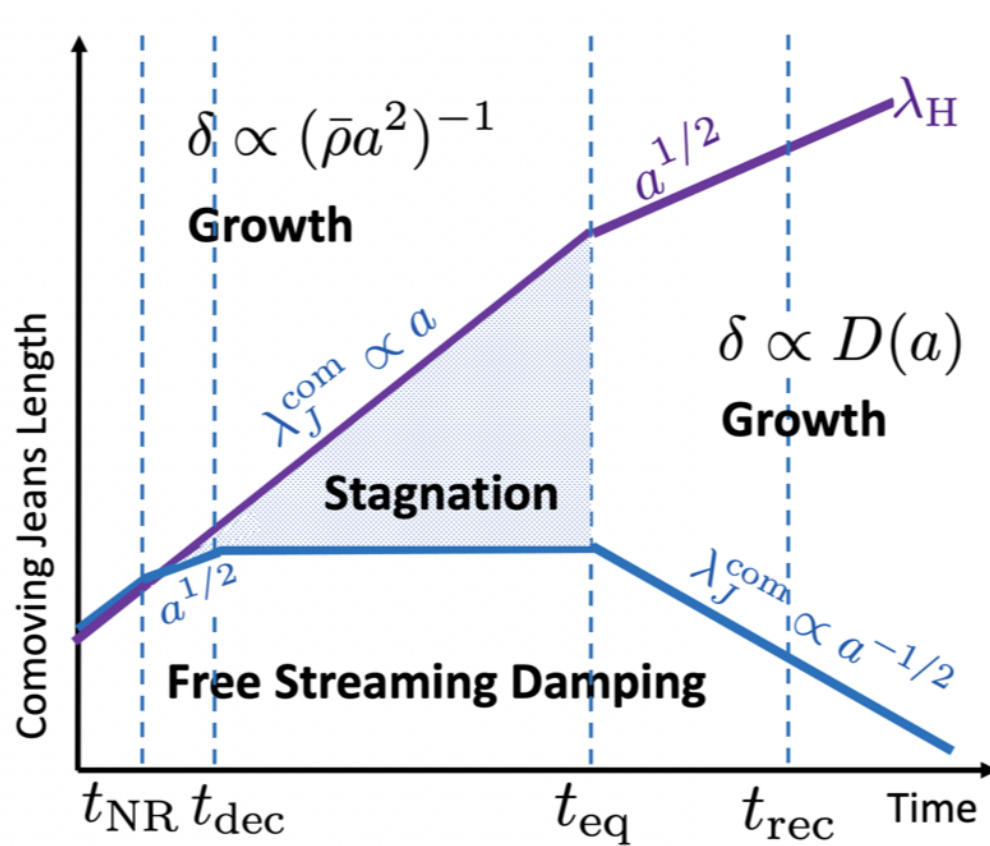


图 2: 冷暗物质模型给出的暗物质涨落

## 2.1 Spherical Collapse (SC) model

我们考察均匀宇宙中的一个球状高密度区  $\delta > 0$ . 简单起见, 我们假设宇宙中只有物质, 没有暗能量。

把这个球状高密度区分成一层层球壳, 不失一般性, 考察某个球壳上的一个质点, 假设在某个初始时刻, 该球形高密度区的半径是  $r_i$ , overdensity 是  $\delta_i$ , 背景宇宙的平均密度是  $\bar{\rho}_i$ . 牛顿万有引力定律告诉我们, 只有内层的物质对外层有引力, 且等效于内层的全部质量集中于球心。

$$M = M(r < r_i) = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i [1 + \delta_i] = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \bar{\rho}(t) [1 + \delta(t)] \quad (11)$$

质点只受万有引力, 根据牛顿定律,  $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$ . 积分可以得到比能 (specific energy)  $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r}$ . 如果比能大于 0, 该层球壳可以一直膨胀, 如果比能小于 0, 该层球壳就会在有限时间内坍缩。

如果比能  $E = 0$ ,

$$r(t) = (9GM/2)^{1/3} t^{2/3} \propto t^{2/3} \quad (12)$$

而宇宙膨胀速率  $D(a) = \dot{a} \propto t^{-2/3}$ , 球状区域和宇宙同步膨胀, 涨落不增长  $\delta(t) = \delta_i$ .

在初始时刻,

$$\begin{aligned} E_i &= K_i + W_i = \frac{1}{2}v_i^2 - \frac{GM}{r_i} = \frac{1}{2}(\dot{a}x_i + a\dot{x}_i)^2 - \frac{G}{r_i} \left[ \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i) \right] \\ &\approx \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 - \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 (1 + \delta_i) = K_i - K_i (1 + \delta_i) = -K_i \delta_i \end{aligned} \quad (13)$$

其中忽略了  $a\dot{x}_i$ , 且用到了  $\frac{1}{2}H_i^2 r_i^2 = \frac{G}{r_i} \times \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i$ . (对平均密度的宇宙, 比能  $E = 0$ )

若  $\delta_i > 0$ , 则  $E_i < 0$ , 对于只有物质没有暗能量的宇宙来说, 高密度区总是会坍缩。

球壳的运动方程可以用以下参数方程组表示

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad t = B(\theta - \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (14)$$

$$A = \frac{GM}{2|E|}, \quad B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} \quad (15)$$

$\theta = 0$  时,  $t = 0$ , 球壳开始膨胀, 在  $\theta = \pi$  时到达最大半径, 开始折回来 (turn around), 当  $\theta = 2\pi$  前, 这团高密度球完成维里化, 完成引力坍缩。

$$t_{\text{collapse}} = 2t_{\text{ta}} \quad (16)$$

整个过程中能量守恒。

$$E_{\text{ta}} = -\frac{GM}{r_{\text{max}}} = -\frac{H_i^2 r_i^3}{2r_{\text{max}}}(1 + \delta_i) \quad (17)$$

$$E_i = -K_i \delta_i = -\frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 \delta_i \quad (18)$$

$$E_{\text{ta}} = E_i \Rightarrow \frac{r_{\text{max}}}{r_i} = \frac{1 + \delta_i}{\delta_i} \approx \delta_i^{-1} \quad (19)$$

最后一步假设了  $\delta_i \ll 1$ .

式 (19) 说明球壳膨胀的最大半径只与初始的 overdensity 有关, 与球壳内包含的质量绝对值无关。

根据 式 (14) 可以推知 overdensity 的演化:

1. 球形区的密度

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3} (1 - \cos(\theta))^{-3} \quad (20)$$

2. 背景的密度

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{6\pi G B^2} (\theta - \sin \theta)^{-2} \quad (21)$$

3. 所以球形区的 overdensity 是

$$1 + \delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \quad (22)$$

初始条件, 即  $\theta \ll 1$  时, 利用泰勒展开可以得到

$$\delta_i = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left( \frac{t_i}{t_{\text{ta}}} \right)^{2/3} \quad (23)$$



在线性理论中, 我们得到  $\delta_{\text{lin}} \propto D(a) \propto a \propto t^{2/3}$ , 所以线性扰动随时间变化的关系为

$$\delta_{\text{lin}}(t) = \delta_i \left( \frac{t}{t_i} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left( \frac{t}{t_{\text{ta}}} \right)^{2/3} \quad (24)$$

比较两种理论给出的 overdensity:

在 turn-around 时刻,  $(t_{\text{ta}}, \theta = \pi)$ :

- SC model:  $1 + \delta(t_{\text{ta}}) = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55$
- Linear theory:  $\delta_{\text{lin}}(t_{\text{ta}}) = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \approx 1.062$

在 collapse 时刻,  $(t_{\text{coll}} = 2t_{\text{ta}}, \theta = 2\pi)$ :

- SC model:  $\delta(t_{\text{coll}}) = \infty$
- Linear theory:  $\delta(t_{\text{coll}}) = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \approx 1.686$

定义 critical overdensity for collapse  $\delta_c = 1.686$ , 在考虑暗能量存在的情况下,  $\delta_c$  只有约 1% 的修正, 一般使用近似值 1.686. 当  $\delta_{\text{lin}} > \delta_c$ , 该区域就会坍缩。最后会维里化, 形成 virialized dark matter halo.

维里化后,

$$2K_f + W_f = 0 \quad (25)$$

其中  $f$  代表 final, 最终状态。

总能量  $E_f = K_f + W_f = \frac{1}{2}W_f = -\frac{GM}{2r_{\text{vir}}}$ . 而 turn-around 时, 全部能量来自势能  $E_{\text{ta}} = W_{\text{ta}} = -\frac{GM}{r_{\text{ta}}}$ , 由能量守恒得到  $r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_{\text{ta}}$ , 进而  $\rho_{\text{vir}} = 8\rho_{\text{ta}}$ .

利用  $\bar{\rho} \propto a^{-3} \propto t^{-2}$  和  $t_{\text{coll}} = 2t_{\text{ta}}$  得到维里化的暗物质晕的平均 overdensity 是

$$1 + \Delta_{\text{vir}} \equiv 1 + \delta(t_{\text{coll}}) = \frac{\rho(t_{\text{coll}})}{\bar{\rho}(t_{\text{coll}})} = \frac{8\rho(t_{\text{ta}})}{\bar{\rho}(t_{\text{ta}})/4} \quad (26)$$

$$= 32[1 + \delta(t_{\text{ta}})] = 32 \times \frac{9\pi^2}{16} = 18\pi^2 \approx 178 \quad (27)$$

人们经常用这个判据来在 N-body simulation 中认证 dark matter halos.

线性微扰理论, SC model 以及维里化对暗物质晕形成的描述总结在图 (3) 中。

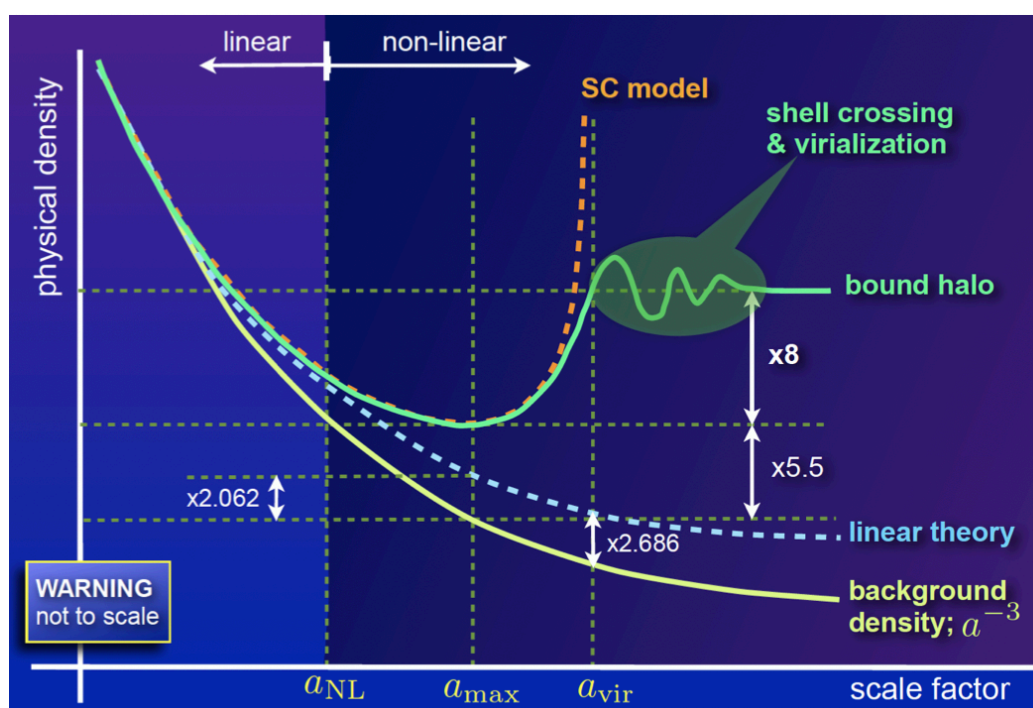


图 3: halo 的形成

## 2.2 椭球坍缩

实际情况中往往是椭球坍缩而非完全对称的球坍缩。

椭球高密度区的坍缩 (Ellipsoidal Collapse) 与球形高密度区的区别在于三个旋转轴不对称。最短轴的方向会先坍缩, 由椭球变成饼(sheet/pancake/Zel'dovich pancake), 可以用 Zel'dovich 近似解释。然后会沿着第二短轴坍缩, 变成线型(filament), 最后剩下的一个轴坍缩, 形成球状的暗物质晕(halo)。如图(4)所示。

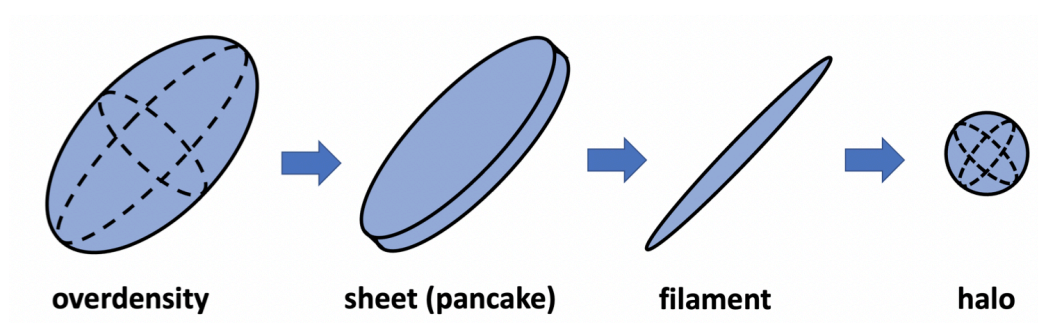


图 4: 椭球坍缩示意图