Lecture 12

2023 年 6 月 1 日

1 Dark Matter Perturbation

暗物质是不与光子发生相互作用的物质，目前尚不清楚它的本质，可能是某些未被发现的“新粒子”，在宇宙早期脱离热平衡遗留下来（thermal relics），也有模型不是热平衡遗留造成的。目前主要有以下几类暗物质模型：

- 冷暗物质 (cold dark matter, CDM)：粒子运动速度较低的暗物质模型。除了不和重子物质作用外，自身相互作用也很小。最有名的如 WIMP 微弱作用大质量粒子 (Weakly Interacting Massive Particals) .
- 热暗物质 (hot dark matter, HDM)：粒子热运动速度较大的暗物质模型。比如退耦后的中微子。
- 其它暗物质模型：Non-thermal relics, 不是脱离热平衡而来。比如轴子 axions, 磁单极子 monopoles, 宇宙弦 cosmic strings，其中后两者都属于宇宙的拓扑缺陷 (topologecial defects)

目前宇宙学观测比较倾向冷暗物质，我们以下也用冷暗物质模型考虑暗物质涨落。

冷暗物质是无碰撞粒子，不能使用流体力学方程。

我们用到连续性方程

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\cdot[(1+\delta)\vec{v}]=0 \tag{1}$$

和金斯方程（类比流体力学的欧拉方程）

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{\dot{a}}{a}\vec{v}+\frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{\nabla\Phi}{a}-\frac{\sigma^2}{a}\frac{\nabla\delta}{1+\delta} \tag{2}$$

用 σ 替换了欧拉方程中的 c_s. 其中定义了速度色散 (velocity dispersion tensor) $\sigma_{ij}\equiv\langle v_iv_j\rangle-\langle v_i\rangle\langle v_j\rangle$ 在各向同性假设下 $\sigma_{ij}=\sigma\delta_{ij}$, 加上均匀性假设 $\sigma=\langle v_i^2\rangle^{1/2}$.

对比流体力学方程可得金斯尺度

$$\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{prop}}=a(t)\lambda_{\mathrm{J}}^{\mathrm{com}}=a(t)\frac{2\pi}{k_{\mathrm{J}}}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \tag{3}$$

$\lambda>\lambda_{\mathrm{J}}$ 时, 涨落在引力作用下增长 (gravitational collapse). $\lambda<\lambda_{\mathrm{J}}$ 时, 无碰撞的暗物质粒子会将涨落抹掉, 而不是以波的形式存在, 叫做 free streaming damping.

在辐射主导时期,

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dt^2}+2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt}=4\pi G\left(\bar{\rho}_m+\bar{\rho}_r\right)\delta_{\vec{k}} \quad\Rightarrow\quad \delta_+\propto 1+\frac{3\bar{\rho}_m}{2\bar{\rho}_r}=1+\frac{3a}{2a_{\mathrm{eq}}} \tag{4}$$

当 $a\ll a_{\mathrm{eq}}$, $\delta_+\propto 1$, 涨落停滞, 即使大于金斯尺度也不会增长 (Stagnation), 也称为 Meszaros 效应。

可见在辐射主导区，各尺度的暗物质涨落都无法增长，需要等到 t_{eq} 之后才能增长。

小尺度的结构先形成, 继而碰撞形成大尺度的结构, 这叫做 Bottom-up Scenario. 暗物质先形成非线性结构，重子物质落入暗物质涨落形成的引力势阱中，形成恒星与星系。

图 (1) 总结了暗物质涨落。

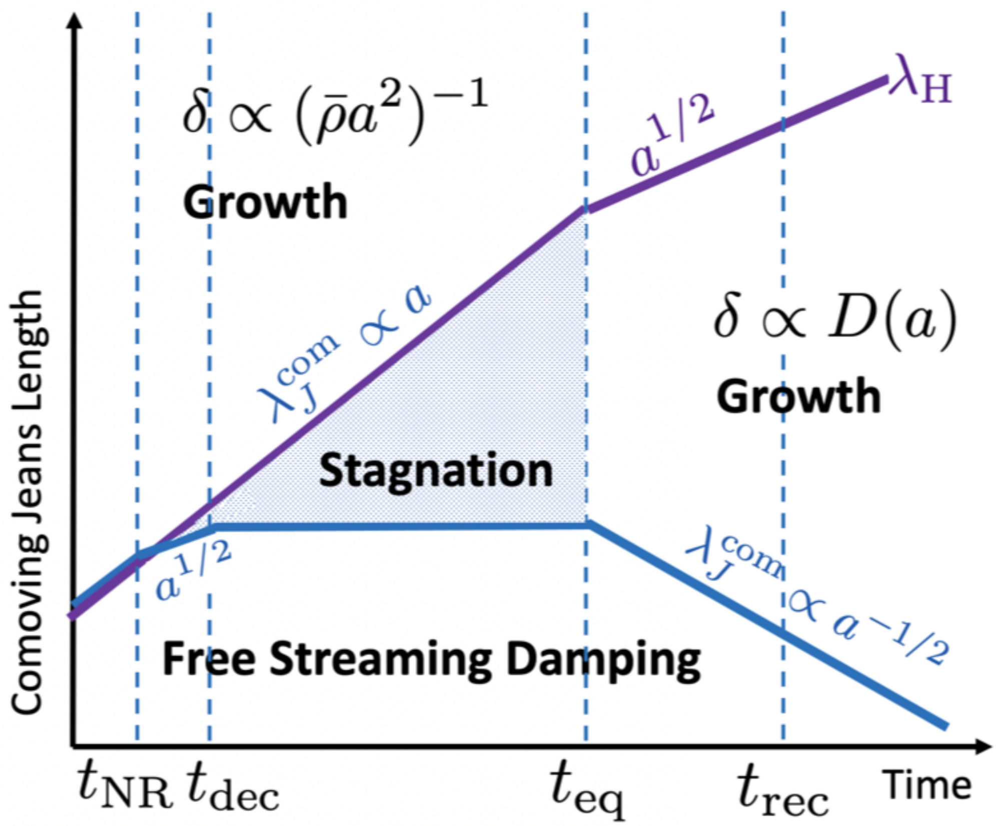


图 1: 冷暗物质模型给出的暗物质涨落

2 非线性结构

以上都是线性微扰理论，只适用于 $\delta \ll 1$ 的情况，在 recombination ($\delta \sim 10^{-5}$) 前后是适用的。而今天的星系都属于 $\delta \gg 1$ 的非线性结构，在本节中我们考虑非线性结构。

非线性结构不能用高斯场，不同模之间不独立，不能用简单的 growth rate 来表示涨落的增长。

处理非线性结构有以下几种方法：

- 最"精确"的方法是数值模拟，但是也受到算法的影响。
- 在 quasi-linear 区域可以用高阶的微扰论。
- Oversimplified analytical models 不准确，但可以给我们一些物理直觉。

我们的课程将介绍部分 Oversimplified analytical models.

2.1 Spherical Collapse (SC) model

我们考察均匀宇宙中的一个球状高密度区 $\delta > 0$. 简单起见，我们假设宇宙中只有物质，没有暗能量。

把这个球状高密度区分成一层层球壳，不失一般性，考察某个球壳上的一个质点，假设在某个初始时刻，该球形高密度区的半径是 r_i, overdensity 是 δ_i, 背景宇宙的平均密度是 $\bar{\rho}_i$. 牛顿万有引力定律告诉我们，只有内层的物质对外层有引力，且等效于内层的全部质量集中于球心。

$$M = M(r < r_i) = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i \left[1 + \delta_i\right] = \frac{4}{3}\pi r^3(t)\bar{\rho}(t)[1 + \delta(t)] \tag{5}$$

质点只受万有引力，根据牛顿定律，$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$. 积分可以得到比能 (specific energy) $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r}$. 如果比能大于 0，该层球壳可以一直膨胀，如果比能小于 0，该层球壳就会在有限时间内坍缩。

如果比能 $E=0$,

$$r(t)=(9GM/2)^{1/3}t^{2/3}\propto t^{2/3} \tag{6}$$

而宇宙膨胀速率 $D(a)=a\propto t^{2/3}$，球状区域和宇宙同步膨胀，涨落不增长 $\delta(t)=\delta_i$.

在初始时刻，

$$\begin{aligned} E_i=K_i+W_i=\frac{1}{2}v_i^2-\frac{GM}{r_i}&=\frac{1}{2}\left(\dot{a}x_i+a\dot{x}_i\right)^2-\frac{G}{r_i}\left[\frac{4}{3}\pi r_i^3\bar{\rho}_i\left(1+\delta_i\right)\right] \\ \approx\frac{1}{2}H_i^2r_i^2-\frac{1}{2}H_i^2r_i^2\left(1+\delta_i\right)&=K_i-K_i\left(1+\delta_i\right)=-K_i\delta_i \end{aligned} \tag{7}$$

其中忽略了 $a\dot{x}_i$, 且用到了 $\frac{1}{2}H_i^2r_i^2=\frac{G}{r_i}\times\frac{4}{3}\pi r_i^3\bar{\rho}_i$. （对平均密度的宇宙，比能 $E=0$）

若 $\delta_i>0$, 则 $E_i<0$, 对于只有物质没有暗能量的宇宙来说，高密度区总是会坍缩。

球壳的运动方程可以用以下参数方程组表示

$$r=A(1-\cos\theta),\quad t=B(\theta-\sin\theta),\quad \theta\in[0,2\pi] \tag{8}$$

$$A=\frac{GM}{2|E|},\quad B=\frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} \tag{9}$$

$\theta=0$ 时，$t=0$ ，球壳开始膨胀，在 $\theta=\pi$ 时到达最大半径，开始折回来（turn around），当 $\theta=2\pi$ 前，这团高密度球完成维里化，完成引力坍缩。

$$t_{\rm collapse}=2t_{\rm ta} \tag{10}$$

整个过程中能量守恒。

$$E_{\rm ta} = -\frac{GM}{r_{\rm max}}=-\frac{H_i^2r_i^3}{2r_{\rm max}}(1+\delta_i) \tag{11}$$

$$E_i = -K_i\delta_i=-\frac{1}{2}H_i^2r_i^2\delta_i \tag{12}$$

$$E_{\rm ta}=E_i \quad\Rightarrow\quad \frac{r_{\rm max}}{r_i}=\frac{1+\delta_i}{\delta_i}\approx\delta_i^{-1} \tag{13}$$

最后一步假设了 $\delta_i \ll 1$.

式 (13) 说明球壳膨胀的最大半径只与初始的 overdensity 有关，与球壳内包含的质量绝对值无关。

根据 式 (8) 可以推知 overdensity 的演化：

1. 球形区的密度

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3}(1-\cos(\theta))^{-3} \tag{14}$$

2. 背景的密度

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{6\pi G B^2}(\theta - \sin\theta)^{-2} \tag{15}$$

3. 所以球形区的 overdensity 是

$$1+\delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2}\frac{(\theta-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} \tag{16}$$

初始条件，即 $\theta \ll 1$ 时，利用泰勒展开可以得到

$$\delta_i = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3}\left(\frac{t_i}{t_{\mathrm{ta}}}\right)^{2/3} \tag{17}$$

在线性理论中，我们得到 $\delta_{\text{lin}} \propto D(a) \propto a \propto t^{2/3}$, 所以线性扰动随时间变化的关系为

$$\delta_{\text{lin}}(t) = \delta_i\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3}\left(\frac{t}{t_{\mathrm{ta}}}\right)^{2/3} \tag{18}$$

比较两种理论给出的 overdensity:

在 turn-around 时刻，$(t_{\mathrm{ta}}, \theta=\pi)$:

- SC model: $1+\delta\left(t_{\mathrm{ta}}\right) = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55$
- Linear theory: $\delta_{\text{lin}}\left(t_{\mathrm{ta}}\right) = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} \approx 1.062$

在 collapse 时刻，$(t_{\text{coll}} = 2t_{\mathrm{ta}}, \theta = 2\pi)$:

- SC model: $\delta\left(t_{\text{coll}}\right)=\infty$
- Linear theory: $\delta\left(t_{\text{coll}}\right)=\frac{3}{20}(12\pi)^{2/3}\approx 1.686$

定义 critical overdensity for collapse $\delta_c=1.686$, 在考虑暗能量存在的情况下，δ_c 只有约 1% 的修正，一般使用近似值 1.686. 当 $\delta_{\text{lin}}>\delta_c$ ，该区域就会坍缩。最后会维里化，形成 virialized dark matter halo.

维里化后，

$$2K_f+W_f=0 \tag{19}$$

其中 f 代表 final，最终状态。

总能量 $E_f=K_f+W_f=\frac{1}{2}W_f=-\frac{GM}{2r_{\text{vir}}}$. 而 turn-around 时，全部能量来自势能 $E_{\text{ta}}=W_{\text{ta}}=-\frac{GM}{r_{\text{ta}}}$, 由能量守恒得到 $r_{\text{vir}}=\frac{1}{2}r_{\text{ta}}$, 进而 $\rho_{\text{vir}}=8\rho_{\text{ta}}$. 而 ρ_{ta} 可以用 SC model 计算得到，这样我们就能解析地得到维里化后的密度。

利用 $\bar{\rho}\propto a^{-3}\propto t^{-2}$ 和 $t_{\text{coll}}=2t_{\text{ta}}$ 得到维里化的暗物质晕的平均 overdensity 是

$$\begin{aligned}
1+\Delta_{\text{vir}} &\equiv 1+\delta\left(t_{\text{coll}}\right)=\frac{\rho\left(t_{\text{coll}}\right)}{\bar{\rho}\left(t_{\text{coll}}\right)}=\frac{8\rho\left(t_{\text{ta}}\right)}{\bar{\rho}\left(t_{\text{ta}}\right)/4} && (20)\\
&= 32\left[1+\delta\left(t_{\text{ta}}\right)\right]=32\times\frac{9\pi^2}{16}=18\pi^2\approx 178 && (21)
\end{aligned}$$

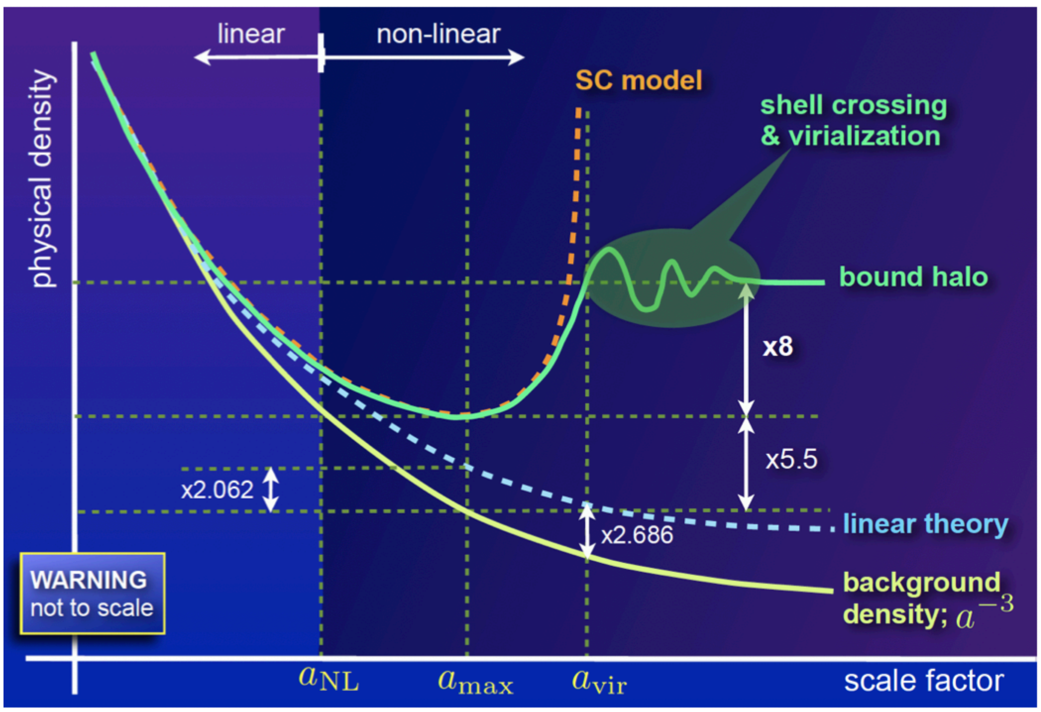
人们经常用这个判据来在 N-body simulation 中认证 dark matter halos.

线性微扰理论，SC model 以及维里化对暗物质晕形成的描述总结在图 (2) 中。

2.2 椭球坍缩

实际情况中往往是椭球坍缩而非完全对称的球坍缩。

椭球高密度区的坍缩 (Ellipsoidal Collapse) 与球形高密度区的区别在于三个旋转轴不对称。最短轴的方向会先坍缩，由椭球变成饼 (sheet / pancake / Zel'dovich pancake)，可以用 Zel'dovich 近似解释。然后会沿着第二短轴



linear
non-linear
SC model
shell crossing
& virialization
physical density
bound halo
x8
x5.5
x2.062
linear theory
x2.686
WARNING
not to scale
background
density; a^{-3}
$a_{\rm NL}$
$a_{\rm max}$
$a_{\rm vir}$
scale factor

图 2: halo 的形成

坍缩，变成线型（filament），最后剩下的一个轴坍缩，形成球状的暗物质晕(halo)。如 图 (3) 所示。

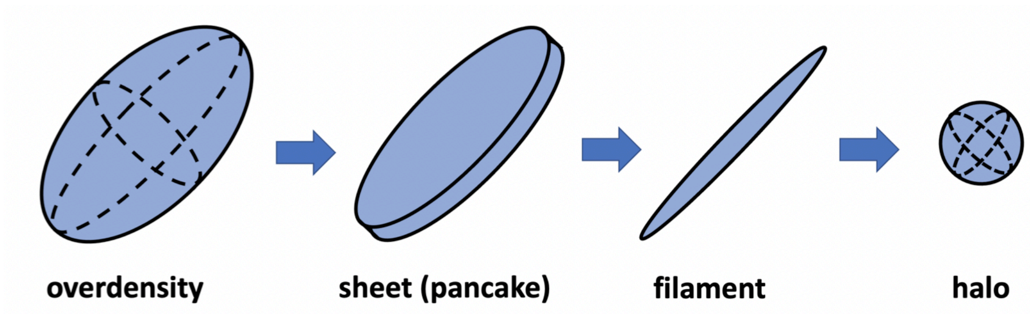


图 3: 椭球坍缩示意图

3 暗物质晕的结构

暗物质晕内部的密度并不是均匀的。我们可以用一些解析的模型来描述。

3.1 power-law density profile

最简单的是幂律谱模型 (power-law density profile)

$$\rho(r)=\rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \tag{22}$$

在半径 r 内的质量

$$M(<r)=4\pi\int_0^r \rho\left(r'\right)r'^2dr'=\frac{4\pi\rho_0 r_0^\gamma}{3-\gamma}r^{3-\gamma} \tag{23}$$

当 $\gamma \leq 3$ 时，$\lim_{r\to\infty} M(<r)=\infty$ ，总质量发散。

当 $\gamma \geq 3$ 时，$\lim_{r\to 0} M(>r)=\infty$ ，质量在暗物质晕中心发散。

可见一个幂律谱无法描述暗物质晕的结构，需要两个幂律谱拼起来，即 double power-law profile.

3.2 double power-law profile

我们希望

$$\begin{cases} \rho \propto r^{-\gamma} & r \ll r_0 \\ \rho \propto r^{-\beta} & r \gg r_0 \end{cases} \tag{24}$$

数学上给出下式满足条件

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^\gamma \left[1 + (r/r_0)^\alpha\right]^{(\beta-\gamma)/\alpha}} \tag{25}$$

可以验证当 $r \ll r_0$ 时，$1 + (r/r_0)^\alpha \simeq 1$, 式 (25) 近似为 $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$. 当 $r \gg r_0$ 时，$1 + (r/r_0)^\alpha \simeq (r/r_0)^\alpha$, 式 (25) 近似为 $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}$. 为了避免总质量发散或者中心质量发散，要求 $\gamma < 3$, $\beta > 3$.

3.3 NFW profile

我们有了 double power-law profile ，但还不知道 α, β, γ 三个参数的取值。

N 体模拟给出的 NFW profile （由 Navarro, Frenk & White 发现）是目前比较常用的一个好的近似模型。NFW profile 取 $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, 其表达式为

$$\rho(r) = \rho_{\text{crit}} \frac{\delta_{\text{char}}}{(r/r_s)\left(1 + r/r_s\right)^2} \tag{26}$$

如 图 (4) 所示。

NFW profile 存在一个问题：Cusp-Core controversy. NFW profile 给出在靠近暗物质晕中心的区域，$\rho \propto r^{-1}$, 有一个高密度的“尖”, 即 cusp. 但观测更倾向于暗物质晕在中心区域密度不变，即“核” 的结构 (core), $\rho \propto r^0$. 这对冷暗物质理论提出了挑战。有人认为这说明冷暗物质模型不对，他们提出了一些候选理论，比如温暗物质 (warm dark matter)，温暗物质是运动速度比冷暗物质快的一类粒子，这样它就会在暗物质晕形成时将中心密度较大区域的密度差异抹平。另一些人认为观测的是重子物质的分布，有

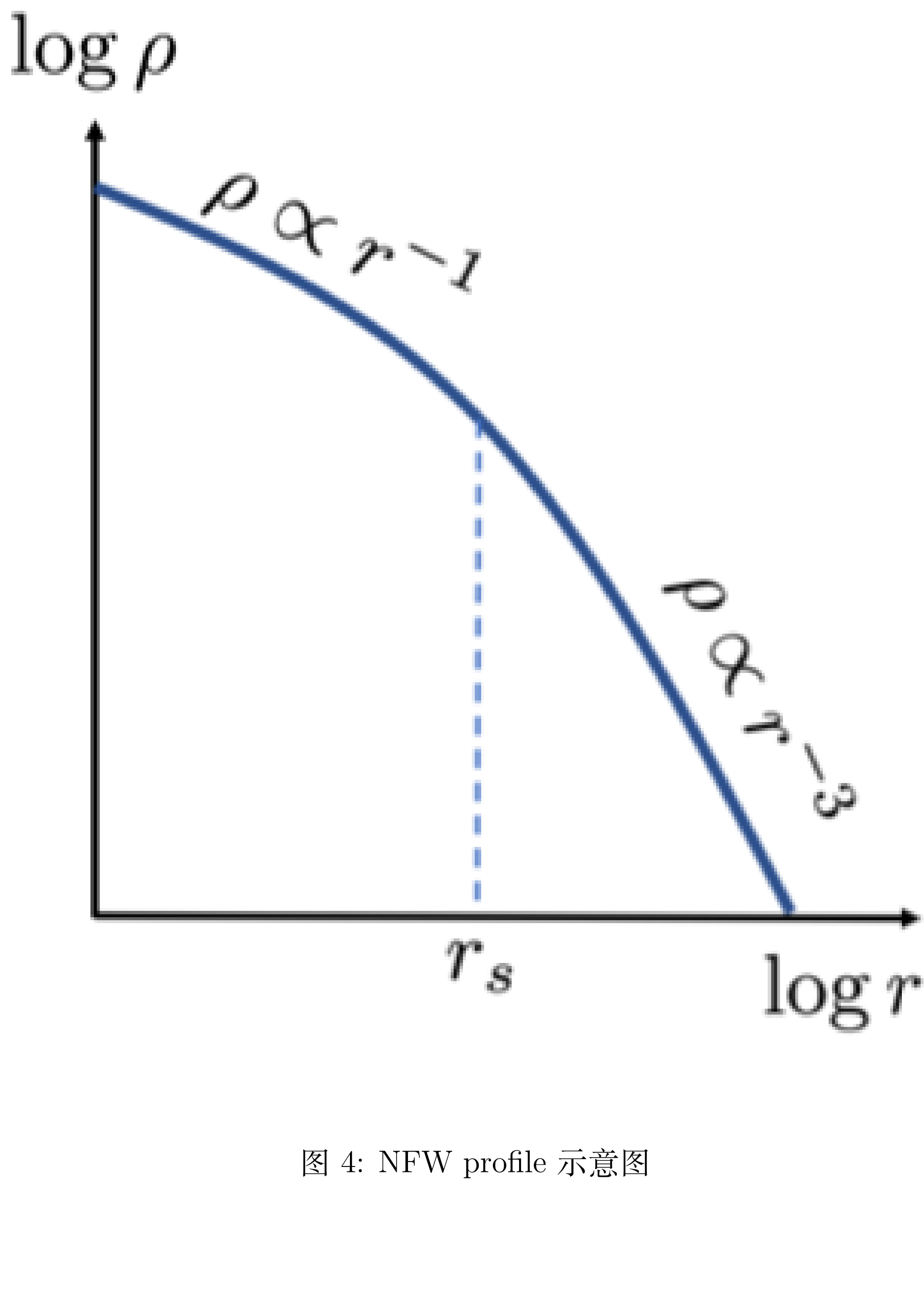


图 4: NFW profile 示意图

可能重子物质分布和暗物质分布并不相同，重子物质在中心的分布是 Core，而暗物质的分布是 Cusp.

4 暗物质晕的形成

暗物质晕的形成也是 bottom-up scenario. 暗物质晕由小质量的晕通过并合逐渐增大的过程叫做 Merger Tree. 如 图 (5) 所示。

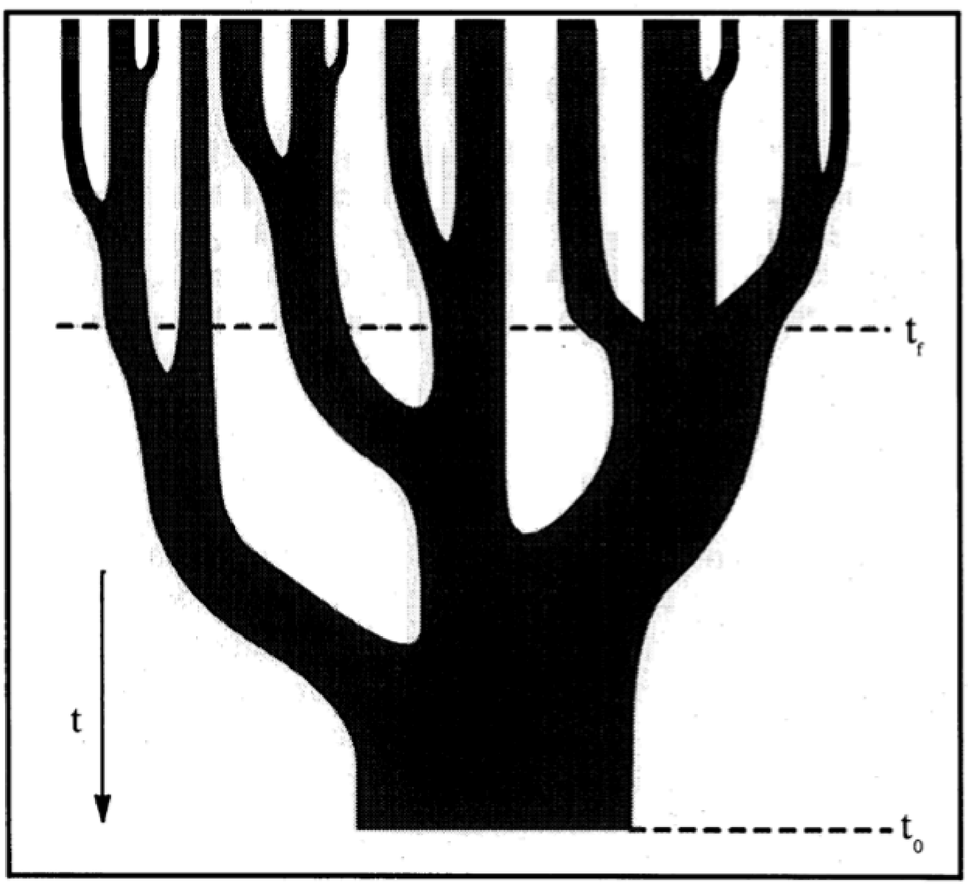


图 5: Meger Tree 示意图

并合的过程也叫做 assembly history ，assembly history 会影响暗物质晕的性质，因此是目前重要的研究方向之一。

在暗物质晕的形成中，我们关心不同质量的暗物质晕分别会形成多少。一个近似的方法是随机行走 (Random Walk) of dark matter halo statistics. 物质密度的空间分布是随机的，当局部密度大于临界密度 $\delta_{\rm crit}$ 时，我们认为这里形成一个暗物质晕。如 图 (6) 所示，红色标出的区域是大小不同的暗物质晕。

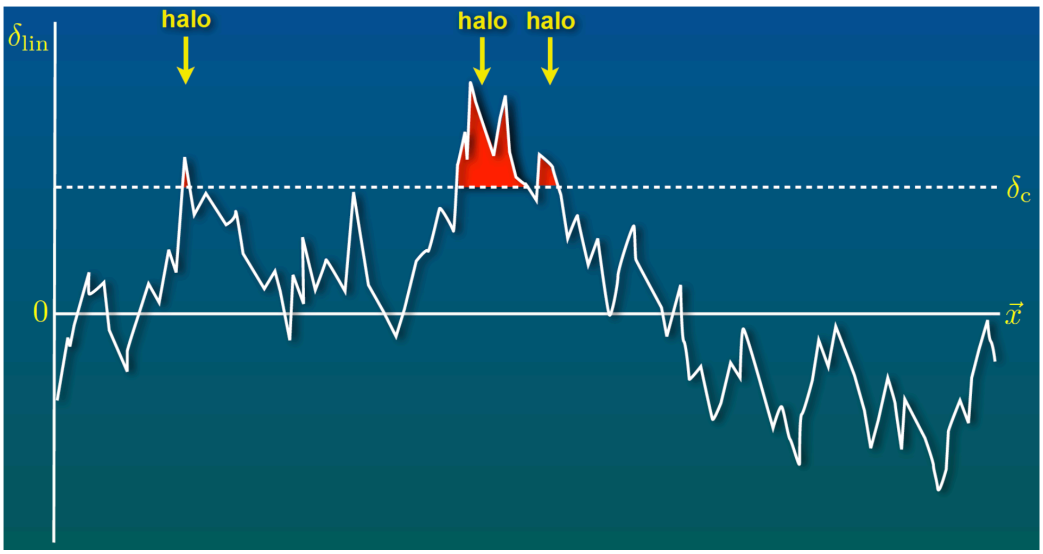


图 6: Random Walk 示意图

在半径 R 的范围内对密度涨落做平滑：$\delta_M = \delta(\vec{x}, R)$. 这个平滑尺度对应质量 $M = \bar{\rho} \times \frac{4}{3}\pi R^3$.

我们想计算的 halo mass function 是在一定质量范围内（大于 M）halo 的数密度，它等于在平滑尺度为 M 时的峰的数密度 $n(>M) = n_{\rm pk}(\delta_M)$.

Press-Schechter 模型假设密度场是高斯分布

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\delta_M > \delta_c(t)) &= F(>M, t) &(27)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M}\int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right] d\delta_M = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\delta_c}{2\sigma_M}\right] &(28)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$, $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 是 error function.