

Lecture 9

赵思逸

2022 年 4 月 26 日

1 CMB 的偶极各向异性 (dipole anisotropy)

光子数密度符合普朗克公式

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2/c^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (1)$$

我们求相空间的数密度。相空间（坐标和动量组成的参数空间）的粒子数量 $N(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p$ 是守恒量，其中 $d^3x d^3p$ 是相空间的体积元，是 Lorentz 不变量，因此 $N(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 也是 Lorentz 不变量。

对于光子， $|\mathbf{p}| = E/c = h_{\text{pl}}\nu/c$ ，则 $d^3p = 4\pi|\mathbf{p}|^2 dp = 4\pi h_{\text{pl}}^3 \nu^2/c^3 d\nu$ 。且对于光子， $N_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = N_\gamma(p)$

光子数一定，

$$N_\gamma(p) d^3x d^3p = \frac{1}{2} n_T(\nu) d\nu d^3x \quad (2)$$

其中 1/2 是因为光子有两种极化。

得到

$$N_\gamma(p) = \frac{1}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} \quad (3)$$

地球（以下带 ' 的是地球坐标系）相对共动坐标系有一个相对运动速度 $v = \mathcal{O}(100\text{km/s})$ ，此时相对论的速度参数 $\beta \equiv v/c \sim 10^{-3}$ ， $\gamma \equiv$

$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \sim 1$. 设地球上观测到的光子动量 \mathbf{p}' 与地球坐标系运动速度 \mathbf{v} 夹角是 θ , $|\mathbf{p}| = \gamma(1 + \beta \cos \theta) |\mathbf{p}'|$ 则

$$N'_\gamma(p') = \frac{1}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{e^{\frac{p'c}{k_B T'}} - 1} \quad (4)$$

$$T'(\theta) = \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} \simeq T(1 - \beta \cos \theta) \quad (5)$$

可以观测到偶极各向异性, 其中 $\theta = 0$ 时 (光子从后方追上观察者), 观测到的温度 T' 偏低, $\theta = \pi$ 时 (光子迎面而来), 观测到的温度 T' 偏高。

实际观测到的 CMB 偶极矩说明了地球相对于 “CMB frame” 有运动。扣除这个偶极矩后, 我们可以得到宇宙真实的密度起伏。

2 大爆炸核合成 (Big Bang Nucleosynthesis, BBN)

对于一种原子核, 原子序数 Z , 原子质量数 A , 原子核质量 m , 中子质量 m_n , 质子质量 m_p . 束缚能

$$B = Zm_p + (A - Z)m_n - m \quad (6)$$

质子中子能量差 $Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$, 氘核结合能 $B_D = 2.22 \text{ MeV}$.

大爆炸核合成的预言:

1. 轻元素 (H, He, 部分 Li, C) 在大爆炸中合成。
2. 定量预言 H, He, Li, C 的丰度。

质子和中子通过弱相互作用可以相互转化。

$$p + \bar{\nu} \leftrightarrow n + e^+ \quad (7)$$

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu \quad (8)$$

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (9)$$

当温度降低到 $T \sim 0.1$ MeV 时, 反应向产生中子的一端移动, 质子转变成中子。中子足够多后 (当 $T \sim 0.07$ MeV) 就可以形成轻元素。



考虑 $T > 0.5$ MeV, 平衡态方程

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{n_p^{(0)}}{n_n^{(0)}} = e^{\frac{Q}{k_B T}} \quad (13)$$

定义 $X_n \equiv \frac{n_n}{n_b} = \frac{n_n}{n_n + n_p}$, 即

$$\frac{1 - X_n}{X_n} = \frac{n_p}{n_n} = e^{\frac{Q}{k_B T}} \quad (14)$$

反应发生后需要使用非平衡态的 Boltzmann 方程,

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left((1 - X_n) e^{-\frac{Q}{k_B T}} - X_n \right) \quad (15)$$

其中速率 $\lambda_{np} = \frac{255}{\tau_n x^5} (12 + 6x + x^2)$, $x = \frac{Q}{k_B T}$. 当 $T \simeq 0.5$ MeV 时, $X_n \simeq 0.15$, 中子寿命 $\tau_n \simeq 15\text{min} \simeq 886.7\text{sec}$.

轻元素形成时, 温度 $T_{\text{nuc}} \sim 0.07$ MeV,

$$X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.15 \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) = 0.11 \quad (16)$$

BBN 时期的宇宙辐射占主导, $t \propto a^2 \propto T^{-2}$.

$$t = 132\text{sec} \left(\frac{0.1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 = 132\text{sec} \left(\frac{0.1}{0.07} \right)^2 \simeq 269\text{sec} \quad (17)$$

BBN 期间各种原子核质量占比随时间的演化如图 (1) 所示, 可以看到 BBN 结束时, 多数中子都进入了 ${}^4\text{He}$, $X_{{}^4\text{He}} \equiv \frac{4n_{{}^4\text{He}}}{n_b} = 2X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.22$. 这是估算, 精确的结果是

$$X_{{}^4\text{He}} = 0.2262 + 0.0135 \ln\left(\frac{\eta_b}{10^{-10}}\right) \approx 0.24 \quad (18)$$

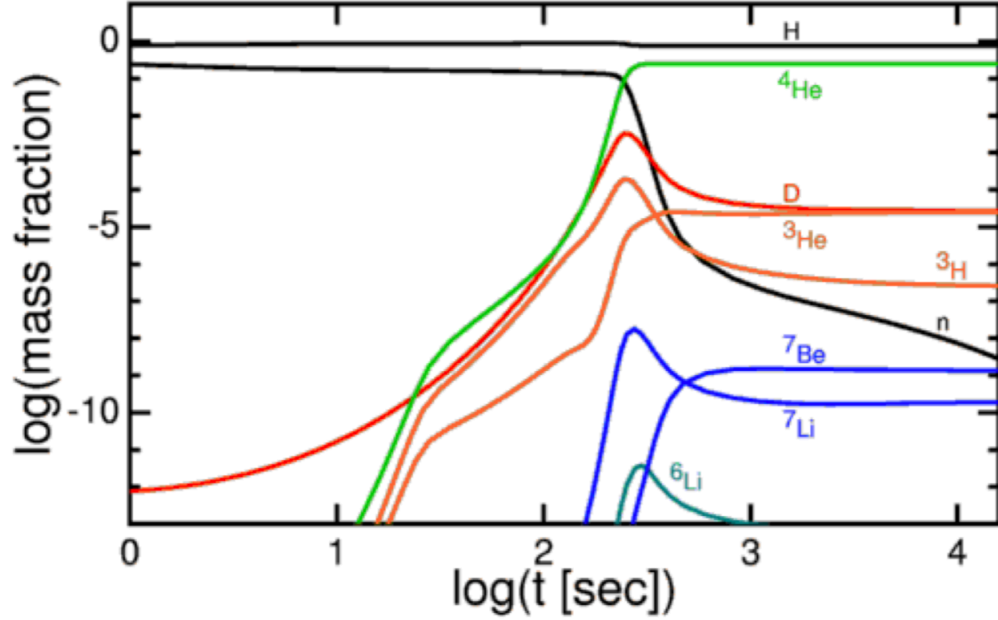


图 1: 轻元素丰度随时间的变化 (图源 Hannu Kurki-Suonio)

其中 $\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} \simeq 4 \times 10^{-10}$, 与 $\Omega_b h^2$ 有关。

如果忽略掉质子和中子质量微小的差异, 那么 $X_{4\text{He}}$ 的物理意义就是氦 4 的质量丰度, 有时候用 Y_p 表示, 即氦 4 核在所有核子里的质量比。此外, 也经常定义以数量计算的氦 4 丰度 $y_{4\text{He}}$, 即氦 4 核在所有原子核里的数量比。由于氢(H)原子核只包含 1 个核子, 而氦 4 (^4He) 原子核包含 4 个核子, 所以

$$y_{4\text{He}} = \frac{\frac{1}{4}X_{4\text{He}}}{(1 - X_{4\text{He}}) + \frac{1}{4}X_{4\text{He}}} \approx 0.0724 \quad (19)$$

对 BBN 的测量见 图 (2)。从 4 个独立丰度测量得到自洽的 $\Omega_b h^2$ 限制。

$$\Omega_b \simeq 0.05 \quad (20)$$

$$h \simeq 0.7 \quad (21)$$

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.025 \quad (22)$$

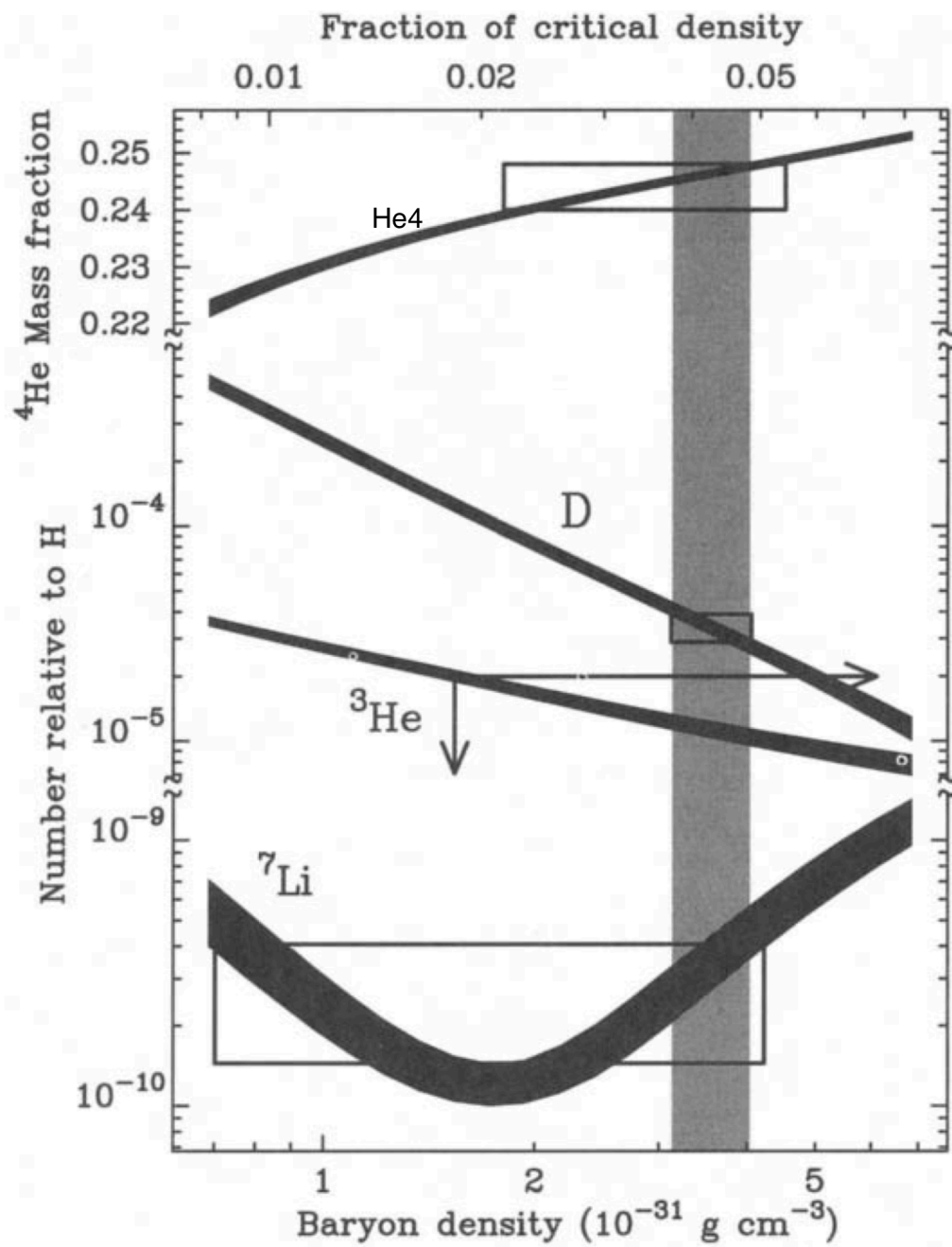


图 2: 轻元素丰度的预言和测量 (图源 Dodelson)