Lecture 6

赵思逸

2022 年 3 月 29 日

1 回顾

Friedmann 方程改写为 $H(t) = H_0 E(t)$, 其中

$$E(a) = \sqrt{\Omega_R (a/a_0)^{-4} + \Omega_M (a/a_0)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K (a/a_0)^{-2}} \tag{1}$$

还可以写成

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2} \tag{2}$$

广义的物质包含冷物质、辐射、暗能量，$i = M, R, \Lambda$，今天各物质成分占比 $\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit}}}$, $\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$.

曲率“密度” $\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}$ 是形式上的，不是实质的物质。

- 对 $K = 0$, $\Omega_K = 0$, a_0 可以随意定义，一般定义为 $a_0 = 1$.
- 对 $K \neq 0$, 通过选取共动坐标使得 R（共动）=1，使得 $K = \pm 1$，今天的尺度因子 a_0 =R（今天）/R（共动）= R（今天），不能随意选取 a_0. $|\Omega_K| = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}$ 可以连续变化。现有观测 $|\Omega_K| < 10^{-2} \sim 10^{-3}$.

根据定义

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \tag{3}$$

定义 $\Omega = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda = \rho_0/\rho_{\rm crit}$, 则曲率被确定为 $\Omega_K = 1 - \Omega$. 实际上通过测量 Ω，得到 Ω_K，可以计算

$$a_0 = \frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_K|}} \tag{4}$$

2 时间和距离

2.1 宇宙年龄

$$\begin{aligned} t_{\rm age}(z) &= \int_0^{t_{\rm age}} dt' = \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a'E(a')} &(5)\\ &= \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a'\sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} &(6)\end{aligned}$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\rm age}(z)$ 关系。因为目前测量到 $\Omega_R = 2.47 \times 10^{-5}h^{-2}$ 很小，可以忽略。

举例：

- 物质为主，$\Omega_M = 1, \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$,
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'\sqrt{a'^{-3}}} = \frac{2}{3H_0} = 9.32\text{Gyr}$
- 辐射为主，$\Omega_R = 1, \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$,
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'a'^{-2}} = \frac{1}{2H_0} = 6.99\text{Gyr}$
- 没有物质的空宇宙，$\Omega_R = \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 1$,
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'a'^{-1}} = \frac{1}{H_0} = 13.98\text{Gyr}$
- ΛCDM 宇宙，$\Omega_R = 0, \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$, 推出 $\Omega_K = 0$,
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'\sqrt{0.3\times a'^{-3}+0.7}} = \frac{0.964}{H_0} = 13.47\text{Gyr}$ 。误差主要来自 H_0 .

2.2 回溯时间 (look-back time)

$$t_{\rm LB}(z) = \frac{1}{H_0}\int_{\frac{1}{1+z}}^{1} \frac{da'}{a'\sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \tag{7}$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\rm LB}(z)$ 关系。

2.3 光传播经过的路径在今天的距离

即 $a_0\chi_{\rm comoving}$ ，其中 $\chi_{\rm comoving}$ 是光源在共动坐标下距观测者的距离。

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_t^{t_0} cdt' \frac{a_0}{a(t')} = \frac{c}{H_0}\int_{\frac{a}{a_0}}^{1} \frac{da'}{a'^2 E(a')} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} & (8)\\ &= D_H \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z')^2}} & (9) \end{aligned}$$

其中定义了 $D_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq \frac{3\times10^5\ \rm km\ s^{-1}}{100h\ \rm km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}} = 3000h^{-1}$ Mpc, 宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $\chi(z)$ 关系。红移 z 是可测量量。χ 可以转化为光度距离或角直径距离，

$$\begin{aligned} d_A &= \frac{a_0 r}{1+z} & (10)\\ d_L &= (1+z)a_0 r & (11)\\ a_0 &= \frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_K|}} = \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_K|}} & (12) \end{aligned}$$

其中 $r = S_k(\chi/a_0)$ ，与 H_0 无关。

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K=+1 \\ x & K=0 \\ \sinh x & K=-1 \end{cases} \tag{13}$$

r 将可测量量 d_A 和 d_L 与 χ 联系起来。通过测量 d_A 和 d_L 就可以得到 $\chi(z)$ 关系，由观测到的 $\chi(z)$ 关系就可以限制宇宙学模型。

2.3.1 应用举例：Alcock-Paczynski test

考虑有固定物理尺寸的球体（直径为 D）在红移 z 的地方，观测到张角 $\Delta\theta$，红移宽度 Δz

$$\Delta\theta = \frac{D}{d_A} = \frac{D(1+z)}{a_0 r} = \frac{D(1+z)\sqrt{|\Omega_K|}}{D_H S_k(\chi/a_0)} \tag{14}$$

$$D = \frac{a(z)}{a_0}\Delta\chi = \frac{1}{1+z}\frac{c}{H_0}\frac{\Delta z}{E(z)} \tag{15}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)S_k\left(\chi/a_0\right)} = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)}\left[S_k\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_0^z \frac{dz'}{E\left(z'\right)}\right)\right]^{-1} \tag{16}$$

与 D 和 H_0 无关。与 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 有关。

在 $K=0$ 的情况下

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \left[E(z)\int_0^z \frac{dz'}{E\left(z'\right)}\right]^{-1} \tag{17}$$

举例：

- ΛCDM 宇宙，$\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$, 推出 $\Omega_K = 0$，在 $z=1$ 的地方，$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[\sqrt{0.3\times 2^3 + 0.7}\times\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3+0.7}}\right]^{-1} = 0.736.$
- $\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 1$, 推出 $\Omega_K = 0$，
  在 $z=1$ 的地方，$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[\sqrt{1}\times\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1}}\right]^{-1} = 1.$
- $\Omega_M = 1.3, \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = -0.3 < 0, K = +1, S_k(x) = \sin x$,
  在 $z=1$ 的地方，
  $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.3}}{\sqrt{1.3\times 2^3 - 0.3\times 2^2}}\left[\sin(\sqrt{0.3}\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1.3(1+z')^3 - 0.3(1+z')^2}})\right]^{-1} = 0.594.$
- $\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0.7 > 0, K = -1, S_k(x) = \sinh x$,
  在 $z=1$ 的地方，
  $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{0.3\times 2^3 + 0.7\times 2^2}}\left[\sinh(\sqrt{0.7}\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3 + 0.7(1+z')^2}})\right]^{-1} = 0.640.$

3 视界 (Horizon)

3.1 粒子视界 (partcle horizon)

粒子视界 (partcle horizon)：对于过去的事件所能观测到的最远距离。或在 t 时刻看到的最远宇宙在 t 时刻的距离。

$$d_{ph}(t) = a(t)\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \tag{18}$$

在今天，

$$d_{ph}(t_0) = \frac{c}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'^2\sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \tag{19}$$

- 对于辐射为主的宇宙，$a \propto t^{1/2}$, $d_{ph}(t_0) = 2t_0 = D_H$.
- 对于冷物质为主的宇宙，$a \propto t^{2/3}$, $d_{ph}(t_0) = 3t_0 = 2D_H$.

3.2 事件视界 (event horizon)

事件视界 (event horizon): 未来的观测者所能看到的在 t 时刻或以后的事件在 t 时刻的最远距离。

$$d_{eh}(t) = a(t)\int_t^\infty \frac{cdt'}{a(t')} \tag{20}$$

- 对于冷物质为主的宇宙，$a \propto t^{2/3}$, $d_{eh} \to \infty$.
- 若 Λ 为主，$a \propto e^{Ht}$, $H = H_0\Omega_\Lambda^{1/2}$, $d_{eh} \to \frac{c}{H}$ 常数，足够时间以后，只有引力束缚的本星系群能看到。

3.3

从 t 时刻发出的信号在未来 T 时刻所能到达的最远距离

$$\lim_{T\to\infty} a(T)\int_t^T \frac{cdt'}{a(t')} = d_{eh}\frac{a(T)}{a(t)} \tag{21}$$

若 Λ 为主，$a \propto e^{Ht}$, $H = H_0\Omega_\Lambda^{1/2}$, $d_{eh} \to \frac{c}{H}$ 常数，但 $a(T) \to \infty$，所以我们发出的信号可以到达无限远。

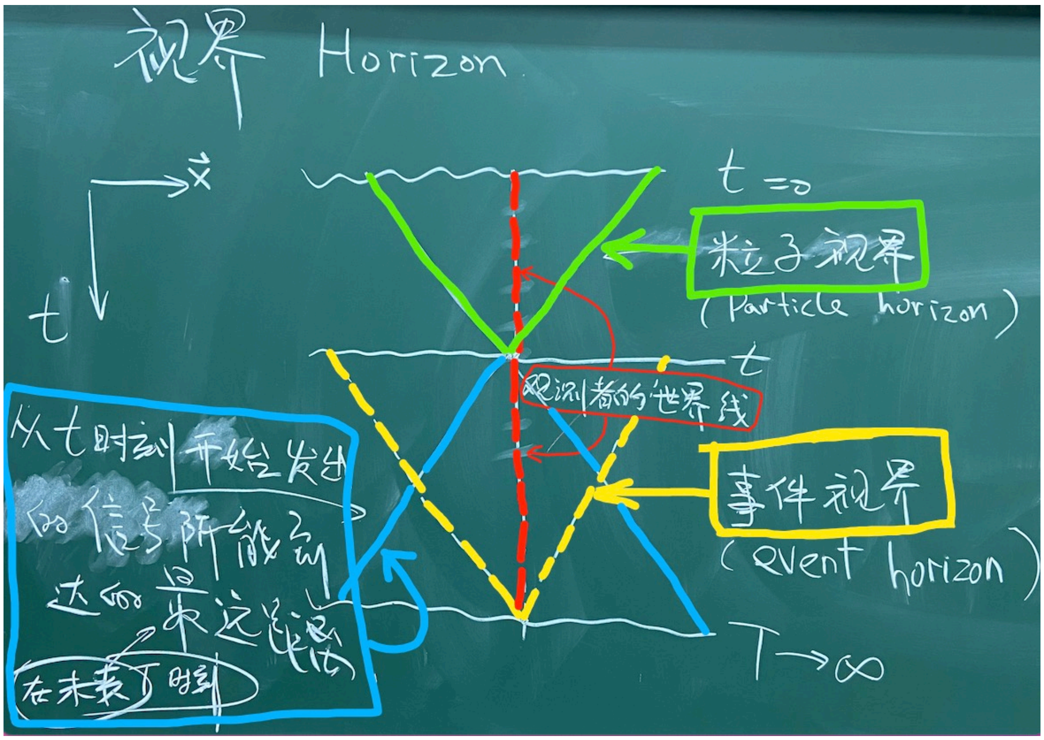

图 1: 视界