

# 宇宙学基础

赵思逸

2022 年 6 月 18 日

## 摘要

茅奕老师 2022 年春季学期在清华大学开设本科生天文专业课“星系与宇宙”的课程笔记，宇宙学部分。

## 目录

<b>1 大爆炸理论</b>	<b>4</b>
<b>2 宇宙成分组成</b>	<b>4</b>
2.1 暗物质 . . . . .	4
2.2 暗能量 . . . . .	5
<b>3 宇宙学基础</b>	<b>5</b>
3.1 宇宙学原理 . . . . .	5
3.1.1 检验物质分布的均匀性 . . . . .	5
3.1.2 检验物质分布各向同性 . . . . .	6
3.2 哈勃定律 Hubble's Law . . . . .	6
3.2.1 尺度因子、坐标长度和物理长度 . . . . .	6
3.2.2 哈勃参数 . . . . .	6
<b>4 宇宙学红移 (cosmological redshift)</b>	<b>7</b>
<b>5 时空的几何结构</b>	<b>7</b>
5.1 度规 . . . . .	7
5.2 共动坐标 (comoving frame) 下的度规 . . . . .	8

目录	2
<b>6 宇宙学中的距离</b>	<b>10</b>
6.1 角直径距离 (angular diameter distance) $d_A$	10
6.2 光度距离 (luminosity distance) $d_L$	10
6.3 弯曲宇宙中的距离	11
<b>7 弗里德曼 (Friedmann) 方程</b>	<b>12</b>
<b>8 Friedmann 方程</b>	<b>12</b>
<b>9 宇宙中的物质</b>	<b>13</b>
9.1 辐射 (Radiation)	13
9.2 冷物质 (Matter)	13
9.3 真空能 (Vacuum energy)	14
9.4 一般情况	14
<b>10 宇宙的演化</b>	<b>14</b>
<b>11 回顾</b>	<b>17</b>
<b>12 时间和距离</b>	<b>18</b>
12.1 宇宙年龄	18
12.2 回溯时间 (look-back time)	18
12.3 光传播经过的路径在今天的距离	18
12.3.1 应用举例: Alcock-Paczynski test	19
<b>13 视界 (Horizon)</b>	<b>20</b>
13.1 粒子视界 (particle horizon)	20
13.2 事件视界 (event horizon)	21
13.3	21
<b>14 宇宙学常数和真空能</b>	<b>21</b>
14.1 真空能视角	21
14.2 宇宙学常数视角	22
14.3 Einstein 静态宇宙模型	23
<b>15 早期宇宙的历史</b>	<b>24</b>

目录	3
<b>16 微波背景辐射</b>	<b>24</b>
16.1 退耦 (decoupling)	24
16.2 CMB 的特征	26
<b>17 CMB 的偶极各向异性 (dipole anisotropy)</b>	<b>31</b>
<b>18 大爆炸核合成</b>	
(Big Bang Nucleosynthesis, BBN)	<b>32</b>
<b>19 中微子退耦 (neutrino decoupling)</b>	<b>34</b>
<b>20 暴涨理论 (Inflation Theory)</b>	<b>37</b>
20.1 平坦性问题 (Flatness Problem)	37
20.2 视界疑难 (Horizon Problem)	37
20.3 磁单极子问题 (Magnetic monopole)	38
20.4 种子涨落的起源	38
20.5 暴涨理论	38

## 1 大爆炸理论

宇宙大爆炸理论的经典证据：

- 哈勃图
- 微波背景辐射
- 原初核合成

## 2 宇宙成分组成

- 恒星、星系  $\sim 0.5\%$
- 气体（星际介质、星系际介质） $\sim 4\%$
- 光（radiation） $\sim 0.05\%$ ，宇宙早期重要组分
- 中微子  $\sim 0.5\%$
- 暗物质  $\sim 25\%$
- 暗能量  $\sim 70\%$ ，主导宇宙加速膨胀

### 2.1 暗物质

暗物质：参加引力相互作用，不参加电磁相互作用的一种物质，很可能是超出粒子物理标准模型的新粒子。

暗物质存在的证据：

- 星系旋转曲线：星系外侧的旋转速度高于可见物质预测的旋转速度。（21 厘米线测量星系外侧的速度。）
- 子弹星系团：两个星系碰撞，强引力透镜测量引力中心，X 射线测量重子物质中心，发现二者分离。
- CMB 支持  $\Lambda$ CDM 模型。（其中  $\Lambda$  表示暗能量的模型“宇宙学常数”，CDM 是冷暗物质 cold dark matter 的缩写。）
- 大尺度结构形成：在今天的宇宙年龄这段时间中，重子物质密度不足以形成如今的大尺度结构——大尺度结构实际上由暗物质主导形成。

## 2.2 暗能量

暗能量存在的证据：

- Ia 型超新星测量到宇宙的加速膨胀，支持  $\Lambda$ CDM 模型。
- CMB 支持  $\Lambda$ CDM 模型。

# 3 宇宙学基础

## 3.1 宇宙学原理

宇宙物质在空间分布上是均匀(Homogeneous)和各向同性的(Isotropic)。

- Isotropic 推不出 Homogeneous。
- “哥白尼原理”：宇宙中不存在任何一个“特殊”的观测者。
- Isotropic 加上“哥白尼原理”可以得到 Homogeneous。因为对于宇宙中任意两点，我们都能找到一个观测者和两点等距。根据各向同性，可以推出这两点的物质密度相同。
- Homogeneous 推不出 Isotropic。Homogeneous 加上“哥白尼原理”可以得到 Isotropic。

### 3.1.1 检验物质分布的均匀性

我们把宇宙平均密度表示为  $\bar{\rho}$ ，根据均匀性原理，包含在球体  $R$  内的平均质量  $M = \bar{\rho} \times \frac{4}{3}\pi R^3$ 。实际上，由于宇宙中物质密度分布存在涨落，实际球体  $R$  内的质量为  $M + \Delta M$ 。质量涨落的平均值  $\langle \Delta M \rangle = 0$ ，方均根  $\sqrt{\langle \Delta M \rangle^2} = \delta M$ 。定义  $\sigma(M) = \frac{\delta M}{M}$ ，当  $\sigma(M) > 1$ ，宇宙在对应的  $R$  尺度上是不均匀的。

观测发现  $\sigma_8 \equiv \sigma(R = 8h^{-1} \text{ Mpc}) \simeq 0.8$ ，说明  $8h^{-1} \text{ Mpc}$  大致是线性尺度与非线性尺度的分水岭。 $\sigma(M) = \sigma_8 \left(\frac{M}{M_8}\right)^{-(3+n)/6}$ ，其中  $n \simeq 0.97$ ，估算出  $\sigma(R = 100h^{-1} \text{ Mpc}) \simeq 0.005$ ，所以在  $R \geq 100h^{-1} \text{ Mpc}$  可以认为宇宙是均匀的。

### 3.1.2 检验物质分布各向同性

宇宙微波背景辐射 (CMB) 温度  $T(\hat{n}) = \bar{T} + \Delta T(\hat{n})$  , 其中  $\hat{n}$  是某一方向的单位向量,  $\bar{T}$  是平均温度。根据定义, CMB 温度涨落的平均值  $\langle \Delta T(\hat{n}) \rangle = 0$  。我们定义  $\delta T \equiv \sqrt{\langle \Delta T^2(\hat{n}) \rangle}$  , 测量到 CMB 的温度涨落  $\frac{\delta T}{\bar{T}} \simeq 10^{-5}$  。

## 3.2 哈勃定律 Hubble's Law

哈勃测量到遥远天体 (不受引力束缚) 的退行速度  $v = H_0 R$  , 其中  $H_0$  是哈勃常数。定义红移  $z = \frac{v}{c}$  , 其中  $v \ll c$  。

哈勃定律并不代表我们是“特殊”的观测者, 因为宇宙中其它位置的观测者一样会观测到哈勃定律。

### 3.2.1 尺度因子、坐标长度和物理长度

对于给定观测者, 某一遥远天体的位置随着时间变化  $\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}$  , 定义  $a(t)$  为尺度因子, 尺度因子刻画宇宙整体的膨胀, 是时间的函数, 与位置无关。

$t_0$  时刻, 物理长度 = 坐标长度。

### 3.2.2 哈勃参数

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}(t_0) \frac{1}{a(t_0)} da/dt \\ &= \vec{x}(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)} \frac{da/dt}{a(t)} \end{aligned}$$

定义哈勃参数  $H(t) \equiv \frac{da/dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a}$  , 可以得到哈勃定律  $\vec{V}(t) = \vec{x}(t)H(t)$  , 所以  $H_0$  就是今天的哈勃参数。

因为历史原因,  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  ,  $h \simeq 0.7$  , 更精确的测量出现 Hubble tension 问题。

根据  $z = \frac{v}{c} = c^{-1}H_0 R$  , 当  $R > cH_0^{-1}$  时, 似乎有  $z > 1$  且  $v > c \dots\dots$

- 有没有红移大于 1 的天体? ——有。
- 红移大于 1 的天体是否超过光速?

- 相对论下的多普勒红移：当  $z \gg 1$ ,  $v \rightarrow c$  时,  $z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1$
- 但哈勃观测到的红移实际上并不能用多普勒红移解释。多普勒红移适用于平直时空，而哈勃定律是时空整体的膨胀。
- 在宇宙学的尺度下，可测量量不是速度而是红移。 $z = \frac{v}{c}$  只适用于本地。在高红移处需要另外寻找红移和距离的关系  $z = z(R)$
- 定义哈勃流 (Hubble flow) 的“速度”  $\vec{V}_H(t) = H(t)\vec{R}(t)$ ，它只是为了方便表达定义出的速度，而不是直接可测量的物理量。膨胀的宇宙是弯曲时空，而在弯曲时空里，只有本地惯性参考系里定义的速度才是可测量的物理量。相对地有“本动速度”（天体相对于哈勃流的速度） $\vec{v}_{\text{pec}}$ ，总体的速度为两者之和  $\vec{V} = H\vec{R} + \vec{v}_{\text{pec}}$ ，可以大于光速，但这并不是物理上的速度。
- 红移大于 1 的天体会超出视界吗？——不会。应该使用  $z = z(R)$  计算。

## 4 宇宙学红移 (cosmological redshift)

宇宙学红移：由于宇宙整体膨胀造成的红移。

多普勒红移：在平直时空下由于相对运动速度造成的红移。

宇宙学红移的推导：光在  $t_1$  发射，在  $t_0$  接收，波长随时空膨胀  $\frac{c\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{c\delta t_0}{a(t_0)}$ ， $t_1$  时刻  $\nu_1 = 1/\delta t_1$ ， $t_0$  时刻  $\nu_0 = 1/\delta t_0$ ，可得  $1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} > 1$

小结：我们定义今天的尺度因子  $a(t_0) \equiv a_0$ ，则有  $1 + z = \frac{a_0}{a(t)}$ 。

我们可以用时间  $t$ ，红移  $z$ ，尺度因子  $a$  作为“时间变量”来描述宇宙的历史。

## 5 时空的几何结构

### 5.1 度规

为了方便推广，我们对平直时空定义  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ，即  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ，其中  $\mu = 0, 1, 2, 3$ 。时空间隔 (spacetime interval) 表示为  $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ ，时空线元 (spacetime element) 是  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，其中  $\eta_{\mu\nu}$  叫做度规 (metric)。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

是平直时空（闵氏时空）的度规。

更一般地， $x^\mu$  可以是任意坐标系，度规改用  $g_{\mu\nu}$  表示，（因为  $\eta_{\mu\nu}$  一般特指式 (1)）即  $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，其中  $g_{\mu\nu}$  可以是坐标的函数。

提问：度规可以写成坐标的函数，是否一定表示弯曲时空？

答：不是，可能是因为坐标变换。比如平直时空在球坐标下的度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

那么如何判断是否是平直时空呢？寻找坐标变换下的不变量（比如标量），具体到这个问题，需要计算里奇标量 (Ricci scalar)  $R(g_{\mu\nu})$ 。

## 5.2 共动坐标 (comoving frame) 下的度规

取某一时刻  $t_{\text{com}}$  的物理距离为坐标距离，定义此时刻尺度因子

$a(t_{\text{com}}) = 1$ 。到  $t_1$  时刻，宇宙经过膨胀，物理距离 = 坐标距离  $\times a(t_1)$ 。

共动坐标下三维空间部分的线元  $dS_{3D}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ，其中立体角  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$

平直时空下， $ds^2 = -c^2 dt^2 + dS_{3D}^2$ 。

膨胀宇宙中， $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dS_{3D}^2$ ，空间部分可以平直也可以弯曲。

**我们考虑度规的空间部分。** 因为宇宙学原理，宇宙在空间上是均匀、各向同性的，要求度规的空间部分满足平移和旋转对称性。符合条件的有且只有三种情况：（证明可参考温伯格的《Gravitation and Cosmology》Sec. 13.2.）

1. (最简单的就是) 三维平直的欧式空间  $dS_{3D}^2 = d\vec{x}^2$ ，这种情况下，通常可以选择  $a(t_{\text{today}}) = 1$ 。



2. 嵌在四维欧氏空间中的三维球面（可用二维球来理解） $dS_{3D}^2 = d\vec{x}^2 + dz_4^2$ ，有球面限制条件  $z_4^2 + \vec{x}^2 = R^2$ ，剩下 3 个自由度。其中  $R$  是“球的半径”，是个常数，可以通过对共动坐标的选取使  $R = 1$ ，注意这个选取相当于把球半径的物理长度  $R = 1$  的时刻选定为共动坐标的时刻  $t_{\text{com}}$ 。在这种选择下，在  $t$  时刻的球半径的物理长度等于  $t$  时刻的尺度因子  $a(t)$ ，也就是说，此时不能随意选择  $a(t_{\text{today}}) = 1$ ，因为  $a(t_{\text{today}}) = \text{今天的球半径的物理长度}$ 。
3. 嵌在四维赝欧氏空间中的三维超球面（可用二维双曲面来理解） $dS_{3D}^2 = d\vec{x}^2 - dz_4^2$ ，有限制条件  $z_4^2 - \vec{x}^2 = 1$ ，剩下 3 个自由度。已经通过对共动坐标的选取使  $R = 1$ 。

综合后两种情况： $dS_{3D}^2 = d\vec{x}^2 \pm dz_4^2$ ，限制条件  $z_4^2 \pm \vec{x}^2 = 1$ ，可得

$$dS_{3D}^2 = d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2} = d\vec{x}^2 + \frac{K(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \quad (2)$$

其中定义了

$$K = \begin{cases} +1 & \text{球面, 正曲率, 有限体积, 无边界} \\ 0 & \text{欧氏, 平直, 无限体积, 无边界} \\ -1 & \text{超球面, 负曲率, 无限体积, 无边界} \end{cases} \quad (3)$$

式 (2) 第二个等号综合了全部三种情况。

加上时间部分，**总体的时空度规**是

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ d\vec{x}^2 + \frac{K(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \right] \quad (4)$$

上式的空间部分  $\vec{x}$  就是我们日常看到的三维空间，但是在宇宙学中的度规可以不是欧几里德空间的度规（即闵氏度规的空间部分），所以叫“准笛卡尔”坐标（quasi-Cartesian coordinates）。我们将  $\vec{x}$  转换为球坐标系，可以方便与观测比较。这里球坐标系的定义与平直的欧几里德空间里一样。在球坐标系下，度规写为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (5)$$

称为 Friedmann-Lemître-Robertson-Walker (FLRW/FRW) 度规。

## 6 宇宙学中的距离

### 6.1 角直径距离 (angular diameter distance) $d_A$

给定“标准尺子”(物理长度固定为  $l$  且已知)。

在静止宇宙中, 距离  $r = l/\theta$ , 其中  $\theta$  是“标准尺子”的张角。

一般情况下, 定义角直径距离  $d_A \equiv l/\theta$ 。

在膨胀的平直宇宙 ( $K=0$ ) 中, 假设“标准尺子”在  $t$  时刻发出的光今天被我们看到。因为宇宙均匀膨胀,  $\theta$  角固定不变。在  $t$  时刻, “标准尺子”距离我们  $a(t)r$ , 其中  $r$  是共动坐标系下的坐标距离。在今天, “标准尺子”距离我们  $a_0 r$ 。由此得知

$$\theta = \frac{l}{a(t)r} = \frac{la_0/a(t)}{a_0 r} \quad (6)$$

$$d_A \equiv \frac{l}{\theta} = a(t)r \quad (7)$$

### 6.2 光度距离 (luminosity distance) $d_L$

假设某标准烛光 (standard candle) 发出单频光, 已知其亮度  $L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{h\nu\Delta N}{\Delta t}$ , 观测到流量  $F = \frac{\Delta L}{\Delta A} = \frac{L}{4\pi r^2}$ 。

在静止宇宙中, 该标准烛光的距离为  $r = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$ 。

一般情况下, 定义光度距离  $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$ 。

在膨胀的平直宇宙 ( $K=0$ ) 中, 假设标准烛光在  $t$  时刻发出的光今天被我们看到。其亮度  $L = \frac{\Delta E_{\text{em}}}{\Delta t_{\text{em}}} = \frac{h\nu_{\text{em}}\Delta N_{\text{em}}}{\Delta t_{\text{em}}}$ 。

$\Delta N$  不变的情况下, 由于宇宙膨胀, 接受这些光子所需的时间变长  $\Delta t = \Delta t_{\text{em}} \frac{a_0}{a(t)}$ 。同时光子的波长被拉长, 频率下降  $\nu = \nu_{\text{em}} \frac{a(t)}{a_0}$ , 导致  $\Delta E = h\nu\Delta N = \frac{a(t)}{a_0} h\nu_{\text{em}}\Delta N_{\text{em}}$ 。

观测到的亮度  $L_{\text{obs}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 L$ , 观测到的流量  $F = \frac{L_{\text{obs}}}{4\pi(r a_0)^2} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 \frac{L}{4\pi r^2 a_0^2}$ 。

得到光度距离

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \left(\frac{a_0}{a(t)}\right) a_0 r \quad (8)$$

### 6.3 弯曲宇宙中的距离

以  $K = 1$  为例，我们有两种共动距离：

- $r$  是共动坐标系下的三维投影空间的坐标距离
- $\chi_{\text{com}}$  是光传播经过的共动距离

对于一段弧（比如标准尺子）， $dt = dr = d\phi = 0$ ， $ds^2 = a^2(t)r^2d\theta^2$ ，

$$d_A \equiv \frac{l}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} = a(t)r \quad (9)$$

对于一个立体角， $dt = dr = 0$ ， $ds^2 = a^2(t)r^2d\Omega^2$ ，球面积  $= a^2(t)4\pi r^2$

$$F = \frac{L_{\text{obs}}}{a_0^2 4\pi r^2} \quad (10)$$

$$d_L \equiv \frac{a_0}{a} a_0 r \quad (11)$$

由  $d_A$  和  $d_L$  可以得到与宇宙学模型无关的 “consistency check”：

$$\frac{d_A}{d_L} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \quad (12)$$

这个公式可以用来检验 “宇宙均匀膨胀” 的假说。

定义  $\chi$  是光传播经过的空间对应在今日的（物理）距离

$$\chi = \chi_{\text{com}} a_0 \quad (13)$$

$$= \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (14)$$

$$= a_0 \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} \quad (15)$$

最后一个等号是因为对于光线来说， $ds^2 = 0$ ， $d\theta = d\phi = 0$ ，因此  $\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$ 。结果是

$$\chi = a_0 \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = +1 \\ r & K = 0 \\ \sinh^{-1} r & K = -1 \end{cases} \quad (16)$$

由此得知共动坐标距离

$$r = S_k(\chi/a_0) \quad (17)$$

其中

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K = +1 \\ x & K = 0 \\ \sinh x & K = -1 \end{cases} \quad (18)$$

而  $\chi$  可以根据定义 (式 (14)) 计算

$$\chi = \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (19)$$

$$= \int_{a/a_0}^1 \frac{c da'}{a'^2 H(a')} \quad (20)$$

$$= \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (21)$$

使用式 (21) 可以计算任意红移下的距离, 注意其中  $H(z')$  具体的形式与宇宙学模型有关, 接下来的课我们会讲  $H(z')$  的具体形式是什么。

## 7 弗里德曼 (Friedmann) 方程

广义相对论给出爱因斯坦引力场方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (22)$$

该公式左边是爱因斯坦张量 (Einstein tensor), 表示时空的几何性质, 右边的  $T_{\mu\nu}$  是能量动量张量 (Energy-momentum tensor), 由密度  $\rho$ 、压强  $P$  决定, 描述物质的分布。

由式 (22) 可以得到关于  $a(t)$  的方程, 即弗里德曼 (Friedmann) 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \quad (23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \quad (24)$$

其中  $G$  是牛顿引力常数,  $\rho$  是宇宙中物质的密度,  $P$  是宇宙中物质的压强。

由式 (23) 可推出哈勃参数的表达式  $H(a) = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G \rho(a) - \frac{K}{a^2}}$

## 8 Friedmann 方程

引力场方程: 物质分布决定时空几何。

我们考虑的物质是宇宙中的理想流体，用密度  $\rho$  和压强  $P$  描述，它们决定时空几何  $a(t)$  和  $K$  如何演化，即 Friedmann 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \quad (25)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \quad (26)$$

其中我们使用了自然单位制中的光速  $c = 1$ ，式 (26) 中的量纲在补齐  $c$  之后统一， $[P] = [\rho] \times [c^2]$ 。

下面我们考虑式 (25) 和式 (26) 的关系。对式 (25) 求时间导数

$$\frac{d(1)}{dt} : \quad 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8}{3}\pi G(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \quad (27)$$

代入式 (26) 得到

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \quad (28)$$

式 (28) 就是能量守恒方程。在式 (28) 左右乘上  $a^3 V_{\text{com}}$  得到  $\frac{d}{dt}(V\rho) = -P\frac{dV}{dt}$  就可以看出表示能量守恒。

## 9 宇宙中的物质

### 9.1 辐射 (Radiation)

辐射是指极端相对论性的物质，热运动的动能远远大于静质量，即  $m_0 c^2 \ll k_B T$ 。例如光子（静质量为 0）、中微子（静质量很小）、高温电子气体（静质量  $0.5\text{MeV} \ll k_B T$ ）。

量子统计给出辐射的状态方程为  $P = \frac{1}{3}\rho$ 。代入式 (28) 得到  $\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a}$ ，因此

$$\rho_R \propto a^{-4}. \quad (29)$$

从物理图像上可以理解为  $\rho_R = \frac{\Delta N \hbar \nu}{\Delta V} \propto a^{-4}$ ，因为  $\Delta N$  不变，体积膨胀  $\Delta V \propto a^3$  且波长被拉长  $\nu \propto a^{-1}$ 。

### 9.2 冷物质 (Matter)

冷物质是指非相对论性物质，热运动的动能相比静质量可以忽略，即  $m_0 c^2 \gg k_B T$ 。例如冷重子物质、冷暗物质、低温电子气体（静质量  $0.5\text{MeV} \gg k_B T$ ）。

冷物质的状态方程为  $P = 0$ 。代入式 (28) 得到  $\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{da}{a}$ ，因此

$$\rho_M \propto a^{-3}. \quad (30)$$

从物理图像上可以理解为  $\rho_M = \frac{m_0 \Delta N}{\Delta V} \propto a^{-3}$ ，因为  $\Delta N$  不变，体积膨胀  $\Delta V \propto a^3$ 。

### 9.3 真空能 (Vacuum energy)

真空能就是宇宙学常数，是暗能量的一种。

真空能密度不变  $\rho_\Lambda = \text{const.}$ ，膨胀时外界对内部做功，能量守恒  $\Delta E = -\rho_\Lambda \Delta V = P_\Lambda \Delta V$ ，即真空能的状态方程为  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ 。真空能具有负压  $P_\Lambda < 0$ 。

### 9.4 一般情况

一般情况下的状态方程写作  $P = w\rho$ ，将状态方程代入式 (28) 得到

$$\dot{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (31)$$

$$\rho \propto a^{-3-3w} \quad (32)$$

对于我们上面讨论过的三种物质

辐射	$\rho_R \propto a^{-4}$	$w = 1/3$
冷物质	$\rho_M \propto a^{-3}$	$w = 0$
真空能	$\rho_\Lambda = \text{const.}$	$w = -1$

## 10 宇宙的演化

考虑平坦宇宙  $K = 0$ ，式 (25) 变成

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \propto \rho a^2 \quad (33)$$

- 辐射为主时，代入  $\rho_R \propto a^{-4}$ ，得到  $a \propto t^{1/2}$ 。 $H = \frac{da/dt}{a} = \frac{1}{2t}$ ，宇宙的年龄  $t_0 = \frac{1}{2H_0}$ ，其中  $H_0^{-1} = 9.778h^{-1}\text{Gyr}$ ，可以作为对宇宙年龄的粗略估计（实际的宇宙年龄需要考虑  $H_0^{-1}$  前面的系数）。

- 冷物质为主时，代入  $\rho_M \propto a^{-3}$ ，得到  $a \propto t^{2/3}$ ，比辐射为主的宇宙膨胀快。宇宙的年龄  $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ 。
- 真空能为主时，代入  $\rho_\Lambda = \text{const.}$ ，得到  $a \propto e^{Ht}$ ，随  $e$  指数加速膨胀。

考虑  $K \neq 0$ ，冷物质为主的宇宙。由  $\rho_M \propto a^{-3}$  得到密度  $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$ ，下标 0 表示今天的量。式 (25) 变成

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G \rho_0 a_0^3 / a \quad (34)$$

由此得到

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} - K} \quad (35)$$

$$dt = \frac{da}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0 a_0^3}{a} - K}} \quad (36)$$

将  $H_0^2 + \frac{K}{a_0^2} = \frac{8}{3}\pi G \rho_0$  代入式 (36)，得到

$$dt = \frac{da}{\sqrt{\left(H_0^2 + \frac{K}{a_0^2}\right) \frac{a_0^3}{a} - K}} = \frac{dx}{H_0} \sqrt{\frac{x}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2} (1-x)}} \quad (37)$$

其中  $x = a/a_0$ ，积分得到  $t$  与  $a$  的关系

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{a/a_0} \sqrt{\frac{x}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2} (1-x)}} dx \quad (38)$$

考虑  $K = +1$ 。定义  $\Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$ ， $K = +1$  时， $\Omega_K < 0$ 。令  $x = \frac{a}{a_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1+|\Omega_K|}{|\Omega_K|} \right) (1 - \cos \alpha)$ ，式 (37) 变成

$$dt = \frac{dx}{H_0} \sqrt{\frac{x}{1 + |\Omega_K| (1-x)}} = \frac{1}{2H_0} \frac{(1 + |\Omega_K|)}{|\Omega_K|^{3/2}} \sin \alpha d\alpha \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (39)$$

积分得到

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{(1 + |\Omega_K|)}{|\Omega_K|^{3/2}} (\alpha - \sin \alpha) \quad (40)$$

定义宇宙的临界密度

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} \quad (41)$$

它是今天平直宇宙所要求的物质密度。

为了满足式 (25)，

- 若  $\rho = \rho_{\text{crit}}$ , 则  $K = 0$ 。
- 若  $\rho > \rho_{\text{crit}}$ , 则  $K = +1$ 。
- 若  $\rho < \rho_{\text{crit}}$ , 则  $K = -1$ 。

考虑最一般的情况

$$\rho(a) = \rho_R(a) + \rho_M(a) + \rho_\Lambda(a) \quad (42)$$

$$= \rho_{R,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \rho_{M,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \rho_{\Lambda,0} \quad (43)$$

定义  $\Omega_i$  是今天各物质成分在临界密度中的占比,  $\Omega_R \equiv \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{\text{crit}}}$ ,  $\Omega_M \equiv \frac{\rho_{M,0}}{\rho_{\text{crit}}}$ ,  $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{\text{crit}}}$ 。另外定义曲率“质量”密度  $\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{a_0^2 H_0^2}$ , 则式 (25) 变成

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_M \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2} \quad (44)$$

可以改写为  $H(a) = H_0 E(a)$

$$E(a) = \sqrt{\Omega_R \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_M \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2}} \quad (45)$$

或  $H(z) = H_0 E(z)$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2} \quad (46)$$

在今天,  $z = 0$ ,  $a = a_0$ ,  $H = H_0$ , 有

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (47)$$

注意最后一项  $\Omega_K$  并不是真实的物质, 只是我们用曲率定义出来的量。它决定我们对尺度因子的选取, 当  $\Omega_K \neq 0$  时,  $a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}}$ , 只有当  $\Omega_K = 0$  时, 我们才能选取  $a_0 = 1$ 。

式 (47) 中, 前三项才是宇宙中真实存在的物质, (见式 (42)) 它们的总和不一定是 1。不过宇宙学观测得到的结果  $\Omega_K \approx 0$ , 可以认为我们的宇宙近似是平坦的。(即使不平坦, 宇宙的曲率也非常小。暴涨理论会对这一现象给出解释。) 即  $\rho_{\text{crit}} \simeq \rho_0$ , 所以  $\Omega_i$  也可以近似表示今天各物质成分在宇宙密度中的占比。



小结:

$\rho_0 > \rho_{\text{crit}}$	$\Omega > 1$	$\Omega_K < 0$	$K = +1$	正曲率, 球面, 有限无界
$\rho_0 < \rho_{\text{crit}}$	$\Omega < 1$	$\Omega_K > 0$	$K = -1$	负曲率, 超球面, 无限无界
$\rho_0 = \rho_{\text{crit}}$	$\Omega = 1$	$\Omega_K = 0$	$K = 0$	平直, 平直, 无限无界

其中前两列是广义物质密度, 第 3、4 列是曲率, 第 5 列描述宇宙的时空几何。

## 11 回顾

Friedmann 方程改写为  $H(t) = H_0 E(t)$ , 其中

$$E(a) = \sqrt{\Omega_R(a/a_0)^{-4} + \Omega_M(a/a_0)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K(a/a_0)^{-2}} \quad (48)$$

还可以写成

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2} \quad (49)$$

广义的物质包含冷物质、辐射、暗能量,  $i = M, R, \Lambda$ , 今天各物质成分占比  $\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit}}}$ ,  $\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ .

曲率 “密度”  $\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}$  是形式上的, 不是实质的物质。

- 对  $K = 0$ ,  $\Omega_K = 0$ ,  $a_0$  可以随意定义, 一般定义为  $a_0 = 1$ .
- 对  $K \neq 0$ , 通过选取共动坐标使得  $R$  (共动) = 1, 使得  $K = \pm 1$ , 今天的尺度因子  $a_0 = R$  (今天) /  $R$  (共动) =  $R$  (今天), 不能随意选取  $a_0$ .  $|\Omega_K| = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}$  可以连续变化. 现有观测  $|\Omega_K| < 10^{-2} \sim 10^{-3}$ .

根据定义

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (50)$$

定义  $\Omega = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda = \rho_0/\rho_{\text{crit}}$ , 则曲率被确定为  $\Omega_K = 1 - \Omega$ . 实际上通过测量  $\Omega$ , 得到  $\Omega_K$ , 可以计算

$$a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \quad (51)$$

## 12 时间和距离

### 12.1 宇宙年龄

$$t_{\text{age}}(z) = \int_0^{t_{\text{age}}} dt' = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a' E(a')} \quad (52)$$

$$= \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a' \sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \quad (53)$$

宇宙学模型  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  决定  $t_{\text{age}}(z)$  关系。因为目前测量到  $\Omega_R = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$  很小，可以忽略。

举例：

- 物质为主,  $\Omega_M = 1, \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0$ , 推出  $\Omega_K = 0$ ,  
今天  $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' \sqrt{a'^{-3}}} = \frac{2}{3H_0} = 9.32 \text{Gyr}$
- 辐射为主,  $\Omega_R = 1, \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ , 推出  $\Omega_K = 0$ ,  
今天  $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' a'^{-2}} = \frac{1}{2H_0} = 6.99 \text{Gyr}$
- 没有物质的空宇宙,  $\Omega_R = \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ , 推出  $\Omega_K = 1$ ,  
今天  $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' a'^{-1}} = \frac{1}{H_0} = 13.98 \text{Gyr}$
- $\Lambda$ CDM 宇宙,  $\Omega_R = 0, \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ , 推出  $\Omega_K = 0$ ,  
今天  $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' \sqrt{0.3 \times a'^{-3} + 0.7}} = \frac{0.964}{H_0} = 13.47 \text{Gyr}$ 。误差主要来自  $H_0$ 。

### 12.2 回溯时间 (look-back time)

$$t_{\text{LB}}(z) = \frac{1}{H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da'}{a' \sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \quad (54)$$

宇宙学模型  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  决定  $t_{\text{LB}}(z)$  关系。

### 12.3 光传播经过的路径在今天的距离

即  $a_0 \chi_{\text{comoving}}$ ，其中  $\chi_{\text{comoving}}$  是光源在共动坐标下距观测者的距离。

$$\chi(z) = \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} = \frac{c}{H_0} \int_{\frac{a}{a_0}}^1 \frac{da'}{a'^2 E(a')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (55)$$

$$= D_H \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z')^2}} \quad (56)$$

其中定义了  $D_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq \frac{3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}}{100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 3000h^{-1} \text{ Mpc}$ , 宇宙学模型  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  决定  $\chi(z)$  关系。红移  $z$  是可测量量。 $\chi$  可以转化为光度距离或角直径距离,

$$d_A = \frac{a_0 r}{1+z} \quad (57)$$

$$d_L = (1+z)a_0 r \quad (58)$$

$$a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} = \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_K|}} \quad (59)$$

其中  $r = S_k(\chi/a_0)$ , 与  $H_0$  无关。

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K = +1 \\ x & K = 0 \\ \sinh x & K = -1 \end{cases} \quad (60)$$

$r$  将可测量量  $d_A$  和  $d_L$  与  $\chi$  联系起来。通过测量  $d_A$  和  $d_L$  就可以得到  $\chi(z)$  关系, 由观测到的  $\chi(z)$  关系就可以限制宇宙学模型。

### 12.3.1 应用举例: Alcock-Paczynski test

考虑有固定物理尺寸的球体 (直径为  $D$ ) 在红移  $z$  的地方, 观测到张角  $\Delta\theta$ , 红移宽度  $\Delta z$

$$\Delta\theta = \frac{D}{d_A} = \frac{D(1+z)}{a_0 r} = \frac{D(1+z)\sqrt{|\Omega_K|}}{D_H S_k(\chi/a_0)} \quad (61)$$

$$D = \frac{a(z)}{a_0} \Delta\chi = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)} \quad (62)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z) S_k(\chi/a_0)} = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)} \left[ S_k \left( \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \right]^{-1} \quad (63)$$

与  $D$  和  $H_0$  无关。与  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  有关。

在  $K = 0$  的情况下

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \left[ E(z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^{-1} \quad (64)$$

举例：

- $\Lambda$ CDM 宇宙,  $\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ , 推出  $\Omega_K = 0$ , 在  $z = 1$  的地方,  

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[ \sqrt{0.3 \times 2^3 + 0.7} \times \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3 + 0.7}} \right]^{-1} = 0.736.$$
- $\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 1$ , 推出  $\Omega_K = 0$ ,  
 在  $z = 1$  的地方,  $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[ \sqrt{1} \times \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1}} \right]^{-1} = 1.$
- $\Omega_M = 1.3, \Omega_\Lambda = 0$ , 推出  $\Omega_K = -0.3 < 0, K = +1, S_k(x) = \sin x$ ,  
 在  $z = 1$  的地方,  

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.3}}{\sqrt{1.3 \times 2^3 - 0.3 \times 2^2}} \left[ \sin(\sqrt{0.3} \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1.3(1+z')^3 - 0.3(1+z')^2}}) \right]^{-1} = 0.594.$$
- $\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$ , 推出  $\Omega_K = 0.7 > 0, K = -1, S_k(x) = \sinh x$ ,  
 在  $z = 1$  的地方,  

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{0.3 \times 2^3 + 0.7 \times 2^2}} \left[ \sinh(\sqrt{0.7} \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3 + 0.7(1+z')^2}}) \right]^{-1} = 0.640.$$

## 13 视界 (Horizon)

### 13.1 粒子视界 (particle horizon)

粒子视界 (particle horizon)：对于过去的事件所能观测到的最远距离。  
 或在  $t$  时刻看到的最远宇宙在  $t$  时刻的距离。

$$d_{ph}(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (65)$$

在今天,

$$d_{ph}(t_0) = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a'^2 \sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \quad (66)$$

- 对于辐射为主的宇宙,  $a \propto t^{1/2}$ ,  $d_{ph}(t_0) = 2t_0 = D_H$ .
- 对于冷物质为主的宇宙,  $a \propto t^{2/3}$ ,  $d_{ph}(t_0) = 3t_0 = 2D_H$ .

### 13.2 事件视界 (event horizon)

事件视界 (event horizon): 未来的观测者所能看到的在  $t$  时刻或以后的事件在  $t$  时刻的最远距离。

$$d_{eh}(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{cdt'}{a(t')} \quad (67)$$

- 对于冷物质为主的宇宙,  $a \propto t^{2/3}$ ,  $d_{eh} \rightarrow \infty$ .
- 若  $\Lambda$  为主,  $a \propto e^{Ht}$ ,  $H = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}$ ,  $d_{eh} \rightarrow \frac{c}{H}$  常数, 足够时间以后, 只有引力束缚的本星系群能看到。

### 13.3

从  $t$  时刻发出的信号在未来  $T$  时刻所能到达的最远距离

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a(T) \int_t^T \frac{cdt'}{a(t')} = d_{eh} \frac{a(T)}{a(t)} \quad (68)$$

若  $\Lambda$  为主,  $a \propto e^{Ht}$ ,  $H = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}$ ,  $d_{eh} \rightarrow \frac{c}{H}$  常数, 但  $a(T) \rightarrow \infty$ , 所以我们发出的信号可以到达无限远。

## 14 宇宙学常数和真空能

### 14.1 真空能视角

真空能  $P = -\rho$ .

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = -\rho \delta_\nu^\mu \quad (69)$$

得到真空能的能动量张量  $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}$ .

Einstein 场方程  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}$ . 其中  $R_{\mu\nu}$  是 Ricci tensor,  $R$  是 Ricci scalar, 二者都是  $g_{\mu\nu}$  及其导数的函数。

$T_{\mu\nu}$  是能动量张量, 包括物质和辐射 (下式第一项) 和真空能 (下式第二项)

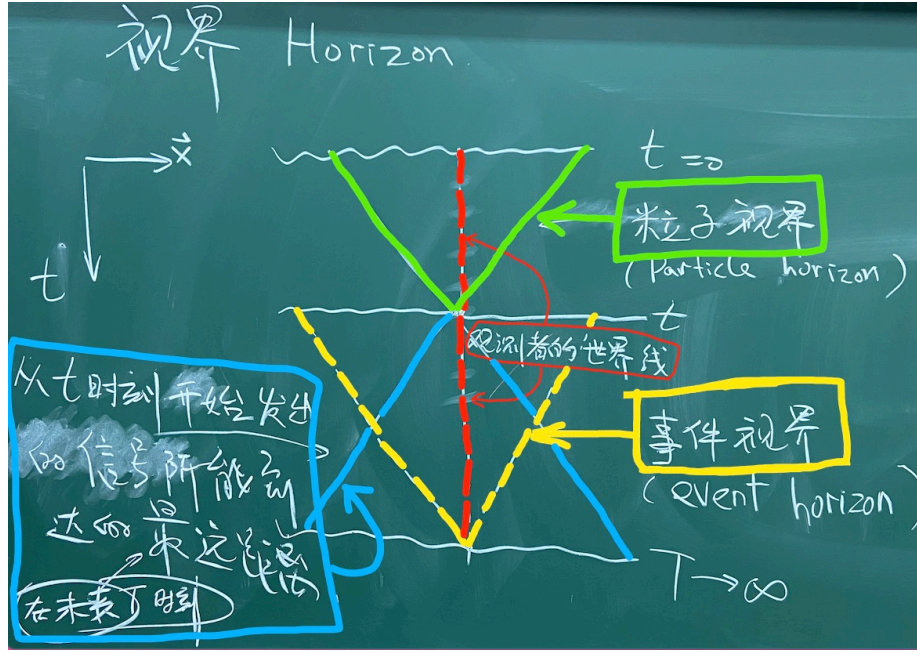


图 1: 视界

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu} \quad (70)$$

此时场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}^{(M)} + 8\pi G \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu} \quad (71)$$

## 14.2 宇宙学常数视角

Einstein 场方程是由作用量导出的。作用量  $S$  为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (72)$$

其中  $d^4x \sqrt{-g}$  是 4 维协变的体积元,  $\mathcal{L}$  是拉氏量密度, 要求

1. 是 4 维坐标变换下的不变量。
2. 包含度规的最高 2 阶导数。

只有 Ricci scalar 同时满足这两个条件，还有一个平凡 (trivial) 解——常数。把宇宙学常数加到作用量里：

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \Lambda) \quad (73)$$

导出的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}^{(M)} \quad (74)$$

与式 (71) 相比，可得

$$\Lambda = 8\pi G \rho_\Lambda \quad (75)$$

真空能与宇宙学常数是等价的。只不过真空能的引入有一些量子场论中的动机，而宇宙学常数则来自对广义相对论的 Einstein 场方程理论上的推广。下面我们将混用“真空能”和“宇宙学常数”。

### 14.3 Einstein 静态宇宙模型

静态宇宙模型要求  $a$  为常数， $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ ，带入弗里德曼方程得到

$$\rho + 3P = 0 \quad (76)$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \quad (77)$$

如果只有物质和辐射， $\rho + 3P > 0$ ，所以 Einstein 在 1917 年引入了宇宙学常数。以下推导使用真空能，且忽略辐射。

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_M + \rho_\Lambda \\ P &= P_M + P_\Lambda = -\rho_\Lambda \\ \rho + 3P &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\Rightarrow \rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_M$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G \rho a_E^2 = 8\pi G \rho_\Lambda a_E^2 > 0 \quad (79)$$

所以是正曲率， $K = +1$ ，

$$a_E = 1/\sqrt{8\pi G \rho_\Lambda} \quad (80)$$

但这个解不稳定。我们做微扰：

$$a = a_E + \delta a \quad (81)$$

$$\rho_M = 2\rho_\Lambda + \delta\rho \quad (82)$$

$$(83)$$

要总满足

$$1 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad (84)$$

$$\delta a < 0 \Rightarrow \delta\rho > 0 \quad (85)$$

使得  $\dot{a} = 0$  继续满足，但二阶导

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P) = -4\pi G(3\rho_\Lambda + \delta\rho - 3\rho_\Lambda) = -4\pi G\delta\rho < 0 \quad (86)$$

$\delta a < 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$ ,  $\delta a > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$ ，即静态模型不稳定。

## 15 早期宇宙的历史

本章会讲 3 个重要的话题：

- CMB 微波背景辐射
- BBN 大爆炸核合成
- Inflation 暴涨宇宙

## 16 微波背景辐射

### 16.1 退耦 (decoupling)

自由质子和自由电子复合成中性氢原子，放出光子（大于等于 13.6 eV），中性氢原子也可以吸收光子电离为自由的质子和电子。

随着宇宙膨胀，光子能量降低，复合率逐渐变得远大于电离率。具体地说，当  $k_B T = 0.3$  eV 时，复合率远大于电离率。

另一方面，当光子和电子的散射速率小于宇宙膨胀速率后，光子和电子退耦。



光子被电子散射的速率  $\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e v$ ，其中  $\sigma_T$  是 Thomson 散射截面， $n_e$  是电子数密度， $v$  是电子运动速度。早期运动速度接近光速， $\Lambda_\gamma \simeq \sigma_T n_e c \propto a^{-3} \propto (T/T_{\gamma 0})^3$  其中  $T_{\gamma 0}$  是今天 CMB 的温度。

宇宙膨胀速率，在辐射占主导期， $H \propto a^{-2} \propto (T/T_{\gamma 0})^2$ 。早期散射速率远大于膨胀速率，能达到化学平衡。但散射速率降得更快，当散射速率小于宇宙膨胀速率，化学平衡被打破。

在化学平衡中的等离子体中，光子不断被散射，宇宙对光子是不透明的 (opaque)，化学平衡被打破时，光子不再发生散射，而是惯性运动，形成最后散射面。最后散射面由被我们观测到的 CMB 光子的最后一次散射位置组成，近似为一个二维球面。见图 (2)

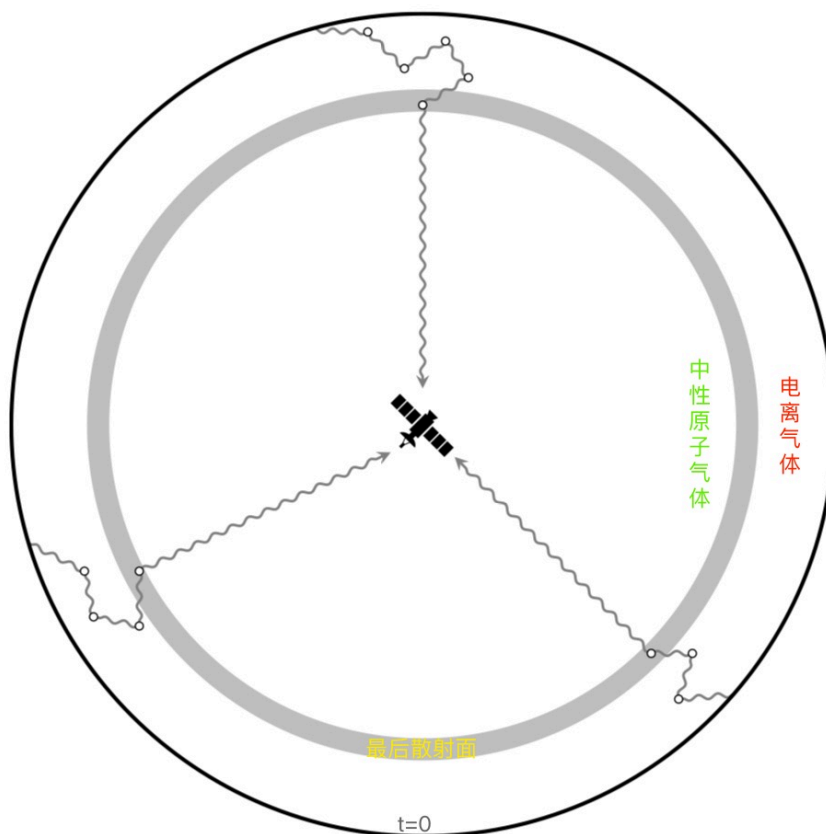


图 2: 图中灰色圆环为最后散射面，修改自 Daniel Baumann: Cosmology (2021)

## 16.2 CMB 的特征

- 各向同性：来自所有方向的 CMB 温度高度相同。
- 辐射场强度随频率的分布符合黑体辐射谱。(Planck 公式)
- 退耦能标约为 0.3eV，温度约为 3000K，红移约为 1100
- 温度涨落有偶极矩。(因为地球、太阳、银河系的运动。)
- 扣除偶极矩后，仍然存在微小的温度起伏，这就是后来宇宙密度起伏、形成星系等结构的种子/初始条件。

为什么 CMB 符合黑体谱？

在最后散射面  $t_L$ ，光子辐射谱满足 Planck 公式：

$$n_{T(t_L)}(\nu_L)d\nu_L = \frac{8\pi\nu_L^2 d\nu_L}{\exp\left(\frac{h_{\text{pl}}\nu_L}{k_B T(t_L)}\right) - 1} \quad (87)$$

在  $t > t_L$ ，光子频率由于宇宙学红移降低  $\nu = \nu_L \frac{a(t_L)}{a(t)}$ ，光子数密度  $n(\nu, t) d\nu \propto a^{-3}$  即

$$n(\nu, t)d\nu = \left(\frac{a(t_L)}{a(t)}\right)^3 n_{T(t_L)}(\nu_L) d\nu_L \quad (88)$$

代入得

$$n(\nu, t)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h_{\text{pl}}\nu}{k_B \frac{a(t_L)}{a(t)} T(t_L)}\right) - 1} \quad (89)$$

仍然是黑体谱。此时光子不处于热平衡，不妨令  $T(t) = \frac{a(t_L)}{a(t)} T(t_L)$ ，即  $T \propto 1/a$ 。

## 微波背景辐射 (续)

### 光子、核子密度

光子的能量密度  $\rho_\gamma = \int h_{\text{pl}}\nu n(\nu)d\nu = a_B T^4$ ，其中  $a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h_{\text{pl}}^3 c^3} = 7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ 。

今天  $T_{\gamma,0} = 2.725\text{K}$ ， $\rho_{\gamma,0} = a_B T_{\gamma,0}^4 = 4.64 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$  (erg 和 g 之间用  $E = mc^2$  换算)， $\Omega_\gamma = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{\text{crit}}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \simeq 5 \times 10^{-5}$ 。

今天的总辐射包括光子和中微子。中微子作为费米子，和光子的统计不同。且中微子退耦更早，所以温度低于光子。最后，中微子有 3 种。总结如下

$$\rho_{R,0} = \rho_{\gamma,0} + \rho_{\nu,0} \times \left(\frac{7}{8}\right) \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \times 3 = 7.80 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} \quad (90)$$

总之今天辐射的能量密度远远小于冷物质和暗能量。

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{\text{crit}}} = 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \\ &\simeq 8.3 \times 10^{-5} \ll \Omega_M, \Omega_\Lambda \end{aligned} \quad (91)$$

考虑光子的数密度

$$n_\gamma = \int_0^\infty n_T(\nu) d\nu = \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B}{k_B} T^3 = 20.28 T^3 \text{ cm}^{-3} \quad (92)$$

今天  $T_{\gamma,0} = 2.725\text{K}$ ,  $n_{\gamma,0} = 410 \text{ photons /cm}^3$

核子数密度

$$n_{B,0} = \frac{\rho_{B,0}}{m_N} = \frac{\Omega_B \rho_{\text{crit}}}{m_N} = 1.123 \times 10^{-5} \Omega_B h^2 \text{ nucleons /cm}^3 \quad (93)$$

其中  $m_N$  是核子平均质量。

光子与核子数密度比

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 4.1 \times 10^{-10} \quad (94)$$

上节课讲过，在绝热膨胀的宇宙中，为了保持普朗克黑体辐射谱，我们定义非热平衡的光子的温度正比于  $a$  的  $-1$  次方。对于非相对论性粒子，为了遵循玻尔兹曼统计，温度正比于  $a$  的  $-2$  次方。在退耦前，光子和核子处于热平衡，光子远多于核子，占据主导，温度正比于  $a$  的  $-1$  次方。

## 估算光子退耦时刻

散射速率

$$\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e c = 0.88 n_{B,0} \left(\frac{T}{T_{\gamma,0}}\right)^3 \sigma_T c = 1.97 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} \Omega_B h^2 (T/T_{\gamma,0})^3 \quad (95)$$

其中用到平均一个核子对应  $Y_H + \frac{1}{2} Y_{He} = 0.76 + \frac{1}{2} \times 0.24 = 0.88$  个电子。

能量转移速率

$$\Gamma_\gamma \simeq \left( \frac{\Delta E}{k_B T} \right) \Lambda_\gamma \approx \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right) \Lambda_\gamma \simeq 9.0 \times 10^{-29} s^{-1} \Omega_B h^2 \left( \frac{T}{T_{\gamma,0}} \right)^4 \quad (96)$$

而宇宙膨胀速率（假设辐射占主导）

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{a}}{a} &\approx H_0 \sqrt{\Omega_R (T/T_{\gamma,0})^4} \\ &= 2.1 \times 10^{-20} s^{-1} \left( \frac{T}{T_{\gamma,0}} \right)^2 \end{aligned} \quad (97)$$

能量转移速率比膨胀速率下降快，当  $\Gamma_\gamma \leq H$ ，散射速率不足，光子与重子物质退耦，也可以叫 freeze out. 此时温度约为  $10^5$  K. 但后面会看到，这样估算出的温度过高，处于辐射为主的阶段，是不准确的。

### 物质-辐射相等时刻

辐射的能量密度正比于  $a$  的  $-4$  次方，冷物质的能量密度正比于  $a$  的  $-3$  次方，辐射密度下降快，辐射在宇宙早期先占据主导，后来下降到小于冷物质的能量密度，二者相等的时刻叫做“物质-辐射相等时刻” (matter-radiation equality epoch).

$$T_{eq} = T_{\gamma,0} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_R} \right) = 6.56 \times 10^4 \Omega_m h^2 \text{ K} = 10^4 \text{ K} \quad (98)$$

一般使用红移表示

$$1 + z_{eq} = \left( \frac{a_{eq}}{a_0} \right)^{-1} = \frac{\Omega_M}{\Omega_R} = 2.4 \times 10^4 (\Omega_M h^2) \simeq 3500 \quad (99)$$

### Boltzmann 方程和 Saha 方程

对于反应  $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$ ，非平衡态下的 Boltzmann 方程为

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_1 a^3) = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left( \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right) \quad (100)$$

其中  $\langle \sigma v \rangle$  是 thermally averaged cross-section. 括号中第一项度量了反应向左移动的速率，第二项度量了反应向右移动的速率。

$$n_i^{(0)} = \begin{cases} g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}}, & m_i c^2 \gg k_B T \\ \frac{g_i}{\pi^2} T^3, & m_i c^2 \ll k_B T \end{cases} \quad (101)$$

平衡态下的精细平衡方程

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \quad (102)$$

具体到再复合 (recombination), 反应是  $e + p \leftrightarrow H + \gamma$ . 代入精细平衡方程得到 Saha 方程

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} \quad (103)$$

其中光子的化学势为 0,  $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$ . 忽略 He 贡献, 电子数密度与质子数密度近似相等

$$n_e = n_p = X_e n_b$$

其中  $n_b = n_p + n_H$  是重子数密度,  $X_e$  是电离度. 剩下的 H 以中性原子形式存在

$$n_H = (1 - X_e) n_b$$

此时温度远小于质子和电子的能标, 使用非相对论情形计算  $n_i^{(0)}$

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{g_e g_p}{g_H} \left( \frac{m_e m_p}{m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (104)$$

$$\simeq \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (105)$$

其中  $B_1 = m_e + m_p - m_H = 13.6\text{eV}$  是中性氢原子的结合能, 自由度  $g_e = 2, g_p = 2, g_H = 4$ .

Boltzmann 方程左边

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_e a^3) = a^{-3} \frac{d}{dt} (X_e n_b a^3) = n_b \frac{dX_e}{dt} \quad (106)$$

即

$$n_b \frac{dX_e}{dt} = n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left( \frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e n_p}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right) \quad (107)$$

$$= (1 - X_e) n_b \langle \sigma v \rangle \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} - X_e^2 n_b^2 \langle \sigma v \rangle \quad (108)$$

$$= (1 - X_e) n_b \beta - X_e^2 n_b^2 \alpha^{(2)} \quad (109)$$

其中

$$\beta \equiv \langle \sigma v \rangle \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (110)$$

$$\alpha^{(2)} \equiv \langle \sigma v \rangle = 9.78 \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left( \frac{B_1}{k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{B_1}{k_B T} \right) \quad (111)$$

得到 Boltzmann 方程

$$\frac{dX_e}{dt} = (1 - X_e) \beta - X_e^2 n_b \alpha^{(2)} \quad (112)$$

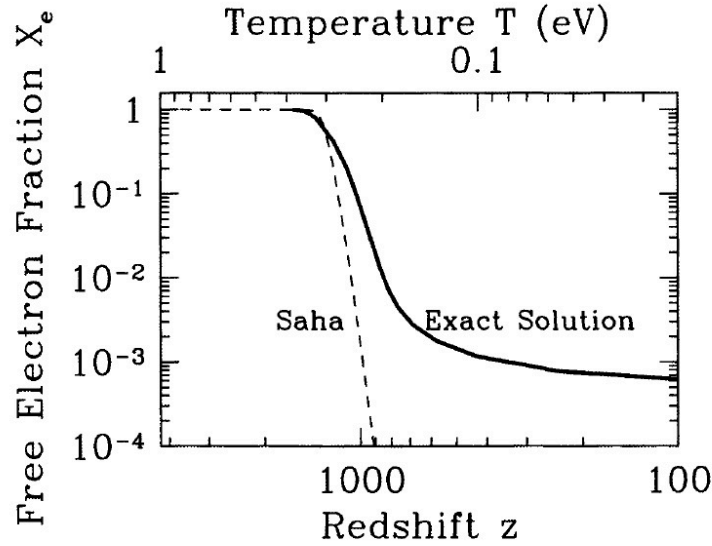
再复合开始时,  $\frac{dX_e}{dt} = 0$ , RHS = 0, 即 Saha 方程

$$\frac{X_e^2}{(1 - X_e)} = \frac{\beta}{n_b \alpha^{(2)}} = \frac{1}{n_b} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (113)$$

指数项占主导。

解 Saha 方程的结果是退耦发生在  $z \sim 1100$ ,  $T \sim 3000\text{K}$  时。

但是 Saha 方程的解是电离度一直随 exp 指数下降, 这是不准确的。考虑到退耦后平衡态被打破, 应使用非平衡态的 Boltzmann 方程求解, 则可以正确地给出退耦后的残余电离度约为  $10^{-3}$ , 见下图 (引自 Dodelson)。



**Figure 3.4.** Free electron fraction as a function of redshift. Recombination takes place suddenly at  $z \sim 1000$  corresponding to  $T \sim 1/4$  eV. The Saha approximation, Eq. (3.37), holds in equilibrium and correctly identifies the redshift of recombination, but not the detailed evolution of  $X_e$ . Here  $\Omega_b = 0.06$ ,  $\Omega_m = 1$ ,  $h = 0.5$ .

图 3: 再复合时期电离度的下降

## 17 CMB 的偶极各向异性 (dipole anisotropy)

光子数密度符合普朗克公式

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2/c^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (114)$$

我们求相空间的数密度。相空间（坐标和动量组成的参数空间）的粒子数量  $N(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p$  是守恒量，其中  $d^3x d^3p$  是相空间的体积元，是 Lorentz 不变量，因此  $N(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  也是 Lorentz 不变量。

对于光子， $|\mathbf{p}| = E/c = h_{\text{pl}}\nu/c$ ，则  $d^3p = 4\pi|\mathbf{p}|^2 dp = 4\pi h_{\text{pl}}^3 \nu^2/c^3 d\nu$ 。且对于光子， $N_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = N_\gamma(p)$

光子数一定，

$$N_\gamma(p) d^3x d^3p = \frac{1}{2} n_T(\nu) d\nu d^3x \quad (115)$$

其中 1/2 是因为光子有两种极化。

得到

$$N_\gamma(p) = \frac{1}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} \quad (116)$$

地球（以下带 ' 的是地球坐标系）相对共动坐标系有一个相对运动速度  $v = \mathcal{O}(100\text{km/s})$ ，此时相对论的速度参数  $\beta \equiv v/c \sim 10^{-3}$ ， $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \sim 1$ 。设地球上观测到的光子动量  $\mathbf{p}'$  与地球坐标系运动速度  $\mathbf{v}$  夹角是  $\theta$ ， $|\mathbf{p}| = \gamma(1 + \beta \cos \theta) |\mathbf{p}'|$  则

$$N'_\gamma(p') = \frac{1}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{e^{\frac{p'c}{k_B T'}} - 1} \quad (117)$$

$$T'(\theta) = \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} \simeq T(1 - \beta \cos \theta) \quad (118)$$

可以观测到偶极各向异性，其中  $\theta = 0$  时（光子从后方追上观察者），观测到的温度  $T'$  偏低， $\theta = \pi$  时（光子迎面而来），观测到的温度  $T'$  偏高。

实际观测到的 CMB 偶极矩说明了地球相对于 “CMB frame” 有运动。扣除这个偶极矩后，我们可以得到宇宙真实的密度起伏。

## 18 大爆炸核合成

## (Big Bang Nucleosynthesis, BBN)

对于一种原子核, 原子序数  $Z$ , 原子质量数  $A$ , 原子核质量  $m$ , 中子质量  $m_n$ , 质子质量  $m_p$ . 束缚能

$$B = Zm_p + (A - Z)m_n - m \quad (119)$$

质子中子能量差  $Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$ , 氘核结合能  $B_D = 2.22 \text{ MeV}$ .

大爆炸核合成的预言:

1. 轻元素 (H, He, 部分 Li, C) 在大爆炸中合成。
2. 定量预言 H, He, Li, C 的丰度。

质子和中子通过弱相互作用可以相互转化。

$$p + \bar{\nu} \leftrightarrow n + e^+ \quad (120)$$

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu \quad (121)$$

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (122)$$

当温度降低到  $T \sim 0.1 \text{ MeV}$  时, 反应向产生中子的一端移动, 质子转化成中子。中子足够多后 (当  $T \sim 0.07 \text{ MeV}$ ) 就可以形成轻元素。

$$p + n \leftrightarrow D + \gamma \quad (123)$$

$$D + D \leftrightarrow {}^3\text{He} + n \quad (124)$$

$${}^3\text{He} + D \leftrightarrow {}^4\text{He} + p \quad (125)$$

考虑  $T > 0.5 \text{ MeV}$ , 平衡态方程

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{n_p^{(0)}}{n_n^{(0)}} = e^{\frac{Q}{k_B T}} \quad (126)$$

定义  $X_n \equiv \frac{n_n}{n_b} = \frac{n_n}{n_n + n_p}$ , 即

$$\frac{1 - X_n}{X_n} = \frac{n_p}{n_n} = e^{\frac{Q}{k_B T}} \quad (127)$$

(提问补充: 在中微子退耦前, 反应向质子一方移动。)

反应发生后需要使用非平衡态的 Boltzmann 方程,

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left( (1 - X_n) e^{-\frac{Q}{k_B T}} - X_n \right) \quad (128)$$



其中速率  $\lambda_{np} = \frac{255}{\tau_n x^5} (12 + 6x + x^2)$ ,  $x = \frac{Q}{k_B T}$ . 当  $T \simeq 0.5$  MeV 时,  $X_n \simeq 0.15$ , 中子寿命  $\tau_n \simeq 15\text{min} \simeq 886.7\text{sec}$ .

轻元素形成时, 温度  $T_{\text{nuc}} \sim 0.07$  MeV,

$$X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.15 \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) = 0.11 \quad (129)$$

BBN 时期的宇宙辐射占主导,  $t \propto a^2 \propto T^{-2}$ . 所以此时宇宙的年龄为

$$t = 132\text{sec} \left(\frac{0.1 \text{ MeV}}{T}\right)^2 = 132\text{sec} \left(\frac{0.1}{0.07}\right)^2 \simeq 269\text{sec} \quad (130)$$

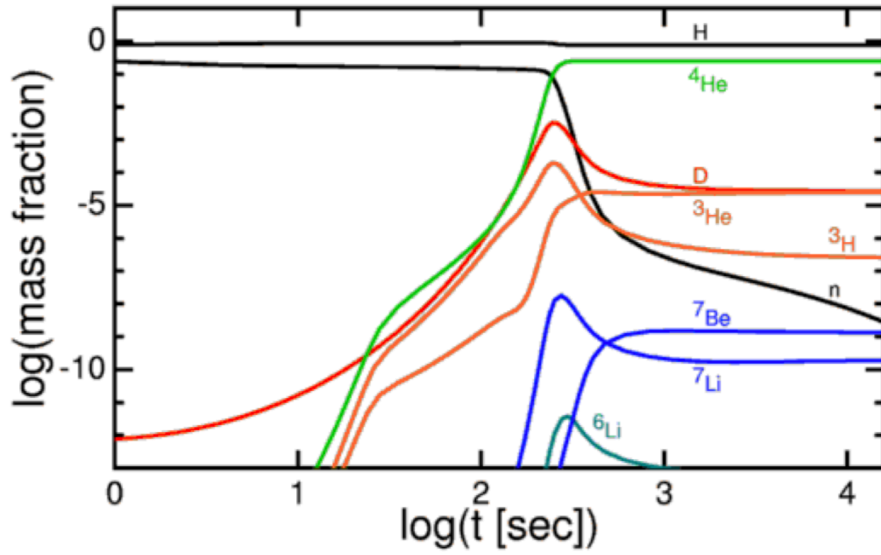


图 4: 轻元素丰度随时间的变化 (图源 Hannu Kurki-Suonio)

BBN 期间各种原子核质量占比随时间的演化如图 (4) 所示, 可以看到 BBN 结束时, 多数中子都进入了  $^4\text{He}$ ,  $X_{^4\text{He}} \equiv \frac{4n_{^4\text{He}}}{n_b} = 2X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.22$ . 这是估算, 精确的结果是

$$X_{^4\text{He}} = 0.2262 + 0.0135 \ln\left(\frac{\eta_b}{10^{-10}}\right) \approx 0.24 \quad (131)$$

其中  $\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} \simeq 4 \times 10^{-10}$ , 与  $\Omega_b h^2$  有关。

如果忽略掉质子和中子质量微小的差异, 那么  $X_{^4\text{He}}$  的物理意义就是氦 4 的质量丰度, 有时候用  $Y_p$  表示, 即氦 4 核在所有核子里的质量比。此外, 也

经常定义以数量计算的氦 4 丰度  $y_{\text{He}}$ ，即氦 4 核在所有原子核里的数量比。由于氢 (H) 原子核只包含 1 个核子，而氦 4 ( ${}^4\text{He}$ ) 原子核包含 4 个核子，所以

$$y_{\text{He}} = \frac{\frac{1}{4}X_{\text{He}}}{(1 - X_{\text{He}}) + \frac{1}{4}X_{\text{He}}} \approx 0.0724 \quad (132)$$

对 BBN 的测量见 图 (5)。从 4 个独立丰度测量得到自洽的  $\Omega_b h^2$  限制。

$$\Omega_b \simeq 0.05 \quad (133)$$

$$h \simeq 0.7 \quad (134)$$

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.025 \quad (135)$$

## 19 中微子退耦 (neutrino decoupling)

中微子退耦发生在约 1 MeV 时。

在  $T > 10$  MeV 时，正负电子和正负中微子通过弱相互作用  $e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$  互相转化达到热平衡，康普顿散射使电子和光子达到热平衡。此时质子、中子、电子、光子、中微子都处于热平衡之中。

当  $T \sim 1$  MeV 时，弱相互作用的反应不够有效，中微子退耦。此时质子、中子、电子、光子处于热平衡之中。

当  $T \sim 0.5$  MeV 时，即约为电子的静质量时，电子变成非相对论性粒子（注：正负电子湮灭），将部分能量转移给光子，导致光子温度上升。而此时中微子已经退耦，自行绝热膨胀，不会接收这部分能量，导致光子温度大于中微子。质子和中子比电子重很多，此时为非相对论粒子，虽然也处在热平衡中，但能量贡献不变，以下计算能量转移不考虑质子和中子。

以下计算光子（微波背景辐射）温度比中微子（背景辐射）温度高多少。

定义熵密度  $s(T) = \frac{\rho + P}{T}$ ，热平衡系统  $s \propto a^{-3}$ 。粒子数密度为（假设化学势为 0）

$$n(p)dp = \frac{4\pi g p^2}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (136)$$

费米子 (Fermion, 如电子、中微子) 取正号，玻色子 (Boson, 如光子) 取负号。

能量密度

$$\rho(T) = \int_0^\infty n(p, T) dp \sqrt{p^2 + m^2} \quad (137)$$

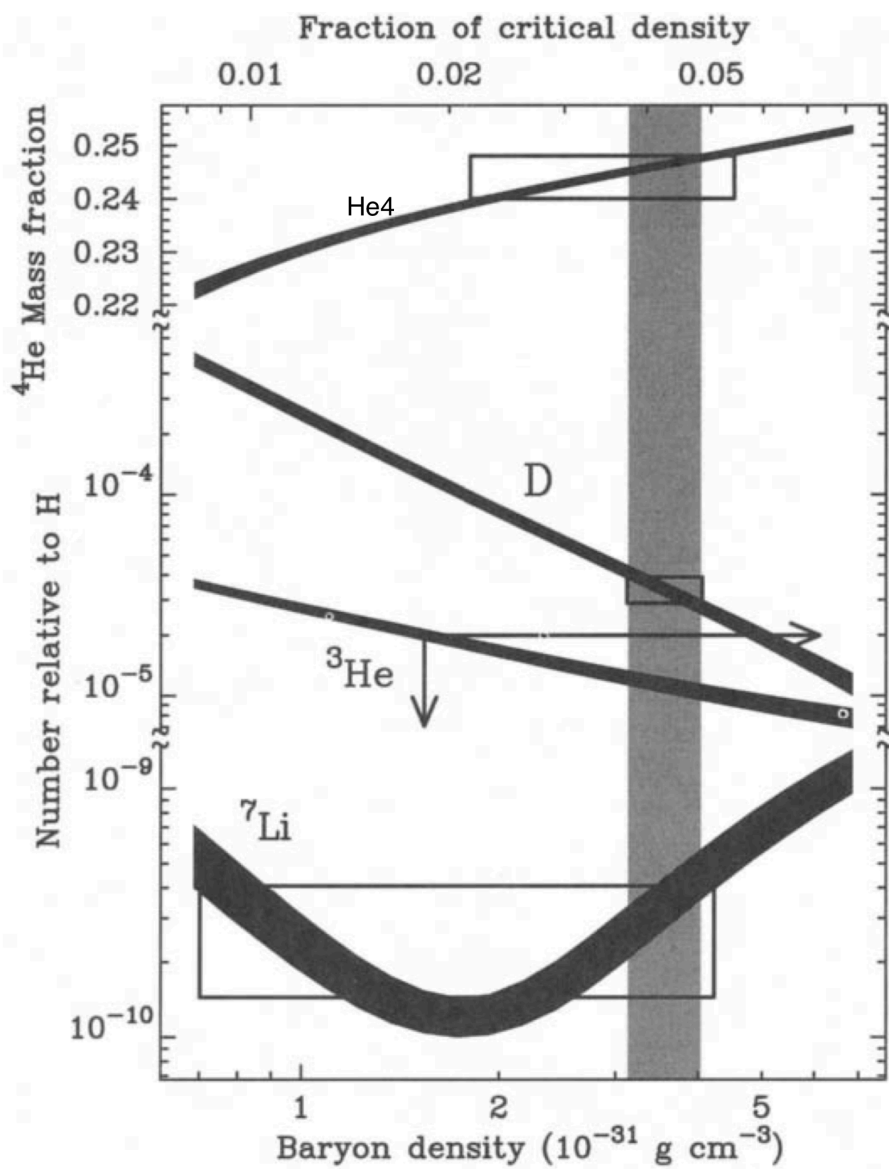


图 5: 轻元素丰度的预言和测量 (图源 Dodelson)

相对论性粒子

$$\rho(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}ga_B T^4 & \text{Boson} \\ \frac{7}{8} \times \frac{1}{2}ga_B T^4 & \text{Fermion} \end{cases} \quad (138)$$

其中  $g$  是粒子的简并度, 包括粒子种类 (比如中微子有三代)、正反粒子、自旋态。 $a_B$  是常数。记为  $\rho(T) = \frac{1}{2}\mathcal{N}a_B T^4$ , 则

$$\mathcal{N} = \begin{cases} g & \text{Boson} \\ \frac{7}{8} \times g & \text{Fermion} \end{cases} \quad (139)$$

对相对论性粒子,  $P = \frac{1}{3}\rho$ . 代入熵密度定义得到  $s(T) = \frac{4\rho}{3T} = \frac{2}{3}\mathcal{N}a_B T^3$ , 由于  $s(T)a^3 = \text{const.}$ , 所以  $\mathcal{N}a^3 T^3 = \text{const.}$

中微子退耦时间  $t_{\text{dec}}$ , 此时温度  $T_\nu(t_{\text{dec}}) = T_\gamma(t_{\text{dec}}) = T_{\text{dec}}$ .

$$\mathcal{N}_{\text{dec}} = 2 + 1 \times 2 \times 2 \times \frac{7}{8} = \frac{11}{2} \quad (140)$$

其中第一项来自光子, 第二项来自电子, 其中 1、2、2 分别对应电子的种类、正反粒子、两个自旋态。

当  $t_* \gg t_{\text{dec}}$ , 电子变成非相对论性粒子, 不再考虑, 所以

$$\mathcal{N}(t_*) = 2 \quad (141)$$

中微子退耦后, 自行按照  $T_\nu \propto \frac{1}{a}$  演化, 不受  $\mathcal{N}$  变化的影响, 所以  $T_{\text{dec}}a_{\text{dec}} = T_\nu(t_{\text{dec}})a_{\text{dec}} = T_\nu(t_*)a(t_*)$ . 由于光子和电子共同处于热平衡, 所以

$$\mathcal{N}_{\text{dec}}a_{\text{dec}}^3 T_{\text{dec}}^3 = \mathcal{N}(t_*)a^3(t_*)T_\gamma^3(t_*) \quad (142)$$

可以得到

$$\frac{T_\nu(t_*)}{T_\gamma(t_*)} = \left( \frac{\mathcal{N}(t_*)}{\mathcal{N}_{\text{dec}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq \frac{1}{1.4} \quad (143)$$

此后, 光子和中微子都按照  $T \propto \frac{1}{a}$  各自演化, 可得今天

$$\frac{T_{\nu,0}}{T_{\gamma,0}} = \frac{T_\nu(t_*)}{T_\gamma(t_*)} = \frac{1}{1.4} \quad (144)$$

上面说的光子到今天红移到微波波段, 即 CMB。我们测量得到 CMB 的温度  $T_{\gamma,0} \simeq 2.725$  K, 则可推知中微子背景辐射 CνB 的温度  $T_{\nu,0} \simeq 1.945$  K.

宇宙辐射能量密度

$$\rho_{R,0} = \rho_{\gamma,0} + \rho_{\nu,0} = \frac{1}{2} a_B T_{\gamma,0}^4 \left( 2 + 3 \times 2 \times 1 \times \frac{7}{8} \times \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \right) = 1.681 \rho_{\gamma,0} \quad (145)$$

其中括号内第一项是光子，第二项是中微子，其中 3、2、1 分别对应中微子有三代（电子中微子  $\nu_e$ 、缪子中微子  $\nu_\mu$ 、陶子中微子  $\nu_\tau$ ）、正反中微子、正反中微子各对应一个自旋态，7/8 是由于中微子是费米子， $\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}}$  是中微子和光子的温度比，另外它的四次方因为能量密度正比于温度的 4 次方。

## 20 暴涨理论 (Inflation Theory)

大爆炸理论中存在三个重要的疑难。

### 20.1 平坦性问题 (Flatness Problem)

考虑物质主导的非平坦宇宙，

$$\rho_m(t) = \Omega_M \rho_{\text{crit}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (146)$$

$$|\Omega(t) - 1| = \left| 1 + \frac{\Omega_M a_0}{\Omega_K a} \right|^{-1} \quad (147)$$

假设  $\Omega_M = 0.9$ ,  $\Omega_K = 0.1$ , 在 CMB 时期,  $z = 1000$ ,  $|\Omega(t) - 1| \simeq 10^{-4}$ , 在 BBN 时期,  $|\Omega(t) - 1| \simeq 10^{-12}$ .

可见即使今天的  $\Omega_K$  不是很小, 在宇宙早期  $\Omega_K$  也是非常小的, 这是需要解释的。

### 20.2 视界疑难 (Horizon Problem)

CMB 在全天  $4\pi$  立体角都高度各向同性, 而 CMB 时期的粒子视界是有限的。(注: 除以角直径距离得到弧度)

$$d_H(t_{\text{CMB}}) \simeq \frac{cH_0^{-1}}{\Omega_M^{\frac{1}{2}} (1 + z_{\text{CMB}})^{\frac{3}{2}}} \simeq 0.015 \text{ rad} \sqrt{\Omega_M} \simeq 1^\circ \quad (148)$$

对应今天天空中的  $1^\circ$ , 天空中间隔超过  $1^\circ$  的两点在 CMB 时期并没有因果联系, 它们的温度接近并不自然。

### 20.3 磁单极子问题 (Magnetic monopole)

大统一理论 (GUT) 预言了磁单极子的存在, 并且预言了较高的磁单极子密度。但是人们并没有观测到磁单极子。这个问题正是 Alan Guth 等人提出暴涨理论的动机。

### 20.4 种子涨落的起源

CMB 的微小各向异性很难用热涨落解释, 需要其它的起源。

### 20.5 暴涨理论

1981 年, Alan Guth 等人提出了暴涨理论。暴涨理论认为宇宙极早期出现过一段指数膨胀的时期,  $a \propto e^{Ht}$ , 在很短的时间内, 宇宙膨胀了  $e^{60}$  倍, 同时有某种物理机制使得暴涨结束。

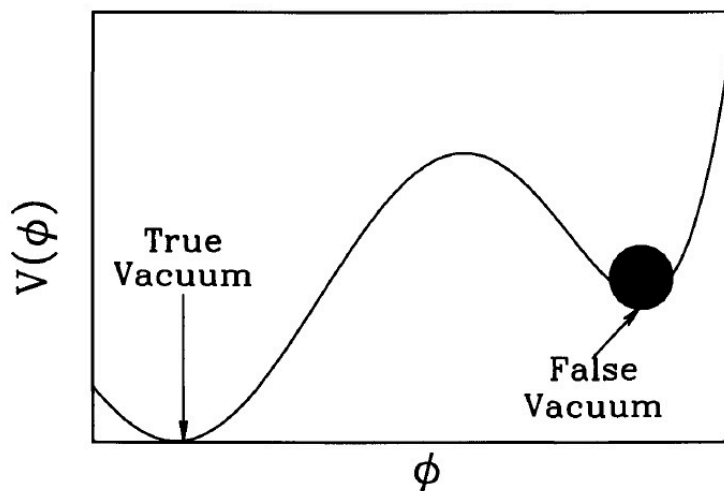
- 平坦性问题: 暴涨前的宇宙可能有曲率, 但暴涨使得我们今天的宇宙来自其中的一小块, 所以很平坦。
- 视界疑难: 暴涨后到 CMB 之间, 辐射占主导, 视界 (注: 在共动坐标系中) 逐渐增大, 但在暴涨时期, 视界曾经随时间变小。原本有因果联系的两点退出彼此的视界, 成为 CMB 上 “没有因果联系” 的两点, 因此在暴涨后它们的温度仍然高度相同, 如同处于热平衡。
- 磁单极子问题: 暴涨使得磁单极子彼此急剧远离, 导致今天的视界内平均不到一个磁单极子。
- 种子涨落的起源: 暴涨使得微观上的量子涨落在短时间内被拉到宇宙的尺度上, 成为经典的密度涨落。

#### 如何实现暴涨?

Alan Guth 等人在 1981 年提出的简单模型: 暴涨子在假真空态上提供相当于暗能量的效应, 使宇宙加速膨胀, 当暴涨子发生量子隧穿到达真的真空态上, 暴涨结束。但是这样得出的种子涨落太大。如图 (6)。

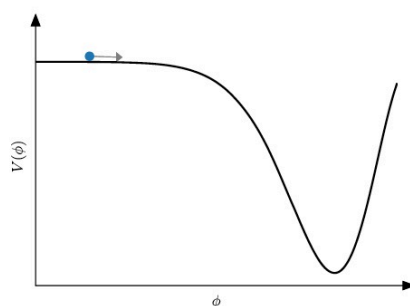
1982-1983 年, Andrei Linde 改进提出慢滚模型 (slow-roll), 该模型中暴涨子在一个较平的假真空上缓慢滚动, 当滚到真的真空态上时结束暴涨。如图 (7)。

慢滚模型是目前人们较为普遍接受的一种最简单的模型，但慢滚模型预言的原初引力波目前还没有观测到，因此有很多其它的暴涨模型，有待未来的观测告诉我们更多的信息。



**Figure 6.6.** A scalar field trapped in a false vacuum. Since it is trapped, it has little kinetic energy. The potential energy is nonzero, however, so the pressure is negative. The global minimum of the potential is called the true vacuum, since a homogeneous field sitting at the global minimum of the potential is in the ground state of the system.

图 6: 引自 S. Dodelson.



**FIGURE 7.5** A scalar field slowly rolling down a potential  $V(\phi)$ . Since it rolls slowly, it has little kinetic energy. The potential energy is nonzero, however, so the pressure is negative. The inflationary epoch ends once the field has reached the minimum of the potential.

图 7: 引自 S. Dodelson & F. Schmidt (second edition)