Lecture 8

赵思逸

2022 年 4 月 19 日

微波背景辐射（续）

为什么 CMB 符合黑体谱?

在最后散射面 t_L，光子辐射谱满足 Planck 公式:

$$n_{T(t_L)}(\nu_L)d\nu_L = \frac{8\pi\nu_L^2 d\nu_L}{\exp\left(\frac{h_{\rm pl}\nu_L}{k_B T(t_L)}\right)-1} \tag{1}$$

在 $t > t_L$,光子频率由于宇宙学红移降低 $\nu = \nu_L \frac{a(t_L)}{a(t)}$,光子数密度 $n\,(\nu, t)\,d\nu \propto a^{-3}$ 即

$$n(\nu,t)d\nu = \left(\frac{a(t_L)}{a(t)}\right)^3 n_{T(t_L)}\left(\nu_L\right)d\nu_L \tag{2}$$

代入得

$$n(\nu,t)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h_{\rm pl}\nu}{k_B\frac{a(t_L)}{a(t)}T(t_L)}\right)-1} \tag{3}$$

仍然是黑体谱。此时光子不处于热平衡，不妨令 $T(t) = \frac{a(t_L)}{a(t)}T(t_L)$，即 $T \propto 1/a$.

光子、核子密度

光子的能量密度 $\rho_\gamma = \int h_{\rm pl}\nu n(\nu)d\nu = a_B T^4$，其中 $a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h_{\rm pl}^3 c^3} = 7.566 \times 10^{-15}$ erg cm^{-3}K^{-4}.

今天 $T_{\gamma,0} = 2.725\mathrm{K}$, $\rho_{\gamma,0} = a_B T_{\gamma,0}^4 = 4.64 \times 10^{-34}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$, $\Omega_\gamma = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{\mathrm{crit}}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \simeq 5 \times 10^{-5}$.

今天的总辐射包括光子和中微子。中微子作为费米子，和光子的统计不同。且中微子退耦更早，所以温度低于光子。最后，中微子有 3 种。总结如下

$$\rho_{R,0} = \rho_{\gamma,0} + \rho_{\gamma,0} \times \left(\frac{7}{8}\right) \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \times 3 = 7.80 \times 10^{-34}\ \mathrm{g\ cm}^{-3} \tag{4}$$

总之今天辐射的能量密度远远小于冷物质和暗能量。

$$\begin{aligned} \Omega_R = \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{\mathrm{crit}}} &= 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \\ &\simeq 8.3 \times 10^{-5} \ll \Omega_M, \Omega_\Lambda \end{aligned} \tag{5}$$

考虑光子的数密度

$$n_\gamma = \int_0^\infty n_T(\nu) d\nu = \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B}{k_B} T^3 = 20.28 T^3\ \mathrm{cm}^{-3} \tag{6}$$

今天 $T_{\gamma,0} = 2.725\mathrm{K}$, $n_{\gamma,0} = 410$ photons /cm^3

核子数密度

$$n_{B,0} = \frac{\rho_{B,0}}{m_N} = \frac{\Omega_B \rho_{\mathrm{crit}}}{m_N} = 1.123 \times 10^{-5} \Omega_B h^2\ \text{nucleons /cm}^3 \tag{7}$$

其中 m_N 是核子平均质量。

光子与核子数密度比

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 4.1 \times 10^{-10} \tag{8}$$

上节课讲过，在绝热膨胀的宇宙中，为了保持普朗克黑体辐射谱，我们定义非热平衡的光子的温度正比于 a 的 -1 次方。对于非相对论性粒子，为了遵循玻尔兹曼统计，温度正比于 a 的 -2 次方。在退耦前，光子和核子处于热平衡，光子远多于核子，占据主导，温度正比于 a 的 -1 次方。

估算光子退耦时刻

散射速率

$$\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e c = 0.88 n_{B,0} \left(\frac{T}{T_{\gamma,0}}\right)^3 \sigma_T c = 1.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s}^{-1} \Omega_\mathrm{B} h^2 \left(T/T_{\gamma,0}\right)^3 \tag{9}$$

其中用到平均一个核子对应 $Y_H + \frac{1}{2} Y_{He} = 0.76 + \frac{1}{2} \times 0.24 = 0.88$ 个电子。

能量转移速率

$$\Gamma\gamma \simeq \left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \Lambda_\gamma \approx \left(\frac{k_B T}{m_e c^2}\right) \Lambda_\gamma \simeq 9.0 \times 10^{-29} s^{-1} \Omega_B h^2 \left(\frac{T}{T_{\gamma,0}}\right)^4 \tag{10}$$

而宇宙膨胀速率（假设辐射占主导）

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{a}}{a} &\approx H_0 \sqrt{\Omega_R \left(T/T_{\gamma,0}\right)^4} \\ &= 2.1 \times 10^{-20} s^{-1} \left(\frac{T}{T_{\gamma,0}}\right)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

能量转移速率比膨胀速率下降快，当 $\Gamma_\gamma \leq H$ ，散射速率不足，光子与重子物质退耦，也可以叫 freeze out. 此时温度约为 10^5 K. 但后面会看到，这样估算出的温度过高，处于辐射为主的阶段，是不准确的。

物质-辐射相等时刻

辐射的能量密度正比于 a 的 -4 次方，冷物质的能量密度正比于 a 的 -3 次方，辐射密度下降快，辐射在宇宙早期先占据主导，后来下降到小于冷物质的能量密度，二者相等的时刻叫做“物质-辐射相等时刻”(matter-radiation equality epoch).

$$T_{eq} = T_{\gamma,0} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_R}\right) = 6.56 \times 10^4 \Omega_m h^2\ \mathrm{K} = 10^4\ \mathrm{K} \tag{12}$$

一般使用红移表示

$$1 + z_{eq} = \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{-1} = \frac{\Omega_M}{\Omega_R} = 2.4 \times 10^4 \left(\Omega_M h^2\right) \simeq 3500 \tag{13}$$

Boltzmann 方程和 Saha 方程

对于反应 $1+2\longleftrightarrow 3+4$，非平衡态下的 Boltzmann 方程为

$$a^{-3}\frac{d}{dt}\left(n_1a^3\right)=n_1^{(0)}n_2^{(0)}\langle\sigma v\rangle\left(\frac{n_3n_4}{n_3^{(0)}n_4^{(0)}}-\frac{n_1n_2}{n_1^{(0)}n_2^{(0)}}\right)\tag{14}$$

其中 $\langle\sigma v\rangle$ 是 thermally averaged cross-section. 括号中第一项度量了反应向左移动的速率，第二项度量了反应向右移动的速率。

$$n_i^{(0)}=\begin{cases}g_i\left(\frac{m_iT}{2\pi}\right)^{3/2}e^{-\frac{m_ic^2}{k_BT}}, & m_ic^2\gg k_BT\\ \frac{g_i^3}{\pi^2}T^3, & m_ic^2\ll k_BT\end{cases}\tag{15}$$

平衡态下的精细平衡方程

$$\frac{n_3n_4}{n_3^{(0)}n_4^{(0)}}=\frac{n_1n_2}{n_1^{(0)}n_2^{(0)}}\tag{16}$$

具体到再复合 (recombination)，反应是 $e+p\leftrightarrow H+\gamma$. 代入精细平衡方程得到 Saha 方程

$$\frac{n_en_p}{n_H}=\frac{n_e^{(0)}n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}\tag{17}$$

其中光子的化学势为 0，$n_\gamma=n_\gamma^{(0)}$. 忽略 He 贡献，电子数密度与质子数密度近似相等

$$n_e=n_p=X_en_b$$

其中 $n_b=n_p+n_H$ 是重子数密度，X_e 是电离度。剩下的 H 以中性原子形式存在

$$n_H=(1-X_e)\,n_b$$

此时温度远小于质子和电子的能标，使用非相对论情形计算 $n_i^{(0)}$

$$\frac{n_e^{(0)}n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}=\frac{g_eg_p}{g_H}\left(\frac{m_em_p}{m_H}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{B_1}{k_BT}}\tag{18}$$

$$\simeq\left(\frac{m_eT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{B_1}{k_BT}}\tag{19}$$

其中 $B_1 = m_e + m_p - m_H = 13.6\mathrm{eV}$ 是中性氢原子的结合能，自由度 $g_e = 2, g_p = 2, g_H = 4$.

Boltzmann 方程左边

$$a^{-3}\frac{d}{dt}\left(n_e a^3\right) = a^{-3}\frac{d}{dt}\left(X_e n_b a^3\right) = n_b\frac{dX_e}{dt} \tag{20}$$

即

$$\begin{aligned} n_b\frac{dX_e}{dt} &= n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle\sigma v\rangle \left(\frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e n_p}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}\right) && (21)\\ &= (1-X_e) n_b \langle\sigma v\rangle \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} - X_e^2 n_b^2 \langle\sigma v\rangle && (22)\\ &= (1-X_e) n_b \beta - X_e^2 n_b^2 \alpha^{(2)} && (23) \end{aligned}$$

其中

$$\beta \equiv \langle\sigma v\rangle \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \tag{24}$$

$$\alpha^{(2)} \equiv \langle\sigma v\rangle = 9.78\frac{\alpha^2}{m_e^2}\left(\frac{B_1}{k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{B_1}{k_B T}\right) \tag{25}$$

得到 Boltzmann 方程

$$\frac{dX_e}{dt} = (1-X_e)\,\beta - X_e^2 n_b \alpha^{(2)} \tag{26}$$

再复合开始时,$\frac{dX_e}{dt} = 0$，$\mathrm{RHS} = 0$，即 Saha 方程

$$\frac{X_e^2}{(1-X_e)} = \frac{\beta}{n_b \alpha^{(2)}} = \frac{1}{n_b}\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \tag{27}$$

指数项占主导。

解 Saha 方程的结果是退耦发生在 $z \sim 1100, T \sim 3000\mathrm{K}$ 时。

但是 Saha 方程的解是电离度一直随 exp 指数下降，这是不准确的。考虑到退耦后平衡态被打破，应使用非平衡态的 Boltzmann 方程求解，则可以正确地给出退耦后的残余电离度约为 10^{-3}，见下图（引自 Dodelson）。

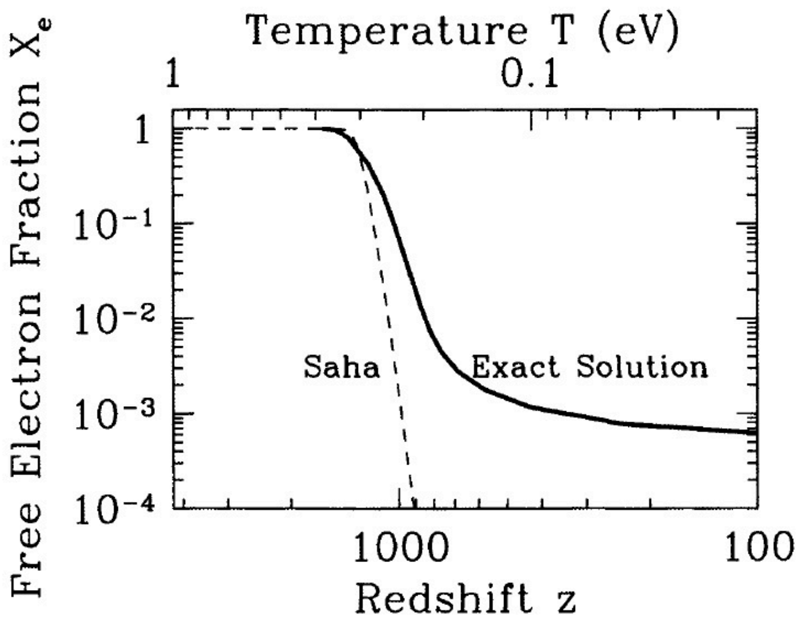

Figure 3.4. Free electron fraction as a function of redshift. Recombination takes place suddenly at $z \sim 1000$ corresponding to $T \sim 1/4$ eV. The Saha approximation, Eq. (3.37), holds in equilibrium and correctly identifies the redshift of recombination, but not the detailed evolution of X_e. Here $\Omega_b = 0.06, \Omega_m = 1, h = 0.5$.

图 1: 再复合时期电离度的下降