

# Lecture 8

赵思逸

2023 年 4 月 18 日

## 微波背景辐射 (续)

为什么 CMB 符合黑体谱？

在最后散射面  $t_L$ ，光子辐射谱满足 Planck 公式：

$$n_{T(t_L)}(\nu_L)d\nu_L = \frac{8\pi\nu_L^2 d\nu_L}{\exp\left(\frac{h_{\text{pl}}\nu_L}{k_B T(t_L)}\right) - 1} \quad (1)$$

在  $t > t_L$ ，光子频率由于宇宙学红移降低  $\nu = \nu_L \frac{a(t_L)}{a(t)}$ ，光子数密度  $n(\nu, t) d\nu \propto a^{-3}$  即

$$n(\nu, t)d\nu = \left(\frac{a(t_L)}{a(t)}\right)^3 n_{T(t_L)}(\nu_L) d\nu_L \quad (2)$$

代入得

$$n(\nu, t)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h_{\text{pl}}\nu}{k_B \frac{a(t_L)}{a(t)} T(t_L)}\right) - 1} \quad (3)$$

仍然是黑体谱。此时光子不处于热平衡，不妨令  $T(t) = \frac{a(t_L)}{a(t)} T(t_L)$ ，即  $T \propto 1/a$ 。

## 光子、核子密度

光子的能量密度  $\rho_\gamma = \int h_{\text{pl}} \nu n(\nu) d\nu = a_B T^4$ , 其中  $a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h_{\text{pl}}^3 c^3} = 7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ .

今天  $T_{\gamma,0} = 2.725 \text{ K}$ ,  $\rho_{\gamma,0} = a_B T_{\gamma,0}^4 = 4.64 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\Omega_\gamma = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{\text{crit}}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \simeq 5 \times 10^{-5}$ .

今天的总辐射包括光子和中微子。中微子作为费米子, 和光子的统计不同。且中微子退耦更早, 所以温度低于光子。最后, 中微子有 3 种。总结如下

$$\rho_{R,0} = \rho_{\gamma,0} + \rho_{\nu,0} \times \left(\frac{7}{8}\right) \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \times 3 = 7.80 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} \quad (4)$$

总之今天辐射的能量密度远远小于冷物质和暗能量。

$$\Omega_R = \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{\text{crit}}} = 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \simeq 8.3 \times 10^{-5} \ll \Omega_M, \Omega_\Lambda \quad (5)$$

考虑光子的数密度

$$n_\gamma = \int_0^\infty n_T(\nu) d\nu = \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B}{k_B} T^3 = 20.28 T^3 \text{ cm}^{-3} \quad (6)$$

今天  $T_{\gamma,0} = 2.725 \text{ K}$ ,  $n_{\gamma,0} = 410 \text{ photons /cm}^3$

核子数密度

$$n_{B,0} = \frac{\rho_{B,0}}{m_N} = \frac{\Omega_B \rho_{\text{crit}}}{m_N} = 1.123 \times 10^{-5} \Omega_B h^2 \text{ nucleons /cm}^3 \quad (7)$$

其中  $m_N$  是核子平均质量。

光子与核子数密度比

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 4.1 \times 10^{-10} \quad (8)$$

上节课讲过, 在绝热膨胀的宇宙中, 为了保持普朗克黑体辐射谱, 我们定义非热平衡的光子的温度正比于  $a$  的  $-1$  次方。对于非相对论性粒子, 为了遵循玻尔兹曼统计, 温度正比于  $a$  的  $-2$  次方。在退耦前, 光子和核子处于热平衡, 光子远多于核子, 占据主导, 温度正比于  $a$  的  $-1$  次方。

## 估算光子退耦时刻

散射速率

$$\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e c = 0.88 n_{B,0} \left( \frac{T}{T_{\gamma,0}} \right)^3 \sigma_T c = 1.97 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} \Omega_B h^2 (T/T_{\gamma,0})^3 \quad (9)$$

其中用到平均一个核子对应  $Y_H + \frac{1}{2}Y_{He} = 0.76 + \frac{1}{2} \times 0.24 = 0.88$  个电子。

能量转移速率

$$\Gamma_\gamma \simeq \left( \frac{\Delta E}{k_B T} \right) \Lambda_\gamma \approx \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right) \Lambda_\gamma \simeq 9.0 \times 10^{-29} \text{ s}^{-1} \Omega_B h^2 \left( \frac{T}{T_{\gamma,0}} \right)^4 \quad (10)$$

而宇宙膨胀速率（假设辐射占主导）

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{a}}{a} &\approx H_0 \sqrt{\Omega_R (T/T_{\gamma,0})^4} \\ &= 2.1 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1} \left( \frac{T}{T_{\gamma,0}} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

能量转移速率比膨胀速率下降快，当  $\Gamma_\gamma \leq H$ ，散射速率不足，光子与重子物质退耦，也可以叫 freeze out. 此时温度约为  $10^5$  K. 但后面会看到，这样估算出的温度过高，处于辐射为主的阶段，是不准确的。

## 物质-辐射相等时刻

辐射的能量密度正比于  $a$  的  $-4$  次方，冷物质的能量密度正比于  $a$  的  $-3$  次方，辐射密度下降快，辐射在宇宙早期先占据主导，后来下降到小于冷物质的能量密度，二者相等的时刻叫做“物质-辐射相等时刻” (matter-radiation equality epoch).

$$T_{eq} = T_{\gamma,0} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_R} \right) = 6.56 \times 10^4 \Omega_m h^2 \text{ K} = 10^4 \text{ K} \quad (12)$$

一般使用红移表示

$$1 + z_{eq} = \left( \frac{a_{eq}}{a_0} \right)^{-1} = \frac{\Omega_M}{\Omega_R} = 2.4 \times 10^4 (\Omega_M h^2) \simeq 3500 \quad (13)$$

## Boltzmann 方程和 Saha 方程

对于反应  $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$ , 非平衡态下的 Boltzmann 方程为

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_1 a^3) = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left( \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right) \quad (14)$$

其中  $\langle \sigma v \rangle$  是 thermally averaged cross-section. 括号中第一项度量了反应向左移动的速率, 第二项度量了反应向右移动的速率。

$$n_i^{(0)} = \begin{cases} g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}}, & m_i c^2 \gg k_B T \\ \frac{g_i^3}{\pi^2} T^3, & m_i c^2 \ll k_B T \end{cases} \quad (15)$$

平衡态下的精细平衡方程

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \quad (16)$$

具体到再复合 (recombination), 反应是  $e + p \leftrightarrow H + \gamma$ . 代入精细平衡方程得到 Saha 方程

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} \quad (17)$$

其中光子的化学势为 0,  $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$ . 忽略 He 贡献, 电子数密度与质子数密度近似相等

$$n_e = n_p = X_e n_b$$

其中  $n_b = n_p + n_H$  是重子数密度,  $X_e$  是电离度。剩下的 H 以中性原子形式存在

$$n_H = (1 - X_e) n_b$$

此时温度远小于质子和电子的能标, 使用非相对论情形计算  $n_i^{(0)}$

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{g_e g_p}{g_H} \left( \frac{m_e m_p}{m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (18)$$

$$\simeq \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (19)$$

其中  $B_1 = m_e + m_p - m_H = 13.6\text{eV}$  是中性氢原子的结合能, 自由度  $g_e = 2, g_p = 2, g_H = 4$ .

Boltzmann 方程左边

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_e a^3) = a^{-3} \frac{d}{dt} (X_e n_b a^3) = n_b \frac{dX_e}{dt} \quad (20)$$

即

$$n_b \frac{dX_e}{dt} = n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left( \frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e n_p}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right) \quad (21)$$

$$= (1 - X_e) n_b \langle \sigma v \rangle \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} - X_e^2 n_b^2 \langle \sigma v \rangle \quad (22)$$

$$= (1 - X_e) n_b \beta - X_e^2 n_b^2 \alpha^{(2)} \quad (23)$$

其中

$$\beta \equiv \langle \sigma v \rangle \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (24)$$

$$\alpha^{(2)} \equiv \langle \sigma v \rangle = 9.78 \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left( \frac{B_1}{k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{B_1}{k_B T} \right) \quad (25)$$

得到 Boltzmann 方程

$$\frac{dX_e}{dt} = (1 - X_e) \beta - X_e^2 n_b \alpha^{(2)} \quad (26)$$

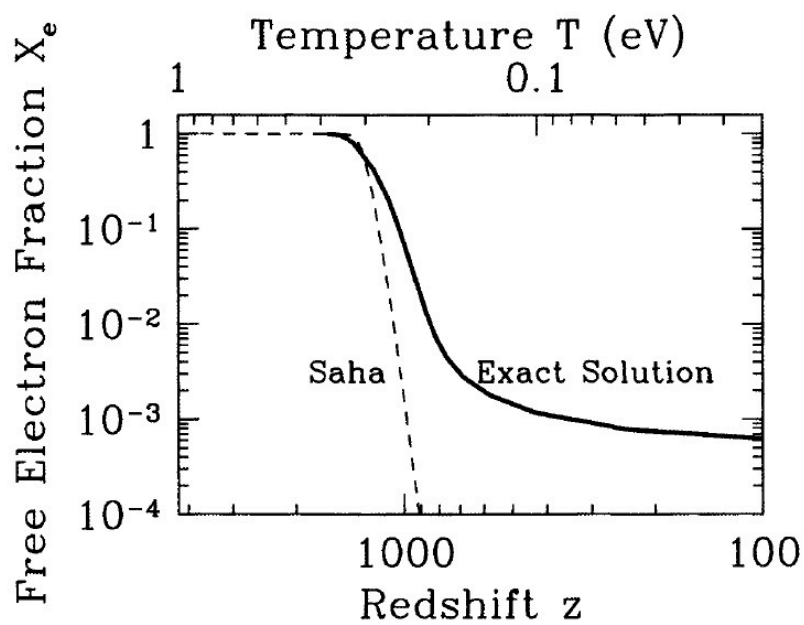
再复合开始时,  $\frac{dX_e}{dt} = 0$ , RHS = 0, 即 Saha 方程

$$\frac{X_e^2}{(1 - X_e)} = \frac{\beta}{n_b \alpha^{(2)}} = \frac{1}{n_b} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{B_1}{k_B T}} \quad (27)$$

指数项占主导。

解 Saha 方程的结果是退耦发生在  $z \sim 1100$ ,  $T \sim 3000\text{K}$  时。

但是 Saha 方程的解是电离度一直随 exp 指数下降, 这是不准确的。考虑到退耦后平衡态被打破, 应使用非平衡态的 Boltzmann 方程求解, 则可以正确地给出退耦后的残余电离度约为  $10^{-3}$ , 见下图 (引自 Dodelson)。



**Figure 3.4.** Free electron fraction as a function of redshift. Recombination takes place suddenly at  $z \sim 1000$  corresponding to  $T \sim 1/4$  eV. The Saha approximation, Eq. (3.37), holds in equilibrium and correctly identifies the redshift of recombination, but not the detailed evolution of  $X_e$ . Here  $\Omega_b = 0.06$ ,  $\Omega_m = 1$ ,  $h = 0.5$ .

图 1: 再复合时期电离度的下降