Lecture 4

赵思逸

2022 年 3 月 15 日

1　宇宙学中的距离

1.1　角直径距离 (angular diameter distance) d_A

给定“标准尺子”（物理长度固定为 l 且已知）。

在静止宇宙中，距离 $r = l/\theta$ ，其中 θ 是“标准尺子”的张角。

一般情况下，定义角直径距离 $d_A \equiv l/\theta$。

在膨胀的平直宇宙（K=0）中，假设“标准尺子”在 t 时刻发出的光今天被我们看到。因为宇宙均匀膨胀，θ 角固定不变。在 t 时刻，“标准尺子”距离我们 $a(t)r$，其中 r 是共动坐标系下的坐标距离。在今天，“标准尺子”距离我们 a_0r。由此得知

$$\theta = \frac{l}{a(t)r} = \frac{la_0/a(t)}{a_0r} \tag{1}$$

$$d_A \equiv \frac{l}{\theta} = a(t)r \tag{2}$$

1.2　光度距离 (luminosity distance) d_L

假设某标准烛光 (standard candle) 发出单频光，已知其亮度 $L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{h\nu\Delta N}{\Delta t}$, 观测到流量 $F = \frac{\Delta L}{\Delta A} = \frac{L}{4\pi r^2}$.

在静止宇宙中，该标准烛光的距离为 $r = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$.

一般情况下，定义光度距离 $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$.

在膨胀的平直宇宙（K=0）中，假设标准烛光在 t 时刻发出的光今天被我们看到。其亮度 $L = \frac{\Delta E_{\mathrm{em}}}{\Delta t_{\mathrm{em}}} = \frac{h\nu_{\mathrm{em}}\Delta N_{\mathrm{em}}}{\Delta t_{\mathrm{em}}}$。

ΔN 不变的情况下，由于宇宙膨胀，接受这些光子所需的时间变长 $\Delta t = \Delta t_{\mathrm{em}}\frac{a_0}{a(t)}$。同时光子的波长被拉长，频率下降 $\nu = \nu_{\mathrm{em}}\frac{a(t)}{a_0}$，导致 $\Delta E = h\nu\Delta N = \frac{a(t)}{a_0}h\nu_{\mathrm{em}}\Delta N_{\mathrm{em}}$。

观测到的亮度 $L_{\mathrm{obs}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 L$，观测到的流量 $F = \frac{L_{\mathrm{obs}}}{4\pi(ra_0)^2} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 \frac{L}{4\pi r^2 a_0^2}$ 。

得到光度距离

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \left(\frac{a_0}{a(t)}\right) a_0 r \tag{3}$$

1.3 弯曲宇宙中的距离

以 $K = 1$ 为例，我们有两种共动距离：

- r 是共动坐标系下的三维投影空间的坐标距离
- χ_{com} 是光传播经过的共动距离

对于一段弧（比如标准尺子），$dt = dr = d\phi = 0$ ，$ds^2 = a^2(t)r^2 d\theta^2$ ，

$$d_A \equiv \frac{l}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} = a(t)r \tag{4}$$

对于一个立体角，$dt = dr = 0$ ，$ds^2 = a^2(t)r^2 d\Omega^2$ ，球面积 $= a^2(t)4\pi r^2$

$$F = \frac{L_{\mathrm{obs}}}{a_0^2 4\pi r^2} \tag{5}$$

$$d_L \equiv \frac{a_0}{a} a_0 r \tag{6}$$

由 d_A 和 d_L 可以得到与宇宙学模型无关的 "consistency check"：

$$\frac{d_A}{d_L} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \tag{7}$$

这个公式可以用来检验“宇宙均匀膨胀”的假说。

定义 χ 是光传播经过的空间对应在今天的（物理）距离

$$\begin{aligned}\chi &= \chi_{\rm com} a_0 \quad (8)\\ &= \int_t^{t_0} cdt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (9)\\ &= a_0 \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}} \quad (10)\end{aligned}$$

最后一个等号是因为对于光线来说，$ds^2 = 0$，$d\theta = d\phi = 0$ ，因此 $\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$ 。结果是

$$\chi = a_0 \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = +1 \\ r & K = 0 \\ \sinh^{-1} r & K = -1 \end{cases} \quad (11)$$

由此得知共动坐标距离

$$r = S_k(\chi/a_0) \quad (12)$$

其中

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K = +1 \\ x & K = 0 \\ \sinh x & K = -1 \end{cases} \quad (13)$$

而 χ 可以根据定义（式 (9)）计算

$$\begin{aligned}\chi &= \int_t^{t_0} cdt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (14)\\ &= \int_{a/a_0}^{1} \frac{cda'}{a'^2 H(a')} \quad (15)\\ &= \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (16)\end{aligned}$$

使用式 (16) 可以计算任意红移下的距离，注意其中 $H(z')$ 具体的形式与宇宙学模型有关，接下来的课我们会讲 $H(z')$ 的具体形式是什么。

2 弗里德曼 (Friedmann) 方程

广义相对论给出爱因斯坦引力场方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{17}$$

该公式左边是爱因斯坦张量 (Einstein tensor)，表示时空的几何性质，右边的 $T_{\mu\nu}$ 是能动量张量 (Energy-momentum tensor)，由密度 ρ、压强 P 决定，描述物质的分布。

由式 (17) 可以得到关于 $a(t)$ 的方程，即弗里德曼 (Friedmann) 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \tag{18}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \tag{19}$$

其中 G 是牛顿引力常数，ρ 是宇宙中物质的密度，P 是宇宙中物质的压强。

由式 (18) 可推出哈勃参数的表达式 $H(a) = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho(a) - \frac{K}{a^2}}$