

# Lecture 10

赵思逸

2022 年 5 月 7 日

## 1 中微子退耦 (neutrino decoupling)

中微子退耦发生在约 1 MeV 时。

在  $T > 10$  MeV 时, 正负电子和正负中微子通过弱相互作用  $e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$  互相转化达到热平衡, 康普顿散射使电子和光子达到热平衡。此时质子、中子、电子、光子、中微子都处于热平衡之中。

当  $T \sim 1$  MeV 时, 弱相互作用的反应不够有效, 中微子退耦。此时质子、中子、电子、光子处于热平衡之中。

当  $T \sim 0.5$  MeV 时, 即约为电子的静质量时, 电子变成非相对论性粒子, 将部分能量转移给光子, 导致光子温度上升。而此时中微子已经退耦, 自行绝热膨胀, 不会接收这部分能量, 导致光子温度大于中微子。质子和中子比电子重很多, 此时为非相对论粒子, 虽然也处在热平衡中, 但能量贡献不变, 以下计算能量转移不考虑质子和中子。

以下计算光子 (微波背景辐射) 温度比中微子 (背景辐射) 温度高多少。

定义熵密度  $s(T) = \frac{\rho + P}{T}$ , 热平衡系统  $s \propto a^{-3}$ . 粒子数密度为 (假设化学势为 0)

$$n(p)dp = \frac{4\pi g p^2}{h_{\text{pl}}^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (1)$$

费米子 (Fermion, 如电子、中微子) 取正号, 玻色子 (Boson, 如光子) 取负号。

能量密度

$$\rho(T) = \int_0^\infty n(p, T) dp \sqrt{p^2 + m^2} \quad (2)$$

相对论性粒子

$$\rho(T) = \begin{cases} \frac{1}{2} g a_B T^4 & \text{Boson} \\ \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} g a_B T^4 & \text{Fermion} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $g$  是粒子的简并度, 包括粒子种类 (比如中微子有三代)、正反粒子、自旋态。 $a_B$  是常数。记为  $\rho(T) = \frac{1}{2} \mathcal{N} a_B T^4$ , 则

$$\mathcal{N} = \begin{cases} g & \text{Boson} \\ \frac{7}{8} \times g & \text{Fermion} \end{cases} \quad (4)$$

对相对论性粒子,  $P = \frac{1}{3} \rho$ . 代入熵密度定义得到  $s(T) = \frac{4\rho}{3T} = \frac{2}{3} \mathcal{N} a_B T^3$ , 由于  $s(T) a^3 = \text{const.}$ , 所以  $\mathcal{N} a^3 T^3 = \text{const.}$

中微子退耦时间  $t_{\text{dec}}$ , 此时温度  $T_\nu(t_{\text{dec}}) = T_\gamma(t_{\text{dec}}) = T_{\text{dec}}$ .

$$\mathcal{N}_{\text{dec}} = 2 + 1 \times 2 \times 2 \times \frac{7}{8} = \frac{11}{2} \quad (5)$$

其中第一项来自光子, 第二项来自电子, 其中 1、2、2 分别对应电子的种类、正反粒子、两个自旋态。

当  $t_* \gg t_{\text{dec}}$ , 电子变成非相对论性粒子, 不再考虑, 所以

$$\mathcal{N}(t_*) = 2 \quad (6)$$

中微子退耦后, 自行按照  $T_\nu \propto \frac{1}{a}$  演化, 不受  $\mathcal{N}$  变化的影响, 所以  $T_{\text{dec}} a_{\text{dec}} = T_\nu(t_{\text{dec}}) a_{\text{dec}} = T_\nu(t_*) a(t_*)$ . 由于光子和电子共同处于热平衡, 所以

$$\mathcal{N}_{\text{dec}} a_{\text{dec}}^3 T_{\text{dec}}^3 = \mathcal{N}(t_*) a^3(t_*) T_\gamma^3(t_*) \quad (7)$$

可以得到

$$\frac{T_\nu(t_*)}{T_\gamma(t_*)} = \left( \frac{\mathcal{N}(t_*)}{\mathcal{N}_{\text{dec}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq \frac{1}{1.4} \quad (8)$$

此后, 光子和中微子都按照  $T \propto \frac{1}{a}$  各自演化, 可得今天

$$\frac{T_{\nu,0}}{T_{\gamma,0}} = \frac{T_\nu(t_*)}{T_\gamma(t_*)} = \frac{1}{1.4} \quad (9)$$

上面说的光子到今天红移到微波波段, 即 CMB。我们测量得到 CMB 的温度  $T_{\gamma,0} \simeq 2.725$  K, 则可推知中微子背景辐射 CνB 的温度  $T_{\nu,0} \simeq 1.945$  K.

宇宙辐射能量密度

$$\rho_{R,0} = \rho_{\gamma,0} + \rho_{\nu,0} = \frac{1}{2} a_B T_{\gamma,0}^4 \left( 2 + 3 \times 2 \times 1 \times \frac{7}{8} \times \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \right) = 1.681 \rho_{\gamma,0} \quad (10)$$

其中括号内第一项是光子, 第二项是中微子, 其中 3、2、1 分别对应中微子有三代 (电子中微子  $\nu_e$ 、缪子中微子  $\nu_\mu$ 、陶子中微子  $\nu_\tau$ )、正反中微子、正反中微子各对应一个自旋态,  $7/8$  是由于中微子是费米子,  $\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}}$  是中微子和光子的温度比, 另外它的四次方因为能量密度正比于温度的 4 次方。

## 2 暴涨理论 (Inflation Theory)

大爆炸理论中存在三个重要的疑难。

### 2.1 平坦性问题 (Flatness Problem)

考虑物质主导的非平坦宇宙,

$$\rho_m(t) = \Omega_M \rho_{\text{crit}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (11)$$

$$|\Omega(t) - 1| = \left| 1 + \frac{\Omega_M a_0}{\Omega_K a} \right|^{-1} \quad (12)$$

假设  $\Omega_M = 0.9$ ,  $\Omega_K = 0.1$ , 在 CMB 时期,  $z = 1000$ ,  $|\Omega(t) - 1| \simeq 10^{-4}$ , 在 BBN 时期,  $|\Omega(t) - 1| \simeq 10^{-12}$ .

可见即使今天的  $\Omega_K$  不是很小, 在宇宙早期  $\Omega_K$  也是非常小的, 这是需要解释的。

## 2.2 视界疑难 (Horizon Problem)

CMB 在全天  $4\pi$  立体角都高度各向同性, 而 CMB 时期的粒子视界是有限大的。

$$d_H(t_{\text{CMB}}) \simeq \frac{cH_0^{-1}}{\Omega_M^{\frac{1}{2}}(1+z_{\text{CMB}})^{\frac{3}{2}}} \simeq 0.015 \text{ rad} \sqrt{\Omega_M} \simeq 1^\circ \quad (13)$$

对应今天天空中的  $1^\circ$ , 天空中间隔超过  $1^\circ$  的两点在 CMB 时期并没有因果联系, 它们的温度接近并不自然。

## 2.3 磁单极子问题 (Magnetic monopole)

大统一理论 (GUT) 预言了磁单极子的存在, 并且预言了较高的磁单极子密度。但是人们并没有观测到磁单极子。这个问题正是 Alan Guth 等人提出暴涨理论的动机。

## 2.4 种子涨落的起源

CMB 的微小各向异性很难用热涨落解释, 需要其它的起源。

## 2.5 暴涨理论

1981 年, Alan Guth 等人提出了暴涨理论。暴涨理论认为宇宙极早期出现过一段指数膨胀的时期,  $a \propto e^{Ht}$ , 在很短的时间内, 宇宙膨胀了  $e^{60}$  倍, 同时有某种物理机制使得暴涨结束。

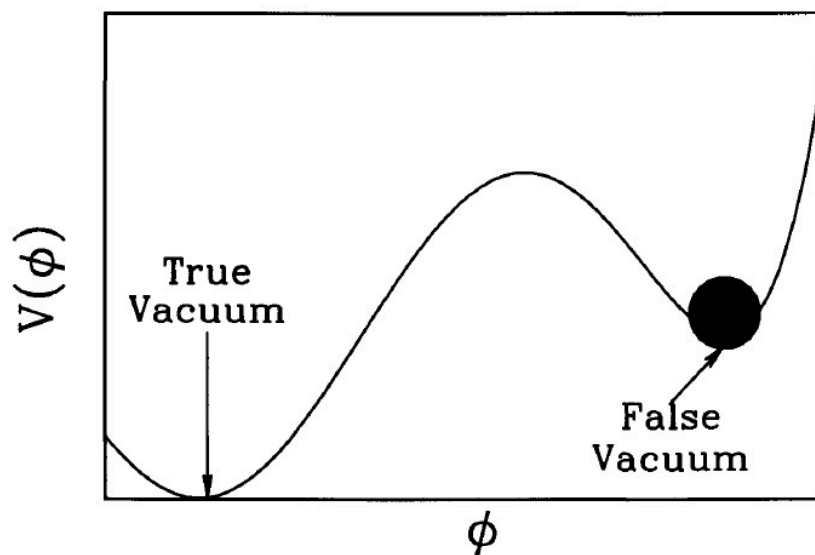
- 平坦性问题：暴涨前的宇宙可能有曲率，但暴涨使得我们今天的宇宙来自其中的一小块，所以很平坦。
- 视界疑难：暴涨后到 CMB 之间，辐射占主导，视界逐渐增大，但在暴涨时期，视界曾经随时间变小。原本有因果联系的两点退出彼此的视界，成为 CMB 上“没有因果联系”的两点，因此在暴涨后它们的温度仍然高度相同，如同处于热平衡。
- 磁单极子问题：暴涨使得磁单极子彼此急剧远离，导致今天的视界内平均不到一个磁单极子。
- 种子涨落的起源：暴涨使得微观上的量子涨落在短时间内被拉到宇宙的尺度上，成为经典的密度涨落。

### 如何实现暴涨？

Alan Guth 等人在 1981 年提出的简单模型：暴涨子在假真空态上提供相当于暗能量的效应，使宇宙加速膨胀，当暴涨子发生量子隧穿到达真的真空态上，暴涨结束。但是这样得出的种子涨落太大。如图 (1)。

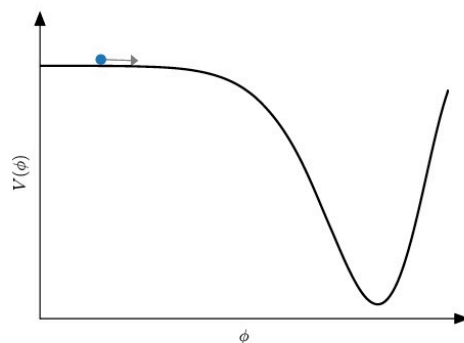
1982-1983 年，Andrei Linde 改进提出慢滚模型 (slow-roll)，该模型中暴涨子在一个较平的假真空上缓慢滚动，当滚到真的真空态上时结束暴涨。如图 (2)。

慢滚模型是目前人们较为普遍接受的一种最简单的模型，但慢滚模型预言的原初引力波目前还没有观测到，因此有很多其它的暴涨模型，有待未来的观测告诉我们更多的信息。



**Figure 6.6.** A scalar field trapped in a false vacuum. Since it is trapped, it has little kinetic energy. The potential energy is nonzero, however, so the pressure is negative. The global minimum of the potential is called the true vacuum, since a homogeneous field sitting at the global minimum of the potential is in the ground state of the system.

图 1: 引自 S. Dodelson.



**FIGURE 7.5** A scalar field slowly rolling down a potential  $V(\phi)$ . Since it rolls slowly, it has little kinetic energy. The potential energy is nonzero, however, so the pressure is negative. The inflationary epoch ends once the field has reached the minimum of the potential.

图 2: 引自 S. Dodelson & F. Schmidt (second edition)