Lecture 6

赵思逸

2023 年 3 月 29 日

上节课我们说到：最一般情况下，Friedmann 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \rho_R(a) + \rho_M(a) + \rho_\Lambda(a) \qquad (2) \\ &= \rho_{R,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{M,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{\Lambda,0} \qquad (3) \end{aligned}$$

定义临界密度 $\rho_{\rm crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. 则 Friedmann 方程改写为 $H(t) = H_0 E(t)$, 其中

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\rm crit}} - \frac{K}{H_0^2 a^2}} = \sqrt{\Omega_R\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_M\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}} \tag{4}$$

或者写成 $H(z) = H_0 E(z)$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2} \tag{5}$$

其中我们定义了今天各物质成分占比 $\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\rm crit}}$, 广义的物质包含冷物质、辐射、暗能量，$i = M, R, \Lambda$. 还定义了曲率“密度”

$$\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2} \tag{6}$$

这个式子是形式上的，不是实质的物质。

- 对 $K=0, \Omega_K=0, a_0$ 可以随意定义，一般定义为 $a_0=1$.
- 对 $K\neq 0$, 通过选取共动坐标使得 R（共动）=1，使得 $K=\pm 1$，今天的尺度因子 a_0 =R（今天）/R（共动）= R（今天），不能随意选取 a_0. $|\Omega_K|=\frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}$ 可以连续变化。现有观测 $|\Omega_K|<10^{-2}\sim 10^{-3}$.

在今天，$z=0$, $a=a_0$, $H=H_0$, 有

$$\Omega_R+\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_K=1 \tag{7}$$

注意最后一项 Ω_K 并不是真实的物质，只是我们用曲率定义出来的量。它决定我们对尺度因子的选取，只有当 $\Omega_K=0$ 时，我们才能选取 $a_0=1$，当 $\Omega_K\neq 0$ 时，

$$a_0=\frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_K|}} \tag{8}$$

式 (7) 中，前三项才是宇宙中真实存在的物质，（见式 (2)）它们的总和不一定是 1。不过宇宙学观测得到的结果 $\Omega_K\approx 0$，可以认为我们的宇宙近似是平坦的。（即使不平坦，宇宙的曲率也非常小。暴涨理论会对这一现象给出解释。）即 $\rho_{\text{crit}}\simeq\rho_0$ ，所以 Ω_i 也可以近似表示今天各物质成分在宇宙密度中的占比。

小结：

$\rho_0>\rho_{\text{crit}}$	$\Omega>1$	$\Omega_K<0$	$K=+1$	正曲率，球面，有限无界
$\rho_0<\rho_{\text{crit}}$	$\Omega<1$	$\Omega_K>0$	$K=-1$	负曲率，超球面，无限无界
$\rho_0=\rho_{\text{crit}}$	$\Omega=1$	$\Omega_K=0$	$K=0$	平直，平直，无限无界

其中前两列是广义物质密度，第 3、4 列是曲率，第 5 列描述宇宙的时空几何。$K=+1$ 时，物质主导的宇宙先膨胀后收缩；$K=0$ 或 $K=-1$ 时，物质主导的宇宙一直减速膨胀；但有暗能量存在时，宇宙在足够晚期会进入加速膨胀。

今天的标准宇宙学模型就是要测量 Ω_R, Ω_M, Ω_Λ, Ω_K 还有 H_0 这些参数。当模型确定后，就可以知道时间、距离、红移、尺度因子之间的对应关系。

1 时间和距离

1.1 宇宙年龄（age）

$$
\begin{aligned}
t_{\text{age}}(z) &= \int_0^{t_{\text{age}}} dt' = \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a'E(a')} && (9)\\
&= \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a'\sqrt{\Omega_R a'^{-4}+\Omega_M a'^{-3}+\Omega_\Lambda+\Omega_K a'^{-2}}} && (10)
\end{aligned}
$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\text{age}}(z)$ 关系。因为目前测量到 $\Omega_R = 2.47\times 10^{-5}h^{-2}$ 很小，可以忽略。

举例:

- 物质为主，$\Omega_M = 1, \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$，
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'\sqrt{a'^{-3}}} = \frac{2}{3H_0} = 9.32\text{Gyr}$
- 辐射为主，$\Omega_R = 1, \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$，
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'a'^{-2}} = \frac{1}{2H_0} = 6.99\text{Gyr}$
- 没有物质的空宇宙，$\Omega_R = \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 1$，
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'a'^{-1}} = \frac{1}{H_0} = 13.98\text{Gyr}$
- ΛCDM 宇宙，$\Omega_R = 0, \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$, 推出 $\Omega_K = 0$，
  今天 $t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da'}{a'\sqrt{0.3\times a'^{-3}+0.7}} = \frac{0.964}{H_0} = 13.47\text{Gyr}$ 。误差主要来自 H_0
  .

1.2 回溯时间 (look-back time)

$$
t_{\text{LB}}(z) = \frac{1}{H_0}\int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da'}{a'\sqrt{\Omega_R a'^{-4}+\Omega_M a'^{-3}+\Omega_\Lambda+\Omega_K a'^{-2}}} \qquad (11)
$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\text{LB}}(z)$ 关系。

1.3 光源与观测者在今天的距离

定义 $\chi(z)$ 是光源与观测者在今天的距离。

$$\begin{aligned}\chi(z) &= \int_t^{t_0} cdt' \frac{a_0}{a(t')} = \frac{c}{H_0}\int_{\frac{a}{a_0}}^1 \frac{da'}{a'^2 E(a')} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} &(12)\\ &= D_H \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R(1+z')^4+\Omega_M(1+z')^3+\Omega_\Lambda+\Omega_K(1+z')^2}} &(13)\end{aligned}$$

其中定义了 $D_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq \frac{3\times10^5 \text{ km s}^{-1}}{100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 3000h^{-1}$ Mpc, 宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $\chi(z)$ 关系。红移 z 是可测量量。χ 可以转化为光度距离或角直径距离，

$$\begin{aligned} d_A &= \frac{a_0 r}{1+z} &(14)\\ d_L &= (1+z)a_0 r &(15)\\ a_0 &= \frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_K|}} = \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_K|}} &(16)\end{aligned}$$

其中 $r = S_k(\chi/a_0)$, 与 H_0 无关。

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K=+1 \\ x & K=0 \\ \sinh x & K=-1 \end{cases} \tag{17}$$

r 将可测量量 d_A 和 d_L 与 χ 联系起来。通过测量 d_A 和 d_L 就可以得到 $\chi(z)$ 关系，由观测到的 $\chi(z)$ 关系就可以限制宇宙学模型。

1.3.1 应用举例：Alcock-Paczynski test

考虑有固定物理尺寸的球体（直径为 D）在红移 z 的地方，观测到张角 $\Delta\theta$，红移宽度 Δz

$$\Delta\theta = \frac{D}{d_A} = \frac{D(1+z)}{a_0 r} = \frac{D(1+z)\sqrt{|\Omega_K|}}{D_H S_k(\chi/a_0)} \tag{18}$$

$$D=\frac{a(z)}{a_0}\Delta\chi=\frac{1}{1+z}\frac{c}{H_0}\frac{\Delta z}{E(z)} \tag{19}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z)=\frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)S_k\left(\chi/a_0\right)}=\frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)}\left[S_k\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_0^z\frac{dz'}{E\left(z'\right)}\right)\right]^{-1} \tag{20}$$

与 D 和 H_0 无关。与 $(\Omega_M,\Omega_\Lambda)$ 有关。

在 $K=0$ 的情况下

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z)=\left[E(z)\int_0^z\frac{dz'}{E\left(z'\right)}\right]^{-1} \tag{21}$$

举例：

- ΛCDM 宇宙，$\Omega_M=0.3,\Omega_\Lambda=0.7$, 推出 $\Omega_K=0$，在 $z=1$ 的地方，$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}=\left[\sqrt{0.3\times2^3+0.7}\times\int_0^1\frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3+0.7}}\right]^{-1}=0.736.$
- $\Omega_M=0,\Omega_\Lambda=1$, 推出 $\Omega_K=0$,
  在 $z=1$ 的地方，$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}=\left[\sqrt{1}\times\int_0^1\frac{dz'}{\sqrt{1}}\right]^{-1}=1.$
- $\Omega_M=1.3,\Omega_\Lambda=0$, 推出 $\Omega_K=-0.3<0, K=+1, S_k(x)=\sin x$,
  在 $z=1$ 的地方，
  $\frac{\Delta\theta}{\Delta z}=\frac{\sqrt{0.3}}{\sqrt{1.3\times2^3-0.3\times2^2}}\left[\sin(\sqrt{0.3}\int_0^1\frac{dz'}{\sqrt{1.3(1+z')^3-0.3(1+z')^2}})\right]^{-1}=0.594.$
- $\Omega_M=0.3,\Omega_\Lambda=0$, 推出 $\Omega_K=0.7>0, K=-1, S_k(x)=\sinh x$,
  在 $z=1$ 的地方，
  $\frac{\Delta\theta}{\Delta z}=\frac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{0.3\times2^3+0.7\times2^2}}\left[\sinh(\sqrt{0.7}\int_0^1\frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3+0.7(1+z')^2}})\right]^{-1}=0.640.$

2 宇宙学常数和真空能

2.1 真空能视角

真空能 $P=-\rho$.

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = -\rho\delta^{\mu}_{\nu} \tag{22}$$

得到真空能的能动量张量 $T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}$.

Einstein 场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}$. 其中 $R_{\mu\nu}$ 是 Ricci tensor, R 是 Ricci scalar, 二者都是 $g_{\mu\nu}$ 及其导数的函数。

$T_{\mu\nu}$ 是能动量张量，包括物质和辐射（下式第一项）和真空能（下式第二项）

$$T_{\mu\nu} = T^{(M)}_{\mu\nu} + T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = T^{(M)}_{\mu\nu} - \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \tag{23}$$

此时场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} = -8\pi G T^{(M)}_{\mu\nu} + 8\pi G \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \tag{24}$$

2.2 宇宙学常数视角

Einstein 场方程是由作用量导出的。作用量 S 为

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{25}$$

其中 $d^4x\sqrt{-g}$ 是 4 维协变的体积元，$\mathcal{L}$ 是拉氏量密度，要求

1. 是 4 维坐标变换下的不变量。
2. 包含度规的最高 2 阶导数。

只有 Ricci scalar 同时满足这两个条件，还有一个平凡 (trivial) 解——常数。把宇宙学常数加到作用量里：

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(R + \Lambda) \tag{26}$$

导出的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T^{(M)}_{\mu\nu} \tag{27}$$

与 式 (24) 相比，可得

$$\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda \tag{28}$$

真空能与宇宙学常数是等价的。只不过真空能的引入有一些量子场论中的动机，而宇宙学常数则来自对广义相对论的 Einstein 场方程理论上的推广。下面我们将混用“真空能”和“宇宙学常数”。

2.3　Einstein 静态宇宙模型

静态宇宙模型要求 a 为常数，$\dot{a} = \ddot{a} = 0$，带入弗里德曼方程得到

$$\rho + 3P = 0 \tag{29}$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \tag{30}$$

如果只有物质和辐射，$\rho + 3P > 0$，所以 Einstein 在 1917 年引入了宇宙学常数。以下推导使用真空能，且忽略辐射。

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_M + \rho_\Lambda \\ &P = P_M + P_\Lambda = -\rho_\Lambda \\ &\rho + 3P = 0 \\ &\Rightarrow \rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_M \end{aligned} \tag{31}$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G\rho a_E^2 = 8\pi G\rho_\Lambda a_E^2 > 0 \tag{32}$$

所以是正曲率，$K = +1$,

$$a_E = 1/\sqrt{8\pi G\rho_\Lambda} \tag{33}$$

但这个解不稳定。我们做微扰：

$$\begin{aligned} a &= a_E + \delta a \quad (34) \\ \rho_M &= 2\rho_\Lambda + \delta\rho \quad (35) \\ & \quad (36) \end{aligned}$$

要总满足

$$1 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad (37)$$

$$\delta a < 0 \Rightarrow \delta\rho > 0 \quad (38)$$

使得 $\dot{a} = 0$ 继续满足，但二阶导

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P) = -4\pi G\left(3\rho_\Lambda + \delta\rho - 3\rho_\Lambda\right) = -4\pi G\delta\rho < 0 \quad (39)$$

$\delta a < 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$，$\delta a > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$，即静态模型不稳定。