Lecture3

赵思逸

2023 年 3 月 8 日

1 宇宙学红移 (cosmological redshift)

宇宙学红移：由于宇宙整体膨胀造成的红移。

多普勒红移：在平直时空下由于相对运动速度造成的红移。

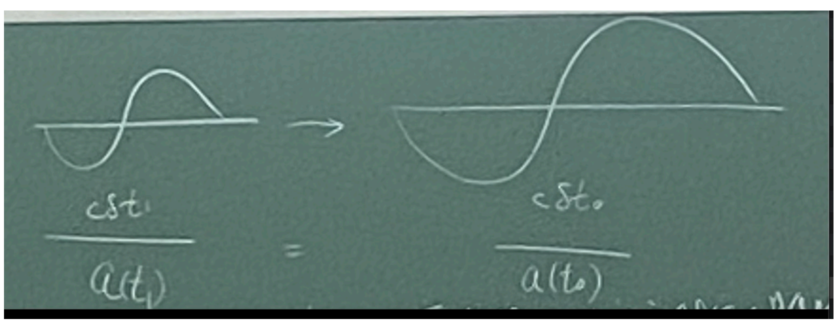

图 1: 波长随时空膨胀

宇宙学红移的推导：光在 t_1 发射，在 t_0 接收，波长随时空膨胀 $\frac{c\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{c\delta t_0}{a(t_0)}$，$t_1$ 时刻 $\nu_1 = 1/\delta t_1$，t_0 时刻 $\nu_0 = 1/\delta t_0$，可得

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} > 1 \tag{1}$$

小结：我们定义今天的尺度因子 $a(t_0) \equiv a_0$，则有

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \tag{2}$$

我们可以用时间 t，红移 z，尺度因子 a 作为“时间变量”来描述宇宙的历史。

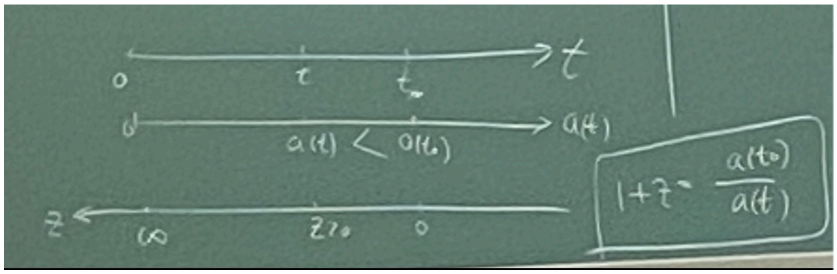

图 2: 用时间 t，红移 z，尺度因子 a 作为“时间变量”来描述宇宙的历史

2 时空的几何结构

2.1 度规

为了方便推广，我们对平直时空定义 $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$，即 $x^\mu = (ct, x, y, z)$，其中 $\mu = 0, 1, 2, 3$。时空间隔 (spacetime interval) 表示为 $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$.

时空线元 (spacetimeline element) 是 $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，其中 $\eta_{\mu\nu}$ 叫做度规 (metric).

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

是平直时空的度规，叫闵可夫斯基度规 (Minkowski metric)。

更一般地，x^μ 可以是任意坐标系，度规改用 $g_{\mu\nu}$ 表示，(因为 $\eta_{\mu\nu}$ 一般特指式 (3) ）即 $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，其中 $g_{\mu\nu}$ 可以是坐标的函数。

提问：度规可以写成坐标的函数，是否一定表示弯曲时空?

答：不是，可能是因为坐标变换。比如平直时空在球坐标下的度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

那么如何判断是否是平直时空呢？寻找坐标变换下的不变量（比如标量），具体到这个问题，需要计算里奇标量 (Ricci scalar) $R(g_{\mu\nu})$. 平直时空的 Ricci scalar 为 0. 以此可以分辨平直时空与弯曲时空。

2.2 共动坐标 (comoving frame) 下的度规

取某一时刻 $t_{\rm com}$ 的物理距离为坐标距离，定义此时刻尺度因子 $a(t_{\rm com}) = 1$。到 t_1 时刻，宇宙经过膨胀，物理距离 = 坐标距离 $\times a(t_1)$.

共动坐标下三维空间部分的线元 $dS_{\rm 3D}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$，其中立体角 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

平直时空下，$ds^2 = -c^2dt^2 + dS_{\rm 3D}^2$。

膨胀宇宙中，$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)dS_{\rm 3D}^2$，空间部分可以平直也可以弯曲。

我们考虑度规的空间部分。 因为宇宙学原理，宇宙在空间上是均匀、各向同性的，要求度规的空间部分满足平移和旋转对称性。符合条件的有且只有三种情况：（证明可参考温伯格的《Gravitation and Cosmology》Sec. 13.2.）

1. (最简单的就是) 三维平直的欧式空间 $dS_{\rm 3D}^2 = d\vec{x}^2$，这种情况下，通常可以选择 $a(t_{\rm today}) = 1$。

2. 嵌在四维欧式空间中的三维球面（可用二维球来理解）$dS_{\rm 3D}^2 = d\vec{x}^2 + dz_4^2$，有球面限制条件 $z_4^2 + \vec{x}^2 = R^2$，剩下 3 个自由度。其中 R 是 “球的半径”，是个常数，可以通过对共动坐标的选取使 $R = 1$，注意这个选取相当于把球半径的物理长度 $R = 1$ 的时刻选定为共动坐标的时刻 $t_{\rm com}$。在这种选择下，在 t 时刻的球半径的物理长度等于 t 时刻

的尺度因子 $a(t)$，也就是说，此时不能随意选择 $a(t_{\text{today}})=1$，因为 $a(t_{\text{today}})=$ 今天的球半径的物理长度。

3. 嵌在四维赝欧式 空间中的三维超球面（可用二维双曲面来理解）$dS_{\text{3D}}^2=d\vec{x}^2-dz_4^2$，有限制条件 $z_4^2-\vec{x}^2=1$，剩下 3 个自由度。已经通过对共动坐标的选取使 $R=1$。

综合后两种情况：$dS_{\text{3D}}^2=d\vec{x}^2\pm dz_4^2$，限制条件 $z_4^2\pm\vec{x}^2=1$，可得

$$dS_{\text{3D}}^2=d\vec{x}^2\pm\frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1\mp\vec{x}^2}=d\vec{x}^2+\frac{K(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1-K\vec{x}^2} \tag{4}$$

其中定义了

$$K=\begin{cases}+1 & \text{球面，正曲率，有限体积，无边界}\\ 0 & \text{欧氏，平直，无限体积，无边界}\\ -1 & \text{超球面，负曲率，无限体积，无边界}\end{cases} \tag{5}$$

式 (4) 第二个等号综合了全部三种情况。

加上时间部分，总体的时空度规是

$$ds^2=-c^2dt^2+a^2(t)\left[d\vec{x}^2+\frac{K(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1-K\vec{x}^2}\right] \tag{6}$$

上式的空间部分 $\vec{x}$ 就是我们日常看到的三维空间，但是在宇宙学中的度规可以不是欧几里德空间的度规（即闵氏度规的空间部分），所以叫“准笛卡尔”坐标（quasi-Cartesian coordinates）。我们将 $\vec{x}$ 转换为球坐标系，可以方便与观测比较。这里球坐标系的定义与平直的欧几里德空间里一样。在球坐标系下，度规写为

$$ds^2=-c^2dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2}+r^2d\Omega^2\right] \tag{7}$$

称为 Friedmann-Lemître-Robertson-Walker (FLRW/FRW) 度规。