

Lecture 11

授课、校对：茅奕

记录：赵思逸

2023 年 5 月 30 日

本课程星系部分将讨论线性微扰理论、非线性结构的形成、暗物质晕结构、盘星系的形成、椭圆星系的形成。

1 线性微扰理论

本节考虑线性结构，即 $\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$ 。

我们将重子物质和光子辐射视为流体，考虑流体的演化方程。流体的主要性质有密度 $\rho(\vec{r}, t)$ 、速度 $\vec{u}(\vec{r}, t)$ 、压强 $P(\vec{r}, t)$ 。其中 \vec{r} 是物理坐标系 (proper coordinates) 中的位置。

1.1 流体演化方程

流体满足以下三个方程：

连续性方程

连续性方程来自能量守恒，描述局域密度的变化。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

将括号中写开得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

定义拉格朗日导数

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} \quad (3)$$

其中第一项 $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\vec{r}}$ 是欧拉导数 (Eulerian derivative), 第二项来自流体的运动 $\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \Big|_t$.

则连续性方程变成

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4)$$

欧拉方程

定义引力势 ϕ . 欧拉方程是

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\nabla_{\vec{r}} P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}} \phi \quad (5)$$

欧拉方程描述流体的运动, 其中第一项由压强的梯度贡献, 第二项由引力势贡献。

泊松方程

泊松方程描述引力势和密度的关系。

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (6)$$

现在我们有 $(\rho, u_i, u_j, u_k, P, \phi)$ 6 个未知量, 5 个方程 (其中欧拉方程是矢量方程, 相当于三个分量各有一个方程), 需要引入物态方程 $P = P(\rho)$ 后才能解。

1.2 共动坐标系下的方程

在膨胀宇宙中，为了方便计算，我们采取共动坐标系，记共动坐标为 \vec{x} ，共动坐标系下的物理量与物理坐标系下的物理量有以下关系

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (7)$$

$$\vec{u} = \dot{a}(t)\vec{x} + \vec{v} \quad (8)$$

$$\nabla_{\vec{r}}|_t = \frac{1}{a(t)}\nabla_{\vec{x}} \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{x}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{x}} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \nabla_{\vec{x}} \quad (10)$$

其中 $\vec{v} \equiv a(t)\dot{\vec{x}}$ 是本动速度，以下我们省略下标 \vec{x} 。

将密度改写成平均密度和涨落 (fluctuations) 的形式

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\vec{x}, t)] \quad (11)$$

其中 $\delta(\vec{x}, t)$ 称为涨落或起伏 (fluctuations)。对于重子物质，有

$$\bar{\rho} \propto a^{-3} \quad (12)$$

将式 (7) - (12) 代入式 (4) - (6)，得到：

连续性方程

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [(1 + \delta)\vec{v}] = 0 \quad (13)$$

欧拉方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla P}{a\bar{\rho}(1 + \delta)} - \frac{\nabla \Phi}{a} \quad (14)$$

泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (15)$$

其中 $\Phi = \phi + \frac{a\ddot{a}\vec{x}^2}{2}$ 是修正引力势 (modified gravitational potential)。

改写到共动坐标系后我们还是有 6 个未知量 (ρ, \vec{v}, P, Φ)，5 个方程，需要引入物态方程 $P = P(\rho, T)$ 或 $P = P(\rho, S)$ 后才能解。

1.3 理想气体状态方程

我们考虑重子气体，单原子气体（比如原子氢、氦气体）的理想气体状态方程

$$P = nk_B T = \frac{\rho}{\mu m_p} k_B T \quad (16)$$

比内能

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B T}{\mu m_p} \quad (17)$$

单原子气体 $\gamma = 5/3$, 所以 $\epsilon = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho}$.

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{2}{3} d\epsilon = \frac{2}{3} \left[T dS - P d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad (18)$$

化简得

$$\frac{dP}{P} = \frac{2\mu m_p}{3k_B} dS + \frac{5}{3} d(\ln \rho) \quad (19)$$

由此我们得到压强和密度、熵的关系

$$P(\rho, S) \propto \rho^{\frac{5}{3}} \exp\left(\frac{2\mu m_p}{3k_B} S\right) \quad (20)$$

1.4 线性微扰方程

由式 (20) 我们得到欧拉方程右侧第一项中

$$\frac{\nabla P}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \nabla S \right] = c_s^2 \nabla \delta + \frac{2}{3} T (1 + \delta) \nabla S \quad (21)$$

其中定义了声速 $c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S}$.

将式 (21) 代入欧拉方程式 (14) 得到

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{c_s^2 \nabla \delta}{a(1 + \delta)} - \frac{2T}{3a} \nabla S \quad (22)$$

$\delta, \vec{v}, \Phi, \delta S, \delta T$ 都是小量, 我们抛弃高阶项。则连续性方程和欧拉方程变成

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{2\bar{T}}{3a} \nabla S \quad (24)$$

对式 (23) 求时间偏导, 将式 (24) 和泊松方程式 (15) 代入, 得到非相对论流体的线性微扰方程

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta + \frac{2\bar{T}}{3a^2} \nabla^2 S \quad (25)$$

右侧三项分别由引力、压强、熵贡献。左侧第二项是 Hubble drag, 正比于 $H(t)$, 将涨落的增长压低, 相当于“摩擦力”。

1.5 涨落 (perturbations)

1.5.1 密度涨落

我们在前面使用了密度涨落 $\delta = \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$

将密度拆分为辐射和物质两部分

$$\bar{\rho} \delta = \rho - \bar{\rho} = \rho_r + \rho_m - (\bar{\rho}_r + \bar{\rho}_m) = \bar{\rho}_r \delta_r + \bar{\rho}_m \delta_m \quad (26)$$

isocurvature perturbation 指 $\delta = 0$, 此时 $\frac{\delta_r}{\delta_m} = -\frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} = -\frac{a}{a_{\text{eq}}}$, 其中 a_{eq} 是辐射和物质密度相等的时期。

在宇宙早期, 辐射占主导, 即 $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_m$, 此时 isocurvature perturbation 近似为 $\delta_r \approx 0$, 称为 isothermal perturbation.

1.5.2 熵微扰 (entropy perturbation)

熵的涨落 (entropy perturbation) 定义为

$$\delta_S(\vec{x}, t) = [S(\vec{x}, t) - \bar{S}(t)] / \bar{S}(t) \quad (27)$$

考虑熵密度

$$S = sV \propto \frac{s}{\rho_m} \propto \frac{T^3}{\rho_m} \propto \frac{\rho_r^{\frac{3}{4}}}{\rho_m} \quad (28)$$

所以

$$\delta_S = \frac{\delta S}{S} = \frac{1}{S} \left[\frac{\partial S}{\partial \rho_r} \delta \rho_r + \frac{\partial S}{\partial \rho_m} \delta \rho_m \right] = \frac{3}{4} \delta_r - \delta_m \quad (29)$$

若 $\delta S = 0$, 则 $\delta_r = \frac{4}{3} \delta_m$, 称为 adiabatic perturbation, 也称为 isentropic perturbation.

以上两种都是初始条件下的微扰 (initial perturbation)。这两种微扰可以看作“正交的”，其它的微扰都可以写做这二者的线性组合。在宇宙膨胀足够快的情况下，各部分独立膨胀，近似为绝热膨胀，所以 adiabatic perturbation 用得比较多。

1.6 傅立叶空间中的线性微扰论

为了便于计算空间偏导，我们考虑傅立叶空间中的微扰

$$\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (30)$$

$$\delta_S(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (31)$$

$$(32)$$

在傅立叶空间中，线性微扰方程式 (25) 中的 $\nabla \rightarrow i\vec{k}$, $\nabla^2 \rightarrow -k^2$, 对时间的偏导变为全导数。

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = \left[4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta_{\vec{k}} - \frac{2}{3} \frac{\ddot{T}}{a^2} k^2 S_{\vec{k}} \quad (33)$$

在不同的 k mode 下, $\delta_{\vec{k}}$ 和 $S_{\vec{k}}$ 是独立演化的。

1.7 重子物质涨落 (baryonic perturbation)

我们考虑初始条件是 adiabatic perturbation, 且宇宙绝热演化 (adiabatic evolution), 所以 $S_{\vec{k}} = 0$.

忽略宇宙膨胀, 即 $\dot{a} = 0$, 则式 (41) 可以化简为

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} = -\omega^2 \delta_{\vec{k}} \quad (34)$$

其中 $\omega^2 \equiv \frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} = \frac{c_s^2}{a^2} (k^2 - k_J^2)$.

我们定义了金斯模数

$$k_J = \frac{2a}{c_s} \sqrt{\pi G \bar{\rho}} \quad (35)$$

金斯模数对应金斯长度 (Jeans length)

$$\lambda_J^{\text{comoving}} = \frac{2\pi}{k_J} = \frac{c_s}{a} \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} \quad (36)$$

$$\lambda_J^{\text{prop}} = a(t) \lambda_J^{\text{comoving}} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} \sim c_s t_{\text{ff}} \quad (37)$$

即金斯长度大致是声波在引力场中一个自由落体时间 (free fall time, t_{ff}) 内经过的距离。

还可以定义金斯质量

$$M_J = \bar{\rho} \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\lambda_J^{\text{prop}}}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \bar{\rho} \lambda_J^{\text{prop}3} \quad (38)$$

1.7.1 金斯判据

判断特定模式的涨落是否能增长使用金斯判据:

- 如果 $k > k_J$, 则 $\omega^2 > 0$, 则 $\delta_{\vec{k}} \propto e^{\pm i\omega t}$, 表示涨落在振荡, 即小尺度的模式不能增长。
- 如果 $k < k_J$, 则 $\omega^2 < 0$, 记 $\omega = i\alpha$, 则 $\delta_{\vec{k}} \propto e^{\mp \alpha t}$, 取-是衰减 (decay mode), 可以忽略, 取+是增长 (growing mode), 即大尺度的模式可以在引力的自不稳定性下增长。

1.7.2 金斯尺度的变化

在再复合之后, $P = \frac{k_B T}{\mu m_p} \rho$, 绝热指数 $\gamma = 5/3$, 所以 $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \left(\frac{5k_B T}{3\mu m_p} \right)^{1/2} \propto T^{1/2} \propto a^{-1}$. 这里由于宇宙膨胀, $T \propto a^{-2}$. 当 $z=1100$ 时, $\lambda_J^{\text{comoving}} \simeq 10^{-5} (\Omega_b h^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ Mpc}$. $M_J \simeq 1.5 \times 10^5 (\Omega_b h^2)^{-\frac{1}{2}} M_\odot \simeq 10^6 M_\odot$, 约为球状星团的质量, 所以再复合之后, 比球状星团大的重子涨落都可以增长。

在再复合之前, $\rho = \rho_b + \rho_r$, $\rho_b \propto a^{-3}$, $\rho_r \propto a^{-4}$. $P = P_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2$.

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s} = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{3\bar{\rho}_b(t)}{4\bar{\rho}_r(t)} \right]^{-1/2} \quad (39)$$

当 $t = t_{eq}$ 时, $M_J \simeq 1.2 \times 10^{16} (\Omega_b h^2)^{-2} M_\odot$, 约为 supercluster 的质量, 在再复合之前, 绝热重子涨落要比 supercluster 大才能增长。再复合前后金斯质量的断崖式下跌是因为声速 c_s 的突变。

再复合之前, 光子和重子散射, 会把涨落抹平, 称为 Silk Damping. 光子的自由程 $\lambda = (\sigma_T n_e)^{-1}$. 散射次数约为哈勃时间内光子走过的自由程个数 $N = \frac{ct}{\lambda}$. 光子在 3 个方向上随机游走,

$$\lambda_d = \left(\frac{N}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \lambda = \left(\frac{ct}{3\sigma_T n_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

光子会把这个范围内的涨落抹平。

总的来说, 共动坐标下金斯长度随时间的变化如图 (1) 所示。

- $t > t_{\text{rec}}$ 时, $\bar{\rho} \propto a^{-3}$, $c_s \propto a^{-1}$, $\lambda_J^{\text{comoving}} \propto a^{-1/2}$.
- $t_{\text{eq}} < t < t_{\text{rec}}$ 时, $\bar{\rho} \propto a^{-3}$, $c_s \propto a^{-1/2}$, $\lambda_J^{\text{comoving}} \propto a^0$, 但存在 Silk Damping.
- $t < t_{\text{eq}}$ 时, $\bar{\rho} \propto a^{-4}$, $c_s \propto a^0$, $\lambda_J^{\text{comoving}} \propto a$.

因为 Silk damping 的存在, 到 recombination 时, 所有小尺度的重子涨落都被擦除, 结构形成只能是大尺度的涨落先涨起来, 然后再逐渐过渡到

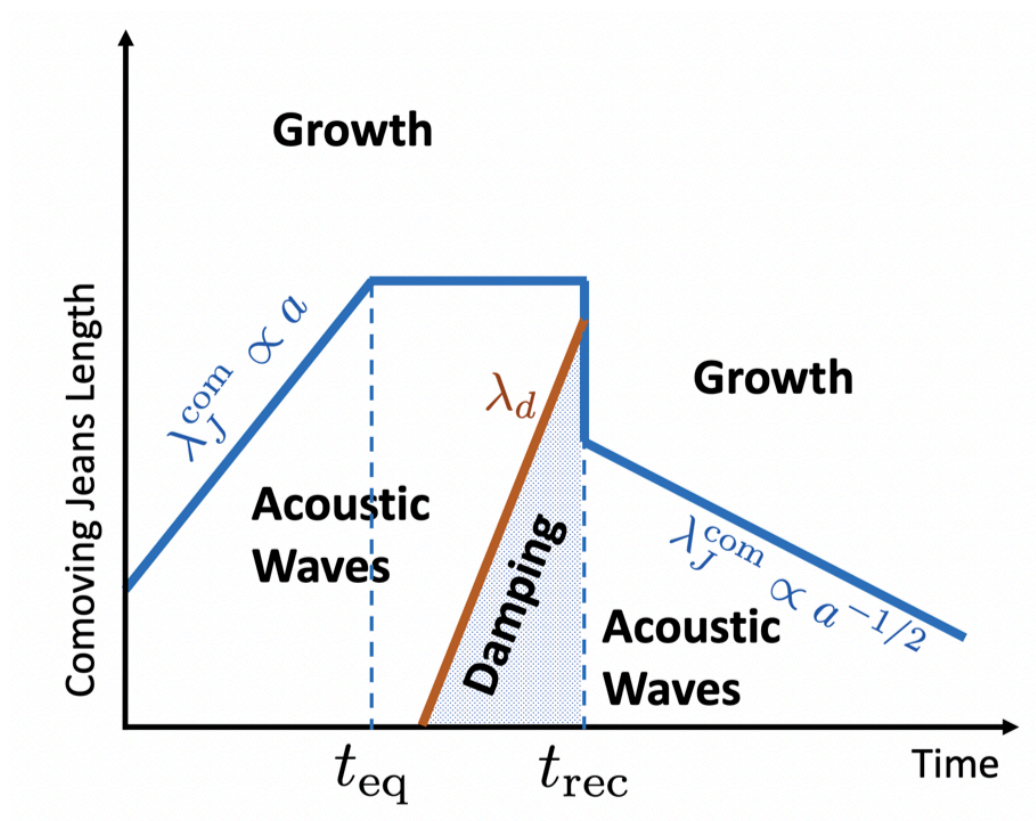


图 1: 共动坐标下金斯长度随时间的变化

小尺度，这叫做 Top-down Scenario. 但 Top-down Scenario 存在一些问题：在 Top-down Scenario 中，要形成今天的大尺度结构，需要 recombination 时的物质涨落 $|\delta_m| > 10^{-3}$. 而物质涨落和 CMB 涨落相联系 $\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4}|\delta_r| = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3}|\delta_m| \sim 10^{-3}$. 早期 CMB 的测量就排除了 Top-down Scenario. 今天测量到 CMB 涨落约为 $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$.

可见仅有重子涨落无法解释现有的观测迹象，需要另一种物质来提供涨落，这就是暗物质。冷暗物质可以将金斯质量大大压低，从而解决 Top-down Scenario 的问题。

1.8 考虑宇宙膨胀

上节课我们在计算重子物质涨落时忽略宇宙膨胀，现在我们加上这个效应（Hubble drag, 下式左边第二项），完整的线性微扰方程为

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = \left[4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta_{\vec{k}} - \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} k^2 S_{\vec{k}} \quad (41)$$

我们忽略声速项 $\frac{k^2 c_s^2}{a^2} \delta_{\vec{k}}$ ，并且假设 isentropic perturbations，所以也忽略 $\frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} k^2 S_{\vec{k}}$. 线性微扰方程变成

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} \delta_{\vec{k}} \quad (42)$$

在物质为主 ($\Omega_M = 1$) 的宇宙里，其增长解由随时间 \exp 指数增长减为随时间幂次增长，即式 (42) 的增长解为

$$\delta_+ \propto H(t) \int_0^t \frac{dt'}{a^2(t') H^2(t')} \propto H(z) \int_z^\infty \frac{1+z'}{E^3(z')} dz' \propto t^{2/3} \quad (43)$$

也就是说，Hubble drag 延缓了宇宙物质扰动的增长速度。

在物质主导期 ($\Omega_M \approx 1$)，

$$\delta_+ \propto t^{2/3} \propto a = \frac{1}{1+z} \quad (44)$$

将 $\delta_{\vec{k}}$ 的空间部分和时间部分分开: $\delta_{\vec{k}}(t) = \delta_{\vec{k}}(t_0)D(t)$, 其中定义了 $D(t)$ 是线性增长率 (linear growth rate), 写做红移的函数为 $D(z) = g(z)/(1+z)$. 此时

$$\delta_+ \propto D(t) \propto a = \frac{1}{1+z} \quad (45)$$

图 (2) 总结了考虑宇宙膨胀时的重子涨落情况。

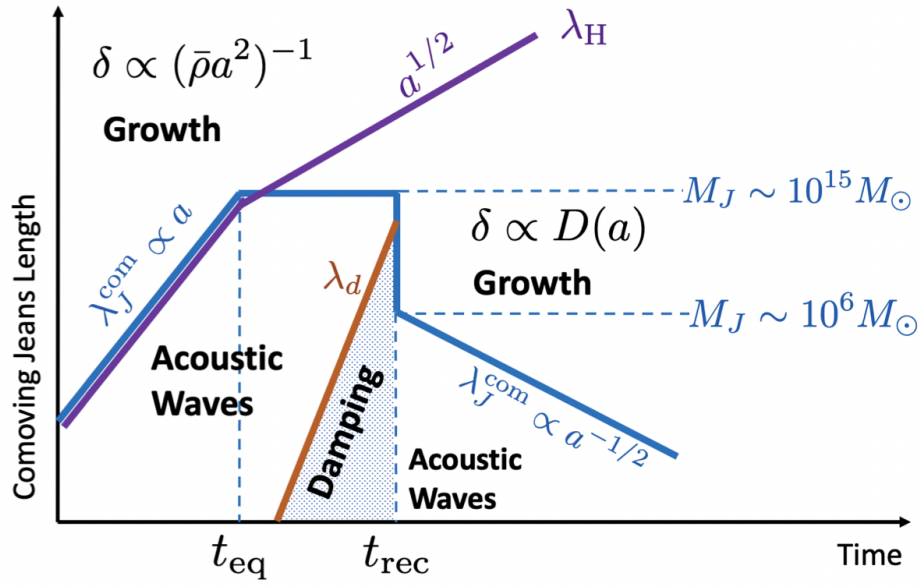


图 2: 考虑宇宙膨胀时的重子涨落