

Lecture 6

赵思逸

2023 年 3 月 29 日

上节课我们说到：最一般情况下，Friedmann 方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 \quad (1)$$

其中

$$\rho(a) = \rho_R(a) + \rho_M(a) + \rho_\Lambda(a) \quad (2)$$

$$= \rho_{R,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{M,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{\Lambda,0} \quad (3)$$

定义临界密度 $\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. 则 Friedmann 方程改写为 $H(t) = H_0 E(t)$, 其中

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{K}{H_0^2 a^2}} = \sqrt{\Omega_R \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_M \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}} \quad (4)$$

或者写成 $H(z) = H_0 E(z)$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2} \quad (5)$$

其中我们定义了今天各物质成分占比 $\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit}}}$, 广义的物质包含冷物质、辐射、暗能量, $i = M, R, \Lambda$. 还定义了曲率“密度”

$$\Omega_K \equiv -\frac{K c^2}{H_0^2 a_0^2} \quad (6)$$

这个式子是形式上的, 不是实质的物质。

- 对 $K = 0$, $\Omega_K = 0$, a_0 可以随意定义, 一般定义为 $a_0 = 1$.
- 对 $K \neq 0$, 通过选取共动坐标使得 R (共动) $= 1$, 使得 $K = \pm 1$, 今天的尺度因子 $a_0 = R$ (今天) / R (共动) $= R$ (今天), 不能随意选取 a_0 . $|\Omega_K| = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}$ 可以连续变化。现有观测 $|\Omega_K| < 10^{-2} \sim 10^{-3}$.

在今天, $z = 0$, $a = a_0$, $H = H_0$, 有

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (7)$$

注意最后一项 Ω_K 并不是真实的物质, 只是我们用曲率定义出来的量。它决定我们对尺度因子的选取, 只有当 $\Omega_K = 0$ 时, 我们才能选取 $a_0 = 1$, 当 $\Omega_K \neq 0$ 时,

$$a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \quad (8)$$

式 (7) 中, 前三项才是宇宙中真实存在的物质, (见式 (2)) 它们的总和不一定是 1。不过宇宙学观测得到的结果 $\Omega_K \approx 0$, 可以认为我们的宇宙近似是平坦的。(即使不平坦, 宇宙的曲率也非常小。暴涨理论会对这一现象给出解释。) 即 $\rho_{\text{crit}} \simeq \rho_0$, 所以 Ω_i 也可以近似表示今天各物质成分在宇宙密度中的占比。

小结:

$\rho_0 > \rho_{\text{crit}}$	$\Omega > 1$	$\Omega_K < 0$	$K = +1$	正曲率, 球面, 有限无界
$\rho_0 < \rho_{\text{crit}}$	$\Omega < 1$	$\Omega_K > 0$	$K = -1$	负曲率, 超球面, 无限无界
$\rho_0 = \rho_{\text{crit}}$	$\Omega = 1$	$\Omega_K = 0$	$K = 0$	平直, 平直, 无限无界

其中前两列是广义物质密度, 第 3、4 列是曲率, 第 5 列描述宇宙的时空几何。 $K = +1$ 时, 物质主导的宇宙先膨胀后收缩; $K = 0$ 或 $K = -1$ 时, 物质主导的宇宙一直减速膨胀; 但有暗能量存在时, 宇宙在足够晚期会进入加速膨胀。

今天的标准宇宙学模型就是要测量 Ω_R , Ω_M , Ω_Λ , Ω_K 还有 H_0 这些参数。当模型确定后, 就可以知道时间、距离、红移、尺度因子之间的对应关系。

1 时间和距离

1.1 宇宙年龄 (age)

$$t_{\text{age}}(z) = \int_0^{t_{\text{age}}} dt' = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a' E(a')} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a' \sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \quad (10)$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\text{age}}(z)$ 关系。因为目前测量到 $\Omega_R = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$ 很小, 可以忽略。

举例:

- 物质为主, $\Omega_M = 1, \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$,
今天 $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' \sqrt{a'^{-3}}} = \frac{2}{3H_0} = 9.32 \text{Gyr}$
- 辐射为主, $\Omega_R = 1, \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0$,
今天 $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' a'^{-2}} = \frac{1}{2H_0} = 6.99 \text{Gyr}$
- 没有物质的空宇宙, $\Omega_R = \Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 1$,
今天 $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' a'^{-1}} = \frac{1}{H_0} = 13.98 \text{Gyr}$
- ΛCDM 宇宙, $\Omega_R = 0, \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$, 推出 $\Omega_K = 0$,
今天 $t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' \sqrt{0.3 \times a'^{-3} + 0.7}} = \frac{0.964}{H_0} = 13.47 \text{Gyr}$ 。误差主要来自 H_0

1.2 回溯时间 (look-back time)

$$t_{\text{LB}}(z) = \frac{1}{H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da'}{a' \sqrt{\Omega_R a'^{-4} + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_K a'^{-2}}} \quad (11)$$

宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $t_{\text{LB}}(z)$ 关系。

1.3 光传播经过的路径在今天的距离

即 $a_0\chi_{\text{comoving}}$, 其中 χ_{comoving} 是光源在共动坐标下距观测者的距离。

$$\chi(z) = \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} = \frac{c}{H_0} \int_{\frac{a}{a_0}}^1 \frac{da'}{a'^2 E(a')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (12)$$

$$= D_H \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z')^2}} \quad (13)$$

其中定义了 $D_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq \frac{3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}}{100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 3000h^{-1} \text{ Mpc}$, 宇宙学模型 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 决定 $\chi(z)$ 关系。红移 z 是可测量量。 χ 可以转化为光度距离或角直径距离,

$$d_A = \frac{a_0 r}{1+z} \quad (14)$$

$$d_L = (1+z)a_0 r \quad (15)$$

$$a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} = \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_K|}} \quad (16)$$

其中 $r = S_k(\chi/a_0)$, 与 H_0 无关。

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K = +1 \\ x & K = 0 \\ \sinh x & K = -1 \end{cases} \quad (17)$$

r 将可测量量 d_A 和 d_L 与 χ 联系起来。通过测量 d_A 和 d_L 就可以得到 $\chi(z)$ 关系, 由观测到的 $\chi(z)$ 关系就可以限制宇宙学模型。

1.3.1 应用举例: Alcock-Paczynski test

考虑有固定物理尺寸的球体 (直径为 D) 在红移 z 的地方, 观测到张角 $\Delta\theta$, 红移宽度 Δz

$$\Delta\theta = \frac{D}{d_A} = \frac{D(1+z)}{a_0 r} = \frac{D(1+z)\sqrt{|\Omega_K|}}{D_H S_k(\chi/a_0)} \quad (18)$$

$$D = \frac{a(z)}{a_0} \Delta\chi = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)} \quad (19)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)S_k(\chi/a_0)} = \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{E(z)} \left[S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \right]^{-1} \quad (20)$$

与 D 和 H_0 无关。与 $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ 有关。

在 $K = 0$ 的情况下

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z}(z) = \left[E(z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^{-1} \quad (21)$$

举例：

- Λ CDM 宇宙, $\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$, 推出 $\Omega_K = 0$, 在 $z = 1$ 的地方,
 $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[\sqrt{0.3 \times 2^3 + 0.7} \times \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3 + 0.7}} \right]^{-1} = 0.736$.
- $\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 1$, 推出 $\Omega_K = 0$,
 在 $z = 1$ 的地方, $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \left[\sqrt{1} \times \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1}} \right]^{-1} = 1$.
- $\Omega_M = 1.3, \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = -0.3 < 0, K = +1, S_k(x) = \sin x$,
 在 $z = 1$ 的地方,
 $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.3}}{\sqrt{1.3 \times 2^3 - 0.3 \times 2^2}} \left[\sin(\sqrt{0.3} \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1.3(1+z')^3 - 0.3(1+z')^2}}) \right]^{-1} = 0.594$.
- $\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$, 推出 $\Omega_K = 0.7 > 0, K = -1, S_k(x) = \sinh x$,
 在 $z = 1$ 的地方,
 $\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{0.3 \times 2^3 + 0.7 \times 2^2}} \left[\sinh(\sqrt{0.7} \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{0.3(1+z')^3 + 0.7(1+z')^2}}) \right]^{-1} = 0.640$.

2 宇宙学常数和真空能

注意：这个 section 是新加的

量子场论中，真空有基态能量 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ，但广义相对论中能量零点的选取不是任意的。

真空能拥有“随着宇宙膨胀密度不变”的性质，因此具有负压 $P = -\rho_\Lambda$ 。代入能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 中，我们发现

$$T_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (22)$$

Einstein 场方程由对作用量 (action) 做变分得到。作用量允许出现一个常数 Λ ,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \Lambda) \quad (23)$$

则场方程左边可以多出一项 $\Lambda g_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (24)$$

将这一项挪到右边，并令 $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ ，就可以把这项作为“真空能”并入能动量张量中。

所以人们经常把“真空能”和“宇宙学常数” Λ 混称。Einstein 是为了得到一个静止宇宙的模型而提出的 Λ ，后来发现哈勃定律后，Einstein 认为这是他“最大的错误”。实际上，Einstein 的宇宙学模型还有一个致命的缺陷就是不稳定。

3 宇宙学常数和真空能

3.1 真空能视角

真空能 $P = -\rho$.

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = -\rho \delta_\nu^\mu \quad (25)$$

得到真空能的能动量张量 $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}$.

Einstein 场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}$. 其中 $R_{\mu\nu}$ 是 Ricci tensor, R 是 Ricci scalar, 二者都是 $g_{\mu\nu}$ 及其导数的函数。

$T_{\mu\nu}$ 是能动量张量, 包括物质和辐射 (下式第一项) 和真空能 (下式第二项)

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (26)$$

此时场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}^{(M)} + 8\pi G\rho_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (27)$$

3.2 宇宙学常数视角

Einstein 场方程是由作用量导出的。作用量 S 为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (28)$$

其中 $d^4x \sqrt{-g}$ 是 4 维协变的体积元, \mathcal{L} 是拉氏量密度, 要求

1. 是 4 维坐标变换下的不变量。
2. 包含度规的最高 2 阶导数。

只有 Ricci scalar 同时满足这两个条件, 还有一个平凡 (trivial) 解——常数。把宇宙学常数加到作用量里:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \Lambda) \quad (29)$$

导出的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}^{(M)} \quad (30)$$

与 式 (??) 相比, 可得

$$\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda \quad (31)$$

真空能与宇宙学常数是等价的。只不过真空能的引入有一些量子场论中的动机，而宇宙学常数则来自对广义相对论的 Einstein 场方程理论上的推广。下面我们将混用“真空能”和“宇宙学常数”。

3.3 Einstein 静态宇宙模型

静态宇宙模型要求 a 为常数， $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ ，带入弗里德曼方程得到

$$\rho + 3P = 0 \quad (32)$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad (33)$$

如果只有物质和辐射， $\rho + 3P > 0$ ，所以 Einstein 在 1917 年引入了宇宙学常数。以下推导使用真空能，且忽略辐射。

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_M + \rho_\Lambda \\ P &= P_M + P_\Lambda = -\rho_\Lambda \\ \rho + 3P &= 0 \\ \Rightarrow \rho_\Lambda &= \frac{1}{2}\rho_M \end{aligned} \quad (34)$$

$$K = \frac{8}{3}\pi G\rho a_E^2 = 8\pi G\rho_\Lambda a_E^2 > 0 \quad (35)$$

所以是正曲率， $K = +1$,

$$a_E = 1/\sqrt{8\pi G\rho_\Lambda} \quad (36)$$

但这个解不稳定。我们做微扰：

$$a = a_E + \delta a \quad (37)$$

$$\rho_M = 2\rho_\Lambda + \delta\rho \quad (38)$$

$$(39)$$

要总满足

$$1 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad (40)$$

$$\delta a < 0 \Rightarrow \delta \rho > 0 \quad (41)$$

使得 $\dot{a} = 0$ 继续满足，但二阶导

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P) = -4\pi G(3\rho_\Lambda + \delta\rho - 3\rho_\Lambda) = -4\pi G\delta\rho < 0 \quad (42)$$

$\delta a < 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$, $\delta a > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$, 即静态模型不稳定。