

Lecture 4

赵思逸

2023 年 3 月 21 日

CMB 坐标系

我们上节课得到的 FRW 度规基于满足宇宙学原理的“宇宙学坐标系”，在实际操作层面，我们用相对于 CMB 静止的坐标系作为“宇宙学坐标系”。太阳相对宇宙学坐标系运动的速度经测量为 370km/s，在 CMB 上体现为 $\frac{v}{c} \sim 10^{-3}$ 的涨落。虽然我们的太阳系并不是“宇宙学坐标系”，但仍不影响我们使用 FRW 度规研究宇宙学，类似于在平地上研究火车上的物理学，只差一个坐标变换。

1 宇宙学中的距离

1.1 角直径距离 (angular diameter distance) d_A

给定“标准尺子”（物理长度固定为 l 且已知）。在静止宇宙中，距离 $r = l/\theta$ ，其中 θ 是“标准尺子”的张角。一般情况下，定义角直径距离

$$d_A \equiv l/\theta \tag{1}$$

在膨胀的平直宇宙 ($K=0$) 中，假设“标准尺子”在 t 时刻发出的光今天被我们看到。因为宇宙均匀膨胀， θ 角固定不变。在 t 时刻，“标准尺子”

距离我们 $a(t)r$ ，其中 r 是共动坐标系下的坐标距离。在今天，“标准尺子”距离我们 a_0r 。由此得知

$$\theta = \frac{l}{a(t)r} = \frac{la_0/a(t)}{a_0r} \quad (2)$$

$$d_A \equiv \frac{l}{\theta} = \frac{a(t)}{a_0}a_0r = a(t)r \quad (3)$$

1.2 光度距离 (luminosity distance) d_L

假设某标准烛光 (standard candle) 发出单频光，已知其亮度 $L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{h\nu\Delta N}{\Delta t}$ ，观测到流量 $F = \frac{\Delta L}{\Delta A} = \frac{L}{4\pi r^2}$ 。在静止宇宙中，该标准烛光的距离为 $r = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$ 。一般情况下，定义光度距离

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (4)$$

在膨胀的平直宇宙 ($K=0$) 中，假设标准烛光在 t 时刻发出的光今天被我们看到。其亮度 $L = \frac{\Delta E_{\text{em}}}{\Delta t_{\text{em}}} = \frac{h\nu_{\text{em}}\Delta N_{\text{em}}}{\Delta t_{\text{em}}}$ 。

ΔN 不变的情况下，由于宇宙膨胀，接受这些光子所需的时间变长 $\Delta t = \Delta t_{\text{em}} \frac{a_0}{a(t)}$ 。同时光子的波长被拉长，频率下降 $\nu = \nu_{\text{em}} \frac{a(t)}{a_0}$ ，导致 $\Delta E = h\nu\Delta N = \frac{a(t)}{a_0}h\nu_{\text{em}}\Delta N_{\text{em}}$ 。

观测到的亮度 $L_{\text{obs}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 L$ ，观测到的流量

$$F = \frac{L_{\text{obs}}}{4\pi(r a_0)^2} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 \frac{L}{4\pi r^2 a_0^2} \quad (5)$$

得到光度距离

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \left(\frac{a_0}{a(t)}\right) a_0 r \quad (6)$$

1.3 弯曲宇宙中的距离

以 $K = 1$ 为例，我们有两种共动距离：

- r 是共动坐标系下的三维投影空间的坐标距离
- χ_{com} 是光传播经过的共动距离

对于一段弧（比如标准尺子）， $dt = dr = d\phi = 0$ ， $ds^2 = a^2(t)r^2 d\theta^2$ ，

$$d_A \equiv \frac{l}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} = a(t)r \quad (7)$$

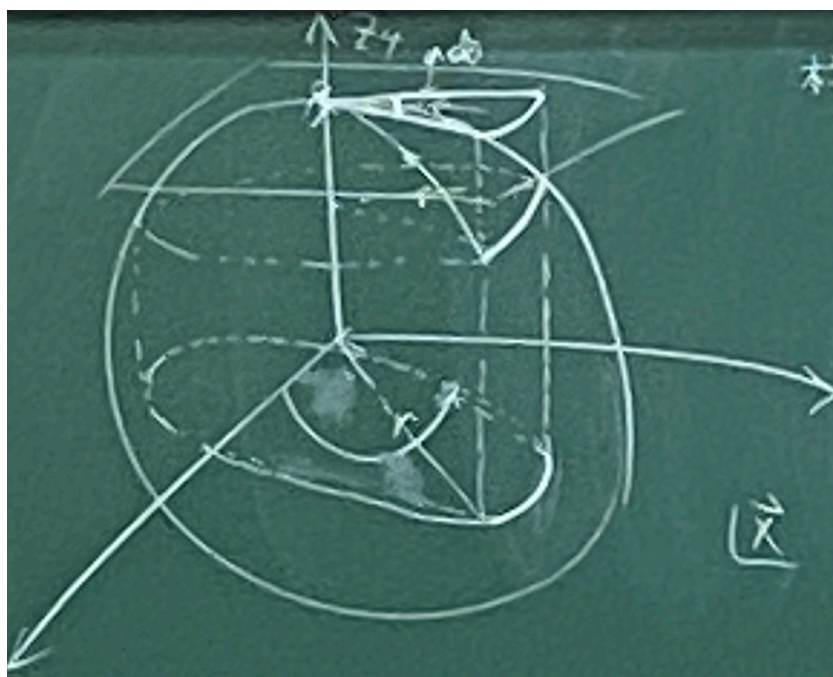


图 1: 弯曲空间中的角直径距离示意图，观测者在极点。

对于一个立体角， $dt = dr = 0$ ， $ds^2 = a^2(t)r^2 d\Omega^2$ ，球面积 = $a^2(t)4\pi r^2$

$$F = \frac{L_{\text{obs}}}{a_0^2 4\pi r^2} \quad (8)$$

$$d_L \equiv \frac{a_0}{a} a_0 r \quad (9)$$

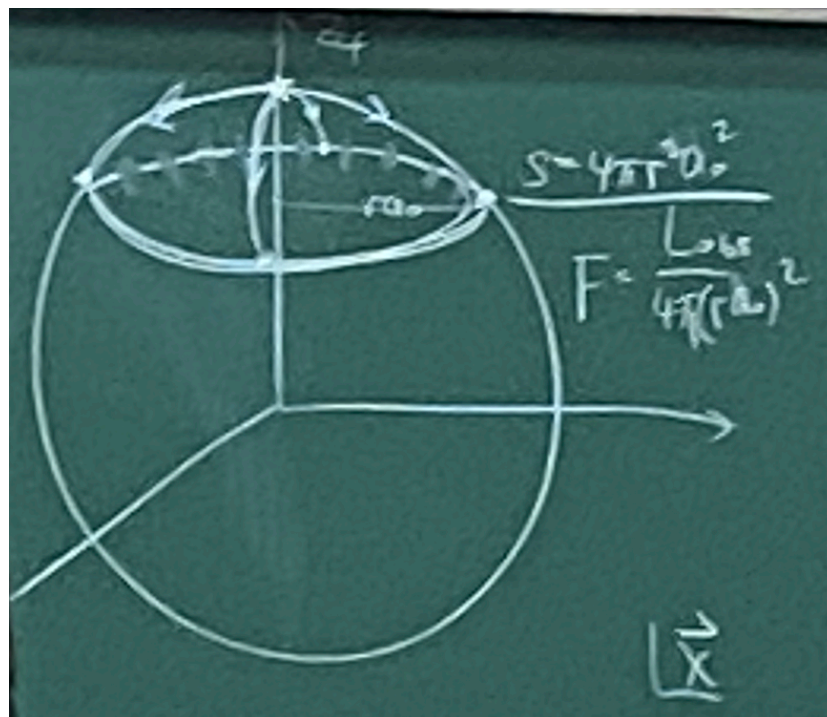


图 2: 弯曲空间中的光度距离示意图吗, 光源在极点。

consistency check

由 d_A 和 d_L 可以得到与宇宙学模型无关的 “consistency check”:

$$\frac{d_A}{d_L} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \quad (10)$$

这个公式可以用来检验 “宇宙均匀膨胀” 的假说。

定义 χ 是光传播经过的空间对应在今日的（物理）距离

$$\chi = \chi_{\text{com}} a_0 \quad (11)$$

$$= \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (12)$$

$$= a_0 \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} \quad (13)$$

最后一个等号是因为对于光线来说, $ds^2 = 0$, $d\theta = d\phi = 0$, 因此 $\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$ 。结果是

$$\chi = a_0 \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = +1 \\ r & K = 0 \\ \sinh^{-1} r & K = -1 \end{cases} \quad (14)$$

由此得知共动坐标距离

$$r = S_k(\chi/a_0) \quad (15)$$

其中

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & K = +1 \\ x & K = 0 \\ \sinh x & K = -1 \end{cases} \quad (16)$$

而 χ 可以根据定义 (式 (12)) 计算

$$\chi = \int_t^{t_0} c dt' \frac{a_0}{a(t')} \quad (17)$$

$$= \int_{a/a_0}^1 \frac{c da'}{a'^2 H(a')} \quad (18)$$

$$= \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (19)$$

使用式 (19) 可以计算任意红移下的距离, 注意其中 $H(z')$ 具体的形式与宇宙学模型有关, 接下来的课我们会讲 $H(z')$ 的具体形式是什么。