

探索原初高能物理的 现代宇宙学观测方法

(清华大学博士学位论文选题报告)

培 养 单 位： 天文系

学 科： 天文学

研 究 生： 赵 思 逸

学 号： 2021312349

指 导 教 师： 赵 成 教 授

二〇二五年四月

第1章 研究背景

1.1 释题：从“世界的本源”到“原初宇宙的高能物理”

翻开任意一本哲学史，开篇通常记录着人类文明对于“智慧”的求索起源于一个著名的问题：“世界的本源是什么”。哲学史本身并未持续给出与时俱进的答案，而是将这一任务交给科学。时至今日，现代版本的“原子论”及其进一步发展后的“粒子物理标准模型”，从组份细分的角度来说，就是目前对这个问题最好的答案。但相应的物理理论本身提示我们这并非终点——“万有引力”尚不在“标准模型”中，将时空纳入这个框架仍具有理论上的困难。

从时间的角度切入这个问题则涉及到宇宙观的演变。直到1920年，沙普利(Shapley)和柯蒂斯(Curtis)还在“大辩论”中争论银河系是不是宇宙的全部，而很快哈勃(Hubble)的观测就将人类的宇宙观从银河系扩大到包含诸多星系的广阔空间。随后的观测中提出的哈勃定律则进一步揭示了宇宙在膨胀，将宇宙观从简单假设的“静态”引向有实证支持的“动态”。基于膨胀宇宙论做合理的外推，宇宙在时间上的“起源”也成为一个自然的概念。之后在宇宙微波背景辐射(Cosmic Microwave Background, CMB, 1964)、原初核合成(Big Bang Nucleosynthesis, BBN, 1960s)、宇宙大尺度结构(Large Scale Structure, LSS, 1970s)等观测证据的支持下，“大爆炸宇宙学”逐渐成为现代科学公认的宇宙观，到了九十年代末基于超新星测距发现“宇宙在加速膨胀”，进而引入暗能量的概念后，现代宇宙学的标准模型已经能至少在零阶近似下准确地描述宇宙的绝大部分历史。仍然未知的那部分就是电弱相变之前的“原初宇宙”，或者说宇宙的“起源”。因为这一时期的能标极高，尚不在物理学知识体系之内。

理论物理学家大都认为，目前经过实验认证的最深刻的两大理论——广义相对论（目前所知描述引力的最佳理论）和量子场论（描述其它三种相互作用的有力工具）只是某种更高能标的“统一理论”的低能近似，后者应能同时自然地描述全部四种相互作用。相关方面理论建构的尝试颇多，但缺乏实验的检验，这主要是因为检验更高能标理论所需的实验条件极其苛刻。目前人造设备所能达到的最高能标基于欧洲大型强子对撞机(Large Hadron Collider, LHC)，约为 10^4 GeV，这与人们预期的“统一理论”之间还有巨大的鸿沟，且在临近的几个数量级内缺乏十分有价值的预言。鉴于大型对撞机的建设成本极其高昂，目前可能的资金投入并不乐观。而原初宇宙中最早的暴胀时期的能标高达 $10^{13} - 10^{14}$ GeV，是检验“统一理论”的天然实验室。因此，两个角度殊途同归，将我们导向“世界本源”问题

的一种现代化表述：“原初宇宙存在哪些高能物理过程”，这不仅是现代宇宙学的主要目标之一，也将为高能物理研究提供丰富的现象。

1.2 暴胀理论及其观测证据

尽管从寻找新的物理现象的角度来说，电弱相变以前的物理过程都有相当的探索价值，我们的研究将聚焦于其中时间最早、能标最高的暴胀时期。暴胀理论 (Cosmic Inflation)^[1] 缓和了大爆炸宇宙学的奇点问题，将宇宙的起源描述为一段指数级膨胀过程，在短至 10^{-34} 秒的时间内宇宙膨胀了约 e^{60} 倍，原本极小的一片区域演化为今天的可观测宇宙，因此今天的宇宙在空间上十分平坦，且在大爆炸宇宙学中没有因果联系的两点可以通过对暴胀的回溯建立因果联系，由此解释了 CMB 观测中的“平坦性疑难”和“视界疑难”。

暴胀同时给宇宙中物质密度的涨落给出了自然的起源：暴胀期间共动坐标下的视界 (Comoving Horizon) 逐渐变小，原本视界内的量子涨落按照共动尺度从大到小依次出视界，被固定为经典的“原初涨落”（这个过程也称为 freeze-in），在暴胀结束后重新进入视界，之后在引力的作用下演化，最终形成我们观测到的大尺度结构。因此通过对大尺度结构的观测，我们可以反推原初涨落的统计性质，进而了解暴胀时期的物理过程。事实上，因为 CMB 之前的宇宙对光子不透明，而中微子、引力波等新信使尚处于发展初期，原初宇宙目前只能通过 CMB 和 LSS 进行间接观测。暴胀理论现有的观测证据也全部来自对物质密度涨落统计性质的预言。其一是原初涨落进入视界后的演化预言了重子声波振荡 (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) 的存在，在 CMB 和 LSS 中都得到了验证。其二是暴胀期间哈勃参数的变化很小，而原初涨落的幅度和其出视界时刻的哈勃参数成正比，因此不同尺度的原初功率谱应近似相同（不是严格相同，因为哈勃参数仍有微小的演化），参数化的表示是谱指数 n_s 接近于 1。普朗克卫星 2018 年的数据给出了 $n_s = 0.965 \pm 0.004$ ^[2]，在 CMB 可观测的尺度范围内证实了原初功率谱满足近似尺度不变的预言。

1.3 原初非高斯性

对暴胀时期的观测目前主要局限于两点统计（如功率谱），而粒子物理告诉我们，两点统计描述的是暴胀期间粒子的自由传播 (free propagation)，粒子间的相互作用则需要更高阶的统计学量，其中蕴含着丰富的物理现象，是探索极高能标下物理理论的关键^[3]。高阶统计描述的是系统相对于高斯随机场的偏离，在暴胀结束时的原初势场中，这种偏离被称为原初非高斯性 (Primordial Non-Gaussianity,

PNG)。描述非高斯性的最低阶的统计学量是三点统计，如双谱 (bispectrum) 和三点相关函数 (three-point correlation function, 3PCF)，由于计算难度随统计的阶数增长迅速，现在的研究多聚焦于两点 and 三点统计。

从暴胀的物理来看，我们目前仅知应存在一种驱动暴胀的场，称为“暴胀子” (inflaton)，对于暴胀子的性质以及是否存在其它的场则知之甚少。根据暴胀期间可能存在的额外粒子 σ 的质量可以分为三种情况：其一是 σ 的质量远大于暴胀期间的哈勃参数 ($m_\sigma \gg H$)，因此它一旦产生就会迅速衰变，这种情况等效于单场暴胀；其二是 σ 接近于零质量粒子 ($m_\sigma \ll H$)，可以在衰变前传播一段时间，就是通常的多场暴胀；最后一种情况介于二者之间， $m_\sigma \sim H$ ，被称为 quasi-single field^[4]，是宇宙对撞机 (Cosmological Collider) 的主要研究内容^[5]。它们预言的原初双谱是区分这三种情况，甚至进一步限制 σ 的质量、自旋等性质的主要途径。

原初曲率涨落 (curvature fluctuation) 的双谱可以参数化为

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_\zeta^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} S(k_1, k_2, k_3), \quad (1.1)$$

其中约化后的原初功率谱近似尺度无关 $\mathcal{P}_\zeta \sim 2 \times 10^{-9}$ ，原初双谱对尺度大小的依赖主要在因子 $(k_1 k_2 k_3)^{-2}$ 里，而描述三角形形状依赖的因子 $S(k_1, k_2, k_3)$ 被称为形状函数 (shape function)，包含着双谱中的绝大部分信息。暴胀模型对形状函数的预言通常很复杂，为了进行观测限制，人们构建了一些近似的简化样板 (template)，其中“局域型” (local, LPNG) 是区分单场和多场暴胀模型的关键，且在星系功率谱上的信号最强，得到了最多研究^[6-13]。目前 CMB 对 LPNG 的测量最为精确，普朗克卫星 2018 年的数据给出 LPNG 的幅度为 $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = -0.9 \pm 5.1$ ^[11]；LSS 的测量也紧随其后，最新的 DESI 第一年 (Y1) 数据给出 1σ 的误差约为 10 左右^[13]。鉴于 CMB 观测已接近宇宙方差^[14-15]，可以预期在未来五到十年，LSS 的测量精度会接近并最终超过 CMB^[16-17]。另外随着理论工具的发展，物理学家们也提出了一些更具物理含义的 non-local template，并开始在观测数据中搜寻相应的信号^[18-20]。

相比 CMB 而言，LSS 的观测数据来自宇宙相对晚期，引力的非线性演化、宇宙学探针的偏袒 (bias) 等效应都会影响到对 PNG 信号的搜寻，从 PNG 的理论预言到最终的观测量之间的建模比 CMB 双谱更为复杂。不过随着 BOSS、DESI 等光谱巡天项目的开展，以及下一代光谱巡天和中性氢巡天等项目的启动，LSS 的观测数据处理方法在快速发展，包括利用多探针 (multi-tracer) 方法提升测量精度^[21-22] 和含有 PNG 的模拟^[23-25] 等。PNG 测量正逐渐成为现代宇宙学观测的核心科学目标之一，揭开宇宙起源时分之高能物理过程的神秘面纱，进一步回答“世界本源”问题的条件正日趋成熟。

第 2 章 研究内容

基于 PNG 理论和大尺度结构观测快速发展的背景，我们计划开发一系列有助于通过宇宙大尺度结构测量 PNG 的宇宙学观测数据分析方法。

大尺度结构宇宙学有一套成熟的数据分析方法，以贝叶斯推断为核心，其相对于 CMB 数据分析的一个主要区别在于建模和数据协方差 (covariance) 估计中十分依赖 N 体数值模拟求解暗物质粒子的非线性引力演化。基于演化后的暗物质粒子分布定义暗物质晕 (halo)，再通过观测的成团性 (clustering) 进行从暗物质晕到探针样本的模型拟合，最终得到模拟的探针样本，用于统计学量的非线性建模或校准。协方差则通过运行多组不同初始条件 (Initial Condition, IC) 的模拟，计算它们的统计误差来估计。需要强调的是，在标准的分析中，各组模拟 IC 的差别仅在于随机数种子不同，其统计性质是一致的——都是高斯随机场。而在 PNG 的测量中，当数据质量足够好时，为了数据分析过程中的一致性，我们需要含有对应 PNG 的数值模拟。基于定义，含 PNG 的模拟与标准宇宙学分析中用到的模拟差别就在于在生成 N 体数值模拟的初始条件时，在引力势场中加入 PNG 的成分。

2.1 局域型原初非高斯性

对于 LPNG，修改引力势场的方式比较简单。随着近年来相应的研究逐渐增多，数组大型模拟项目将 LPNG 纳入参数空间^[23-25]，一些快速 N 体模拟程序也内嵌了加入 LPNG 的功能^[26-27]。我们将在目前的研究基础上进一步探索多探针联合测量方法、高阶统计和非标准统计。这些方法将在模拟数据上得到充分验证后，再被用于实际的观测数据。

目前 DESI 的测量^[13]只使用了亮红星系 (Luminous Red Galaxy, LRG) 和类星体 (Quasar, QSO) 两种探针的功率谱，这两类探针的红移重合度很小，所以对多探针的应用仅限于在最后一步的贝叶斯分析中，将两个样本给出的后验分布 (posterior) 合并，而不考虑不同探针之间的互相关统计。与 LRG 红移重合较高的发射线星系 (Emission Line Galaxy, ELG) 因为系统误差较为严重，将其纳入分析是否有助于结果的提升仍在研究之中。高阶的三点统计也因统计误差尚在研究中，而暂时没有被纳入 PNG 的测量中。虽然在这两方面相对谨慎，DESI Y1 的数据分析中却引入了一种新的样本加权方法，像这样的新的数据分析方法，以及宇宙学中新开发出的多种非标准统计（如空洞 (void) 统计、小波变换 (wavelet transform)、拓扑量等），都需要在模拟数据上进行充分的验证。

此外，随着样本量的积累，也可以人为地划分子样本来进行“多探针”的数据分析。初步的研究表明，两组样本的 bias 差别越大，LPNG 的测量精度越高^[21]，基于此类结论采用巧妙的方法划分星系子样本或有助于提高 LPNG 的测量精度。目前此类研究多利用模拟数据的暗物质晕样本 (halo) 进行分析，我们将在 DESI 合作组中基于第三年 (Y3) 的数据通过晕占据数模型 (Halo Occupation Distribution, HOD) 等方法，生成模拟的星系样本，在跟接近实际观测样本的层面进行多探针分析，以测试多探针联合分析在实际测量中的有效性。最后值得一提的是，从 DESI II 开始，高红移的莱曼截断星系 (Lyman Break Galaxy, LBG) 逐渐进入光谱巡天的视野，到以 MUST 为代表的第五代巡天项目中，LBG 将成为主要的探针之一。这将为 LSS 巡天带来全新的窗口，特别有利于 PNG 的测量。同样作为新窗口到来的还有以 SKA 为代表中性氢巡天项目，我们也将关注中性氢与星系的多探针联合观测。

2.2 宇宙对撞机

鉴于 LPNG 的测量在快速发展中，我们很有可能在不久的将来测量到原初非高斯性信号。虽然 LPNG 能限制一大批理论模型，但对了解暴胀时期的物理更有启发性的是另一类与粒子物理模型联系更为紧密的 template，其中最具代表性的来自宇宙对撞机 (Cosmological Collider, CoCo) 的预言。假设暴胀期间存在额外的粒子 σ ，它将通过与 inflaton 的耦合贡献 PNG，其信号双谱在压缩态极限 (squeezed-limit) 下的近似具有非常独特的形式——在 $\ln k$ 空间的余弦振荡，即“宇宙对撞机信号”形如

$$\lim_{k_3 \ll k_1 \approx k_2} S(k_1, k_2, k_3)|_{\text{signal}} \propto f_{\text{NL}}^{\text{cc}} \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^\alpha \cos \left[\omega \ln \left(\frac{k_3}{k_1} \right) + \varphi \right], \quad (2.1)$$

其中有四个未知参数： $f_{\text{NL}}^{\text{cc}}$ 是信号的大小， α 衡量信号衰减的速度，振荡频率 $\omega = \sqrt{m^2/H^2 - 9/4}$ 与 σ 粒子的质量直接相关， φ 是振荡的相位。

为了最大限度利用 LSS 数据搜寻 CoCo 信号，我们需要针对式 (2.1) 中的 template 开发相应的数据分析方法。在我的博士学位论文工作中，我们将先准备相应的模拟，并在暗晕功率谱上做简单的测试，为以后探索更有针对性的数据分析方法打下基础。

目前有关 CoCo 信号的模拟仅见 Quijote 一例^[28]，但其为了保证计算速度使用了进一步近似的 template，无法还原余弦振荡的形式。我们注意到有另一种较慢的算法可以处理任意 template^[29-30]，只是过去探测 non-local PNG 的时机不成熟，获得的关注较少。我们计划基于这种通用算法生成含有 CoCo 信号的 IC，并从数值

模拟的角度测试这一算法的有效性。我们将第一次将有振荡形式的 **shape function** 引入 N 体数值模拟，工作重点在于在数值模拟中正确还原理论预言的双谱，并基于模拟开发和测试数据分析方法，因此我们暂不追求还原宇宙中真实的双谱，而是将在理论的指导下适当探索参数空间。具体来说，

- $f_{\text{NL}}^{\text{cc}}$ 受到 $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$ 的限制，因此不会很大，但我们为避免数值计算误差的影响，将适当放大该参数的取值；
- 简单的数图给出的预言值是 $\alpha = 1/2$ ，我们的工作将采用这一特征值；
- ω 的预言集中在几到几十，我们将在 1 的数量级上对该参数进行探索；
- 为简单起见，振荡相位 φ 暂设为 0.

此外宇宙对撞机的预言中除了“信号”还有“背景”^[5]，这种背景在等边三角形中取极大值，因此可以用“等边型”(equilateral, EPNG) 描述。现有含 EPNG 的模拟使用的算法和 Quijote 对 CoCo 信号的处理一脉相承，也存在对理论 template 的进一步近似^[31]。我们使用的通用算法可以很容易地将宇宙对撞机信号替换为 EPNG 信号，因此在生成 IC 这一步，我们还将检验 EPNG 现有近似的准确度。

有了含有特定 PNG 的 IC，我们就可以通过 N 体数值模拟程序计算引力演化，从而得到暗物质晕模拟样本。我们将依前所述探索式 (2.1) 的参数空间，作为初步的探索，我们将主要尝试 ω 的不同取值，通过简单的费舍尔预测 (Fisher forecast)，我们将初步了解大尺度结构对宇宙对撞机信号的限制能力。进一步地，我们将通过数值模拟结果对暗晕功率谱进行理论建模，初步推测对 CoCo 信号的建模可以通过修改 LPNG 的模型迁移而来，我们将在模拟结果上测试这一点。完成建模后，就可以构建完整的数据分析方法，并在模拟结果上测试。通过测试的数据分析方法可以直接迁移到真实的观测数据上，用于 CoCo 信号的搜寻。同时，通过对模拟数据（或观测数据）协方差的简单外推，我们可以进一步了解下一代 LSS 巡天数据对宇宙对撞机信号的限制能力。

在 CoCo 信号的两点统计分析方法完成后，我们还可以尝试加入三点统计协同分析。CoCo 的 EPNG 背景在三点统计上更明显，因此两点和三点的协同分析将适用于 CoCo 信号和背景的同时搜寻，这将拓宽同等数据质量下可以限制的参数空间。不过由于时间限制，这部分工作可能不会包含在我的博士论文中，而是留待未来的工作。

总之，我们将一方面参与推动 LPNG 的测量，另一方面将更有潜力的宇宙对撞机信号搜寻引入大尺度结构宇宙学的视野，为即将到来的 LSS 巡天数据准备分析方法，推动现代宇宙学观测探索原初宇宙中的物理现象，最终接过回答“世界本源”问题的接力棒。

参考文献

- [1] Guth A H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems [J/OL]. *Physical Review D*, 1981, 23(2): 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [2] Planck Collaboration, Aghanim N, Akrami Y, et al. *Planck* 2018 results: VI. Cosmological parameters[J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, 641: A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [3] Meerburg P D, Green D, Abidi M, et al. Primordial Non-Gaussianity: arXiv:1903.04409 [M/OL]. arXiv, 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1903.04409.
- [4] Chen X, Wang Y. Quasi-Single Field Inflation and Non-Gaussianities[J/OL]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010, 2010(04): 027-027. DOI: 10.1088/1475-7516/2010/04/027.
- [5] Arkani-Hamed N, Maldacena J. Cosmological collider physics[M/OL]. arXiv, 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1503.08043.
- [6] Dalal N, Doré O, Huterer D, et al. Imprints of primordial non-Gaussianities on large-scale structure: Scale-dependent bias and abundance of virialized objects[J/OL]. *Physical Review D*, 2008, 77(12): 123514. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.123514.
- [7] Ross A J, Percival W J, Carnero A, et al. The Clustering of Galaxies in SDSS-III DR9 Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Constraints on Primordial Non-Gaussianity[J/OL]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, 428(2): 1116-1127. DOI: 10.1093/mnras/sts094.
- [8] de Putter R, Doré O. Designing an Inflation Galaxy Survey: How to measure $\sigma(f_{\rm NL}) \sim 1$ using scale-dependent galaxy bias[J/OL]. *Physical Review D*, 2017, 95(12): 123513. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.123513.
- [9] Karagiannis D, Lazanu A, Liguori M, et al. Constraining primordial non-Gaussianity with bispectrum and power spectrum from upcoming optical and radio surveys[J/OL]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2018, 478(1): 1341-1376. DOI: 10.1093/mnras/sty1029.
- [10] Ferraro S, Wilson M J, Abidi M, et al. Inflation and Dark Energy from spectroscopy at $z > 2$: arXiv:1903.09208[M/OL]. arXiv, 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1903.09208.
- [11] Planck Collaboration, Akrami Y, Arroja F, et al. *Planck* 2018 results: IX. Constraints on primordial non-Gaussianity[J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, 641: A9. DOI: 10.1051/0004-6361/201935891.
- [12] Cagliari M S, Castorina E, Bonici M, et al. Optimal constraints on Primordial non-Gaussianity with the eBOSS DR16 quasars in Fourier space: arXiv:2309.15814[M/OL]. arXiv, 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2309.15814.
- [13] Chaussidon E, Yèche C, de Mattia A, et al. Constraining primordial non-Gaussianity with DESI 2024 LRG and QSO samples: arXiv:2411.17623[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.17623.

-
- [14] Babich D, Zaldarriaga M. Primordial bispectrum information from CMB polarization[J/OL]. Physical Review D, 2004, 70(8): 083005. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.083005.
 - [15] Sefusatti E, Komatsu E. Bispectrum of galaxies from high-redshift galaxy surveys: Primordial non-Gaussianity and nonlinear galaxy bias[J/OL]. Physical Review D, 2007, 76: 083004. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.083004.
 - [16] Achúcarro A, Biagetti M, Braglia M, et al. Inflation: Theory and Observations: arXiv:2203.08128[M/OL]. arXiv, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2203.08128.
 - [17] Zhao C, Huang S, He M, et al. MUltiplexed Survey Telescope: Perspectives for Large-Scale Structure Cosmology in the Era of Stage-V Spectroscopic Survey: arXiv:2411.07970[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.07970.
 - [18] Sohn W, Wang D G, Fergusson J R, et al. Searching for Cosmological Collider in the Planck CMB Data: arXiv:2404.07203[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.07203.
 - [19] Cabass G, Philcox O H E, Ivanov M M, et al. BOSS Constraints on Massive Particles during Inflation: The Cosmological Collider in Action: arXiv:2404.01894[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.01894.
 - [20] Green D, Guo Y, Han J, et al. Light Fields during Inflation from BOSS and Future Galaxy Surveys[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2024, 2024(05): 090. DOI: 10.1088/1475-7516/2024/05/090.
 - [21] Barreira A, Krause E. Towards optimal and robust $f_{\rm NL}$ constraints with multi-tracer analyses: arXiv:2302.09066[M/OL]. arXiv, 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2302.09066.
 - [22] Sullivan J M, Prijon T, Seljak U. Learning to Concentrate: Multi-tracer Forecasts on Local Primordial Non-Gaussianity with Machine-Learned Bias[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2023, 2023(08): 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2023/08/004.
 - [23] Coulton W R, Villaescusa-Navarro F, Jamieson D, et al. Quijote-PNG: Simulations of primordial non-Gaussianity and the information content of the matter field power spectrum and bispectrum: arXiv:2206.01619[M/OL]. arXiv, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2206.01619.
 - [24] Adame A G, Avila S, Gonzalez-Perez V, et al. PNG-UNITsims: Halo clustering response to primordial non-Gaussianities as a function of mass: arXiv:2312.12405[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2312.12405.
 - [25] Hadzhiyska B, Garrison L, Eisenstein D J, et al. AbacusPNG: A modest set of simulations of local-type primordial non-Gaussianity in the DESI era: arXiv:2402.10881[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2402.10881.
 - [26] Feng Y, Chu M Y, Seljak U, et al. FastPM: A new scheme for fast simulations of dark matter and halos[J/OL]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2016, 463(3): 2273-2286. DOI: 10.1093/mnras/stw2123.
 - [27] Enríquez M, Hidalgo J C, Valenzuela O. Including relativistic and primordial Non-Gaussianity contributions in cosmological simulations by modifying the initial condition[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2022, 2022(03): 048. DOI: 10.1088/1475-7516/2022/03/048.

- [28] Goldstein S, Philcox O H E, Hill J C, et al. Massive-ish Particles from Small-ish Scales: Non-Perturbative Techniques for Cosmological Collider Physics from Large-Scale Structure Surveys: arXiv:2407.08731[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2407.08731.
- [29] Wagner C, Verde L, Bubekeur L. N-body simulations with generic non-Gaussian initial conditions I: Power Spectrum and halo mass function[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010, 2010(10): 022-022. DOI: 10.1088/1475-7516/2010/10/022.
- [30] Regan D M, Schmittfull M M, Shellard E P S, et al. Universal non-Gaussian initial conditions for N -body simulations[J/OL]. Physical Review D, 2012, 86(12): 123524. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.123524.
- [31] Scoccimarro R, Hui L, Manera M, et al. Large-scale Bias and Efficient Generation of Initial Conditions for Non-Local Primordial Non-Gaussianity[J/OL]. Physical Review D, 2012, 85(8): 083002. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.083002.