

# 现代宇宙学观测探索原初高能物理

(清华大学博士学位论文选题报告)

培 养 单 位： 天文系

学 科： 天文学

研 究 生： 赵 思 逸

学 号： 2021312349

指 导 教 师： 赵 成 教 授

二〇二五年四月

## 第1章 研究背景

### 1.1 释题：从“世界的本源”到“原初宇宙的高能物理”

翻开任意一本哲学史，开篇通常记录着人类文明对于“智慧”的求索起源于一个著名的问题：“世界的本源是什么”。哲学史本身并未持续给出与时俱进的答案，而是将这一任务交给科学。时至今日，现代版本的“原子论”及其进一步发展后的“粒子物理标准模型”，从组份细分的角度来说，就是目前对这个问题最好的答案。但相应的物理理论本身提示我们这并非终点——“万有引力”尚不在“标准模型”中，将时空纳入这个框架仍具有理论上的困难。

从时间的角度切入这个问题则涉及到宇宙观的演变。直到1920年，沙普利(Shapley)和柯蒂斯(Curtis)还在“大辩论”中争论银河系是不是宇宙的全部，而很快哈勃(Hubble)的观测就将人类的宇宙观从银河系扩大到包含诸多星系的广阔空间。随后的观测中提出的哈勃定律则进一步揭示了宇宙在膨胀，将宇宙观从简单假设的“静态”引向有实证支持的“动态”。基于膨胀宇宙论做合理的外推，宇宙在时间上的“起源”也成为一个自然的概念。之后在宇宙微波背景辐射(Cosmic Microwave Background, CMB, 1964)、原初核合成(Big Bang Nucleosynthesis, BBN, 1960s)、宇宙大尺度结构(Large Scale Structure, LSS, 1970s)等观测证据的支持下，“大爆炸宇宙学”逐渐成为现代科学公认的宇宙观，到了九十年代末基于超新星测距发现“宇宙在加速膨胀”，进而引入暗能量的概念后，现代宇宙学的标准模型已经能至少在零阶近似下准确地描述宇宙的绝大部分历史。仍然未知的那部分就是电弱相变之前的“原初宇宙”，或者说宇宙的“起源”。因为这一时期的能标极高，尚不在物理学知识体系之内。

理论物理学家大都认为，目前经过实验认证的最深刻的两大理论——广义相对论（目前所知描述引力的最佳理论）和量子场论（描述其它三种相互作用的有力工具）只是某种更高能标的“统一理论”的低能近似，后者应能同时自然地描述全部四种相互作用。相关方面理论建构的尝试颇多，但缺乏实验的检验，这主要是因为检验更高能标理论所需的实验条件极其苛刻。目前人造设备所能达到的最高能标基于欧洲大型强子对撞机(Large Hadron Collider, LHC)，约为 $10^4$  GeV，这与人们预期的“统一理论”之间还有巨大的鸿沟，且在临近的几个数量级内缺乏十分有价值的预言。鉴于大型对撞机的建设成本极其高昂，目前可能的资金投入并不乐观。而原初宇宙中最早的暴胀时期的能标高达 $10^{13} - 10^{14}$  GeV，是检验“统一理论”的天然实验室。因此，两个角度殊途同归，将我们导向“世界本源”问题

的一种现代化表述：“原初宇宙存在哪些高能物理过程”，这不仅是现代宇宙学的主要目标之一，也将为高能物理研究提供丰富的现象。

## 1.2 暴胀理论及其观测证据

尽管从寻找新的物理现象的角度来说，电弱相变以前的物理过程都有相当的探索价值，我们的研究将集中在其中时间最早、能标最高的暴胀时期。暴胀理论 (Cosmic Inflation)<sup>[1]</sup> 缓和了大爆炸宇宙学的奇点问题，将宇宙的起源描述为一段指数级膨胀过程，在短至  $10^{-34}$  秒的时间内宇宙膨胀了约  $e^{60}$  倍，原本极小的一片区域演化为今天的可观测宇宙，因此今天的宇宙在空间上十分平坦，且在大爆炸宇宙学中没有因果联系的两点可以通过对暴胀的回溯建立因果联系，由此解释了 CMB 观测中的“平坦性疑难”和“视界疑难”。

暴胀同时给宇宙中物质密度的涨落给出了自然的起源：暴胀期间共动坐标下的视界 (Comoving Horizon) 逐渐变小，原本视界内的量子涨落按照共动尺度从大到小依次出视界，被固定为经典的“原初涨落”（这个过程也称为 freeze-in），在暴胀结束后重新进入视界，之后在引力的作用下演化，最终形成我们观测到的大尺度结构。因此通过对大尺度结构的观测，我们可以反推原初涨落的统计性质，进而推断暴胀时期的物理过程。事实上，因为 CMB 之前的宇宙对光子不透明，而中微子、引力波等新信使尚处于发展初期，原初宇宙目前只能通过 CMB 和 LSS 进行间接观测。暴胀理论现有的观测证据也全部来自对物质密度涨落统计性质的预言。其一是原初涨落进入视界后的演化预言了重子声波振荡 (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) 的存在，在 CMB 和 LSS 中都得到了验证。其二是暴胀期间哈勃参数的变化很小，而原初涨落的幅度和其出视界时刻的哈勃参数成正比，因此不同尺度的原初功率谱应近似相同（不是严格相同，因为哈勃参数仍有微小的演化），参数化的表示是谱指数  $n_s$  接近于 1。普朗克卫星 2018 年的数据给出了  $n_s = 0.965 \pm 0.004$ <sup>[2]</sup>，证实了在 CMB 可观测的尺度范围内原初功率谱都满足近似尺度不变的预言。

## 1.3 原初非高斯性

对暴胀时期的间接观测目前主要局限于两点统计（如功率谱），而粒子物理告诉我们，两点统计描述的是暴胀期间粒子的自由传播 (free propagation)，粒子间的相互作用则需要更高阶的统计学量，其中蕴含着丰富的物理现象，是探索极高能标下物理理论的关键<sup>[3]</sup>。高阶统计描述的是系统相对于高斯随机场的偏离，在暴胀结束时的原初势场中，这种偏离被称为原初非高斯性 (Primordial Non-Gaussianity,

PNG)。描述非高斯性的最低阶的统计学量是三点统计，如双谱 (bispectrum) 和三点相关函数 (three-point correlation function, 3PCF)，由于计算难度随统计的阶数增长迅速，现在的研究多聚焦于两点和三点统计。

从暴胀的物理来看，我们目前仅知应存在一种驱动暴胀的场，称为“暴胀子” (inflaton, 记为  $\phi$ )，对于暴胀子的性质以及是否存在其它的场则知之甚少。根据暴胀期间可能存在的额外的粒子  $\sigma$  的质量可以分为三种情况：其一是  $m_\sigma \gg H$ ，即  $\sigma$  的质量远大于暴胀期间的哈勃参数  $H$ ，因此它一旦产生就会迅速衰变，这种情况等效于单场暴胀；其二是  $m_\sigma \ll H$ ，这种情况下  $\sigma$  接近于零质量粒子，可以在衰变前传播一段时间，就是通常的多场暴胀；最后一种情况介于二者之间， $m_\sigma \sim H$ ，被称为 quasi-single field，是宇宙学对撞机 (Cosmological Collider) 的主要研究内容<sup>[4]</sup>。它们预言的原初双谱是区分这三种情况，甚至进一步限制  $\sigma$  的质量、自旋等性质的主要途径。

原初涨落的双谱可以参数化为

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_\zeta^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} S(k_1, k_2, k_3), \quad (1.1)$$

其中约化后的原初功率谱近似尺度无关  $\mathcal{P}_\zeta \sim 2 \times 10^{-9}$ ，原初双谱对尺度大小的依赖主要在因子  $\frac{1}{(k_1 k_2 k_3)^2}$  里，而描述三角形形状依赖的因子  $S(k_1, k_2, k_3)$  则是研究的重点，被称为形状函数 (shape function)。暴胀模型对形状函数的预言通常很复杂，为了进行观测限制，通常需要构建近似的简化的样板 (template)，其中局域型 (local, LPNG) 是区分单场和多场暴胀模型的关键，且在星系功率谱上的信号最强，得到了最多研究。目前 CMB 对 LPNG 的测量最为精确，普朗克卫星 2018 年的数据给出 LPNG 的幅度为  $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = -0.9 \pm 5.1$ <sup>[5]</sup>，LSS 的测量也紧随其后，最新的 DESI 第一年数据给出  $1\sigma$  的误差约为 10 左右<sup>[6]</sup>，可以预期在未来五到十年，LSS 的测量精度会接近并最终超过 CMB<sup>[7-8]</sup>。另外随着理论工具的发展，物理学家们也开始关注一些更具有物理含义的 non-local template，并在观测数据中搜寻相应的信号<sup>[9-11]</sup>。

相比 CMB 而言，LSS 的观测数据来自宇宙相对晚期，引力的非线性演化、宇宙学探针的偏袒 (bias) 等效应都会影响到对 PNG 信号的搜寻，从 PNG 的理论预言到最终的观测量之间的建模比 CMB 双谱更为复杂。但另一方面，随着 BOSS、DESI 等光谱巡天项目的开展，以及下一代光谱巡天和中性氢巡天等项目的启动，LSS 的观测数据在积累，相应的数据处理方法也在快速发展之中，包括利用多探针 (multi-tracer) 方法提升测量精度<sup>[12-13]</sup>和含有 PNG 的模拟<sup>[14-16]</sup>等。不过目前这类研究主要集中在 LPNG 的测量上，对于 non-local PNG，虽然早有相应的算法<sup>[17-19]</sup>，但相应的模拟<sup>[14,20]</sup>仍比较少。

## 第 2 章 研究内容

## 第3章 背景

### 3.1 宇宙起源之谜与未知的高能物理

翻开任意一本哲学史，开篇往往记录着人类文明对于智慧的求索起源于一个著名的问题：“世界的本源是什么”。第一批回答者着眼于日常所见的具体元素：水、火、土、气，虽然已经是对生活经验的初步概括，但仍不能使人信服。后来的哲学家用一些更抽象的概念来回答：“数”、“原子”，虽仍然不是最恰当的答案，却启发了后来的人们。近代自然科学发展后，物理学 (physics) 取代了形而上学 (meta-physics)，用一套行之有效的、基于数学符号和实验分析的方法来探索自然世界，将诸如“世界本源”一类的哲学问题转化为可度量、可验证的科学问题。经过物理学几百年的快速发展，今天的“原子”已经是定义良好的概念，并在特定的情境（覆盖日常生活的绝大多数情境）下承担着“组成世界的基本单位”这一角色。

如果我们能不驻足于“完善德谟克利特的猜想”这种带有浪漫色彩的史诗化表述，而是被这一过程自然而然的“副产物”所吸引：当人们对“原子”的概念理解清楚之后，他们很快（在半个世纪内）发现了原子之内还有更基础的组分，即使在这么小的尺度上依然有丰富的现象，其中蕴含着深刻的物理规律，这些知识最终总结为粒子物理的标准模型，标志着人类现今对于微观世界的全部理解。所以若我们从空间的角度理解“世界的本源是什么”这个问题，即“构成世界的基本组分有哪些”，那么粒子物理标准模型就是时至今日最好的答案。

但一个哲学问题翻译成科学问题时往往有多种解读的方向，“本源”二字除了从空间上解析到极微观外，还可以从时间上追溯到极早期。而令人兴奋的是，这两种解读导向了同一个方向：宇宙极早期的高能物理过程。

一百多年前，哈勃通过观测遥远星系的红移发现宇宙在膨胀。基于膨胀宇宙论做合理的外推，宇宙早期应处于高温与高密的状态，后来的微波背景辐射 (Cosmic Microwave Background, CMB)、原初核合成 (Big Bang Nucleosynthesis, BBN) 等观测证据佐证了这一猜想，九十年代末基于超新星测距发现的“宇宙在加速膨胀”这一结论更是将膨胀的宇宙论确立为现代宇宙学的标准模型。

在这一标准模型中，我们对宇宙的起源仍知之甚少。从观测的角度，CMB 之前光子与等离子态的核子、电子耦合在一起，导致宇宙这“前 38 万年”的无法通过光子直接探测，只能寄希望于中微子、引力波等新兴的宇宙学探针，或是通过 CMB 及之后宇宙大尺度结构 (Large Scale Structure, LSS) 的观测来间接推断。而理

论的角度，高温高密的早期宇宙对应的正是理论物理所未尝理解的极高能标，时空的极度扭曲与物质的量子性质耦合在一起，导致单独的广义相对论（目前所知描述引力的最佳理论）或量子场论（描述其它三种相互作用的有力工具）都失去了描述和预言的能力，而二者的统一又具有相当的难度。

自人们从对“原子”的研究中一步步走来，不仅发现了全新的强/弱相互作用，还在理论上将它们和电磁相互作用统一（成为粒子物理标准模型中的玻色子们）以来，数代理论物理学家花费了大量精力试图将最后一种相互作用——引力统一进来。他们面临的不只是理论构建上的难度，更是实验检验的巨大困难。这些可能的“统一理论”工作在极高的能标，而地球上所能达到的最高能标依赖于人类建设的大型粒子加速对撞机，目前最大的是在 2012 年用希格斯粒子 (Higgs) 的实验探测补齐粒子物理标准模型的最后一块拼图的欧洲大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC)，它所能达到的能标约为  $10^4$  GeV。由于对撞机的建设成本极其高昂，而现在的“最高能标”和“统一理论”之间还有巨大的鸿沟，且在临近的几个数量级内缺乏值得花费成本验证的理论预言，目前人们对大型对撞机的资金投入并不乐观。但在地球之外，存在着诸多天然的“高能物理实验室”，比如超新星爆发、活动星系核、伽马射电暴等极端天体物理过程能标可达  $10^6$  GeV 以上，它们产生的中微子和宇宙射线等可以成为探测高能标新物理的窗口。而宇宙极早期的能标理论上更是高达  $10^{13} - 10^{14}$  GeV，这一时期可能存在哪些物理过程完全在人类现有知识体系之外，但却与“统一理论”的构建和预言相关。幸运的是，虽然直接探测的手段尚未完善，但早期宇宙仍可以通过传统的宇宙学观测方法，通过后来的物质分布来推断早期的特征，进而印证、限制或推翻极高能标下的物理理论。而宇宙学本身，经过数十年的迅速发展，已经进入了“精确测量”的时代，无疑将为探测原初宇宙的物理过程提供坚实的基础。

于是我们看到，在两千多年后，“原子论”与“宇宙论”的殊途同归构成了“世界的本源是什么”这一问题的现代表述：“宇宙极早期存在哪些物理过程”。对原初宇宙的探测不仅是宇宙学的圣杯之一，也将为高能物理研究提供丰富的现象。正如“打开原子”后，我们遇到了纷繁复杂的微观世界，从原初宇宙的一两个统计特征开始，我们也将触碰到其背后由更深刻的规律支配的全新世界。

## 3.2 暴胀理论及其观测证据

我们从人类现在对原初宇宙的认识开始。上世纪 80 年代，为了解决磁单极子不存在的问题，物理学家 Alan Guth 等人提出了暴胀理论 (Cosmic Inflation)，认为宇宙在极早期经历了一段短暂的指数级膨胀，将磁单极子“推”出了视界之外。暴

胀理论同时解决了在 CMB 中观测到的“视界疑难”和“平坦性疑难”。前者指的是在大爆炸模型里，CMB 上相距甚远，不应该有因果联系的两点在同样的平均温度（2.73K）附近以同样规律微小涨落（涨落为  $10^{-5}$  量级）。后者指根据 CMB 功率谱拟合标准宇宙学模型得到的曲率几乎为 0，说明宇宙的三维空间是平坦的。在暴胀理论中，今天的可观测宇宙由暴胀前一个极小的区域演化而来，因此 CMB 上各个位置在暴胀前都有因果联系，所以温度非常相近；而平坦性则是因为极小区域的曲率总是近似为平坦的，换句话说，暴胀抹平了空间曲率。

在解决几大疑难的基础上，暴胀理论还给宇宙大尺度结构的起源给出了自然的解释：暴胀期间共动坐标下的视界 (Comoving Horizon) 逐渐变小，原本视界内的量子涨落按照共动尺度从大到小依次出视界，被固定为经典涨落（这个过程也称为 freeze-in），在暴胀结束后重新进入视界，之后在引力的作用下演化，最终形成我们观测到的宇宙大尺度结构。

虽然还未完全纳入“标准模型”的框架，暴胀理论已经取得一些初步的观测支持，主要和上一段提到的暴胀理论认为宇宙的大尺度结构有原初的起源有关。其一是原初涨落进入视界后的演化预言了重子声波振荡 (BAO) 的存在，在 CMB 和星系光谱巡天中都得到了验证。其二是暴胀期间哈勃参数的变化很小，而原初涨落的幅度和其出视界时刻的哈勃参数成正比，因此不同尺度的涨落在出视界时刻的幅度也应是近似相同的（不是严格相同，因为暴胀期间哈勃参数有微小的演化），参数化的表示是功率谱的谱指数  $n_s$  接近于 1。普朗克卫星 2018 年的数据给出了  $n_s = 0.965 \pm 0.004$ ，与暴胀理论的预言是一致的。最后，简单的慢滚暴胀理论预言原初涨落近似为高斯场，度量非高斯性大小的参数  $f_{\text{NL}}$  受到慢滚参数的压低  $f_{\text{NL}} \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ 。CMB 的观测暂时也没有测到明显的非高斯性，且给出了一定的限制，比如普朗克卫星 2018 年的数据给出了目前最严格的限制  $f_{\text{NL}} = -0.9 \pm 5.1$ 。

### 3.3 原初非高斯性

除了 CMB 之外，我们通过测量宇宙大尺度结构也可以反推暴胀结束时的原初场的统计性质。原初场的统计性质和暴胀时期的物理过程有很好的对应，目前研究最多的功率谱 (power spectrum) 在统计学上可以完整地刻画一个高斯随机场的性质，它对应暴胀期间粒子的自由传播 (free propagation)；而原初场相对于一个高斯随机场的偏移——称为“原初非高斯性” (Primordial non-Gaussianity, PNG)——则需要更高阶的统计学量——比如双谱 (bispectrum)——对应的则是暴胀期间粒子之间的相互作用。因此，通过观测原初非高斯性



### 3.4 “宇宙学对撞机”：原初高能物理的理论进展

无助推宇宙学对撞机自举 (Boostless Cosmological Collider Bootstrap, BCCB (四个词拼起来的奇怪翻译))

### 3.5 宇宙学观测现状

在理论工具取得突破的鼓舞下，部分理论物理学家开始将目光投入在真实的宇宙学观测数据中挖掘“宇宙学对撞机”的信号。（如<sup>[9-10]</sup>）

## 第4章 方法

暴胀理论预言原初势场具有特定的非高斯性，要把这类预言和宇宙学观测联系起来，我们还需要求解在这些原初势场下宇宙学探针的统计性质，以便与未来光谱巡天、中性氢巡天等观测项目的数据进行比较。本节我们讨论从原初势场的预言到实际观测量的主要步骤。

### 4.1 生成具有给定非高斯性的初始条件

初始条件 (Initial Conditions)

暗物质粒子的位置和速度。

### 4.2 暗物质的引力演化

在生成了初始条件的基础上，我们需要求解它如何在引力作用下演化，最终得到给定红移处的宇宙学探针的分布。完整的理论应该考虑暗物质粒子和重子物质的协同演化，但因为宇宙学只关注探针在大尺度上的成团性，受到重子物质反馈作用的影响较小，且宇宙学模拟通常需要大尺度（盒子的边长在 Gpc 量级），如果同时考虑小尺度的演化，跨越四五个数量级的动态范围会导致计算量急剧增大，在现有的计算机框架下是难以负担的，所以宇宙学模拟通常只考虑暗物质粒子的演化，在得到暗物质粒子聚集形成的暗物质晕后，再通过星系占据模型 (HOD) 等理论来预言星系的分布。暗物质粒子。。无碰撞系统的引力演化问题

FastPM<sup>[21]</sup> 是一种在光谱巡天项目中常用的近似的 N 体模拟演化算法，我们利用它来求解暗物质的演化。FastPM 是 FastPM 的优势在于它的速度快且具有较高的并行性，可以在短时间内求解大规模的 N 体模拟。

### 4.3 暗物质晕占据模型

### 4.4 宇宙学探针的统计量

#### 4.4.1 星系的功率谱

虽然一般来说，非高斯性不能在功率谱的主导项 (Leading Order) 留下痕迹，但在宇宙大尺度结构的观测中，作为探针的星系（或再电离时期之后的中性氢）只生活在物质密度非常高，足以形成暗物质晕的区域 ( $\delta_{\text{cr}} = 1.868$ )，而特定质量阈值

(threshold) 的暗物质晕的丰度会受到原初非高斯性的影响，在暗物质晕或星系功率谱上表现为尺度依赖的偏袒 (bias)<sup>[22]</sup>。

## 参考文献

- [1] Guth A H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems [J/OL]. *Physical Review D*, 1981, 23(2): 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [2] Planck Collaboration, Aghanim N, Akrami Y, et al. *Planck* 2018 results: VI. Cosmological parameters[J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, 641: A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [3] Meerburg P D, Green D, Abidi M, et al. Primordial Non-Gaussianity: arXiv:1903.04409[M]. arXiv, 2019.
- [4] Arkani-Hamed N, Maldacena J. Cosmological collider physics[Z]. 2015.
- [5] Planck Collaboration, Akrami Y, Arroja F, et al. *Planck* 2018 results: IX. Constraints on primordial non-Gaussianity[J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, 641: A9. DOI: 10.1051/0004-6361/201935891.
- [6] Chaussidon E, Yèche C, de Mattia A, et al. Constraining primordial non-Gaussianity with DESI 2024 LRG and QSO samples: arXiv:2411.17623[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.17623.
- [7] Achúcarro A, Biagetti M, Braglia M, et al. Inflation: Theory and Observations: arXiv:2203.08128[M/OL]. arXiv, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2203.08128.
- [8] Zhao C, Huang S, He M, et al. MUltiplexed Survey Telescope: Perspectives for Large-Scale Structure Cosmology in the Era of Stage-V Spectroscopic Survey: arXiv:2411.07970[M/OL]. arXiv, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.07970.
- [9] Sohn W, Wang D G, Fergusson J R, et al. Searching for Cosmological Collider in the Planck CMB Data: arXiv:2404.07203[M]. arXiv, 2024.
- [10] Cabass G, Philcox O H E, Ivanov M M, et al. BOSS Constraints on Massive Particles during Inflation: The Cosmological Collider in Action: arXiv:2404.01894[M]. arXiv, 2024.
- [11] Green D, Guo Y, Han J, et al. Light Fields during Inflation from BOSS and Future Galaxy Surveys[J/OL]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2024, 2024(05): 090. DOI: 10.1088/1475-7516/2024/05/090.
- [12] Barreira A, Krause E. Towards optimal and robust  $f_{\rm NL}$  constraints with multi-tracer analyses: arXiv:2302.09066[M/OL]. arXiv, 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2302.09066.
- [13] Sullivan J M, Prijon T, Seljak U. Learning to Concentrate: Multi-tracer Forecasts on Local Primordial Non-Gaussianity with Machine-Learned Bias[J/OL]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2023, 2023(08): 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2023/08/004.
- [14] Coulton W R, Villaescusa-Navarro F, Jamieson D, et al. Quijote-PNG: Simulations of primordial non-Gaussianity and the information content of the matter field power spectrum and bispectrum: arXiv:2206.01619[M/OL]. arXiv, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2206.01619.
- [15] Adame A G, Avila S, Gonzalez-Perez V, et al. PNG-UNITsims: Halo clustering response to primordial non-Gaussianities as a function of mass: arXiv:2312.12405[M]. arXiv, 2024.

- 
- [16] Hadzhiyska B, Garrison L, Eisenstein D J, et al. AbacusPNG: A modest set of simulations of local-type primordial non-Gaussianity in the DESI era: arXiv:2402.10881[M]. arXiv, 2024.
  - [17] Scoccimarro R, Hui L, Manera M, et al. Large-scale Bias and Efficient Generation of Initial Conditions for Non-Local Primordial Non-Gaussianity[J/OL]. Physical Review D, 2012, 85(8): 083002. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.083002.
  - [18] Wagner C, Verde L, Boubekur L. N-body simulations with generic non-Gaussian initial conditions I: Power Spectrum and halo mass function[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010, 2010(10): 022-022. DOI: 10.1088/1475-7516/2010/10/022.
  - [19] Regan D M, Schmittfull M M, Shellard E P S, et al. Universal non-Gaussian initial conditions for N -body simulations[J/OL]. Physical Review D, 2012, 86(12): 123524. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.123524.
  - [20] Goldstein S, Philcox O H E, Hill J C, et al. Massive-ish Particles from Small-ish Scales: Non-Perturbative Techniques for Cosmological Collider Physics from Large-Scale Structure Surveys: arXiv:2407.08731[M]. arXiv, 2024.
  - [21] Feng Y, Chu M Y, Seljak U, et al. FastPM: A new scheme for fast simulations of dark matter and halos[J/OL]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2016, 463(3): 2273-2286. DOI: 10.1093/mnras/stw2123.
  - [22] Dalal N, Doré O, Huterer D, et al. Imprints of primordial non-Gaussianities on large-scale structure: Scale-dependent bias and abundance of virialized objects[J/OL]. Physical Review D, 2008, 77(12): 123514. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.123514.