IMU误差模型

2019年11月19日 15:24

误差可以分为：确定性误差、随机误差

确定性误差：

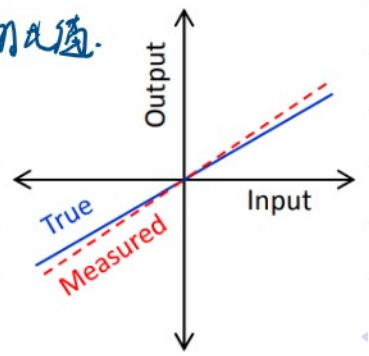
① Bias:

理论上，当没有外部作用时（自由落体运动），IMU传感器的输出应该为0，但是实际数据存在一个偏置b. 加速度计bias的积累会对结果产生影响.

$$v_{err} = b_a \cdot t \qquad p_{err} = \frac{1}{2} b_a \cdot t^2$$

② Scale.

Scale 可以看成是实际值和传感器输出值之间的比值.



③ Nonorthogonality / Misalignment Errors 非垂直误差/非对齐误差.

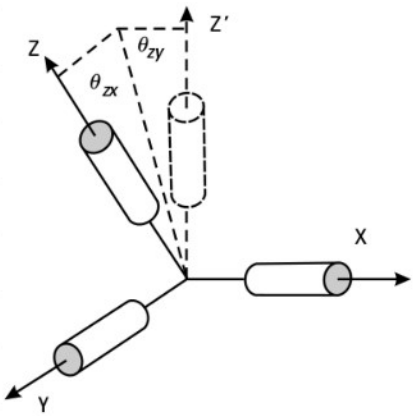
多轴IMU传感器制作时，由于制作工艺问题，会使得x,y,z不垂直.

⇒ scale + misalignment

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yz} & S_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

测量值 ↳ 实际值

$$\underline{l} = \underline{S} \cdot \underline{a}$$



其他确定性误差：

- Run-to-Run Bias/Scale
- in-Run (Stability) Bias/Scale.

- Temperature-Dependent Bias/Scale. ⇒ 体现和温度有关. 所以很UAV都有温度补偿的电路.

temperature dependent bias / scale.

确定性误差的标定

与角运动无关的加速度 bias 和 scale factor.

将加速度计的3个轴分别朝上 / 朝下 水平放置一段时间，采集6个面的数据。

当与了轴正交.

$$\Rightarrow \quad b = \frac{l_g^{up} + l_g^{down}}{2} \qquad l = s \cdot g + bias$$

$$s = \frac{l_g^{up} - l_g^{down}}{2 \cdot g}$$

若与各轴间误差，则将加速度与测量值之间的关系为:

$$\vec{l} = \vec{s} \cdot \vec{a} + \vec{b}$$

水平静置6面时，加速度的理论值为:

$$a_1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots$$

对应的观测值为 l

$\Rightarrow$ 利用最小二乘即可.

与角运动有关的陀螺仪

每次开机角速度都会提供，这里的6面是指顺/逆时针旋转.

温度相关的参数标定:

标定方法

- 目的：这个标定的主要目的是对传感器估计的 bias 和 scale 进行温度补偿，获取不同温度时 bias 和 scale 的值，绘制成曲线。

两种标定方法：

- soak method：控制恒温室的温度值，然后读取传感器数值进行标定。
- ramp method：记录一段时间内线性升温和降温时传感器的数据来进行标定。

随机误差

$$a = \hat{a} + n_a + b_a$$

$$\dot{b}_a = n_{b_a}$$

噪声所用噪声:

IMU数据连续时间上受到一个均值为0，方差为σ，各时刻之间相互独立的噪声过程 $n(t)$:

$$E[n(t)] = 0$$

$$E[n(t_1) n(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

δ → 狄拉克函数.

实际上，IMU传感器状取用数据为离散采样，离散采样会引入噪声的方差

→ 微积分函数.

实际上，IMU传感器获取角度数据为离散采样，离散和连续角速度的方差之间存在如下转换关系：

$$n_d[k] \triangleq n(t_0+\Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)\,dt. \qquad N(0,\sigma^2)$$

$$S^2 = E[(x-E(x))(x-E(x))]$$

$$\Rightarrow E([n_d[k]]^2) = E\left(\frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)n(\tau)\,d\tau\,dt\right)$$

$$= E\left(\frac{\sigma^2}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau)\,d\tau\,dt\right)$$

$$= E\left(\frac{\sigma^2}{\Delta t}\right)$$

即：

$$n_d[k] = \sigma_d W[k]$$

$$W_k \sim N(0,1)$$

$$\sigma_d = \sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$$

→ 为什么采样间隔越大，白噪方差越小

→ 间隔越大，高斯过程的噪声相互独立了

Bias随机游走：

通常用维纳过程（Wiener Process）来建模bias随时间变化的过程，常数时间下特定内随机游走：

$$\dot{b}(t) = n(t) = \sigma_b\cdot W(t)$$

离散和连续之间的转换：

$$b_d[k] \triangleq b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)\,dt,$$

$$E([b_d[k]-b_d[k-1]]^2) = E\left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)n(\tau)\,d\tau\,dt\right)$$

$$= E(\sigma_b^2\Delta t)$$

即：

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bd}W[k]$$

其中：

$$W[k] \sim N(0,1)$$

$$\sigma_{bd} = \sigma_b\cdot\sqrt{\Delta t}$$

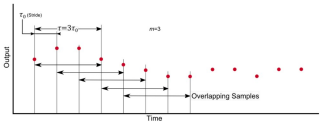
IMU随机误差的特定.

艾伦方差标定 random walk noise

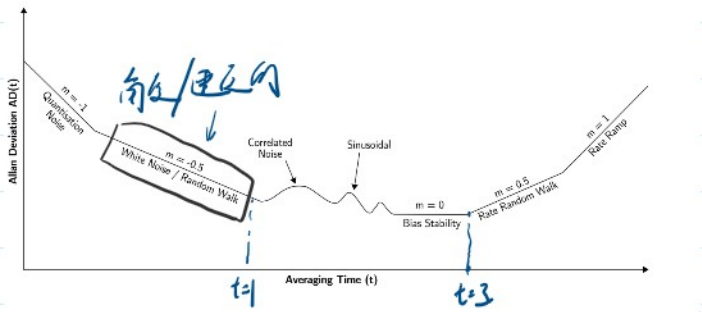
Allan 方差法是 20 世纪 60 年代由美国国家标准局的 David Allan 提出的，它是一种基于时域的分析方法。

具体的流程如下：

1. 保持传感器绝对静止获取数据。
2. 对数据进行分段，设定时间段的时长，如下图所示。



3. 将传感器数据按照时间段进行平均。
4. 计算方差，绘制艾伦曲线。



加速度计数学模型.

→ 加速度计测量误差模型.

导航系G为东北天，$g^G = [0, 0, -9.81]^T$. 理论测量值为:

$$a_m^B = R_{BG}(a^G - g^G) \quad (16)$$

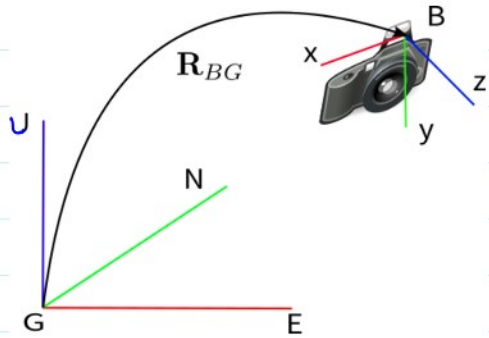
如果考虑高斯白噪声, bias 以及尺度因子, 则为:

$$a_m^B = S_a R_{BG}(a^G - g^G) + n_a + b_a \quad (17)$$

通常假设尺度因子为单位矩阵.

$$n_a \sim N(0, \sigma_a^2)$$

$$\dot{b}_a \sim N(0, \sigma_b^2)$$



陀螺仪数学模型

→ 陀螺仪测量误差模型

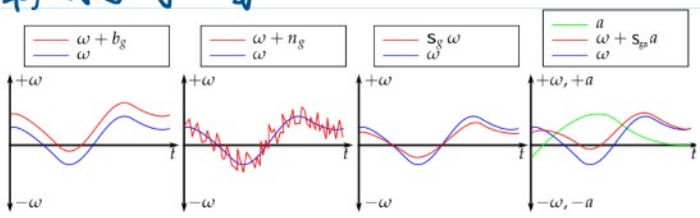
考虑尺度因子, 高斯白噪声, 以及 bias. 陀螺仪测量误差模型如下:

$$\omega_m^B = S_g \omega^B + n_g + b_g$$

低端传感器, 考虑加速度对陀螺仪的影响, 即 g-敏感度:

$$\omega_m^B = S_g \omega^B + S_{ga} \cdot a^B + n_g + b_g$$

四种噪声的影响如图:



bias　　白噪.　　Scale.　　g-敏感度.

忽略 scale 的影响, 只考虑白噪声和随机游走:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_b = \omega^b + b^g + n^g & (20) \\ \tilde{a}_b = q_{bw}(q^w + q^w) + b^a + n^a & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_b = \omega^b + b^g + n^g & (20) \\ \tilde{a}^b = q_{bw}(a^w + g^w) + b^a + n^a & (21) \end{cases}$$

上标 g 表示 gyro，a 表示 acc，w 表示在世界坐标系 world 下，b 表示 imu 机体坐标系 body。IMU 的真实值为 ω, a，测量值为 $\tilde{\omega}, \tilde{a}$。

Pose, Velocity, Quaternion 对时间的导数可写成：

$$\dot{P}_{wb_t} = V_t^w$$

$$\dot{V}_t^w = a_t^w$$

$$\dot{q}_{wb_t} = q_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega^{b_t} \end{bmatrix}$$

这是纯虚数的四元数

虚部是反对称矩阵

根据上面的导数关系，可以从第 i 时刻的 PVQ，通过 IMU 的测量数据积分，得到第 j 时刻的 PVQ：

$$P_{wb_j} = P_{wb_i} + V_i^w \Delta t + \iint_{t\in[i,j]} (q_{wb_t} a^{b_t} - g^w)\, \delta t^2$$

$$V_j^w = V_i^w + \int_{t\in[i,j]} (q_{wb_t} a^{b_t} - g^w)\, \delta t$$

$$q_{wb_j} = \int_{t\in[i,j]} q_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega^{b_t} \end{bmatrix} \delta t$$

运动模型的离散积分 — $\boxed{\text{欧拉法}}$

k 到 k+1 的位姿是用第 k 时刻的测量值 a, ω 来计算。

$$P_{wb_{k+1}} = P_{wb_k} + V_k^w \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$V_{k+1}^w = V_k^w + a\Delta t$$

$$q_{wb_{k+1}} = q_k + q_k \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega_k^{b_t} \end{bmatrix} \cdot \delta t$$

$$= \underbrace{q_k \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{单位四元数}} + q_k \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega_k^{b_t} \end{bmatrix} \cdot \delta t$$

$$= q_k \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega \delta t \end{bmatrix}$$

其中：
$$\boxed{\begin{aligned} a &= q_{wb_k}(a^{b_k} - b_k^a) - g^w \\ \omega &= \omega^{b_k} - b_k^g \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{中值法}}$：

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left[q_{wb_k}(a^{b_k} - b_k^a) - g^w + q_{wb_{k+1}}(a^{b_{k+1}} - b_k^a) - g^w\right] \\ \omega &= \frac{1}{2}\left[(\omega^{b_k} - b_k^g) + (\omega^{b_{k+1}} - b_k^g)\right] \end{aligned}}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[\left(w^{bx} - b_x^2\right) + \left(w^{bx+1} - b_x^2\right)\right]$$