Ex1. D'après la PC 2 EXO 1 : $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (T^T T)^{-1} T^T X$

où $T = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n t_i^2 & -\sum_{i=1}^n t_i \\ -\sum_{i=1}^n t_i & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \left(X_j \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 - t_j \sum_{i=1}^n t_i\right)\right) \\ \sum_{j=1}^n \left(X_j \left(-\sum_{i=1}^n t_i + n t_j\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(X_j (n t_j - n\bar{t})\right)\right)$$

avec $\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 + n\bar{t}^2 - 2\sum_{i=1}^n t_i \bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i^2 + \bar{t}^2 - 2t_i\bar{t} = \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$

et $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(X_j (n t_j - n\bar{t})\right) = \sum_{i=1}^n \left(X_i (t_i - \bar{t})\right)$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i (t_i - \bar{t})\right)}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\bar{X} - \hat{\beta}_2 \bar{t} = \frac{n\bar{X} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 - n\bar{t} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) X_i}{n \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

avec $n\bar{X} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 - n\bar{t} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) X_i = \sum_{j=1}^n X_j \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 - \sum_{j=1}^n X_j (t_j - \bar{t}) \bar{t} n$

$= \sum_{j=1}^n X_j \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 + \bar{t}^2 - 2\bar{t} t_i - t_j \bar{t} + \bar{t}^2\right) = \sum_{j=1}^n X_j \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 + 2n\bar{t}^2 - 2\bar{t}\sum_{i=1}^n t_i - n t_j \bar{t}\right)$

$= \sum_{j=1}^n X_j \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 - t_j \sum_{i=1}^n t_i\right)$

$\Rightarrow \bar{X} - \hat{\beta}_2 \bar{t} = \hat{\beta}_1$

EX5. On sait que

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \end{pmatrix} \underset{P_G}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2} \begin{pmatrix} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2}{n} & -\bar{t} \\ -\bar{t} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{noté comme } C} \right)$$

et notons que

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} \cdot t_i \\ \widehat{\beta_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{noté comme } A} \begin{pmatrix} \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \in [\![1, \cdots n]\!]$$

Alors $\widetilde{X_i} = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} t_i \overset{P_\theta}{\sim} N(\beta_1 + t_i \beta_2, \sigma'^2)$

où

$$\sigma'^2 = (A \cdot C \cdot A^T) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k^2}{n} - 2\bar{t} \cdot t_i + t_i^2 \right) \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2}$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2 + (\bar{t} - t_i)^2 \right) \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2}$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{t} - t_i)^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2} \right) \sigma^2$$

Notons que $k_i^2 = \dfrac{(\bar{t} - t_i)^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2}$

D'après le résultat de PC2

$(\widehat{\beta_1}, \widehat{\beta_2})$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendents, alors $\widehat{X_i} = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} t_i$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendents

alors $\dfrac{\widehat{X_i} - (\beta_1 + \beta_2 t_i)}{k_i \sigma} \overset{P_\theta}{\sim} N(0,1)$ et $\dfrac{n-2}{\sigma^2} \widehat{\sigma}^2 \overset{P_\theta}{\sim} \chi^2(n-2)$

de plus, ils sont indépendents.

Alors.
$$\frac{\widehat{X_i} - (\beta_1 + \beta_2 t_i)}{k_i \hat{\sigma}} = \frac{\frac{\widehat{X_i} - (\beta_1 + \beta_2 t_i)}{k_i \sigma}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} \overset{\mathbb{P}_\theta}{\sim} T(n-2)$$

Notons que $t_{1-\alpha}^{n-2}$ la quantile d'ordre α de la loi de student, comme $t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-2} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2}$

On a $\mathbb{P}_\theta \left(\frac{\widehat{X_i} - (\beta_1 + \beta_2 t_i)}{k_i \hat{\sigma}} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2}, t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2} \right] \right) = 1 - \alpha$

Alors $\left[\widehat{X_i} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2} k_i \hat{\sigma} \right]$ est un intervalle de confiance de couverture α pour $\beta_1 + \beta_2 t_i$

Ex 6

On construit naturellement un test $\phi_{\beta_2}(z) : z \to \mathbb{1}_{\beta_2 \notin I_{\beta_2}(z)}$

où $I_{\beta_2}(z)$ est l'intervalle de confiance de β_2

alors $R_\alpha = \{ z \in \mathbb{R}^n , \beta_2 \notin I_{\beta_2}(z) \}$

et pour tout $0 < \alpha < \alpha' \leq 1$,

Comme $t^{n-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} > t^{n-2}_{1-\frac{\alpha'}{2}}$, alors $R_\alpha < R_{\alpha'}$

donc la p valeur de l'observation $\{x_1 , \dots x_n\}$ est

$$\hat{\alpha}(x_1, \dots x_n) = \inf \{ \alpha \in [0,1] , 0 \notin [\hat{\beta}_2 \pm \hat{\sigma}_2 \, t^{n-2}_{1-\frac{\alpha}{2}}] \}$$

$$\Rightarrow \quad |\hat{\beta}_2| = \hat{\sigma}_2 \cdot t^{n-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow T\left(\frac{|\hat{\beta}_2|}{\hat{\sigma}_2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

où T est la fonction de repartition de loi de student à degrés $(n-2)$. Alors $\hat{\alpha} = 2(1 - T(\frac{|\hat{\beta}_2|}{\hat{\sigma}_2}))$