WS19/20, PAP2.1, Versuch 213: Gekoppeltes Pendel

Praktikanten:

Gerasimov, V. & Reiter, L.

Betreuer:

Jäschke, C.

Versuchsdurchführung:
17. Dezember, 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung[1]

In diesem Versuch wollen wir uns mit den grundlegenden physikalischen Eigenschaften von Gekoppelte Oszillatoren befassen. Gekoppelte Oszillatoren finden sich in den verschiedensten Gebieten der Physik und anderer Naturwissenschaften wieder.

Zum Beispiel in der Festkörperphysik. Bei einem Kristall sind im Prinzip alle Atome über elektrische Wechselwirkungen miteinander gekoppelt, sodass der Kristall zu Schwingungen angeregt werden kann. Zur mathematischen Beschreibung stellt man sich den Kristall aus regelmäßig angeordneten Massenpunkten vor, die mit ihren nächsten Nachbarn durch Federn gekoppelt sind. Die Auswertung dieses Systems führt zu quantisierten Gitterschwingungen, sogenannte Phononen.

Dafür schauen wir uns 3 Spezialfälle der Schwingungen von einem Gegengekoppeltem Pendelpaar an:

- Die Symmetrische Schwingung
- Die Asymmetrische Schwingung
- Die Schwebungschwingung

2 Versuchsaufbau[1], Literaturwerte & Vorbereitung

- zwei Pendel aus Messing (Dichte: $\boldsymbol{\rho = 7.5\ g\ cm^3}$)
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- fest montierter magnetischer Winkelaufnehmer
- Analog-Digital Wandler
- Literaturwert[2] für die Endbeschleunigung in Heidelberg: $\boldsymbol{g = 9.80984(2)\ m\ s^{-2}}$)

[1] Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 Stand 1/2018, Versuch 211
[2] Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.2 Stand 06/2016, Versuch 14

3 Durchführung

Zuerst werden drei verschieden starken Kopplungen sind die Frequenzen der symmetrischen und der antisymmetrischen Eigenschwingungen von zwei gekoppelten, gleichartigen Messingpendeln zu bestimmen. Die Pendel sind über Hall-Sensoren an einen Compuer angeschlossen. Die Signalverläufe speichern wir ab und analysieren sie über eine Fourier-Transformation vor Ort und noch einmal zuhause (siehe Python Signalverarbeitung).
Danach regen wir beide Eigenschwingungen gleichzeitig an, indem WIR das eine Pendel in der Ruhelage festhalten und erst freigeben, nachdem Sie das andere Pendel bei der Maximalauslenkung losgelassen haben.

Zusätzlich zu den gekoppelten Pendeln ist noch ein zweiter ein Aufbau vorhanden, an dem Sie die Kopplung zweier elektrischer Schwingkreise mit Hilfe eines Oszilloskops beobachten können. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Die Kopplungsstärke können Sie durch variieren des Abstands zwischen den Spulen einstellen.

4 Messergebnisse

Messdaten wurden dem Versuchsprotokoll (17.Dezemberr, 2019) entnommen und in die Tabellen 1, 2 und 3 übertragen. Nummerierung der Kopplungen nach der Länge$l$ von der Pendelachse zum Aufhängungspunkt der Feder aufsteigend umsortiert.

Beobachtungen, die am elektrischen Schwinkreis vorgenommen wurden, stehen im Messprotokoll.

5 Signalverarbeitung mit Python

Der Python Code des und bereitstehenden Programms zur Signalverarbeitung wurde hier übernommen und nachträglich alle Messwerte zu bestätigen:

5.1 Source Code & Input

Header:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import norm
import peakutils
from decimal import Decimal

def format_e(n):
    a = '%e' % Decimal(n)
    return a.split('e')[0].rstrip('0').rstrip('.')+'e'+a.split('e')[1]

def format_plt(n):
    a = '%e' % Decimal(n)
    return r'${'+a.split('e')[0].rstrip('0').rstrip('.')+'}$'+r'${*10^{'+a.split('e')[1]+'}}$'

def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode('utf-8').replace(',','.'))
```

Normalverteilung und Summe von zwei Normalverteilungen werden als Funktionen deklariert:

```
def gaussian1(x, y, mu, sig):
    return norm.pdf(x, mu, sig)*y

def gaussian2(x, y1, mu1, sig1, y2, mu2, sig2):
    return norm.pdf(x, mu1,sig1)*y1+norm.pdf(x, mu2,sig2)*y2

def fit_gaussian(i, j):
    if j%4 >= 2:
        if j%4 == 2:
            amplitude = amplitude_1
            freq_halb = freq_halb_1
        if j%4 == 3:
            amplitude = amplitude_2
            freq_halb = freq_halb_2
```


Tabelle 1: Messung der Eigenschwingung ohne Koppelfeder

Pendel Nr.	Frequenz f [Hz]
1	**0.613 ± 0.003**
2	**0.613 ± 0.003**

[1] Δf folgt aus der Halbwertsbreite der Peaks in der Spektralfunktion. (siehe Python Auswertung)

Tabelle 2: Messung des symmetrischen & asymmetrischen Eigenschwingung

Kopplung Nr.	Befestigungsloch Nr. (von oben)	Pendel Nr.	Frequenz f_{sym} [Hz]	Frequenz f_{asym} [Hz]	Länge l [cm]
1	**1**	**1**	**0.615 ± 0.003**	**0.632 ± 0.005**	**15.0 ± 0.2**
		2	**0.615 ± 0.003**	**0.633 ± 0.005**	
2	**2**	**1**	**0.615 ± 0.003**	**0.663 ± 0.005**	**25.0 ± 0.2**
		2	**0.615 ± 0.003**	**0.663 ± 0.005**	
3	**3**	**1**	**0.616 ± 0.009**	**0.733 ± 0.006**	**40.0 ± 0.2**
		2	**0.616 ± 0.009**	**0.733 ± 0.006**	

[1] Δf_{sym} und Δf_{asym} folgen aus der Halbwertsbreite der Peaks in der Spektralfunktion. (siehe Python Signalverarbeitung)

Tabelle 3: Messung der Schwebungsschwingung

Kopplung Nr.	Pendel in Ruhelage am Start Nr.	Pendel Nr.	Frequenz f_1 [Hz]	Frequenz f_2 [Hz]
1	**2**	**1**	**0.615 ± 0.004**	**0.633 ± 0.004**
		2	**0.615 ± 0.004**	**0.632 ± 0.004**
2	**1**	**1**	**0.615 ± 0.004**	**0.663 ± 0.004**
		2	**0.615 ± 0.004**	**0.663 ± 0.004**
3	**1**	**1**	**0.615 ± 0.005**	**0.733 ± 0.006**
		2	**0.615 ± 0.005**	**0.732 ± 0.006**

[1] Δf_1 und Δf_2 folgen aus der Halbwertsbreite der Peaks in der Spektralfunktion. (siehe Python Auswertung)

Suche Peaks für die Fitparameter:

```
        indexes = peakutils.indexes(amplitude[i])
        init_vals = [0.0002,freq_halb[i][indexes[0]], 0.005]
```

Anpassung der Fitfunktion:

```
        fitParams, fitCovariances = curve_fit(gaussian1, freq_halb[i], amplitude[i])

        plt.figure(2)
        plt.plot(freq_halb[i][indexes], amplitude[i][indexes],marker='*', linewidth=0)
        plt.plot(np.linspace(0.2,1.2,1000),gaussian1(np.linspace(0.2,1.2,1000),*fitParams),  lw=1,
            color='C0',
                    label=r'$\mu = $'+format_plt(fitParams[1])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma = $'+format_plt(fitParams[2])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM = $'+format_plt(fitParams[2]*2.355)+' Hz')
        fig
        ax[i, j%4].plot(freq_halb[i][indexes], amplitude[i][indexes],marker='*', linewidth=0)
        ax[i, j%4].plot(np.linspace(0.2,1.2,1000),gaussian1(np.linspace(0.2,1.2,1000),*fitParams),
            lw=1, color='C0',
                    label=r'$\mu = $'+format_plt(fitParams[1])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma = $'+format_plt(fitParams[2])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM = $'+format_plt(fitParams[2]*2.355)+' Hz')

def fit_2gaussian(i, j):
    if j%4 >= 2:
        if j%4 == 2:
            amplitude = amplitude_1
            freq_halb = freq_halb_1
        if j%4 == 3:
            amplitude = amplitude_2
            freq_halb = freq_halb_2
```

Suche Peaks für die Fitparameter:

```
        indexes = peakutils.indexes(amplitude[i])
        init_vals = [0.0002,freq_halb[i][indexes[0]], 0.005,0.0002, freq_halb[i][indexes[1]], 0.005]
```

Anpassung der Fitfunktion:

```
        fitParams, fitCovariances = curve_fit(gaussian2, freq_halb[i], amplitude[i],p0=init_vals)

        plt.figure(2)
        plt.plot(freq_halb[i][indexes], amplitude[i][indexes],marker='*', linewidth=0)
```



```
        plt.plot(np.linspace(0.2,1.2,1000),gaussian2(np.linspace(0.2,1.2,1000),*fitParams), lw=1,
            color='C0',
                    label=r'$\mu = $'+format_plt(fitParams[1])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma = $'+format_plt(fitParams[2])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM = $'+format_plt(fitParams[2]*2.355)+' Hz\n'
                    +r'$\mu_1 = $'+format_plt(fitParams[4])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma_2 = $'+format_plt(fitParams[5])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM_2 = $'+format_plt(fitParams[5]*2.355)+' Hz')
        fig
        ax[i, j%4].plot(freq_halb[i][indexes], amplitude[i][indexes],marker='*', linewidth=0)
        ax[i, j%4].plot(np.linspace(0.2,1.2,1000),gaussian2(np.linspace(0.2,1.2,1000),*fitParams),
            lw=1, color='C0',
                    label=r'$\mu = $'+format_plt(fitParams[1])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma = $'+format_plt(fitParams[2])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM = $'+format_plt(fitParams[2]*2.355)+' Hz\n'
                    +r'$\mu_1 = $'+format_plt(fitParams[4])+' Hz\n'
                    +r'$\sigma_2 = $'+format_plt(fitParams[5])+' Hz\n'
                    +r'$FWHM_2 = $'+format_plt(fitParams[5]*2.355)+' Hz')
```

Datenarrays werden deklariert :

```
t = []
p1 = []
p2 = []
name = []
freq_halb_1 = []
freq_halb_2 = []
amplitude_1 = []
amplitude_2 = []
```

Beginn der Schleife für jede der 10 Messreihen:

```
i = 0
while i < 10:
```

Messdaten werden aus Dateien eingelesen :

```
    t_temp, p1_temp, p2_temp = np.loadtxt('data\Messung'+str(i+1)+'.txt',skiprows=1,usecols=(0, 1,
        2),
                                converters={0:comma_to_float,1:comma_to_float, 2:comma_to_float
                                    },unpack=True)
```

Name der Messung wird aus Dateien eingelesen :

```
    name_temp = open('data\Messung'+str(i+1)+'.txt', 'r').readline()

    name.append(name_temp.split('\n')[0])
    t.append(t_temp)
    p1.append(p1_temp)
    p2.append(p2_temp)

    dt=[]
    for j in range(len(t[i])-1):
        dt.append(t[i][j+1]-t[i][j])
    timestep=np.mean(dt)
```

Zero Padding wird durchgeführt:

```
    spektrum_1 = np.fft.fft(np.concatenate((p1_temp, np.zeros(2*len(p1_temp)))))
    spektrum_2 = np.fft.fft(np.concatenate((p2_temp, np.zeros(2*len(p2_temp)))))
```

Fouriertransformation :

```

    freq_1 = np.fft.fftfreq(spektrum_1.size, timestep)
    freq_2 = np.fft.fftfreq(spektrum_2.size, timestep)

    n_1=spektrum_1.size
    n_2=spektrum_2.size

    n_halb_1 = np.ceil(n_1/2.0)
    n_halb_2 = np.ceil(n_2/2.0)
    spektrum_halb_1 = (2.0 / int(n_1)) * spektrum_1[0:int(n_halb_1)]
    spektrum_halb_2 = (2.0 / int(n_2)) * spektrum_2[0:int(n_halb_2)]
    freq_halb_1_temp = freq_1[0:int(n_halb_1)]
    freq_halb_2_temp = freq_2[0:int(n_halb_2)]
    amplitude_1_temp=np.abs(spektrum_halb_1)
```

```
    amplitude_2_temp=np.abs(spektrum_halb_2)

    freq_halb_1.append(freq_halb_1_temp)
    freq_halb_2.append(freq_halb_2_temp)
    amplitude_1.append(amplitude_1_temp)
    amplitude_2.append(amplitude_2_temp)

    i = i+1
```

Diagramme (Abb.1 - 40) werden erstellt:

```
fig, ax = plt.subplots(10, 4, num=1, figsize=[6.4*8, 4.8*15])
plt.figure(num=2, figsize=[6.4*2, 4.8*1.5])
i = 0
while i < 10:
    j = 0
    while j < 4:
        plt.figure(2).clf()
        if i == 0 or i%3 == 1 or i%3 == 2:
            fit_gaussian(i, j)
        else:
            fit_2gaussian(i, j)
        if j%4 == 0:
            name_temp = name[i]+', Pendel 1'
            plt.figure(2)
            plt.plot(t[i], p1[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            plt.xlabel('Zeit '+r'${t}$'+' '+r'${[s]}$')
            plt.ylabel('Winkel '+r'${{\phi_1}}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
            fig
            ax[i, j].plot(t[i], p1[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            ax[i, j].set_xlabel('Zeit '+r'${t}$'+' '+r'${[s]}$')
            ax[i, j].set_ylabel('Winkel '+r'${{\phi_1}}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
        elif j%4 == 1:
            name_temp = name[i]+', Pendel 2'
            plt.figure(2)
            plt.plot(t[i], p2[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            plt.xlabel('Zeit '+r'${t}$'+' '+r'${[s]}$')
            plt.ylabel('Winkel '+r'${{\phi_2}}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
            fig
            ax[i, j].plot(t[i], p2[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            ax[i, j].set_xlabel('Zeit '+r'${t}$'+' '+r'${[s]}$')
            ax[i, j].set_ylabel('Winkel '+r'${{\phi_2}}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
        elif j%4 == 2:
            name_temp = name[i]+', FT, Pendel 1'
            plt.figure(2)
            plt.plot(freq_halb_1[i], amplitude_1[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            plt.xlim([0.5,0.9])
            plt.xlabel('Frequenz '+r'${f}$'+' '+r'${[Hz]}$')
            plt.ylabel('Amplitude '+r'${A}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
            fig
            ax[i, j].plot(freq_halb_1[i], amplitude_1[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            ax[i, j].set_xlim([0.5,0.9])
            ax[i, j].set_xlabel('Frequenz '+r'${f}$'+' '+r'${[Hz]}$')
            ax[i, j].set_ylabel('Amplitude '+r'${A}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
        else:
            name_temp = name[i]+', FT, Pendel 2'
            plt.figure(2)
            plt.plot(freq_halb_2[i], amplitude_2[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            plt.xlim([0.5,0.9])
            plt.xlabel('Frequenz '+r'${f}$'+' '+r'${[Hz]}$')
            plt.ylabel('Amplitude '+r'${A}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
            fig
            ax[i, j].plot(freq_halb_2[i], amplitude_2[i], 'C3-', lw=1, label='Messdaten')
            ax[i, j].set_xlim([0.5,0.9])
            ax[i, j].set_xlabel('Frequenz '+r'${f}$'+' '+r'${[Hz]}$')
            ax[i, j].set_ylabel('Amplitude '+r'${A}$'+' '+r'${[a.u.]}$')
        ax[i, j].title.set_text('Abbildung '+str(i*4+j+1)+': '+name_temp)
        ax[i, j].legend(loc='best')
        plt.figure(2)
        plt.title('[Fig. 211.'+str(i*4+j+1)+'] '+name_temp)
        plt.legend(loc='best')
        plt.figure(2)
        plt.savefig('figures/211_Fig1-40/211_Fig'+str(i*4+j+1)+'.pdf', format='pdf', bbox_inches='
            tight')
        fig
        j = j+1
    i = i+1
```



```

plt.close(2)
fig.savefig('figures/211_Fig1-40.pdf', format='pdf', bbox_inches='tight')
```

5.2 Output

Abbildungen 1 bis 40, Stellen alle Messungen aus den Tabellen 1 bis 3 als normalen Signalverlauf und dessen Fourier-Transformation da. Die neu ermittelte Messwerte (dargestellt auf jeder Abbildung) stimmen alle mit denen aus den Tabellen überein.

6 Auswertung

Wir stellen folgende Tatsachen fest:

- Für jede Messung unterscheiden sich die gemessenen Frequenzen für Pendel 1 und Pendel 2 nicht signifikant. Die Differenz ist paarweise immer < 1 (sogar < 0.5) Sigma der entsprechenden Messwerte.
- Für jede Kopplung unterscheidet sich die gemessenen Frequenzen $\boldsymbol{f_1}$ und $\boldsymbol{f_{sym}}$ nicht signifikant. Die Differenz ist paarweise immer < 1 (sogar < 0.5) Sigma der entsprechenden Messwerte.
- Für jede Kopplung unterscheidet sich die gemessenen Frequenzen $\boldsymbol{f_2}$ und $\boldsymbol{f_{asym}}$ nicht signifikant. Die Differenz ist paarweise immer < 1 (sogar < 0.5) Sigma der entsprechenden Messwerte.

Die sich so entsprechenden Frequenzen sind nach unserem theoretischen Modell genau die gleichen Messgrößen.

$$\boldsymbol{f_1 = f_{sym}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f_2 = f_{asym}} \tag{2}$$

Deswegen mitteln wir jeweils diese 4 Werte. Die Mittelwerte ergeben sich nach:

$$\langle \boldsymbol{f_i} \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta\langle \boldsymbol{f_i} \rangle &= \sqrt{\mathrm{Var}(\boldsymbol{f_i})} = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta \boldsymbol{f_i})^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Aus diesen Zusammenhängen lässt sich jetzt eine neue Tabelle 4 erstellen. Sie fast alles wesentlichen Messgrößen aus den Tabellen 2 und 3 zusammen.

Aus Tabelle 1 können wir zusätzlich entnehmen, dass ein Pendel alleine als Mittelwert die Schwingfrequenz $\langle \boldsymbol{f} \rangle$

Tabelle 4: Mittelwerte der Schwingungsfrequenzen

Kopplung Nr.	Länge $\boldsymbol{l}$ [cm]	Mittelwert $\langle \boldsymbol{f_{sym}} \rangle$ [Hz]	Mittelwert $\langle \boldsymbol{f_{asym}} \rangle$ [Hz]
1	**15.0 ± 0.2**	**0.6150 ± 0.0018**	**0.6325 ± 0.0023**
2	**25.0 ± 0.2**	**0.6150 ± 0.0025**	**0.6630 ± 0.0023**
3	**40.0 ± 0.2**	**0.6155 ± 0.0036**	**0.7328 ± 0.0030**

besitzt.

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle = \boldsymbol{6.130(21) \times 10^{-1}\ Hz}$$

Im weiteren Verlauf der Auswertung werden wir diese Mittelwerte und ihre Fehler für die entsprechenden Frequenzen einsetzen. Jetzt können wir folgende Formeln benutzen:
Schwingungsfrequenz f_I:

$$f_I = \frac{1}{2}(f_{asym} + f_{sym}) \tag{5}$$

Fehler Δf_I:

$$\Delta f_I = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta f_{asym}^2 + \Delta f_{asym}^2} \tag{6}$$

Schwebungsfrequenz f_{II}:

$$f_{II} = \frac{1}{2}(f_{asym} - f_{sym}) \tag{7}$$

Fehler Δf_{II}:

$$\Delta f_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta f_{asym}^2 + \Delta f_{asym}^2} \tag{8}$$

Kopplungsgrad κ:

$$\kappa = \frac{f_{asym}^2 - f_{sym}^2}{f_{asym}^2 + f_{sym}^2} \tag{9}$$

Fehler $\Delta\kappa$:

$$\begin{aligned}
\Delta\kappa &= \Delta\left(\frac{f_{asym}^2 - f_{sym}^2}{f_{asym}^2 + f_{sym}^2}\right) \\
&= \Delta\left(1 - \frac{2f_{sym}^2}{f_{asym}^2 + f_{sym}^2}\right) \\
&= \Delta\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Delta\left(\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta\left(\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)}{1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)^{-2}\Delta\left(1 + \frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{sym}^2}{f_{asym}^2 + f_{sym}^2}\right)^2\Delta\left(\frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{sym}^2}{f_{asym}^2 + f_{sym}^2}\right)^2\left(\frac{f_{asym}^2}{f_{sym}^2}\right)\sqrt{2\left(\frac{\Delta f_{asym}}{f_{asym}}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta f_{sym}}{f_{sym}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_{asym}^2 f_{sym}^2}{\left(f_{asym}^2 + f_{sym}^2\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta f_{asym}}{f_{asym}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f_{sym}}{f_{sym}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Ergebnisse für f_I, f_{II} und κ sind in Tabelle 5 notiert.

Als nächstes betrachten wir die Verhältnisse η_{ij}:

$$\eta_{ij} = \frac{\kappa_i}{\kappa_j}\frac{l_j^2}{l_i^2} \tag{11}$$

Tabelle 5: Schwebungs- und Schwingfrequenzen für gekoppelte Pendel

Kopplung Nr.	Schwingfrequenz f_I [Hz]	Schwebungsfrequenz f_{II} [Hz]	Kopplungsgrad κ [1]
1	0.6238 ± 0.0015	0.0088 ± 0.0015	0.02805 ± 0.00082
2	0.6390 ± 0.0017	0.0240 ± 0.0017	0.07501 ± 0.00094
3	0.6742 ± 0.0023	0.0587 ± 0.0023	0.1727 ± 0.0012

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}\sqrt{\left(\frac{\Delta\kappa_i}{\kappa_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\kappa_j}{\kappa_j}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta l_i}{l_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta l_j}{l_j}\right)^2} \tag{12}$$

wobei i und j Indizes bestimmter Kopplungen sind, und κ_i, l_i für die entsprechenden Kopplungsgrade bzw. Längen von der Pendelachse zum Aufhängungspunkt der Feder sind. Ergebnisse für η_{ij} sind in Tabelle 6 notiert.
Idealerweise müssten alle $\eta_{ij} = 1$ erfüllen. Das ist jedoch nicht immer der Fall, da wir viele Fehlerquellen nicht noch beachtet haben. Die Sigma-Abweichungen von η_{ij} zur Eins sind in Tabelle 7 zu sehen.

Tabelle 6: Verhältnisse $\eta_{ij} = \frac{\kappa_i}{\kappa_j}\frac{l_j^2}{l_i^2}$

η_{ij}		i = 1	i = 2	i = 3
j	1	1	0.963 ± 0.039	0.866 ± 0.053
j	2	1.039 ± 0.042	1	0.899 ± 0.044
j	3	1.155 ± 0.071	1.112 ± 0.054	1

[1] Man beachte, dass $\eta_{ij} = \frac{1}{\eta_{ji}}$.

Tabelle 7: Abweichungen vom theoretischen Wert $\eta_{ij} = 1$

$\eta_{ij} - 1$		i = 1	i = 2	i = 3
j	1		$-0.9\,\sigma$	$-2.5\,\sigma$
j	2	$+0.9\,\sigma$		$-2.5\,\sigma$
j	3	$+2.2\,\sigma$	$+2.1\,\sigma$	

[1] $\sigma = \sigma_{ij} = \Delta\eta_{ij}$
[2] $\frac{\eta_{ij}-1}{\sigma_{ij}} \approx -\frac{eta_{ji}-1}{\sigma_{ji}}$ Gleichheit nur, wenn wir zuvor nie genähert oder gerundet hätten.

7 Fazit

Alle Ergebnisse der Rechnungen sind in den Tabellen 4 - 7 dargestellt. Die statistischen Fehler für diesen Versuch sind relativ klein (Tabelle 4). Nur ein Messwert hat eine Unsicherheit die größer als 1% ist ($\frac{\Delta l_1}{l_1} = 1.3\%$). Alle Abweichungen von unserem idealisiertem theoretischem Modell sind $\leq 2.5\sigma$ (Tabelle 7). Gründe für die Abweichungen dieser Ergebnisse könnten sein, dass die Feder ein zusätzliches Trägheitsmoment mit sich bringt und, dass das die Feder mit dem Hooke'schem Gesetz ohne Korrekturen nicht perfekt beschrieben werden kann. Reibung sollte in diesem Versuch eine sehr geringe Rolle gespielt haben, da über die von uns beobachteten Zeiträume fast keine Dämpfung der Amplitude bemerkbar war.

8 Abbildungen

Es folgen alle Abbildungen 1 - 40, mit deren Hilfe die Frequenzen und ihre Fehler bestimmt wurden. „FT“ in den Beschriftungen steht für Fourier-Transformation.

Abbildung 1: ohne Kopplung, Pendel 1

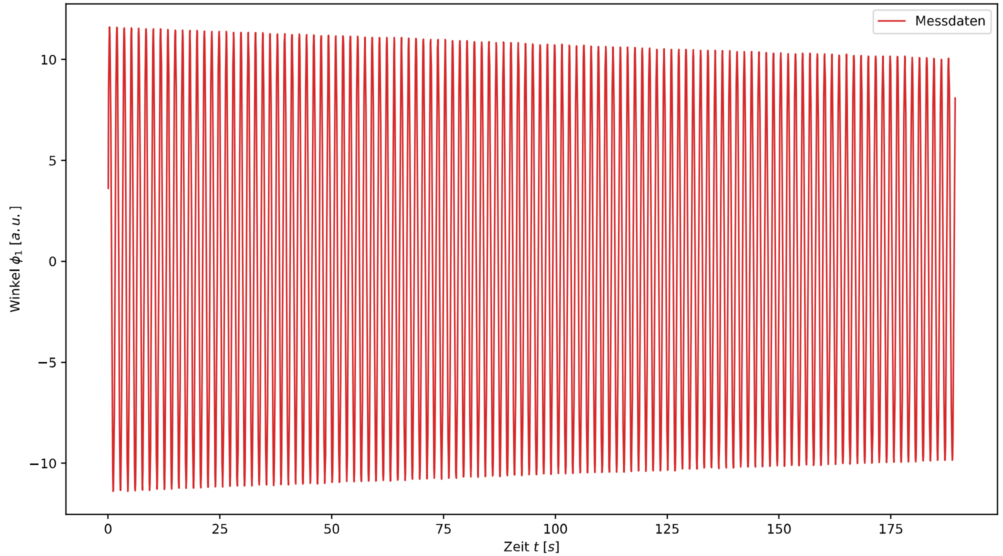


Abbildung 2: ohne Kopplung, Pendel 2

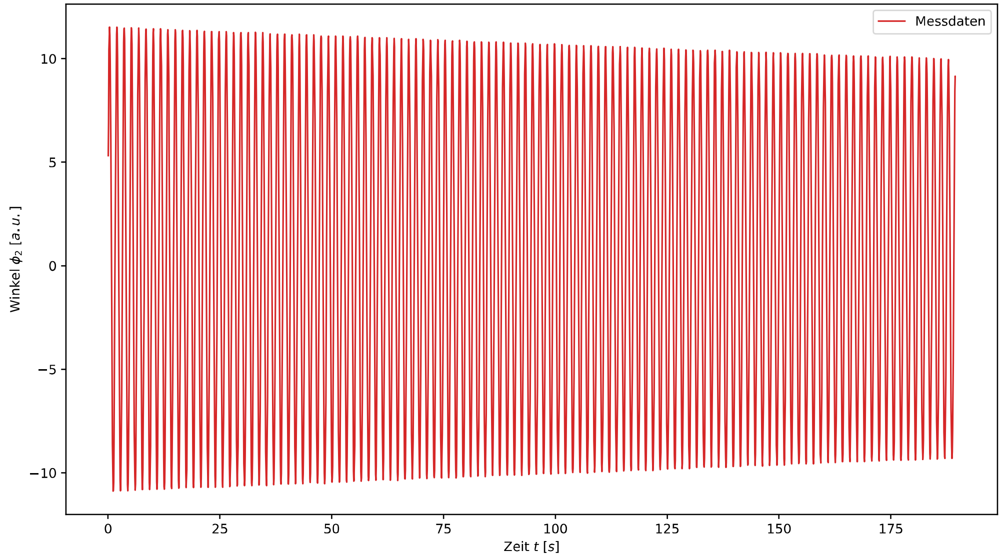


Abbildung 3: ohne Kopplung, FT, Pendel 1

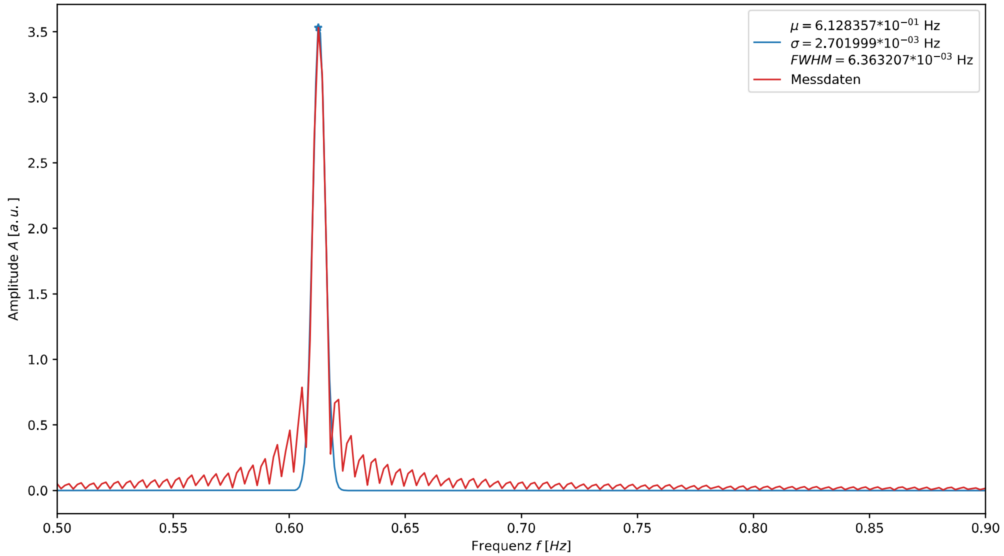


Abbildung 4: ohne Kopplung, FT, Pendel 2

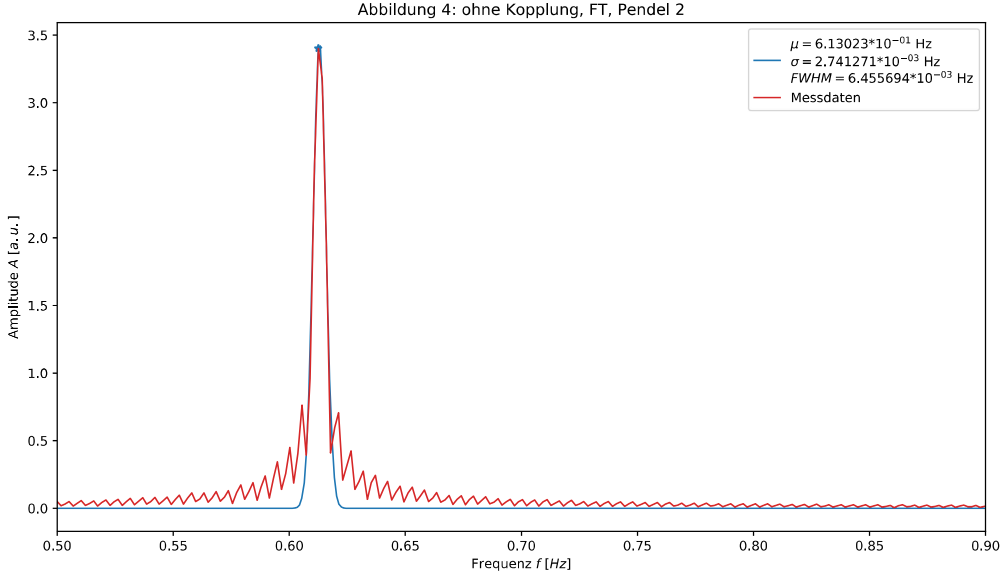


Abbildung 5: Kopplung Nr.1, symmetrisch, Pendel 1

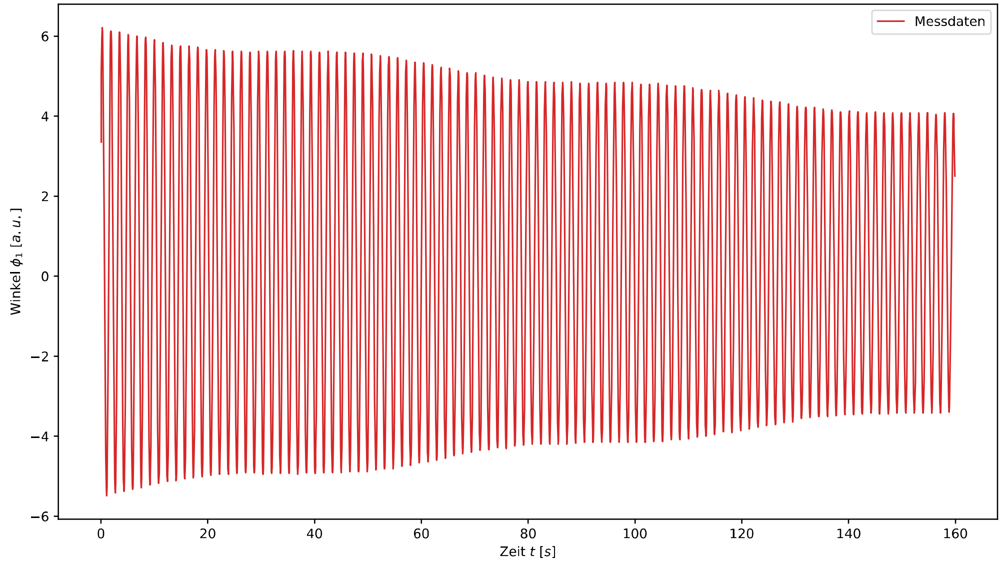


Abbildung 6: Kopplung Nr.1, symmetrisch, Pendel 2

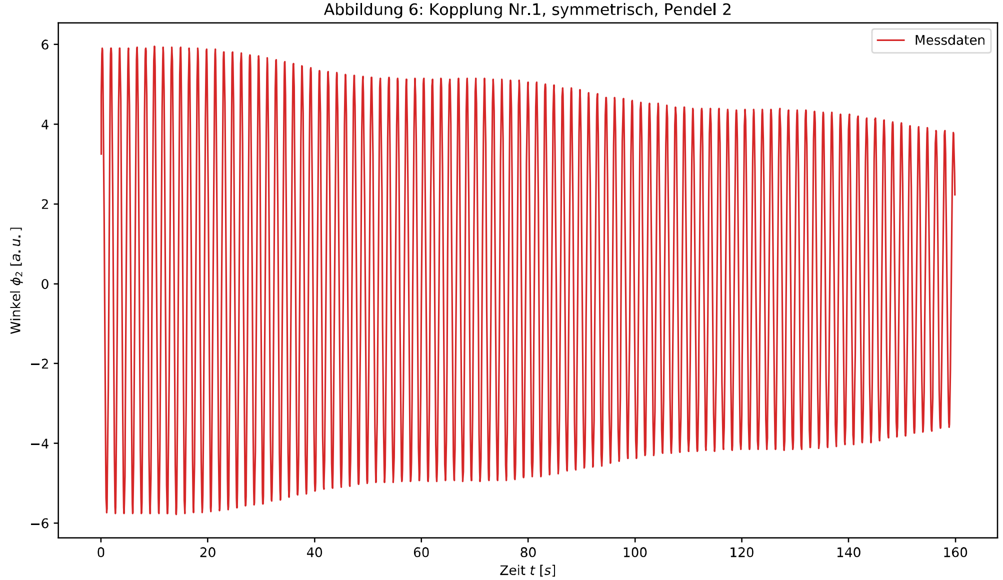


Abbildung 7: Kopplung Nr.1, symmetrisch, FT, Pendel 1

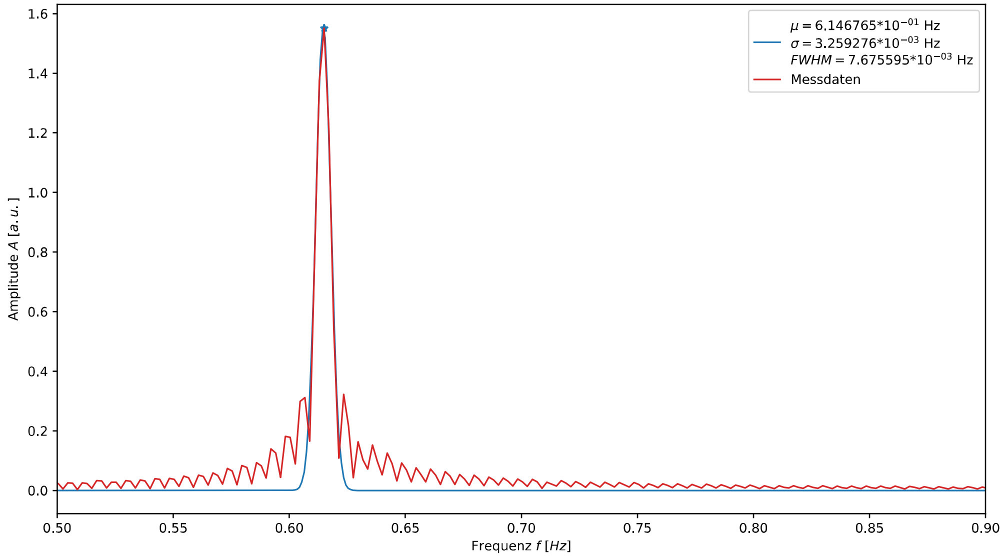


Abbildung 8: Kopplung Nr.1, symmetrisch, FT, Pendel 2

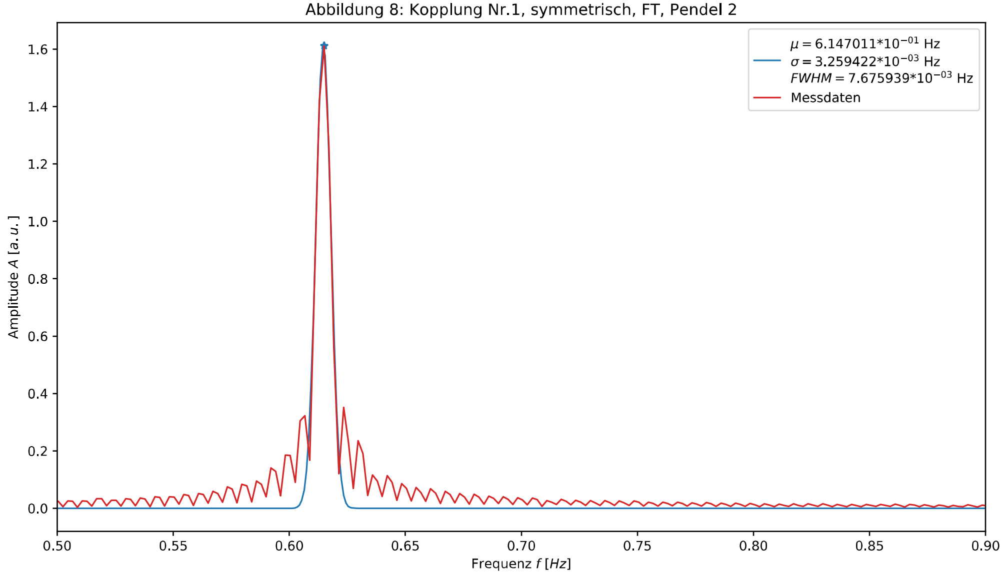


Abbildung 9: Kopplung Nr. 1, asymmetrisch, Pendel 1

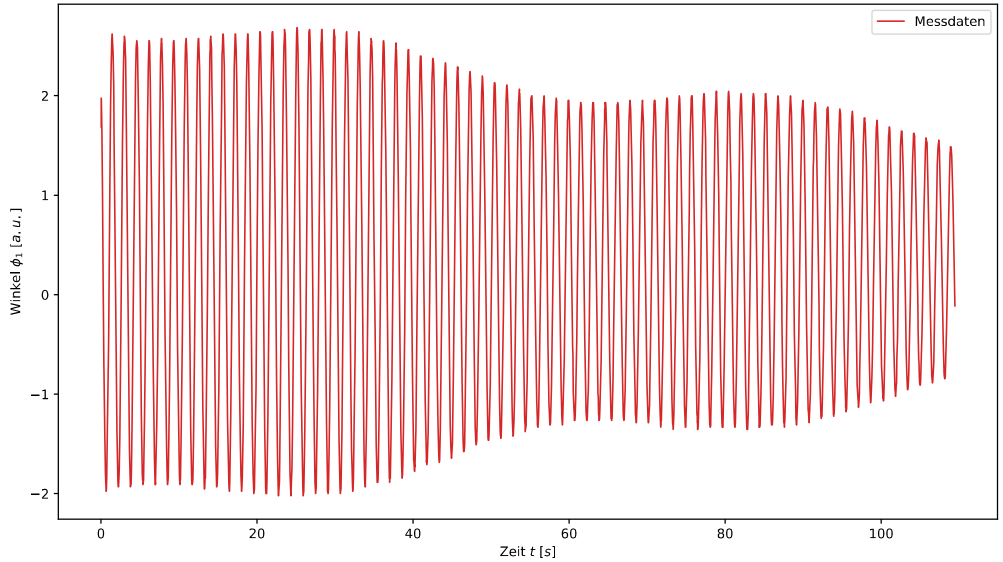


Abbildung 10: Kopplung Nr. 1, asymmetrisch, Pendel 2

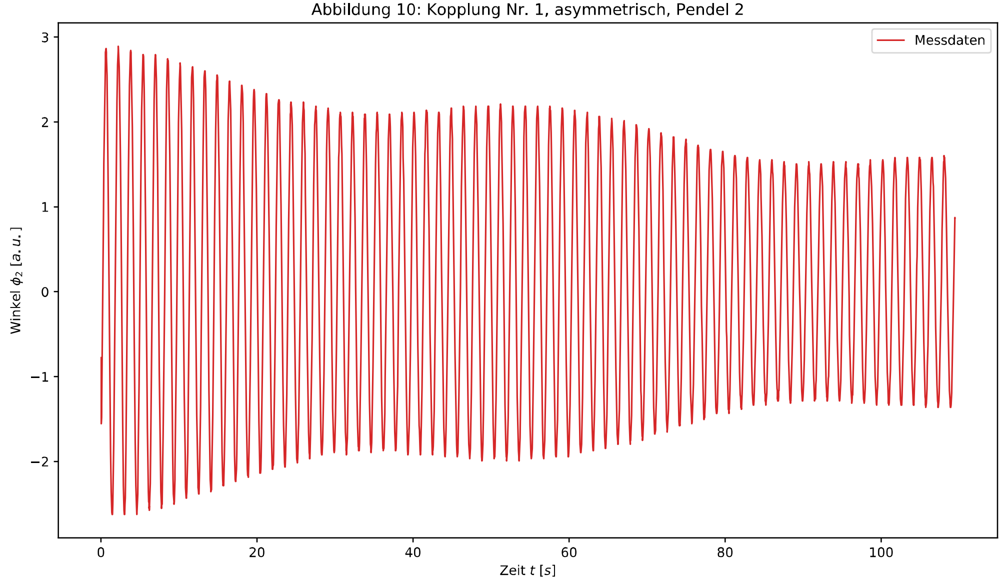


Abbildung 11: Kopplung Nr. 1, asymmetrisch, FT, Pendel 1

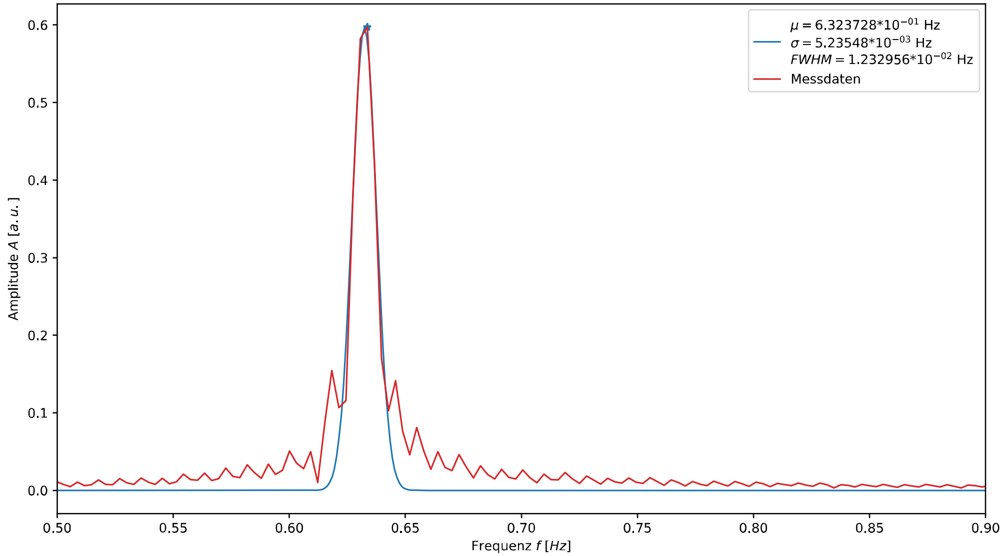


Abbildung 12: Kopplung Nr. 1, asymmetrisch, FT, Pendel 2

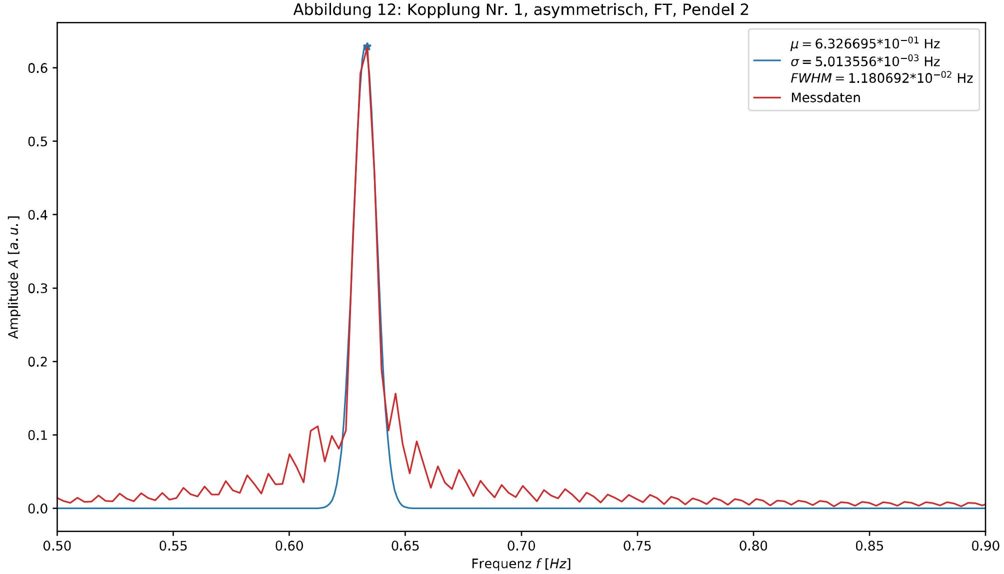


Abbildung 13: Kopplung Nr.1, Schwebung, Pendel 1

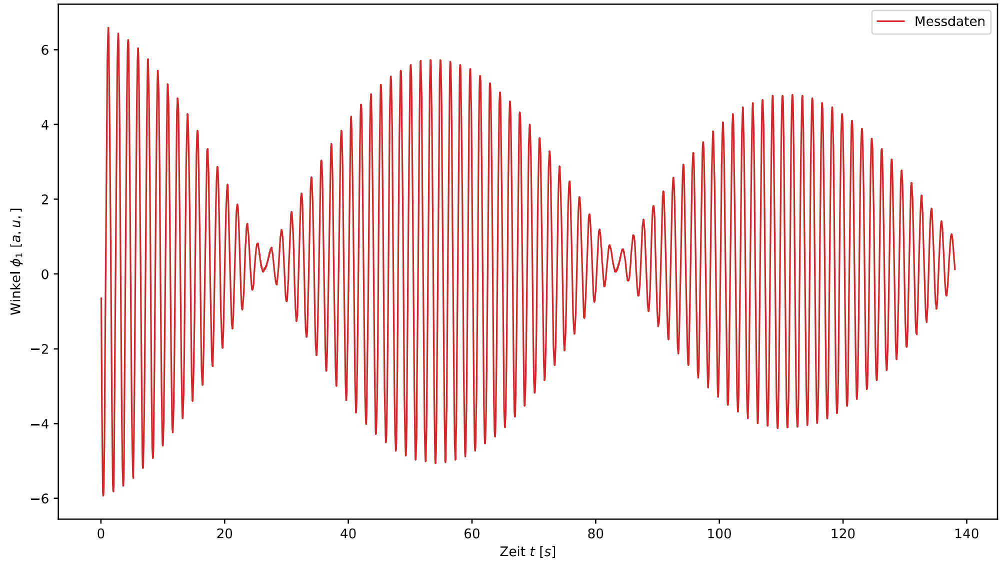


Abbildung 14: Kopplung Nr.1, Schwebung, Pendel 2

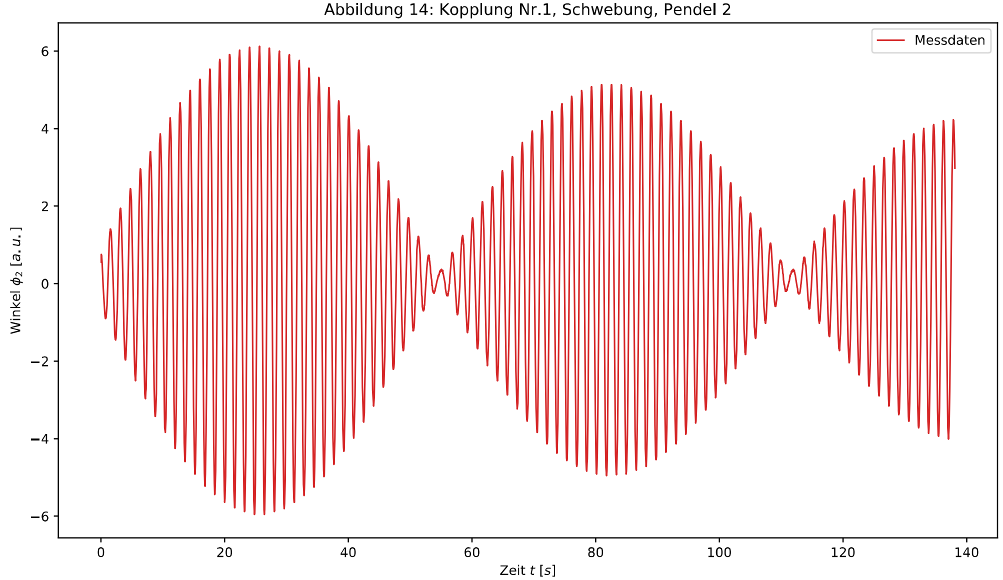


Abbildung 15: Kopplung Nr.1, Schwebung, FT, Pendel 1

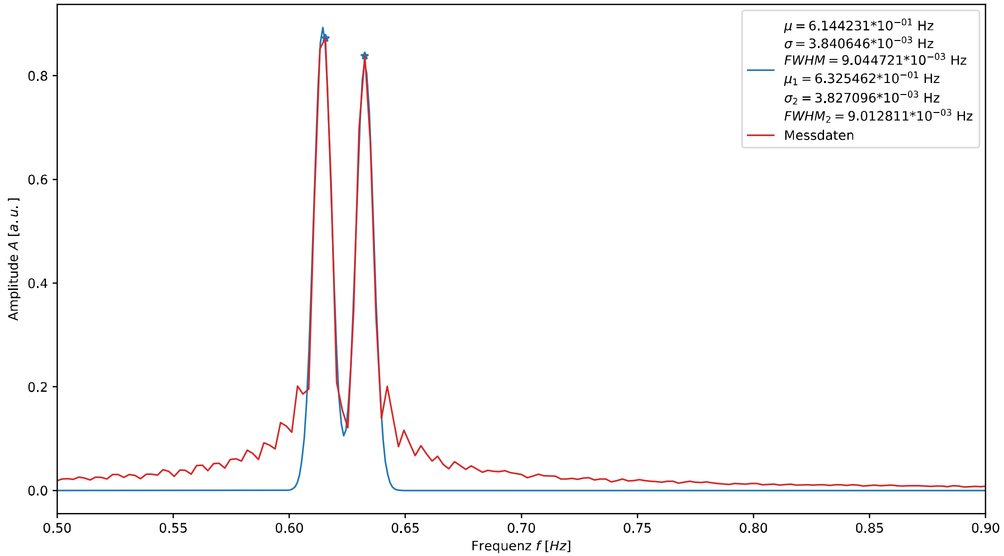


Abbildung 16: Kopplung Nr.1, Schwebung, FT, Pendel 2

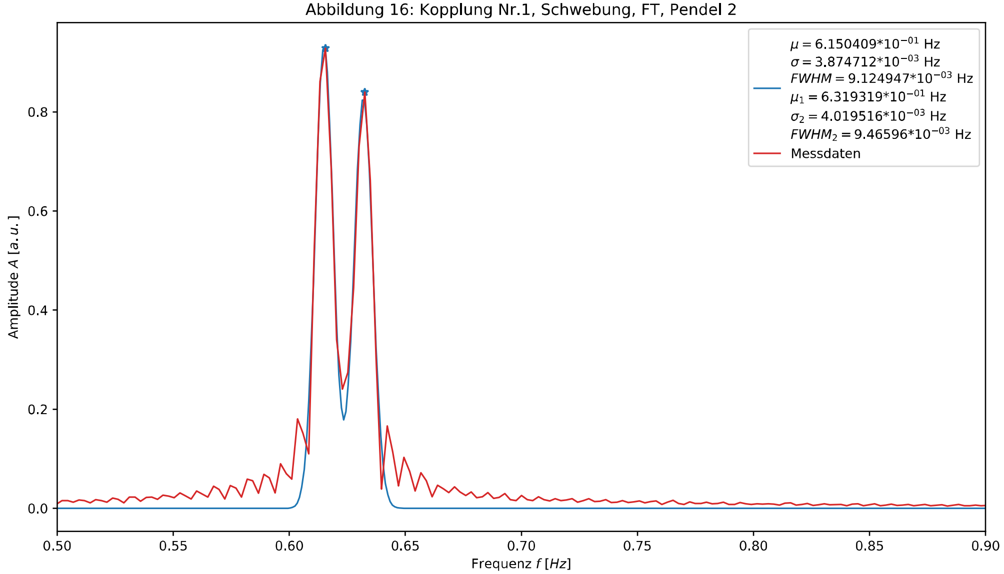


Abbildung 17: Kopplung Nr. 2, symmetrisch, Pendel 1

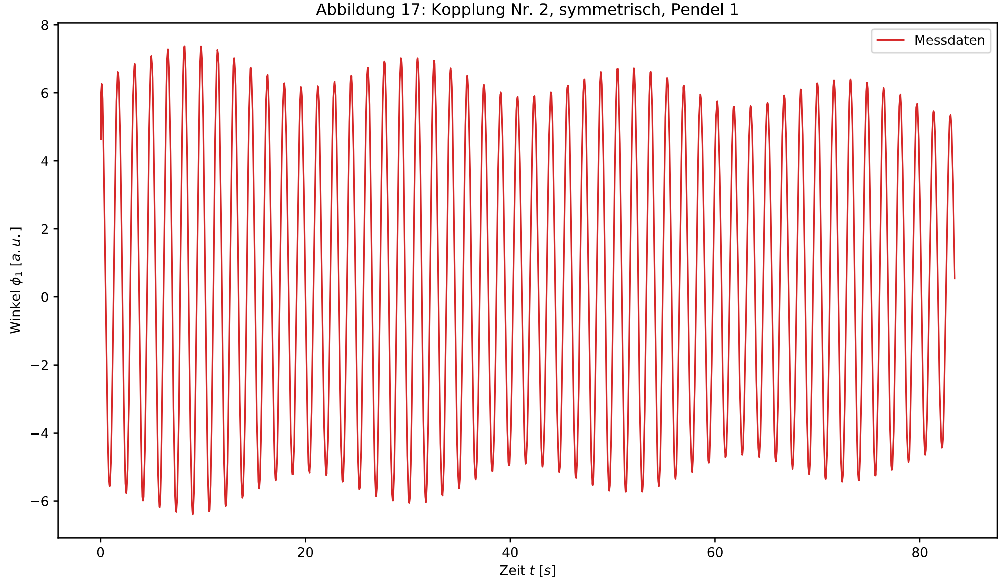
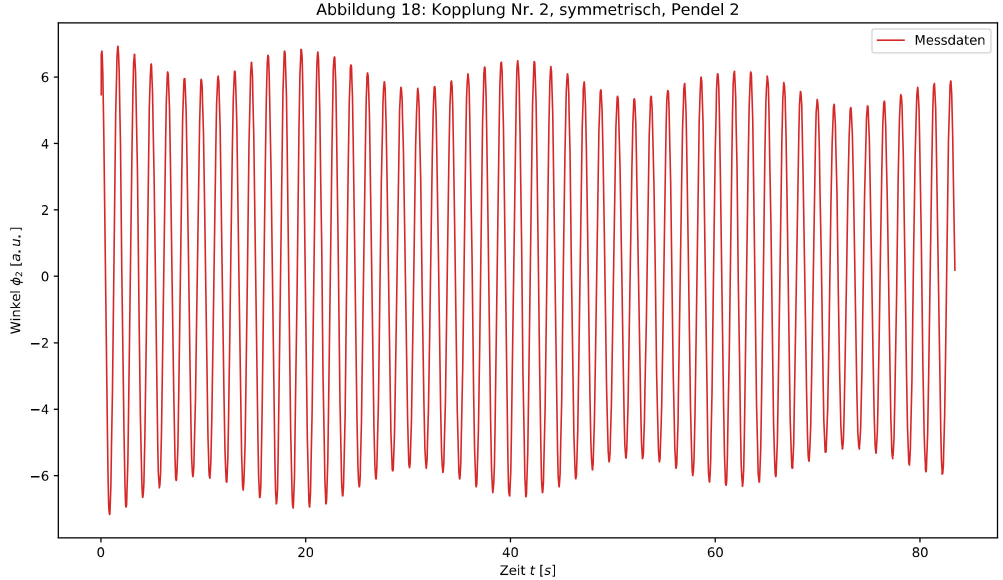


Abbildung 18: Kopplung Nr. 2, symmetrisch, Pendel 2



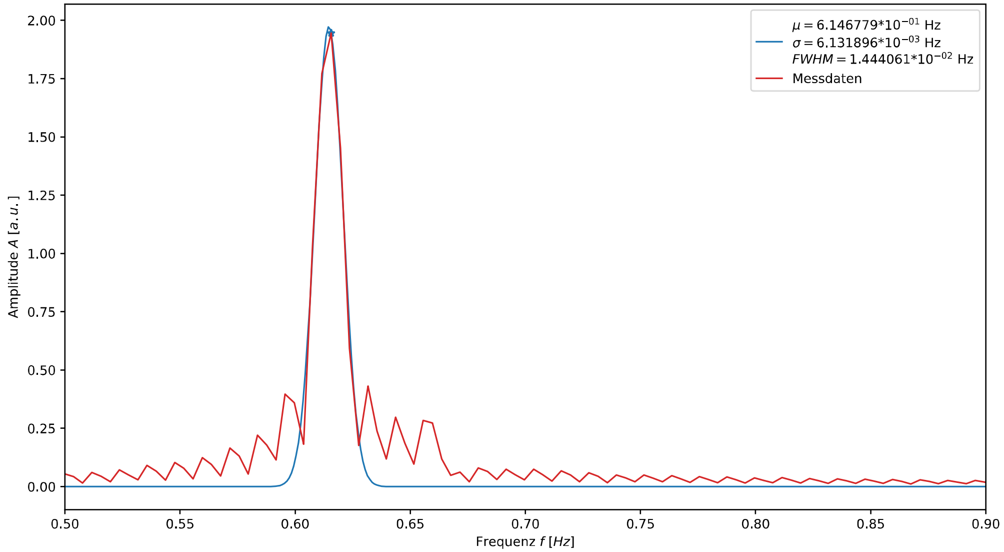


Abbildung 19: Kopplung Nr. 2, symmetrisch, FT, Pendel 1

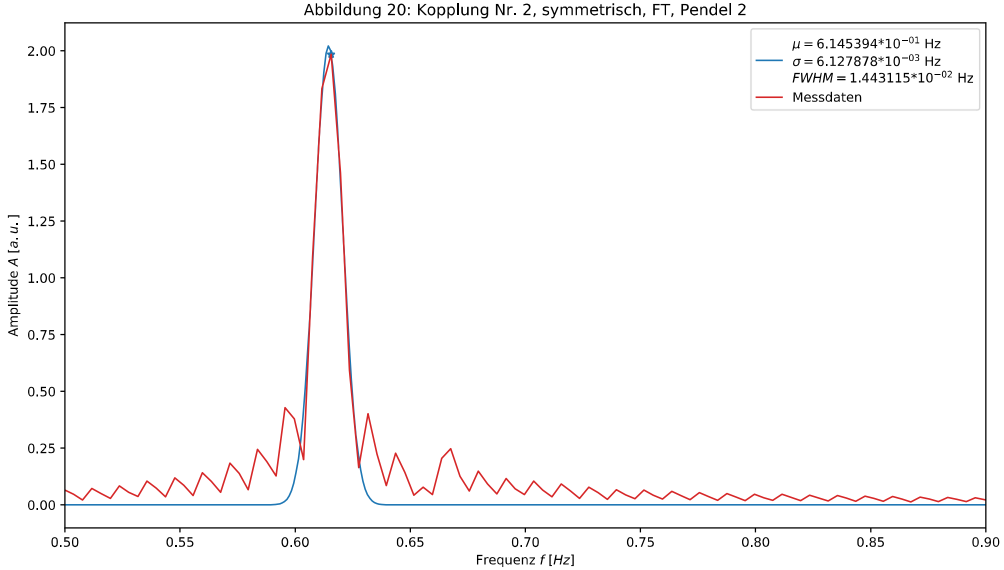


Abbildung 20: Kopplung Nr. 2, symmetrisch, FT, Pendel 2

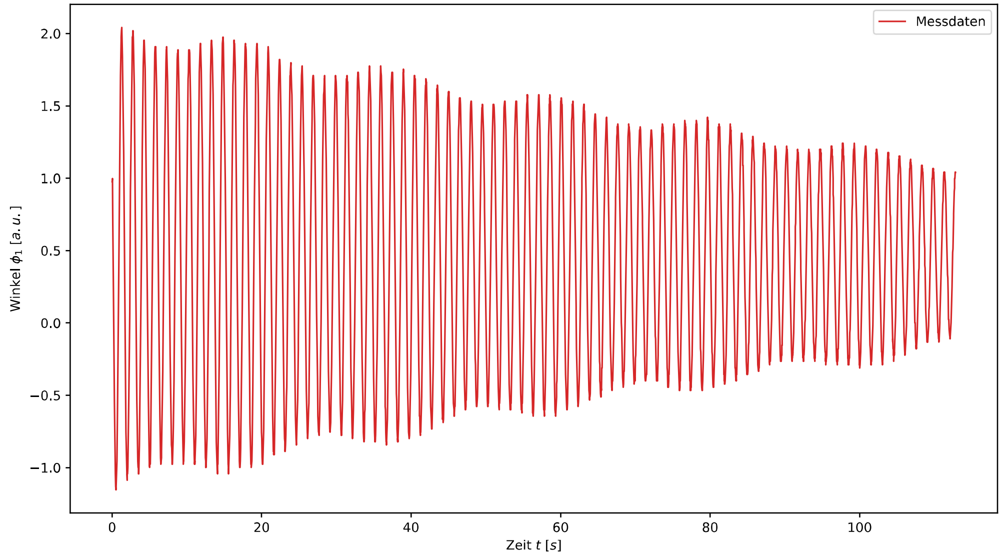


Abbildung 21: Kopplung Nr. 2, asymmetrisch, Pendel 1

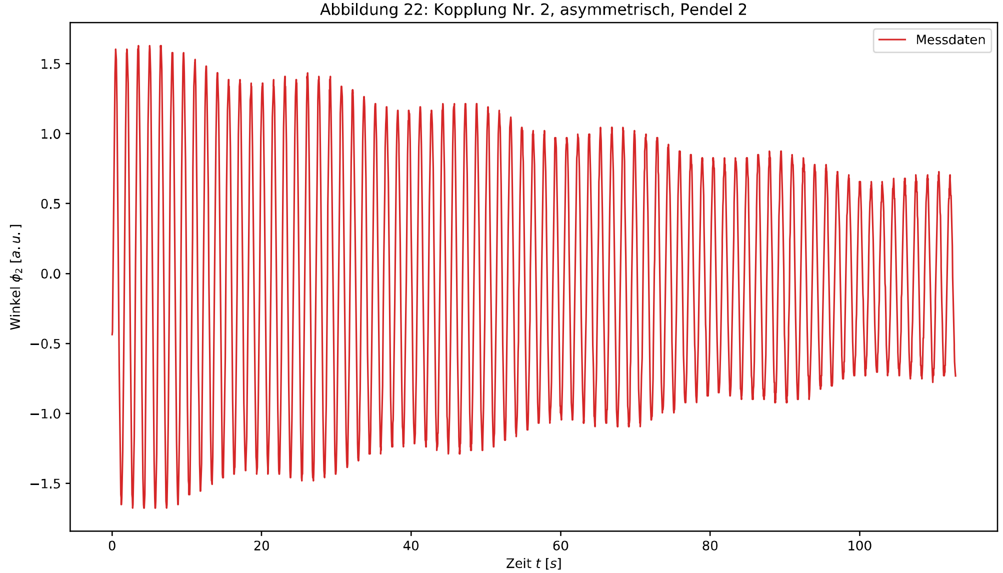


Abbildung 22: Kopplung Nr. 2, asymmetrisch, Pendel 2

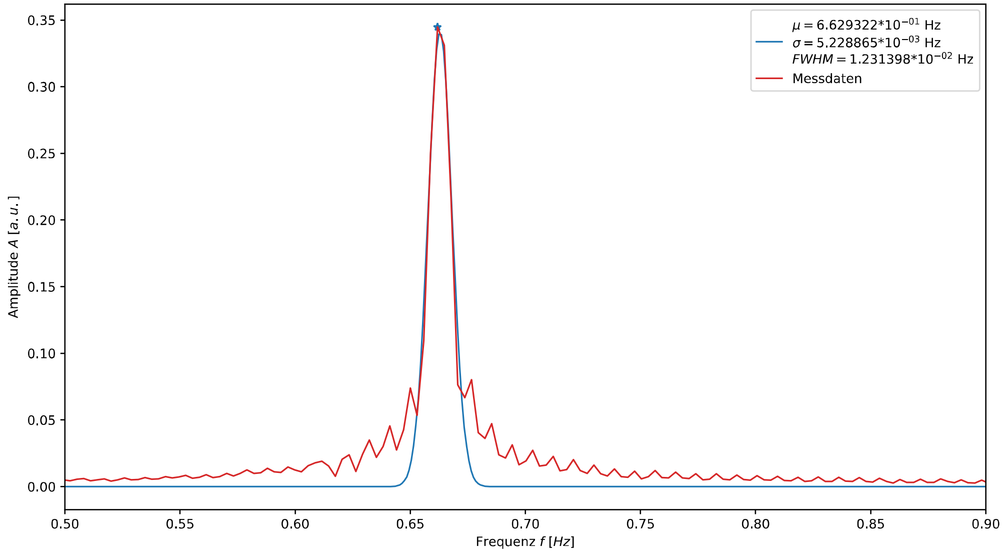


Abbildung 23: Kopplung Nr. 2, asymmetrisch, FT, Pendel 1

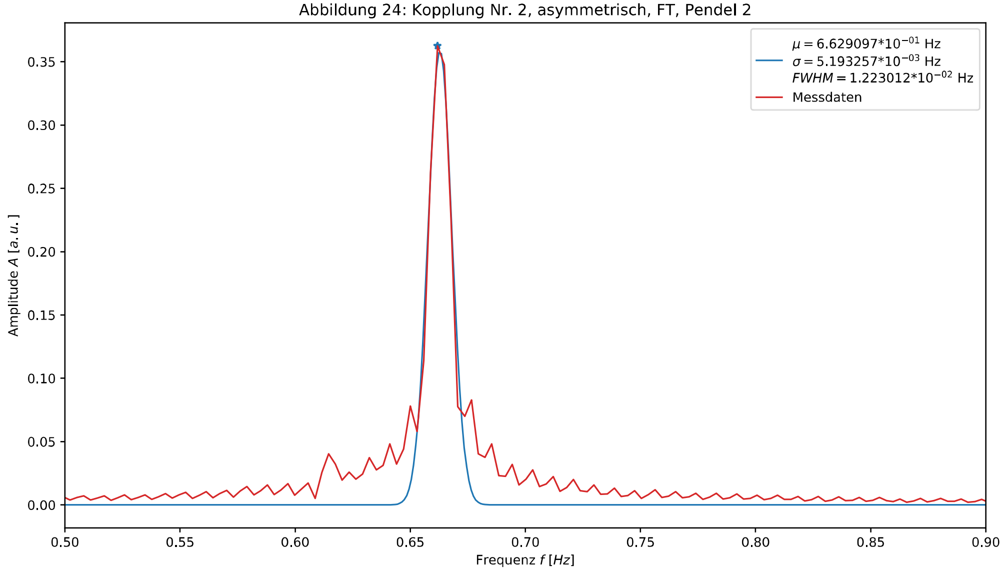


Abbildung 24: Kopplung Nr. 2, asymmetrisch, FT, Pendel 2

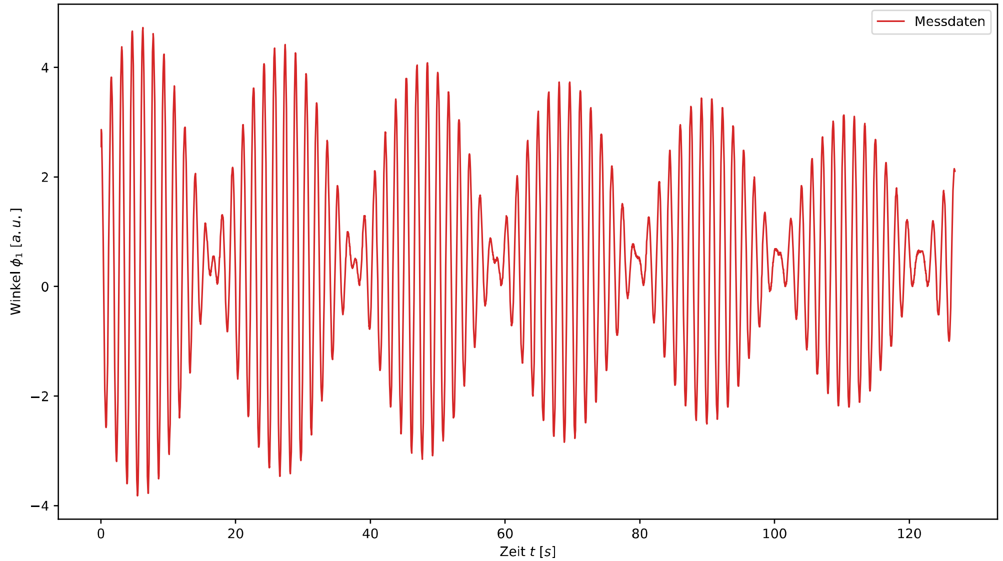


Abbildung 25: Kopplung Nr.2, Schwebung, Pendel 1

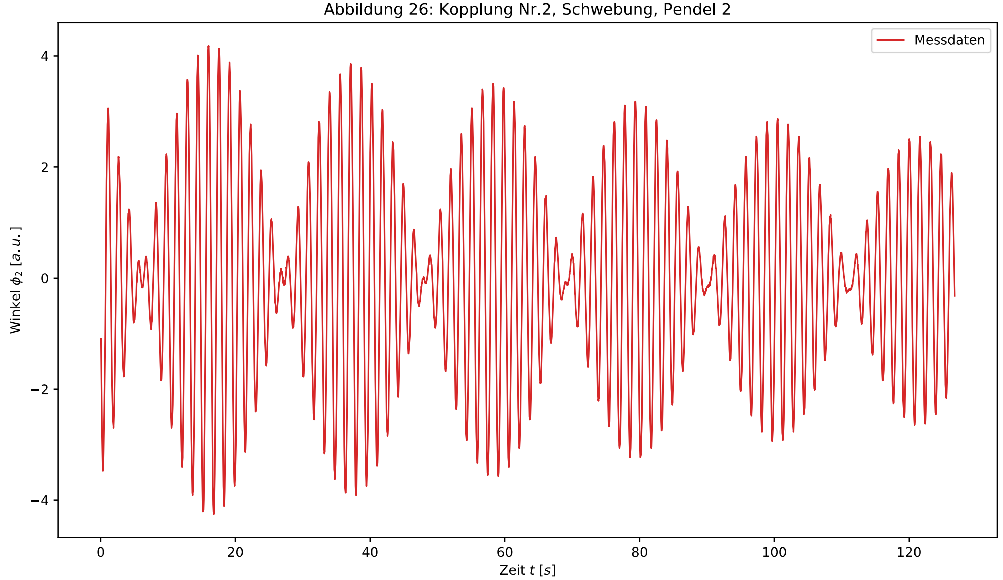


Abbildung 26: Kopplung Nr.2, Schwebung, Pendel 2

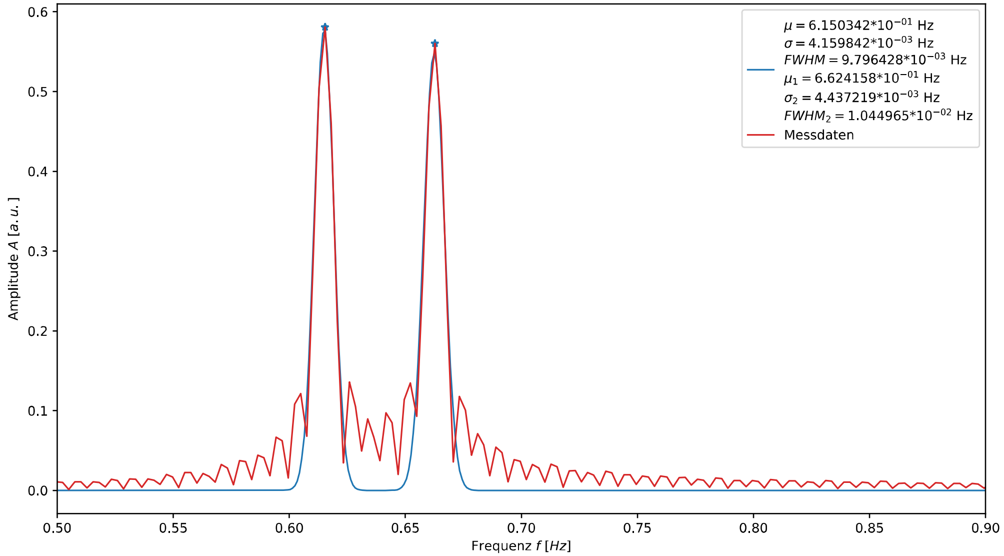


Abbildung 27: Kopplung Nr.2, Schwebung, FT, Pendel 1

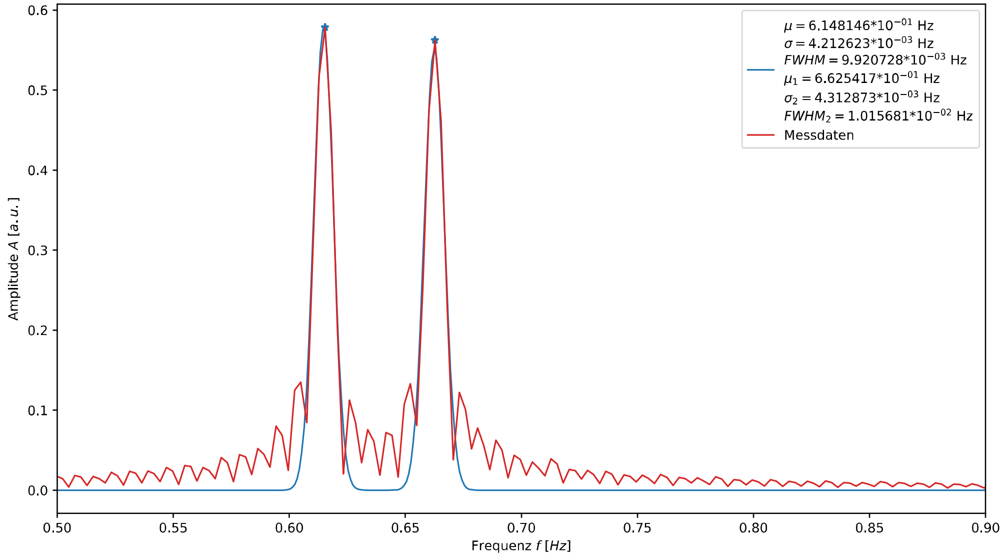


Abbildung 28: Kopplung Nr.2, Schwebung, FT, Pendel 2

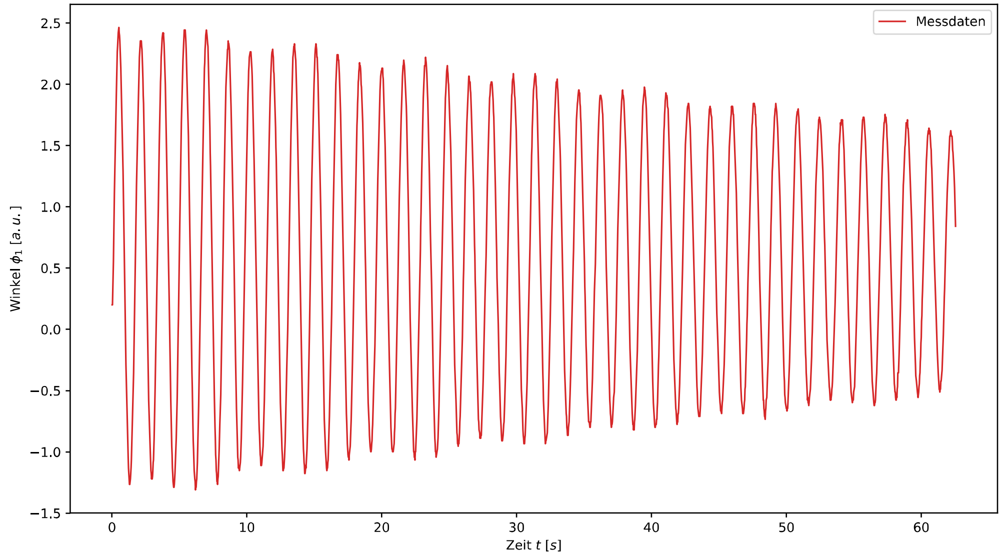


Abbildung 29: Kopplung Nr.3, symmetrisch, Pendel 1

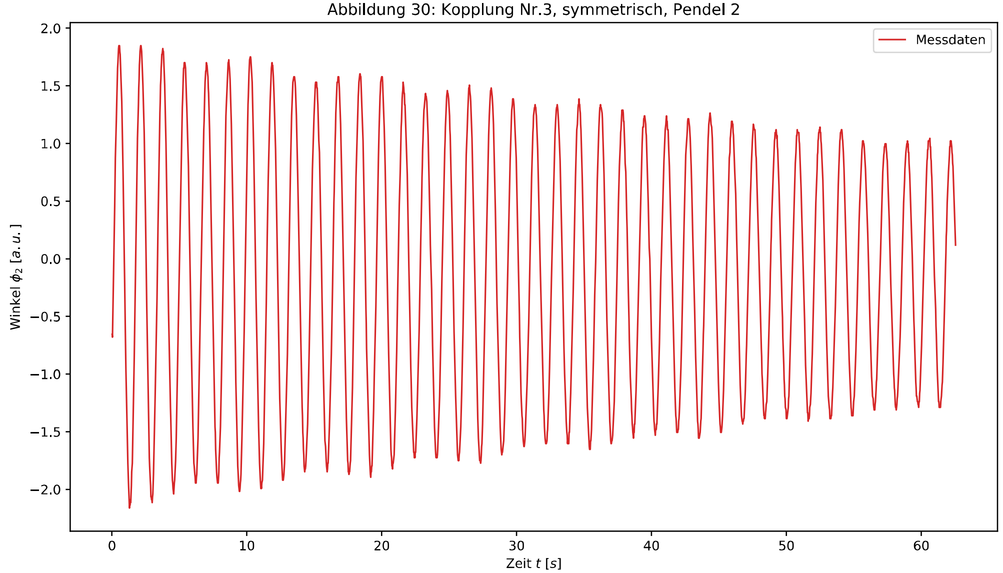


Abbildung 30: Kopplung Nr.3, symmetrisch, Pendel 2

Abbildung 31: Kopplung Nr.3, symmetrisch, FT, Pendel 1

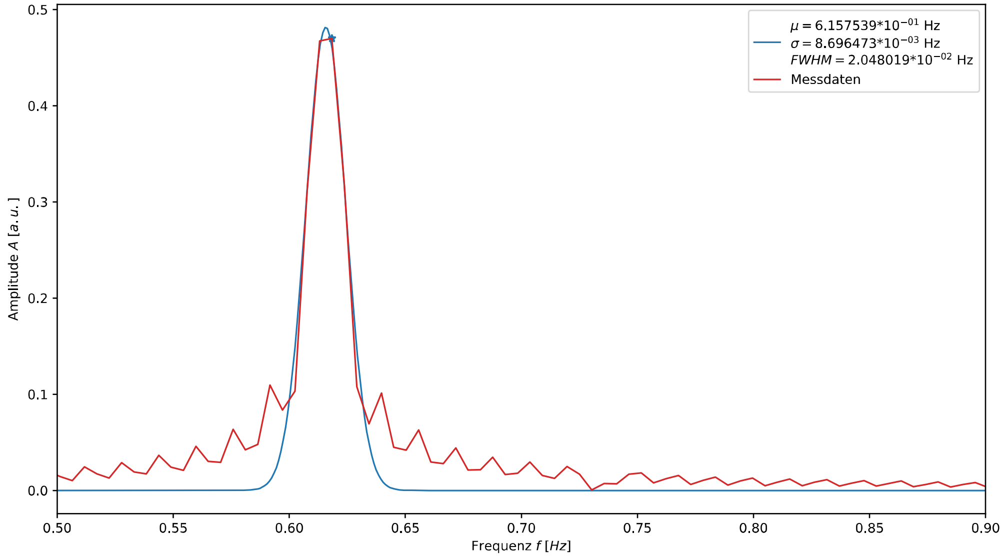


Abbildung 32: Kopplung Nr.3, symmetrisch, FT, Pendel 2

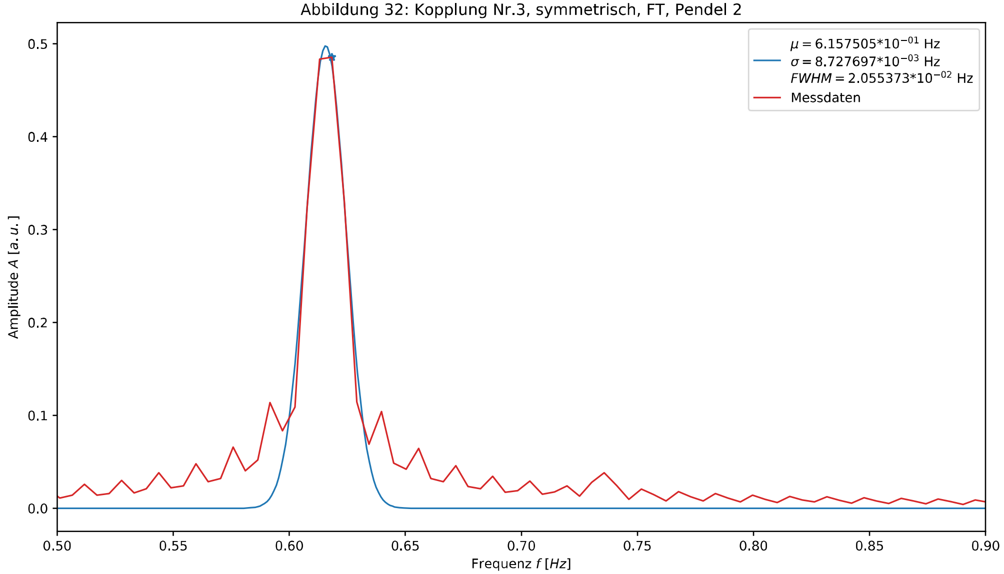


Abbildung 33: Kopplung Nr.3, asymmetrisch, Pendel 1

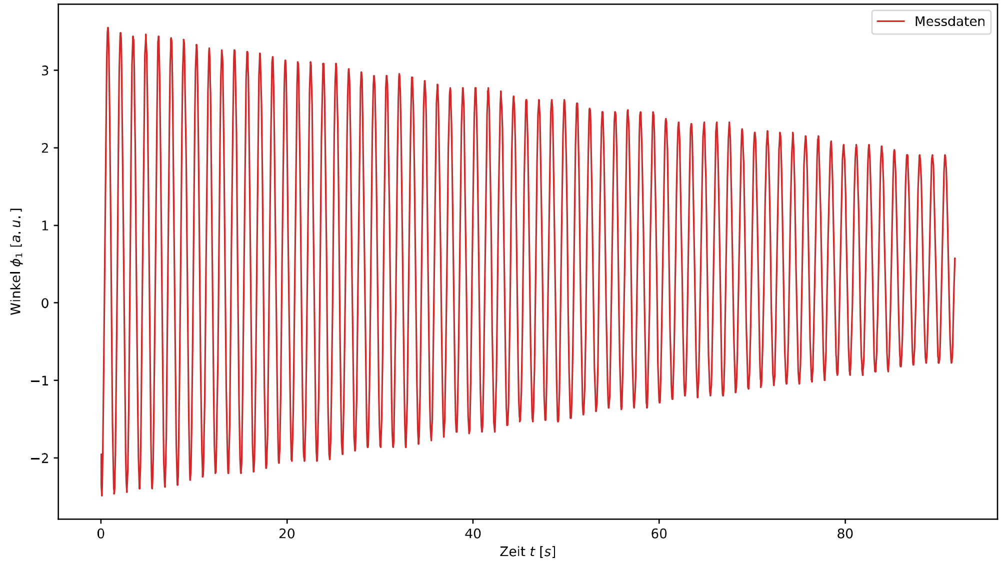


Abbildung 34: Kopplung Nr.3, asymmetrisch, Pendel 2

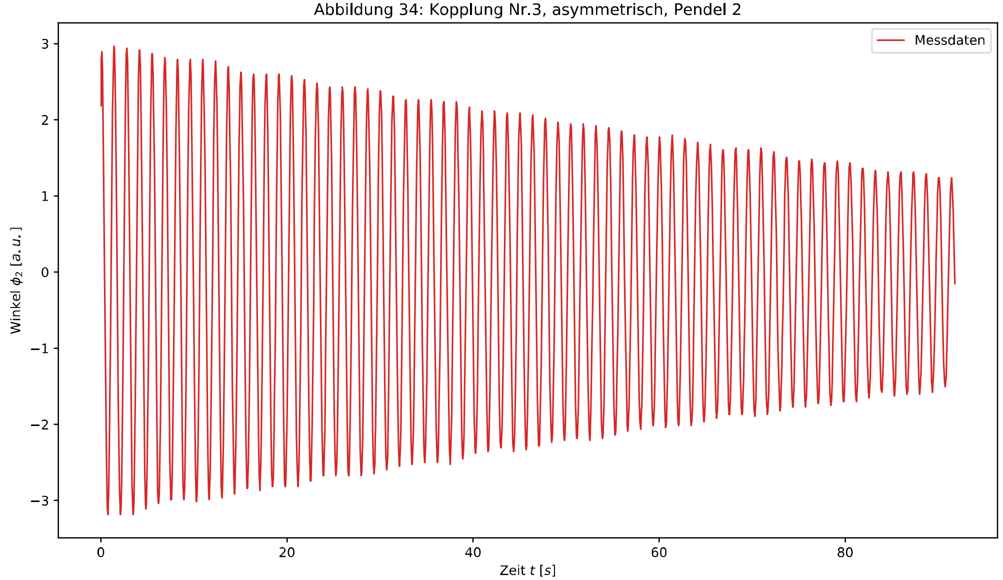


Abbildung 35: Kopplung Nr.3, asymmetrisch, FT, Pendel 1

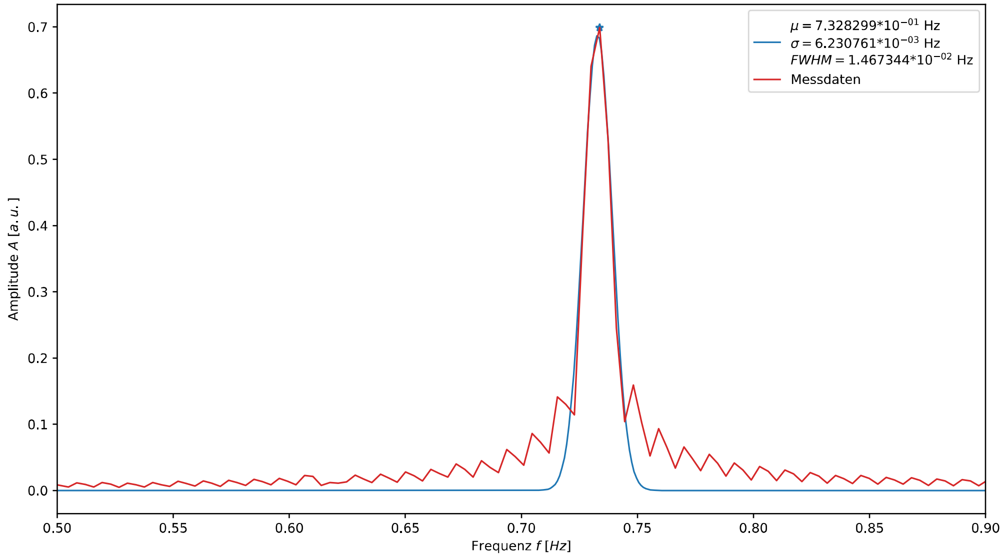


Abbildung 36: Kopplung Nr.3, asymmetrisch, FT, Pendel 2

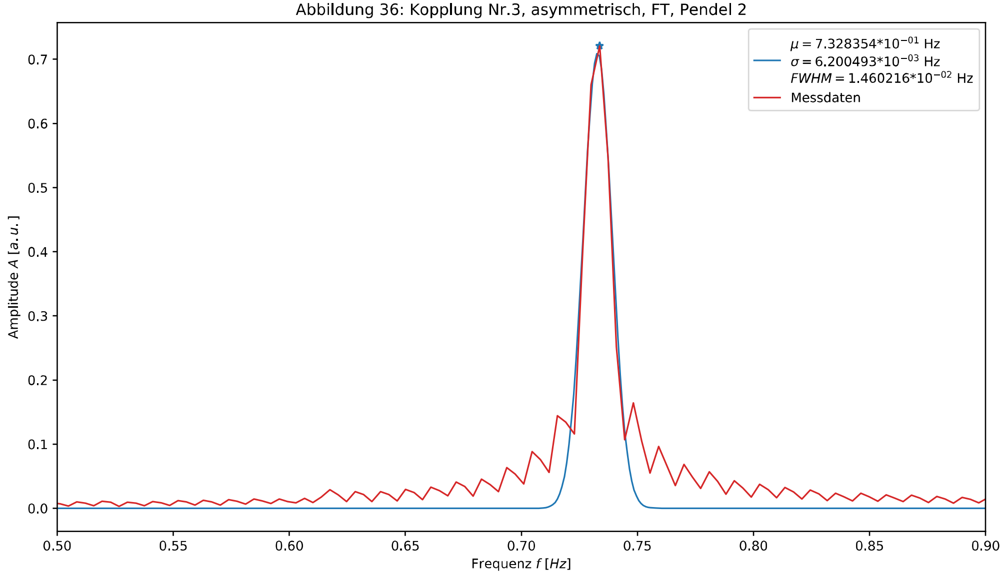


Abbildung 37: Kopplung Nr.3, Schwebung, Pendel 1

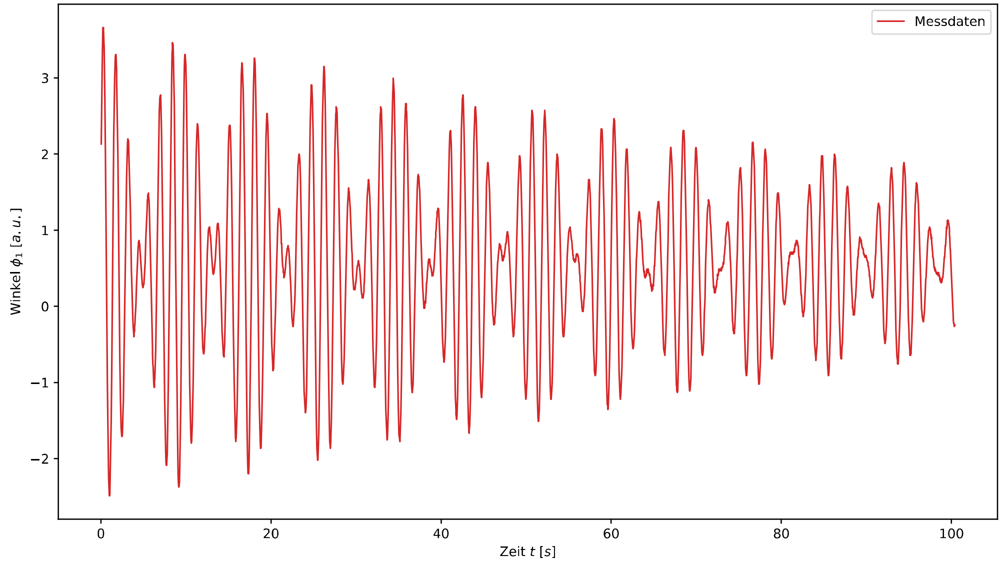


Abbildung 38: Kopplung Nr.3, Schwebung, Pendel 2

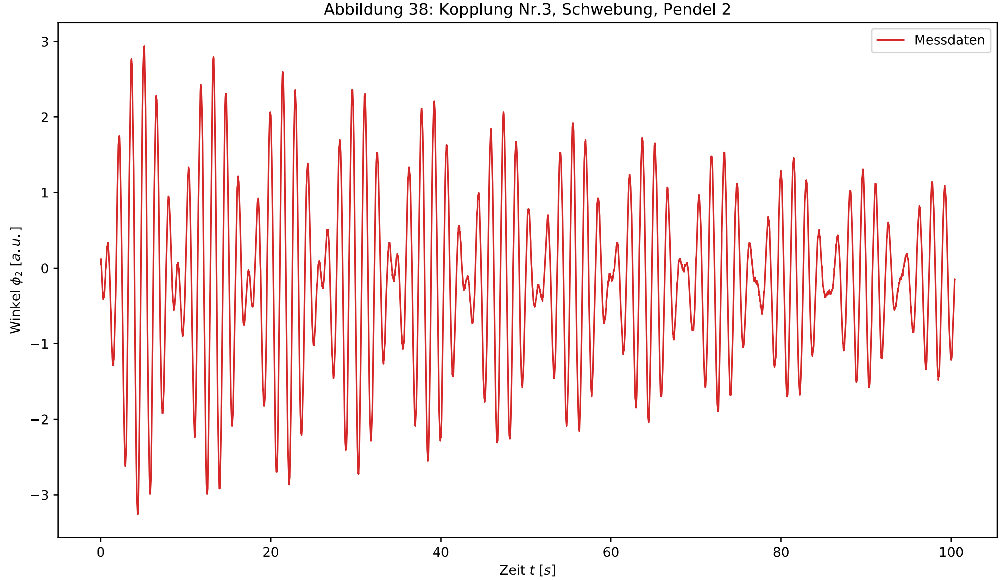


Abbildung 39: Kopplung Nr.3, Schwebung, FT, Pendel 1

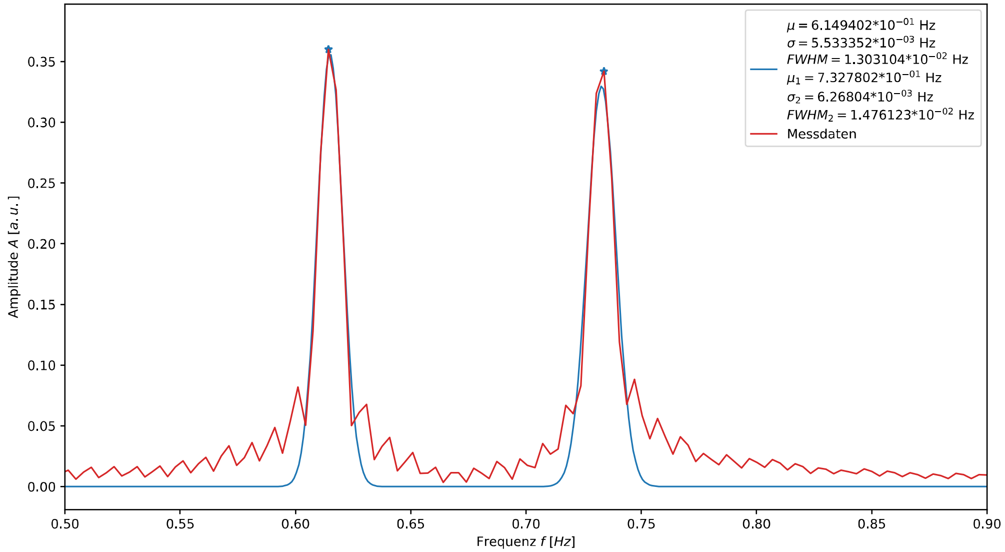


Abbildung 40: Kopplung Nr.3, Schwebung, FT, Pendel 2