Opt Reg 7

Problem 1

(1) $P = Q + A^T P (I + BR^{-1} B^T P)^{-1} A$

(2) $A^T P A - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q = 0$

Using

$(S + UTV)^{-1} = S^{-1} - S^{-1} U (T^{-1} + V S^{-1} U)^{-1} V S^{-1}$

with $B = U$, $R^{-1} = T$, $P B^T P = V$

on the expression

$(I + BR^{-1} B^T P)^{-1}$

we get

$(I + BR^{-1} B^T P)^{-1} = I - IB[(R^{-1})^{-1} + B^T P B]^{-1} B^T P$

$= I - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P$

and insert the result into (1)

$P = Q + A^T P (I - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P) A$

$= Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B) B^T P A$

$\Rightarrow A^T P A - P - A^T P B (R + B^T P B) B^T P A + Q = 0 \quad (2)$